

Operations Research 1

Prof. Dr. Marco Lübbecke
marco.luebbecke@rwth-aachen.de

WS 2015/16 · 1. Vorlesung



@mluebbecke



OperationsResearchRWTH

Transportation





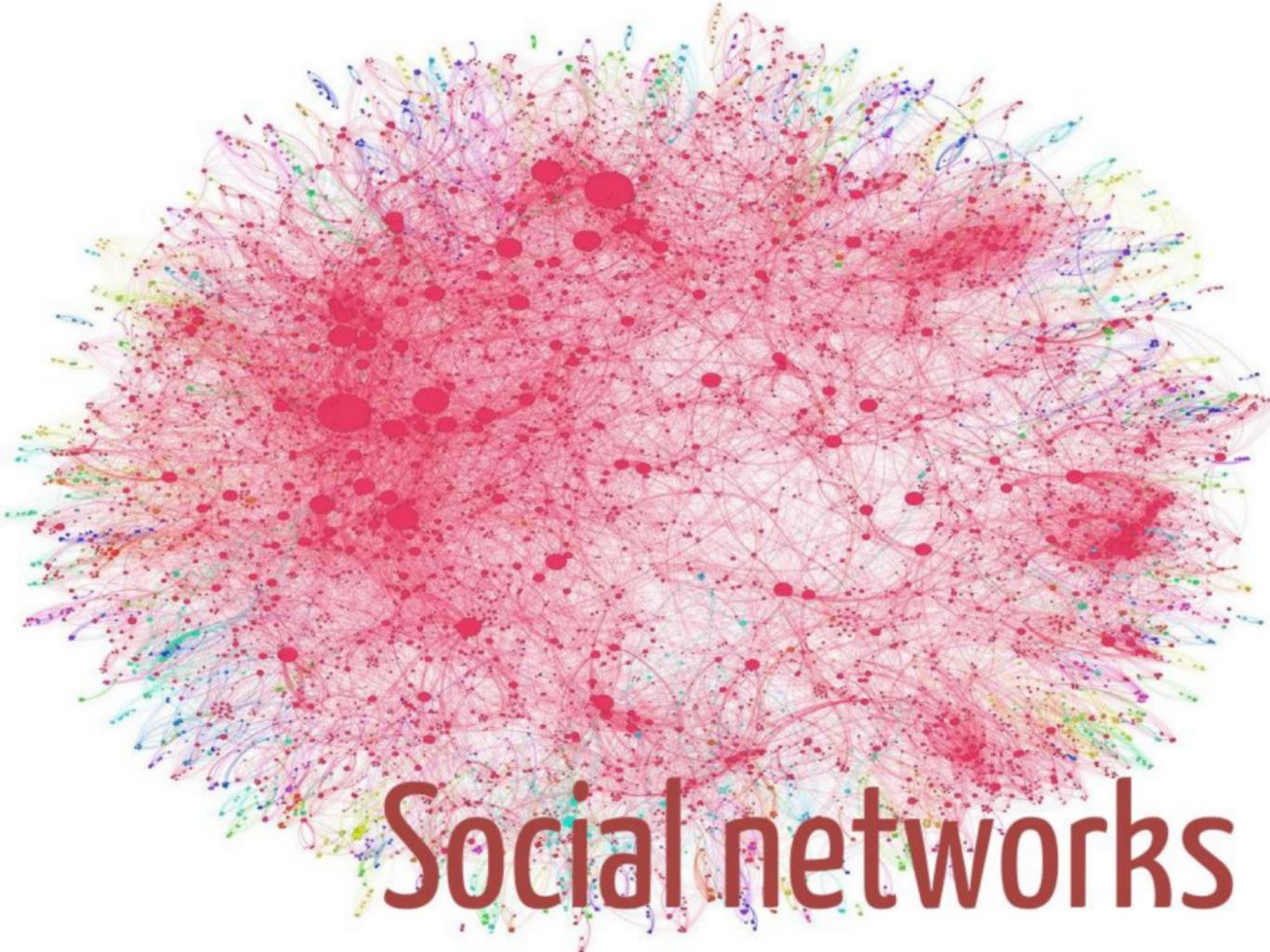
Supply chain

Energy



Health





Social networks

Sports scheduling



Was ist Operations Research?



WIKIPEDIA
Die freie Enzyklopädie

Hauptseite

Operations Research

Die **Ablauf- und Planungsforschung** (engl. *Operations Research*, auch *Operational Research*, kurz **OR**), auch **mathematische Entscheidungsvorbereitung** oder **Unternehmensforschung** ist ein Teilgebiet der **Angewandten Mathematik**, das sich mit der **Optimierung** bestimmter Prozesse oder Verfahren beschäftigt.



