

Aufgabe 1

a

$$\begin{aligned}
 \min \quad & d_{max} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
 & x_{ji} \cdot d_{ji} \leq d_{max} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Die boolsche Variable x_{ij} ist genau dann 1, wenn ein Bus von der Station $i \in \{1, \dots, n\}$ nach $j \in \{1, \dots, n\}$ fährt, wobei $i \neq j$ gilt.

Die erste Nebenbedingung garantiert, dass jede Station genau einmal angefahren wird. In der zweiten Nebenbedingung wird die längste Distanz unter den verwendeten Distanzen gesucht. Welche dann, laut Zielfunktion, minimiert wird. Da diese Nebenbedingung unabhängig über für alle Kombinationen aus $i, j \in \{1, \dots, n\}$ geprüft wird, ist es nicht notwendig eine weitere Nebenbedingung für d_{ji} hinzuzufügen.

b

$$\begin{aligned}
 \min \quad & d_{max} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
 & x_{ij} + x_{jk} \leq 1 + x'_{ik} \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} \\
 & x'_{ij} \cdot d'_{ij} + x_{jk} \cdot d_{jk} \leq d_{max} \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \\
 & x_{ij}, x'_{ij} \in \{0, 1\}, d'_{ij} \geq 0
 \end{aligned}$$

Die boolsche Variable $x'_{ij} \in \{0, 1\}$ ist genau dann 1, wenn ein Bus von der Station $i \in \{1, \dots, n\}$ über eine weitere Station zu der Station $j \in \{1, \dots, n\}$ fährt. Die Variable $d'_{ij} \in \mathbb{R}^+$ stellt die Distanz einer Strecke von $i \in \{1, \dots, n\}$ nach $k \in \{1, \dots, n\}$ mit genau einer beliebigen Station $j \in \{1, \dots, n\}$ dazwischen.

Die ersten Nebenbedingung ist wie im obigen Aufgabenteil. Die zweite Nebenbedingung sucht nach Stationen, die aufeinander folgen. Hierfür wird die neue Variable x'_{ij} wie oben beschrieben verwendet. Sollten sollte von i über j nach k gefahren werden, mit $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt $x_{ij} = x_{jk} = 1$, also $x_{ij} + x_{jk} = 2$ woraus $x'_{ik} = 1$ folgt. Sollte $x_{ij} \neq x_{jk}$ oder $x_{ij} = x_{jk} = 0$ sein, so bilden die Stationen offensichtlich keine Verbindung und x'_{ik} muss nicht auf 1 gesetzt werden. Da es sich hierbei um ein Minimierungsproblem handelt und x'_{ik} indirekt mit in die Zielfunktion einfließt wird dieses dann auch nicht auf 1 gesetzt.

Die Idee des LPs besteht also darin zu jeder Station eine Vorgängerstation zu finden. Da es sich um eine Rundtour handelt gibt es keine Ausnahme und es ist ebenso egal, bei welcher Station begonnen werden muss.