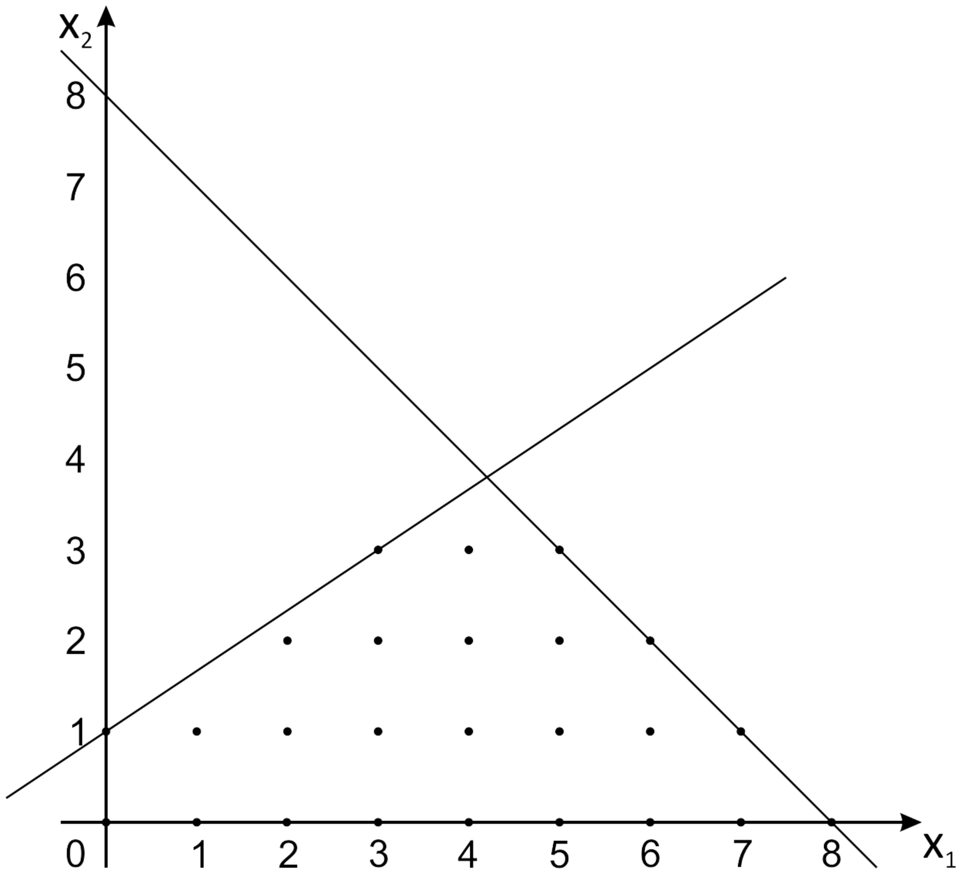
Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Betrachte das folgende ganzzahlige LP

