Zad. 1 Dla wektorów $\mathbb{x} = (x_1, x_2)$ oraz $\mathbb{y} = (y_1, y_2)$ ze zbioru $\mathbb{R}^2$ i skalara $\alpha \in \mathbb{R}$, sumę wektorów i iloczyn wektora przez skalar definiujemy wzorami:

$$\mathbb{x} + \mathbb{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$$

$$\alpha \cdot \mathbb{x} = (\alpha x_1,\ \alpha x_2)$$

Pokazać, że $\mathbb{R}^2$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią wektorową.

Zad. 2 Sprawdzić, czy niżej podane zbiory ze wskazanymi działaniami są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{R}$:

a) $\mathbb{R}^2$ ze zwykłym mnożeniem wektorów przez skalary i z dodawaniem określonym wzorem

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x',\ y + 2y')$$

b) $\mathbb{R}^2$ ze zwykłym dodawaniem, ale z mnożeniem przez skalary określonym wzorem: $r \odot (x, y) = (r x,\ r^2 y)$.

Zad. 3 Pokazać, że zbiór $\mathbb{R}[x]$ wielomianów nad ciałem $\mathbb{R}$ z dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianów przez skalary jest przestrzenią wektorową.

Zad. 4. Dana jest przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}[x]$ - zbiór wielom. rzeczyw. Niech n będzie nieujemną liczbą całkowitą i niech $\mathbb{R}_n[x]$ będzie zbiorem wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n. Pokazać, że $\mathbb{R}_n[x]$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}[x]$.

Zad. 5. Sprawdzić, który z niżej podanych zbiorów jest podprzestrzenią danej przestrzeni wektorowej:

a) $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ w $\mathbb{R}^2$

b) $\{(x, x-1) : x \in \mathbb{R}\}$ w $\mathbb{R}^2$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geqslant 0\}$ w $\mathbb{R}^2$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ w $\mathbb{R}^3$

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x,\ z = 1\}$ w $\mathbb{R}^3$

Zad. 6 Wektor $\mathbb{v}$ przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów v_1 i v_2:

a) $v = (1, 1)$, $v_1 = (1, -3)$ $v_2 = (1, -2)$

b) $v = (1, 3)$ $v_1 = (2, 3)$ $v_2 = (3, 4)$

c) $v = (5, 8)$ $v_1 = (7, 6)$ $v_2 = (5, 4)$

Zad. 7 Dane są wektory $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Sprawdzić, który z wektorów b_1, b_2 należy do zbioru $\mathcal{L}(v, u)$

Zad. 8 Sprawdzić, czy wektor $\mathbb{v}$ jest kombinacją liniową wektorów z podanego zbioru S, gdy:

a) $\mathbb{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\mathbb{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $\mathbb{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) $\mathbb{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

9. Wyznaczyć zbiór generatorów przestrzeni rozwiązań jednorodnego układu równań:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_4 = 0 \end{cases}$