RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN
DEUTSCHE POST LEHRSTUHL FÜR OPTIMIERUNG VON DISTRIBUTIONSNETZWERKEN
Universitätsprofessor Dr.rer.nat.habil. Hans-Jürgen Sebastian

Klausur
Methoden und Anwendungen der Optimierung (PT1)

13. Februar 2015

Klausurnummer:

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang / Fachrichtung:

Hinweise:

- Füllen Sie die Felder oben vollständig aus bzw. korrigieren Sie ggf. die entsprechenden Einträge und unterschreiben Sie die Klausur.
- Sämtliche Einträge in dem Klausurexemplar sind mit dokumentenechten Schreibutensilien vorzunehmen (Kein Bleistift!).
- Die Antworten sind in diesem Klausurexemplar einzutragen. Bei Bedarf erhalten Sie weitere leere Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel außer Stift und Lineal zugelassen. Insbesondere ist die Benutzung von Taschenrechnern und Vorlesungs-/Übungsunterlagen unzulässig!
- Handys dürfen nicht zur Klausur mitgebracht werden bzw. sind auszuschalten.
- Die Höchstpunktzahl beträgt 90 Punkte; die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Beantworten Sie die Aufgaben möglichst stichpunktartig.
- Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit (Seiten 1 bis 10)!

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, die obigen Hinweise zur Kenntnis genommen zu haben, diese zu akzeptieren und mich gesund und somit prüfungsfähig zu fühlen.

Unterschrift: ________________________________

Aufgabe	Fragen	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Note
max. Punkte	30	13	12	10	12	13	90	
Punkte								

Aufgabenteil (60 Punkte)

Aufgabe 1: Schnittebenenverfahren von Gomory (13 Punkte)

Gegeben ist das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 8x_2 \\ \text{s.d.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ & x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Simplex-Algorithmus auf dessen LP-Relaxation führt zu folgendem optimalen Endtableau:

	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i^*
x_1	1	0	9/4	-1/4	9/4
x_2	0	1	-5/4	1/4	15/4
Δz_j	0	0	5/4	3/4	165/4

Da die optimale Lösung der LP-Relaxation für das ursprüngliche Problem nicht zulässig ist, soll diese mit Hilfe des Schnittebenenverfahrens von Gomory bestimmt werden.

(a) Stellen Sie die dafür notwendige Gomory-Restriktion für die Basisvariable x_2 auf. (3 Punkte)

(b) Erweitern Sie obiges Endtableau des primalen Simplex-Algorithmus um die in (a) aufgestellte Gomory-Restriktion und führen Sie einen dualen Simplex-Schritt durch. (6 Punkte)

		b_i^*
Δz_j		

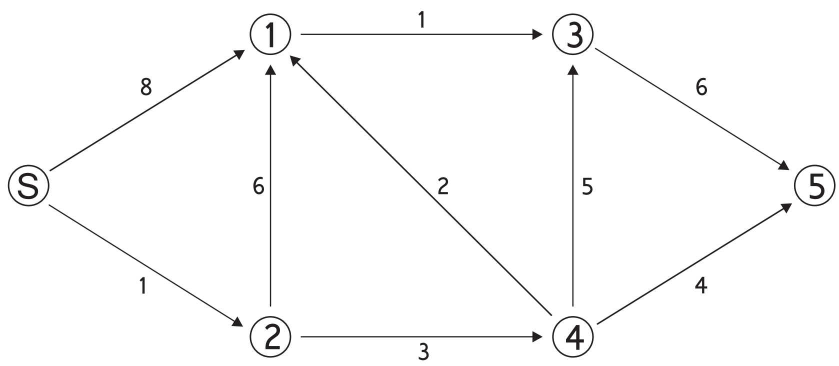
		b_i^*
Δz_j		

(c) Ist die in Aufgabenteil (b) bestimmte Lösung zulässig für das ursprüngliche Problem? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

(d) Bestimmen Sie für die in Aufgabenteil (a) aufgestellte Gomory-Restriktion die Gleichung der entsprechenden Schnittebene und geben Sie diese explizit an. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Dijkstra-Algorithmus (12 Punkte)

Gegeben ist der folgende Digraph mit sechs Knoten:



Führen Sie für obigen Digraphen den Dijkstra-Algorithmus zur Bestimmung der kürzesten Wegen von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3, 4 und 5 durch.

(a) Tragen Sie hierfür in der untenstehenden Tabelle für jede Iteration des Dijkstra-Algorithmus den ausgewählten Knoten, die Menge der vorläufig markierten Knoten, die Menge der endgültig markierten Knoten sowie die Labels $d(1), \ldots, d(5)$ ein. (9 Punkte)

Iteration	Ausgewählter Knoten i	vorläufig markierte Knoten	endgültig markierte Knoten	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$	$d(5)$
Initialisierung	-	S	-	∞	∞	∞	∞	∞

(b) Geben Sie die ermittelten kürzesten Wege von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3, 4 und 5 sowie deren Länge explizit an. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Transportproblem (10 Punkte)

