

ACURÁCIA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA EM FORMULAÇÕES USANDO MALHAS NÃO ESTRUTURADAS

Elton Fernando Doehnert

Universidade Federal do Paraná

eltonfd@gmail.com

14 de janeiro de 2021

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Volumes Finitos
- 3 Malhas não estruturadas
- 4 Suavização de malhas não estruturadas
- 5 Triangulação de Delaunay
- 6 Algoritmo de suavização
- 7 Resultados da pesquisa
- 8 Conclusão

Introdução

A simulação numérica de problemas na engenharia possui uma grande importância tanto para o meio acadêmico quanto para a indústria favorecendo o desenvolvimento de novas tecnologias.

Dado esse interesse, novas técnicas para aumentar a acurácia das simulações numéricas são de grande importância.

Esse trabalho verifica o erro de discretização que ocorre nas soluções do FVM usando-se uma malha não estruturada triangular comparando a solução com a analítica e suavizando a malha com vários algoritmos diferentes.

Além disso, é proposto o uso de uma heurística baseada no algoritmo genético para o problema da suavização de uma malha.

Volumes Finitos

Definição

O método dos volumes finitos é um método de discretização adequado para a simulação numérica de fenômenos que envolvem alguma lei de conservação.

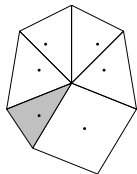
Uso com malhas não estruturadas

Opera em células com qualquer formato, o que facilita seu uso com malhas não estruturadas.

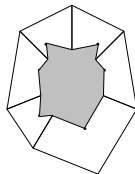
Volumes Finitos

No método são definidos volumes de controle que devem cobrir todo o domínio computacional.

Tais volumes de controle podem ser:



(a) Volume Centrado



(b) Volume Baseado no vértice

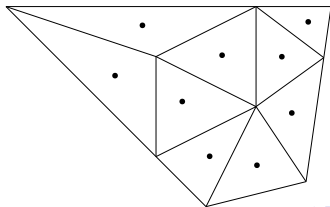
Figura: Criação de Volumes de Controle

Malhas não estruturadas

Uma malha não estruturada pode ser considerada um caso limite de uma malha multiblocos na qual cada volume individual é tratado como um bloco.

É o tipo de malha mais usada na indústria devido a sua capacidade de adaptação a qualquer tipo de problema. Normalmente são empregados triângulos ou quadriláteros para problemas bidimensionais.

Cada bloco gerado pode ser denotado como volume de controle. Normalmente as variáveis de interesse para o problema são definidas no centróide desse elemento. Como na malha a seguir:



Malhas não estruturadas

Qual a malha ideal?

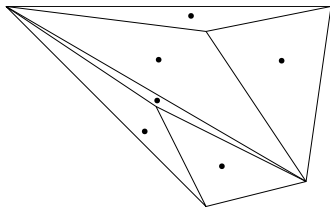
Os elementos da malha devem ser o mais equiláteros o possível, ou seja, para uma malha triangular os ângulos internos devem ser o mais próximo possível uns dos outros.

Qual o motivo?

Isso permite que as funções de interpolação no métodos dos volumes finitos, representem bem as variáveis dentro do triângulo. Caso contrário observa-se uma elevada anisotropia nos coeficientes, o que reduz a taxa de convergência do processo de solução do sistema linear.

Suavização de malhas não estruturadas

Embora ferramentas de geração de malhas automáticas sejam amplamente usadas, essas ferramentas podem não garantir a qualidade das malhas. É possível que alguns elementos severamente distorcidos ou fora de forma sejam criados.



Suavização de malhas não estruturadas

Existem várias maneiras de esquemas de suavização de malhas, tais como suavização Laplaciana e suavização baseada em otimização. Tipicamente cada método possui um compromisso entre qualidade e custo computacional. Por exemplo, a suavização Laplaciana requer um custo computacional muito baixo, mas frequentemente resulta em uma malha de baixa qualidade nos elementos ou mesmo com elementos inválidos. Por outro lado, enquanto suavizações baseados na otimização evitam elementos inválidos e obtém uma maior qualidade na malha, o custo computacional é muito maior que a suavização Laplaciana.