$$\max z = x_1 + 4x_2$$

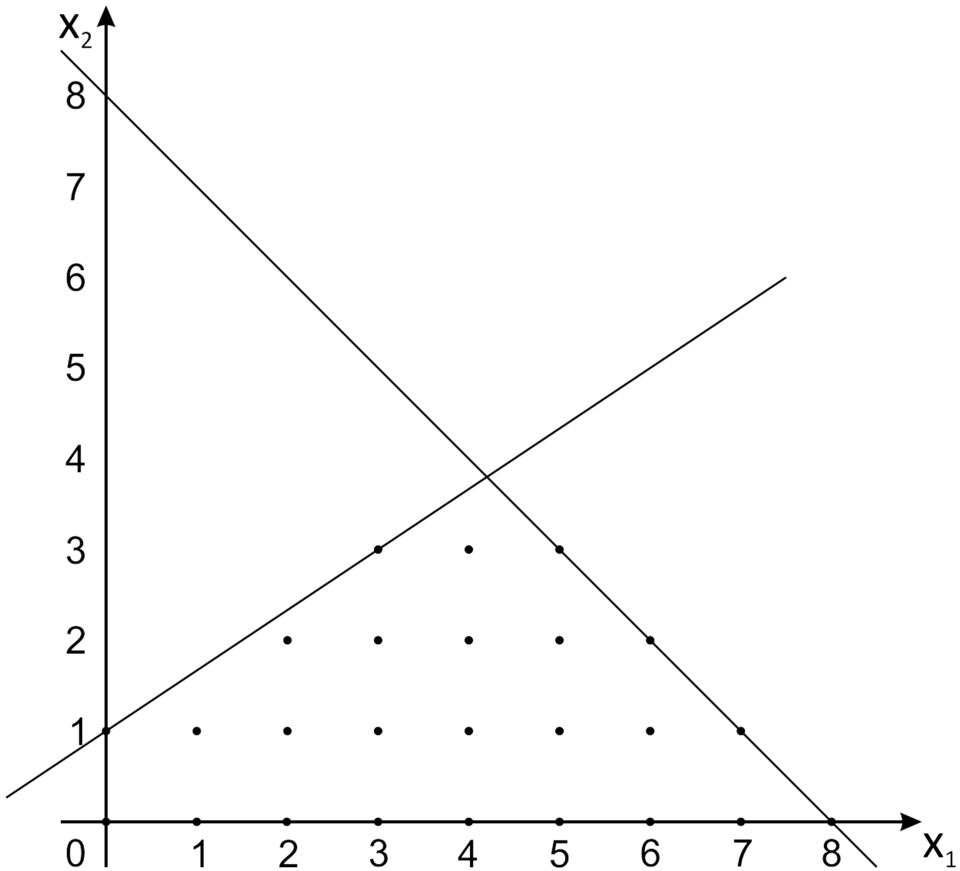
$$\begin{aligned} \text{s.d.} \quad -2x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1,\, x_2 &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$



Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Betrachte das folgende ganzzahlige LP

$$\begin{aligned} \max\ z \quad &= \quad x_1 + 4x_2 \\ \text{s.d.} \quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 + \ \ x_2 \leq 8 \\ & x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

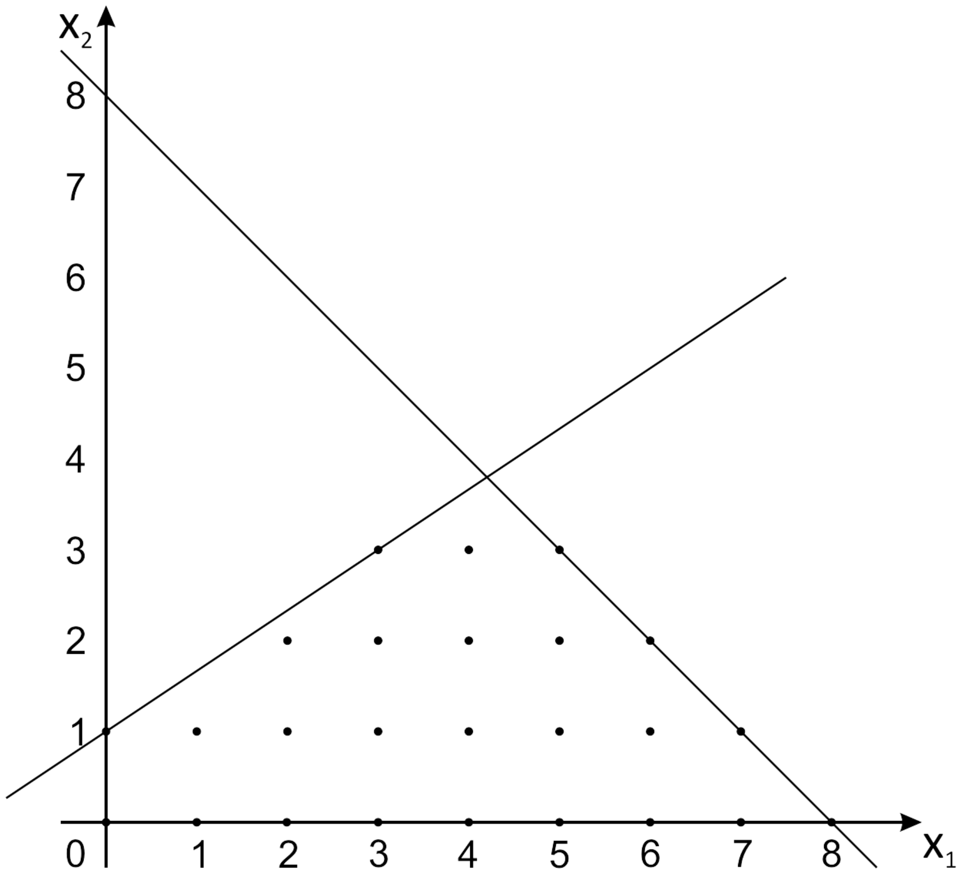


Wegen Ganzzahligkeit schwierig zu lösen!

