

Číslo úlohy: 11 Skupina: 2
 Kruh: Čtvrtek Jméno: Denis Krapivin
 Datum měření: 2.12.2021 Kolega: Kseniia Politskovaia
 Klasifikace:

1 Pracovní úkoly

1. **DŮ:** Vypište diferenciální rovnice pro mechanický a elektrický harmonický oscilátor. Porovnáním členů určete, které veličiny si v obou oscilátorech odpovídají, a pokuste se vysvětlit roli jednotlivých prvků v RLC obvodu.
2. Sestavte sériový rezonanční obvod dle Obr. 2. Pozorujte vliv změny parametrů R , L a C na obvod. Určete frekvenci vlastních kmitů RLC obvodu pro hodnoty $R = 50\ \Omega$, $L = 1\ \text{mH}$ a $C = 500\ \text{pF}$. Porovnejte s předpokládanou hodnotou získanou z Thomsonova vzorce (1).
3. Zobraďte proudovou rezonanční křivku na osciloskopu a slovně popište její změny při zasouvání jádra do cívky. Na základě toho odhadněte magnetický charakter jádra.
4. Proměřte proudovou rezonanční křivku v závislosti na frekvenci. Měření proveďte dvakrát: pro vzduchovou cívku a cívku s jádrem. Znázorněte obě rezonanční křivky do společného grafu a fitováním stanovte činitele jakosti obou rezonančních obvodů. Na základě toho určete indukčnost cívky s jádrem.
5. Určete kapacitu neznámého kondenzátoru, o němž víte, že má kapacitu menší, než je maximální hodnota kapacity kondenzátoru Tesla.

2 Pomůcky

Frekvenční generátor GW INSTEK AFG-2025, osciloskop GoldStar, dva koaxiální kabely, bezkontaktní amperměr TEK CT-1 (5 mV/mA), odporová dekáda CMT R1-1000 ($1\ \Omega - 11\ \text{M}\Omega$), spojovací vodiče, vzduchová cívka PHYWE (1 mH, 0,4 Ω), jádro cívky, ladicí kapacitní normál Tesla (100 – 1100 pF), kondenzátor neznámé kapacity.

3 Teorie

Diferenciální rovnice pro elektrický harmonický oscilátor je uvedena v Příloze.

Pro RLC obvod zavádíme charakteristickou veličinu - impedance Z :

$$Z = R + iX = R + i(X_L - X_C), \quad X_L = \Omega L, \quad X_C = \frac{1}{\Omega C},$$

kde R je odpor (rezistance), X_L je indukance, X_C kapacitance, L indukčnost, C kapacita a Ω budící frekvence.

Pro amplitudu proudu I a napětí U platí:

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

Pokud $X_L = X_C$ proud a napětí jsou v fázi a úbytek napětí na kondenzátoru a cívce se vyruší. Říkáme, že obvod je v rezonanci.

Pro rezonanční frekvenci platí Thomsonův vztah [1]:

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1)$$

Rezonanční frekvence $\Omega_0 = \omega_0$, dále pak platí $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Pro harmonické oscilátory zavádíme bezrozměrnou veličinu vyjadřující citlivost obvodu vůči signálům kolem určité frekvence - činitel jakosti Q .

V praxi na velikost Q má vliv mnoho faktorů, přenosové a parazitní vlastnosti obvodu. Pro naše účely však postačí tyto vlastnosti zahrnout do parametru α :

