

# Appunti sugli esercizi di Calcolo Numerico

July 1, 2019



## Premessa

Lo scopo di questo documento è quello di racchiudere le informazioni principali su quello che spesso (se non sempre) viene richiesto dalla professoressa Zaglia.

Sono stati riportati principalmente gli argomenti con le loro formule e il procedimento per risolverli e applicarli.

In alcuni punti viene svolto un esempio in modo da mettere in pratica la teoria mentre su altri non viene riportato dato che basta solo sostituire alla formula i dati trovati (Ex Cholesky).

Questi appunti **non** rispecchiano completamente il corso della prof, tanto meno quando (se lo farà) ci sarà il cambio di cattedra. Prendeteli quindi come spunto per capire e per applicare le cose.

Infine non sono una macchina (ci sto ancora lavorando), quindi il documento potrebbe essere soggetto ad errori :>

# Contents

# 1 Equazioni Lineari

Metodi per ottenere l'approssimazione di equazioni non lineari. In particolare consiste nel determinare

- Gli zeri (o radici) della funzione  $f(x) = 0$
- I valori (o Punti fissi) della funzione  $x = g(x)$

## 1.1 Interpretazione grafica

Utile per individuare se e (in caso affermativo) dove ci sono le soluzioni. Diversi dei metodi che verranno utilizzati richiederanno la conoscenza di un intervallo  $[a, b]$  che contenga una soluzione **reale** ed **unica**.

L'interpretazione grafica ci aiuta molto in questo caso, per rappresentare solitamente "basta" disegnare le funzioni in questo modo:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Se la funzione è  $f(x)$ , le soluzioni sono uguali alle intersezioni di  $f(x)$  con l'asse delle  $x$

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$$

Se la funzione è  $x=g(x)$ , le soluzioni sono uguali alle intersezioni tra le due funzioni

## 1.2 Bisezione

Consiste, partendo da un intervallo, nel dividere di volta in volta a metà l'intervallo di partenza fino a quando non si raggiunge un intervallo piccolissimo che è sempre più vicino alla soluzione  $x$ .

**Esempio Time:** data la funzione

$$f(x) = 3x - \cos(x)$$

inizio a determinare graficamente le soluzioni attraverso il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \cos(x) \\ y = 3x \end{cases} \quad \text{NB, abbiamo trasformato } f(x) = 0 \text{ in } x = g(x)$$

Dopo aver trovato le soluzioni, ne determino degli intervalli (ragionevolmente piccoli). Supponiamo che la soluzione  $\alpha$  sia contenuta all'interno dell'intervallo  $[0; 0,5]$  (dal grafico sappiamo dov'è ma non sappiamo il relativo valore), iniziamo ad eseguire i seguenti step:

1. Trovo il punto medio delle due tabelle  $x_i$ ;
2. Calcolo l'immagine del relativo punto  $f(x_i)$
3. Calcolo la **toll**, tolleranza facendo  $|b_i - a_i|$
4. Assegno il valore  $x_i$  ad  $a$  o  $b$  in base a questo modo:
  - se  $f(a_i) * f(x_i) < 0$  allora  $b_{i+1} = x_i$  mentre  $a$  resta invariato
  - se  $f(a_i) * f(x_i) > 0$  allora  $a_{i+1} = x_i$  mentre  $b$  resta invariato

$i$	$a_i$	$b_i$	$x_i$	$f(x_i)$	$ b_i - a_i $
0	0 (-)	0.5 (+)	0.25	-0,218912421	0.5000
1	0.25 (-)	0.5 (+)	0.375	0.194492378	0.2500
2	0.25 (-)	0.375 (+)	0.3125	-0.01467948	0,1250
3	0.3125 (-)	0.0375 (+)	0.34375	0.089752536	0.0625

Table 1: Tabella esecuzione Bisezione

Per semplificare la tabella, vicino al punto  $a_i$  e  $b_i$  è stato inserito un + o - tra parentesi. Questo indica se la rispettiva immagine (  $f(a_i)$  e  $f(b_i)$ ) è positiva o negativa. Questo aiuta a semplificare il controllo con  $f(x_i)$

### 1.3 Metodo di Newton

La formula per calcolare l'iterata successiva è la seguente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**Esempio time:** Sia  $f(x) = \sin(x) + x - \pi$  e  $x_0=2$  come valore di partenza, si determini una soluzione approssimata  $x_3$ .

