RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN
DEUTSCHE POST LEHRSTUHL FÜR OPTIMIERUNG VON DISTRIBUTIONSNETZWERKEN
Universitätsprofessor Dr.rer.nat.habil. Hans-Jürgen Sebastian

Klausur
Methoden und Anwendungen der Optimierung (PT2)

23. März 2012

Klausurnummer:

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang / Fachrichtung:

Hinweise:

- Füllen Sie die Felder oben vollständig aus bzw. korrigieren Sie ggf. die entsprechenden Einträge und unterschreiben Sie die Klausur.
- Sämtliche Einträge in dem Klausurexemplar sind mit dokumentenechten Schreibutensilien (Kein Bleistift!) und in leserlicher Schrift vorzunehmen.
- Die Antworten sind in diesem Klausurexemplar einzutragen. Bei Bedarf erhalten Sie weitere leere Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel außer Stift und Lineal zugelassen. Insbesondere ist die Benutzung von Taschenrechnern und Vorlesungs-/Übungsunterlagen unzulässig!
- Handys dürfen nicht zur Klausur mitgebracht werden bzw. sind auszuschalten.
- Die Höchstpunktzahl beträgt 90 Punkte; die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Beantworten Sie die Aufgaben möglichst stichpunktartig.
- Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit (Seiten 1 bis 10)!

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, die obigen Hinweise zur Kenntnis genommen zu haben und diese zu akzeptieren.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe	Fragen	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Note
erreichbare Punkte	30	13	12	10	12	13	90	
erreichte Punkte								

Aufgabenteil (60 Punkte)

Aufgabe 1: Schnittebenenverfahren von Gomory (13 Punkte)

Gegeben ist das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.d.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Simplex-Algorithmus auf dessen LP-Relaxation führt zu folgendem optimalen Endtableau:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i^*
s_1	0	0	1	3/2	-1/2	7/2
x_2	0	1	0	1/2	1/2	9/2
x_1	1	0	0	-1/2	1/2	5/2
Δz_j	0	0	0	1/2	3/2	23/2

Da die optimale Lösung der LP-Relaxation für das ursprüngliche Problem nicht zulässig ist, soll diese mit Hilfe des Schnittebenenverfahrens von Gomory bestimmt werden.

(a) Stellen Sie die dafür notwendige Gomory-Restriktion für die Basisvariable x_2 auf. (3 Punkte)

(b) Erweitern Sie obiges Endtableau des primalen Simplex-Algorithmus um die in (a) aufgestellte Gomory-Restriktion und führen Sie einen dualen Simplex-Schritt durch. (6 Punkte)

		b_i^*
Δz_j		

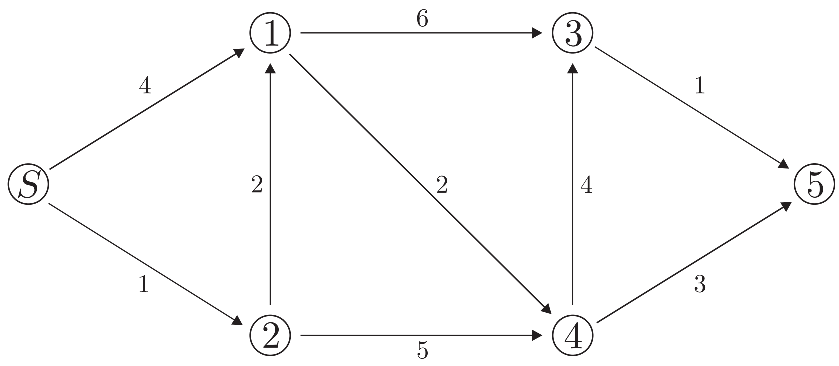
		b_i^*
Δz_j		

(c) Ist die in Aufgabenteil (b) bestimmte Lösung zulässig für das ursprüngliche Problem? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

(d) Bestimmen Sie für die in Aufgabenteil (a) aufgestellte Gomory-Restriktion die Gleichung der entsprechenden Schnittebene und geben Sie diese explizit an. (3 Punkte)

Aufgabe 2: FiFo-Algorithmus (12 Punkte)

Gegeben ist der folgende Digraph mit 5 Knoten:



Führen Sie für obigen Digraphen den FiFo-Algorithmus zur Bestimmung der kürzesten Wege von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3, 4 und 5 durch.

Hinweis: Falls während einer Iteration mehrere Knoten in die Warteschlange Q eingefügt werden, so fügen Sie sie aufsteigend nach Knotennummer sortiert ein.