Article Talk Read Edit View history Search

Operations research

From Wikipedia, the free encyclopedia

For the academic journal, see *Operations Research: A Journal of the Institute for Operations Research and the Management Sciences*.

Operations research, or **Operational Research** in British usage, is a discipline that deals with the application of advanced analytical methods to help make better decisions^[1]. It is often considered to be a sub-field of Mathematics^[2]. The terms **management science** and **decision science** are sometimes used as more modern-sounding synonyms^[3].

Employing techniques from other mathematical sciences, such as **mathematical modeling**, **statistical analysis**, and **mathematical optimization**, operations research arrives at optimal or near-optimal solutions to complex decision-making problems. Because of its emphasis on human-technology interaction and because of its focus on practical applications, operations research has overlap with other disciplines, notably **industrial engineering** and **operations management**, and draws on **psychology** and **organization science**. Operations Research is often concerned with determining the maximum (of profit, performance, or yield) or minimum (of loss, risk, or cost) of some real-world objective. Originating in military efforts before World War II, its techniques have grown to concern problems in a variety of industries.^[4]

Wo ist Operations Research?

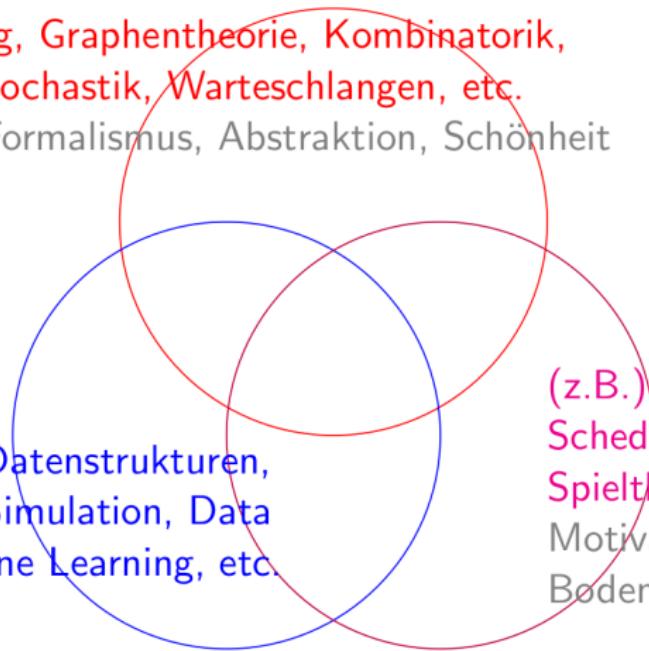
Mathematik

Optimierung, Graphentheorie, Kombinatorik,
Statistik/Stochastik, Warteschlangen, etc.

Präzision, Formalismus, Abstraktion, Schönheit

Informatik

Algorithmen, Datenstrukturen,
Komplexität, Simulation, Data
Mining, Machine Learning, etc.
Umsetzbarkeit



Operations
Research

RWTH AACHEN
UNIVERSITY

Was ist Operations Research?

Operations Research (OR) ist die auf mathematischen Modellen und Methoden beruhende Unterstützung von Planungen und Entscheidungen

Beispiel: Hörsaal- und Prüfungsplanung



RWTH-Projekt *carpe diem!*

Lege ~ 10000 Veranstaltungen
überschneidungsfrei in ~ 500
Hörsäle und ~ 40 wöchentliche
„Zeitslots“

Bildquelle: uni-mainz.de

Viele Abhängigkeiten und Nebenbedingungen zu berücksichtigen

- ▶ Prüfungsordnungen, Raumkapazitäten, Raumausstattungen, Dozentenverfügbarkeiten, etc.
- ▶ Mittagspausen einhalten, lange Wege vermeiden, etc.
- ▶ unübliche Fächerkombinationen, etc.

Beispiel: Hörsaal- und Prüfungsplanung

- momentan: 25+ Stundenplanende planen jedes Semester „von Hand“ auf Basis eines „gewachsenen“ Plans



Bildquelle: Lübbecke

- aber: ab WS2013/14 komplette Neuplanung erforderlich...

