RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN
DEUTSCHE POST LEHRSTUHL FÜR OPTIMIERUNG VON DISTRIBUTIONSNETZWERKEN
Universitätsprofessor Dr.rer.nat.habil. Hans-Jürgen Sebastian

Methoden und Anwendungen der Optimierung
Übung 2
-*Musterlösung* -

Aufgabe 5:
Lieferzeitverzögerung minimieren

Schritt 1 Generieren einer zulässigen Lösung, um obere Schranke zu erhalten.
z.B. wähle Reihenfolge nach Lieferdatum:

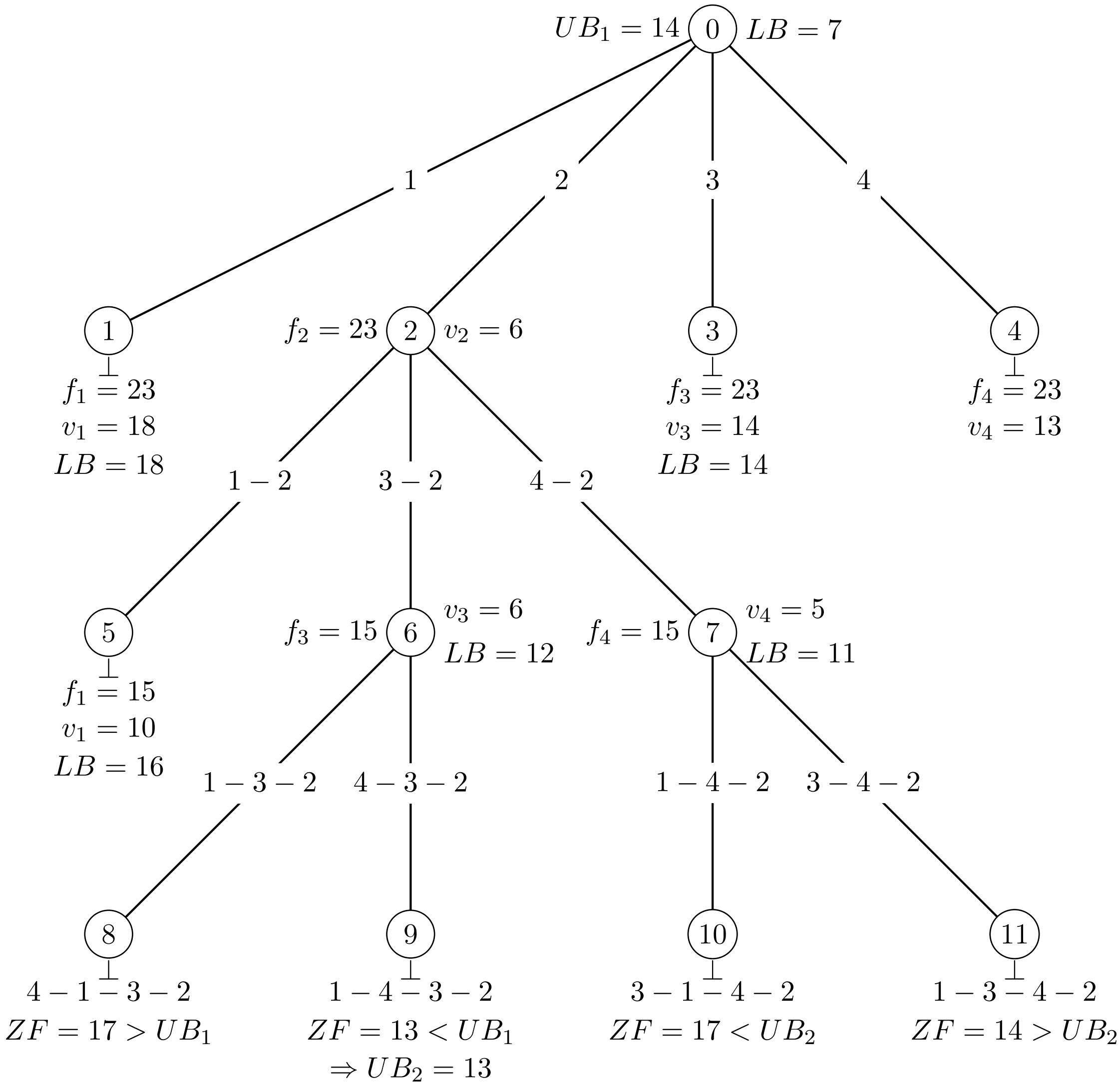
Auftrag	1	3	4	2
t_i	6	5	4	8
l_i	5	9	10	17
v_i	1	2	5	6

$\rightsquigarrow$ gesamte Verzögerung: $1 + 2 + 5 + 6 = 14 =$ UB

Schritt 2 Bestimmen einer unteren Schranke:
z.B. geeignete Verzögerung des letzten Auftrags
$\rightarrow$ Auftrag 2 als letzten
$\rightarrow$ Verzögerung von mindestens 6 ZE

Mit mehr Aufwand bessere Schranken
z.B. Auftrag 1 wird mindestens 1 ZE zu spät produziert $\Rightarrow$ LB $= 7$

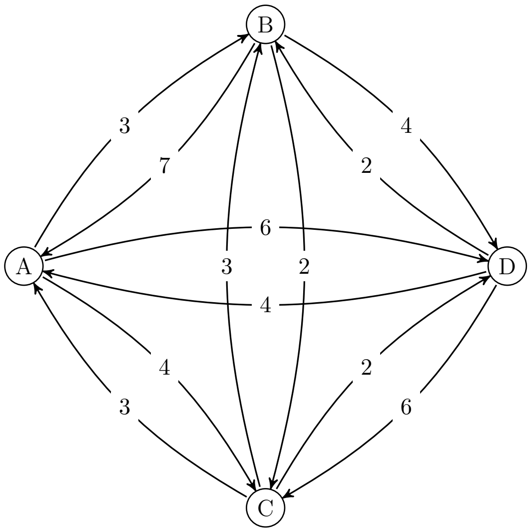
Schritt 3 Verzweige nach dem Auftrag, der zuletzt produziert werden soll.
Relaxation: Betrachte lediglich die Verzögerung des letzten Auftrags.



Damit ist die Reihenfolge $1-4-3-2$ optimal.

Aufgabe 6

Problem lässt sich als offenes TSP interpretieren, d.h. es ist keine geschlossene Rundtour gesucht.



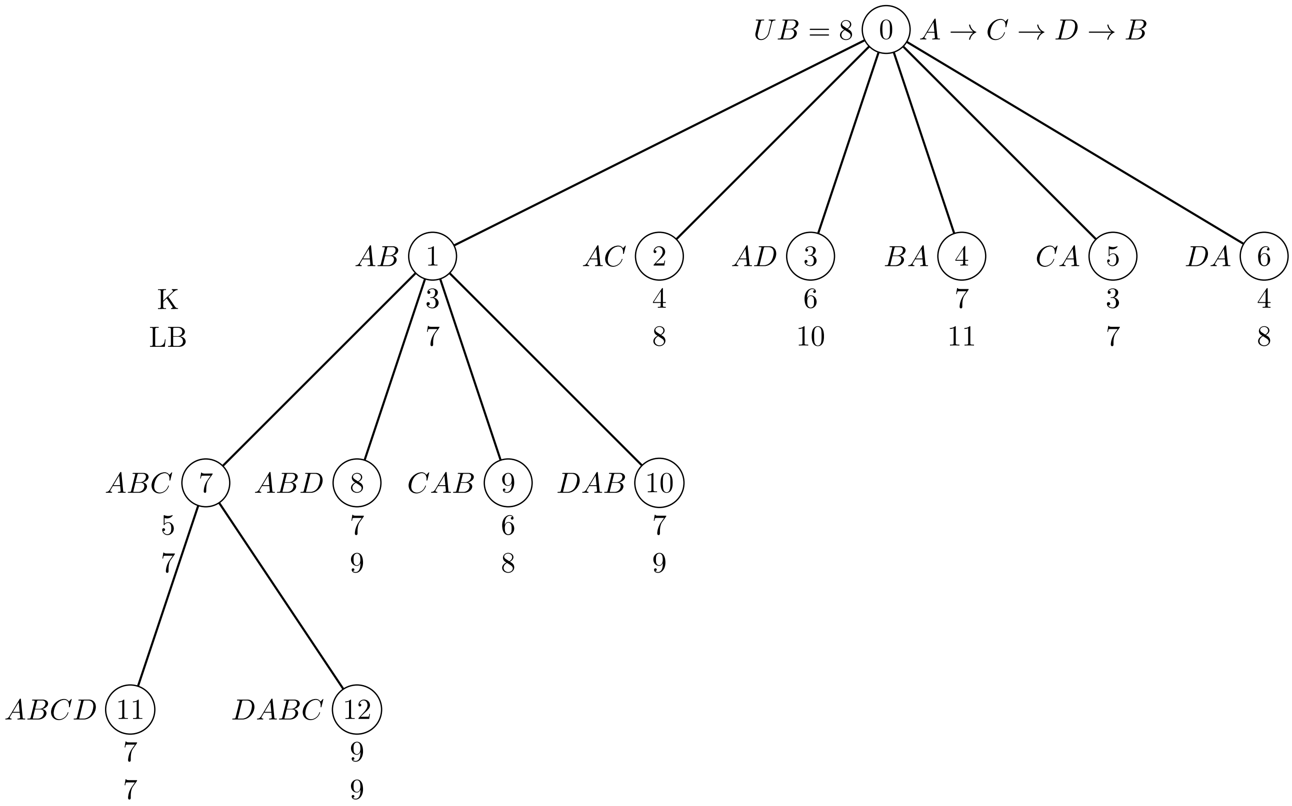
offenes TSP → es liegt ein Minimierungsproblem vor. D.h. die Rollen von LB und UB sind gegenüber Maximierungsproblem vertauscht.

Schritt 1 Bestimmen einer UB durch Bestimmen einer zulässigen Lösung
z.B. $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$
Gesamtrüstzeit: $4 + 2 + 2 = 8 =$ UB

Schritt 2 Verzweige nach der Anbindung des Auftrags A

Welche LB?

- Kanten für Anbindung von A
- noch 2 zusätzliche Kanten sind zu benutzen
- eine beliebige Kante kostet mindestens 2



Alle Knoten terminiert, d.h. Knoten 11 ist optimal.
→ optimale Reihenfolge $A \to B \to C \to D$
minimale Rüstzeit 7

Das Verfahren von Dakin:

Folgendes Problem:

$$\begin{aligned} \max z = & c^T x \\ \text{s.d. } & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x_j \text{ ganzzahlig für } j = 1, \ldots, p,\ x^T = (x_1, \ldots, x_p, \ldots x_n) \end{aligned}$$

Schritt 1 Löse LP-Relaxation (Ganzzahligkeit) $\rightarrow$ Simplex

Schritt 2 Existiert in der optimalen Lösung der LP-Relaxation ein nicht-ganzzahliges x_j ($1 \leq j \leq p$), so wird nach diesem x_j wie folgt verzweigt:

Schritt 3 x_j lässt sich wie folgt darstellen: $x_j = \lfloor x_j \rfloor + l_j,\ 0 \leq l_j \leq 1$.
Verzweige in 2 TP mit zusätzlichen Restriktionen:
TP1: $x_j \leq \lfloor x_j \rfloor$
TP2: $x_j \geq \lfloor x_j \rfloor + 1$

Schritt 4 Löse noch offene TP:

a) alle x_j mit $1 \leq j \leq p$ ganzzahlig $\rightarrow$ terminieren

b) nicht alle x_j ganzzahlig $\rightarrow$ vergleiche mit letzter Lösung mit ganzzahligem x_j

   i) ist Lsg. nicht besser $\rightarrow$ terminieren

   ii) ist Lsg. besser $\rightarrow$ weiter verzweigen

Aufgabe 7:
Löse LP-Relaxation:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{s.d.} -2x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2		
s_1	-2	**3**	1	0	3	$\leftarrow$
s_2	1	1	0	1	8	
	-1	-4	0	0	0	
		$\uparrow$				

	x_1	x_2	s_1	s_2		
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	1	
s_2	$\mathbf{1\frac{2}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	7	$\leftarrow$
	$-3\frac{2}{3}$	0	$1\frac{1}{3}$	0	4	
	$\uparrow$					

	x_1	x_2	s_1	s_2	
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$3\frac{4}{5}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$4\frac{1}{5}$
	0	0	$\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{5}$	$19\frac{2}{5}$

opt. Lösung der Relaxation: $x_1 = 4\frac{1}{5}$, $x_2 = 3\frac{4}{5}$, ZFW $= 19\frac{2}{5}$
unzulässig $\rightarrow$ verzweigen nach x_1 (UB$= 19$)
TP1: $x_1 \leq 4$
TP2: $x_1 \geq 5$

