EXEMPLE (RECHERCHE D'HOMOMORPHISME(S))

$\mathcal{A}1$ = { p(x,y), p(y,z), q(z,x) }, où x, y et z sont des variables
$\mathcal{A}2$ = { p(a,b), p(b,a), q(b,b), q(a,c), q(b,c) } où a, b et c sont des constantes

- Quels sont les **homomorphismes** de $\mathcal{A}1$ dans $\mathcal{A}2$?
- Dessiner l'**arbre de recherche** du backtrack obtenu :
  - en s'arrêtant dès qu'une solution est trouvée
  - en considérant les variables et les constantes selon l'ordre lexicographique

DE HOM À CSP

Problème de décision **HOM**
Données : $\mathcal{A}1$, $\mathcal{A}2$ « *instance* de HOM »
Question : existe-t-il un homomorphisme de $\mathcal{A}1$ dans $\mathcal{A}2$?

Problème de décision **CSP**
Données : réseau (X,D,C) « *instance* de CSP »
Question : ce réseau est-il (globalement) consistant ?

Peut-on résoudre HOM en utilisant un algorithme qui résout CSP ?

(et on aimerait bien aussi trouver les homomorphismes)

EXEMPLE (RECHERCHE D'HOMOMORPHISME(S))

$\mathcal{A}$1 = { p(x,y), p(y,z), q(z,x) }, où x, y et z sont des variables
$\mathcal{A}$2 = { p(a,b), p(b,a), q(b,b), q(a,c), q(b,c) } où a, b et c sont des constantes

- Quels sont les **homomorphismes** de $\mathcal{A}$1 dans $\mathcal{A}$2 ?
- Dessiner l'**arbre de recherche** du backtrack obtenu :
  - en s'arrêtant dès qu'une solution est trouvée
  - en considérant les variables et les constantes selon l'ordre lexicographique

HOM → CSP

$\mathcal{A}$1 et $\mathcal{A}$2 → (X,D,C)

Supposons que $\mathcal{A}$1 n'ait pas de constantes et qu'il n'y ait pas deux fois la même variable dans un atome

ensemble des termes (variables) de $\mathcal{A}$1 → X
ensemble des termes (constantes) de $\mathcal{A}$2 → D
toutes les variables de X ont pour domaine D

On note A1 ... An les atomes de $\mathcal{A}$1
C = { Ci(x1, ..., xk) | Ai = p(x1, ..., xk) ∈ $\mathcal{A}$1 }
La définition de Ci est l'ensemble des tuples (a1, ..., ak) tels que p(a1, ..., ak) ∈ $\mathcal{A}$2

HOM → CSP *(suite)*

- transformation de p(x,x) ?
  p(x,y) et x = y

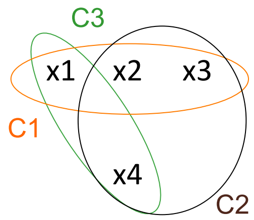
- transformation de p(x,a) où a est une constante ?
  p(x,y) où y est une nouvelle variable
  et domaine(y) = {a}

Cas général :
- on remplace les **multi-occurrences** de variables dans **un atome** en introduisant de nouvelles variables et en ajoutant des contraintes d'égalité
- on remplace chaque **constante** par une nouvelle variable dont le domaine est réduit à cette constante

CSP (Constraint Satisfaction Problem)
Données : un réseau de contraintes P = (X, D, C)
Question : P admet-il une solution? [trouver toutes les solutions]

Exemple de réseau de contraintes

- Ensemble de variables **X**={x1,x2,x3,x4}
- Ensemble de contraintes **C**={C1,C2,C3}
  → **hypergraphe**



- Domaines des variables **D1=D2=D3=D4**={a,b}
  (**D** : union des Di)
- Définitions des contraintes

C1

x1	**x2**	**x3**
a	a	b
a	b	a
b	a	a

C2

x2	**x3**	**x4**
a	b	a
b	a	b

C3

x1	**x4**
a	b
b	b

Réduction (polynomiale) de CSP à HOM (qui, de plus, préserve les solutions ?)
Illustrer sur l'exemple

CSP → HOM

(X,D,C) → $\mathcal{A}1$ et $\mathcal{A}2$

X → ensemble des termes (variables) de $\mathcal{A}1$
D → ensemble des termes (constantes) de $\mathcal{A}2$

$\mathcal{A}1$ = { Ci(x1, ..., xk) | Ci ∈ C
et porte sur (x1 ... xk) }

$\mathcal{A}2$ = { Ci(a1, ..., ak) | Ci ∈ C
et (a1, ..., ak) est dans sa définition }

Réduction de problèmes

- Soient deux problèmes de décision P1 et P2.
  P1 se réduit à P2 s'il existe une transformation **t** qui,
  à toute instance **I1** de **P1** associe une instance **t(I1)** de **P2**,
  tel que la réponse à **t(I1)** est oui **ssi** la réponse à **I1** est oui
- La transformation **t** est dite **polynomiale** si elle est polynomiale en la taille de **I1**
- Elle **préserve les solutions** s'il existe une **bijection** entre les solutions à **I1** et les solutions à **t(I1)**

Nous avons construit

- une réduction polynomiale de HOM à CSP
- une réduction polynomiale de CSP à HOM

Ces réductions préservent les solutions.

SAT (« PROBLÈME DE SATISFIABILITÉ D'UNE FORME CLAUSALE EN LOGIQUE DES PROPOSITIONS »)

- symbole propositionnel, *variable propositionnelle*, atome
- **Littéral** : variable propositionnelle ou sa négation
- **Clause** : disjonction de littéraux
- **Forme clausale** : conjonction de disjonctions
- **Problème SAT** : déterminer si une forme clausale est satisfiable

Exemple

$$F = (p \lor \neg q) \land (q \lor r) \land (\neg p \lor \neg r)$$

F est-elle satisfiable ?

Comment représenter SAT sous la forme

(variables, domaines, conditions de consistance) ?

- CSP
- SAT
- coloration de graphe
- recherche d'homomorphismes

[...]

On peut passer de n'importe lequel de ces problèmes à n'importe quel autre

- par une transformation polynomiale
- qui respecte les ensembles de solutions