RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN
DEUTSCHE POST LEHRSTUHL FÜR OPTIMIERUNG VON DISTRIBUTIONSNETZWERKEN
Universitätsprofessor Dr.rer.nat.habil. Hans-Jürgen Sebastian

Klausur
Methoden und Anwendungen der Optimierung

10. Februar 2011

Nr.:

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang / Fachrichtung:

Hinweise:

- Füllen Sie die Felder oben vollständig aus und unterschreiben Sie die Klausur.
- Sämtliche Einträge in dem Klausurexemplar sind mit dokumentenechten Schreibutensilien vorzunehmen (Kein Bleistift!).
- Die Antworten sind in diesem Klausurexemplar einzutragen. Bei Bedarf erhalten Sie weitere leere Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel außer Stift und Lineal zugelassen. Insbesondere ist die Benutzung von Taschenrechnern und Vorlesungsunterlagen unzulässig!
- Handys dürfen nicht zur Klausur mitgebracht werden.
- Die Höchstpunktzahl beträgt 90 Punkte; die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Beantworten Sie die Aufgaben möglichst stichpunktartig.
- Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit (Seiten 1 bis 10)!

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, die obigen Hinweise zur Kenntnis genommen zu haben und diese zu akzeptieren.

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	Fragen	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Note
erreichbare Punkte	30	11	9	15	11	14	90	
erreichte Punkte								

Aufgabenteil (60 Punkte)

Aufgabe 1: Schnittebenenverfahren von Gomory (11 Punkte)

Gegeben ist das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lll} \max z & = & 3x_1 + 2x_2 \\ \\ \text{s.d.} & & 4x_1 \qquad \leq 19 \\ & & x_1 + x_2 \leq \ \ 6 \\ \\ & & x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Die Anwendung des Simplex-Algorithmus auf dessen LP-Relaxation führt zu folgendem optimalen Endtableau:

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i^*
x_1	1	0	1/4	0	19/4
x_2	0	1	-1/4	1	5/4
Δz_j	0	0	1/4	2	67/4

Da die optimale Lösung der LP-Relaxation für das ursprüngliche Problem nicht zulässig ist, soll diese mit Hilfe des Schnittebenenverfahrens von Gomory bestimmt werden.

(a) Stellen Sie die dafür notwendige Gomory-Restriktion für die Basisvariable x_1 auf. (3 Punkte)

(b) Erweitern Sie obiges Endtableau des primalen Simplex-Algorithmus um die in (a) aufgestellte Gomory-Restriktion und führen Sie einen dualen Simplex-Schritt durch. (4 Punkte)

		b_i^*
Δz_j		

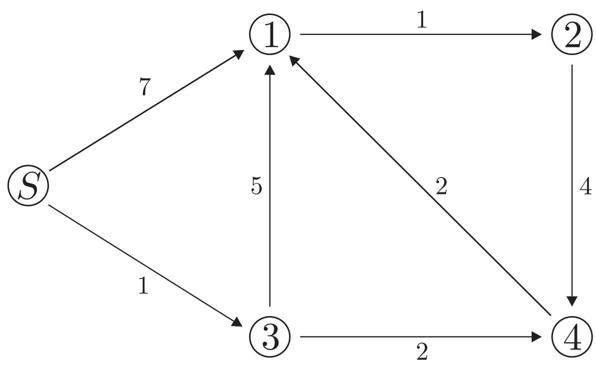
		b_i^*
Δz_j		

(c) Ist die in Aufgabenteil (b) bestimmte Lösung zulässig für das ursprüngliche Problem? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

(d) Bestimmen Sie für die in Aufgabenteil (a) aufgestellte Gomory-Restriktion die Gleichung der entsprechenden Schnittebene und geben Sie diese explizit an. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Dijkstra-Algorithmus (9 Punkte)

Gegeben ist der folgende Digraph mit 5 Knoten:



Führen Sie für obigen Digraphen den Dijkstra-Algorithmus zur Bestimmung der kürzesten Wegen von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3 und 4 durch.

(a) Tragen Sie hierfür in der untenstehenden Tabelle für jede Iteration des Dijkstra-Algorithmus den ausgewählten Knoten, die Menge der vorläufig markierten Knoten, die Menge der endgültig markierten Knoten sowie die Labels $d(1), \ldots, d(4)$ ein. (6 Punkte)

Iteration	Ausgewählter Knoten i	vorläufig markierte Knoten	endgültig markierte Knoten	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
Initialisierung	-	S	-	∞	∞	∞	∞

(b) Geben Sie die ermittelten kürzesten Wege von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3 und 4 sowie deren Länge explizit an. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Transportproblem (15 Punkte)

Gegeben ist ein Transportproblem mit folgenden Angebots- und Nachfragemengen

Angebotsmengen

a_1	a_2	a_3	a_4
10	20	30	10

Nachfragemengen

b_1	b_2	b_3	b_4
15	15	25	15

sowie folgender Kostenmatrix:

