RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN
DEUTSCHE POST LEHRSTUHL FÜR OPTIMIERUNG VON DISTRIBUTIONSNETZWERKEN
Universitätsprofessor Dr.rer.nat.habil. Hans-Jürgen Sebastian

Klausur
Methoden und Anwendungen der Optimierung

25. März 2011

Nr.:

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang / Fachrichtung:

Hinweise:

- Füllen Sie die Felder oben vollständig aus und unterschreiben Sie die Klausur.
- Sämtliche Einträge in dem Klausurexemplar sind mit dokumentenechten Schreibutensilien (Kein Bleistift!) und in leserlicher Handschrift vorzunehmen .
- Die Antworten sind in diesem Klausurexemplar einzutragen. Bei Bedarf erhalten Sie weitere leere Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel außer Stift und Lineal zugelassen. Insbesondere ist die Benutzung von Taschenrechnern und Vorlesungsunterlagen unzulässig!
- Handys dürfen nicht zur Klausur mitgebracht werden.
- Die Höchstpunktzahl beträgt 90 Punkte; die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Beantworten Sie die Aufgaben möglichst stichpunktartig.
- Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit (Seiten 1 bis 9)!

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, die obigen Hinweise zur Kenntnis genommen zu haben und diese zu akzeptieren.

Unterschrift: ___________________________________

Aufgabe	Fragen	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Note
erreichbare Punkte	30	12	10	15	11	12	90	
erreichte Punkte								

Aufgabenteil (60 Punkte)

Aufgabe 1: Schnittebenenverfahren von Gomory (12 Punkte)

Gegeben ist das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 4x_2 \\ \text{s.d.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Simplex-Algorithmus auf dessen LP-Relaxation führt zu folgendem optimalen Endtableau:

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i^*
x_2	0	1	1/2	1/2	7/2
x_1	1	0	-1/4	1/4	3/4
Δz_j	0	0	1	3	17

Da die optimale Lösung der LP-Relaxation für das ursprüngliche Problem nicht zulässig ist, soll diese mit Hilfe des Schnittebenenverfahrens von Gomory bestimmt werden.

(a) Stellen Sie die dafür notwendige Gomory-Restriktion für die Basisvariable x_2 auf. (3 Punkte)

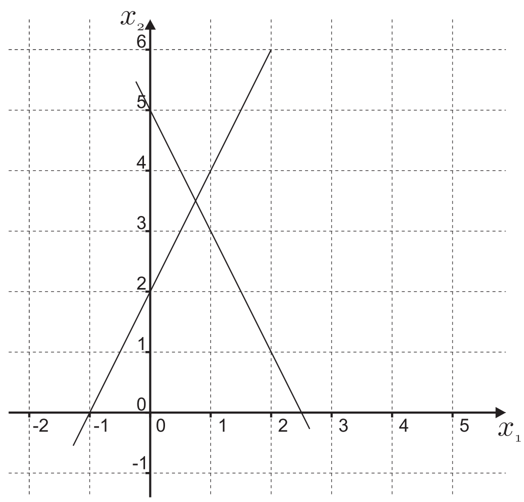
(b) Erweitern Sie obiges Endtableau des primalen Simplex-Algorithmus um die in (a) aufgestellte Gomory-Restriktion und führen Sie einen dualen Simplex-Schritt durch. (5 Punkte)

		b_i^*
Δz_j		

		b_i^*
Δz_j		

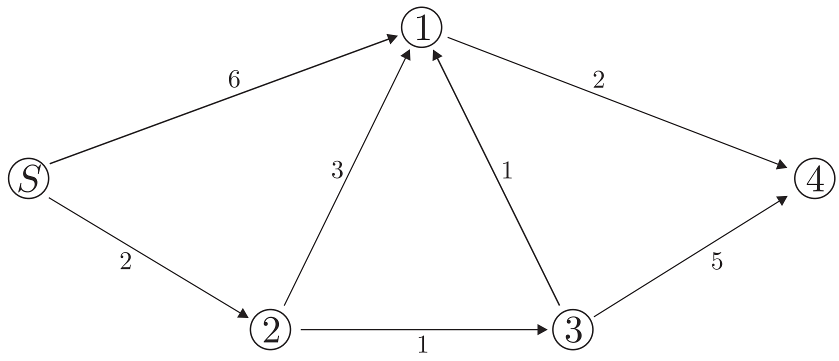
(c) Ist die in Aufgabenteil (b) bestimmte Lösung zulässig für das ursprüngliche Problem? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

(d) Zeichnen Sie die zu der in Aufgabenteil (a) aufgestellten Gomory-Restriktion gehörende Schnittebene in die unten stehende Grafik ein. (3 Punkte)



Aufgabe 2: FiFo-Algorithmus (10 Punkte)

Gegeben ist der folgende Digraph mit 5 Knoten:



Führen Sie für obigen Digraphen den FiFo-Algorithmus zur Bestimmung der kürzesten Wegen von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3 und 4 durch.

Hinweis: Falls während einer Iteration mehrere Knoten in die Warteschlange Q eingefügt werden, so fügen Sie sie aufsteigend nach Knotennummer sortiert ein.

