Пролегомены к высокому искусственному интеллекту

Конспект лекций

Автор конспекта:

Король Михаил

Содержание

Лекция 1. Вводная

Теги, ассоциирующиеся с высоким искусственным интеллектом:

- Многозадачность (Теория бифуркаций(интуиция - теория катастроф), Теория самоорганизации)
- Обучение (Теория адаптивных систем, Теория многоагентных систем)
- Самосознание (Theory of self, теория самоорганизации)
- Сложность (Теория сложности)
- Структурность (Теория сложных сетей)

Теория сложных сетей. Важные вопросы:

1) Размеры

2) Эволюция

3) Распределение графов

Степенное распределение (heavy tail distribution)

$$P(X) = C \cdot X^{-\alpha}$$

Где C - константа нормализации, обеспечивающая требование

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(X)\ dx = 1$$

С математической точки зрения степенные распределения порождаются неким аналогом Центральной предельной теоремы при нарушении формальных требований независимости, конечных математического ожидания и дисперсии. Более того, результат взаимодействия бесконечного числа взаимодействующих случайных величин дает нам четырех-параметрическое семейство функций плотности, который при одном конкретном наборе параметров даст нам нормальное распределение, а при всех остальных значениях параметров ассимптотически при $X \to \infty$ дадут нам одно из степенных распределений при том или ином зачении α.

Какими свойствами обладает данное распределение?

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)\ dx$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))$$

Существуют такие значения α, при которых $\mathbb{E}(X) \to \infty$, более того, если мы снизим требования к α, то мы войдем в область, где математическое ожидание конечно, а дисперсия бесконечна.

Лекция 2. Свойства сложных сетей.

Первое свойство носит название гигантской связанной компоненты.

Наблюдение за реальными сложными сетями указывает, что они не просто эволюционируют (меняют количество ребер и вершин) но и имеют тенденцию к росту. Это позволило применить к ним классический прием естественно научного исследования, который носит название «переход к термодинамическому пределу» или «континуализация». А именно мы исследуем что происходит с объектом, если число составляющих его элементов (в данном случае вершин графа) стремится к бесконечности.

Мы, разумеется, понимаем, что реальные сложные сети конечны, но вместе с тем, мы предполагаем, что, начиная с некоторого большого N, мы можем говорить о некоторых асимптотических свойствах, то есть, начиная с некоторого достаточно большого N сложная сеть будет сохранять те же свойства, что и сеть, обладающих «бесконечным количеством вершин».

Здесь было установлено, что для всех сложных сетей мы наблюдаем несвязанность сложных сетей как графов. Сложные сети состоят из некоторого (иногда достаточно большого) количества несвязанных компонент. Но вместе с тем, из этих компонент выделяется одна, число вершин в которой по порядку совпадает с числом вершин во всем графе.

$$N_{GCC} = O(N), N \to \infty$$

В случае неориентированных графов, мы должны модифицировать понятие гигантской связанной компоненты. Она разбивается на четыре составляющих:

1) Гигантская сильно связанная компонента. Здесь предполагается, что из любых вершин i и j мы можем достигнуть из вершины i вершину j, из вершины j вершину i.

2) Гигантская выходная компонента. Это множество вершин, в которые мы можем попасть из вершин гигантской сильно связанной компоненты.

3) Гигантская входная компонента. Это множество вершин, из которых мы можем попасть в вершины гигантской сильно связанной компоненты.

4) Так называемые усы, специальная структура, которая представляет собой линейно упорядоченную последовательность вершин, исходящих из гигантской сильно связанной компоненты.

Более того, возвращаясь к неориентированным графам, мы получаем, что для характеризации сложных сетей мы должны ввести свойство его разреженности. Традиционно, разреженность графа характеризуют как отношение фактического числа ребер к максимально возможному.

$$\rho = \frac{E}{\frac{N(N-1)}{2}}$$

При этом, мы пользуемся той же идеей перехода к термодинамическому пределу, мы смотрим, как ведет себя величина ρ не для данной конкретной сложной сети, но для последовательности сетей, с увеличивающимся размером, при $N \to \infty$.