Beispiel: Transportlogistik



Bildquelle: Lübbecke

- ▶ Stahlproduktion
- ▶ Zwischenlagerung von Brammen
- ▶ wer wann auf welchen Stapel?
- ▶ nicht beliebig stapelbar
- ▶ minimiere Umstapler

[extrem vereinfachte Darstellung]

Modelle

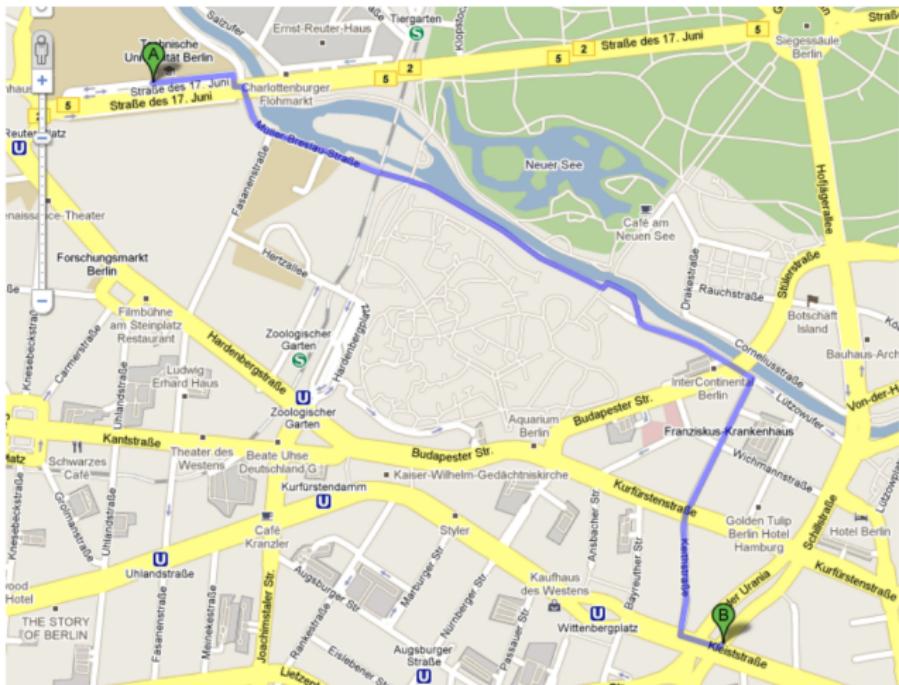
Ein Modell ist ein beschränktes Abbild der Wirklichkeit

- ▶ Abstraktion, Vereinfachungen, Aggregationen, ...
- ▶ aber: wesentlicher Kern des Problems bleibt erhalten
- ▶ dient immer einem Zweck/einer Aussage
- ▶ wir müssen mit dem Modell arbeiten können
- ▶ deskriptive (beschreibende) Modelle
- ▶ explikative (verdeutlichende, erklärende) Modelle
- ▶ prädiktive Modelle (Prognosen)
- ▶ **präskriptive Modelle (dienen der Entscheidungsunterstützung)**

Wichtige Modelle im Operations Research:

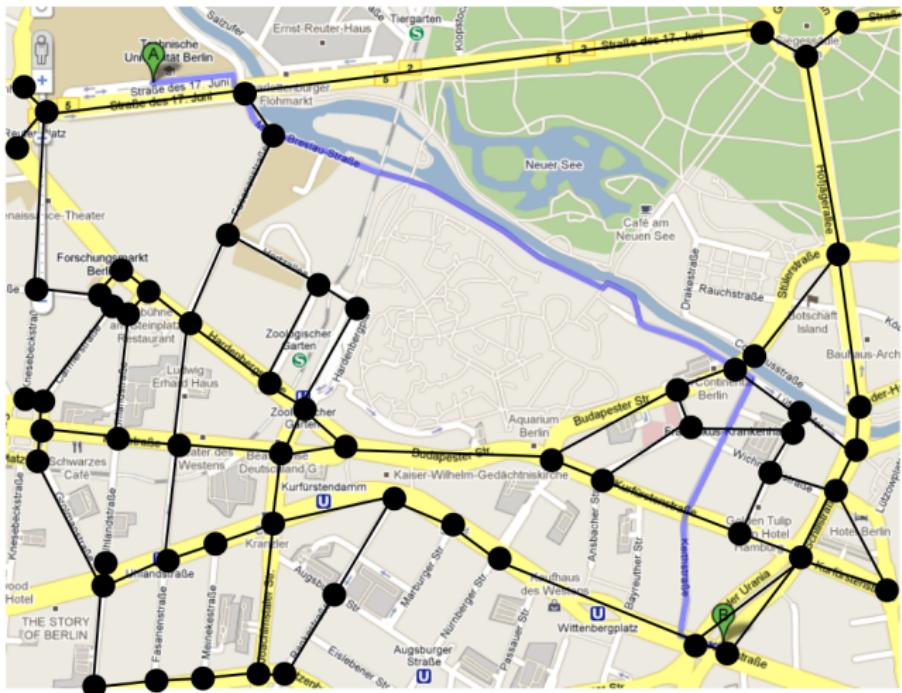
- ▶ Graphen und Netzwerke
- ▶ Lineare, nicht-lineare und ganzzahlige Programme