Sappiamo che  $f'(x) = \cos(x) + 1$

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	-0.232295226	0.583853163	0.397865834
1	2.397865834	-0.06691458	0.26409513	0.252571789
2	2.650437619	-0.019510336	0.118211319	0.165046259
3	2.81548387	/	/	/

I test d'arresto per questo metodo sono:

- Una tolleranza **toll** tale che  $|x_{n+1} - x_n| \leq \text{toll}$
- Numero massimo di iterazioni  $n$

## 1.4 Metodo della secante

Metodo da utilizzare se  $f'(x)$  non è disponibile oppure il metodo di Newton non può essere utilizzato. La formula per calcolare l'iterata successiva è la seguente:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) * \frac{x_n - x_{(n-1)}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

**Esempio Time:** prendiamo come funzione di partenza  $f(x) = 4\cos(x/2) - 3,5 - x$  nell'intervallo  $I = [0; 1]$ . I punti di partenza  $x_0$  e  $x_1$  corrispondono agli estremi degli intervalli.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f(x_n) - f(x_{n-1})$	$x_n - x_{n-1}$	$x_{n+1} - x_n$
0	0	0,5	/	/	1
1	1	-0,98966975243	-1,489669752	1	-0.664355136
2	0,335644863	0.108158481	...	...	...

Table 2: Tabella esecuzione Seccante

I test d'arresto sono come quelli di Newton:

- Tolleranza **toll**
- Numero massimo di iterazioni



## 2 Matrici (Metodi diretti)

Lo scopo di questo paragrafo è la risoluzione di sistemi attraverso l'uso delle matrici. Il sistema solitamente viene scomposto in un'equazione  $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$  dove:

- $A^{n \times n}$ =matrice contenente le espressioni
- $\mathbf{x}$ =vettore delle incognite
- $\mathbf{b}$ =vettore dei termini noti

Il concetto dei metodi diretti si basa sulla *fattorizzazione*:

- Trasformo A nel prodotto di due matrici:  $A = BC$
- Il sistema passa da  $Ax = b$  a  $BCx = b$
- Si pone  $y = Cx$
- Si risolvono i due sistemi  $By = b$  e  $Cx = y$

### 2.1 Gauss

Permette di trasformare la matrice A in una matrice U triangolare superiore del tipo  $A = LU$  con L triangolare inferiore composta dai soli moltiplicatori di A.

Per ottenere A diminuita attraverso Gauss si possono usare due modi:

#### 2.1.1 Gauss senza pivoting

Metodo "semplice e veloce" rispetto alla sua controparte. Ci si basa sul pivot che ci troviamo (pivot = primo elemento non nullo del gradino della matrice) e si azzerano i valori sotto il pivot. Ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Il pivot in questo caso è 2 (posizione 1,1).

Ora determino i **moltiplicatori** i quali mi permettono di ottenere la colonna 0. In questo caso i moltiplicatori sono:

- $l_{21}$  = moltiplicatore della riga 2 con la riga 1  $= a_{21}/a_{11} = 4/2 = 2$
- $l_{31}$  = moltiplicatore della riga 3 con la riga 1  $= a_{31}/a_{11} = -2/2 = -1$

Ora, per ogni riga sotto quella del pivot, eseguo la sottrazione della riga con quella del pivot moltiplicata per il moltiplicatore. In questo caso si esegue:

- **Per la riga 2** :  $\alpha_{2i} - (l_{21} * \alpha_{1i})$
- **Per la riga 3** :  $\alpha_{3i} - (l_{31} * \alpha_{1i})$

Dopo aver fatto ciò dovremmo ottenere una matrice

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Non abbiamo ancora finito dato che A non è ancora triangolare superiore. Si riesegue lo stesso procedimento di prima:

- Determino il pivot: 1 (posizione 2,2);
- Calcolo i moltiplicatori, in questo caso è solo uno
  - $l_{32}$  = moltiplicatore della riga 3 con la riga 2  $= a_{32}/a_{22}$
- eseguo la sottrazione della riga 3 con la riga 2 moltiplicata per il moltiplicatore:  $\alpha_{3i} - (l_{32} * \alpha_{2i})$

Alla fine del procedimento otteniamo la matrice ridotta **U**

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e la matrice dei moltiplicatori **L**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Notate che  $l_{ij}$  corrisponde a dire "Moltiplicatore in riga **i** e colonna **j**".

