FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM I
FJFI ČVUT v Praze

Dynamika rotačního pohybu

Číslo úlohy:	**2**	Skupina:	**2**
Kruh:	**Čtvrtek**	Jméno:	**Denis Krapivin**
Datum měření:	**30.09.2021**	Kolega:	**Kseniia Politskovaia**
Klasifikace:			

1 Pracovní úkoly

1. DÚ V přípravě odvoďte vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti válce a dutého válce.
2. Změřte momenty setrvačnosti přiložených rotačních objektů experimentálně a porovnejte je s hodnotami z teoretických vzorců. Použijte disk, disk + prstenec a pomocí nich stanovte moment setrvačnosti samotného prstence.
3. Změřte moment setrvačnosti disku, umístěného na dráze mimo osu rotace a pomocí výsledků z předchozího úkolu ověřte platnost Steinerovy věty.
4. Ověřte zákon zachování momentu hybnosti. Do protokolu přiložte graf závislosti úhlové rychlosti rotace na čase.
5. Změřte rychlost precese gyroskopu jak přímo senzorem, tak i nepřímo z měření rychlosti rotace disku. Obě hodnoty porovnejte.

2 Pomůcky

Rotating platform PASCO ME-8951 (báze a rotační dráha s dvěma závažími),"A" base rotational adapter PASCO CI-6690, přídavný disk PASCO ME-8953 a prstenec PASCO ME-, stojan s kladkou, závaží na niti, PC, program pro datový sběr Data Studio, USB Link PASCO PS-2100A, dva rotační senzory PASCO PS-2120, gyroskop PASCO ME-8960, přídavný disk gyroskopu ME-8961, váhy, posuvné měřítko.

3 Teorie

3.1 Moment setrvačnosti

Fyzikální veličina moment setrvačnosti I tělesa vzhledem k dané ose charakterizuje rozložení hmotnosti tělesa kolem příslušné osy otáčení. Zjednodušeně lze říci, že u rotačních pohybů tělesa „hraje stejnou roli“ jako samotná hmotnost m u pohybů posuvných.

Pomocí definice vypočítáme moment setrvačnosti válce I_1 a dutého válce I_2 [1]. Podrobné výpočty [Obr. 1];

$$I_1 = \int_0^R r^2\,dm = \frac{MR^2}{2} \qquad I_2 = \int_{R_1}^{R_2} r^2\,dm = \frac{M(R_1^2+R_2^2)}{2} \tag{1}$$

Tyto teoretické výsledky budou porovnány s experimentálními výsledky. Experimentální stanovení momentu setrvačnosti provedeme podle obrázku [Obr. 2].

Abychom experimentálně určili moment setrvačnosti, najdeme vztah mezi momentem setrvačnosti I a úhlovým zrychlením ε. Ze strany zátěže působí na disk konstantní síla, díky které se disk otáčí. Na jedné straně máme moment síly N [2].

$$N = I\varepsilon \tag{2}$$

Z uspořádání experimentu je $N = rF$, kde r je poloměr roztáčené kladky spojené s kotoučem a F je síla napínající vlákno. Pomocí vztahu mezí lineárním a úhlovým zrychlením $a = \varepsilon r$ získáme vztah mezi momentem setrvačnosti I a úhlovým zrychlením ε [3].

$$I = rm(\frac{g}{\varepsilon} - r) \tag{3}$$

Kde r je poloměr roztáčené kladky spojené s kotoučem, m je hmotnost závaží, g je tíhové zrychlení.

3.2 Steinerova věta

Steinerova věta umožňuje vypočítat moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy, která neprochází jeho těžištěm. Za předpokladu, že I_t představuje moment setrvačnosti tělesa k ose procházející těžištěm, M hmotnost tělesa a d vzdálenost osy rotace od těžiště, potom lze moment setrvačnosti I k dané ose vypočítat následovně [4].

$$I = I_t + Md^2 \tag{4}$$

3.3 Moment hybnosti

Moment hybnosti L má při rotačním pohybu podobný význam jako hybnost při pohybu přímočarém. Podobně jako je hybnost součinem hmotnosti a rychlosti v případě translačního pohybu, tak je moment hybnosti součinem momentu setrvačnosti I a úhlové rychlosti ω v případě rotačního pohybu [5].

$$L = I\omega \tag{5}$$

Celkový moment hybnosti izolované soustavy těles či hmotných bodů při mechanickém ději zůstává konstantní.

3.4 Uhlová rychlost precese

Pro měření úhlové rychlosti precese můžeme použít horizontální upevněný na kolmé pohyblivé ose setrvačník. Vyvedeme setrvačník z rovnováhy přídavným závažím a budeme měřit frekvenci precesi.

Umístěním přídavného závaží o hmotnosti m do vzdálenosti d od gyroskopu začne působit moment síly N, který setrvačník vyvede z rovnováhy [6].

$$N = mgd = \frac{dL}{dt} \tag{6}$$

Kde L je moment setrvačnosti disku, který se točí s úhlovou rychlostí ω.

Pro malé odchylky osy otáčení od původního směru platí $dL = Ld\phi$.