Очевидно, что если граф полносвязный, или близкий к полносвязному (неразреженный), тогда величина ρ будет вести себя как $O(1)$, поскольку $E \sim O(N^2)$.

С другой стороны, если мы имеем дело с чем-то вроде минимального остовного дерева, где $E \sim O(N)$, то $\rho \to 0$. Если мы будем наблюдать промежуточную ситуацию, где $E \to O(N^\alpha), 1 < \alpha < 2$, то мы говорим о разреженном графе.

Все сложные сети являются разреженными графами.

Второе свойство носит название Малого мира.

Путем между вершинами i_0 и i_n называется последовательность ребер $(i_0, i_1), (i_1, i_2), ..., (i_{n-1}, i_n)$ такая, что первое ребро инцидентно вершине i_0, а последнее вершине i_n. Кратчайшим путем между вершинами i_0 и i_n является путь, содержащий минимальное число ребер. Далее, на основании этих конструкций мы должны построить некоторые характеристики, которые характеризуют не отдельную пару вершин, но граф в целом. А именно:

1) Диаметром графа называется максимальный из путей, где $l_{i,j}$ – длина кратчайшего пути, соединяющего вершины i и j

$$d_G = \max_{i \neq j} l_{ij}$$

2) Эксцентриситетом вершины i мы будем называть максимальную длину кратчайшего пути, соединяющий вершины j и k, не проходящей через вершину i

$$ec(i) = \max_{i \neq j} l_{i,j}$$

3) Тогда радиусом графа G будет минимальный эксцентриситет.

$$r_G = \min_i ec(i)$$

4) Самое ходовое и самое эффективное на практике – средняя длина кратчайшего пути в графе

$$< l >= \frac{1}{N(N-1)/2} \sum_{i \neq j}^{N} l_{ij}$$

Если мы наблюдаем что-то вроде полносвязности ($< l > \sim O(1)$) – это простая сеть.

Если мы возьмем что-то похожее на кристалическую решетку, это тоже будет простая сеть порядка $O\left(n^{1 \cdot d}\right)$, где d – размерность.

Оказалось, что если расстояние ведет себя как $O\left(n^{\beta}\right)$, то речь идет о какой-то вариации простой сети.

Классическим примером сложной системы являются системы, у которых среднее расстояние – это величина порядка логарифма числа вершин.

$$< l > \sim O(\ln N)$$

Для реализации такого рода системы нам необходимо существование специальных вершин – хабов, которые характеризуются тем, что через них проходит много кратчайших путей, эти вершины обеспечивают связность графа.

В отношении хабов, как всегда в математике, мы можем ставить две задачи:

1) Отыскание, обнаружение. Это прямая задача теории хабов.

2) Обратная задача, которая заключается в конструировании сети таким образом, что удаление даже значительного числа его хабов не приводит ни к потери связанности, ни даже к нарушению нормального функционирования сети, протекания потоков.

Если для сети выполняется такое свойство (свойство 2), то мы будем говорить, что сеть структурно устойчива (resilent). В настоящее время именно организация структурно устойчивых бесхабовых сетей является одной из наиболее значимых.

Все задачи в математике делятся на три больших класса:

1) Прямые задачи, есть некоторое описание реального процесса, структура, уравнение и подобное.

2) Обратные задачи, имеется некоторое множество наблюдений реального процесса, мы пытаемся по этим наблюдениям восстановить процесс, который имеет место в реальном мире.

3) Задача управления – имеется возможность каким-то образом воздействовать на объект, с которым мы работаем, и мы должны добиться того, чтобы наше воздействие приводило к желательному результату.

Лекция 3. Ассортативность и дисассортативность.

Все сложные сети делятся на два больших класса, которые отличаются взаимоотношением хабов друг с другом.

В ассортативных сетях хабы имеют тенденцию быть связанными друг с другом непосредственно, как например это имеет место в интернете.

Диссортативные сети характеризуются тем, что их хабы имеют тенденцию быть связанными друг с другом через цепочку не хабов (вершин с малыми степенями). К таким типам сетей относятся экологические и тропические сети (волк и тигр имеют много связей, являются хабами, но при этом напрямую друг с другом не связаны).

Это отличие (фундоментальная дихотомия) является первым вопросом, на который мы должны ответить, приступая к изучению сложной сети.

Чтобы ответить на вопрос, является ли сеть ассортативной или дисассортативной, мы должны построить следующее распределение условной вероятности:

$$P(k \mid k_1, ..., k_n)$$

где k – степень просматриваемой вершины, n – число ее соседей, $k_1, ..., k_n$ – их степени.

Проблема заключается в том, что любая характеристика, которую мы хотим использовать на практике, должна отвечать нескольким требованиям. Это касается не только сильного искусственного интеллекта.

1) Она должна измерять ту категорию, которую мы рассматриваем, при этом мы должны наблюдать не только корреляцию (в статистическом смысле) этой величины и исследуемой категории.

2) Мы должны уметь предъявлять логически прозрачный и ясный механизм, который объясняет, почему наша измеримая характеристика действительно описывает теоретическое понятие. Чтобы избежать конструкций в стиле «влияние лунного света на рост телеграфных столбов».

3) Характеристика должна быть практически измерима. Здесь мы отбрасываем ситуации, что мы можем посчитать эту статистику, но нам потребуется время вычисления суперкомпьютера сопоставима со временем существования вселенной.

4) Характеристика должна быть робасной (в первом приближении вычислительно устойчивой) (если мы немного изменим выборку, то значение характеристики тоже должно немного измениться)

Почему $P(k \mid k_1, ..., k_n)$ нам не подходит? Пусть в нашей сложной сети не больше ста соседей, то вообще говоря, общее число вариантов, зашитое в этой вероятности $102^{101} \sim 10^{1000}$, таким образом, это невычислимо. Допустим мы сделали 10^{1000} наблюдений, и даже в этой ситуации мы только один раз попадем в соответствующую область вероятности, а для хорошей оценки нужно попасть в каждую область вероятности несколько сотен, тысяч раз. Из этого следует вычислительная неустойчивость. Если мы в соответствующую область попали один раз, то если мы попадем во второй раз, мы можем получить что-то другое, что является статистически неустойчивой ситуацией.

Нам нужно сделать понятие ассортативности вычислимым.

Что такое математическая статистика? Мы с вами говорим, что в прикладной математике задачи делятся на прямые, обратные, и задачи управления. Вся теория вероятности по своему построению, по своему существу, является прямой задачей. Мы постулируем вероятности неких элементарных событий и пытаемся ответить на вопрос, каковы же вероятности каких-то не элементарных событий. Математическая статистика является обратной задачей для теории вероятности. Мы пытаемся по наблюдениям оценить вероятности событий, которые представляют для нас интерес. Общая схема математической статистики состоит в формировании статистического критерия (теста), который представляет из себя алгоритм, позволяющий с ошибкой, не превосходящей заданного небольшого уровня (уровня значимости) отвечать на вопрос, верна ли некоторая статистическая гипотеза.

1) Коэффициент парной корреляции является механизмом проверки гипотезы, что две различные выборки коррелируют друг с другом.

