Aufgabe 19

a

$$
\begin{array}{llcll}
\min & d_{max} & & & \\
s.t. & \sum_{j\in\{1,...,n\}} x_{ij} & = & 1 & \forall i \in \{1,..,n\} \\
 & x_{ji} \cdot d_{ji} & \leq & d_{max} & \forall i,j \in \{1,...,n\}, i \neq j \\
 & & x_{ij} \in \{0,1\} & &
\end{array}
$$

Die boolsche Variable x_{ij} ist genau dann 1, wenn ein Bus von der Station $i \in \{1,...n\}$ nach $j \in \{1,...,n\}$ fährt, wobei $i \neq j$ gilt.

Die erste Nebenbedingung garantiert, dass jede Station genau einmal angefahren wird. In der zweiten Nebenbedingung wird die längste Distanz unter den verwendeten Distanzen gesucht. Welche dann, laut Zielfunktion, minimiert wird. Da diese Nebenbedingung unabhängig über für alle Kombinationen aus $i, j \in \{1,...,n\}$ geprüft wird, ist es nicht notwendig eine weitere Nebenbedingung für d_{ji} hinzuzufügen.

b

$$
\begin{array}{llcll}
\min & d_{max} & & & \\
s.t. & \sum_{j\in\{1,...,n\}} x_{ij} & = & 1 & \forall i \in \{1,..,n\} \\
 & x_{ij} \cdot + x_{jk} & \leq & 1 + x'_{ik} & \forall i,j,k \in \{1,...,n\} \\
 & x'_{ij} \cdot d'_{ij} + x_{jk} \cdot d_{jk} & \leq & d_{max} & \forall i,j,k \in \{1,...,n\}, i \neq j \\
 & & x_{ij}, x'_{ij} \in \{0,1\}, d'_{ij} \geq 0 & &
\end{array}
$$

Die boolsche Variable $x'_{ij} \in \{0,1\}$ ist genau dann 1, wenn ein Bus von der Station $i \in \{1,...,n\}$ über eine weitere Station zu der Station $j \in \{1,...,n\}$ fährt. Die Variable $d'_{ij} \in \mathbb{R}^+$ stellt die Distanz einer Strecke von $i \in \{1,...,n\}$ nach $k \in \{1,...,n\}$ mit genau einer beliebigen Station $j \in \{1,...,n\}$ dazwischen.

Die ersten Nebenbedingung ist wie im im obrigen Aufgabenteil. Die zweite Nebenbedingung sucht nacht Stationen, die aufeinander folgen. Hierfür wird die neue Variable x'_{ij} wie oben beschrieben verwendet. Sollten sollte von i über j nach k gefahren werden, mit $i,j,k \in \{1,...,n\}$, dann gilt $x_{ij} = x_{jk} = 1$, also $x_{ij} + x_{jk} = 2$ woraus $x'_{ik} = 1$ folgt. Sollte $x_{ij} \neq x_{jk}$ oder $x_{ij} = x_{jk} = 0$ sein, so bilden die Stationen offensichtlich keine Verbindung und x'_{ik} muss nicht auf 1 gesetzt werden. Da es sich hierbei um ein Minimierungsproblem handelt und x'_{ik} indirekt mit in die Zielfunktion einfließt wird dieses dann auch nicht auf 1 gesetzt.

Die Idee des LPs besteht also darin zu jeder Station eine Vorgängerstation zu finden. Da es sich um eine Rundtour handelt gibt es keine Ausnahme und es ist ebenso egal, bei welcher Station begonnen werden muss.

Aufgabe 20

a

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum\limits_{j\in\{1,\dots,m\},j\neq i} x_{ij}\cdot d_{ij} & & \\
s.t. & \sum\limits_{j\in L_k} x_j & \geq & d_k \quad \forall k\in\{1,...,m\} \\
 & \sum\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} x_{1i} & = & 1 \\
 & \sum\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} x_{i1} & = & 1 \\
 & \sum\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} x_{ij} & = & x_j \quad \forall j\in\{1,...,n\} \\
 & \sum\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} x_{ji} & = & x_j \quad \forall j\in\{1,...,n\}
\end{array}
$$

Die boolsche Variable x_{ij} ist genau dann 1, wenn in der Stadt i ein Konzert gespielt wird und als nächstes in der Stadt j, wodurch die Kosten d_{ij} anfallen. Die boolsche Variable x_i ist genau dann 1, wenn während der Tour in der Stadt i ein Konzert gespielt wird.

In der Zielfunktion werden alle Kosten aufsummiert die tatsächlich anfallen, also werden Kosten genau dann aufsummiert, wenn die Strecke d_{ij} tatsächlich genutzt wird. Die erste Nebenbedingung sagt aus, dass die Anzahl der Konzert in einem Land k mindestens d_k sein muss. Hierfür wird über alle Städte in k summiert und für jedes in Land k stattfinde Konzert 1 addiert. Die zweite Nebenbedingung legt die Stadt 1 als Startpunkt der Tour fest. Die dritte Nebenbedingung legt die Stadt 1 als die Stadt fest, in welcher die Tour endet.

b

In dem LP aus dem obrigen Aufgabenteil muss nur die Funktion d_{ij} durch d'_{ij} ersetzt werden. Da im obrigen Aufgabenteil nicht von $d_{ij} = d_{ji}$ ausgegangen worden ist, muss an dieser Stelle somit keine Veränderung vorgenommen werden.

Aufgabe 21

Zur einfacherern Lösung des Problems und Erstellung des GAMS-Programms wird das LP zunächst formal mathematisch aufgeschrieben.

Sets:

1. t Zeitpunkte
2. j Jobs

$$
\begin{array}{llcll}
\min & f_{max} & & & \\
s.t. & s_j & \geq & r_j & \forall j \in J \\
 & s_j & \geq & s_{prec(j)} + p_{prec(j)} & \forall j \in J \\
 & f_j & = & s_j + p_j & \forall j \in J \\
 & x_j(t) & = & 1 & \forall j \in J, s_j \leq t \leq f_j \\
 & f_j & \leq & f_{max} & \forall j \in J \\
 & \sum\limits_{j \in J} x_j(t) & = & 1 & \forall t \in T
\end{array}
$$

$$
s_j \geq 0, f_j \geq 0, x_j(t) \in \{0, 1\}
$$