### 2.1.2 Gauss con pivoting

Il metodo di Gauss **con** pivoting è leggermente diverso da quanto visto prima. È più sicuro del metodo precedente dato che evita situazioni con pivot nullo.

Cosa cambia da Gauss senza pivoting:

- È necessario effettuare un controllo prima di eseguire il calcolo del moltiplicatore che potrebbe portare ad uno scambio di righe;
- Viene inserita una nuova matrice  $P$  definita "Matrice di permutazione". È una matrice che, a partire dalla matrice identità, contenente tutti gli scambi effettuati durante l'applicazione del metodo in modo da interpretare il pivoting come un prodotto di matrici. La sua definizione è la seguente:  $P = P_n x P_{n-1} x \dots x P_1$  (zero scambi ne consegue che  $P = I =$  Matrice d'identità).
- La matrice finale non è più  $A = L x U$  ma  $\mathbf{P} \times \mathbf{A} = \mathbf{L} \times \mathbf{U}$ .

Prendiamo come esempio la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ora non si calcolano subito i moltiplicatori ma si determina il *miglior pivot*. Per farlo si possono usare due tecniche di pivoting:

- **Pivoting parziale:** supponendo che  $r \geq k$

$$|a_{rk}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}|$$

Quello che dice: il miglior pivot è l'elemento assoluto più alto della colonna  $K$  a partire dalla diagonale  $a_{kk}$

- **Pivoting totale:** solo a titolo informativo, consiste nell'effettuare la ricerca del miglior pivot considerando anche le altre colonne. Data la sua difficoltà nella gestione della matrice, viene preferito il pivoting parziale.

Tornando all'esempio, al primo step si osserva la colonna 1 e il miglior pivot è  $a_{21} = 2$ . Ora si effettua lo scambio della riga 1 con la riga 2 e si ottiene la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dato che abbiamo effettuato uno **scambio**, salviamolo in un "pezzo" della matrice di permutazione. Chiamiamolo  $P_1$  che è uguale a

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se moltiplichiamo  $A$  con  $P_1$  possiamo infatti notare che abbiamo ottenuto la stessa matrice.

Da qua si calcolano i due moltiplicatori:

- **Per la riga 2** :  $a_{21}/a_{11} = 1/2$
- **Per la riga 3** :  $a_{31}/a_{11} = 1/2$

Si effettuano i calcoli e si ottiene:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & \boxed{7/2} & -3/2 \end{bmatrix}$$

Al secondo step si osserva la colonna 2 e il miglior pivot è  $a_{32} = 7/2$ . Si effettua un altro scambio tra righe, ottenendo la seguente matrice:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7/2 & -3/2 \\ 0 & 5/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

e la seguente matrice di permutazione

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**NB:** anche se nella matrice originale A la seconda riga corrispondeva alla prima, a noi non ce ne frega niente dato che viene considerata sempre la nuova permutazione di A.

Calcoliamo il moltiplicatore:

- **Per la riga 3 :**  $a_{32}/a_{22} = 5/7$

Otteniamo così

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 16/7 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 5/7 & 1 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda P invece, si ottiene dalla moltiplicazione delle varie matrici di permutazione, in questo caso  $P_2$  e  $P_1$ . Quindi  $P =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**NB PARTE 2:** se viene applicato il pivoting parziale dopo aver già determinato dei moltiplicatori, bisogna cambiare la posizione dei moltiplicatori delle righe coinvolte.

**Esempio time:** abbiamo la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Dopo il primo step abbiamo la matrici:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & 5/2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Allo step 2 notiamo che c'è da eseguire il pivoting parziale. Avendo coinvolto le righe 2 e 3 è necessario (prima di calcolare il moltiplicatore) scambiare **TUTTI** i moltiplicatori della riga 2 con quelli della riga 3. Otteniamo così:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 5/2 & 12 \\ 0 & -1/2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & l_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Il procedimento si è svolto anche nell'esempio precedente ma, essendo i due valori uguali, non si notava benissimo.

Ora, perché  $l_{32}$  non viene coinvolto? Non viene coinvolto perché  $l_{32}$  fa *già parte della nuova permutazione*.

## 2.2 Risoluzione dei sistemi

Dopo aver applicato le eliminazioni di Gauss (con o senza pivoting) non abbiamo ancora finito di risolvere i nostri sistemi lineari dato che abbiamo solo ottenuto una forma semplificata. Per risolvere i sistemi  $Ax = b$  è necessario eseguire altri due step:

- **Se usato Gauss CON pivoting:** Dopo aver ottenuto i due sistemi triangolari U e L. Bisogna risolvere:

1.  $L * y = P * b$
2.  $U * x = y$

- **Se usato Gauss SENZA pivoting:** Dopo aver ottenuto i due sistemi triangolari U e L. Bisogna risolvere:

1.  $L * y = b$  (NB  $P = I$ )
2.  $U * x = y$

- **Se matrici aumentate multiple:** Partendo da una matrice aumentata multipla  $(A|b_1b_2...b_n)$ , dopo aver applicato Gauss (con o senza pivoting) ed ottenuto  $(U|y_1y_2...y_n)$  basta risolvere gli  $n$  sistemi

$$- U * x = y_1$$

$$- U * x = y_2$$

$$- \dots$$

$$- U * x = y_n$$

### 2.3 Calcolo dell'inversa

Sia  $A$  una matrice invertibile, per calcolare l'inversa  $A^{-1}$  seguite i seguenti step

- Partendo da  $A$ , uso Gauss (con o senza pivoting) per risolvere la matrice aumentata  $(A|I)$
- Ottengo  $(U|Y)$  dove  $Y = L^{-1} \times P$  e  $P = I$  se ho fatto Gauss senza pivoting
- Dalla matrice aumentata  $(U|L^{-1} \times P)$ , risolvo gli  $n$  sistemi triangolari ottenuti, dove  $n$  = numero delle colonne di  $Y$ .

**Esempio time:** dato  $(U|Y) =$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 7 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/5 & 1/2 & -1/5 & 1 \end{array} \right]$$

Devo risolvere questi 3 sistemi:

$$\left[ \begin{array}{ccc} -4 & 7 & 0 \\ 0 & 5/2 & 7 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} -4 & 7 & 0 \\ 0 & 5/2 & 7 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 7 & 0 \\ 0 & 5/2 & 7 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In questo modo ho calcolato i componenti della matrice  $A^{-1}$

## 2.4 Metodo di Cholesky

Il metodo di Cholesky offre una semplificazione della matrice più veloce rispetto a quella di Gauss ma è applicabile solo se  $A$  è :

- **simmetrica:**  $A = A^T$
- **definita positiva:**  $x^T A x > 0$

I valori si calcolano direttamente con le seguenti formule:

- $l_{11} = \sqrt[3]{a_{11}}$  *Primo elemento di  $L$*
- $l_{i1} = a_{i1}/l_{11}$  *Elementi della prima riga di  $L$  con  $i = 1 \dots n$*
- $l_{jj}$  = *Elementi diagonali della diagonale  $L$ , si ottengono con la seguente formula ( $j = 2 \dots n$ )*

$$(a - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{1/2}$$

- $l_{ij}$  = *Resto degli elementi, si ottengono con la seguente formula ( $j = 2 \dots n$  e  $i = j + 1 \dots n$ )*

$$(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} * l_{jk}) / l_{jj}$$

Applicato questo metodo si ottiene una semplificazione  $A = L * L^T$ .  
Per risolvere il sistema ottenuto bisogna calcolare:

- $L y = b$
- $L^T x = y$



## 2.5 Determinante

Il determinante si calcola in modi diversi a seconda del metodo utilizzato:

- **Gauss:**

$$\det(A) = (-1)^s * \prod_{i=1}^n a_{ii}^{(i-1)}$$

dove  $s$  indica il numero di permutazioni eseguite. In sostanza  
 $\det(A) = 1^{\text{permutazioni}} * \text{moltiplicazione degli elementi diagonali di } U$

- **Cholesky:**

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n l_{ii}^2$$

In sostanza  $\det(A) = \text{moltiplicazione degli elementi diagonali di } L \text{ al quadrato}$

### 3 Matrici (Metodi di rilassamento classici)

Il concetto dei metodi di rilassamento si basa sulla *decomposizione* di A nella seguente forma:

$$A = M - N$$

Il sistema può essere scritto come

$$Mx = Nx + b$$

e partendo da un  $x_0$  vettore arbitrario, è possibile costruire le relative iterazioni

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b$$

I metodi di rilassamento classici costruiscono M e N basandosi sulle seguenti 3 matrici:

una matrice diagonale costruita con gli elementi diagonali di A

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

una matrice triangolare inferiore costruita con gli elementi inferiori alla diagonale di A, tutto il resto zero

$$-E = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ \dots & \dots & \ddots & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

ed infine una matrice triangolare superiore costruita con gli elementi superiori alla diagonale di A, tutto il resto zero

$$-F = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \dots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Otteniamo in questo modo  $A = D - E - F$

Inoltre, ogni metodo ha una sua particolare matrice d'iterazione.