Формально, если я имею случайную величину X и выборку $x_1, ..., x_n$ ей порожденной и случайную величину Y и выборку $y_1, ..., y_n$ ей порожденной, то выдвинув нулевую гипотезу H_0: коррелируют друг с другом против гипотезы H_1: не коррелируют / слабо коррелируют, мы должны построить величину эмперического коэффициента парной корреляции z_{xy}

$$z_{xy} = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}, -1 \leq z_{xy} \leq 1$$

$$Cov(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Для того, чтобы установить, является сеть ассортативной или дисассортативной, была предложена простая и сильная идея. Пусть в качестве случайной величины X выступает степень вершины рассматриваемой сети. А в качестве случайной величины Y степень вершины, с которой данная вершина связана через любое ребро. Мы выбираем все ребра сложной сети и записываем степени инцидентных им вершин. В этой ситуации, если сеть является ассортативной, то есть хабы связаны с хабами, а малостепенные вершины связаны с малостепенными вершинами, то коэффициент парной корреляции будет большим и близким к единице. Если же напротив сеть дисассоративна, то есть хабы связаны с малостепенными вершинами, то коэффициент парной корреляции близок к -1. Если же сеть случайна, то есть она не представляет собой отражение реального физического объекта, а представляет собой некую математическую генерацию, то, соответственно, коэффициент парной корреляции будет близок к нулю.

Замечание: Такая чудесная характеристика обладает двумя недостатками

1) z_{xy} является мерой линейной связи между двумя величинами, никто не обещал, что соответствующая связь между степенью одной и другой вершины должна быть линейной. Здравый смысл подсказывает, что связь должна быть не линейной и сложной. Но это не главная проблема. С линейностью связи можно побороться, заменив коэффициент парной корреляции на коэффициенты, предназначенные для статистической оценки нелинейных связей (коэффициент корреляционного отношения и т. д.).

К сожалению оказалось, что все эти коэффициенты не робасны. Нужно придумать что-то другое.

Более робасной оказалась следующая величина:

Рассмотрим i-ую вершину сети. Пусть $V(i)$ — множество соседних вершин, тогда

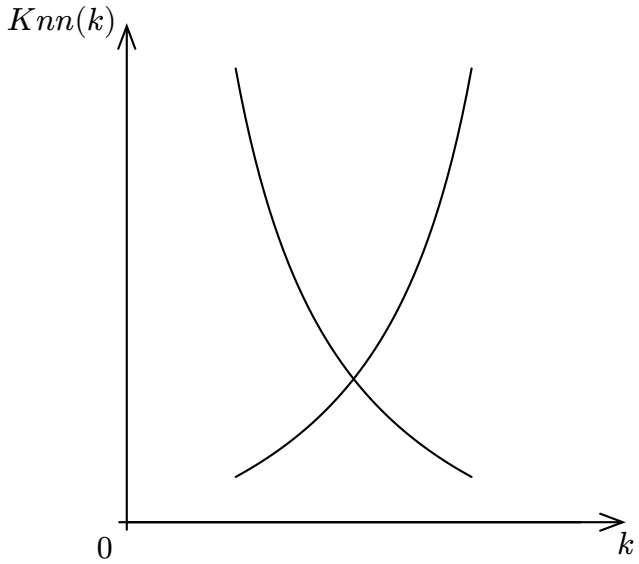
$$Knn(i,k) = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in V(i), k_j = k} k_j$$

Здесь k_i — степень вершины i, k_j – степени соседних с ней вершин, но суммирование идет не по всем соседним вершинам, но только по тем, которые имеют степень k. nn — nearest neighbours. Тогда получаем следующее:

$$Knn(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} Knn(i,k),$$

где суммирование идет по всем вершинам сети.

Эта величина позволяет построить график



На котором ассортативные сети дадут возрастающую функцию (в идеале монотонную), а дисассортативные дадут убывающую функцию (в идеале монотонную).

Другим эффективным подходом к установлению ассортативности / дисассортативности сети является Коэффициент Клуба Богатых.

Обозначим через $N_{>k}$ число вершин, степень которых превышает k. А через $E_{>k}$ число ребер, соединяющих две вершины, каждая из которых превышает k. Тогда:

$$\varphi(k) = \frac{E_{>k}}{N_{>k}(N_{>k} - 1)\ /2}$$

В чистом виде такой характеристики оказывается недостаточно, и обычно используют нормированную величину:

$$\rho(k) = \frac{\varphi(k)}{\varphi_0(k)}$$

где $\varphi_0(k)$ – это коэффициент клуба богатых для случайного графа.

Определение степенных распределений в сложных сетях.

Мы говорим, что базовой характеристикой, отличающей сложные сети от других типов графов, является то, что всевозможные распределения характеристик являются степенными функциями распределения. Соответственно, для практической работы со сложными сетями необходимо уметь отличать степенные распределения от других распределений.

Лекция 4. Идентификация степенных распределений.

Базовой задачей, при установлении того факта, что граф, с которым мы имеем дело является сложной сетью, является задача идентификация степенных распределений, а именно установление того «простого» факта, что данная выборка порождена степенным распределением. Математически такая задача является задачей математической статистики. Но работа со степенными распределениями не входит в стандартный курс.

Мы имеем выборку, то есть набор н.о.р.с.в $(\xi_1, ..., \xi_n)_{iid}$. Мы можем ставить в отношение этой выборки два вопроса:

1) Мы предполагаем, что выборка этих величин порождена неким конкретным распределением, класс которого нам известен. Например, это выборка из нормального распределения. Но мы не знаем параметры этого распределения. Мы хотим проверить гипотезу о параметрах этого распределения.

$$N(a, \sigma^2); H_0 : a = a_0$$

Другой, более важный для нас вопрос:

2) В реальных сложных системах мы обычно не знаем класс распределения, которым порождена наша выборка. Соответственно, второй вопрос, к какому классу распределений принадлежит распределение, породившее нашу выборку.

Мы можем «попытаться» проверить статистическую гипотезу о том, что распределение, породившее выборку, это некое конкретное распределение, за этой выборкой стоит некий конкретный вероятностный закон.

$$H_0 : F = F_0$$

При этом мы не ограничиваем себя каким-то конкретным классом распределений. Любая функция, удовлетворяющая требованиям функции распределения.

В первом случае говорят о параметрической статистике, потому что выдвигаемые гипотезы касаются параметров распределения, класс распределения мы знаем.

Во втором случае говорят о непараметрической статистике, потому что выдвигаемые гипотезы касаются распределения как такового. Иногда употребляют англоязычный термин goodness-of-fit test, проверка гипотезы, насколько данная выборка соответствует данному распределению.

При работе со степенными распределениями является первым и более важным является ответ на второй вопрос. Должны ли мы работать с этой выборкой как с выборкой из степенного распределения, должны ли мы предполагать, что мы можем каким-то образом оценить параметры степенного распределения, исходя из того, что мы действительно имеем дело со степенным распределением

Оказалось, что даже классических методов непараметрической статистики недостаточно. Сколько нибудь эффективные методы работы со степенными распределениями появились в последние 15 лет, поэтому, они обычно не входят в классический курс математической статистики.

Вспомним, что такое степенное распределение:

$$P(x) = C \cdot x^{-\alpha}$$

Где α является параметром распределения, а C - константой нормализации, гарантирующей нам, что:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(X)\ dx = 1$$

Соответственно, когда мы говорим о оценке параметров степенного распределения, мы на самом деле оцениваем один параметр – α, а C просто определяется из условия.

Какие подходы мы можем указать для решения задачи идентификации, является ли наша выборка выборкой из степенного распределения?

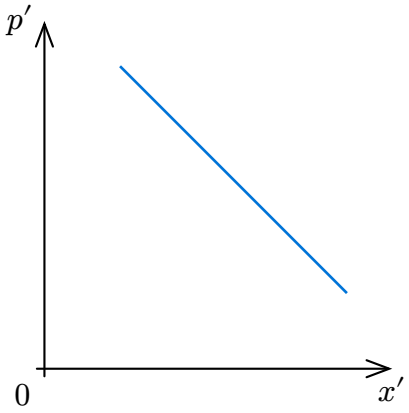
Первый метод носит название Метод Хилла (Hill), он базируется на переходе к двойному логарифмическому масштабу. Если мы прологарифмируем выражение плотности для степенного распределения, мы получим:

$$P(x) = C \cdot x^{-\alpha}$$

$$\underbrace{\ln P}_{p'} = \underbrace{\ln C}_{C'} - \alpha \underbrace{\ln x}_{x'}$$

$$p' = C' - \alpha x'$$

Соответственно, если мы нарисуем в этих новых координатах нашу зависимость, то это должен быть отрезок прямой с отрицательным коэффициентом наклона, в том случае, если верна наша нулевая гипотеза о том, что мы имеем дело со степенным распределением.