Gegeben ist ein Transportproblem mit 4 Anbietern A_1 bis A_4 sowie 6 Nachfragern B_1 bis B_6. Außerdem sind die Angebotsmengen a_1 bis a_4 und die Nachfragemengen b_1 bis b_6 bekannt. Diese können zusammen mit den für den Transport von Anbieter i zu Nachfrager j anfallenden Stücktransportkosten c_{ij} der folgenden Tabelle entnommen werden.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	3	6	3	4	2	7	60
A_2	9	4	8	8	6	5	45
A_3	7	2	4	5	9	4	65
A_4	2	9	3	2	5	6	80
b_j	25	35	80	10	60	40	

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Nordwesteckenregel eine zulässige Lösung des Transportproblems (2 Punkte).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1							60
A_2							45
A_3							65
A_4							80
b_j	25	35	80	10	60	40	

(b) Welche Besonderheit weist die in Aufgabenteil (a) ermittelte Basislösung auf? (1 Punkt)

Obiges Problem soll nun mit Hilfe der MODI-Methode gelöst werden. Hierfür wurde bereits die folgende Ausgangsbasislösung bestimmt.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1		35			25		60
A_2					5	40	45
A_3			65				65
A_4	25		15	10	30		80
b_j	25	35	80	10	60	40	

(c) In der nächsten Iteration der MODI Methode soll die Variable x_{32} in die Basis aufgenommen werden. Mit welchem Wert wird x_{32} in die Basis aufgenommen? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 Punkte)

(d) Welche Variable verlässt in dieser Iteration die Basis? Wie lautet ihr neuer Wert (2 Punkte)?

(e) Um welchen Betrag werden durch diesen Basistausch die Gesamttransportkosten reduziert (2 Punkte)?

Aufgabe 4: Nichtlineare Optimierung (12 Punkte)

Gegeben ist das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lcl} \min\ f(x) & = & (x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \\ \text{s.d.} & & x_1-2x_2^2 \geq -9 \\ & & x_1+2x_2 \leq 5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Geben Sie für obiges Problem die Kuhn-Tucker-Bedingungen KTB' an. Verwenden Sie dabei die Standardform, d.h. nicht die Formulierung als Sattelpunkt der Lagrange-Funktion. (6 Punkte)

Weiter ist das folgende nichtlineare Optimierungsproblem gegeben:

$$\begin{array}{lcl} \min\ f(x) & = & (x_1-5)^2+(x_2-7)^2 \\ \text{s.d.} & & x_1+x_2 \leq 6 \\ & & x_1^2+x_2^2 \leq 25 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Für dieses wurden die folgenden Kuhn-Tucker Bedingungen in der Form KTB' bestimmt:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1-10+u_1+2x_1u_2-u_3 & = & 0 \\ 2x_2-14+u_1+2x_2u_2-u_4 & = & 0 \\ x_1+x_2-6 & \leq & 0 \\ x_1^2+x_2^2-25 & \leq & 0 \\ -x_1 & \leq & 0 \\ -x_2 & \leq & 0 \\ (x_1+x_2-6)u_1 & = & 0 \\ (x_1^2+x_2^2-25)u_2 & = & 0 \\ -x_1u_3 & = & 0 \\ -x_1u_4 & = & 0 \\ u_1,u_2,u_3,u_4 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Welcher der folgenden Punkte erfüllt die Kuhn-Tucker-Bedingungen für obiges Problem? (6 Punkte)

$P_1(1;\ 1)$ $P_2(4;\ 2)$ $P_3(2;\ 4)$

Aufgabe 5: Dynamische Optimierung (13 Punkte)

Wie jedes Semester fängt der Student *Morator* viel zu spät mit der Vorbereitung auf seine Prüfungen an. Bis zum Beginn seiner drei Abschlussprüfungen bleiben ihm 7 Tage Zeit, die er optimal nutzen möchte.

Da er mit der Strategie „Mut zur Lücke" bereits schlechte Erfahrungen gemacht hat, möchte er für jedes Fach mindestens einen Tag lernen. Weiter möchte er sich pro Tag jeweils mit nur genau einem Fach beschäftigen, mit jedem Fach allerdings höchstens 4 Tage.

Die Prüfungsergebnisse hängen natürlich vom jeweiligen Lernaufwand ab. Wie *Morator* die zu erzielenden Punktzahlen in den drei Prüfungen in Abhängigkeit der Anzahl der Lerntage einschätzt, ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Anzahl Lerntage	Fach 1	Fach 2	Fach 3
1	4	3	5
2	4	5	6
3	5	5	8
4	8	7	8

D.h. wenn er z.B. für Fach 2 insgesamt drei Tage lernt, so bekommt er in der Prüfung voraussichtlich 5 Punkte.

Morator hat sich das Ziel gesetzt in allen drei Prüfungen zusammen so viele Punkte wie möglich zu erzielen. Helfen Sie ihm mittels dynamischer Optimierung einen optimalen Lernplan zu erstellen.

(a) Legen Sie zunächst folgende Objekte fest:

- Stufen j (1 Punkt)

- Zustände x_j (1 Punkt)

- Entscheidungsvariablen y_j (1 Punkt)

- Zustandsübergangsfunktion (1 Punkt)

(b) Lösen Sie das Problem mittels dynamischer Optimierung. Wenden Sie dabei die Rückwärtsrechnung an und geben Sie die gefundene Lösung explizit an. (9 Punkte)

Weiter Aufgabe 5: