Operations Research 1

Prof. Dr. Marco Lübbecke
marco.luebbecke@rwth-aachen.de

WS 2015/16 · 2. Vorlesung

@mluebbecke

OperationsResearchRWTH

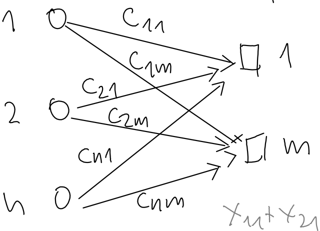
Zuordnungsproblem (Minimum Cost Matchings)

n Arbeitende, m Maschinen
c_{ij} Kosten $i \to j$ $\quad n \geq m$

finde kostenminimale Zuordnung so, dass jede Maschine bedient wird

$G = (V, E)$

$x_{11} \in \{0,1\}$



$\sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij}$

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$x_{11} + x_{21} + \dots = 1 \quad j = 1$

$x_{12} + x_{22} + \dots = 1 \quad j = 2$

$\vdots$

$x_{1m} + x_{2m} + \dots \quad j = m$

Modellieren: Wahl zwischen Alternativen

- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ mit $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$

  hat die Funktion: Auswahl genau einer Alternative (aus n)

- ebenso:

  höchstens eine Alternative darf gewählt werden, „≤ 1“

  mindestens eine Alternative muss gewählt werden, „≥ 1“

Transportproblem

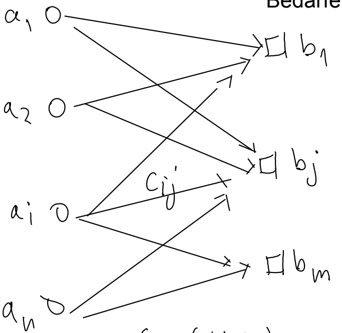
Annahme: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

n Angebote a_i, m Bedarfe b_j
c_{ij} Stückkosten $i \to j$

finde kostenminimalen Transport so, dass Bedarfe gedeckt sind, und Angebote ausreichen

Angebote

Bedarfe



$G=(V,E)$

$$\min \sum_{ij \in E} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\sum_{ij \in E} x_{ij} = a_i \qquad i=1,\dots,n$$

$$\sum_{ij \in E} x_{ij} = b_j \qquad j=1,\dots,m$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \qquad ij \in E$$

Operations Research

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Netzwerk-Flüsse

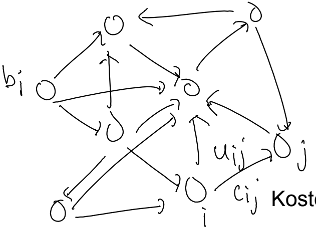
Annahme: $\sum_{i \in V} b_i = 0$

- etwas allgemeiner...

$G = (V, E)$

$\min \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij}$

< 0 Bedarf

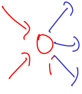


Kapazitäten u

Kosten c

> 0

Angebot



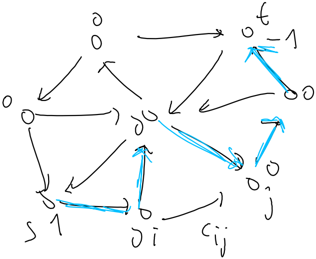
$\sum_{ij} x_{ij} - \sum_{ji} x_{ji} = b_i \quad i \in V$

$x_{ij} \leq u_{ij} \quad ij \in E$

$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad ij \in E$

// Flussmenge auf Kante ij

Spezialfall: kürzeste Wege



"wie eben"

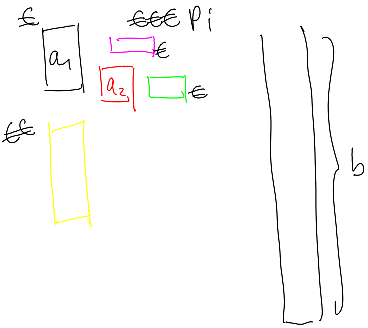
$$(u_{ij} = 1)$$

$$b_i = \begin{cases} 1 & i = s \\ -1 & i = t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Rucksackproblem (Knapsack)

n Gegenstände der Größe a_i, p_i Profit, b Rucksackkapazität

finde profitmaximale Auswahl so, dass Kapazität eingehalten wird



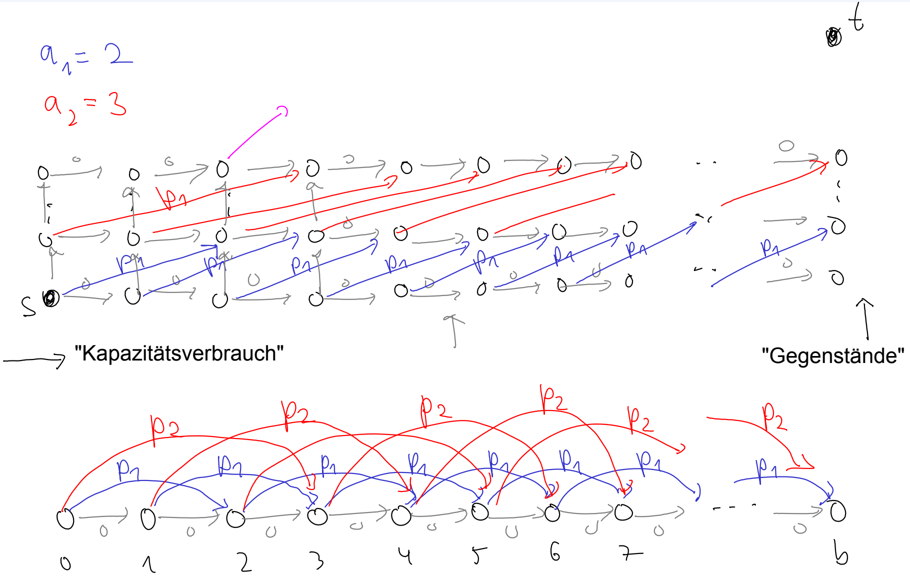
$$\max \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i \le b$$

$$x_i \in \{0,1\}$$ für Gegenstand i $= 1, \dots, n$

- immer notwendig, um Kapazitäten zu modellieren
- zum Weiterdenken: wie sieht Optimallösung aus für $x \in [0,1]$?

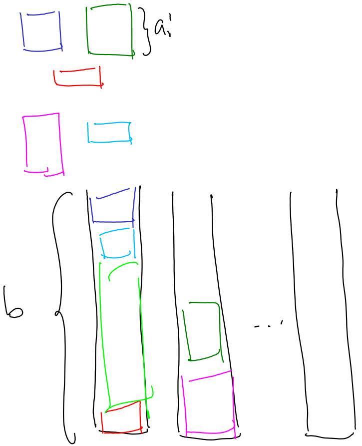
Rucksackproblem: Alternatives Modell



Bin Packing Problem

n Gegenstände der Größe a_i,
n Bins der Kapazität b

packe *alle* Gegenstände in minimal wenige Bins so, dass Kapazitäten eingehalten



min ?

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} \le b \qquad j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Gegenstand i → Bin j