RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN
DEUTSCHE POST LEHRSTUHL FÜR OPTIMIERUNG VON DISTRIBUTIONSNETZWERKEN
Universitätsprofessor Dr.rer.nat.habil. Hans-Jürgen Sebastian

Methoden und Anwendungen der Optimierung
Übung 3
-Musterlösung-

Aufgabe 12:
Allgemein: Unterteilung der Variablen in abhängige und unabhängige Variablen.

I: Indexmenge der unabhängigen Variablen

$\rightarrow$ Partitionierung von I in I^{fix} und I^{frei} bis $I^{fix} = I$

Auswahl der nächsten zu fixierenden Variablen durch Lösen eines Hilfsproblems, welches die $x_j \in I^{frei}$ bewertet

$\rightarrow$ Auswahl der Variablen x_j mit der höchsten Bewertung

Hier: Rucksackproblem besitzt lediglich unabhängige Variablen
Idee: Die besten Gegenstände sind die, für die der relative Nutzen $\frac{p_j}{w_j}$ am größten ist.

$\rightarrow$ Bestimme die zu fixierende Variable x_j^* durch Lösen des folgenden Ersatzproblems:

$$j^* = \arg \max_{j \in I^{frei}} \{z_j\}$$

$$z_j = \begin{cases} \frac{p_j}{w_j}, & \text{falls } w_j \leq C - \sum_{k \in I^{fix}} w_k \cdot x_k \\ -M, & \text{sonst } (M >> 0) \end{cases}$$

Iteration	$C - \sum_{k \in I^{fix}} w_k \cdot x_k$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
1	9	6,5	3,5	$2,\overline{6}$	6,25	5	6	1
2	7	–	3,5	$2,\overline{6}$	6,25	5	6	1
3	3	–	$-M$	$2,\overline{6}$	–	5	6	1
4	2	–	$-M$	$-M$	–	5	–	1
5	1	–	$-M$	$-M$	–	–	–	1
6	0	–	$-M$	$-M$	–	–	–	–

Iteration	I^{frei}	I^{fix}	fixierte Variablen
1	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	$\varnothing$	$x_1 = 1$
2	$\{2,3,4,5,6,7\}$	$\{1\}$	$x_4 = 1$
3	$\{2,3,5,6,7\}$	$\{1,4\}$	$x_6 = 1$
4	$\{2,3,5,7\}$	$\{1,4,6\}$	$x_5 = 1$
5	$\{2,3,7\}$	$\{1,4,5,6\}$	$x_7 = 1$
6	$\{2,3\}$	$\{1,4,5,6,7\}$	$x_2 = 0$
7	$\{3\}$	$\{1,2,4,5,6,7\}$	$x_3 = 0$
8	$\varnothing$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	

Lösung: $x^T = (1,0,0,1,1,1,1), \; z = 50$

Aufgabe 13:

a) Idee: Wähle die Spalten mit den meisten Einsen, um mit möglichst wenig Spalten alle Zeilen zu überdecken.
$\rightarrow$ Bestimme die zu wählende Spalte durch Lösen des folgenden Ersatzproblems

$$j^* = \arg\max_{j \in I^{frei}} \{z_j\} \quad \text{mit } z_j = |M_j|$$

$M_j = \{i \in \{1, \ldots, m\},\ a_{ij} = 1\} \hat{=}$ Menge der von der Spalte j überdeckten Zeilen.
$M \hat{=}$ Menge der noch nicht überdeckten Zeilen
$\rightarrow$ Löse Teilproblem iterativ, bis alle Zeilen überdeckt sind.

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}	z_{16}	z_{17}
4	5	6	6	4	4	7	7	6	6	7	6	6	6	5	6	4

It.	I^{frei}	I^{fix}	M	fix. Var.
1	$I\backslash I^{fix}$	$\varnothing$	$\{1,\ldots,17\}$	$x_7 = 1$
2	$I\backslash I^{fix}$	$\{7\}$	$\{1,2,3,9,10,11,14,\ldots,17\}$	$x_8 = 1$
3	$I\backslash I^{fix}$	$\{7,8\}$	$\{1,2,10,14,15,16,17\}$	$x_{11} = 1$
4	$I\backslash I^{fix}$	$\{7,8,11\}$	$\{1,2,15,17\}$	$x_3 = 1$
5	$I\backslash I^{fix}$	$\{3,7,8,11\}$	$\{15,17\}$	$x_4 = 1$
6	$I\backslash I^{fix}$	$\{3,4,7,8,11\}$	$\{15,17\}$	$x_9 = 1$
7	$I\backslash I^{fix}$	$\{3,4,7,8,9,11\}$	$\{15,17\}$	$x_{10} = 1$
8	$I\backslash I^{fix}$	$\{3,4,7,8,9,10,11\}$	$\{15\}$	$x_{12} = 1$
9	$I\backslash I^{fix}$	$\{3,4,7,8,9,10,11,12\}$	$\{15\}$	$x_{13} = 1$
10	$I\backslash I^{fix}$	$\{3,4,7,8,9,10,11,12,13\}$	$\varnothing$	

$\rightsquigarrow$ fertig
Besser: Wähle die Spalten mit den meisten Einsen in noch nicht überdeckten Zeilen
Ersatzproblem: $j^* = \arg\max_{i \in I^{frei}}\{z_j\}$ mit $z_j = |M_j \cap M|$

Iteration	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}	z_{16}	z_{17}
1	4	5	6	6	4	4	7	7	6	6	7	6	6	6	5	6	4
2	3	5	4	2	0	0	–	3	5	6	5	2	2	4	4	6	4
3	2	2	2	2	0	0	–	1	1	–	1	1	2	2	2	2	1
4	–	0	0	0	0	0	–	0	0	–	1	1	2	2	2	2	1

Iteration	I^{frei}	I^{fix}	M	fix. Variablen
1	$\{1,\ldots,17\}$	$\varnothing$	$\{1,\ldots,17\}$	$x_7 = 1$
2	$I\backslash\{7\}$	$\{7\}$	$\{1,2,3,9,10,11,14,\ldots,17\}$	$x_{10} = 1$
3	$I\backslash\{7,10\}$	$\{7,10\}$	$\{1,3,14,15\}$	$x_1 = 1$
4	$I\backslash\{1,7,10\}$	$\{1,7,10\}$	$\{14,15\}$	$x_{13} = 1$
5	$I\backslash\{1,7,10,13\}$	$\{1,7,10,13\}$	$\varnothing$	

$\rightsquigarrow$ fertig

b) Neues Ersatzproblem:

$$\arg \min_{j \in I^{frei}} \{z_j\} \text{ mit } z_j = \frac{c_j}{|M \cap M_j|}$$

Iteration	I^{frei}	I^{fix}	M	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
1	I	$\varnothing$	$\{1,\ldots,8\}$	3000	4000	4000	3250	2500	4000
2	$\{1,2,3,4,6\}$	$\{5\}$	$\{1,2,3,5,6,8\}$	6000	4000	6000	3250	–	4000
3	$\{1,2,3,6\}$	$\{4,5\}$	$\{1,2,6,8\}$	6000	4000	6000	–	–	8000
4	$\{1,3,6\}$	$\{2,4,5\}$	$\{1,8\}$	6000	–	12000	–	–	8000
5	$\{3,6\}$	$\{1,2,4,5\}$	$\{8\}$	–	–	12000	–	–	8000
6	$\{3\}$	$\{1,2,4,5,6\}$	$\varnothing$						

$\rightsquigarrow$ fertig
Lösung: $x^T = (1,1,0,1,1,1),\ z = 33500$

Aufgabe 14:

Modellierung des WLP:

Gegeben:
Menge $M = \{1, \ldots, m\}$ von Kunden i
Menge $N = \{1, \ldots, n\}$ von potentiellen Lagern j
Kosten:

- Fixkosten F_j für das Öffnen des Lagers j
- Bedienkosten c_{ij} des Kunden i durch Lager j

Gesucht:

- Menge der zu öffnenden Lager (Lokation)
- Zuordnung von Kunden zu Lagern (Allokation)

$\rightsquigarrow$ minimale Gesamtkosten

$$EV : y_j = \begin{cases} 1, & \text{Lager j geöffnet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$x_{ij} \hat{=}$Anteil des Bedarfs von Kunde i, der durch Lager j bedient wird

$$\begin{aligned} \min z = \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ \text{s.d.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \forall i = 1, \ldots, m \\ x_{ij} \leq y_j \ \forall i = 1, \ldots, m \ \forall j = 1, \ldots, n \\ x_{ij} \geq 0 \ \forall i \forall j \\ y_j \in \{0, 1\} \ \forall j \end{aligned}$$

Optimale Lösung besitzt die sogenannte single Sourcing Eigenschaft.
D.h. jeder Kunde kann vollständig dem günstigsten Lager zugewiesen werden.

D.h. bei bekannter Lokationsentscheidung ist die Allokation sehr einfach zu lösen.

$\rightsquigarrow$ unabhängige Variablen y_j und abhängige Variablen x_{ij}

Es sei $\overline{N} \subset N$ die Indexmenge der bereits geöffneten Lager

$\rightsquigarrow$ min. Allokationskosten $\overline{c_i}(\overline{N}) = \begin{cases} \min_{j \in \overline{N}}\{c_{ij}\}, & \text{falls } \overline{N} \neq \varnothing \\ M >> 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Ersatzproblem für noch nicht geöffnete Lager:

$$z_j = \sum_{i \in M} (\overline{c_i}(\overline{N}) - \overline{c_i}(\overline{N} \cup \{j\})) - F_j$$

Fixierung:

- wähle j mit größtem $z_j > 0$ und setze $y_j = 1$
- setze $y_j = 0$ falls $z_j \leq 0$

a) Greedy-Verfahren:
$I^{frei} = \{1, \ldots, 6\},\ I^{fix} = \varnothing,\ \overline{N} = \varnothing$
1. Iteration:

j	1	2	3	4	5	6
$\sum_{i \in M} \overline{c_i}(\overline{N} \cup j)$	44	47	32	40	52	27
F_j	5	9	1	3	5	3
z_j	$7M - 44 - 5$	$7M - 47 - 9$	$7M - 33$	$7M - 43$	$7M - 57$	$7M - 30$

$\Rightarrow j^* = 6 \ \Rightarrow y_6 = 1,\ I^{fix} = \{6\},\ I^{frei} = \{1, 2, 3, 4, 5\}\ \overline{N} = \{6\}$

2. Iteration:

j	1	2	3	4	5
z_j	2	-7	5	5	2

$\Rightarrow j^* = 3 \ \Rightarrow y_3 = 1,\ z_2 < 0 \Rightarrow y_2 = 0$

$I^{fix} = \{2, 3, 6\}\ I^{frei} = \{1, 4, 5\}\ \overline{N} = \{3, 6\}$

3. Iteration:

j	1	4	5
z_j	-3	2	-4

$\Rightarrow j^* = 4 \ \Rightarrow y_4 = 1,\ z_1, z_5 < 0 \Rightarrow y_1 = y_5 = 0$

Lösung:

geöffnetes Lager	zugeordnete Kunden
3	$4,6$
4	$1,5$
6	$2,3,7$

$$z = 1 + 3 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 6 + 1 + 1 = 23$$

Anmerkung: Eventuell werden nicht allen geöffneten Standorten auch tatsächlich Kunden zugeordnet

Beispiel:

c_{ij}	1	2	3
1	100	1	20
2	100	1	20
3	1	100	20
4	1	100	20
F_j	10	10	10
$\sum$	212	212	90

$\rightsquigarrow$ Es werden alle Standorte 1,2 und 3 geöffnet
$\rightsquigarrow$ Lösung

Standort	Kunden
1	$3,4$
2	$1,2$
3	$-$

$\rightsquigarrow$ schließe Standorte ohne Kunden

b) Ausgangslösung: $\rightsquigarrow$ nur Lager 1 geöffnet $y^T = (1,0,0,0,0,0)$ $\rightsquigarrow$ $z = 49$

1. Nachbarschaft
$y^T = (1,1,0,0,0,0)$, $\Delta z = 0$
$y^T = (1,0,1,0,0,0)$, $\Delta z = 20$
$y^T = (1,0,0,1,0,0)$, $\Delta z = 13$
$y^T = (1,0,0,0,1,0)$, $\Delta z = -2$
$y^T = (1,0,0,0,0,1)$, $\Delta z = 21$ (Beste Lösung $\rightsquigarrow$ öffne Lager 6)

2. Nachbarschaft
$y^T = (0,0,0,0,0,1)$, $\Delta z = -2$
$y^T = (1,1,0,0,0,1)$, $\Delta z = -9$
$y^T = (1,0,1,0,0,1)$, $\Delta z = 0$
$y^T = (1,0,0,1,0,1)$, $\Delta z = 2$ (Beste Lösung $\rightsquigarrow$ öffne Lager 4)
$y^T = (1,0,0,0,1,1)$, $\Delta z = -3$

3. Nachbarschaft
$y^T = (0,0,0,1,0,1)$, $\Delta z = 1$ (Beste Lösung $\rightsquigarrow$ schließe Lager 1)
$y^T = (1,1,0,1,0,1)$, $\Delta z = -9$
$y^T = (1,0,1,1,0,1)$, $\Delta z = 0$
$y^T = (1,0,0,1,1,1)$, $\Delta z = -3$
$y^T = (1,0,0,1,0,0)$, $\Delta z = -10$

4. Nachbarschaft
$y^T = (0,1,0,1,0,1)$, $\Delta z = -7$
$y^T = (0,0,1,1,0,1)$, $\Delta z = 2$ (Beste Lösung $\rightsquigarrow$ öffne Lager 3)
$y^T = (0,0,0,0,0,1)$, $\Delta z = -5$
$y^T = (0,0,0,1,1,1)$, $\Delta z = -1$
$y^T = (0,0,0,1,0,0)$, $\Delta z = -18$

5. Nachbarschaft
$y^T = (1,0,1,1,0,1)$, $\Delta z = -3$
$y^T = (0,1,1,1,0,1)$, $\Delta z = -9$
$y^T = (0,0,1,0,0,1)$, $\Delta z = -2$
$y^T = (0,0,1,1,1,1)$, $\Delta z = -4$
$y^T = (0,0,1,1,0,0)$, $\Delta z = -6$

$\rightsquigarrow$ keine bessere Lösung $\rightsquigarrow$ Verfahren endet
Beste Lösung: $y^T = (0,0,1,1,0,1)$, $z = 49 - 21 - 2 - 1 - 2 = 23$