Более формально, можно предложить следующее развитие метода Хилла: давайте оценим параметры C' и α с помощью МНК или метода максимального правдоподобия.

МНК: из выборки имеем $p'_1, ..., p'_n, x'_1, ..., x'_n$, тогда давайте посчитаем минимум следующей функции:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(p'_i - C' - \alpha x'_i)^2 \to \min$$

где n – размеры выборки. Отсюда, дифференцируя по C' и α (p'_i и x'_i нам известны) мы находим выражения для оценки C' и α, которые минимизируют это выражение. Если окажется, что полученная таким образом оценка (оценка методом наименьших квадратов) действительно делает этот квадратичный функционал малым, то это означает, что, во-первых, мы нашли хорошие оценки этих двух параметров, а во-вторых, что у нас действительно имеет место степенной закон распределения.

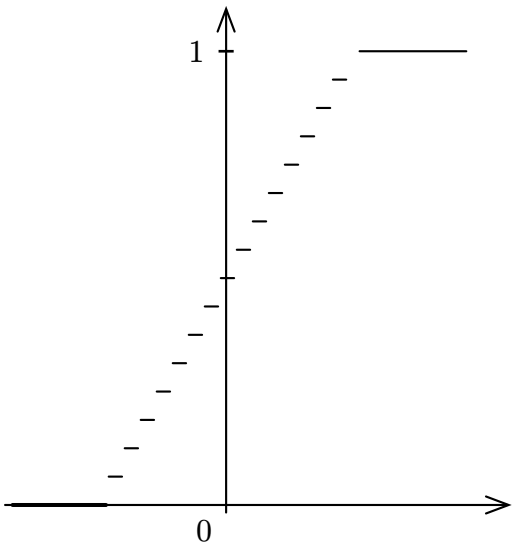
Следующий подход принадлежит трем американским математикам Clauset, Shalizi, Newman, которые, в прочем, опирались на работы двух российских математиков Колмогорова и Смирнова. Так называемая KS-статистика.

По выборке н.о.р.с.в $(\xi_1, ..., \xi_n), \xi_i \sim F(x)$, мы можем построить так называемую

Эмпирическую функцию распределения. В одномерном случае алгоритм построения эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ выглядит просто:

Мы сортируем выборку $(\xi_1, ..., \xi_n)$, по возрастанию, и получаем из нее так называемый вариационный ряд $(\xi_1^*, ..., \xi_n^*)$

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi_1^* \\ \frac{l}{n}, & x = \xi_i^* \\ 1, & x > \xi_n^* \end{cases}$$



Функция $\hat{F}_n(x) = 0$ для всех $x < \xi_1^*$, $\hat{F}_n(x) = 1$ для всех $x > \xi_n^*$, и в каждой точке ξ_j^* она совершает скачок на величину $\frac{1}{n}$, если существует только одно значение ξ_j^* (нет равных ей) и скачок на $\frac{l}{n}$, если в вариационном ряде встречается l одинаковых значений ξ_j^*.

Определенная функция является функцией распределения по определению. через нее мы проведем истинную функцию, которую мы аппроксимировали такой эмпирической функцией. Чем больше выборка, тем точнее такая аппроксимация будет приближаться к истинной функции. Про эмпирическую функцию распределения было доказано два предельно мощных утверждения.

Первое утверждение носит название теорема Гливенто-Кантелли.

При увеличении выборки до бесконечности, случайная величина $F_n(x)$ сходится по вероятности к $F(x)$

$$p \lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

Второе утверждение носит название теоремы Колмогорова. Если мы рассмотрим статистику KS вида

$$KS = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F(x) - \hat{F}_n(x)|$$

То полученная случайная величина будет иметь одно и то же распределение для всех функций $F(x)$, так называемое распределение Колмогорова.

На основании этой теоремы Колмогорова и его ученика Смирнова был сформулирован, пожалуй, первый критерий в непараметрической статистике.

Мы выдвигаем нулевую гипотезу, что F – конкретно заданная функция F_0:

$$H_0 : F = F_0$$

Тогда, если наша гипотеза верна, то F_0 и $\hat{F}_n$, восстановленная по выборке, должны мало отклоняться друг от друга. Причем, мы можем оценить степень этой малости, а именно мы должны сравнить KS с квантилем распределения Колмогорова.

$$KS \;\; ? \;\; K_{\alpha;n}$$

Где α – уровень значимости, n – количество степеней свободы.

Если эта величина действительно мала ($KS < K_{\alpha;n}$), то мы не отклоняем нулевую гипотезу. В противоположном случае мы отклоняем нулевую гипотезу и принимаем альтернативную.

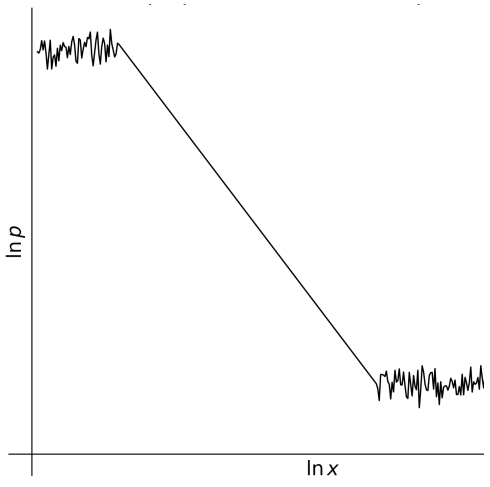
Каковы же недостатки критерия KS? Для того, чтобы применять критерий KS к выборкам в реальных задачах мы должны знать точное значение параметра α, а для того, чтобы сколько-нибудь адекватно оценить параметр α, мы должны быть уверены, что выборка, с которой мы имеем дело, порождена степенным распределением. На практике мы получаем логический круг. Но Clauset, Shalizi и Newman придумали способ, как из него выбраться.

Они предложили следующую идею:

1) На практике, степенное распределение в чистом виде встречается редко. Обычно реальные распределения имеют вид

$$P(X) = \begin{cases} ?, & x < x_{\min} \\ C \cdot x^{-\alpha}, & x_{\min} \le x \le x_{\max} \\ ?, & x > x_{\max} \end{cases}$$

В двойном логарифмическом масштабе это выглядит как

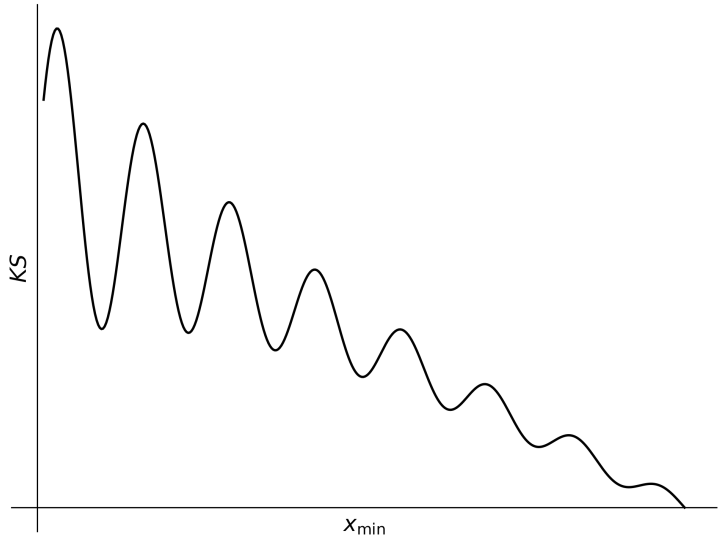


Физически это связано с тем, что сложные системы имеют некие характерные масштабы, для которых и выполняются законы поведения сложных сетей.