### 3.1 Metodo Jacobi

Con questo metodo, le matrici M e N sono definite nel seguente modo:

- $M = D$
- $N = E + F$  Prestate attenzione che i valori delle matrici E ed F di default sono **Negativi** (-E e -F).

Dopo aver determinato M e N si può calcolare la matrice di iterazione  $B_J$ . Questa può essere calcolata in due modi:

#### 3.1.1 Calcolo diretto

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}$$

#### 3.1.2 Calcolo con D,E,F

$$B_J = M^{-1} * N = D^{-1} * (E + F)$$

dove

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

#### 3.1.3 Calcolo dell'iterata successiva

Per calcolare  $x_{k+1}$  a partire da un  $x_k$  arbitrario, basta eseguire il seguente conto

$$x_{k+1} = B_J * x_k + q$$

dove  $q = D^{-1} * b$

### 3.2 Metodo Gauss-Seidel

Con questo metodo, le matrici  $M$  e  $N$  sono definite nel seguente modo:

- $M = D - E$
- $N = F$

In questo caso per calcolare la matrice d'iterazione c'è solo un modo:

$$B_G = M^{-1} * N = (D - E)^{-1} * F$$

**PRO TIP:** per calcolare l'inversa di  $M$  in questo caso si può usare il metodo descritto sul paragrafo ?? ma essendo lungo ed a tratti macchinoso può portare ad errori. Fortunatamente, essendo una triangolare, è possibile sfruttare questo trick:

Una proprietà della matrice identità è che, data una matrice  $A$ ,  $A^{-1}A = I$ .

Prendendo in questo caso  $(D - E) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Abbiamo che  $(D - E)^{-1} * (D - E) = I$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 1/3 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Moltiplico le due matrici ed ottengo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a/2 - 2/3 & 1 & 0 \\ b/2 - 2c + 1 & 3c + 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Come si può notare, ora basta solo far corrispondere gli spazi con le incognite ai relativi valori (in questo caso 0). Per risolvere questo basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a/2 - 2/3 = 0 \\ b/2 - 2c + 1 = 0 \\ 3c + 1 = 0 \end{cases}$$

Ossia rendere  $a_{21} = I_{21}$  ,  $a_{31} = I_{31}$ ,  $a_{32} = I_{32}$ , alla fine sostituiamo i valori di  $a, b$  e  $c$  nelle rispettive posizioni ed è fatta.

### 3.2.1 Calcolo dell'iterata successiva gauss-seidel

Per calcolare  $x_{k+1}$  a partire da un  $x_k$  arbitrario, basta eseguire il seguente conto

$$x_{k+1} = B_G * x_k + q$$

dove  $q = (D - E)^{-1} * b$

## 4 Interpolazione

Rientra nelle approssimazione di funzioni (ridurre  $f(x)$  in una  $g(x)$  più semplice). L'interpolazione consiste nell'approssimare una funzione e che passi per gli stessi punti della funzione originale.

In questo capitolo viene trattata **l'interpolazione polinomiale**: data una funzione  $f(x)$  nella quale:

- siano noti  $n + 1$  punti (o nodi)  $x_i$  distinti;
- sia  $f(x_i)$  ( $i = 0 \dots n$ ) i valori assunti dalla funzione nei punti dati
- esista un indice  $0 \leq k \leq n$  tale che  $f(k) \neq 0$

Allora esiste un polinomio  $P_n(x_i) = f(x_i)$

### 4.1 Forma di Lagrange

Non ha vincoli nell'utilizzo. Per trovare il polinomio interpolatore  $P_n(x)$  è necessario eseguire i seguenti step:

- Determinazione polinomio caratteristico di Lagrange

$$L^{(n)}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Determinazione polinomio interpolatore

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) * L_i^n(x)$$

Per fare un esempio: siano noti

$x_i$	-2	0	1	2
$f(x_i)$	4	10	10	16

Table 3: Tabella nodi iniziali

quindi  $n = 3$ .

