Bestimmen der besten Ersatznebenbedingung im Verfahren der impliziten Enumeration (am Beispiel von A2 Klausur 20130322)

- Betrachtet werden Probleme (B) der Form:

$$\max\ z \quad = \quad c^T \cdot x$$

$$\begin{aligned} \text{s.d.} \qquad & A \cdot x \leq b \\ & x \in \{0;1\}^n \end{aligned}$$

Bestimmen der besten Ersatznebenbedingung im Verfahren der impliziten Enumeration (am Beispiel von A2 Klausur 20130322)

- Betrachtet werden Probleme (B) der Form:

$$\begin{aligned} \max\ z &= c^T \cdot x \\ \text{s.d.} \quad & A \cdot x \leq b \\ & x \in \{0;1\}^n \end{aligned}$$

- Eine Ersatznebenbedingung ist eine Bedingung der Form

$$\sum_{i,j} \alpha_i a_{ij} x_j \leq \sum_i \alpha_i b_i \,,$$

welche implizit erfüllt ist, wenn alle Nebenbedingungen erfüllt sind.

Bestimmen der besten Ersatznebenbedingung im Verfahren der impliziten Enumeration (am Beispiel von A2 Klausur 20130322)

- Betrachtet werden Probleme (B) der Form:

$$
\begin{aligned}
\max\ z \quad &= \quad c^T \cdot x \\
\text{s.d.} \quad & \quad A \cdot x \leq b \\
& \quad x \in \{0;1\}^n
\end{aligned}
$$

- Eine Ersatznebenbedingung ist eine Bedingung der Form

$$\sum_{i,j} \alpha_i a_{ij} x_j \leq \sum_i \alpha_i b_i \,,$$

welche implizit erfüllt ist, wenn alle Nebenbedingungen erfüllt sind.

- D.h. ist die Ersatznebenbedingung nicht erfüllt, so sind auch die übrigen Nebenbedingungen nicht erfüllt.

Ersatznebenbedingung

- Es kann somit festgestellt werden, ob der Lösungsraum, der durch die übrigen Bedingungen beschrieben wird, leer ist, oder es können die Werte einiger / aller Variablen festgelegt werden, und somit der Aufwand im eigentlichen Verfahren der impliziten Enumeration (erheblich) reduziert werden.

Ersatznebenbedingung

- Es kann somit festgestellt werden, ob der Lösungsraum, der durch die übrigen Bedingungen beschrieben wird, leer ist, oder es können die Werte einiger / aller Variablen festgelegt werden, und somit der Aufwand im eigentlichen Verfahren der impliziten Enumeration (erheblich) reduziert werden.

- Wie viele Informationen aus einer Ersatznebenbedingung abgelesen werden können, hängt von deren Güte ab, die durch die Wahl der α_i bestimmt wird.

Ersatznebenbedingung

- Es kann somit festgestellt werden, ob der Lösungsraum, der durch die übrigen Bedingungen beschrieben wird, leer ist, oder es können die Werte einiger / aller Variablen festgelegt werden, und somit der Aufwand im eigentlichen Verfahren der impliziten Enumeration (erheblich) reduziert werden.

- Wie viele Informationen aus einer Ersatznebenbedingung abgelesen werden können, hängt von deren Güte ab, die durch die Wahl der α_i bestimmt wird.

- Die beste Ersatznebenbedingung erhalten wir, wenn wir als Werte für die α_i die optimalen Werte der Variablen des zu der LP-Relaxation von (B) dualen Modells wählen (Beweis siehe Übungsunterlagen).

A2 Klausur 20130322

Gegeben ist folgendes binäres Problem (B)

$$\begin{aligned} \max\ z \quad = \quad & -24x_1 - 12x_2 - 30x_3 - 48x_4 - 24x_5 \\ \text{s.d.} \quad & 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \leq -5 \\ & -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_5 \leq -3 \\ & -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 \leq -2 \\ & x_1, \ldots, x_5 \in \{0; 1\} \end{aligned}$$

sowie die optimale Lösung $x^T = (5/6,\ 1,\ 1/6,\ 1,\ 0)$ von dessen LP-Relaxation.