Modellieren mit Graphen



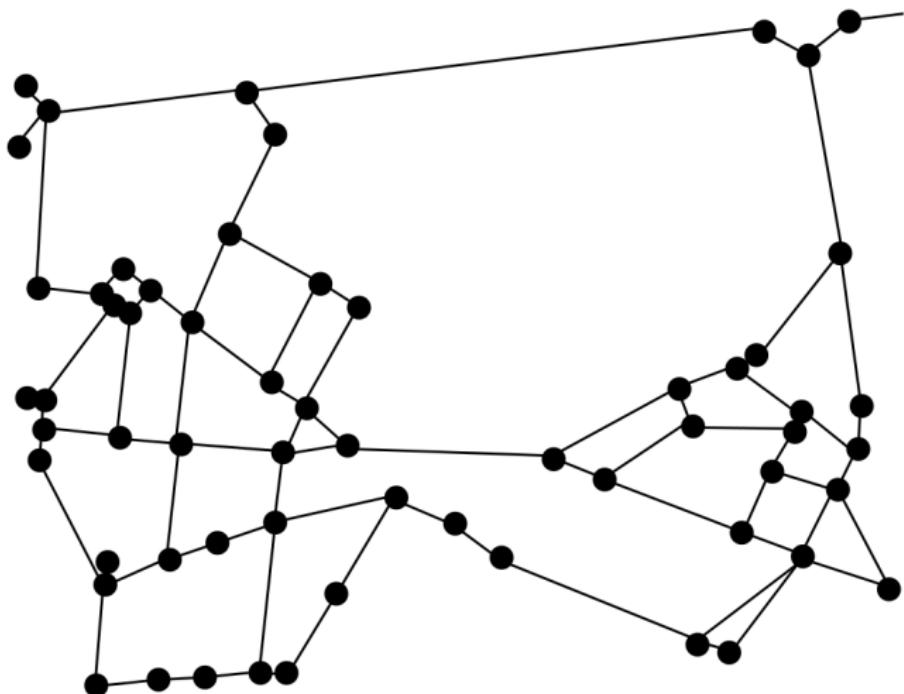
Bildquelle: maps.google.com

Modellieren mit Graphen



Bildquelle: maps.google.com

Modellieren mit Graphen



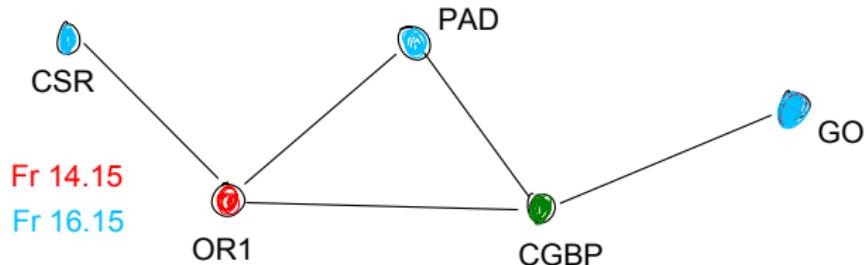
Bildquelle: maps.google.com

Modellieren mit Graphen: Hörsaalplanung

Sehr vereinfachtes Modell: Graph $G = (V, E)$,

Knoten $i \in V \sim$ Veranstaltungen

Kante $(i, j) \in E \sim$ Konflikt zwischen i und j wegen PO, Dozent, etc.



Weise den Knoten Farben (\sim Zeitslots) zu

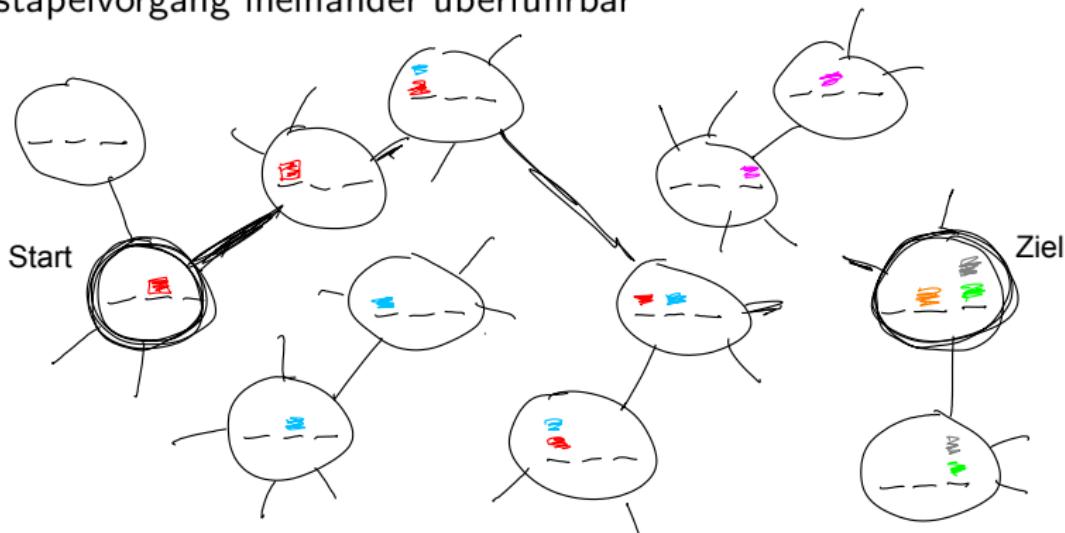
Knotenfärbung: $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ mit $c(i) \neq c(j)$ für $(i, j) \in E$

→ danach müssen noch Räume zugewiesen werden

→ VLn derselben Farbe können nicht im selben Raum stattfinden

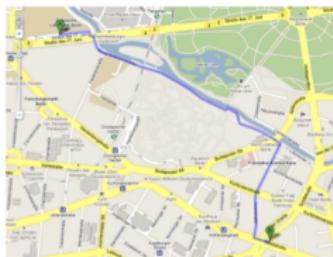
Modellieren mit Graphen: Transportlogistik

Modell: wieder ein Graph $G = (V, E)$, dieses Mal abstrakter:
Knoten $i \in V \sim$ Zustände des Lagers
Kante $(i, j) \in E \sim$ Zustand i in Zustand j durch *einen*
Umstapelvorgang ineinander überführbar

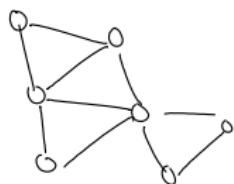


- ▶ auch das führt auf ein Wege-Problem!

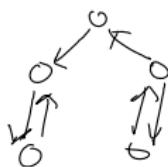
Detailierungsgrad/Fokus eines Modells: je nach Zweck



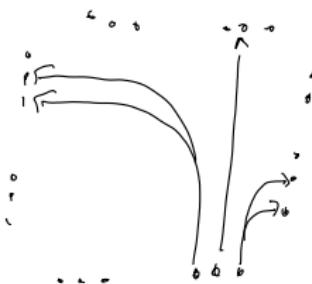
Bildquellen: maps.google.com, de.wiktionary.org, www.bmvbs.de



zB ungerichteter
Graph



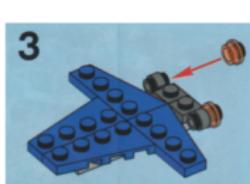
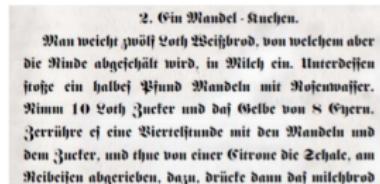
zB gerichteter
Graph



zB ganz anderes Modell,
hier Knoten je Fahrspur

Algorithmen

Ein Algorithmus ist eine präzise, d.h. in einer festgelegten Sprache abgefasste, endliche Beschreibung eines allgemeinen Verfahrens unter Verwendung ausführbarer elementarer Verarbeitungsschritte zur Lösung einer gestellten Aufgabe.

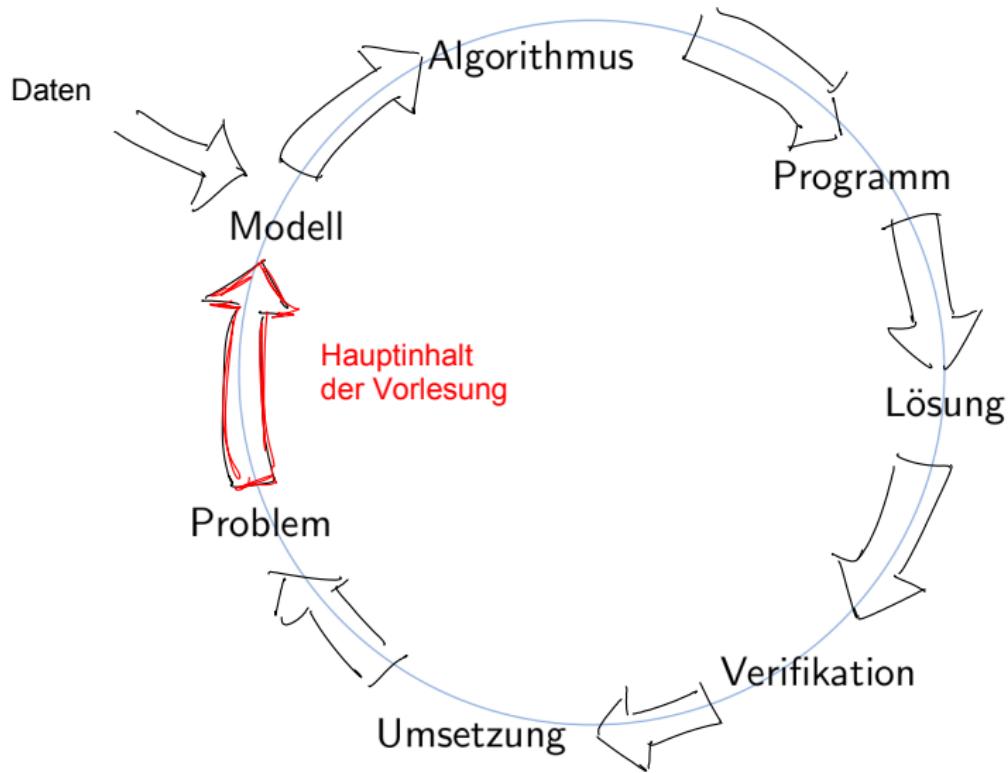


Bildquellen: cafe.rembser.de, pixarblog.de, halloduda.com

Zum Beispiel

- ▶ Gauß-Algorithmus
- ▶ kürzeste-Wege-Algorithmen
- ▶ Simplexalgorithmus

Probleme lösen: Der OR Prozess



Ziele dieser Veranstaltung

- ▶ Sie können klassische Optimierungsprobleme modellieren
- ▶ vor allem mit ganzzahligen Programmen (IPs)
- ▶ auch in einer Modellierungssprache (GAMS)
- ▶ Sie bekommen eine Ahnung, was praktisch relevant ist
- ▶ Sie kennen grundlegende Lösungsalgorithmen für IPs
- ▶ Sie beherrschen die notwendige Mathematik (vor allem: Form)
- ▶ Sie erahnen, wie praktische Optimierungsprobleme gelöst werden können
- ▶ Sie werden neugierig auf mehr

Stellenausschreibungen, z.B. in Aachen

DISCOVER THE WORLD OF INFORM

www.inform-software.de/karriere

Wir sind auf intelligente Software spezialisiert.
Sie hilft Unternehmen, optimierte Entscheidungen durch
die Echtzeitanalyse großer Datenmengen zu treffen.

Wir suchen (w/m)

Consultants

Schwerpunkt OR Pos. Nr. 322

Stellenausschreibungen, z.B. in Aachen

Ihr Verantwortungsbereich:

- Als Produktberater führen Sie in enger Zusammenarbeit mit dem Kunden komplexe Softwaresysteme ein, passen Optimierungsverfahren an Kundenanforderungen an und helfen Anwendern bei der Inbetriebnahme und dem Tuning der Systeme (z.B. Entscheidungsunterstützung bei der Personaleinsatzplanung)
- Für die Abbildung zusätzlicher und ggf. auch völlig neuer Kundenanforderungen analysieren Sie Anforderungen und setzen diese durch Datenmodellierung und mit Hilfe einer Modellierungssprache im System um

Für diese Position bringen Sie mit:

- Abgeschlossenes Studium Informatik, Mathematik, Wirtschaftsingenieurwesen oder vergleichbar
- Kenntnisse im Bereich ganzzahliger Programmierung
- Die Fähigkeit, komplexe Sachverhalte zu durchschauen, auf den Punkt zu bringen und anschaulich zu kommunizieren
- Sehr gute IT-Kenntnisse
- Hohes Abstraktionsvermögen und analytisches Denken
- Team- und dienstleistungsorientiertes Handeln
- Lust zu reisen (national und international)
- Kenntnisse von Scripting-Sprachen (z.B. Groovy) sind ein Plus
- Idealerweise Grund- oder erweiterte Kenntnisse im Bereich Personaleinsatzplanung/ Dienstplanung
- Sehr gute Deutsch- und Englischkenntnisse

Was wir bieten:

- Spannende Herausforderungen im Umfeld „intelligenter“ Computersysteme
- Kreative Gestaltungsspielräume und kurze Entscheidungswege in einer flachen Hierarchie
- Moderne Arbeitsplätze, die in eine hilfsbereite, familienfreundliche und informelle Unternehmenskultur eingebettet sind
- Langfristige, individuelle Entwicklungsperspektiven
- Attraktiven Unternehmensstandort im Dreiländereck Deutschland, Belgien, Niederlande

Haben wir Ihr Interesse geweckt?

Bitte senden Sie uns Ihre Bewerbung unter Angabe der Positionsnummer, mit Gehaltsvorstellung und frühestmöglichem Eintrittsdatum online über unsere Jobbörse.

Ihr Ansprechpartner:

Marcell Villwock . Personalabteilung
INFORM GmbH . Aachen
bewerbung@inform-software.com
Tel. +49 (0) 2408 9456-0

Discover the world of INFORM
www.inform-software.de/karriere

Agenda (voraussichtliche # Vorlesungen)

1. Ganzzahlige Programme für klassische Optimierungsprob. (5)
2. Güte von Modellen (1)
3. Branch-and-Bound (1)
4. Dynamische Programme (1)
5. Umgang mit Unsicherheiten und mehreren Zielfunktionen (1)
6. Varianten und Nichtlinearitäten (1)
7. Heuristiken und heuristisches Modellieren (2)
8. Beispielprojekte (2)

„Erinnerung“ lineare Programme

Kanonische Form eines linearen Programms (LPs)

canonical form of an LP

$$\begin{array}{lllllllll} \max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq b_m \\ & x_1, & x_2, & \cdots, & x_n & \geq & 0 & & \end{array}$$

etwas kompakter:

$$\begin{array}{llll} \max & \sum_{j=1}^n c_jx_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j & \leq & b_i & i = 1, \dots, m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, \dots, n \end{array}$$

Kanonische Form

noch kompakter:

Kanonische Form eines linearen Programms

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

mit

$$c^T = (c_1, \dots, c_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Notation: a_i^T : i -te Zeile von A , A_j : j -te Spalte von A

Lineare Programme

Begriffe:

- ▶ Entscheidungsvariablen x decision variables
- ▶ Zielfunktionskoeffizienten c^T objective function coefficients
- ▶ Koeffizientenmatrix A coefficient matrix
- ▶ rechte Seite b right hand side

Ein lineares Programm beschreibt ein Optimierungsproblem

- ▶ minimieren oder maximieren
- ▶ Variablen: stellen eine Lösung dar
- ▶ Zielfunktion: bewertet eine Lösung
- ▶ Restriktionen: beschreiben die Struktur einer Lösung

- ▶ d.h. LPs sind für uns eine Art zu modellieren

Ganzzahlige Optimierung

- ▶ für viele Entscheidungsgrößen (z.B. Zeiten, Füll-, Bestands-, Bestellmengen, teilbare Güter, Temperaturen, etc.) sind kontinuierliche Variablen $x \geq 0$ sinnvoll
 - continuous variables
- ▶ in der Praxis weitaus häufiger muss man aber Ganzzahligkeit von zumindest einigen Variablen fordern, z.B.
 - integrality, integer variables
 - ▶ unteilbare Güter
 - ▶ ja-nein-Entscheidungen
 - ▶ ...
- ▶ ergibt **extrem** mächtiges Modellierungswerkzeug

Gemischt-ganzzahlige Programme (MIPs)