Il polinomio d'interpolazione si trova quindi in questo modo:

$$P_3(x) = f(x_0) * L_0^{(3)} + f(x_1) * L_1^{(3)} + f(x_2) * L_2^{(3)} + f(x_3) * L_3^{(3)}$$

Ovviamente noi di base non sappiamo i valori reali dei vari  $L^{(3)}$  dobbiamo prima calcolarceli:

- $L_0^{(3)} = \frac{x-0}{-2+0} * \frac{x-1}{-2-1} * \frac{x-2}{-2-2}$
- $L_1^{(3)} = \frac{x+2}{0+2} * \frac{x-1}{0-1} * \frac{x-2}{0-2}$
- $L_2^{(3)} = \frac{x+2}{1+2} * \frac{x+0}{1+0} * \frac{x-2}{1-2}$
- $L_3^{(3)} = \frac{x+2}{2+2} * \frac{x+0}{2+0} * \frac{x-1}{2-1}$

Una volta risolti i conti basta eseguire il conto precedente e si ottiene il seguente polinomio

$$P_3(x) = x^3 - x + 10$$

## 4.2 Forma di Neville-Aitken

Per utilizzare Neville-Aitken non sono necessarie particolari condizioni.

La forma del polinomio interpolatore è la seguente:

$$P_n(x) = T_n^{(0)}(x)$$

Per determinare il  $T_n^{(0)}$  sono necessarie queste due formule:

- $T_0^{(i)} = f(x_i)$
- $T_{k+1}^{(i)} = T_k^{(i+1)}(x) - \frac{x_{i+k+1}-x}{x_{i+k+1}-x_i} * (T_k^{(i+1)}(x) - T_k^{(i)}(x))$

**Esempio time:** siano noti i seguenti nodi

$x_i$	0.1	0.2	0.4
$f(x_i)$	2	1	0.5

Table 4: Tabella nodi iniziali

Per facilitare la comprensione: dato  $T_k^{(i)}$ ,  $k$  indica la colonna ed  $i$  indica il nodo interpolato. La tabella di risoluzione è con il metodo di Neville-Aitken:

$x_i$	$T_0^{(i)}$	$T_1^{(i)}$	$T_2^{(i)}$
0.1	2	$3 - 10x$	$25x^2 - 17.5 + 3.5$
0.2	1	$1.5 - 2.5x$	/
0.4	0.5	/	/

Table 5: Tabella esecuzione Neville-Aitken

Alla fine di tutto  **$P_2(x) = 25x^2 - 17.5 + 3.5$**

Il procedimento si svolge colonna per colonna, calcolando prima la colonna  $k = 0$ , poi la colonna  $k = 1$  ed infine la colonna  $k = 2$  e dall'alto verso in basso. Si nota, ad esempio, che le parti di  $T_1^{(0)}$  Necessita di  $T_0^{(1)}$

### 4.3 Formule di Newton

Con le interpolazioni, Newton ha più formule a disposizione. Quelle che interessano a noi sono principalmente due: **Newton alle differenze divise** e **Newton alle differenze finite in avanti**.

Tutte queste formule portano (in un modo o nell'altro e con scritte diverse) al seguente polinomio interpolatore:

$$P_n(x) = c_0 + \sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Le cose che cambiano da una formula all'altra è il modo in cui vengono scritti i coefficienti  $c_i$



#### 4.3.1 Formula di Newton alle differenze divise

In questo caso  $c_0$  dipende solo da  $f(x_0)$ , il coefficiente  $c_1$  da  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$  e così via fino a  $c_n$  che dipende da  $f(x_0), f(x_1) \dots f(x_n)$ .

In sostanza, si dice che  $c_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  e prende il nome di *differenza divisa di  $f$* .

Queste differenze si basano su ordini dove *Ordine  $n$*  e vengono indicate in questo modo:

- **Ordine 0:**  $f[x_i] = f(x_i)$
- **Ordine 1:**  $f[x_i, x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$
- **Ordine 2**  $f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$
- **Ordine  $n$ :**  $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, x_n]}{x_0 - x_n}$

Alla fine di tutto, il nostro polinomio interpolatore è

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

**Esempio time:** siano noti i seguenti nodi

$x_i$	3	-2	-1	2
$f(x_i)$	4	-2	-1	2

Table 6: Tabella nodi iniziali

Per risolvere il seguente esempio con Newton alle differenze divise si può ricorrere alla solita tabella

$x_i$	$f[x_i] = f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
3	4	$6/5$	$1/20$	$1/20$
-2	-2	1	0	/
-1	-1	1	/	/
2	2	/	/	/

