RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN
DEUTSCHE POST LEHRSTUHL FÜR OPTIMIERUNG VON DISTRIBUTIONSNETZWERKEN
Universitätsprofessor Dr.rer.nat.habil. Hans-Jürgen Sebastian

Methoden und Anwendungen der Optimierung
Übung 1
-*Musterlösung* -

Aufgabe 1:

a) Formulierung als Rucksackproblem (P)

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Auftrag i wird bearbeitet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 \\ \text{s.d.}\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6 + 4x_7 \leq 9 \\ & x_i \in \{0,1\}\ \forall i = 1,\dots,7 \end{aligned}$$

b) LP-Relaxation (R)

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 \\ \text{s.d.}\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6 + 4x_7 \leq 9 \\ & 0 \leq x_i \leq 1\ \forall i = 1,\dots,7 \end{aligned}$$

optimale Lösung von (R):

Schritt 1 Bilde Quotienten $q_i = \frac{p_i}{w_i}$

Gegenstand	1	2	3	4	5	6	7
DB	6	7	4	13	2	3	1
Dauer	2	4	3	4	1	1	4
q_i	3	1,75	1,$\overline{3}$	3,25	2	3	0,25

Schritt 2 Sortiere nach fallendem q_i

$$4, 1, 6, 5, 2, 3, 7$$

Schritt 3 Auffüllen des Rucksacks gemäß Sortierung

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = x_1 = x_6 = x_5 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{4} \\ x_3 = x_7 = 0 \end{array}\right\} z_R = 25{,}75$$

Lösung ist nicht zulässig für (P)
$\Rightarrow$ UB=25 (wegen Ganzzahligkeit)

Schritt 4 Bestimme zul. Lsg. für (P)

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = x_1 = x_6 = x_5 = 1 \\ x_2 = x_3 = x_7 = 0 \end{array}\right\} z' = 24$$

Lösung ist zulässig für (P) $\Rightarrow$ LB_1=24

$\rightarrow$ Verzweige in 2 Teilprobleme nach x_2:

$$R_1: \ x_2 = 1$$
$$R_2: \ x_2 = 0$$

Löse Teilproblem R_1:

$$\begin{aligned} \max\ z = {} & 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 \\ \text{s.d.}\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6 + 4x_7 \leq 9 \\ & x_2 = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq 1\ \forall i = 1, \ldots, 7 \end{aligned}$$

Optimale Lösung von R_1:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_4 = 1 \\ x_1 = \frac{1}{2} \\ x_6 = x_5 = x_3 = x_7 = 0 \end{array}\right\} z_{R_1} = 23 = \text{UB}_1$$

Lösung ist unzulässig für (P) und z_{R_1} <LB
$\Rightarrow$ Terminiere R_1

Löse Teilproblem R_2:
Optimale Lösung von R_2:

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = x_1 = x_6 = x_5 = 1 \\ x_3 = \frac{1}{3} \\ x_2 = x_7 = 0 \end{array}\right\} z_{R_2} = 25{,}\overline{3}$$

Lösung ist unzulässig für (P). $\text{UB}_2 = 25$ >LB_1
$\Rightarrow$ Verzweige R_2 weiter nach x_3:

$$R_3: \ x_2 = 0, \ x_3 = 1$$
$$R_4: \ x_2 = x_3 = 0$$

Optimale Lösung von R_3:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = x_4 = x_1 = 1 \\ x_2 = x_6 = x_5 = x_7 = 0 \end{array}\right\} z_{R_3} = 23$$

Lösung ist zulässig für (P) $\Rightarrow$ Terminiere R_3

Optimale Lösung von R_4:

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = x_1 = x_6 = x_5 = 1 \\ x_7 = \frac{1}{4} \\ x_2 = x_3 = 0 \end{array}\right\} z_{R_4} = 24{,}25$$

Lösung ist nicht zulässig für (P) $\Rightarrow$ $\mathrm{UB}_4 = 24$.
UB_4 ist nicht besser als LB_1 $\Rightarrow$ Terminiere R_4

Alle Knoten terminiert. Somit ist LB_1 optimal.

Aufgabe 2:

a) Es handelt sich um ein Bin-Packing Problem

b) 8 Brammen $\rightsquigarrow$ es sind maximal 8 Waggons notwendig

Entscheidungsvariablen:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{Waggon j wird benötigt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Bramme i auf Waggon j} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\min \ z = \sum_{j=1}^{8} y_j$$

$$s.d.\ 2x_{1j} + 6x_{2j} + 14x_{3j} + 3x_{4j} + 2x_{5j} + 16x_{6j} + 6x_{7j} + 3x_{8j} \leq 26y_j \ \forall j = 1, \ldots, 8$$

$$\sum_{j=1}^{8} x_{ij} = 1 \ \forall i = 1, \ldots, 8$$

$$y_j \in \{0,1\} \ \forall j = 1, \ldots, 8$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall i, j = 1, \ldots, 8$$

c) Idee: Zunächst schwere Brammen verladen, leichte dann hinzufügen.
Sinnvoll, die Gegenstände nach fallender Masse zu sortieren.

$6, 3, 2, 7, 4, 8, 1, 5$

Iteration	Waggon 1	Waggon 2	Waggon 3
1 (6|16)	$\{6\}$ (10)		
2 (3|14)	$\{6\}$ (10)	$\{3\}$ (12)	
3 (2|6)	$\{2,6\}$ (4)	$\{3\}$ (10)	
4 (7|6)	$\{2,6\}$ (4)	$\{3,7\}$ (6)	
5 (4|3)	$\{2,4,6\}$ (1)	$\{3,7\}$ (6)	
6 (8|3)	$\{2,4,6\}$ (1)	$\{3,7,8\}$ (3)	
7 (1|2)	$\{2,4,6\}$ (1)	$\{1,3,7,8\}$ (1)	
8 (5|2)	$\{2,4,6\}$ (1)	$\{1,3,7,8\}$ (1)	$\{5\}$ (24)

d) Bestimmung einer unteren Schranke für das BPP:

$$LB = \left\lceil \frac{1}{C} \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i \right\rceil$$

Zusätzliche untere Schranke, falls bereits $n(j)$ Waggons mit Brammen $1, \ldots, j$ belegt sind.

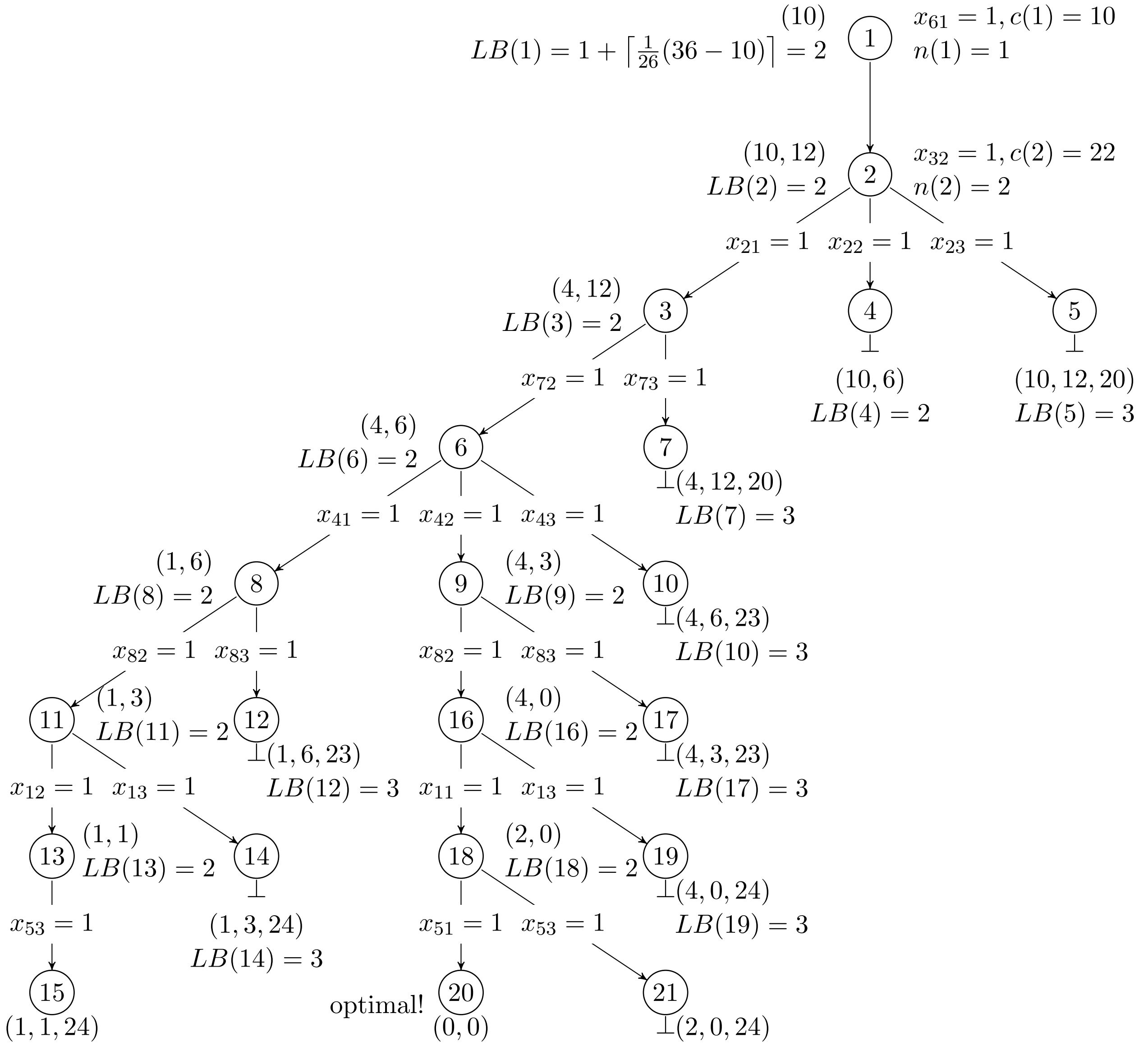
$C(j) \;\hat{=}$ Summe der Restkapazitäten der bereits verwendeten Waggons

