

# Klausur Methoden und Anwendungen der Optimierung (PT2) 28. März 2014

Klausurnummer:

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang / Fachrichtung:

**Hinweise:**

- Füllen Sie die Felder oben vollständig aus bzw. korrigieren Sie ggf. die entsprechenden Einträge und unterschreiben Sie die Klausur.
- Sämtliche Einträge in dem Klausurexemplar sind mit dokumentenechten Schreibutensilien vorzunehmen (Kein Bleistift!).
- Die Antworten sind in diesem Klausurexemplar einzutragen. Bei Bedarf erhalten Sie weitere leere Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel außer Stift und Lineal zugelassen. Insbesondere ist die Benutzung von Taschenrechnern und Vorlesungs-/Übungsunterlagen unzulässig!
- Handys dürfen nicht zur Klausur mitgebracht werden bzw. sind auszuschalten.
- Die Höchstpunktzahl beträgt 90 Punkte; die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Beantworten Sie die Aufgaben möglichst stichpunktartig.
- Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit (Seiten 1 bis 10)!

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, die obigen Hinweise zur Kenntnis genommen zu haben, diese zu akzeptieren und mich gesund und somit prüfungsfähig zu fühlen.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

Aufgabe	Fragen	A1	A2	A3	A4	A5	$\Sigma$	Note
max. Punkte	30	13	12	11	13	11	90	
Punkte								

## Aufgabenteil (60 Punkte)

### Aufgabe 1: Schnittebenenverfahren von Gomory (13 Punkte)

Gegeben ist das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned}
 \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.d.} \quad &2x_1 + x_2 \leq 9 \\
 &x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
 &2x_1 + 2x_2 \leq 11 \\
 &x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Simplex-Algorithmus auf dessen LP-Relaxation führt zu folgendem optimalen Endtableau:

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$b_i^*$
$x_1$	1	0	0	-1	1	3
$x_2$	0	1	0	1	-1/2	5/2
$s_1$	0	0	1	1	-3/2	1/2
$\Delta z_j$	0	0	0	1	1/2	27/2

Da die optimale Lösung der LP-Relaxation für das ursprüngliche Problem nicht zulässig ist, soll diese mit Hilfe des Schnittebenenverfahrens von Gomory bestimmt werden.

(a) Stellen Sie die dafür notwendige Gomory-Restriktion für die Basisvariable  $x_2$  auf. (3 Punkte)

(b) Erweitern Sie obiges Endtableau des primalen Simplex-Algorithmus um die in (a) aufgestellte Gomory-Restriktion und führen Sie einen dualen Simplex-Schritt durch. (6 Punkte)

		$b_i^*$
$\Delta z_j$		

		$b_i^*$
$\Delta z_j$		

(c) Ist die in Aufgabenteil (b) bestimmte Lösung zulässig für das ursprüngliche Problem? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

(d) Bestimmen Sie für die in Aufgabenteil (a) aufgestellte Gomory-Restriktion die Gleichung der entsprechenden Schnittebene und geben Sie diese explizit an. (3 Punkte)

**Aufgabe 2: Transportproblem (12 Punkte)**

Gegeben ist ein Transportproblem mit folgenden Angebots- und Nachfragemengen:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
25	35	60	23	35

$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
35	20	21	35	27	40

sowie folgender Kostenmatrix:

$c_{ij}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$
$A_1$	1	5	2	4	7	4
$A_2$	4	3	4	6	9	3
$A_3$	1	8	1	2	5	8
$A_4$	6	4	3	5	4	5
$A_5$	3	2	8	3	6	3

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Nordwesteckenregel eine zulässige Basislösung für das obige Transportproblem. (2 Punkte)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i$
$A_1$							25
$A_2$							35
$A_3$							60
$A_4$							23
$A_5$							35
$b_j$	35	20	21	35	27	40	

(b) Bestimmen Sie für die folgende Basislösung die dazugehörige duale Lösung. (2 Punkte)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i$
$A_1$	5	20					25
$A_2$						35	35
$A_3$	30		21	5	4		60
$A_4$					23		23
$A_5$				30		5	35
$b_j$	35	20	21	35	27	40	

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$u_i$
$A_1$	1	5	2	4	7	4	0
$A_2$	4	3	4	6	9	3	
$A_3$	1	8	1	2	5	8	
$A_4$	6	4	3	5	4	5	
$A_5$	3	2	8	3	6	3	
$v_j$							

(c) Überprüfen Sie die in Aufgabenteil (b) bestimmte duale Lösung auf Zulässigkeit, indem Sie die Werte der  $\Delta z_{ij}$  bestimmen. (3 Punkte)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$u_i$
$A_1$							0
$A_2$							
$A_3$							
$A_4$							
$A_5$							
$v_j$							

- (d) Ist die duale Lösung zulässig? Was bedeutet dies für die in Aufgabenteil (b) gegebene Basislösung? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort. (1 Punkt)

- (e) Bestimmen Sie die nächste Basislösung und tragen Sie diese in die nachfolgende Tabelle ein. (2 Punkte)

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$a_i$
$A_1$							25
$A_2$							35
$A_3$							60
$A_4$							23
$A_5$							35
$b_j$	35	20	21	35	27	40	

- (f) Geben Sie an, um welchen Betrag sich der Zielfunktionswert durch den durchgeführten Basistausch verbessert. (2 Punkte)



**Aufgabe 4: Nichtlineare Programmierung (13 Punkte)**

Gegeben ist das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \frac{1}{3}x_1^2 + 2x_2^2 - 9x_1 + 5x_2 \\ \text{s.d.} \quad x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 13 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Geben Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen für obiges Problem an. Verwenden Sie dabei die Formulierung als **Sattelpunkt der Lagrange-Funktion**. (6 Punkte)

- (b) Ist das Verfahren von Wolfe auf obiges Problem anwendbar? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 Punkte)



- (c) Obiges Problem soll nun mit dem Verfahren von Wolfe gelöst werden. Stellen Sie hierfür das Starttableau **vollständig** auf, bestimmen Sie das erste Pivotelement und begründen Sie Ihre Wahl. (5 Punkte)

		$b_i^*$
$\Delta z_j$		

**Aufgabe 5: Dynamische Optimierung (11 Punkte)**

Der Betreiber einer Tabakhandlung hat für die nächsten sieben Perioden die folgenden Nachfragemengen für Zigarrenkisten ermittelt:

Periode	1	2	3	4	5	6	7
Nachfrage [Stück]	22	55	15	30	45	20	60

Bei der Bestellung beziehungsweise der Lagerung der Zigarrenkisten fallen folgende Kosten an:

- Bestellfixe Kosten  $K$  in Höhe von 250 €/Bestellung
- Lagerkosten  $h$  in Höhe von 2€/(Stück·Periode)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Wagner-Whitin eine optimale Bestellpolitik und geben Sie diese zusammen mit den optimalen Gesamtkosten explizit an. (11 Punkte)

$j$	$z_j$	$C_j^*$	$\kappa_j^*$	1	2	3	4	5	6	7
1	22									
2	55									
3	15									
4	30									
5	45									
6	20									
7	60									

Optimale Bestellpolitik:

Optimale Gesamtkosten: