Some Class
Random Examples

Ethan Ordaz

June 20, 2024

Contents

Chapter 1

Álgebra Lineal

1.1 Conjuntos

Definition 1.1.1: Conjunto

Un conjunto es una colección de objetos, que llamamos elementos.

De ahora en adelante nos referiremos a los conjuntos con una letra mayúscula $(A, B, C, \ldots)$. Mientras que los elementos se escribirán con letras minúsculas $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in A)$.

1.1.1 Operaciones

Definition 1.1.2: Unión

La operación de unión se realiza entre conjuntos, y su símbolo es $\cup$.

$$A \cup B = \{x_i \mid x_i \in A \vee x_i \in B\}.$$

Definition 1.1.3: Intersección

La operación de intersección se realiza entre conjuntos, y su símbolo es $\cap$

$$A \cap B = \{x_i \mid x_i \in A \wedge x_i \in B\}.$$

Definition 1.1.4: Cardinalidad

Se puede entender la cardinalidad de un conjunto finito, por la cantidad elementos que lo conforman. La cardinalidad es denotada por $|A|$ donde A es un conjunto.

Example 1.1.1 (Cardinalidad)

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \tag{1.1}$$
$$|A| = 5 \tag{1.2}$$

Definition 1.1.5: $|A| = |B|$

La cardinalidad de A es igual a la cardinalidad de B si existe una función biyectiva entre sus elementos. Es decir si existe una función (f) cuya imagen asigne a todos los valores del conjunto B únicamente a un valor en A y vice-versa. Esto también implica que existe una función inversa (f^{-1})

Definition 1.1.6: $|A| \leqslant |B|$

La cardinalidad de A es menor que o igual a la de B si existe una función inyectiva de A a B es decir existe una función que asigna todos los elementos de A a B de forma única pero la imagen de la función no abarca todo el conjunto B.

Definition 1.1.7: Conjunto Potencia

Denotado por $P(A)$ donde A es un conjunto, este esta compuesto por todos los subconjuntos de A y el vacío.

Example 1.1.2 (Conjunto Potencia)

$$A = \{a_1, a_2, a_3\} \tag{1.3}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\} \tag{1.4}$$

Note:-

El conjunto poder $P(A)$ tiene una cardinalidad de 2^n donde n es la cardinalidad de A.

1.2 Grupo

Definition 1.2.1: Grupo

Un grupo es un conjunto con una operación $(f(x, y))$ que satisface algunas condiciones.

- De un elemento del conjunto se puede llegar al otro con la operación.
- Todo elemento del conjunto tiene un inverso.
- Existe un elemento neutro.
- La operación de dos elementos esta dentro del conjunto $(f(x, y) \in A \forall x, y \in A)$

Note:-

Si la operación es conmutativa se le conoce como un Grupo Abeliano.

Example 1.2.1 ($\mathbb{Z}$ y $+$)

$\mathbb{Z}$ y la suma $(f(x, y) = x + y)$ son un grupo abeliano.

- Existe un neutro, 0. $f(x, 0) = x$
- Se puede llegar a todos los números desde uno dado

Con x y z dados y x no es el neutro

$$f(x,y) = z \tag{1.5}$$
$$x + y = z \tag{1.6}$$
$$y = z - x \tag{1.7}$$

Entonces encontramos un número $y \neq z$ por el cual podemos llegar a cualquier z desde una x

$$\tag{1.8}$$

- Todo número tiene su inverso.
- La suma es conmutativa.

1.3 Vectores

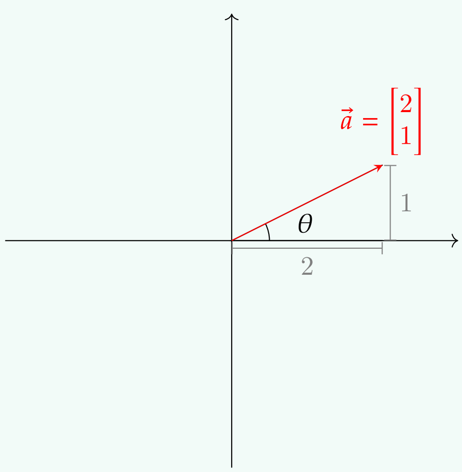
Definition 1.3.1: Vector

Un vector es una lista (conjunto ordenado) de datos o cantidades que no se pueden expresar por una única cantidad. De ahora en adelante hablaremos de vectores euclidianos. Que tienen cantidades numéricas y una dimensión.

1.3.1 Vectores Euclidianos

Un vector euclidiano tiene una dirección y una magnitud. Este tipo de vectores se denotan de la forma $\vec{a}$.

Example 1.3.1 (Vector en $\mathbb{R}^2$)



La magnitud de $\vec{a}$ se denota de la forma $|\vec{a}|$, en este caso sería.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} \tag{1.9}$$
$$= \sqrt{5} \tag{1.10}$$

Por geometría la dirección sería

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \tag{1.11}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} \tag{1.12}$$
$$\approx 0.4636 \tag{1.13}$$

Adición

Definition 1.3.2: Adición de Vectores Euclidianos

La adición de vectores euclidianos se realiza

Substracción

1.3.2 Productos internos

Definition 1.3.3: Producto Interno

Un producto interno denotado por $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ donde $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son vectores es una operación que cumple las siguientes propiedades

- $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0 \mid x \neq 0$
- $\langle a\vec{x} + b\vec{z}, \vec{y} \rangle = a \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle$

Note:-

El producto interno es un operador lineal, después veremos que significa eso.

Example 1.3.2 (Producto Punto)

El producto punto denotado por $\cdot$ entre dos vectores es la multiplicación y adición entrada por entrada de ambos vectores. Este también es un producto interno.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i \tag{1.14}$$

El producto punto también tiene otras propiedades geométricas importantes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \tag{1.15}$$

Claim 1.3.1 El producto punto es un producto interno

Proof: El producto punto es un producto interno

Propiedad 1.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{1.16}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i b_i = \sum_{i=1}^{N} b_i a_i \tag{1.17}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i b_i = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i \tag{1.18}$$

Propiedad 2.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \tag{1.19}$$

$$a_i \in \mathbb{R} \implies a_i^2 \geqslant 0 \tag{1.20}$$

Propiedad 3.

$$\left(\alpha\vec{a} + \zeta\vec{z}\right) \cdot \beta\vec{b} = \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha a_i + \zeta z_i\right) \beta b_i \tag{1.21}$$

$$\alpha\vec{a} \cdot \beta\vec{b} + \zeta\vec{z} \cdot \beta\vec{b} = \sum_{i=1}^{N} \alpha a_i \beta b_i + \zeta z_i \beta b_i \tag{1.22}$$

Claim 1.3.2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$