Aufgabe 19

a

$$
\begin{array}{llcll}
\min & d_{max} & & & \\
s.t. & \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} & = & 1 & \forall i \in \{1,..,n\} \\
& \sum_{(i,j)\in\delta^-(i)} x_{ji} & = & 1 & \forall i \in \{1,..,n\} \\
& \sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij} & \geq & 1 & \forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset \\
& x_{ji} \cdot d_{ji} & \leq & d_{max} & \forall i,j \in \{1,...,n\}, i \neq j
\end{array}
$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \delta^+(S) = \{(i,j) \in A : i \in S, j \notin S\}, \delta^-(S) = \{(i,j) \in A : j \in S, i \notin S\}$$

Die boolsche Variable x_{ij} ist genau dann 1, wenn ein Bus von der Station $i \in \{1,...n\}$ nach $j \in \{1,...,n\}$ fährt, wobei $i \neq j$ gilt.

Die ersten drei Nebenbedingungen stellen sicher, dass es sich um genau einen Kreis in dem Graph gibt und dass sich keine Teilgraphen bilden lassen zwischen denen es keine Verbindung gibt, so dass jeder Knoten genau einmal angefahren wird. Die letzte Nebenbedingung sucht die längste Kanten entlang des Kreises, welche in der Zielfunktion minimiert wird.

b

$$
\begin{array}{llcll}
\min & d_{max} & & & \\
s.t. & \sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} & = & 1 & \forall i \in \{1,..,n\} \\
& \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ji} & = & 1 & \forall i \in \{1,..,n\} \\
& \sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij} & \geq & 1 & \forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset \\
& x_{ij} + x_{jk} & \leq & 1 + x'_{ik} & \forall i,j,k \in \{1,...,n\} \\
& x'_{ij} \cdot d'_{ij} & \leq & d_{max} & \forall i,j \in \{1,...,n\}, i \neq j \\
& d_{ij} + d_{jk} & = & d'_{ik} & \forall i,j,k \in V, i \neq j \neq k
\end{array}
$$

$$x_{ij}, x'_{ij} \in \{0,1\}, d'_{ij} \geq 0$$

Sei das TSP ein Graph $G = (V, A)$ Die boolsche Variable $x'_{ij} \in \{0,1\}$ ist genau dann 1, wenn ein Bus von der Station $i \in \{1,...,n\}$ über eine weitere Station zu der Station $j \in \{1,...,n\}$ fährt. Die Variable $d'_{ij} \in \mathbb{R}^+$ stellt die Distanz einer Strecke von $i \in \{1,...,n\}$ nach $k \in \{1,...,n\}$ mit genau einer beliebigen Station $j \in \{1,...,n\}$ dazwischen.

Die vierte Nebenbedingung sucht nach Stationen, die aufeinander folgen. Hierfür wird die neue Variable x'_{ij} wie oben beschrieben verwendet. Sollte von i über j nach k gefahren werden, mit $i,j,k \in \{1,...,n\}$, dann gilt $x_{ij} = x_{jk} = 1$, also $x_{ij} + x_{jk} = 2$ woraus $x'_{ik} = 1$ folgt. Sollte $x_{ij} \neq x_{jk}$ oder $x_{ij} = x_{jk} = 0$ sein, so bilden die Stationen offensichtlich keine Verbindung und x'_{ik} muss nicht auf 1 gesetzt werden. Da es sich hierbei um ein Minimierungsproblem handelt und x'_{ik} indirekt mit in die Zielfunktion einfließt wird dieses dann auch nicht auf 1 gesetzt. Die letzte Nebenbedingung berechnet alle Strecken bei denen eine Bushaltestelle übersprungen wird.

Die Idee des LPs besteht also darin zu jeder Station eine Vorgängerstation zu finden. Da es sich um eine Rundtour handelt gibt es keine Ausnahme und es ist ebenso egal, bei welcher Station begonnen werden muss.

Aufgabe 20

a

$$\begin{array}{llcrr}
\min & \sum\limits_{(i,j)\in A} x_{ij}\cdot d_{ij} & & & \\
s.t. & \sum\limits_{(i,j)\in\delta(i)} x_{ij} + \sum\limits_{(j,i)\in\delta(i)} x_{ji} & \geq & 2\cdot(z_h+z_l-1) & \forall h\in\{1,..,n\}, \forall j\notin\{1,...,n\} \\
& \sum\limits_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij} & \geq & 1 & \forall S\subsetneq V, S\neq\emptyset \\
& \sum\limits_{(1,i)\in\delta(i)} x_{1i} + \sum\limits_{(i,1)\in\delta(i)} x_{i1} & = & 2 & \forall i\in \\
& x_{ij} & \leq & z_j & \forall j,i\in V \\
& \sum\limits_{i\in L_k} z_i & \geq & d_k & \forall k\in\{1,...,m\}
\end{array}$$

$$z_i\in\{0,1\}, x_{ij}\in\{0,1\}, \delta^+(S)=\{(i,j)\in A : i\in S, j\notin S\}$$

Sei das TSP auf dem Graphen $G=(V,A)$.

Die boolsche Variable x_{ij} ist genau dann 1, wenn in der Stadt i ein Konzert gespielt wird und als nächstes in der Stadt j, wodurch die Kosten d_{ij} anfallen. Die boolsche Variable z_i ist genau dann 1, wenn während der Tour in der Stadt i ein Konzert gespielt wird.

In der Zielfunktion werden alle Kosten aufsummiert die tatsächlich anfallen, also werden Kosten genau dann aufsummiert, wenn die Strecke d_{ij} tatsächlich genutzt wird. Die letzte Nebenbedingung sagt aus, dass die Anzahl der Konzert in einem Land k mindestens d_k sein muss. Hierfür wird über alle Städte in k summiert und für jedes in Land k statt finde Konzert 1 addiert. Die erste Nebenbedingung legt fest, dass zu jeder Stadt, in der ein Konzert gespielt wird, zwei Kanten vorliegen, damit man zu dem Konzert gelangen kann und die Stadt im Anschluss wieder verlassen kann. Die zweite Nebenbedingung ist wie in der obrigen Aufgabe zu verstehen, dass es nur einen Kreis gibt und keinen kleineren unabhängigen Kreise. Die dritte Nebenbedingung legt fest, dass die Stadt 1 definitiv besucht wird. Wann diese in dem Kreis besucht wird ist egal, die Tour kann mitten im Kreis starten. Der Rest der Tour kann dann aus den x_{ij} hergeleitet werden.

b

$$
\begin{array}{llccr}
\min & \sum\limits_{(i,j)\in A} x_{ij} \cdot d_{ij} & & & \\
s.t. & \sum\limits_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} & = & z_i & \forall i \in V \\
& \sum\limits_{(j,i)\in\delta^-(i)} x_{ij} & = & z_i & \forall i \in V \\
& \sum\limits_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ji} & \geq & 1 & \forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset \\
& \sum\limits_{(1,i)\in\delta^+(i)} x_{1i} & = & 1 & \\
& \sum\limits_{(1,i)\in\delta^-(i)} x_{i1} & = & 1 & \\
& x_{ij} & \leq & z_j & \forall j, i \in V \\
& \sum\limits_{i\in L_k} z_i & \geq & d_k & \forall k \in \{1, ..., m\}
\end{array}
$$

$$z_i \in \{0,1\}, x_{ij} \in \{0,1\}, \delta^+(S) = \{(i,j) \in A : i \in S, j \notin S\}$$

Die ersten Nebenbedingungen sind wie im im obigen Aufgabenteil, wobei die dritte Bedingung sagt, dass Stadt 1 definitiv mit in der Tour sein muss. Es muss nicht gesagt werden, dass diese explizit als erstes angefahren werden muss. Da diese auf dem Kreis liegt welcher der Tour entspricht genügt es bei der Planung die Tour dort zu beginnen. Durch den gerichteten Graphen müssen die Kanten, die an einem Knoten anliegen näher beschrieben werden, ob es sich dabei um eine eingehende koder eine ausgehnde Kante handelt. Dies betrifft Nebenbedingung 1,2,4 und 5. Die Grundidee folgt aus dem LP aus dem vorherigen Aufgabenteil.