Betrachte das folgende ganzzahlige LP

$$\max\ z = x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.d.} \quad -2x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 + \ \ x_2 &\leq 8 \\ x_1,\ x_2 &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$



Wegen Ganzzahligkeit schwierig zu lösen!

Idee: Löse LP-Relaxation!

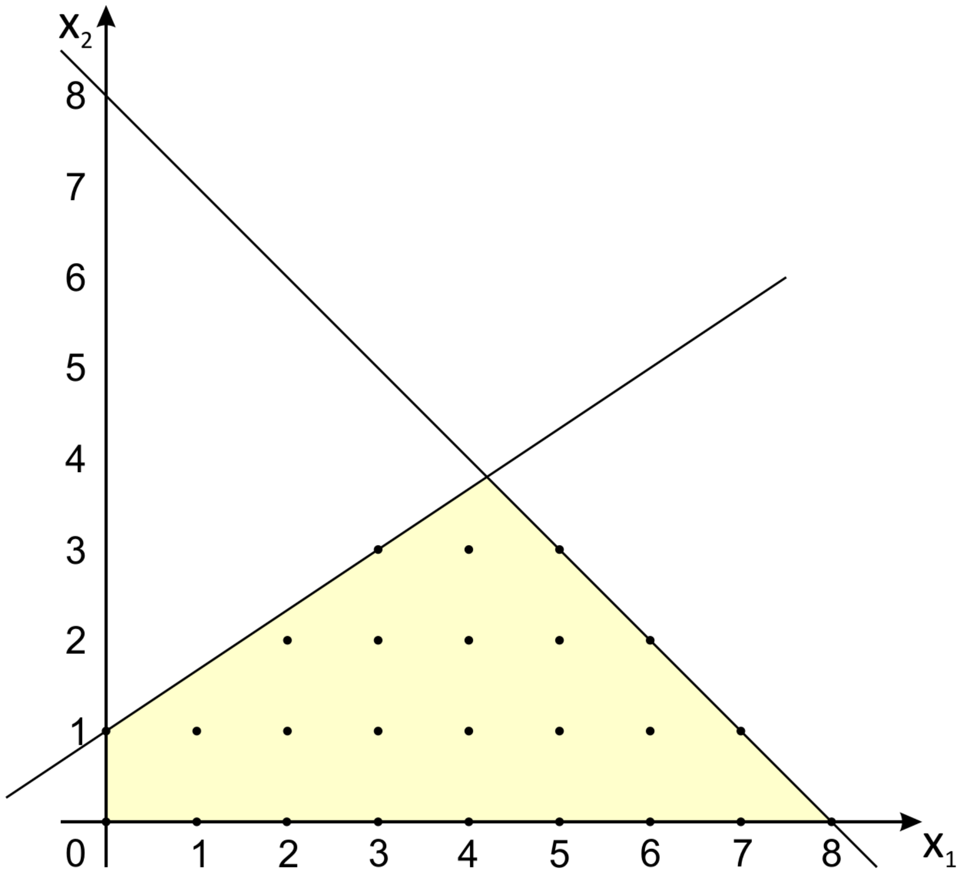
$x_1,\ x_2 \geq 0$ statt $x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}_0$

Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Betrachte das folgende ganzzahlige LP

$$\max z = x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.d.} \quad -2x_1 + 3x_2 &\le 3 \\ x_1 + x_2 &\le 8 \\ x_1,\ x_2 &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$



Wegen Ganzzahligkeit schwierig zu lösen!