Suavização de malhas não estruturadas usando algoritmo genético.

Algoritmos Genéticos são métodos adaptativos que podem ser usados para resolver problemas envolvendo procura e otimização. Eles são baseados nos processos genéticos de organismos biológicos. O algoritmo genético pode evoluir soluções para problemas do mundo real, desde que tenham sido corretamente codificados. Usam uma analogia direta do mundo natural. Ele trabalha com uma população de indivíduos, cada um representando uma possível solução para um dado problema. Cada indivíduo recebe um nível de adaptabilidade de acordo com quão boa é a sua solução para o problema.

Suavização de malhas não estruturadas usando algoritmo genético

Os indivíduos altamente adaptados recebem uma maior oportunidade para reproduzir, por cruzamento com outro indivíduo na população. Isso produz novos indivíduos como descendentes, os quais compartilham algumas características de cada um dos seus pais. Os membros menos adaptados da população irão ter menor probabilidade de reprodução, de modo que eles desaparecem.

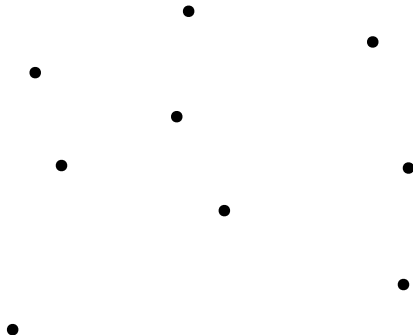
Método proposto

De modo a se utilizar do algoritmo genético para a suavização da malha, foi desenvolvido os seguintes passos:

- Geração de uma malha usando-se a triangulação de Delaunay
- Aplicação de uma distorção na malha.
- Desenvolvimento do algoritmo para suavizar essa malha.

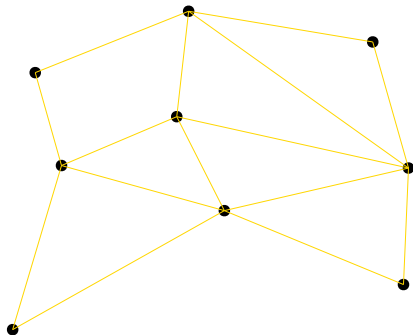
Triangulação de Delaunay

Imagine pontos aleatórios na tela.



Triangulação de Delaunay

Devemos criar uma malha triangular a partir desses pontos.



Triangulação de Delaunay

O que é?

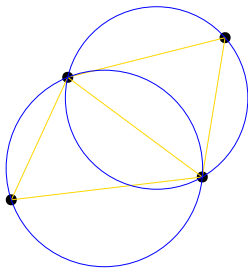
É um processo para geração de triangulações a partir de um conjunto de pontos em um plano. Em tal triangulação nenhum ponto gerado está dentro do circuncírculo formado por qualquer triângulo.

Porque é usado?

Ela otimiza simultaneamente os seguintes critérios:

- Maximização do mínimo ângulo interno dos triângulos
- Minimização do máximo circuncírculo das arestas
- Minimização do máximo mínimo círculo de contenção das arestas

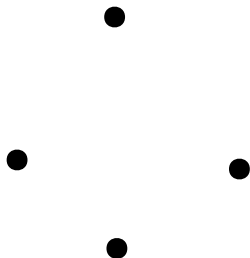
O circuncírculo de um triângulo é um círculo que passa por todos os seus vértices:



Triangulação de Delaunay

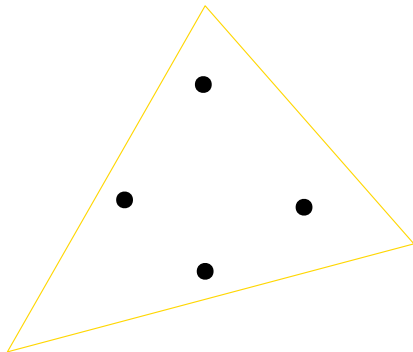
Uma maneira de se criar uma triangulação de Delaunay é usando-se o algoritmo de Bowyer-Watson.