Tedy vzorec pro teoretický výpočet úhlové rychlosti precese Ω je [7].

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{N}{L} = \frac{mgd}{I\omega} \tag{7}$$

3.5 Skládání měření s různou přesností

Zpřesněnou hodnotu z dvou a více měření, které mají různou chybu, určíme jako vážený průměr $\bar{t}$ [??]. Upřesněnou chybu měření $\sigma_{\bar{t}}$ pak určíme pomocí chyb jednotlivých měření a jejich odchylky od váženého průměru [8].

$$\bar{t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i} \qquad \sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}} \qquad p_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{8}$$

3.6 Celková chyba

Celková chyba σ_c souvisí s náhodnými chybami σ_{x_i} vztahem [9].

$$\sigma_c = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (\sigma_{x_1})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\sigma_{x_2})^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 (\sigma_{x_n})^2} \tag{9}$$

4 Postup měření

4.1 Moment setrvačnosti

Naším úkolem je najít momenty setrvačnosti disku a prstence. Změříme vše hodnoty, které budeme potřebovat pro výpočty. Zaprvé provedeme teoretický výpočet momentu setrvačnosti disku a prstence. Dale sestavíme aparaturu podle obrázku [Obr. 1]. Zavěsíme závaží na nit, tím se kotouč roztočí. Rotačním sensorem změříme úhlovou rychlost a pomocí tečny ke grafu úhlové rychlostí najdeme úhlové zrychlení. Opakujeme snímání desetkrát. Stejně postupujeme i s diskem a prstencem. Zpřesněnou hodnotu úhlového zrychlení dosadíme do vzorce a najdeme moment setrvačnosti. Moment setrvačnosti prstence dostaneme odečtením hodnoty momentu setrvačnosti pro disk od hodnoty pro disk s prstencem.

4.2 Steinerova věta

Steinerova veta Pro ověření Steinerovy věty používáme stejnou podstavu, ale místo disku umístíme rotační dráhu. Z teorie najdeme moment setrvačnosti disku mimo osu. Změříme úhlové zrychlení rotační dráhy, pak na jednu stranu umístíme disk z minulého experimentu. Provedeme měření úhlového zrychlení stejným způsobem jako v minulé úloze pomocí DataStudio. Měření opakujeme desetkrát. Najdeme moment setrvačnosti dráhy a disku s dráhou. Od výsledku nutné odečíst moment setrvačnosti dráhy.

4.3 Moment hybnosti

Umístíme na dráze dvě stejná závaží spojené provázkem. Provázek protáhneme přes kolečko na centrálním sloupku. Určíme úhlové rychlost systému pro dva různé případy: závaží se nacházejí ve vzdálenosti 9 sm od rotační osy, a ve vzdálenosti 20 sm. Pro lepší přesnost provedeme měření desetkrát. Dále natáhneme provázek a roztočíme soustavu na konstantní rychlost. Pak zapneme snímání dát v Data Studio a za několik vteřin necháme závaží "odjet" do druhé polohy. Měření opakujeme třikrát.

4.4 Uhlová rychlost precese

Umístíme závaží na osu gyroskopu. Roztočíme gyroskop a zároveň držíme osu gyroskop vodorovně. Zapneme snímání dát a pustíme osu gyroskopu. Z jednoho grafu je přímo vidět hodnotu úhlové rychlostí precese. Ze druhého dostaneme hodnotu úhlové rychlostí. Pomocí změřeného momentu setrvačnosti disku najdeme rychlost precese.

5 Zpracování dat

5.1 Moment setrvačnosti

Měříme hodnoty, které jsou nutné pro teoretický výpočet momentu setrvačnosti: hmotnost disku M_d, hmotnost prstenců M_p, hmotnost disku a prstenců M_{dp}, poloměr disku R_d, poloměr prstenců vnitřní R_1 a vnější R_2. Přesnost vah podle datasheetu je $\pm(0,2\% + 0,0002)\,kg$. Přesnost měření délky bereme jako $0,005\,m$.

$$M_d = (1,428 \pm 0,003)\,kg \qquad M_p = (1,427 \pm 0,003)\,kg \qquad M_{dp} = (2,855 \pm 0,006)\,kg$$

$$R_d = (0,115 \pm 0,005)\,m \qquad R_1 = (0,062 \pm 0,005)\,m \qquad R_2 = (0,052 \pm 0,005)\,m$$

Najděte očekávaný moment setrvačnosti pro disk I_d, prstenec I_p a pro disk s prstenem I_dp podle [1]. Chybu měření najdeme pomocí [9].

$$\sigma_{I_d} = \sqrt{\left(\frac{R^2}{2}\right)^2 (\sigma_{M_d})^2 + (MR)^2\,(\sigma_{R_d})^2} = 0,0008\;kg\,m^2 \qquad\qquad \sigma_{I_p} = 0,0012\;kg\,m^2$$

$$I_d = (0,0094 \pm 0,0008)\,kg\,m^2 \qquad I_p = (0,0047 \pm 0,0012)\,kg\,m^2$$

K experimentálnímu zjištění momentu setrvačnosti potřebujeme hmotnost zátěže m, poloměr kladky r a hodnotu tíhového zrychlení g.