$$Q = \frac{\alpha}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

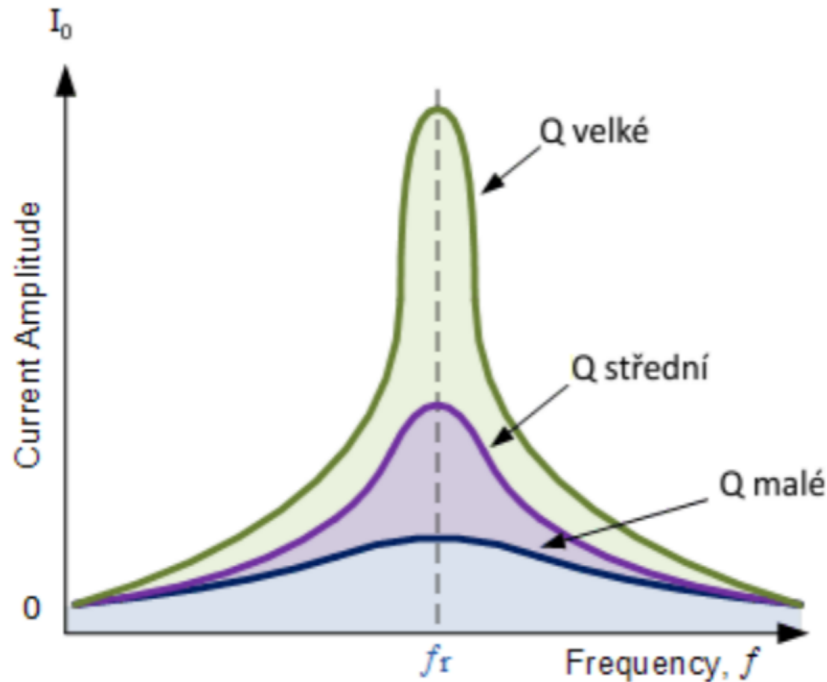
Pak pro dvě různé konfigurace obvodu pro rezonance platí, že:

$$\left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 = \frac{C_1 L_2}{C_2 L_1}. \quad (2)$$

Závislost amplitudy proudu I_0 na budící frekvenci Ω nazýváme rezonanční křivkou obvodu. Pro konstantní parametry obvodu R , L , C , Q a proměnnou frekvence f rezonanční křivkou můžeme [1] zapsat ve tvaru:

$$I_0(f) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}}, \quad (3)$$

kde f_0 je rezonanční frekvence. Závislost tvaru proudové rezonanční křivky na činiteli jakosti Q je na Obr. 1.

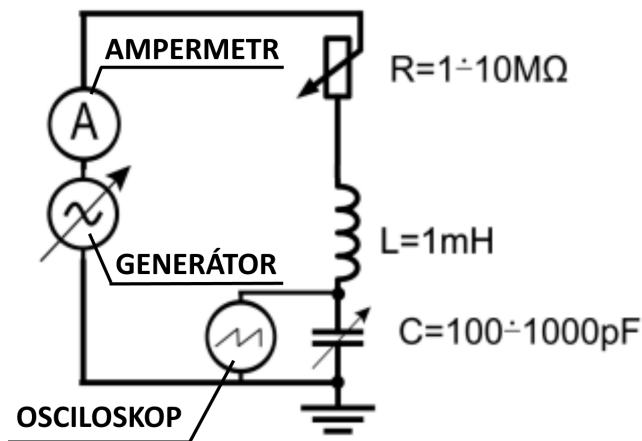


Obr. 1: Závislost tvaru proudové rezonanční křivky na činiteli jakosti Q . f je frekvence, I_0 je amplituda proudu a f_r je rezonanční frekvence. Převzato z [2], upraveno.

4 Postup měření

4.1 Sestavení sériového RLC obvodu

Sestavíme sériový RLC obvod dle Obr. 2.



Obr. 2: Schéma zapojení sériového RLC obvodu. Písmenem R je označena odporová dekáda s příslušnými hodnotami odporu, L je indukčnost, C je hodnoty kapacity normálu Tesla. Převzato z [1], upraveno.

Cívku napojujeme přes bílou (izolovanou) zdířku normálu Tesla, černé zdířku normálu spojujeme s černý koncem koaxiálního kabelu osciloskopu a černý koncem kabelu generátoru. Před samotným měřením se seznámím s ovládáním osciloskopu a frekvenčního generátoru [3].

4.2 Pozorování a měření vlastních kmitů

Generátor nastavíme do obdélníkových pulzů a osciloskop na kanál 1. Kapacitu normálu Tesla nastavíme na 500 pF. Změnou hodnot parametrů R , L a C můžeme měnit tvar křivky na obrazovce osciloskopu. Nastavíme na odporové dekádě odpor 50 Ω a změříme vzdálenost mezi dvěma maximy či minimy amplitud, tuto vzdálenost lze pomocí tlačítka "1/ ΔT " přepočítat na frekvenci. Měření opakujeme několikrát.

4.3 Měření proudové rezonanční křivky

Generátor nastavíme do sinusových pulzů a osciloskop na kanál 2. Toto nastavení ponecháme i pro další úlohy. Kapacitu normálu Tesla nastavíme na 500 pF. Pro různé hodnoty frekvence sinusových pulzů na generátoru měříme hodnoty dvojnásobku amplitudy proudu pomocí osciloskopu (osciloskop ukazuje hodnoty napětí, převodní vztah je uveden na ampérmetru). Měření provádíme pro 20 různých hodnot frekvence. Hodnoty frekvence volíme v rozsahu $f_0 \pm 50\%$, kde f_0 je rezonanční frekvence obvodu.