TP1:
neue Nebenbedingung: $x_1 \leq 4$
Nicht neu lösen, sondern Reoptimierung mit dualem Simplex.
$\rightarrow$ neue Zeile hinzufügen (und zusätzliche Spalte für Schlupfvariable):

$$1\ 0\ 0\ 0\ 1\ |\ 4$$

$\rightarrow$ Überführung in Basisdarstellung: Ausdrücken der BV durch die NBV und Einsetzen.

$$x_1 = 4\frac{1}{5} + \frac{1}{5}s_1 - \frac{3}{5}s_2$$

$$0\ 0\ \frac{1}{5}\ -\frac{3}{5}\ 1\ |\ -\frac{1}{5}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$3\frac{4}{5}$	
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$4\frac{1}{5}$	
s_3	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\leftarrow$
	0	0	$\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{5}$	0	$19\frac{2}{5}$	
				$\uparrow$			

(primale Zulässigkeit: BV mit $b_i < 0$ nur möglich, wenn $pv < 0$)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$3\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	0	1	4
s_2	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	0	$1\frac{1}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$	$18\frac{2}{3}$

Lsg.: $x_1 = 4$, $x_2 = 3\frac{2}{3}$, ZFW $= 18\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ UB$_1 = 18$
unzulässig $\rightarrow$ weiter verzweigen nach x_2:
TP3: $x_2 \leq 3$
TP4: $x_2 \geq 4$

<u>TP3:</u>
Neue Nebenbedingung $x_2 \leq 3$ Zeile hinzufügen:

$$0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \mid 3$$

$$\text{bzw. } 0\ 0\ -\frac{1}{3}\ 0\ -\frac{2}{3}\ 1 \mid -\frac{2}{3}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$	
x_1	1	0	0	0	1	0	4	
s_2	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-1\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
s_4	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\leftarrow$
	0	0	$1\frac{1}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$	0	$18\frac{2}{3}$	
			$\uparrow$					

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
x_2	0	1	0	0	0	1	3
x_1	1	0	0	0	1	0	4
s_2	0	0	0	1	-1	-1	1
s_4	0	0	1	0	2	-3	2
	0	0	0	0	1	4	16

Lösung: $x_1 = 4,\ x_2 = 3$, ZFW$= 16$
zulässig $\rightarrow$ LB$_1 = 16$

TP4:
Neue Nebenbedingung $x_2 \geq 4$
Zeile hinzufügen:

$$0 \ -1\ 0\ 0\ 0\ 1 \ | \ -4$$

$$\text{bzw. } 0\ 0\ \frac{1}{3}\ 0\ \frac{2}{3}\ 1 \ | \ -\frac{1}{3}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$	
x_1	1	0	0	0	1	0	4	
s_2	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-1\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
s_4	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\leftarrow$
	0	0	$1\frac{1}{3}$	0	$3\frac{2}{3}$	0	$18\frac{2}{3}$	

Es existiert keine zulässige Lösung, da $b_4 < 0$, aber Elemente der 4.Zeile ≥ 0

TP2:
neue Nebenbedingung: $x_1 \geq 5$
Zeile hinzufügen

$$-1\ 0\ 0\ 0\ 1 \ | \ -5$$

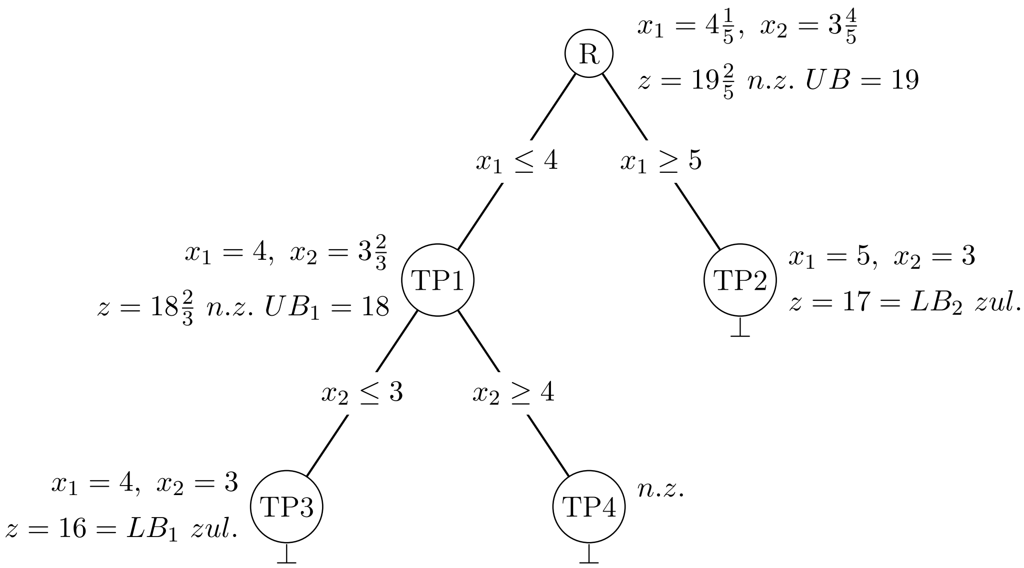
$$\text{bzw. } 0\ 0\ -\frac{1}{5}\ \frac{3}{5}\ 1 \ | \ -\frac{4}{5}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$3\frac{4}{5}$	
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$4\frac{1}{5}$	
s_3	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{4}{5}$	$\leftarrow$
	0	0	$\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{5}$	1	$19\frac{2}{5}$	
			$\uparrow$				

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_2	0	1	0	1	1	3
x_1	1	0	0	0	-1	5
s_1	0	0	1	-3	-5	4
	0	0	0	4	3	17

Lsg.: $x_1 = 5,\ x_2 = 3$, ZFW$= 17$
zulässig $\rightarrow$ LB$_2 = 17$

Alle Knoten terminiert bzw. entwickelt $\rightarrow$ Fertig. LB$_2$ optimal.

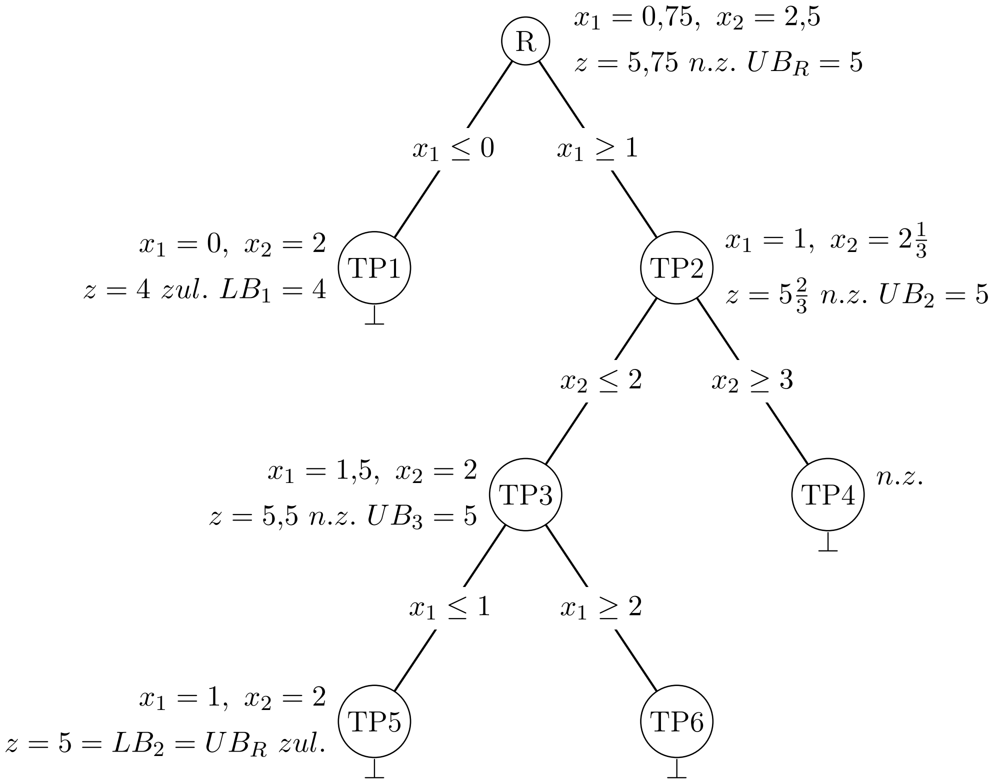

R
$x_1 = 4\frac{1}{5},\ x_2 = 3\frac{4}{5}$
$z = 19\frac{2}{5}$ $n.z.$ $UB = 19$
$x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 5$
TP1
$x_1 = 4,\ x_2 = 3\frac{2}{3}$
$z = 18\frac{2}{3}$ $n.z.$ $UB_1 = 18$
TP2
$x_1 = 5,\ x_2 = 3$
$z = 17 = LB_2$ $zul.$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
TP3
$x_1 = 4,\ x_2 = 3$
$z = 16 = LB_1$ $zul.$
TP4
$n.z.$

Aufgabe 8:

Optimale Lösung der LP-Relaxation ($\rightarrow$ grafisch; siehe nächste Seite):

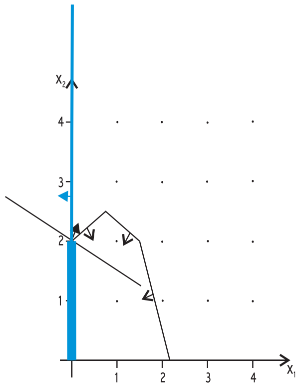
$$x_1^* = 0{,}75,\; x_2^* = 2{,}5,\; z^* = 5{,}75 \;\rightsquigarrow UB = 5$$

Verzweige nach der Variable mit dem höchsten nichtganzzahligen Anteil.



Alle Knoten terminiert $\rightsquigarrow x_1 = 1,\; x_2 = 2,\; z = 5$ ist optimale Lösung.

TP_1: $x_1 <= 0$

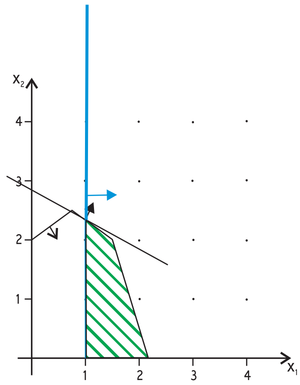


$x_1^* = 0$, $x_2^* = 2$, $z^* = 4$

zulässig => LB=4

=> terminiere

TP_2: $x_1 >= 1$

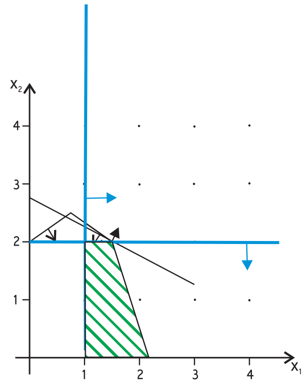


$x_1^* = 1$, $x_2^* = 2\ 1/3$, $z^* = 5\ 2/3$

=> UB=5 >LB

=> weiter verzweigen

TP_3: $x_1 >= 1$, $x_2 <= 2$

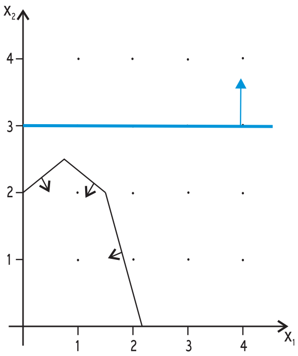


$x_1^* = 1{,}5$, $x_2^* = 2$, $z^* = 5{,}5$

=> UB=5 >LB

=> weiter verzweigen

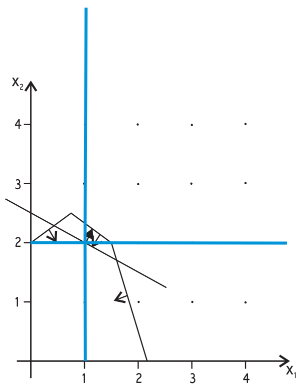
TP_4: $x_1 >= 1$, $x_2 >= 3$



keine zulässige Lösung

=>terminiere

TP_5: $x_1 >= 1$, $x_2 <= 2$, $x_1 <= 1$

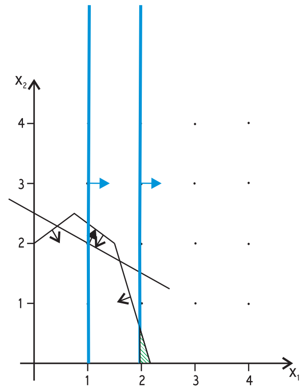


$x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$, $z^* = 5$

zulässig $LB_2 = 5$

=> terminiere

TP_6: $x_1 >= 1$, $x_2 <= 2$, $x_1 >= 2$



$x_1^* = 2$, $x_2^* = 0{,}5$, $z^* = 3$

nicht zulässig UB=3<LB

=> terminiere

Aufgabe 9:

$$\begin{aligned}
\max z &= 8x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 - x_5 \\
\text{s.d. } & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 4 \\
& 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 \leq 4 \\
& x_i \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Umformen, sodass $c_i < 0$
$\rightsquigarrow$ Substitutieren von $x_1,\ x_2:\ x_1 = 1 - x_1'$ und $x_2 = 1 - x_2'$

$$\begin{aligned}
\max z = & -8x_1' - 2x_2' - 4x_3 - 7x_4 - x_5 + 10 \\
\text{s.d. } & -3x_1' - 3x_2' + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq -2 \\
& -5x_1' - 3x_2' - 2x_3 - 4x_4 + x_5 \leq -4 \\
& x_i \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

$N_0 = \{1,\dots,5\}, L_0^1 = L_0^0 = \{\},$ $\qquad UB = 10,\ LB_1 = -12$
$S_0 = (-2,-4), U_0 = 6,$ $\qquad Q_0 = \{1,2,3,4\}$

Unzulässigkeiten im Knoten 1: $U_1(1) = 0,\ U_1(2) = 1,\ U_1(3) = 5,\ U_1(4) = 4$
$\rightsquigarrow$ Entwickeln nach x_1:

Knoten 1 ($x_1 = 1$)

$$\begin{aligned}
\max z = & -2x_2' - 4x_3 - 7x_4 - x_5 + 2 \\
\text{s.d. } & -3x_2' + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 1 \\
& -3x_2' - 2x_3 - 4x_4 + x_5 \leq 1 \\
& x_i \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

$S_1 = (1,1)$ $\rightsquigarrow$ Zulässigkeit erreicht $\rightsquigarrow$ terminieren
$x^T = (1,0,0,0,0), z = 2 = LB_{G_1}$

Knoten 2 ($x_1 = 0$)

$$\begin{aligned}
\max z = & -2x_2' - 4x_3 - 7x_4 - x_5 + 10 \\
\text{s.d. } & -3x_2' + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq -2 \\
& -3x_2' - 2x_3 - 4x_4 + x_5 \leq -4 \\
& x_i \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

$N_0 = \{2,3,4,5\}, L_2^1 = \{\},\ L_2^0 = \{1\},$ $\qquad UB = 10,\ LB = -4$
$S_2 = (-2,-4), U_2 = 6,$ $\qquad Q_2 = \{2,3,4\}$

Unzulässigkeiten im Knoten 3: $U_3(2) = 1,\ U_3(3) = 5,\ U_3(4) = 4$
$\rightsquigarrow$ Entwickeln nach x_2

Knoten 3 ($x_1' = 0,\ x_2' = 1$)

$$\begin{aligned} \max z = & -4x_3 - 7x_4 - x_5 + 8 \\ \text{s.d. } & x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 1 \\ & -2x_3 - 4x_4 + x_5 \leq -1 \\ & x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$N_3 = \{3,4,5\}, L_3^1 = \{2\},\ L_3^0 = \{1\},$ $\quad$ $UB = 8,\ LB = -4$
$S_3 = (1,-1), U_3 = 1,$ $\quad$ $Q_3 = \{3,4\}$

Unzulässigkeiten im Knoten 4: $U_4(3) = 0,\ U_4(4) = 1$
$\rightsquigarrow$ Entwickeln nach x_3

Knoten 3 ($x_1' = 0,\ x_2' = 1,\ x_3 = 1$)

$$\begin{aligned} \max z = & -7x_4 - x_5 + 4 \\ \text{s.d. } & 2x_4 + 3x_5 \leq 0 \\ & -4x_4 + x_5 \leq 1 \\ & x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$S_4 = (0,1)$ $\rightsquigarrow$ Zulässigkeit erreicht $\rightsquigarrow$ terminieren
$x^T = (0,1,1,0,0),\ z = 4 = LB_{G_2}$

Knoten 5 ($x_1' = 0,\ x_2' = 1,\ x_3 = 0$)

$$\begin{aligned} \max z = & -7x_4 - x_5 + 8 \\ \text{s.d. } & 2x_4 + 3x_5 \leq 1 \\ & -4x_4 + x_5 \leq -1 \\ & x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$N_5 = \{4,5\}, L_5^1 = \{2\},\ L_5^0 = \{1,3\},$ $\quad$ $UB = 8,\ LB = 0$
$S_5 = (1,-1), U_5 = 1,$ $\quad$ $Q_5 = \{4\}$

Unzulässigkeit im Knoten 6: $U_6(4) = 1$

Knoten 6 ($x'_1 = 0,\ x'_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$)

$$\begin{aligned} \max z = {} & 1 - x_5 \\ \text{s.d. } & 3x_5 \leq -1 \\ & x_5 \leq 3 \\ & x_5 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Es existiert keine zulässige Lösung $\rightsquigarrow$ terminieren

Knoten 7 ($x'_1 = 0,\ x'_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$)

$$\begin{aligned} \max z = {} & -x_5 + 8 \\ \text{s.d. } & 3x_5 \leq 1 \\ & x_5 \leq -1 \\ & x_5 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