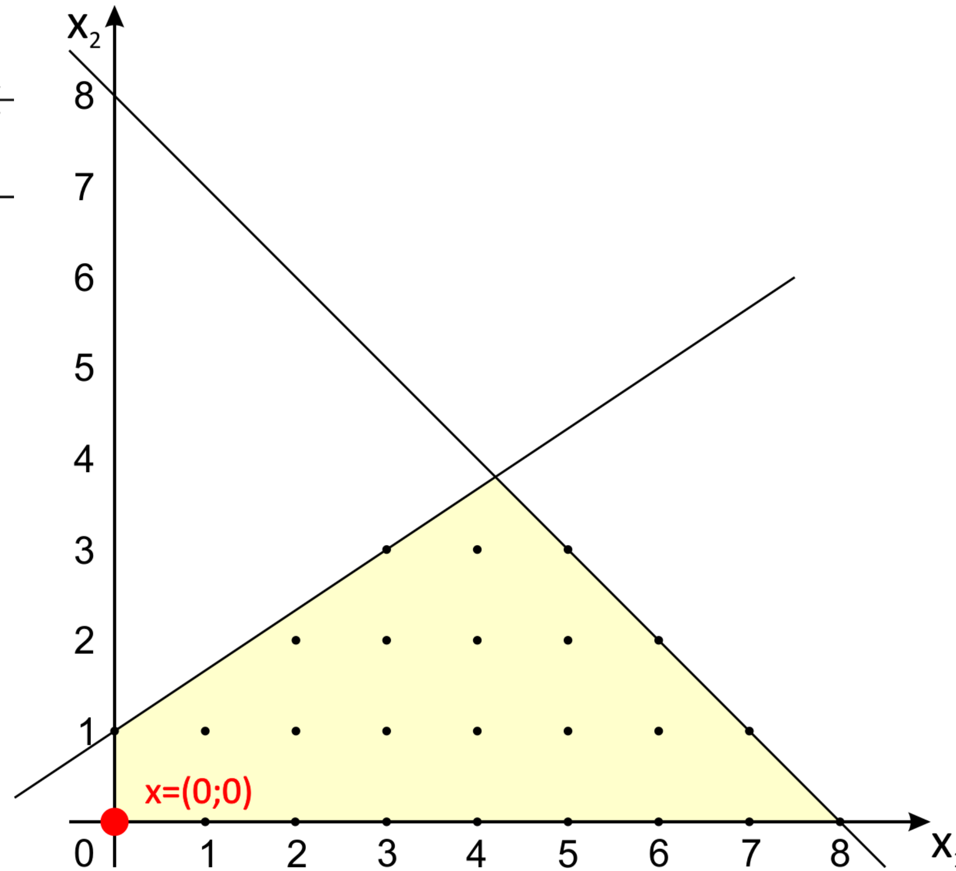
Idee: Löse LP-Relaxation!

$x_1,\ x_2 \ge 0$ statt $x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}_0$

Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

LP Relaxation einfach zu lösen (z.B. Simplex)

	x_1	x_2	s_1	s_2		
s_1	-2	$\mathbf{3}$	1	0	3	$\leftarrow$
s_2	1	1	0	1	8	
	-1	-4	0	0	0	
		$\uparrow$				