Zasuneme jádro do cívky a změnou kapacity normálu na hodnotu C_2 vyladíme obvod do rezonance pro f_0 . Stejným postupem provedeme další 20 měření pro různé hodnoty frekvence pro cívku s jádrem.

4.4 Určení kapacity neznámého kondenzátoru

Pro měření kapacity neznámého kondenzátoru užijeme princip rezonance. Předpokládáme, že hodnota kapacity neznámého kondenzátoru nepřesahuje rozsah normálu Tesla. Na normálu Tesla nastavíme libovolnou kapacitu C_1 , změnou frekvence f vyladíme obvod do rezonance. Neznámý kondenzátor o kapacitě C_x zapojíme paralelně k normálu a změnou kapacity normálu na hodnotu C_2 vyladíme obvod znovu do rezonance při stále hodnotě frekvence. Pak hodnotu kapacity neznámého kondenzátoru C_x najdeme jako rozdíl C_1 a C_2 :

$$C_x = C_1 - C_2. \quad (4)$$

5 Zpracování dat

5.1 Frekvence vlastních kmitů RLC obvodu

Sestavili jsme RLC obvod s cívku o indukčnosti $L = 1 \text{ mH}$, odporu $R = 50 \Omega$, na kapacitním normálu Tesla jsme nastavili hodnotu kapacity $C = 500 \text{ pF}$.

Naměřené hodnoty frekvence vlastních kmitů pro 5 měření jsou v Tab. 1.

$f \text{ [kHz]}$
211,9
211,9
213,7
213,7
211,9

Tab. 1: Hodnota frekvenci vlastních kmitů RLC obvodu s cívku o indukčnosti $L = 1 \text{ mH}$, odporu $R = 50 \Omega$ a kapacity $C = 500 \text{ pF}$.

Pak výslednou hodnotu frekvence vlastních kmitů f_{osc} najdeme jako aritmetický průměr, statistickou chybu najdeme jako chybu aritmetického průměru [4]:

$$f_{\text{osc}} = (212,6 \pm 0,4) \text{ kHz}.$$

Teoreticky očekávanou hodnotu vlastní frekvence kmitů najdeme pomocí (1):

$$f_{\text{teor}} = 225,08 \text{ kHz}.$$

5.2 Měření proudové rezonanční křivky

Pro toto měření jsme použili vzduchovou cívku indukčnosti $L = 1 \text{ mH}$, pro měření amplitudy proudu pro cívku bez jádra jsme nastavili hodnotu kapacity $C_1 = 500 \text{ pF}$, pro cívku s jádrem $C_2 = 950 \text{ pF}$ s chybou 10 pF .

Hodnoty naměřené amplitudy proudu pro vzduchovou cívku bez jádra I_1 a amplitudy proudu pro cívku s jádrem I_2 pro frekvence f sinusových pulzů generátoru jsou v Tab. 2. Hodnoty frekvence f jsme změřili s chybou 1 kHz , což je přímo chyba přístroje, hodnoty proudů I_1 a I_2 s chybou $0,6 \text{ mA}$, která je přepočtená podle vzorce pro chyby nepřímého měření [4] veličina chyby měření dvojnásobku amplitudy na osciloskopu.

Pomocí programu GNUplot jsme proložili data funkcí (3) a výsledky jsme vynesli do grafu na Obr. 3 (vlevo). Proložením dat jsme dostali hodnoty konstant I_1 , Q_1^2 a F_1 pro cívku bez jádra a I_2 , Q_2^2 a F_2 pro cívku s jádrem s příslušnými chybami:

$$I_1 = (46,3 \pm 0,9) \text{ mA}, \quad Q_1^2 = 25 \pm 2, \quad F_1 = (207 \pm 1) \text{ kHz},$$

$$I_2 = (43,06 \pm 0,18) \text{ mA}, \quad Q_2^2 = 9,5 \pm 0,2, \quad F_2 = (197,2 \pm 0,3) \text{ kHz},$$

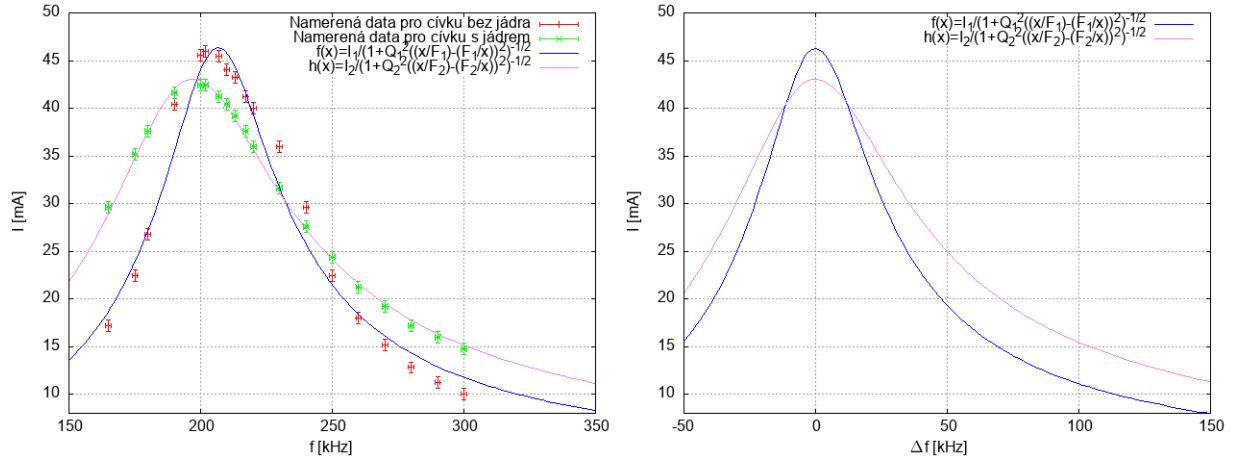
kde I_1 a I_2 jsou maximální amplitudy proudů, Q_1^2 a Q_2^2 jsou čtverce činitelů jakosti, F_1 a F_2 jsou rezonanční frekvence obvodu.

Pak podle vztahu (2) spočítáme indukčnost cívky s jádrem L_2 , chybu najdeme jako chybu nepřímého měření:

$$L_2 = L_1 \frac{C_2}{C_1} \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 = (0,72 \pm 0,06) \text{ mH}.$$

f [kHz]	I_1 [mA]	I_2 [mA]
175	22,4	35,2
190	40,4	41,6
230	36,0	31,6
240	29,6	27,6
260	18,0	21,2
270	15,2	19,2
280	12,8	17,2
290	11,2	16,0
300	10,0	14,8
250	22,4	24,4
220	40,0	36,0
210	44,0	40,4
200	45,6	42,4
180	26,8	37,6
165	17,2	29,6
213	43,2	39,2
217	41,2	37,6
207	45,5	41,2
202	46,0	42,4

Tab. 2: Závislost amplitudy proudu pro vzduchovou cívku bez jádra I_1 a amplitudy proudu pro tutéž cívku s jádrem I_2 v RLC obvodu na hodnotách frekvence f sinusových pulzů generátoru. Hodnoty frekvence f změřené s chybou 1 kHz, což je přímo chyba přístroje, hodnoty proudů I_1 a I_2 s chybou 0,6 mA, která je přepočtená podle vzorce pro chyby nepřímého měření veličina chyby měření dvojnásobku amplitudy na osciloskopu.



Obr. 3: Vlevo: hodnoty amplitudy proudu I v RLC obvodu pro hodnoty frekvence f sinusových pulzů generátoru pro vzduchovou cívku bez jádra a s jádrem. Chyba měření frekvence f je 1 kHz, což je přímo chyba přístroje, chyba měření amplitudy proudů I je 0,6 mA, která je přepočtená podle vzorce pro chyby nepřímého měření veličina chyby měření dvojnásobku amplitudy na osciloskopu. Proložení závislosti funkcí ve tvaru $f(x)$ a $h(x)$ s hodnotami parametrů $I_1 = (46,3 \pm 0,9)$ mA, $Q_1^2 = 25 \pm 2$, $F_1 = (207 \pm 1)$ kHz pro cívku bez jádra a $I_2 = (43,06 \pm 0,18)$ mA, $Q_2^2 = 9,5 \pm 0,2$, $F_2 = (197,2 \pm 0,3)$ kHz pro cívku s jádrem. Vpravo: rezonanční křivky závislosti amplitudy proudu I na hodnotě odchylky frekvence Δf sinusových pulzů generátoru od vlastní frekvence obvodu. Funkce $f(x)$ a $h(x)$ mají stejné hodnoty parametrů jako na obrázku vlevo.