Es soll gezeigt werden, dass

$$-24x_1 - 17x_2 - 30x_3 - 54x_4 + 55x_5 \leq -96$$

beste Ersatznebenbedingung ist.

Ersatznebenbedingung

Gesucht ist also die optimale Lösung des zu der LP-Relaxation von (B) dualen Modells.

Ersatznebenbedingung

Gesucht ist also die optimale Lösung des zu der LP-Relaxation von (B) dualen Modells.

LP-Relaxation von (B):

$$\max\ z = -24x_1 - 12x_2 - 30x_3 - 48x_4 - 24x_5$$

$$\begin{aligned}
\text{s.d.}\quad & 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \leq -5 \\
& -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}- 2x_4} - 4x_5 \leq -3 \\
& -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 \leq -2 \\
& x_1 \leq 1 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_3 \leq 1 \\
& x_4 \leq 1 \\
& x_5 \leq 1 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Ersatznebenbedingung

Gesucht ist also die optimale Lösung des zu der LP-Relaxation von (B) dualen Modells.

LP-Relaxation von (B):

$$\max z = -24x_1 - 12x_2 - 30x_3 - 48x_4 - 24x_5$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.d.} & 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 & \leq -5 & v_1 \\
& -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad\quad - 4x_5 & \leq -3 & v_2 \\
& -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 & \leq -2 & v_3 \\
& x_1 & \leq 1 & w_1 \\
& x_2 & \leq 1 & w_2 \\
& x_3 & \leq 1 & w_3 \\
& x_4 & \leq 1 & w_4 \\
& x_5 & \leq 1 & w_5 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0 & &
\end{array}$$

Ersatznebenbedingung

Zu LP-Relaxation von (B) duales Modell

$$\begin{array}{lrl}
\min\ z' & = & -5v_1 - 3v_2 - 2v_3 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \\
\text{s.d.} & & 2v_1 - 2v_2 - 4v_3 + w_1 \geq -24 \\
& & -4v_1 - 2v_2 + 3v_3 + w_2 \geq -12 \\
& & -4v_1 + 3v_2 + 2v_3 + w_3 \geq -30 \\
& & -2v_1 - 2v_3 + w_4 \geq -48 \\
& & 3v_1 - 4v_2 + v_3 + w_5 \geq -24 \\
& & v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5 \geq 0
\end{array}$$

Ersatznebenbedingung

Zu LP-Relaxation von (B) duales Modell

$$\begin{array}{lcl} \min\ z' & = & -5v_1 - 3v_2 - 2v_3 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \\ \\ \text{s.d.} & & \begin{array}{rrrrrrrrl} 2v_1 & -\,2v_2 & -\,4v_3 & +\,w_1 & & & & & \geq -24 \\ -4v_1 & -\,2v_2 & +\,3v_3 & & +\,w_2 & & & & \geq -12 \\ -4v_1 & +\,3v_2 & +\,2v_3 & & & +\,w_3 & & & \geq -30 \\ -2v_1 & & -\,2v_3 & & & & +\,w_4 & & \geq -48 \\ 3v_1 & -\,4v_2 & +\,v_3 & & & & & +\,w_5 & \geq -24 \end{array} \\ \\ & & v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5 \geq 0 \end{array}$$

Gesucht: Optimale Werte der Variablen $v_1, \ldots, v_3$. Die Werte der Variablen $w_1, \ldots, w_5$ sind für die Bestimmung der Ersatznebenbediungung uninteressant.

Zu LP-Relaxation von (B) duales Modell

$$
\begin{array}{lrl}
\min\ z' & = & -5v_1 - 3v_2 - 2v_3 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \\
\\
\text{s.d.} & & 2v_1 - 2v_2 - 4v_3 + w_1 \geq -24 \\
& & -4v_1 - 2v_2 + 3v_3 + w_2 \geq -12 \\
& & -4v_1 + 3v_2 + 2v_3 + w_3 \geq -30 \\
& & -2v_1 - 2v_3 + w_4 \geq -48 \\
& & 3v_1 - 4v_2 + v_3 + w_5 \geq -24 \\
\\
& & v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5 \geq 0
\end{array}
$$

Gesucht: Optimale Werte der Variablen $v_1, \ldots, v_3$. Die Werte der Variablen $w_1, \ldots, w_5$ sind für die Bestimmung der Ersatznebenbediungung uninteressant.

