RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN
DEUTSCHE POST LEHRSTUHL FÜR OPTIMIERUNG VON DISTRIBUTIONSNETZWERKEN
Universitätsprofessor Dr.rer.nat.habil. Hans-Jürgen Sebastian

Klausur
Methoden und Anwendungen der Optimierung (PT1)

13. Februar 2014

Klausurnummer:

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang / Fachrichtung:

Hinweise:

- Füllen Sie die Felder oben vollständig aus bzw. korrigieren Sie ggf. die entsprechenden Einträge und unterschreiben Sie die Klausur.
- Sämtliche Einträge in dem Klausurexemplar sind mit dokumentenechten Schreibutensilien vorzunehmen (Kein Bleistift!).
- Die Antworten sind in diesem Klausurexemplar einzutragen. Bei Bedarf erhalten Sie weitere leere Blätter.
- Es sind keine Hilfsmittel außer Stift und Lineal zugelassen. Insbesondere ist die Benutzung von Taschenrechnern und Vorlesungs-/Übungsunterlagen unzulässig!
- Handys dürfen nicht zur Klausur mitgebracht werden bzw. sind auszuschalten.
- Die Höchstpunktzahl beträgt 90 Punkte; die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Beantworten Sie die Aufgaben möglichst stichpunktartig.
- Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit (Seiten 1 bis 8)!

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, die obigen Hinweise zur Kenntnis genommen zu haben, diese zu akzeptieren und mich gesund und somit prüfungsfähig zu fühlen.

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	Fragen	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Note
max. Punkte	30	13	11	12	11	13	90	
Punkte								

Aufgabenteil (60 Punkte)

Aufgabe 1: Schnittebenenverfahren von Gomory (13 Punkte)

Gegeben ist das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{s.d.} \quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Simplex-Algorithmus auf dessen LP-Relaxation führt zu folgendem optimalen Endtableau:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i^*
x_1	1	0	1/2	0	-2	3/2
s_2	0	0	-5/2	1	7	9/2
x_2	0	1	0	0	1	1
Δz_j	0	0	1/2	0	2	11/2

Da die optimale Lösung der LP-Relaxation für das ursprüngliche Problem nicht zulässig ist, soll diese mit Hilfe des Schnittebenenverfahrens von Gomory bestimmt werden.

(a) Stellen Sie die dafür notwendige Gomory-Restriktion für die Basisvariable x_1 auf. (3 Punkte)

(b) Erweitern Sie obiges Endtableau des primalen Simplex-Algorithmus um die in (a) aufgestellte Gomory-Restriktion und führen Sie einen dualen Simplex-Schritt durch. (6 Punkte)

		b_i^*
Δz_j		

		b_i^*
Δz_j		

(c) Ist die in Aufgabenteil (b) bestimmte Lösung zulässig für das ursprüngliche Problem? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

(d) Bestimmen Sie für die in Aufgabenteil (a) aufgestellte Gomory-Restriktion die Gleichung der entsprechenden Schnittebene und geben Sie diese explizit an. (3 Punkte)

Aufgabe 2: Implizite Enumeration / Ersatznebenbedingung (11 Punkte)

Gegeben ist das folgende binäre lineare Optimierungsproblem (B).

$$
\begin{array}{lcl}
\max z & = & -6x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 8x_4 - 1x_5 \\
\text{s.d.} & & -2x_1 - 6x_2 - 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq -12 \\
 & & -8x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad\quad - 4x_5 \leq -6 \\
 & & -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \leq -4 \\
 & & x_1, \ldots, x_5 \in \{0; 1\}
\end{array}
$$

Die optimale Lösung der LP-Relaxation von B lautet $x^T = (1,\ ^1\!/_7,\ 1,\ ^4\!/_7,\ 0)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Nebenbedingung

$$-8x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 8x_4 + 5x_5 \leq -18$$

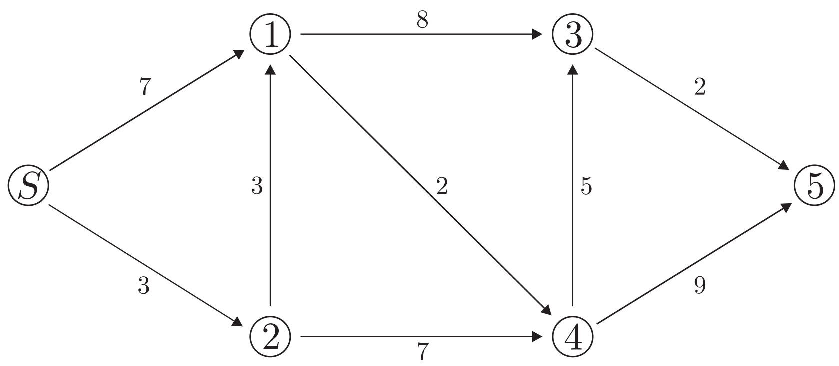
beste Ersatznebenbedingung für obiges binäres Problem (B) ist. (10 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie den Satz des komplementären Schlupfes.

(b) Überprüfen Sie, welche Variablen anhand der in Aufgabenteil (a) aufgestellten bzw. gegebenen Ersatznebenbedingung fixiert werden können und geben Sie deren Werte explizit an. (1 Punkte)

Aufgabe 3: Dijkstra-Algorithmus (12 Punkte)

Gegeben ist der folgende Digraph mit sechs Knoten:



Führen Sie für obigen Digraphen den Dijkstra-Algorithmus zur Bestimmung der kürzesten Wegen von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3, 4 und 5 durch.

(a) Tragen Sie hierfür in der untenstehenden Tabelle für jede Iteration des Dijkstra-Algorithmus den ausgewählten Knoten, die Menge der vorläufig markierten Knoten, die Menge der endgültig markierten Knoten sowie die Labels $d(1), \ldots, d(5)$ ein. (9 Punkte)

Iteration	Ausgewählter Knoten i	vorläufig markierte Knoten	endgültig markierte Knoten	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$	$d(5)$
Initialisierung	-	S	-	∞	∞	∞	∞	∞

(b) Geben Sie die ermittelten kürzesten Wege von Knoten S zu den Knoten 1, 2, 3, 4 und 5 sowie deren Länge explizit an. (3 Punkte)

Aufgabe 4: Nichtlineare Optimierung (11 Punkte)

Gegeben ist das folgende nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min\ f(x) &= (x_1-3)^2+(x_2-2)^2 \\ \text{s.d.}\quad & x_1^2+x_2^2 \le 5 \\ & x_1+2x_2 \le 4 \\ & x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Geben Sie für obiges Problem die Kuhn-Tucker-Bedingungen KTB' an. Verwenden Sie dabei die Standardform, d.h. <u>nicht</u> die Formulierung als Sattelpunkt der Lagrange-Funktion. (5 Punkte)

Weiter ist das folgende nichtlineare Optimierungsproblem gegeben:

$$\begin{array}{lcl} \min\ f(x) & = & 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 15x_1 - 15x_2 \\ \\ \text{s.d.} & & x_1 + x_2 \leq 30 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0 \\ \\ & & x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Für dieses wurden die folgenden Kuhn-Tucker Bedingungen in der Form KTB' bestimmt:

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 - 2x_2 - 15 + u_1 - u_2 & = & 0 \\ 2x_2 - 2x_1 - 15 + u_1 - u_3 & = & 0 \\ u_1\,(x_1 + x_2 - 30) & = & 0 \\ -u_2x_1 & = & 0 \\ -u_3x_2 & = & 0 \\ u_1, u_2, u_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Welcher der folgenden Punkte erfüllt die Kuhn-Tucker-Bedingungen für obiges Problem? (6 Punkte)

$P_1(0;\ 0)$ $P_2(15;\ 15)$ $P_3(12;\ 18)$

Aufgabe 5: Dynamische Optimierung (13 Punkte)

Der Inhaber einer Weinhandlung hat für die nächsten sieben Perioden die folgenden Nachfragemengen für Weinkisten ermittelt:

Periode	1	2	3	4	5	6	7
Nachfrage [Stück]	35	60	55	10	20	75	15

Bei der Bestellung beziehungsweise der Lagerung der Weinkisten fallen folgende Kosten an:

- Bestellfixe Kosten K in Höhe von 250 €/Bestellung
- Lagerkosten h in Höhe von 2€/(Stück·Periode)

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Wagner-Whitin eine optimale Bestellpolitik und geben Sie diese zusammen mit den optimalen Gesamtkosten explizit an. (11 Punkte)

j	z_j	C_j^*	κ_j^*	1	2	3	4	5	6	7
1	35									
2	60									
3	55									
4	10									
5	20									
6	75									
7	15									

Optimale Bestellpolitik:

Optimale Gesamtkosten:

(b) Ab welchem Wert für die bestellfixen Kosten K wird, im Rahmen der Vorwärtsrechnung, die Menge für Periode 4 ebenfalls in Periode 1 bestellt? (2 Punkte)