5.3 Určení kapacity neznámého kondenzátoru

Nastavené hodnoty kapacity C_1 kapacitního normálu Tesla a společné kapacity C_2 kapacitního normálu Tesla a paralelně zapojeného neznámého kondenzátoru jsou v Tab. 3. Hodnotu kapacity C_2 při kterém vzniká rezonance pro nastavenou hodnotu frekvence f není snadno určit pomocí osciloskopu, proto chybu nastavení C_2 jsme experimentálně odhadli na 5 pF, stejně jsme odhadli chybu kapacity C_1 na 5 pF.

Pak hodnoty kapacit neznámého kondenzátoru C_x pro každé měření jsme našli podle vzorce (4). Podle vzorce pro chybu nepřímého měření jsme stanovili systematickou chybu kapacity neznámého kondenzátoru C_x na 7 pF pro každé měření.

C_1 [pF]	C_2 [pF]	C_x [pF]
700	370	330
450	100	350
500	100	400
900	545	355
545	200	345

Tab. 3: Nastavené s přesností 5 pF hodnoty kapacity C_1 kapacitního normálu Tesla a společné kapacity C_2 kapacitního normálu Tesla a paralelně zapojeného neznámého kondenzátoru při rezonance v obvodu. C_x je nalezená hodnota kapacity neznámého kondenzátoru s chybou 7 pF nalezenou jako chyba nepřímého měření.

Pak výslednou hodnotu kapacity neznámého kondenzátoru C_x jsme našli jako aritmetický průměr a statistickou chybu jako chybu aritmetického průměru [4]:

$$C = \left(356 \pm (7)_{\text{syst}} \pm (12)_{\text{stat}} \right) \text{ pF}.$$

6 Diskuze

Při hledání frekvence vlastních kmitů RLC obvodu pro hodnoty $R = 50 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ a $C = 500 \text{ pF}$ jsme považovali měřené hodnoty za přesné, pak chyba výsledné hodnoty f_{osc} je jen statistickou chybou. Proto relativní chyba činí $< 0,2\%$. To má za následek velkou vzdálenost ($\geq 31\sigma$) mezi nalezenou hodnotou frekvenci $f_{\text{osc}} = (212,6 \pm 0,4) \text{ kHz}$ a teoretické spočítanou $f_{\text{teor}} = 225,08 \text{ kHz}$. Pro zlepšení výsledku šlo by změřit hodnotu chyby měření osciloskopu. Během měření jsme tuto hodnotu bohužel nezměřili. Jinak hodnoty se od sebe liší jen o 6%, což můžeme považovat za ověření teoretické předpověděné hodnoty.

Při porovnání Obr. 3 (vpravo) na kterém obě křivky byly vycentrovány v bode $\Delta f = 0$ s Obr. 3 je vidět, že naměřené křivky celkem odpovídají teoretickému popisu. Maximální amplituda proudu a hodnota činitele jakosti při vsouvání jádra se snižují. Hodnota indukčnosti cívky s jádrem $L_2 = (0,72 \pm 0,06) \text{ mH}$ je přibližně o 30% menší než indukčnosti cívky bez jádra $L_1 = 1 \text{ mH}$. Z toho můžeme určit, že hodnota relativní permeability jádra je $\mu = 0,72 \pm 0,06$, což odpovídá diamagnetiku.

Pravděpodobně při určení hodnotu kapacity C_2 pro měření kapacity neznámého kondenzátoru mohlo docházet k velkým chybám. Není snadno určit přesně hodnotu kapacity C_2 , pro kterou při zadané frekvenci nastává rezonance. Dostali jsme hodnotu kapacity neznámého kondenzátoru $C = \left(356 \pm (7)_{\text{syst}} \pm (12)_{\text{stat}} \right) \text{ pF}$, nebo po složení chyb podle vzorce pro skládání chyb [4] $C = (356 \pm 14) \text{ pF}$. Z výsledku je vidět, že hodnota statistické chyby je skoro dvakrát větší hodnoty systematické chyby, tím pádem zvýšením počtu měření by šlo výsledek zpřesnit. Při porovnání vypočtené hodnoty kondenzátoru se skutečnou hodnotou $C = 396 \text{ pF}$ je vidět, že hodnoty od sebe vzdáleny $\leq 2,85\sigma$, tím pádem hodnoty můžeme považovat za shodné.