Hier relativ einfach möglich, da optimale Lösung der LP-Relaxation von (B) bekannt ($\longrightarrow$ *complementary slackness*).

Ersatznebenbedingung

Complementary slackness

Gegeben sind zwei zueinander duale lineare Problem (P) und (D). Sind $x = (x, x_s)$ und $y = (y, y_s)$ zulässige Lösungen von (P) bzw. (D), so sind sie genau dann optimal, wenn gilt: $x^T \cdot y_s + x_s^T \cdot y = 0$

Complementary slackness

Gegeben sind zwei zueinander duale lineare Problem (P) und (D). Sind $x = (x, x_s)$ und $y = (y, y_s)$ zulässige Lösungen von (P) bzw. (D), so sind sie genau dann optimal, wenn gilt: $x^T \cdot y_s + x_s^T \cdot y = 0$

Gilt, wie hier, dass $x, x_s, y, y_s \geq 0$, so gilt $x^T \cdot y_s = 0$ und $x_s^T \cdot y = 0$.

Ersatznebenbedingung

Complementary slackness

Gegeben sind zwei zueinander duale lineare Problem (P) und (D). Sind $x = (x, x_s)$ und $y = (y, y_s)$ zulässige Lösungen von (P) bzw. (D), so sind sie genau dann optimal, wenn gilt: $x^T \cdot y_s + x_s^T \cdot y = 0$

Gilt, wie hier, dass $x, x_s, y, y_s \geq 0$, so gilt $x^T \cdot y_s = 0$ und $x_s^T \cdot y = 0$.

Es gilt also weiter $\sum_i x_i y_{s_i} = 0$ bzw. $\sum_j x_{s_j} y_j = 0$.

Complementary slackness

Gegeben sind zwei zueinander duale lineare Problem (P) und (D). Sind $x = (x, x_s)$ und $y = (y, y_s)$ zulässige Lösungen von (P) bzw. (D), so sind sie genau dann optimal, wenn gilt: $x^T \cdot y_s + x_s^T \cdot y = 0$

Gilt, wie hier, dass $x, x_s, y, y_s \geq 0$, so gilt $x^T \cdot y_s = 0$ und $x_s^T \cdot y = 0$.

Es gilt also weiter $\sum_i x_i y_{s_i} = 0$ bzw. $\sum_j x_{s_j} y_j = 0$.

Da $x, x_s, y, y_s \geq 0$ gilt weiter $x_i y_{s_i} = 0 \; \forall i$ bzw. $x_{s_j} y_j = 0 \; \forall j$.

Complementary slackness

Gegeben sind zwei zueinander duale lineare Problem (P) und (D). Sind $x = (x, x_s)$ und $y = (y, y_s)$ zulässige Lösungen von (P) bzw. (D), so sind sie genau dann optimal, wenn gilt: $x^T \cdot y_s + x_s^T \cdot y = 0$

Gilt, wie hier, dass $x, x_s, y, y_s \geq 0$, so gilt $x^T \cdot y_s = 0$ und $x_s^T \cdot y = 0$.

Es gilt also weiter $\sum_i x_i y_{s_i} = 0$ bzw. $\sum_j x_{s_j} y_j = 0$.

Da $x, x_s, y, y_s \geq 0$ gilt weiter $x_i y_{s_i} = 0 \; \forall i$ bzw. $x_{s_j} y_j = 0 \; \forall j$.

Es gilt somit: $x_i > 0 \Rightarrow y_{s_i} = 0 \; (*)$ und $x_{s_j} > 0 \Rightarrow y_j = 0 \; (**)$.

