

# 规模弹性

## Scale elasticity DEA model



## 1.基本概念及原理

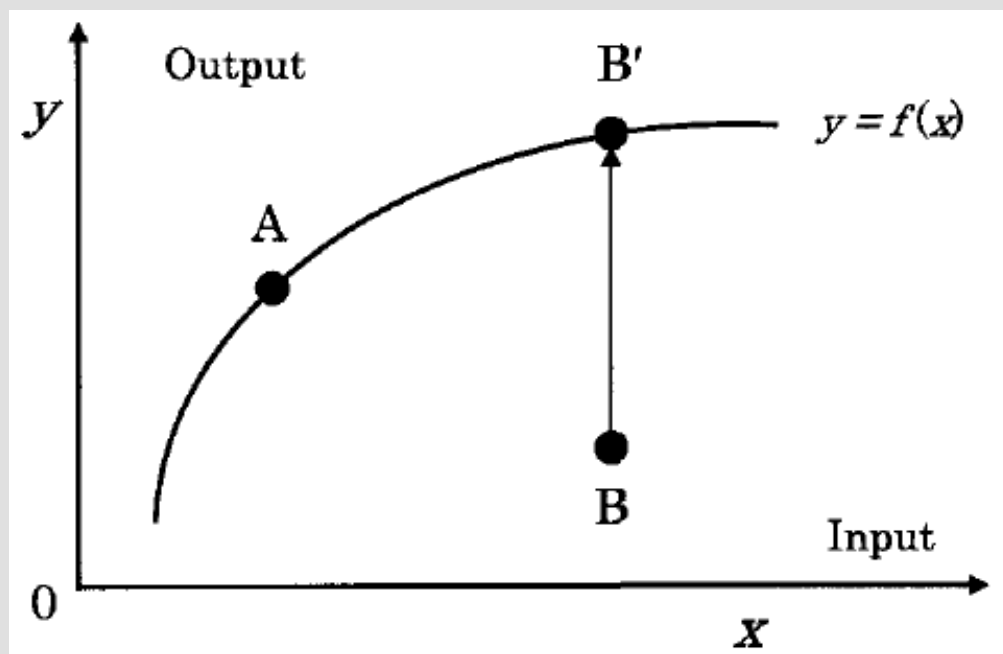
- ◆ 弹性：经济学中的主要有价格弹性、需求弹性、收入弹性、交叉弹性等概念，解释为某种商品的（需求、供给、收入等）相对于价格或其他变动的比值或敏感程度。
- ◆ 规模弹性：投入变量的变动所引起的产出变量变化的百分比或敏感程度。
- ◆ 对于单投入和单产出而言，可写成边际产品MP与平均产品AP的比值。  
即

$$\rho = MP/AP = \frac{dy}{dx} / \frac{y}{x}$$

- ◆ 如果  $\rho > 1$ ,  $\rho = 1$  and  $\rho < 1$ ，其对应着递增、不变和递减RTS
- ◆ 但是DEA是非参数方法，没有显性生产函数，并不能直接求出。



## 2.有效和无效DMU的规模弹性



A点是有效点，对其规模弹性的计算遵循BCC模型的变换即可。

B点是非有效点，必须向上投影到B'点，再参照A点进行规模弹性计算。



### 3.DEA规模弹性的求解步骤

- ◆ 对于多投入多产出，遵循BCC生产可能性集

$$P_{BCC} = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, e\lambda = 1, \lambda \geq 0\}$$

- ◆ 求解BCC模型及其最优解和松弛

$$\begin{array}{ll} \text{[BCC-O]} & \theta_{BCC}^* = \max \theta_{BCC} \\ \text{subject to} & x_o = X\lambda + s^- \\ & \theta_{BCC} y_o = Y\lambda - s^+ \\ & e\lambda = 1 \\ & \lambda \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0 \end{array}$$

- ◆ 最优目标值  $x_o^* \leftarrow x_o - s^{-*}$ ,  $y_o^* \leftarrow \theta_{BCC}^* y_o + s^{+*}$ ，即是说求解规模弹性，首先必须以其目标值为对象



### 3.DEA规模弹性的求解步骤

◆然后，把BCC转成对偶规划

$$\begin{aligned} \text{[Dual]} \quad & \min \mathbf{v} \mathbf{x}_o - w \\ \text{subject to} \quad & -\mathbf{v} \mathbf{X} + \mathbf{u} \mathbf{Y} + \mathbf{e} w \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{u} \mathbf{y}_o = 1 \end{aligned}$$

◆存在对偶最优解满足  $\mathbf{v}^* \mathbf{x}_o - w^* = 1$

◆定义虚拟投入和虚拟产出为  $\xi = \mathbf{v}^* \mathbf{x}$  and  $\eta = \mathbf{u}^* \mathbf{y}$

$$-\xi + \eta + w^* = 0$$

$$\text{MP} = \frac{d\eta}{d\xi} = 1 \quad \text{AP} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\eta}{\eta + w^*}$$



### 3.DEA规模弹性的求解步骤

- ◆ 由于  $uy_o = 1$  和  $\xi = v^*x$  and  $\eta = u^*y$  , 所以  $\eta = 1$
- ◆ 由此, 规模弹性为  $\rho = 1 + w^*$
- ◆ 在很多情况下, 由于  $w^*$  的值不唯一, 这对规模弹性的求解带来困难。处理办法为: 对于不唯一的  $w^*$ , 计算出其值的上下界, 对上下界值取平均。



## 4.DEA规模弹性的涉及模型

由于其是基于BCC模型的延伸，所以仅有两类模型

**Elasticity-I**  
**Elasticity-O**

DEA BCC模型下的缺陷

- (1) 虽然规模弹性的解释与经济学相同，但由于解不唯一导致无法识别，平均后也很难解释。
- (2) 只能依赖于BCC模型的生产可能性集，还无法扩展
- (3) 规模报酬阶段的判断与规模弹性值间不能一一对应。