(a) Tragen Sie hierfür in der untenstehenden Tabelle für jede Iteration des FiFo-Algorithmus den ausgewählten Knoten, die Warteschlange Q, sowie die Labels $d(1), \ldots, d(4)$ ein. (9 Punkte)

Iteration	Ausgewählter Knoten i	Q	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
Initialisierung	-	S	∞	∞	∞	∞

(b) Geben Sie die ermittelten kürzesten Wege von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3 und 4 sowie deren Länge explizit an. (1 Punkt)

Aufgabe 3: Transportproblem (15 Punkte)

Gegeben ist ein Transportproblem mit folgenden Angebots- und Nachfragemengen

Angebotsmengen

a_1	a_2	a_3	a_4
50	20	40	12

Nachfragemengen

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
15	15	25	20	17	30

sowie folgender Kostenmatrix:

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	2	4	3	4	2	2
A_2	4	6	5	5	3	4
A_3	8	8	7	4	1	4
A_4	5	4	3	7	2	1

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Greedy-Heuristik eine zulässige Startlösung für das obige Transportproblem. (2 Punkte)

Greedy	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1							50
A_2							20
A_3							40
A_4							12
b_j	15	15	25	20	17	30	

(b) Verwenden Sie die obige Lösung als Ausgangsbasislösung für die MODI-Methode. Bestimmen Sie dazu in der folgenden Tabelle die Werte der dualen Entscheidungsvariablen u_i und v_j für die Basislösung aus (a). (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	u_i
A_1	2	4	3	4	2	2	0
A_2	4	6	5	5	3	4	
A_3	8	8	7	4	1	4	
A_4	5	4	3	7	2	1	
v_j							

(c) Überprüfen Sie die so bestimmte duale Lösung auf Zulässigkeit, indem Sie die Werte der Δz_{ij} bestimmen. (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	u_i
A_1							0
A_2							
A_3							
A_4							
v_j							

(d) Bestimmen Sie die nächste Basislösung und tragen Sie diese in die nachfolgende Tabelle ein. (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1							50
A_2							20
A_3							40
A_4							12
b_j	15	15	25	20	17	30	

(e) Führen Sie nun einen weiteren Schritt der MODI-Methode durch. Vervollständigen Sie dazu in der folgenden Tabelle die Werte der u_i und der v_j für die Basislösung aus (d). (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	u_i
A_1	2	4	3	4	2	2	0
A_2	4	6	5	5	3	4	
A_3	8	8	7	4	1	4	
A_4	5	4	3	7	2	1	
v_j							

(f) Bestimmen Sie die Werte der Δz_{ij}. (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	u_i
A_1							0
A_2							
A_3							
A_4							
v_j							

(g) Ist die in Aufgabenteil (d) ermittelte Basislösung optimal? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

(h) Geben Sie eine alternative optimale Lösung an. (2 Punkte)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1							50
A_2							20
A_3							40
A_4							12
b_j	15	15	25	20	17	30	

Aufgabe 4: Savings-Verfahren (11 Punkte)

Ein Entsorgungsunternehmen muss täglich Touren zur Abholung von Wertstoffcontainern bei industriellen Kunden einer Region disponieren. Es verfügt dazu über einen Fuhrpark von LKWs mit einer Kapazität von $K = 10$ Containern.

Außerdem ist dem Entsorgungsunternehmen das Wertstoffaufkommen der einzelnen Kunden bekannt:

Kunde	A	B	C	D	E	F	G
Anzahl Container	3	4	3	1	1	2	3

Kunde	Container [ME]
A	3
B	4
C	3
D	1
E	1
F	2
G	3

Entfernung	A	B	C	D	E	F	G
0	30	50	50	20	100	55	60
A		75	30	50	70	45	90
B			100	70	145	30	50
C				30	90	75	70
D					120	75	40
E						115	160
F							80

Zur Ermittlung von möglichst guten Abholtouren möchte das Entsorgungsunternehmen das Savings-Verfahren anwenden.

(a) Bestimmen Sie die Savings s_{BC}, s_{BE} sowie s_{EF}. (3 Punkte)

$s_{BC} =$ $\qquad$ $s_{BE} =$ $\qquad$ $s_{EF} =$

(b) Bestimmen Sie einen Tourenplan mittels des Savings-Verfahrens und geben Sie diesen explizit an. Benutzen Sie dazu die im Folgenden angegebenen, um die aus Aufgabenteil (a) ergänzten, Savings. (8 Punkte)

$s_{AB} = 5$ $\quad$ $s_{AC} = 50$ $\quad$ $s_{AD} = 0$ $\quad$ $s_{AE} = 60$ $\quad$ $s_{AF} = 40$ $\quad$ $s_{AG} = 0$ $\quad$ $s_{BC} = \ldots$

$s_{BD} = 0$ $\quad$ $s_{BE} = \ldots$ $\quad$ $s_{BF} = 75$ $\quad$ $s_{BG} = 60$ $\quad$ $s_{CD} = 40$ $\quad$ $s_{CE} = 60$ $\quad$ $s_{CF} = 30$

$s_{CG} = 40$ $\quad$ $s_{DE} = 0$ $\quad$ $s_{DF} = 0$ $\quad$ $s_{DG} = 40$ $\quad$ $s_{EF} = \ldots$ $\quad$ $s_{EG} = 0$ $\quad$ $s_{FG} = 35$

Aufgabe 5: Nichtlineare Programmierung (12 Punkte)

Gegeben ist das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min\ f(x) \quad &= \quad x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 - 4x_2 \\ \text{s.d.} \quad & \quad\quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \quad\quad x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Geben Sie für obiges Problem die Kuhn-Tucker-Bedingungen in der Formulierung als Sattelpunkt der Lagrange-Funktion an. (6 Punkte)

(b) Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der in (a) aufgestellten Kuhn-Tucker-Bedingungen rechnerisch die optimale Lösung des obigen nichtlinearen Optimierungsproblems. Hinweis: Unterscheiden Sie dafür die beiden Fälle $u = 0$ bzw. $u > 0$. (6 Punkte)