Ersatznebenbedingung

Hier:

LP-Relaxation von (B) um Schlupfvariablen erweitern

$$\max\ z \quad = \quad -24x_1 - 12x_2 - 30x_3 - 48x_4 - 24x_5$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.d.} & 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 + x_{s_1} & = & -5 \\
& -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad\qquad - 4x_5 + x_{s_2} & = & -3 \\
& -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + \ x_5 + x_{s_3} & = & -2 \\
& x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + x_{s_4} & = & 1 \\
& x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_{s_5} & = & 1 \\
& x_3 \qquad\qquad\quad + x_{s_6} & = & 1 \\
& x_4 \qquad + x_{s_7} & = & 1 \\
& x_5 + x_{s_8} & = & 1 \\
& x_1, \ldots, x_5, x_{s_1}, \ldots, x_{s_8} \geq 0 & &
\end{array}$$

Ersatznebenbedingung

Das zur LP-Relaxation von (B) duale Modell um Schlupfvariablen erweitern

$$\min\ z' = -5v_1 - 3v_2 - 2v_3 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.d.} & 2v_1 - 2v_2 - 4v_3 + w_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - y_{s_1} & = & -24 \\
& -4v_1 - 2v_2 + 3v_3 \qquad + w_2 \qquad\qquad\qquad\qquad - y_{s_2} & = & -12 \\
& -4v_1 + 3v_2 + 2v_3 \qquad\qquad\qquad + w_3 \qquad\qquad - y_{s_3} & = & -30 \\
& -2v_1 \qquad - 2v_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + w_4 \quad - y_{s_4} & = & -48 \\
& 3v_1 - 4v_2 + v_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + w_5 - y_{s_5} & = & -24
\end{array}$$

$$v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5, y_{s_1}, \ldots, y_{s_5} \geq 0$$

Ersatznebenbedingung

Das zur LP-Relaxation von (B) duale Modell um Schlupfvariablen erweitern

$$\min\ z' = -5v_1 - 3v_2 - 2v_3 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$\begin{array}{llll}
\text{s.d.} & 2v_1 - 2v_2 - 4v_3 + w_1 & - y_{s_1} & = -24 \\
& -4v_1 - 2v_2 + 3v_3 + w_2 & - y_{s_2} & = -12 \\
& -4v_1 + 3v_2 + 2v_3 + w_3 & - y_{s_3} & = -30 \\
& -2v_1 - 2v_3 + w_4 & - y_{s_4} & = -48 \\
& 3v_1 - 4v_2 + v_3 + w_5 & - y_{s_5} & = -24 \\
& & & \\
& v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5, y_{s_1}, \ldots, y_{s_5} \geq 0 & &
\end{array}$$

Laut complementary slackness gilt also:

$$x_1 y_{s_1} + x_2 y_{s_2} + x_3 y_{s_3} + x_4 y_{s_4} + x_5 y_{s_5}$$
$$+ x_{s_1} v_1 + x_{s_2} v_2 + x_{s_3} v_3 + x_{s_4} w_1 + x_{s_5} w_2 + x_{s_6} w_3 + x_{s_7} w_4 + x_{s_5} w_5 = 0$$

Ersatznebenbedingung

Laut complementary slackness gilt:

$$x_1 y_{s_1} + x_2 y_{s_2} + x_3 y_{s_3} + x_4 y_{s_4} + x_5 y_{s_5}$$
$$+ x_{s_1} v_1 + x_{s_2} v_2 + x_{s_3} v_3 + x_{s_4} w_1 + x_{s_5} w_2 + x_{s_6} w_3 + x_{s_7} w_4 + x_{s_5} w_5 = 0$$

Ersatznebenbedingung

Laut complementary slackness gilt:

$$x_1 y_{s_1} + x_2 y_{s_2} + x_3 y_{s_3} + x_4 y_{s_4} + x_5 y_{s_5}$$
$$+ x_{s_1} v_1 + x_{s_2} v_2 + x_{s_3} v_3 + x_{s_4} w_1 + x_{s_5} w_2 + x_{s_6} w_3 + x_{s_7} w_4 + x_{s_5} w_5 = 0$$

Wegen $x_1, \ldots, x_5, x_{s_1}, \ldots, x_{s_8}, v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5, y_{s_1}, \ldots, y_{s_5} \geq 0$
gilt: $x_i > 0 \Rightarrow y_{s_i} = 0 \, \forall i = 1, \ldots, 5 \; (I)$