(a) Tragen Sie hierfür in der untenstehenden Tabelle für jede Iteration des FiFo-Algorithmus den ausgewählten Knoten, die Warteschlange Q, sowie die Labels $d(1), \ldots, d(5)$ ein. (10 Punkte)

Iteration	Ausgewählter Knoten i	Q	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$	$d(5)$
Initialisierung	-	S	∞	∞	∞	∞	∞

(b) Geben Sie die in (a) ermittelten Wege von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3, 4 und 5 sowie deren Länge explizit an. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Implizite Enumeration / Ersatznebenbedingung (10 Punkte)

Gegeben ist das folgende binäre lineare Optimierungsproblem B:

$$\begin{array}{lrl} \max z & = & -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 6x_4 - 2x_5 \\ \text{s.d.} & & 2x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 \leq -3 \\ & & -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_5 \leq -2 \\ & & -4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 \leq -5 \\ & & x_1, \ldots, x_5 \in \{0; 1\} \end{array}$$

Die optimale Lösung der LP-Relaxation von B kann dem folgenden optimalen Simplex-Tableau entnommen werden:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	b_i^*
x_2	0	1	$-1/4$	0	$-7/4$	$-1/2$	0	$-1/4$	0	0	0	$-5/2$	0	$1/4$
x_1	1	0	$-9/8$	0	$-23/8$	$-3/4$	0	$-5/8$	0	0	0	$-19/4$	0	$5/8$
s_2	0	0	-2	0	-17	-4	1	-3	0	0	0	-24	0	1
s_4	0	0	$9/8$	0	$23/8$	$3/4$	0	$5/8$	1	0	0	$19/4$	0	$3/8$
s_5	0	0	$1/4$	0	$7/4$	$1/2$	0	$1/4$	0	1	0	$5/2$	0	$3/4$
s_6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
s_8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Δz_j	0	0	13	0	17	4	0	3	0	0	0	18	0	-9

(a) Zeigen Sie, dass die Nebenbedingung

$$-4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 24x_4 + 15x_5 \leq -27$$

beste Ersatznebenbedingung für obiges binäres Problem B ist. (6 Punkte)

(b) Überprüfen Sie, welche Variablen anhand der in Aufgabenteil (a) aufgestellten bzw. gegebenen Ersatznebenbedingung fixiert werden können und geben Sie deren Werte explizit an. (4 Punkte)

Aufgabe 4: Nichtlineare Optimierung (12 Punkte)

Gegeben ist das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lcl}
\min\ f(x) & = & (x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \\[1ex]
\text{s.d.} & & (x_1-2)^2+(x_2-3)^2-4 \le 0 \\
 & & -2x_1-x_2+9 \le 0 \\
 & & x_1-3 \le 0 \\[1ex]
 & & x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}
\end{array}$$

(a) Geben Sie für obiges Problem die Kuhn-Tucker-Bedingungen KTB' an. Verwenden Sie dabei die Standardform, d.h. nicht die Formulierung als Sattelpunkt der Lagrange-Funktion. (6 Punkte)

(b) Welche der drei folgenden Punkte erfüllen die Kuhn-Tucker-Bedingungen für obiges Problem? (6 Punkte)

$P_1(2;\ 5)$ $\quad\quad$ $P_2(3;\ 2)$ $\quad\quad$ $P_3(3;\ 3)$

weiter Aufgabe 4:

Aufgabe 5: Dynamische Optimierung (13 Punkte)

Der Inhaber einer Computerhandlung hat für die nächsten sieben Perioden die folgenden Nachfragemengen für Laptops ermittelt:

Periode	1	2	3	4	5	6	7
Nachfrage [Stück]	10	55	40	55	40	30	70

Bei der Bestellung beziehungsweise der Lagerung der Laptops fallen folgende Kosten an:

- Bestellfixe Kosten K in Höhe von 250 €/Bestellung
- Lagerkosten h in Höhe von 2€/(Stück·Periode)

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Wagner-Whitin eine optimale Bestellpolitik und geben Sie diese zusammen mit den optimalen Lagerbeständen explizit an. (11 Punkte)

j	z_j	C_j^*	κ_j^*	1	2	3	4	5	6	7

Optimale Bestellpolitik:

Optimale Lagerbestände:

(b) Ab welchem Wert für die bestellfixen Kosten K wird die Menge für Periode 4 ebenfalls in Periode 1 bestellt? (2 Punkte)