Давайте возьмем $x_{\min}$ в некотором разумном диапазоне значений с некоторым разумным шагом. Для каждого конкретного значения $x_{\min}$ с помощью метода Хилла, либо любого другого метода параметрической статистики, мы оценим значение α, удержав в вариационном ряде только те значения, которые больше текущего $x_{\min}$. Получив оценку для α, мы тем самым в точности специфицируем функцию F_0 из критерия Колмогорова Смирнова.

$$F_0 = C \cdot X^{-\hat{\alpha}_{\text{Hill}}}$$

Тогда мы можем для такой функции вычислить значение KS статистики, для функции от $\hat{\alpha}$ и в конечном случае от $x_{\min}$. Нарисуем график такой зависимости:



Он будет убывающим по очевидной причине – чем меньше у нас выборка, тем точнее мы можем приблизить нашу функцию данным распределением. Он будет убывающим не монотонно, тогда в качестве значения $x_{\min}$ выбирается значение, при котором функция $KS(x_{\min})$ достигает своего первого локального минимума. Это некая общая идея, иногда выбирается не первый локальный минимум, а второй или третий, что обычно связано с той ситуацией, что первый локальный минимум является некоторой флуктуацией на убывающем участке такой зависимости.

Тем самым мы получаем оптимальные в некотором смысле оценки $\hat{x}_{\min}, \hat{\alpha}$.

К сожалению, этого оказалось недостаточно для проведения goodness-of-fit теста для степенного распределения.

Замечание: для $x_{\max}$ процедура аналогичная, но мы двигаемся справа налево. Однако, обычно $x_{\max}$ мало влияет на результат, а вот $x_{\min}$ может быть критичен.

Clauset, Shalizi и Newman предложили решение данной проблемы проверки на степенность. Они предложили на ряду с исходной выборкой рассмотреть еще значительное число синтетических выборок, а именно синтетических выборок, порожденных законом распределения:

$$C \cdot X^{-\hat{\alpha}}, x > \hat{x}_{\min}$$

как раз с теми оценками, которые мы получили движением по графику KS от $x_{\min}$.

Мы берем некоторое степенное распределение, и порождаем выборки. У нас есть много выборок. Для каждой выборки мы считаем KS, в том числе для исходной (обрезав $x_{\min}$). В подавляющем большинстве случаев, значение KS для нашей выборки будет больше, чем для синтетических выборок, которые мы сделали таким образом, чтобы они были максимально близки к нашему реальному распределению.

KS статистика показывает, насколько истинное распределение близко к нашей эмпирической функции распределения.

Если исходная выборка не является степенной, например на самом деле она является нормальной, то KS статистика для будет иметь гигантское значение, намного большее, чем значение KS статистики для синтетических выборок, так как мы будем пытаться сравнивать что-то восстановленное по нормальному распределению с истинно степенным распределением.

Мы замерим процент случаев p, для которых:

$$KS_0 < \min_j KS_j$$

где KS_0 – KS статистика для нашей выборки, KS_j – для синтетических. Обычно берут порядка тысячи ($j < 1000$).

Если верна нулевая гипотеза о том, что F – степенное распределение, что за нашей наблюдаемой выборкой стоит степенное распределение, то $p > 10\%$.

Этот полуэмпирический критерий служит способом проверки выборки на степенность. Если $p < 10\%$, то есть, p близко к нулю, то мы имеем дело не со степенным распределением.

В рамках одного метода первое достоинство – мы умудряемся и оценить параметр распределения, и ответить на вопрос, действительно ли распределение является степенным. Второе достоинство – метод работает. Недостатки метода: нет теоретического обоснования границы в 10%, все остальное теоретически обоснованно.

Второй недостаток: время-емкий процесс.