Ersatznebenbedingung

Laut complementary slackness gilt:

$$x_1 y_{s_1} + x_2 y_{s_2} + x_3 y_{s_3} + x_4 y_{s_4} + x_5 y_{s_5}$$
$$+ x_{s_1} v_1 + x_{s_2} v_2 + x_{s_3} v_3 + x_{s_4} w_1 + x_{s_5} w_2 + x_{s_6} w_3 + x_{s_7} w_4 + x_{s_5} w_5 = 0$$

Wegen $x_1, \ldots, x_5, x_{s_1}, \ldots, x_{s_8}, v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5, y_{s_1}, \ldots, y_{s_5} \geq 0$

gilt: $x_i > 0 \Rightarrow y_{s_i} = 0 \, \forall i = 1, \ldots, 5 \, (I)$

$x_{s_j} > 0 \Rightarrow v_j = 0 \, \forall j = 1, \ldots, 3 \, (II)$

Ersatznebenbedingung

Laut complementary slackness gilt:

$$x_1 y_{s_1} + x_2 y_{s_2} + x_3 y_{s_3} + x_4 y_{s_4} + x_5 y_{s_5}$$
$$+ x_{s_1} v_1 + x_{s_2} v_2 + x_{s_3} v_3 + x_{s_4} w_1 + x_{s_5} w_2 + x_{s_6} w_3 + x_{s_7} w_4 + x_{s_5} w_5 = 0$$

Wegen $x_1, \ldots, x_5, x_{s_1}, \ldots, x_{s_8}, v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5, y_{s_1}, \ldots, y_{s_5} \geq 0$

gilt: $x_i > 0 \Rightarrow y_{s_i} = 0 \, \forall i = 1, \ldots, 5 \, (I)$

$x_{s_j} > 0 \Rightarrow v_j = 0 \, \forall j = 1, \ldots, 3 \, (II)$

$x_{s_j} > 0 \Rightarrow w_{j-3} = 0 \, \forall j = 4, \ldots, 8 \, (III)$

Ersatznebenbedingung

Laut complementary slackness gilt:

$$x_1 y_{s_1} + x_2 y_{s_2} + x_3 y_{s_3} + x_4 y_{s_4} + x_5 y_{s_5}$$
$$+ x_{s_1} v_1 + x_{s_2} v_2 + x_{s_3} v_3 + x_{s_4} w_1 + x_{s_5} w_2 + x_{s_6} w_3 + x_{s_7} w_4 + x_{s_5} w_5 = 0$$

Wegen $x_1, \ldots, x_5, x_{s_1}, \ldots, x_{s_8}, v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5, y_{s_1}, \ldots, y_{s_5} \geq 0$

gilt: $x_i > 0 \Rightarrow y_{s_i} = 0 \, \forall i = 1, \ldots, 5 \, (I)$

$x_{s_j} > 0 \Rightarrow v_j = 0 \, \forall j = 1, \ldots, 3 \, (II)$

$x_{s_j} > 0 \Rightarrow w_{j-3} = 0 \, \forall j = 4, \ldots, 8 \, (III)$

Die optimale Lösung der LP-Relaxation von (B) lautet $x^T = (5/6,\ 1,\ 1/6,\ 1,\ 0)$.

Ersatznebenbedingung

Laut complementary slackness gilt:

$$x_1 y_{s_1} + x_2 y_{s_2} + x_3 y_{s_3} + x_4 y_{s_4} + x_5 y_{s_5}$$
$$+ x_{s_1} v_1 + x_{s_2} v_2 + x_{s_3} v_3 + x_{s_4} w_1 + x_{s_5} w_2 + x_{s_6} w_3 + x_{s_7} w_4 + x_{s_5} w_5 = 0$$

Wegen $x_1, \ldots, x_5, x_{s_1}, \ldots, x_{s_8}, v_1, \ldots, v_3, w_1, \ldots, w_5, y_{s_1}, \ldots, y_{s_5} \geq 0$

gilt: $x_i > 0 \Rightarrow y_{s_i} = 0 \, \forall i = 1, \ldots, 5 \; (I)$

$x_{s_j} > 0 \Rightarrow v_j = 0 \, \forall j = 1, \ldots, 3 \; (II)$

$x_{s_j} > 0 \Rightarrow w_{j-3} = 0 \, \forall j = 4, \ldots, 8 \; (III)$

Die optimale Lösung der LP-Relaxation von (B) lautet $x^T = (5/6, \ 1, \ 1/6, \ 1, \ 0)$.

