全局RTS模型
Global RTS model

1.概述

- ◆在DEA模型中，我们主要介绍了4种典型的规模报酬形式：CRS、VRS、IRS和DRS。它们都是GRS的特殊形式而已。
- ◆它们主要是通过约束条件中λ的和来控制
- ◆问题在于，我们经常很难判断所面对的DMUs到底属于哪类规模报酬形式。
- ◆本节主要提供了一个根据实际数据来判定λ的和的下限和上限，即规模报酬形式的方法，全局RTS。

2.CRS和VRS假设存在的问题

◆在CRS模型下，如果DMU（x,y）是可行的，那么DMU（tx,ty）t>0,也是可行的。这在现实生产中往往显得极不合理。

◆在VRS前沿下，如果一个DMU有最小的投入或最大的产出，被证明它是VRS有效的。有的DMU在CRS下非常小，而在VRS下又是有效的。这些情况往往使得对DMU效率的评价结论差异较大，不合实际。

◆全局RTS即是利用GRS来减轻上述问题的缺陷。

◆利用投入角度的SBM模型加以阐述（其他方法类同）

3.投入角度SBM模型全局RTS

$$\theta^* = \min 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{io}}$$

subject to

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + s^-$$

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} - s^+$$

$$L \le \mathbf{e}\boldsymbol{\lambda} \le U$$

$$\boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{s}^- \ge \mathbf{0},\ \mathbf{s}^+ \ge \mathbf{0}.$$

GRS投入角度SBM

[SBM-I-CRS(0, ∞)]

$$\theta_o^{c*} = \min 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{io}}$$

subject to

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + s^-$$

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} - s^+$$

$$0 \le \mathbf{e}\boldsymbol{\lambda} \le \infty$$

$$\boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{s}^- \ge \mathbf{0},\ \mathbf{s}^+ \ge \mathbf{0}.$$

假定在CRS下求解最优效率

3.投入角度SBM模型全局RTS

$$\max(\min)\ \ \mathbf{e}\boldsymbol{\lambda}$$

subject to

$$\theta_o^{c*} = 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{io}}$$

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s}^-$$

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}^+$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq 0,\ \mathbf{s}^- \geq 0,\ \mathbf{s}^+ \geq 0\,.$$

接着，保持最优效率下求解λ的和的最小或最大化问题，即寻找最优的λ和

让最大化和最小化目标函数设为 $\sigma_o^{\max}$ and $\sigma_o^{\min}$

我们定义

$$\sigma_o^* = \sigma_o^{\max}\ \ (\text{if } \sigma_o^{\max} < 1)$$

$$\sigma_o^* = \sigma_o^{\min}\ \ (\text{if } \sigma_o^{\min} > 1)$$

$$\sigma_o^* = 1\ \ (\text{if } \sigma_o^{\max} \geq 1 \geq \sigma_o^{\min})$$

小中取大
大中取小

最后再定义

$$\sigma^{\min *} = \min\left\{\sigma_o^* \middle| o = 1,\ldots,n\right\}$$

$$\sigma^{\max *} = \max\left\{\sigma_o^* \middle| o = 1,\ldots,n\right\}$$

3.投入角度SBM模型全局RTS

可以证明，有下列两性质成立：
（1）如果GRS的下限和上限为 $L=\sigma^{\min^*}$ and $U=\sigma^{\max^*}$，则效率值与CRS条件等同，即 $L=0$ and $U=\infty$，即CRS的λ和取值范围可从 $(L, U)=(0, \infty)$ 缩减至 $(\sigma^{\min^*}, \sigma^{\max^*})$
（2）如果GRS的下限和上限分别为 $(L=\sigma^{\min^*}, U=1)$ and $(L=1, U=\sigma^{\max^*})$ 则和DRS (L=0, U=1) and IRS (L=1, U=∞) 的结果等同。

4.上下限的决定方法

本模型的目的就是根据实际数据来决定上下限，为了充分利用数据的特性，我们计算下限L$\sigma_o^* < 1$ 和上限U$\sigma_o^* > 1$ 的算术平均值

$$L^* = \frac{1}{n_1} \sum_{\sigma_o^* < 1} \sigma_o^* \quad \text{and} \quad U^* = \frac{1}{n_2} \sum_{\sigma_o^* > 1} \sigma_o^*$$

n1和n2分别对应于下限L $\sigma_o^* < 1$和上限U$\sigma_o^* > 1$ 的DMU数量

也可以用中值（median)表示。且中值可以消除异常值的影响。

5.GRS模型的规模报酬

第一步，解每个DMU的GRS模型，得DMU的目标值如下

$$\bar{\mathbf{x}}_o = \mathbf{x}_o - \mathbf{s}^{-*} \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{y}}_o = \mathbf{y}_o + \mathbf{s}^{+*}$$

第二步，形成新的数据集 $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}})$，即GRS所有的DMU都是有效的。
求解下列两线性规划来决定RTS的特征：

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_o^* &= \min \xi - \eta \\
st.\quad & \bar{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} - \xi \bar{\mathbf{x}}_o \le 0 \\
& \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} - \eta \mathbf{y}_o \ge 0 \\
& \mathbf{e}\boldsymbol{\lambda} - \eta = 1 \\
& \boldsymbol{\lambda} \ge 0, \quad \xi \text{ and } \eta \text{ are free}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\tau}_o^* &= \max - \xi + \eta \\
st.\quad & \bar{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} - \xi \bar{\mathbf{x}}_o \le 0 \\
& \bar{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\lambda} - \eta \bar{\mathbf{y}}_o \ge 0 \\
& -\mathbf{e}\boldsymbol{\lambda} + \eta = 1 \\
& \boldsymbol{\lambda} \ge 0, \xi \text{ and } \eta \text{ are free}
\end{aligned}$$

Min tau

Max tau

5.GRS模型的规模报酬

第三步，判断特征。

（1）如果 $\overline{\tau}_o^* < 0$ ，最优DMU对应于IRS

（2）如果 $\underline{\tau}_o^* > 0$，最优DMU对应于DRS

（3）如果 $\overline{\tau}_o^* \geq 0 \geq \underline{\tau}_o^*$，最优DMU对应于CRS

如果GRS下DMU最优生产对应于CRS，则它是最优生产规模。

与GRS的判断相似，我们也可以判断VRS下的规模报酬问题

6.全局RTS模型

径向GRTS

GlobalRTS-Radial-I
GlobalRTS-Radial-O

非径向GRTS

GlobalRTS-SBM-I
GlobalRTS-SBM-O
GlobalRTS-SBM-NonOrient