7 Závěr

V domácí přípravě jsme vypsali diferenciální rovnice pro mechanický a elektrický harmonický oscilátor (viz Příloha). Porovnáním členů jsme určili, že indukčnost odpovídá setrvačné hmotnosti, odpor odpovídá tlumení a převrácena hodnota kapacity odpovídá pružnosti.

Sestavili jsme sériový rezonanční obvod dle Obr. 2. Pozorováním vlivu změny parametrů R , L a C na obvod jsme zjistili, že změna hodnot těchto parametrů vyvolává stejné změny v elektrickém oscilátoru jako změna parametrů δ , m a k v mechanickém oscilátoru. Pak jsme stanovili frekvenci vlastních kmitů RLC obvodu pro hodnoty $R = 50 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ a $C = 500 \text{ pF}$ na $f_{\text{osc}} = (212,6 \pm 0,4) \text{ kHz}$. Teoretické očekávanou hodnotu vlastní frekvence kyvadla jsme stanovili pomocí Thomsonova vzorce (1) na $f_{\text{teor}} = 225,08 \text{ kHz}$. Hodnoty se od sebe liší o 6% a nalezená chyba frekvenci vlastních kmitů příliš malá ($< 0,2\%$).

Zobrazili jsme proudovou rezonanční křivku na osciloskopu a zjistili, že při zasouvání jádra do cívky se zmenšovala maximální amplituda proudu. Na základě toho odhadli jsme magnetický charakter jádra jako diamagnetický.

Proměřili jsme proudovou rezonanční křivku v závislosti na frekvenci f . Měření jsme provedli dvakrát: pro vzduchovou cívku a cívku s jádrem. Obě rezonanční křivky jsme vynesli do společného grafu na Obr. 3 (vlevo) a fitováním stanovili kvadraty činitelů jakosti pro obvod s vzduchovou cívkou na $Q_1^2 = 25 \pm 2$ a pro obvod s cívkou s jádrem na $Q_2^2 = 9,5 \pm 0,2$. Na základě toho jsme určili indukčnost cívky s jádrem $L = (0,72 \pm 0,06) \text{ mH}$.

Určili jsme kapacitu neznámého kondenzátoru, o němž víme, že má kapacitu menší, než je maximální hodnota kapacity kondenzátoru Tesla $C = \left(356 \pm (7)_{\text{syst}} \pm (12)_{\text{stat}}\right) \text{ pF}$.

Literatura

- [1] Návod - Sériový a vázaný rezonanční obvod - https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435412/mod_resource/content/9/Návod-Rezonanční-obvody-181119.pdf [cit.6.12.2021]
- [2] Electronics tutorials - <http://www.electronics-tutorials.ws/accircuits/series-resonance.html> [cit.6.12.2021]
- [3] Kolektiv KF FJFI CVUT, Manuál k frekvenčnímu generátoru - <http://praktikum.fjfi.cvut.cz/mod/resource/view.php?id=3178> [cit.6.12.2021]
- [4] Základy fyzikálních měření, prezentace - <https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf> [cit.6.12.2021]

Příloha

8 Domácí příprava

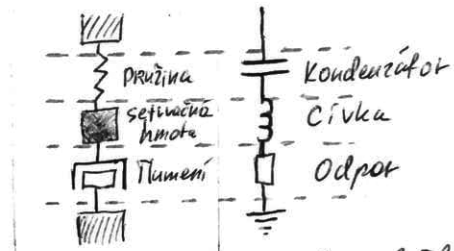
DŮ: diferenciální rovnice pro:

mechanický harmonický oscilátor: $m\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + kx = 0$

elektrický harmonický oscilátor: $L\ddot{I} + RI + \frac{1}{C}I = 0$

Pokud porovnáme členy těchto rovnic, můžeme si všimnout, že indukčnost L odpovídá setrvačné hmotnosti m při mechanických kmitech, R odpovídá tlumení a $\frac{1}{C}$ pružnosti (v případě mechanického oscilátoru na Obr. 1)

Pak z analogie s mechanickým lagradlem můžeme definovat:
frekvenci volných kmitů $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$,
dektament $\delta = \frac{R}{2L}$.



Obr. 1: Ekvivalence mechanických a elektrických kmitů.