Como exemplo temos os seguintes quatro vértices:



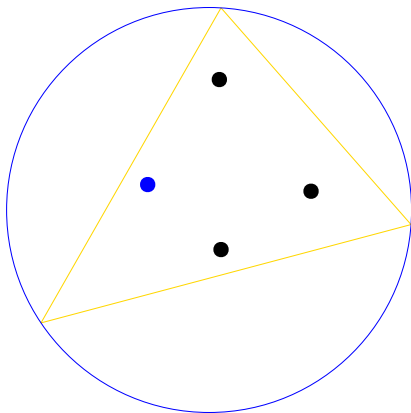
Triangulação de Delaunay

Inicialmente, acha-se um triângulo contendo todos os pontos.
Chamado de 'super-triângulo'



Triangulação de Delaunay

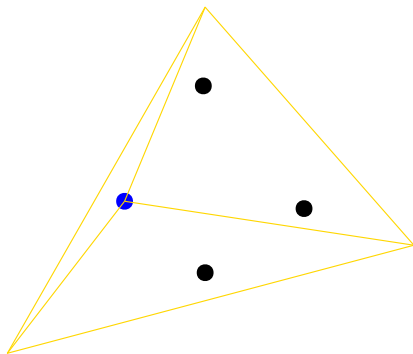
Em seguida, seleciona-se um ponto qualquer e procura-se por triângulos cujo circuncírculo contenha esse ponto. Inicialmente tal triângulo é o super-triângulo.



Triangulação de Delaunay

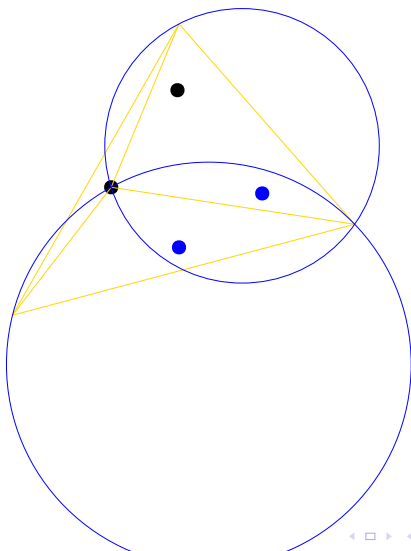
Como o ponto está contido no circuncírculo, o triângulo não é um triângulo de Delaunay e portanto é descartado.

A seguir o ponto é conectado com os vértices do triângulo de modo a se criar um novo conjunto de triângulos.



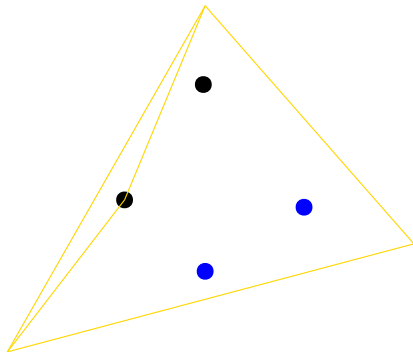
Triangulação de Delaunay

Esse processo é repetido para todos os outros pontos:



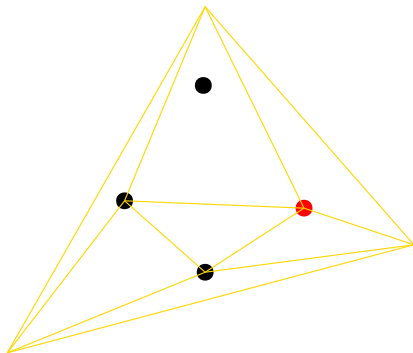
Triangulação de Delaunay

Os dois pontos do passo anterior estão em circuncírculos logo seus triângulos são deletados:



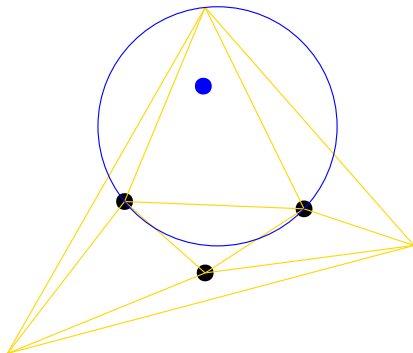
Triangulação de Delaunay

O resultado fica:



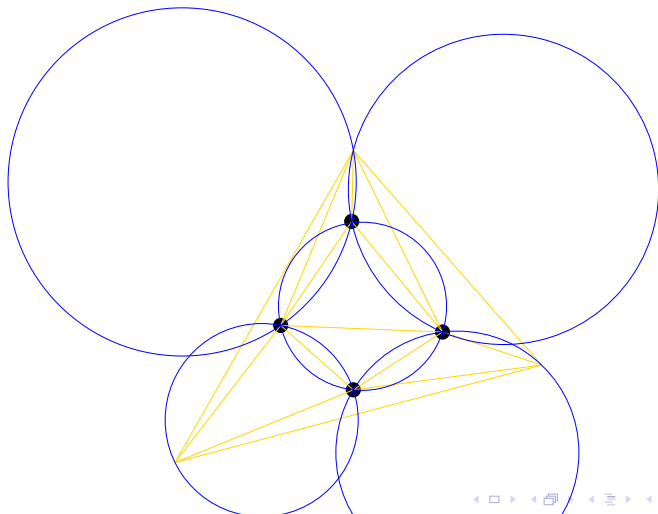
Triangulação de Delaunay

Procedendo com o algoritmo:



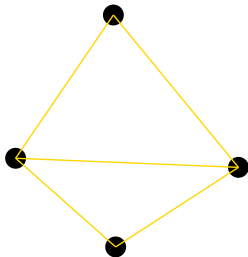
Triangulação de Delaunay

Nesse ponto pode-se perceber que nenhum ponto está dentro de qualquer circuncírculo:



Triangulação de Delaunay

Como último passo os vértices do super-triângulo são apagados assim como qualquer triângulo que os possua:



Algoritmo de suavização

O algoritmo tem como objetivo mover a posição de todos os nós internos da malha. Desse modo o algoritmo é aplicado sequencialmente a cada nó interno. Para cada nó é definido uma população de indivíduos cujo genótipo é um par de números, o primeiro para a posição da coordenada x e outro para a y . Tais membros são inicialmente gerados aleatoriamente. No total cada geração possui 300 indivíduos e é calculado 40 gerações.

Algoritmo de suavização

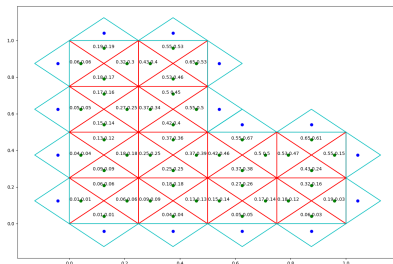
A função fitness, que irá determinar o quão apto a reprodução é um determinado nó(indivíduo) é calculada da seguinte forma:

$$SQ_i = \frac{4\sqrt{3}A_i}{\sum_{i=1}^3 l_i^2} \quad (1)$$

Essa equação é calculada para todos os volumes que incluem o vértice e então somados, esse valor será maior quanto mais equilátero for o triângulo da malha. Desse modo cada indivíduo tem um genótipo definido como um par de valores (coordenadas x e y) e o seu fenótipo é dado por essa equação que define a média da qualidade dos volumes que compartilham esse vértice.

