Operations Research 1

Prof. Dr. Marco Lübbecke
marco.luebbecke@rwth-aachen.de

WS 2015/16 · 3. Vorlesung

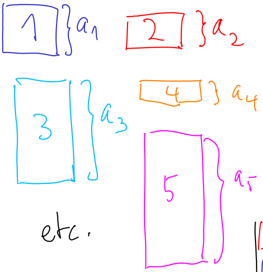
@mluebbecke OperationsResearchRWTH

Bin Packing Problem

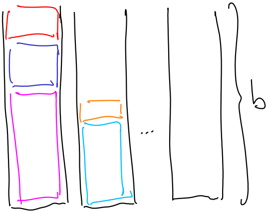
n Gegenstände der Größe a_i,
m Bins der Kapazität b

$m \geq n$

packe *alle* Gegenstände in minimal wenige Bins so, dass Kapazitäten eingehalten



etc.



$$\min \sum_{j=1}^{m} y_j$$

$$x_{ij} \leq y_j \qquad i = 1,\dots,n \quad j = 1,\dots,m$$

alternativ dazu

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq n \cdot y_j \qquad j = 1,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_{ij} \leq b \qquad j = 1,\dots,m$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad j = 1,\dots,m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i \to j$$

Modellieren: Designentscheidungen

- Beispiel:
  man möchte Kapazitäten verfügbar machen, $y \in \{0, 1\}$

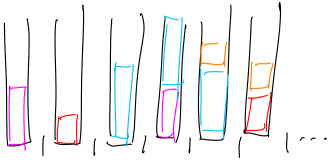
  $y = 1$: Kapazität cap steht zur Verfügung

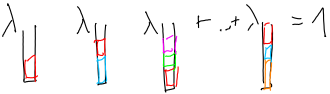
  $y = 0$: Kapazität cap steht nicht zur Verfügung
- im Falle der Verfügbarkeit, *kann* die Kapazität benutzt werden, $x \geq 0$, *muss* aber nicht ausgeschöpft werden
- $x \leq cap \cdot y$

Bin Packing Problem: Alternatives Modell

Alle Möglichkeiten auflisten, eine Dose zu packen:

z.B. $\square$

$P = \Big\{$  $, \dots \Big\}$



$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{p \in P} \lambda_{pj}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{p \in P \\ i \in p}} \lambda_{pj} = 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

i-ter Gegenstand kommt
in Muster p vor

$\lambda_{pj} \in \{0,1\}$ Bin j wird nach Muster p bepackt

Segen und Fluch

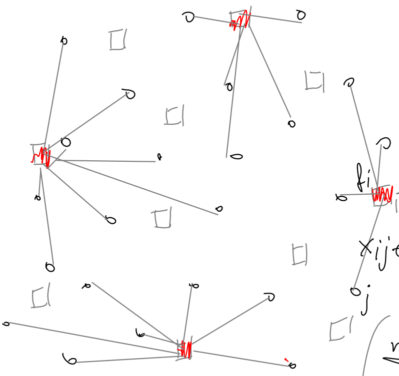
- in der linearen Optimierung ist Modellierung meißt „klar“
- in der ganzzahligen Optimierung besteht viel mehr Freiheit
- erfordert viel Übung und Erfahrung
- „wir werden nie genügend fähige Modellierer haben“
- es hilft, sich viel an- und abzuschauen
- theoretisches/algorithmisches Hintergrundwissen hilft später

Standortplanung (Facility Location)

m potentielle Standorte mit Eröffnungskosten f_i, n Kunden, Verbindungskosten c_{ij}

eröffne Standorte so, dass jeder Kunde von einem Standort bedient wird und Gesamtkosten minimal

a_j b_i



$x_{ij} \in \{0,1\}$

$$\min \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

$x_{ij} \in \{0,1\}$ Kunde j -> Standort i

$y_i \in \{0,1\}$ Standort i öffnen?

mit Kapazitäten

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \le b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

Operations Research RWTH AACHEN UNIVERSITY

Modellieren logischer Bedingungen

- binäre Variable $x_A = 1 \iff$ Aussage A wahr

  z.B. $A \equiv$ „ich kaufe eine neue Fräsmaschine“

- Implikation „wenn A, dann auch B“ ($A \Rightarrow B$): $x_A \leq x_B$
- Kontraposition „wenn A nicht, dann auch B nicht“ : $x_A \geq x_B$
- Äquivalenz ($A \iff B$): $x_A = x_B$

- wir kennen schon:

  genau eins ist wahr: $\sum_i x_i = 1$

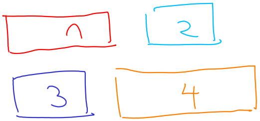
  höchstens eins ist wahr: $\sum_i x_i \leq 1$

  mindestens eins ist wahr: $\sum_i x_i \geq 1$

Scheduling auf parallelen Maschinen

n Jobs der Dauer p_j,
m Maschinen

weise jedem Job eine Maschine so zu, dass Gesamtfertigstellzeit minimal makespan



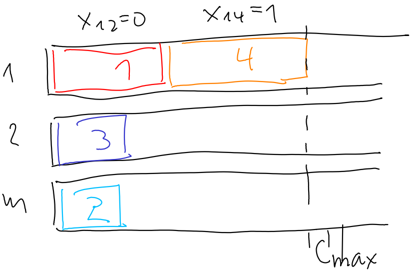
$$\min \quad C_{max}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \le C_{max} \qquad i = 1, \dots, m$$

$$C_{max} \ge 0$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$ Job j -> Maschine i?



Scheduling auf parallelen Maschinen

n Jobs der Dauer p_j,
m Maschinen

weise jedem Job eine Maschine so zu, dass Gesamtfertigstellzeit minimal makespan

$$
\begin{array}{llcll}
\min & C_{max} & & & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} x_{jk} & = & 1 & \forall j \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j x_{jk} & = & C_k & \forall k \\
& C_k & \leq & C_{max} & \forall k \\
& C_k & \geq & 0 & \forall k \\
& C_{max} & \geq & 0 & \\
& x_{jk} & \in & \{0,1\} & \forall j,k
\end{array}
$$