Wegen (I) gilt also: $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0 \Rightarrow y_{s_1} = y_{s_2} = y_{s_3} = y_{s_4} = 0$

Ersatznebenbedingung

In der optimalen Lösung des dualen Modells gilt also:

$$
\begin{aligned}
2v_1 - 2v_2 - 4v_3 + w_1 &= -24 \\
-4v_1 - 2v_2 + 3v_3 + w_2 &= -12 \\
-4v_1 + 3v_2 + 2v_3 + w_3 &= -30 \\
-2v_1 - 2v_3 + w_4 &= -48 \\
3v_1 - 4v_2 + v_3 + w_5 - y_{s_5} &= -24
\end{aligned}
$$

Ersatznebenbedingung

In der optimalen Lösung des dualen Modells gilt also:

$$
\begin{aligned}
2v_1 - 2v_2 - 4v_3 + w_1 &= -24 \\
-4v_1 - 2v_2 + 3v_3 + w_2 &= -12 \\
-4v_1 + 3v_2 + 2v_3 + w_3 &= -30 \\
-2v_1 - 2v_3 + w_4 &= -48 \\
3v_1 - 4v_2 + v_3 + w_5 - y_{s_5} &= -24
\end{aligned}
$$

Die optimale Lösung der LP-Relaxation von (B) in die Restriktionen

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 + x_{s_1} &= -5 \\
-2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_5 + x_{s_2} &= -3 \\
-4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 + x_{s_3} &= -2 \\
x_1 + x_{s_4} &= 1 \\
x_2 + x_{s_5} &= 1 \\
x_3 + x_{s_6} &= 1 \\
x_4 + x_{s_7} &= 1 \\
x_5 + x_{s_8} &= 1
\end{aligned}
$$

eingesetzt ergibt weiter…

Ersatznebenbedingung

$$x_{s_1} = 0, x_{s_2} = {}^{1}/6, x_{s_3} = 0, x_{s_4} = {}^{1}/6, x_{s_5} = 0, x_{s_6} = {}^{5}/6, x_{s_7} = 0, x_{s_8} = 1$$

Ersatznebenbedingung

$x_{s_1} = 0, x_{s_2} = {}^1\!/6, x_{s_3} = 0, x_{s_4} = {}^1\!/6, x_{s_5} = 0, x_{s_6} = {}^5\!/6, x_{s_7} = 0, x_{s_8} = 1$

Aufgrund von (II) gilt

$x_{s_2} > 0 \;\Rightarrow v_2 = 0$

Ersatznebenbedingung

$x_{s_1} = 0, x_{s_2} = {}^1\!/6, x_{s_3} = 0, x_{s_4} = {}^1\!/6, x_{s_5} = 0, x_{s_6} = {}^5\!/6, x_{s_7} = 0, x_{s_8} = 1$

Aufgrund von (II) gilt

$x_{s_2} > 0 \Rightarrow v_2 = 0$

und aufgrund von (III) gilt

$x_{s_4}, x_{s_6}, x_{s_8} > 0 \Rightarrow w_1 = w_3 = w_5 = 0.$

Ersatznebenbedingung

$x_{s_1} = 0, x_{s_2} = {}^1/6, x_{s_3} = 0, x_{s_4} = {}^1/6, x_{s_5} = 0, x_{s_6} = {}^5/6, x_{s_7} = 0, x_{s_8} = 1$

Aufgrund von (II) gilt

$x_{s_2} > 0 \Rightarrow v_2 = 0$

und aufgrund von (III) gilt

$x_{s_4}, x_{s_6}, x_{s_8} > 0 \Rightarrow w_1 = w_3 = w_5 = 0\,.$

In der optimalen Lösung des dualen Modells gilt also weiter:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
2v_1 & -\,4v_3 & & & & = -24 \\
-4v_1 & +\,3v_3 & +\,w_2 & & & = -12 \\
-4v_1 & +\,2v_3 & & & & = -30 \\
-2v_1 & -\,2v_3 & & +\,w_4 & & = -48 \\
3v_1 & +\,v_3 & & & -\,y_{s_5} & = -24
\end{array}
$$

Ersatznebenbedingung

$$x_{s_1} = 0, x_{s_2} = 1/6, x_{s_3} = 0, x_{s_4} = 1/6, x_{s_5} = 0, x_{s_6} = 5/6, x_{s_7} = 0, x_{s_8} = 1$$

Aufgrund von (II) gilt

$$x_{s_2} > 0 \;\Rightarrow v_2 = 0$$

und aufgrund von (III) gilt

$$x_{s_4}, x_{s_6}, x_{s_8} > 0 \;\Rightarrow w_1 = w_3 = w_5 = 0.$$

In der optimalen Lösung des dualen Modells gilt also weiter:

$$\begin{array}{rrrrrr}
2v_1 & -4v_3 & & & & = -24 \\
-4v_1 & +3v_3 & +w_2 & & & = -12 \\
-4v_1 & +2v_3 & & & & = -30 \\
-2v_1 & -2v_3 & & +w_4 & & = -48 \\
3v_1 & +\;\;v_3 & & & -y_{s_5} & = -24
\end{array}$$

Ersatznebenbedingung

$x_{s_1} = 0, x_{s_2} = 1/6, x_{s_3} = 0, x_{s_4} = 1/6, x_{s_5} = 0, x_{s_6} = 5/6, x_{s_7} = 0, x_{s_8} = 1$

Aufgrund von (II) gilt

$x_{s_2} > 0 \Rightarrow v_2 = 0$

und aufgrund von (III) gilt

$x_{s_4}, x_{s_6}, x_{s_8} > 0 \Rightarrow w_1 = w_3 = w_5 = 0.$

In der optimalen Lösung des dualen Modells gilt also weiter:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
2v_1 & -4v_3 & & & & = -24 \\
-4v_1 & +3v_3 & +w_2 & & & = -12 \\
-4v_1 & +2v_3 & & & & = -30 \\
-2v_1 & -2v_3 & & +w_4 & & = -48 \\
3v_1 & +v_3 & & & -y_{s_5} & = -24
\end{array}
$$

Als optimale Lösung des dualen Modells ergibt sich also $v_1 = 14, v_2 = 0, v_3 = 13$

Ersatznebenbedingung

Die beste Ersatznebenbedingung lässt sich also einfach wie folgt bestimmen:

$$\begin{array}{rl} 14\cdot & (\ \ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \leq -5) + \\ 0\cdot & (-2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}- 2x_4} - 4x_5 \leq -3) + \\ 13\cdot & (-4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + \ \ x_5 \leq -2) \end{array}$$

Ersatznebenbedingung

Die beste Ersatznebenbedingung lässt sich also einfach wie folgt bestimmen:

$$
\begin{array}{rl}
14\cdot & (\ \ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \leq -5) + \\
0\cdot & (-2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad\quad - 4x_5 \leq -3) + \\
13\cdot & (-4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + \ \ x_5 \leq -2)
\end{array}
$$

Dies ergibt die gesuchte beste Ersatznebenbedingung

$$-24x_1 - 17x_2 - 30x_3 - 54x_4 + 55x_5 \leq -96$$

Ersatznebenbedingung

Die beste Ersatznebenbedingung lässt sich also einfach wie folgt bestimmen:

$$\begin{array}{rl} 14\cdot & (\ \ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \leq -5) + \\ 0\cdot & (-2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad\quad\ \ - 4x_5 \leq -3) + \\ 13\cdot & (-4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + \ \ x_5 \leq -2) \end{array}$$

Dies ergibt die gesuchte beste Ersatznebenbedingung

$$-24x_1 - 17x_2 - 30x_3 - 54x_4 + 55x_5 \leq -96$$

Diese erlaubt das Fixieren der Werte

$x_3 = x_4 = 1$ und $x_5 = 0$,

da sonst die Ersatznebenbedingung (und somit die eigentlichen Restriktionen) nicht erfüllt werden kann.