SPRAWOZDANIE – LABOLRATORIUM NR 5

Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej

metodą potęgową z redukcją Hotellinga

29.03.2020r.

Przemysław Rodzik

1. **Wstęp teoretyczny**

Wektorem własnym macierzy **A** nazywamy taki wektor x, który jest nietrywialnie rozwiązaniem równania:

(A – λ**I**) \* x = 0

Nazywany jest problemem własnym macierzy. Takie rozwiązanie istnieje wtedy gdy:

det(A – λ**I**) = 0

Gdy obliczymy powyższy wyznacznik, otrzymamy wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej **A** stopnia n, zmiennej λ, gdzie n jest wymiarem macierzy.

Metoda potęgowa (iteracji wektorów) – polega na wyznaczeniu kolejnych, coraz dokładniejszych przybliżeń wektora własnego xi, który odpowiada wartości własnej λi o największym module.

Zakładamy wtedy że:

|λ1| > |λ2| > … > |λn|

Początkowy wektor jest kombinacją liniową wektorów własnych, w każdej iteracji mnożymy równanie stronami przez naszą macierz **A** i przekształcamy.

x1 = a1 \* v1 + … + an \* vn

Otrzymujemy:

Przy q -> ∞ otrzymamy .

Na podstawie rozwiązań można dojść do wzoru na dominująca wartość własną:

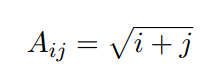
Gdy zredukujemy naszą macierz do macierzy składającej się z wektorów własnych oprócz który jest zerowy, możemy obliczyć pozostałe wektory własne.

Dla redukcji Hotellinga równanie sprowadza się do:

Wi = Wi-1 – λi-1 xi-1 xi-1T.

Ostatni wektor poddawany transponowaniu jest lewym wektorem lecz dzięki symetryczności jest taki sam jak prawo stronny wektor.

1. **Zadanie do wykonania**

**Wypełniamy naszą macierz **A**  za pomocą kryterium:

W celu porównania wyników zdiagonalizowaliśmy macierz za pomocą funkcji tred2 i tqli z biblioteki *Numerical Recipes*.

W dalszej części zadania dla każdej wartości własnej λq, wykonaliśmy i = 8 iteracji zwiększających dokładność oszacowania. Każda iteracja obejmowała:

Przybliżenie wektora własnego:

xqi+1 = Wq xqi.

Obliczenie wartości własnej:

Znormalizowanie i przypisanie przybliżenia wektora własnego:

Po zakończonych iteracjach, stosowaliśmy redukcje Hotellinga:

Wq+1 = Wq – λq xq xqT.

Potem przechodzono do następnego wektora.

1. **Wyniki**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Wyniki otrzymane za pomocą biblioteki *Numerical recipes* | Wynikio otrzymane metodą potęgową |
| 1 | 19.7862 | 1.9786167e+01 |
| 2 | −0.712341 | -7.1234035e-01 |
| 3 | −0.0133178, | -7.1234035e-01 |
| 4 | −0.00033598 | -1.3317165e-02 |
| 5 | −7.10793e−06 | -3.3530666e-04 |
| 6 | 4.43579e−07 | -6.6027128e-06 |
| 7 | −4.02198e−07 | 8.4965734e-07 |

Analizują wartości z tabeli widzimy że pierwsze wartości pokrywają się z oszacowanymi wartościami, lecz w miarę przesuwania się do dalszych przybliżeń widać coraz większą rozbieżność o prawidłowych wartości. Wynika to miedzy innymi z tego że dokładność zależy od ilości iteracji i obliczamy jedynie przybliżenie. Wykorzystujemy poprzedni wynik do obliczenia następnej przybliżonej wartości co powoduje nawarstwianie się błędu, co z połączeniu z innymi rzędami wartości może prowadzić do dużego błędu.

Istotnym krokiem jest normalizacja wektora własnego, ponieważ wartości kolejnych przybliżeń mogą się szybko zmieniać co może prowadzić do nawarstwiania się błędu i normalizacja jest niezbędna aby był spełniony warunek redukcji macierzy:

xq \* vT = 1

Co w przypadku redukcji Hotellinga sprowadza się do postaci:

xq \* xq T = 1

Brak normalizacji spowodowałby nieprawidłową redukcję macierzy, co doprowadziło by do błędnych wyników.

1. **Wnioski**

Metoda potęgowa jest dobrym i szybkim sposobem na wyznaczenia dominującej wartości macierzy. Stosując redukcje Hotellinga można rozszerzyć to do obliczania kolejnych wartości własnych, trzeba mieć na uwadze nawarstwiające się błędy i zależność kolejnych przybliżeń od poprzedników.

Normalizacja jest niezbędna aby można było zastosować redukcje Hotellinga. Szybki wzrost wartości własnych w kolejnych iteracjach może się przyczynić do dużego błędu pomiaru, w czym pomaga nam normalizacja wektorów.