Table 7: Tabella esecuzione Newton differenze divise

Alla fine di tutto scrivo la formula del polinomio:

$$P_3 = 4 + \frac{6}{5} * (x - 3) + \frac{1}{20} * (x - 3)(x - 2) + \frac{1}{20}(x - 3)(x + 2)(x + 1)$$

il quale risulta

$$P_3(x) = \frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$$

Nel caso venga aggiunto un nuovo nodo, il nuovo polinomio diventerebbe:

$$P_{n+1} = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_{n+1}] \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

ossia il vecchio polinomio più la nuova differenza divisa. Ovviamente bisogna rifare alcuni conti sulla tabella di esecuzione. In particolare, se eseguita, si noterà che i conti che non riguardano il nuovo nodo aggiunto **saranno uguali**.

$x_i$	$f[x_i] = f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$
3	4	6/5	1/20	1/20	<b>4/15</b>
-2	-2	1	0	<b>-3/4</b>	/
-1	-1	1	<b>-3/2</b>	/	/
2	2	<b>-1/2</b>	/	/	/
0	<b>3</b>	/	/	/	/

Table 8: Tabella esecuzione con nuovo nodo, valori in grassetto = valori diversi

#### 4.3.2 Formula di Newton alle differenze divise in avanti

Al contrario delle differenze divise, ci sono due vincoli che devono essere rispettati per usare questa formula:

- I nodi siano **ordinati** in senso crescente
- I nodi siano **equidistanti**

Se sono equidistanti, allora abbiamo  $x_i = x_0 + i * h$

**NB:** nel caso vi venga chiesto se per i nodi  $\{0, -1, -2\}$  è possibile applicare Newton con le differenze in avanti, la risposta è **può essere applicato se vengono riordinati nel seguente modo  $\{-2, -1, 0\}$  perché sono equidistanti ma non ordinati**

Il nostro polinomio interpolatore è

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=0}^n \frac{1}{i! * h^i} \Delta^i f(x_0) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Formula per determinare i delta

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x + h) - \Delta^{k-1} f(x)$$

dove  $\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$

**Esempio Time:** siano dati i seguenti nodi con le rispettive immagini

$x_i$	0	1	2
$f(x_i)$	0	1	3

Table 9: Tabella nodi iniziali equidistanti e ordinati ( $h = 1$ )

La tabella delle differenze in avanti è la seguente

$x_i$	$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i) = \Delta^0 f(x_i + h) - \Delta^0 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i) = \Delta^1 f(x_i + h) - \Delta^1 f(x_i)$
0	0	$\Delta^1 f(0) = \Delta^0 f(1) - \Delta^0 f(0) = 1$	$\Delta^2 f(0) = \Delta^1 f(0 + 1) - \Delta^1 f(0) = 2$
1	1	$\Delta^1 f(1) = \Delta^0 f(2) - \Delta^0 f(1) = 2$	/
2	3	/	/

Table 10: Tabella esecuzione Newton alle differenze in avanti

Alla fine di tutto

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{1!1^1} * 1 * (x - 0) + \frac{1}{2!1^2} * 1(x - 0)(x - 1)$$

e

$$P_2(x) = \frac{x^2 + x}{2}$$

Nel caso si volesse aggiungere un nuovo nodo, la soluzione è simile a quella precedente se non per i valori dei *coefficienti*

$$P_{n+1}(x) = P_n + \frac{1}{(n+1)!h^{n+1}} \Delta^{n+1} f(x_0) \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

E sempre come prima, si ricalcolano i valori con il nuovo nodo aggiunto.

**NB** Controllare sempre che il valore che si voglia aggiungere sia *equidistante* ed inserito in modo *ordinato* rispetto ai nodi presenti.

## 4.4 Approssimazione ai minimi quadrati

Usata principalmente quando i dati sono sperimentali e l'adozione di uno dei metodi precedenti potrebbe dare un risultato che non ha un elevato grado

di esattezza.