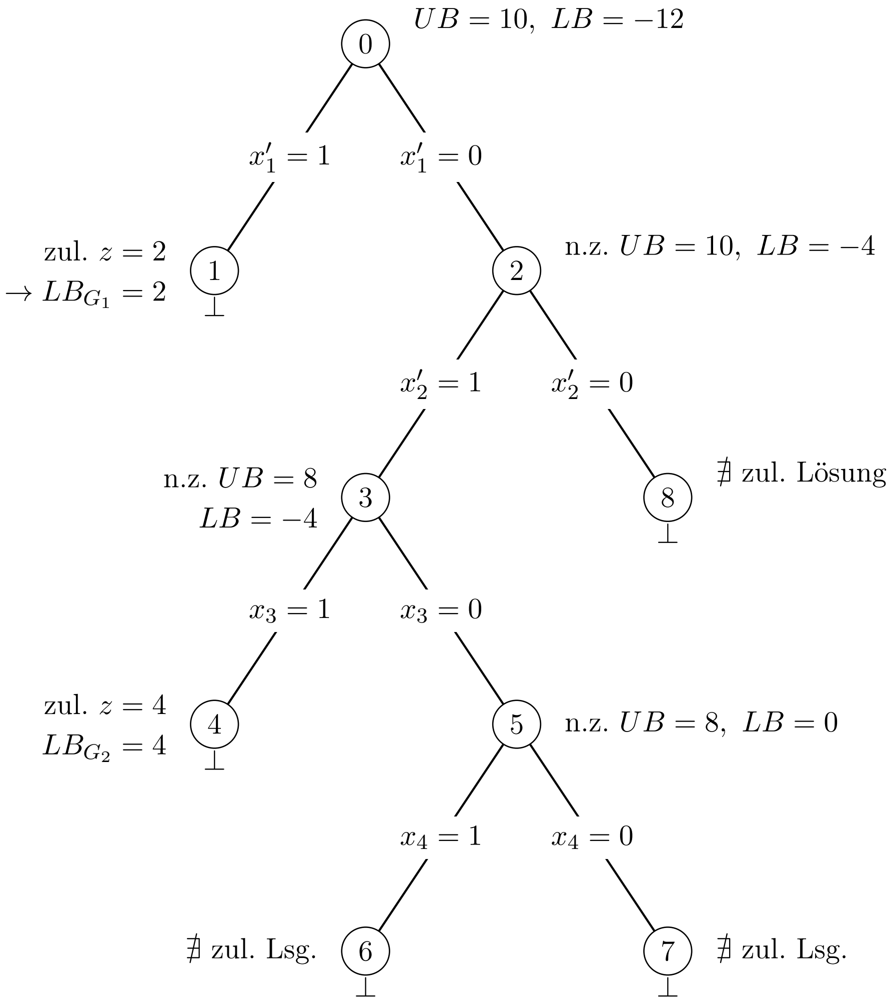
Es existiert keine zulässige Lösung $\rightsquigarrow$ terminieren

Knoten 8 ($x'_1 = 0,\ x'_2 = 0$)

$$\begin{aligned} \max z = {} & -4x_3 - 7x_4 - x_5 + 10 \\ \text{s.d. } & x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq -2 \\ & -2x_3 - 4x_4 + x_5 \leq -4 \\ & x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Es existiert keine zulässige Lösung $\rightsquigarrow$ terminieren

Alle Knoten terminiert $\rightsquigarrow$ LB_2 optimal
$\Rightarrow\ x_1^* = 1,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 1,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 0,\ z^* = 4$


$UB = 10,\ LB = -12$
$x_1' = 1$
$x_1' = 0$
zul. $z = 2$
$\rightarrow LB_{G_1} = 2$
n.z. $UB = 10,\ LB = -4$
$x_2' = 1$
$x_2' = 0$
n.z. $UB = 8$
$LB = -4$
$\nexists$ zul. Lösung
$x_3 = 1$
$x_3 = 0$
zul. $z = 4$
$LB_{G_2} = 4$
n.z. $UB = 8,\ LB = 0$
$x_4 = 1$
$x_4 = 0$
$\nexists$ zul. Lsg.
$\nexists$ zul. Lsg.

Ersatznebenbedingungen

- Erlauben das frühzeitige Erkennen, ob der Lösungsraum des betrachteten Knotens leer ist
- Ggf. auch Fixieren von Variablen möglich

Zu zeigen: optimale Werte der Dualvariablen v_i stellen optimale Gewichte für die Bestimmung der Ersatznebenbedingung im Verfahren der impliziten Enumeration dar.

Beweis: Im Knoten K wird folgendes Modell betrachtet:

$$\begin{aligned} \max & \sum_{j \in N_k} c_j \cdot x_j \\ \text{s.d.} & \sum_{j \in N_k} a_{ij} \cdot x_j \leq S_i \ \forall i = 1, \ldots, m \\ & 0 \leq x_j \leq 1 \ \forall j \in N_k \end{aligned}$$

Duales Modell:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^{m} S_i \cdot v_i + \sum_{j \in N_k} w_j \\ \text{s.d.} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v_i + w_j \geq c_j \\ & v_i, \ w_j \geq 0 \end{aligned}$$

Definition von Stärke:
$L_k(\alpha)$ heißt stärker als $L_k(\alpha')$ genau dann, wenn $L_k(\alpha) \subseteq L_k(\alpha')$ bzw.

$$\begin{aligned} \max \sum_{j\in N_k} c_j \cdot x_j \leq \quad & \quad \max_{j\in N_k} c_j \cdot x_j \\ \text{s.d. } \alpha \cdot A \cdot x \leq \alpha \cdot S \quad & \quad \text{s.d. } \alpha' \cdot A \cdot x \leq \alpha' \cdot S \\ x_j \in \{0,1\} \quad & \quad x_j \in \{0,1,\} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max_{x_j} \sum_{j\in N_k} c_j \cdot x_j + \alpha \cdot S - \alpha \cdot A \cdot x \leq \qquad \max_{x_j} \sum_{j\in N_k} c_j \cdot x_j + \alpha' \cdot S - \alpha' \cdot A \cdot x$$

(D.h. das Maximum der Summe aus ZFW und Überfüllung der NB ist für $L_k(\alpha)$ nicht größer als für $L_k(\alpha')$.)
Gesucht ist also ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T \geq 0$, der den Ausdruck

$$\max_{x_j} \sum_{j\in N_k} c_j \cdot x_j + \alpha \cdot S - \alpha \cdot A \cdot x \text{ bzw.}$$

$$\max_{x_j} \sum_{j\in N_k} \left(c_j \cdot x_j + \sum_{i=1}^{m} -\alpha_i \cdot a_{ij} \cdot x_j \right) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot S_i$$

minimiert.

$$\text{D.h. } \min_{\alpha_i \geq 0} \max_{x_j} \sum_{j\in N_k} \left(c_j \cdot x_j + \sum_{i=1}^{m} -\alpha_i \cdot a_{ij} \cdot x_j \right) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot S_i \tag{*}$$

Für festes α gilt nun

$$\begin{aligned} & \max_{x_j\in\{0,1\}} \sum_{j\in N_k} \left(c_j \cdot x_j + \sum_{i=1}^{m} -\alpha_i \cdot a_{ij} \right) \cdot x_j \\ = & \max_{0\leq x_j \leq 1} \sum_{j\in N_k} \left(c_j \cdot x_j + \sum_{i=1}^{m} -\alpha_i \cdot a_{ij} \right) \cdot x_j \\ & \left(\text{Setze } x_j = 1, \text{ falls } \left(c_j + \sum_{i=1}^{m} -\alpha \cdot a_{ij} \right) \geq 0,\ 0 \text{ sonst}\right) \\ = & \min_{w_j \geq 0} \sum_{j\in N_k} w_j \text{ s.d. } w_j \geq c_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{ij} \ \forall j \in N_k \end{aligned} \tag{**}$$

$(**)$ in $(*)$ einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha_i\geq 0} \min_{w_j \geq 0} \sum_{j\in N_k} w_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot S_i \\ & \text{s.d. } w_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot a_{ij} \geq c_j \ \forall j \in N_k \square \end{aligned}$$

Aufgabe 10:

optimale Werte der dualen Vaiablen stellen optimale Gewichte für das Aufstellen der besten Ersatznebenbedingung dar.