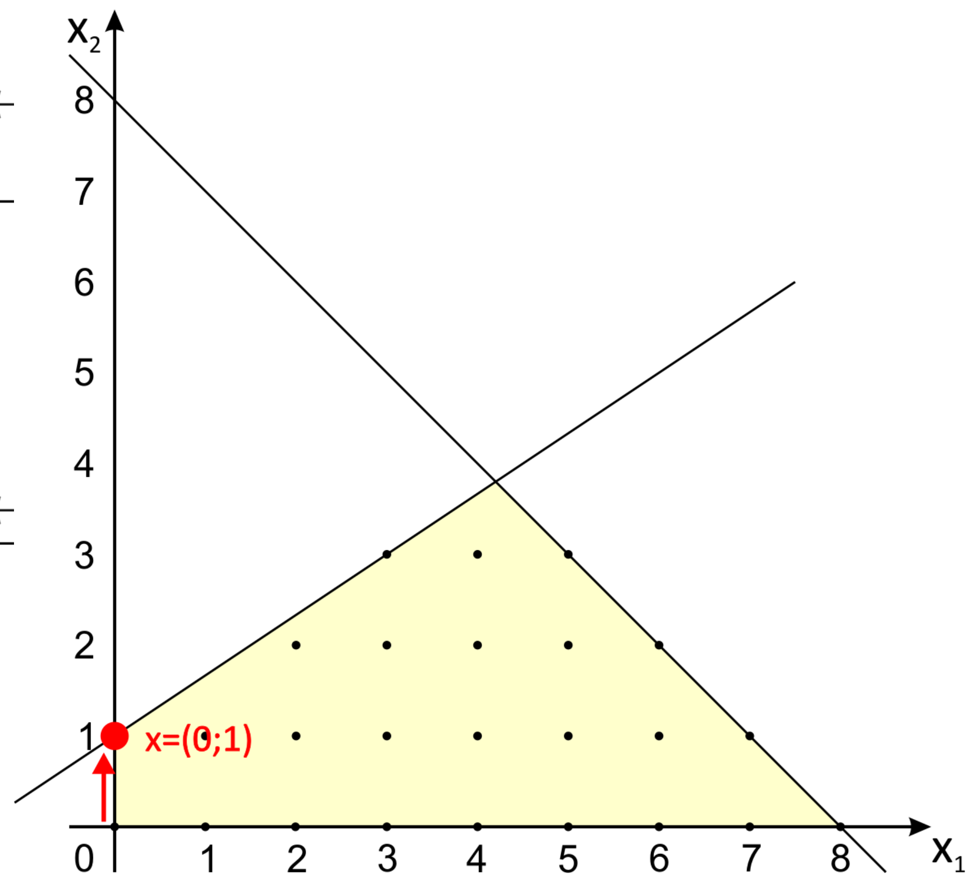


Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

LP Relaxation einfach zu lösen (z.B. Simplex)

	x_1	x_2	s_1	s_2		
s_1	-2	$\mathbf{3}$	1	0	3	$\leftarrow$
s_2	1	1	0	1	8	
	-1	-4	0	0	0	
		$\uparrow$				

	x_1	x_2	s_1	s_2		
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1	
s_2	$\mathbf{1\frac{2}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	7	$\leftarrow$
	$-3\frac{2}{3}$	0	$1\frac{2}{3}$	0	4	
	$\uparrow$					



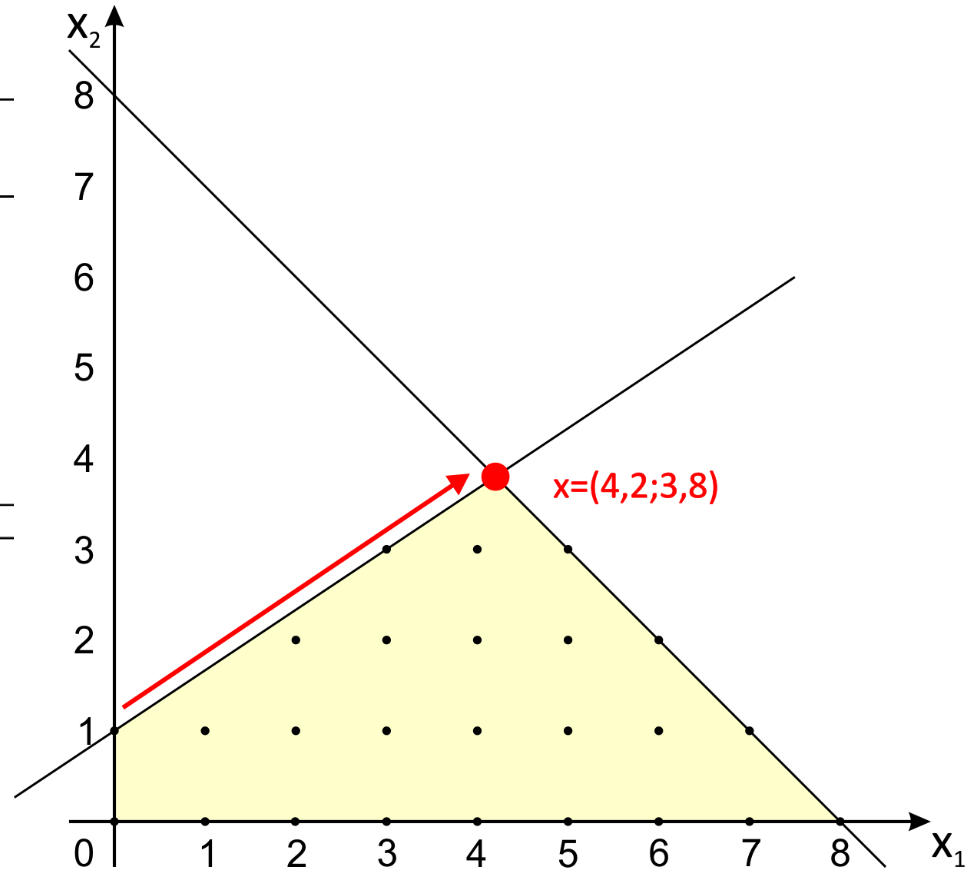
Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