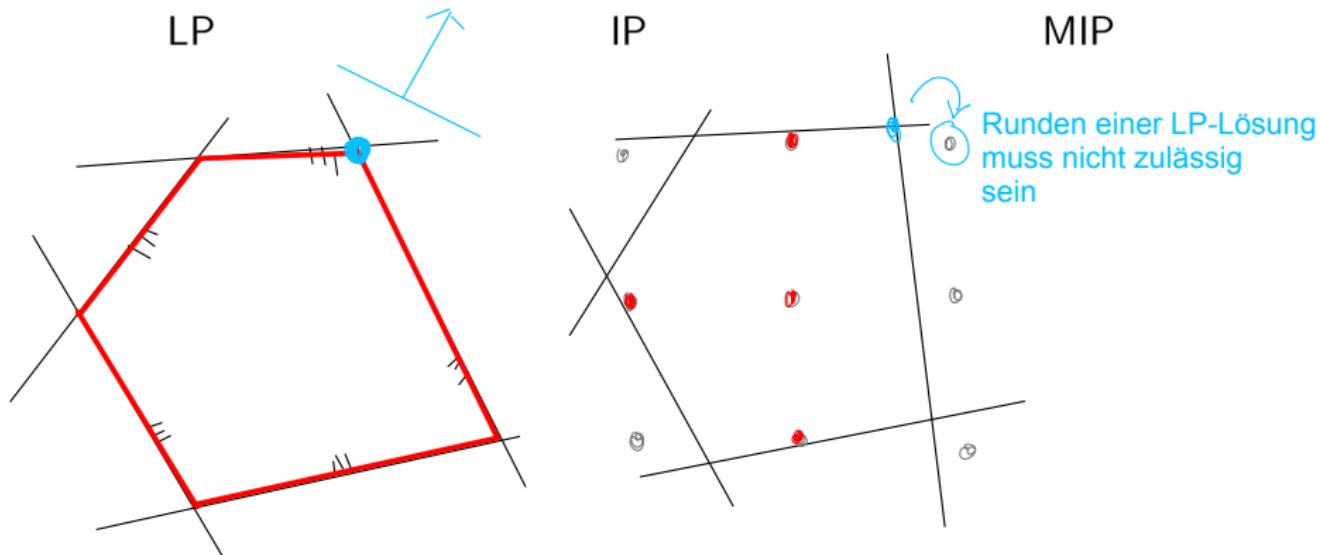
Gemischt-ganzzahliges Programm (MIP) mixed integer program

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}_+^{n-q} \times \mathbb{Q}_+^q \end{aligned}$$

Spezialfälle

- ▶ $q = n$ lineares Programm
- ▶ $q = 0$ (rein) ganzzahliges Programm (IP) integer program
- ▶ $x \in \{0, 1\}^n$ binäres Programm binary program

Lösungsräume

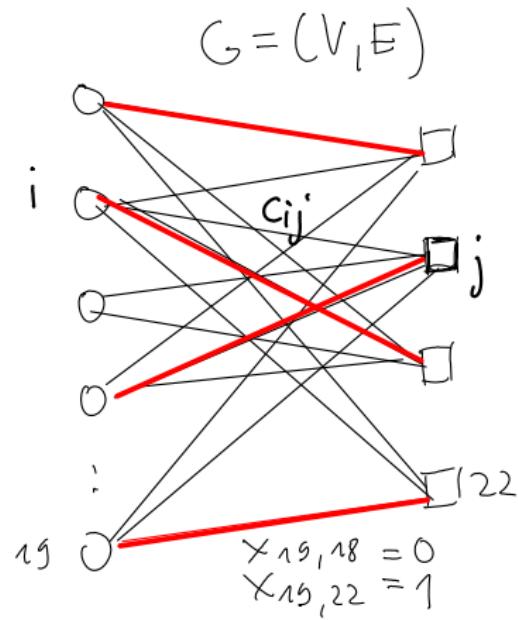


- Simplexalgorithmus wird zur Lösung nicht funktionieren!

Zuordnungsproblem (Minimum Cost Matchings)

n Arbeitende, m Maschinen
 c_{ij} Kosten $i \rightarrow j$

finde kostenminimale Zuordnung so,
dass jede Maschine bedient wird



$$\begin{aligned} & \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad ij \in E \end{aligned}$$

Zuordnungsproblem: nochmal zum Mitschneiden...

Anna 0

Bohren

Bert 0

Fräsen

Clara 0

$$x_{\text{Anna}, \text{Fräsen}} + x_{\text{Bert}, \text{Fräsen}} + x_{\text{Clara}, \text{Fräsen}} = 1$$

$$x_{\text{Bert}, \text{Fräsen}} \in \{0, 1\}$$

Sets

```
i  workers / peter, paul, mary /
j  machines / drilling, sawing, welding / ;
```

Parameters

....

Variables

```
x(i,j) match i to j
z      objective function value ;
```

Binary Variables x ;**Equations**

```
obj                  minimize the total assignment cost
work(i)              at most one worker has to be assigned
operate(j)           every machine has to be operated ;
```

```
obj ..          z =e= sum((i,j), c(i,j)*x(i,j));
```

```
work(i) ..      sum(j, x(i,j)) =l= 1;
```

```
operate(j) ..   sum(i, x(i,j)) =e= 1;
```

```
Model matching / all /;
```

```
Solve matching using ip minimizing z;
```

```
Display x.l;
```