Dati i punti ed il loro peso  $w$ , ci si può ricondurre alla funzione  $f(x)$  attraverso l'uso delle matrici determinando il valore dei coefficienti  $a$  delle variabili  $x$ . In particolare, si tratta di risolvere il seguente sistema

$$A^T A \mathbf{a} = A^T \mathbf{b}$$

**Esempio time** dati i seguenti punti con i loro relativi pesi: **Esempio Time:** siano dati i seguenti nodi con le rispettive immagini

$x_i$	0	1/2	1	3/2	2
$f(x_i)$	0	1/2	1	0	-1
$\omega$	1	16	1	16	1

Table 11: Tabella nodi iniziali con i pesi

I quali posso vederli sotto forma di vettore riga:

$$x = [0 \quad 1/2 \quad 1 \quad 3/2 \quad 2]$$

$$y = [0 \quad 1/2 \quad 1 \quad 0 \quad -1]$$

$$\omega = [1 \quad 16 \quad 1 \quad 16 \quad 1]$$

Gli step per calcolare il tutto sono i seguenti:

- Definisco la matrice  $A$  nel seguente modo

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt[2]{w_0} & \sqrt[2]{w_0} * x_0 & \sqrt[2]{w_0} * x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt[2]{w_m} & \sqrt[2]{w_m} * x_m & \sqrt[2]{w_m} * x_m \end{bmatrix}$$

- Definisco la matrice  $b$  nel seguente modo:

$$b = \begin{bmatrix} \sqrt[2]{w_0} * f(x_0) \\ \vdots \\ \sqrt[2]{w_m} * f(x_m) \end{bmatrix}$$

- Eseguo le moltiplicazioni  $A^T A$  e  $A^T b$
- (Eventualmente) Semplifico il sistema trovato dalle due moltiplicazioni con Gauss o simili
- Determino i valori dei coefficienti  $a$

Tornando all'esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora i due sistemi:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 35 & 45 \\ 35 & 45 & 65 \\ 45 & 65 & 99 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ora posso calcolare i nuovi valori dei coefficienti  $a$  resolvendo

$$\begin{bmatrix} 35 & 35 & 45 \\ 35 & 45 & 65 \\ 45 & 65 & 99 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Risolveo usando la matrice aumentata  $(A|b)$  e, dopo aver usato Gauss, ottengo

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 35 & 35 & 45 & 8 \\ 0 & 10 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & 8/7 & -9/7 \end{array} \right]$$

A questo punto si risolve il sistema

$$\begin{cases} 35a_1 + 35a_2 + 45a_3 = 8 \\ 10a_2 + 20a_3 = -5 \\ 8a_3/7 = -9/7 \end{cases}$$

Il polinomio finale è  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{x} + \mathbf{a}_3\mathbf{x}^2$  sostituendo ai rispettivi coefficienti i valori trovati nel sistema

## 5 Integrazione numerica

Metodi per l'approssimazione di un'integrale definito. Usati quando l'integrale non è determinabile per via analitica o quanto l'espressione è troppo complessa e soggetta a notevoli errori.

Le formule che saranno utilizzate vengono definite *composte* per il fatto che l'intervallo  $[a, b]$  viene suddiviso in  $m$  intervalli (non necessariamente uguali).

### 5.1 Formula di trapezi composta

Dato un integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

e posti gli intervalli uguali, calcoliamo  $h = (b - a)/m$

La formula di trapezi composta è la seguente

$$\frac{h}{2} * [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(a + ih) + f(b)]$$

### 5.2 Formula di Cavalieri-Simpson

**Condizione nell'uso = m dev'essere pari**

Dato un integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

e posti gli intervalli uguali, calcoliamo  $h = (b - a)/m$  La formula di Cavalieri-Simpson è la seguente:

$$\frac{h}{3} * [f(a) + 4 \sum_{i=1(\text{dispari})}^{m-1} f(a + ih) + 2 \sum_{i=1(\text{pari})}^{m-2} f(a + ih) + f(b)]$$

### 5.3 Formula semplificata

Da utilizzare dopo aver trovato una prima approssimazione **con trapezi composta**. Veloce perché ti permette di riutilizzare quanto precedentemente calcolato, riutilizzandolo e senza dover ricalcolare tutto da capo



Dato un nuovo  $m$  (solitamente corrisponde al doppio di quello precedente),  
abbiamo che la nuova approssimazione è

$$T_{i+i} = \frac{h_{i+1}}{2} * S_{i+1}$$

Dove

$$S_{i+i} = S_i + 2 \sum_{i=1(\text{dispari})}^{m-1} f(a + ih)$$

ossia la valutazione dei nuovi intervalli sommata a quella precedentemente  
ottenuta

mentre

$$S_i = 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(a + ih)$$

non è altro che la valutazione degli intervalli precedenti calcolati con trapezi  
composta