LP Relaxation einfach zu lösen (z.B. Simplex)

	x_1	x_2	s_1	s_2		
s_1	-2	$\mathbf{3}$	1	0	3	$\leftarrow$
s_2	1	1	0	1	8	
	-1	-4	0	0	0	
		$\uparrow$				

	x_1	x_2	s_1	s_2		
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1	
s_2	$\mathbf{1\frac{2}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	7	$\leftarrow$
	$-3\frac{2}{3}$	0	$1\frac{2}{3}$	0	4	
	$\uparrow$					

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$3\frac{4}{5}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$4\frac{1}{5}$
	0	0	$\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{5}$	$19\frac{2}{5}$



Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Optimale Lösung der Relaxation nicht ganzzahlig!

- Somit auch nicht zulässig für ursprüngliches Problem

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$3\frac{4}{5}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$4\frac{1}{5}$
	0	0	$\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{5}$	$19\frac{2}{5}$

Verzweigen in zwei Teilprobleme (hier nach x_1)

- Teilproblem 1: $x_1 \leq 4$
- Teilproblem 2: $x_1 \geq 5$

(Notwendige aber nicht hinreichende Bedingungen für Ganzzahligkeit)

Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Betrachte Teilproblem 1

$$\max z = x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.d.} \quad -2x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Betrachte Teilproblem 1

$$\max\ z = x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.d.} \quad -2x_1 + 3x_2 &\le 3 \\ x_1 + x_2 &\le 8 \\ x_1 &\le 4 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Idee: Nicht dieses Problem lösen, sondern Endtableau des darüberliegenden Knotens erweitern

Betrachte Teilproblem 1

$$
\begin{aligned}
\max\ z \quad &= \quad x_1 + 4x_2 \\
\text{s.d.} \quad & \quad -2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\
& \quad\quad x_1 + \ \ x_2 \leq 8 \\
& \quad\quad x_1 \quad\quad\ \ \leq 4 \\
& \quad x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

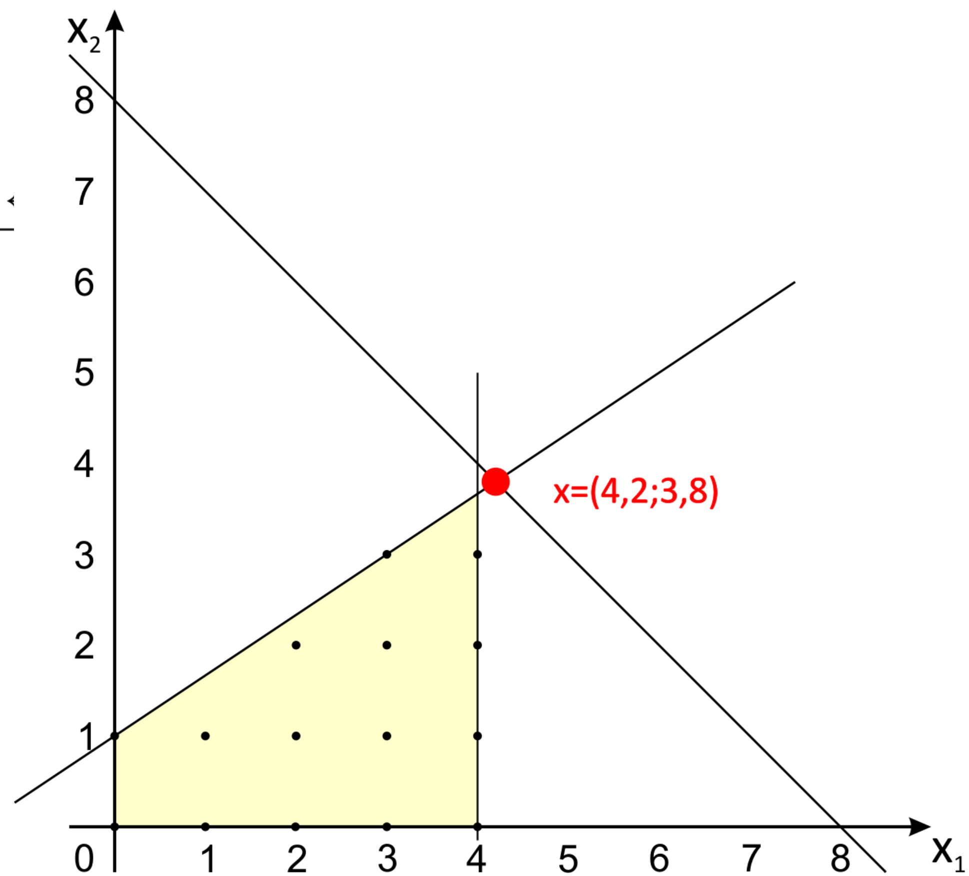
Idee: Nicht dieses Problem lösen, sondern Endtableau des darüberliegenden Knotens erweitern