Resultados da pesquisa

De modo a se conseguir comparar a performance do algoritmo genético na suavização da malha. Foi proposto um domínio em formato 'L':



Malha distorcida

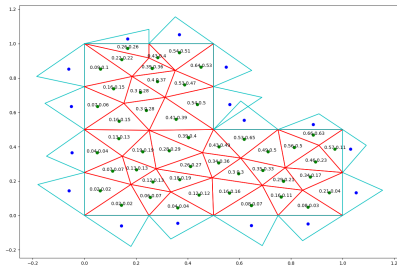
Tabela: Ângulos da Malha Distorcida

Maior	menor	média	desvio padrão
165.963757	6.340192	60.000000	30.017315

Tabela: Qualidades da Malha Distorcida

Maior	menor	média	desvio padrão
0.928007	0.029467	0.700351	0.227835

Centroidal Path Tessellation



Centroidal Path Tessellation

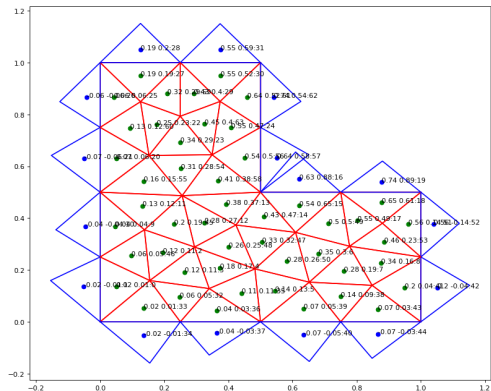
Tabela: Ângulos da Malha CPT

Maior	menor	média	desvio padrão
125.476562	18.434949	60.000000	16.412226

Tabela: Qualidades da Malha CPT

Maior	menor	média	desvio padrão
0.997240	0.376030	0.889689	0.126673

Optimal Delaunay Tessellation



Optimal Delaunay Tessellation

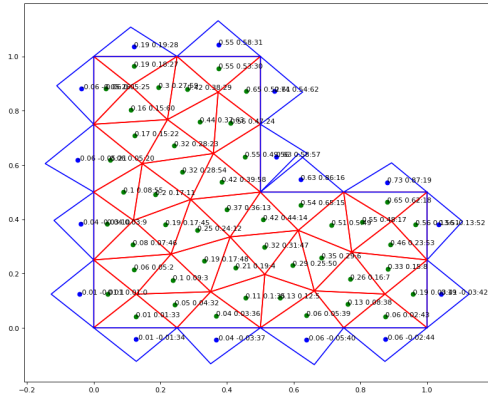
Tabela: Ângulos da Malha ODT

Maior	menor	média	desvio padrão
92.339656	36.765310	60.000000	14.499022

Tabela: Qualidades da Malha ODT

Maior	menor	média	desvio padrão
0.997704	0.823047	0.926443	0.046574

Centroidal Voronoi Tessellation



Centroidal Voronoi Tessellation

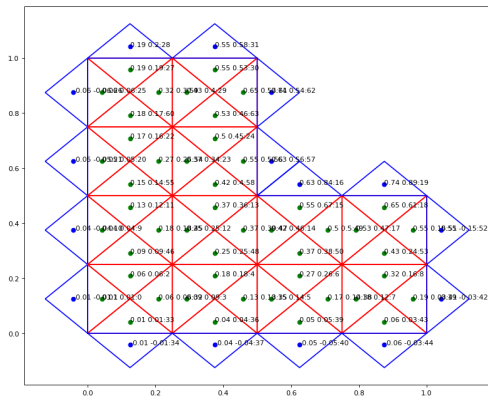
Tabela: Ângulos da Malha CVT

Maior	menor	média	desvio padrão
98.568632	36.794950	60.000000	17.275253

Tabela: Qualidades da Malha CVT

Maior	menor	média	desvio padrão
0.990750	0.787629	0.907101	0.059118

Angle Based Tesselation



Angle Based Tessellation

Tabela: Ângulos da Malha Ângulos

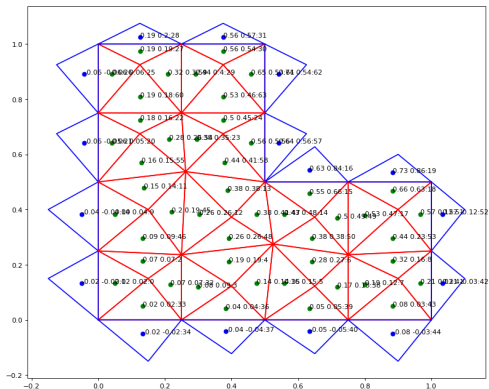
Maior	menor	média	desvio padrão
90.003446	44.996564	60.000000	21.268508

Tabela: Qualidades da Malha Ângulos

Maior	menor	média	desvio padrão
0.866070	0.865999	0.866027	0.000013

Gurobi Optimization Based Tesselation

Para a otimização usando-se o Gurobi, foi definido como função objetivo a ser minimizada a distância total dos nós internos para os nós vizinhos.



Gurobi Optimization Based Tessellation

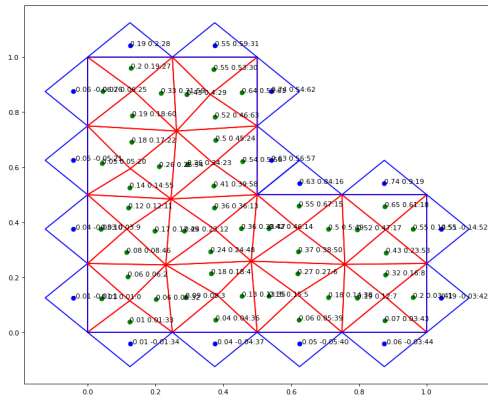
Tabela: Ângulos da Malha Gurobi

Maior	menor	média	desvio padrão
118.072487	30.541971	60.000000	24.045397

Tabela: Qualidades da Malha Gurobi

Maior	menor	média	desvio padrão
0.977771	0.618590	0.831586	0.098368

Genetic Algorithm Based Tessellation



Genetic Algorithm Based Tessellation

Tabela: Ângulos da Malha GA

Maior	menor	média	desvio padrão
103.651693	36.916308	60.000000	21.561762

Tabela: Qualidades da Malha GA

Maior	menor	média	desvio padrão
0.924401	0.751680	0.862425	0.033582

Comparação entre os métodos

Na tabela 15 está o valor da média das diferenças entre o valor analítico e numérico para todos os algoritmos usados no trabalho em ordem crescente, ou seja, por essa métrica o algoritmo de melhoramento por ângulos e o genético foram os melhores.

Tabela: Comparação entre as médias das diferenças em relação ao valor analítico

Algoritmo	diferença
Ângulos	0.054529
Genético	0.054563
Gurobi	0.056215
CPT	0.060670
ODT	0.060929
CVT	0.062826

Comparação entre os métodos

Já na tabela 16 temos a métrica da média das qualidades conforme foi definido. Nesse caso o melhor algoritmo foi o ODT.

Tabela: Comparação entre as médias qualidades dos volumes de controle

Algoritmo	diferença
ODT	0.926443
CPT	0.919103
CVT	0.907101
Ângulos	0.866027
Genético	0.860447
Gurobi	0.831586

Conclusão

O trabalho aborda a importância da suavização de uma malha não estruturada para minimizar os erros das aproximações com o método dos volumes finitos e compara vários métodos diferentes. O algoritmo genético é implementado mostrando que ele melhora a malha inicial, mesmo assim percebe-se um custo computacional mais elevado em relação a outros métodos.