$\rightsquigarrow$ Bestimmen der optimalen dualen Lösung mittels complementary slackness

duales Modell zur LP-Relaxation von B:

$$\begin{aligned}
\min z' = & -2v_1 \qquad\quad - 6v_3 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \\
\text{s.d.} \quad & -2v_1 + 4v_2 - 4v_3 + w_1 && \geq -8 \\
& 3v_1 - 2v_2 + v_3 \qquad + w_2 && \geq -4 \\
& -4v_1 + 3v_2 + 3v_3 \qquad + w_3 && \geq -5 \\
& -8v_1 \qquad - 4v_3 \qquad + w_4 && \geq -12 \\
& 3v_1 - 4v_2 + v_3 \qquad + w_5 && \geq -6 \\
& v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Aus der optimalen primalen Lösung x^* folgt mittels complementary slackness:

- $x_1^*, x_4^*, x_5^* > 0 \rightsquigarrow$ 1.,4. und 5. duale Nebenebedingungen sind in der optimalen dualen Lösung bindend
- 1.,4.,5.,6. und 8. primale Nebenbedingungen sind in x^* nicht bindend $\rightsquigarrow$ in der optimalen Lösung gilt $v_1 = w_1 = w_2 = w_3 = w_5 = 0$

Somit gilt:

$$\left.\begin{aligned} 4v_2 - 4v_3 &= -8 \\ -4v_3 + w_4 &= -12 \\ -4v_2 + v_3 &= -6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_2 = \frac{8}{3},\ v_3 = \frac{14}{3}$$

In der optimalen dualen Lösung gilt also $v_1^* = 0, v_2^* = \frac{8}{3}$ und $v_3^* = \frac{14}{3}$.

$\rightsquigarrow$ beste Ersatznebenbedingung für B:

$$\begin{aligned}
& 0 \cdot (-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 8x_4 + 3x_5) + \frac{8}{3} \cdot (4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_5) \\
& \quad + \frac{14}{3}(-4x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5) \leq 0 \cdot (-2) + \frac{8}{3} \cdot 0 + \frac{14}{3} \cdot (-6) \\
\Leftrightarrow & -8x_1 - \frac{2}{3}x_2 + 22x_3 - \frac{56}{3}x_4 - 6x_5 \leq -28
\end{aligned}$$

Aus der Ersatznebenbedingung folgt: $x_1 = x_4 = x_5 = 1$ und $x_3 = 0$

Aufgabe 11:

Zunächst Lösen der LP-Relaxation:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.d.} 2x_1 + 2x_2 \leq 7$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i^*	Θ_i	
s_1	2	2	1	0	7	$\frac{7}{2}$	
s_2	-1	**2**	0	1	3	$\frac{3}{2}$	$\leftarrow$
Δz_j	-2	-3	0	0	0		
		$\uparrow$					

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i^*	Θ_i	
s_1	**3**	0	1	-1	4	$\frac{4}{3}$	$\leftarrow$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-$	
Δz_j	$-\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$		
	$\uparrow$						

	x_1	x_2	s_1	s_2	$b_i^* b_i^*$	Θ_i
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	
x_2	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{6}$	
Δz_j	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{55}{6}$	
	$\uparrow$					

opt. Lösung der LP-Relaxation: $x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{13}{6},\ z = \frac{55}{6}$
Lösung ist nicht ganzzahlig.
$\rightarrow$ Einfügen einer Gomory-Restriktion
Hier: Einfügen einer Gomory-Restriktion für die Zeile i, in welcher der nichtganzzahlige Anteil von b_i^* maximal ist. Also Zeile 1!

Basisdarstellung der 1. Basisvariable

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{3}s_2\right) \\
&= 1 + \frac{1}{3} - \left(0 \cdot s_1 - 1 \cdot s_2 + \frac{1}{3} \cdot s_1 + \frac{2}{3} \cdot s_2\right) \\
&= \underbrace{1 - (0 \cdot s_1 - 1 \cdot s_2)}_{\text{ganzzahlig}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot s_1 + \frac{2}{3} \cdot s_2\right)}_{\text{muss ganzzahlig sein, damit } x_1 \text{ ganzzahlig}}
\end{aligned}$$

$$\text{Es gilt:} \frac{1}{3} \cdot s_1 + \frac{2}{3} \cdot s_2 \geq 0, \text{ d.h. } -\left(\frac{1}{3} \cdot s_1 + \frac{2}{3} \cdot s_2\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot s_1 + \frac{2}{3} \cdot s_2\right) \leq \frac{1}{3} < 1$$

Notwendige Bedingung für Ganzzahligkeit ist also

$$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot s_1 + \frac{2}{3} \cdot s_2\right) \leq 0$$

Schlupfvariable einfügen:

$$-\frac{1}{3} \cdot s_1 - \frac{2}{3} \cdot s_2 + G_1 = -\frac{1}{3}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	G_1	b_i^*
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{13}{6}$
G_1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
Δz_j	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{55}{6}$

Lösung ist dual zulässig, primal jedoch unzulässig
→ dualer Simplex-Schritt

	x_1	x_2	s_1	s_2	G_1	b_i^*
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	2
s_2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
Δz_j	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	9

Lösung nicht ganzzahlig $\rightarrow$ zusätzliche Gomory-Restriktion (wieder 1. Zeile)
Basisdarstellung:

$$x_1 = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot s_1 - \frac{1}{2} G_1\right)$$
$$= 1 - (0 \cdot s_1 - 1 \cdot G_1) + \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} \cdot s_1 + \frac{1}{2} \cdot G_1)$$

$\rightarrow$ zusätzliche Gomory-Restriktion

$$-\frac{1}{2} \cdot s_1 - \frac{1}{2} \cdot G_1 + G_2 = -\frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ zu obigem Endtableau hinzufügen

	x_1	x_2	s_1	s_2	G_1	G_2	b_i^*
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
s_2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
G_2	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
Δz_j	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	9

	x_1	x_2	s_1	s_2	G_1	G_2	b_i^*
x_1	1	0	1	0	0	-1	2
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{3}{2}$
s_2	0	0	2	1	0	-3	2
G_1	0	0	1	0	1	-2	1
Δz_j	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{17}{2}$

Lösung erneut nicht ganzzahlig $\rightarrow$ zusätzliche Gomory-Restriktion erforderlich (2.Zeile)
Basisdarstellung:

$$x_2 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot s_1 + G_2\right)$$
$$= 1 - (-1 \cdot s_1 + 1 \cdot G_2) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot s_1\right)$$

$\rightarrow$ zusätzliche Gomory-Restriktion

$$-\frac{1}{2} \cdot s_1 + G_3 = -\frac{1}{2}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	G_1	G_2	G_3	b_i^*
x_1	1	0	1	0	0	-1	0	2
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$\frac{3}{2}$
s_2	0	0	2	1	0	-3	0	2
G_1	0	0	1	0	1	-2	0	1
G_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
Δz_j	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$\frac{17}{2}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	G_1	G_2	G_3	b_i^*
x_1	1	0	0	0	0	-1	2	1
x_2	0	1	0	0	0	1	-1	2
s_2	0	0	0	1	0	-3	4	0
G_1	0	0	0	0	1	-2	2	0
s_1	0	0	1	0	0	0	-2	1
Δz_j	0	0	0	0	0	1	1	8

Lösung ganzzahlig $\rightsquigarrow$ optimale Lösung gefunden
$x_1^* = 1,\ x_2^* = 2,\ z^* = 8$
Grafische Darstellung:
$\rightarrow$ Basisdarstellung der Gomory-Restriktionen bezüglich Basis des Starttableaus
1. Gomory-Restriktion: $-\frac{1}{3} \cdot s_1 - \frac{2}{3} \cdot s_2 + G_1 = -\frac{1}{3}$
Basisdarstellung von $s_1,\ s_2$ bezühlich Basis des Starttableau

$$s_1 = 7 - 2x_1 - 2x_2 \quad \text{und} \quad s_2 = 3 + x_1 - 2x_2$$

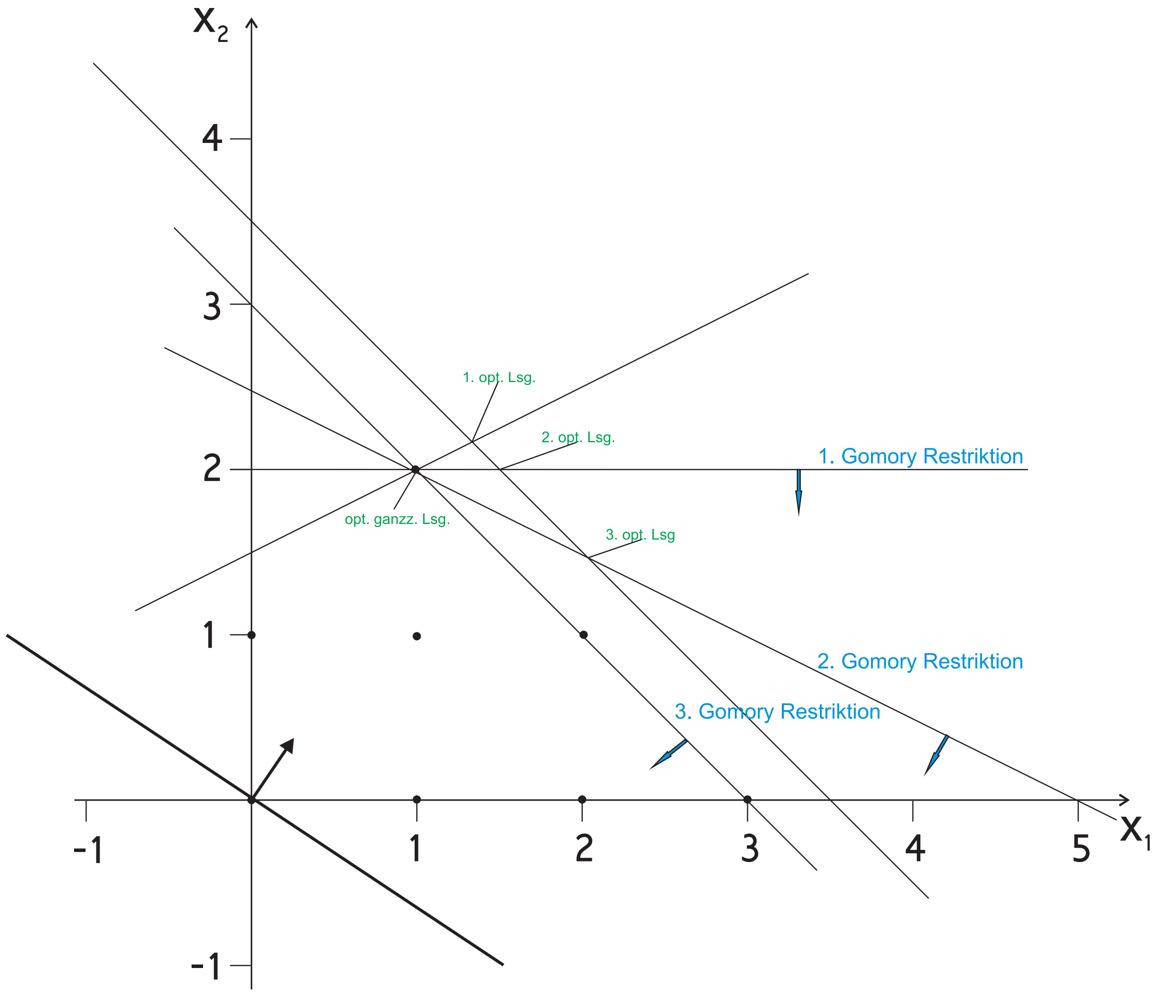
Einsetzen in Gomory-Restriktion liefert:

$$-\frac{1}{3}\,(7 - 2x_1 - 2x_2) - \frac{2}{3}\,(3 + x_1 - 2x_3) + G_1 = -\frac{1}{3} \;\Rightarrow 2x_2 + G_1 = 4 \quad \text{bzw.} \quad x_2 \leq 2$$

Analog für die 2. und 3. Gomory-Restriktion liefert:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

Aufgabe 11



x2
x1
4
3
2
1
-1
-1
1
2
3
4
5
1. opt. Lsg.
2. opt. Lsg.
3. opt. Lsg
opt. ganzz. Lsg.
1. Gomory Restriktion
2. Gomory Restriktion
3. Gomory Restriktion