Hierzu Restriktion $x_1 + s_3 = 4$ an Basis des Endtableaus anpassen

- Liefert $\frac{1}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2 + s_3 = -\frac{1}{5}$
- Dualen Simplexschritt durchführen

Betrachte Teilproblem 1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$3\frac{4}{5}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$4\frac{1}{5}$
s_3	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$ $\leftarrow$
	0	0	$\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{5}$	0	$19\frac{2}{5}$
				$\uparrow$		

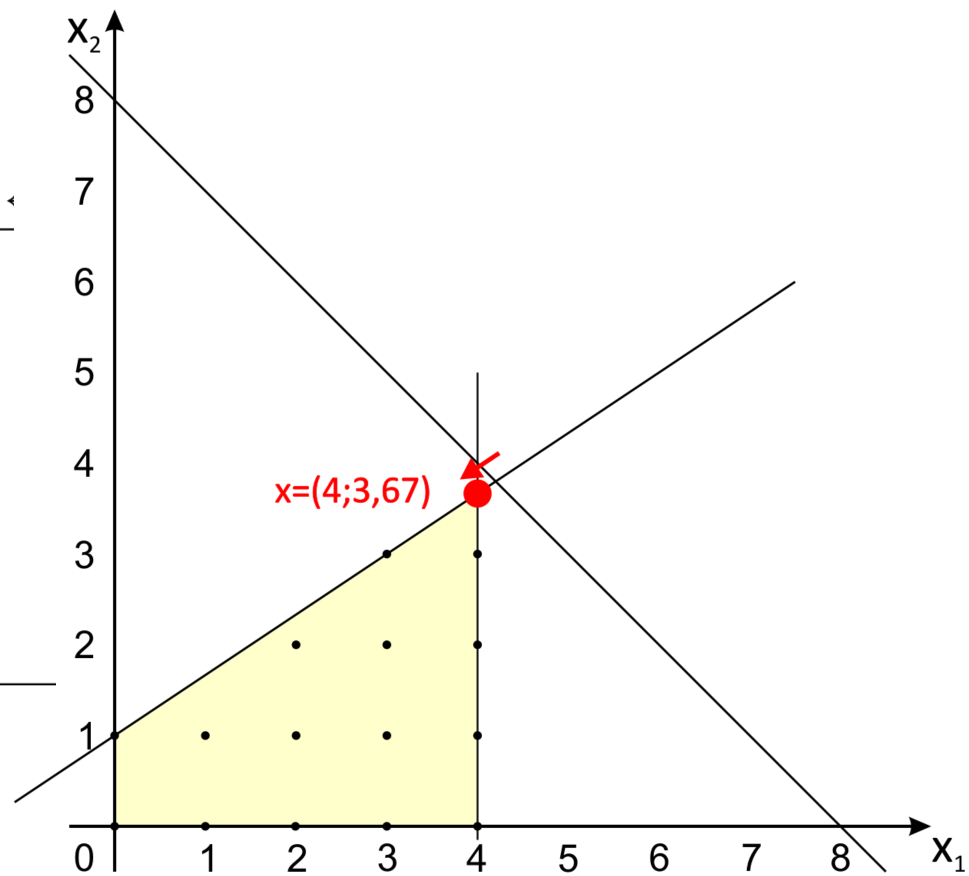


Betrachte Teilproblem 1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$3\frac{4}{5}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$4\frac{1}{5}$
s_3	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$
	0	0	$\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{5}$	0	$19\frac{2}{5}$
				$\uparrow$		

Dualer Simplexschritt liefert

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$3\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	0	1	4
s_2	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	0	$1\frac{1}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$	$18\frac{2}{3}$



Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Optimale Lösung von Teilproblem 1 nicht ganzzahlig bzw. nicht zulässig für das ursprüngliche Problem!

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$3\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	0	1	4
s_2	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	0	$1\frac{1}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$	$18\frac{2}{3}$

Verzweigen in zwei Teilprobleme (nach x_2)

- Teilproblem 3: $x_2 \leq 3$
- Teilproblem 4: $x_2 \geq 4$

Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Betrachte Teilproblem 3

$$\max\ z \quad = \quad x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.d.} \qquad -2x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 + \ \ x_2 &\leq 8 \\ x_1 \qquad\quad &\leq 4 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

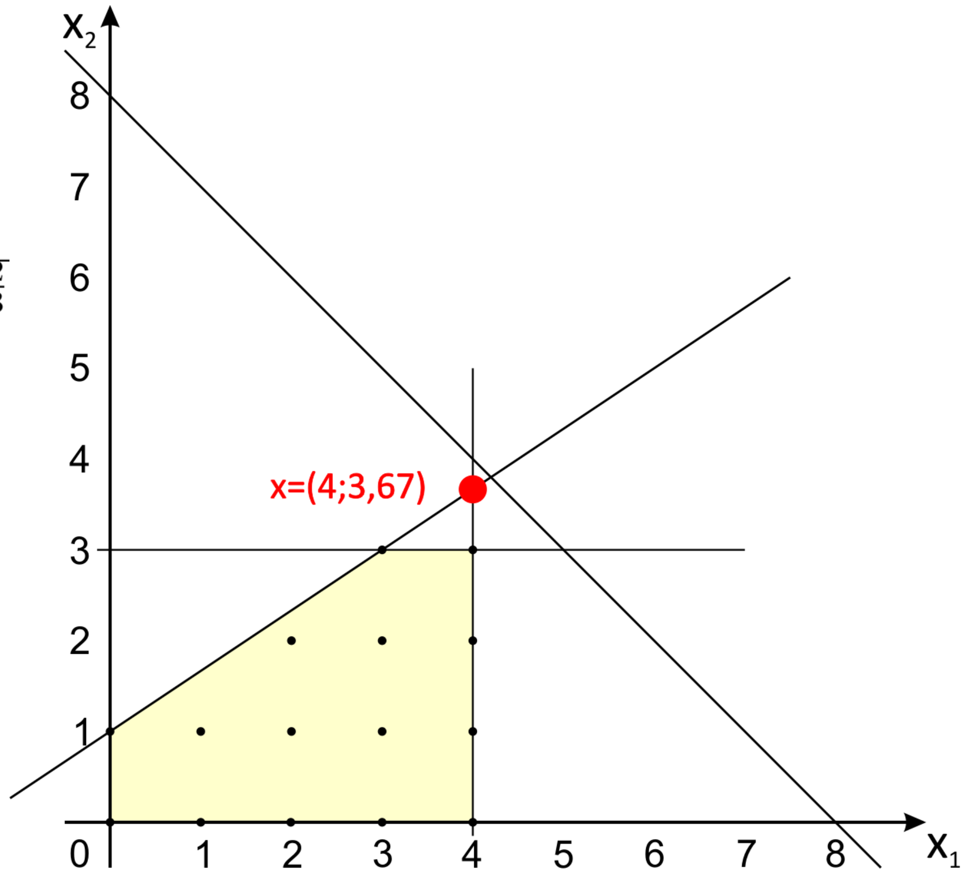
Hierzu Restriktion $x_2 + s_4 = 3$ an das Endtableaus des darüber liegenden Knotens anhängen

- Basistransformation liefert: $-\frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_3 + s_4 = -\frac{2}{3}$
- Dualen Simplexschritt durchführen

Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Betrachte Teilproblem 3

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	0	1	0	4
s_2	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-1\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
s_4	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
	0	0	$1\frac{1}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$	0	$18\frac{2}{3}$
			$\uparrow$				



Verfahren von Dakin – Aufgabe 7

Betrachte Teilproblem 3

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	0	1	0	4
s_2	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-1\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
s_4	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
	0	0	$1\frac{1}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$	0	$18\frac{2}{3}$
			$\uparrow$				

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_2	0	1	0	0	0	1	3
x_1	1	0	0	0	1	0	4
s_2	0	0	0	1	-1	-1	1
s_4	0	0	1	0	2	-3	2
	0	0	0	0	1	4	16