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	8	2	7
A_2	6	2	8	4
A_3	8	3	4	5
A_4	6	8	9	9

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Greedy-Heuristik eine zulässige Startlösung für das obige Transportproblem. (2 Punkte)

Greedy	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					10
A_2					20
A_3					30
A_4					10
b_j	15	15	25	15	

(b) Verwenden Sie die obige Lösung als Ausgangsbasislösung für die MODI-Methode. Bestimmen Sie dazu in der folgenden Tabelle die Werte der dualen Entscheidungsvariablen u_i und v_j für die Basislösung aus (a). (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	1	8	2	7	0
A_2	6	2	8	4	
A_3	8	3	4	5	
A_4	6	8	9	9	
v_j					

(c) Überprüfen Sie die so bestimmte duale Lösung auf Zulässigkeit, indem Sie die Werte der Δz_{ij} bestimmen. (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
A_4					
v_j					

(d) Bestimmen Sie die nächste Basislösung und tragen Sie diese in die nachfolgende Tabelle ein. (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					10
A_2					20
A_3					30
A_4					10
b_j	15	15	25	15	

(e) Führen Sie nun einen weiteren Schritt der MODI-Methode durch. Vervollständigen Sie dazu in der folgenden Tabelle die Werte der u_i und der v_j für die Basislösung aus (d). (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	1	8	2	7	0
A_2	6	2	8	4	
A_3	8	3	4	5	
A_4	6	8	9	9	
v_j					

(f) Bestimmen Sie die Werte der Δz_{ij}. (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1					
A_2					
A_3					
A_4					
v_j					

(g) Ist die in Aufgabenteil (d) ermittelte Basislösung optimal? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

(h) Geben Sie eine alternative optimale Lösung an. (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					10
A_2					20
A_3					30
A_4					10
b_j	15	15	25	15	

Aufgabe 4: Vehicle Routing Problem (11 Punkte)

Ein Unternehmer möchte 7 Kunden A, B, C, D, E, F und G von einem Lager *0* aus mit einem homogenen Gut beliefern. Dazu steht ein Fahrzeug mit einer maximalen Ladekapazität von 40 ME zur Verfügung. Gehen Sie weiter von den folgenden Daten aus:

Kunde	Nachfrage [ME]
A	8
B	5
C	12
D	10
E	9
F	15
G	10

Entfernung	A	B	C	D	E	F	G
0	41	20	54	42	22	51	64
A	-	41	45	73	60	90	89
B		-	36	32	22	51	50
C			-	54	57	81	60
D				-	22	28	22
E					-	30	45
F						-	41

Der Unternehmer möchte einen Tourenplan mit Hilfe des Savings-Verfahrens erstellen.

(a) Bestimmen Sie die Savings s_{AB}, s_{AF} sowie s_{CG}. (3 Punkte)

$s_{AB} =$ $\qquad$ $s_{AF} =$ $\qquad$ $s_{CG} =$

(b) Bestimmen Sie einen Tourenplan mittels des Savings-Verfahrens und geben Sie diesen explizit an. Benutzen Sie dazu die im Folgenden angegebenen, um die aus Aufgabenteil (a) ergänzten, Savings. (8 Punkte)

$s_{AB} = \ldots$ $\quad s_{AC} = 50$ $\quad s_{AD} = 10$ $\quad s_{AE} = 3$ $\quad s_{AF} = \ldots$ $\quad s_{AG} = 16$ $\quad s_{BC} = 38$

$s_{BD} = 30$ $\quad s_{BE} = 20$ $\quad s_{BF} = 20$ $\quad s_{BG} = 34$ $\quad s_{CD} = 42$ $\quad s_{CE} = 19$ $\quad s_{CF} = 24$

$s_{CG} = \ldots$ $\quad s_{DE} = 42$ $\quad s_{DF} = 65$ $\quad s_{DG} = 84$ $\quad s_{EF} = 43$ $\quad s_{EG} = 41$ $\quad s_{FG} = 74$

Aufgabe 5: Nichtlineare Programmierung (14 Punkte)

Gegeben ist das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned}
\min\ f(x) \quad &= \quad (x_1+1)^2 + (x_2+2,5)^2 \\
\text{s.d.} \quad & \quad -x_1 + \ \ x_2 \leq 1 \\
& \quad \ \ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& \quad (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 \leq 13 \\
& \quad \ \ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen KTB′ für obiges Problem an. Verwenden Sie dabei die Standardform, d.h. nicht die Formulierung als Sattelpunkt der Lagrange-Funktion. (5 Punkte)

(b) Erfüllt einer der folgenden Punkte die Kuhn-Tucker-Bedingungen KTB′? (6 Punkte)

$P_1(-1;0)$ $\qquad P_2(2;-1)$ $\qquad P_3(0;-1)$

(c) Ist einer davon Optimalpunkt des obigen Problems? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

(d) Ist das Verfahren von Wolfe auf obiges Problem anwendbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)