$$C(j) = n(j) \cdot C - \sum_{i=1}^{j} w_i$$

$$\Rightarrow LB(j) = n(j) + \max\left\{0, \left\lceil \frac{1}{C}\left(\sum_{i=j+1}^{n} w_i - C(j)\right)\right\rceil\right\}$$

Dabei ist $\sum_{i=j+1}^{n} w_i - C(j)$ die Menge, die noch auf zusätzliche Waggons verladen werden muss.

Branch and Bound: $LB = \left\lceil \frac{1}{26} \cdot (2+6+14+3+\ldots) \right\rceil = 2$
$\rightarrow$ mindestens 2 Waggons.



<u>optimale Lösung</u>
Waggon 1: 6,2,1,5
Waggon 2: 3,7,4,8

Aufgabe 3:

a) Jede Parzelle muss durch mindestens eine Basisstation überdeckt werden $\rightarrow$ Set Covering Problem

b) EV: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{Basisstation in Parzelle i} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\min z = \sum_{i=1}^{17} x_i$$

s.d.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_9 + x_{10} &\geq 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_8 + x_9 &\geq 1 \\
x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 &\geq 1 \\
x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 1 \\
x_5 + x_6 + x_7 + x_{13} &\geq 1 \\
x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{12} + x_{13} &\geq 1 \\
x_3 + x_4 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} &\geq 1 \\
x_2 + x_3 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} &\geq 1 \\
x_2 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{16} + x_{17} &\geq 1 \\
x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{14} + x_{16} &\geq 1 \\
x_7 + x_8 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\geq 1 \\
x_6 + x_7 + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\geq 1 \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} &\geq 1 \\
x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} &\geq 1 \\
x_{10} + x_{11} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} &\geq 1 \\
x_{10} + x_{15} + x_{16} + x_{17} &\geq 1
\end{aligned}$$

$x_i \in \{0, 1\}\ \forall i = 1, \ldots, 17$

c) z.B. $x_3 = x_7 = x_{16} = 1$

Aufgabe 4:

a)

Pairing	Flüge
1	$\{CB_1,\ BC\}$
2	$\{AB,\ BA\}$
3	$\{AB,\ BC,\ CA_2\}$
4	$\{CA_1,\ AC\}$
5	$\{BC,\ CB_2\}$
6	$\{AC,\ CA_2\}$

b) Jeder Flug genau 1x $\rightsquigarrow$ Set Partitioning Problem

c) EV: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{Pairing i wird durchgeführt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{i=1}^{6} c_i x_i \\
\text{s.d. } & x_1 && = 1 && (CB_1) \\
& x_2 + x_3 && = 1 && (AB) \\
& x_4 && = 1 && (CA_1) \\
& x_1 + x_3 + x_5 && = 1 && (BC) \\
& x_4 + x_6 && = 1 && (AC) \\
& x_2 && = 1 && (BA) \\
& x_5 && = 1 && (CB_2) \\
& x_3 + x_6 && = 1 && (CA_2) \\
& x_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

d) Es existiert keine zulässige Lösung:
$x_1 = 1$ und $x_5 = 1$ im Widerspruch zu $x_1 + x_3 + x_5$.

e) Modellierung als Set-Covering-Problem, d.h. NB≥ 1.
Opt. Lösung $x_1^* = 1,\ x_2^* = 1,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 1,\ x_5^* = 1,\ x_6^* = 1$.
D.h. die Flüge AC und BC nehmen jeweils eine Crew als Passagiere auf.