$$m = (0,2000 \pm 0,001)\,kg \qquad r = (0,022 \pm 0,005)\,m \qquad g = (9,814)\,ms^{-2}$$

Výslednou hodnotu ze všech hodnot pro disk ε_d a disk s prstencem ε_{dp} našli jsme podle [8] [Tab. 1].

$$\varepsilon_d = (3,045 \pm 0,006)\,rad\,s^{-2} \qquad \varepsilon_{dp} = (1,898 \pm 0,004)\,rad\,s^{-2}$$

$\varepsilon[rad\,s^{-2}]$	2.96	2.87	3.08	3.07	3.15	3.09	3.01	3.01	3.08	3.02
$\sigma[rad\,s^{-2}]$	0.017	0.019	0.017	0.04	0.017	0.015	0.019	0.018	0.018	0.019

$\varepsilon[rad\,s^{-2}]$	1.94	1.99	1.98	1.83	2.02	1.92	1.87	1.78	1.79	1.89
$\sigma[rad\,s^{-2}]$	0.011	0.017	0.019	0.014	0.013	0.012	0.012	0.013	0.015	0.013

Tab. 1: Naměřené a vypočtené hodnoty úhlového zrychlení.

Pak podle [3] a [9] našli jsme moment setrvačnosti pro disk I_d a disk s prstenem I_{dp}:

$$I_d = (0,014 \pm 0,003)\,kg\,m^2 \qquad I_{dp} = (0,023 \pm 0,005)\,kg\,m^2$$

Díky aditivitě při zachování stejné osy rotace můžeme najít moment setrvačnosti samotného prstence I_p:

$$\underline{I_p = I_{dp} - I_d = (0,009 \pm 0,005)\,kg\,m^2}$$

5.2 Steinerova věta

Pro ověření platnosti Steinerové věty potřebujeme změřit vzdálenost osy rotace od těžiště d:

$$d = (0,2 \pm 0,005)\,m$$

$$I = I_d + Md^2 = (0,071 \pm 0,001)\,kg\,m^2$$

$\varepsilon[rad\,s^{-2}]$	2.35	2.34	2.28	2.40	2.45
$\sigma[rad\,s^{-2}]$	0.02	0.02	0.03	0.01	0.01

$\varepsilon[rad\,s^{-2}]$	0.356	0.356	0.389	0.364	0.375	0.374	0.365	0.371	0.373	0.373
$\sigma[rad\,s^{-2}]$	0.005	0.004	0.005	0.008	0.004	0.004	0.004	0.005	0.004	0.004

Tab. 2: Naměřené a vypočtené hodnoty úhlového zrychlení.

Stejným postupem najdeme ε a náhodné chybu měření σ pro dráhu a dráhu s diskem pomocí [8] [Tab. 2]:

$$\varepsilon_{dr} = (2,390 \pm 0,008)\,rad\,s^{-2} \qquad \varepsilon_{dd} = (0,370 \pm 0,001)\,rad\,s^{-2}$$

Pak použijme [3] a [9] pro nalezení momentu setrvačnosti dráhy I_d a dráhy s diskem I_{dd}.

$$I_{dr} = (0,018 \pm 0,005)\,kg\,m^2 \qquad I_{dd} = (0,117 \pm 0,027)\,kg\,m^2$$

$$I = I_{dd} - I_{dr} = (0,099 \pm 0,027)\,kg\,m^2$$

5.3 Moment hybnosti

Pro ověření platnosti zákonu zachování momentu hybnosti (též zákonu zachování točivosti) najdeme hodnoty úhlového zrychlení pro případ, kdy jsou závaží umístěna blízko osy otáčení ε_1 a na okrajích dráhy ε_2 [Tab. 3].

$\varepsilon_1[rad\,s^{-2}]$	1.6	1.63	1.61	1.62	1.64	1.59	1.56	1.63	1.62	1.61
$\sigma_1[rad\,s^{-2}]$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.04	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02

$\varepsilon_2[rad\,s^{-2}]$	0.811	0.823	0.832	0.809	0.825	0.825	0.804	0.808	0.822	0.827
$\sigma_2[rad\,s^{-2}]$	0.007	0.006	0.009	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005

Tab. 3: Naměřené a vypočtené hodnoty úhlového zrychlení.

$$\varepsilon_1 = (1,606 \pm 0,003)\,rad\,s^{-2} \qquad \varepsilon_2 = (0,817 \pm 0,001)\,rad\,s^{-2}$$

Najdeme hodnoty momentů setrvačnosti pro první I_1 a druhý I_2 případ pomocí vztahu. V tomto případě nás zajímá hodnota poměru momentů setrvačnosti $\frac{I_1}{I_2}$, kterou najdeme pomocí [9]:

$$I_1 = (0,027 \pm 0,006)\,kg\,m^2 \qquad I_2 = (0,053 \pm 0,012)\,kg\,m^2 \qquad \underline{\frac{I_1}{I_2} = (0,51 \pm 0,012)}$$

Pokud platí zákon zachování momentu hybnosti poměr momentů setrvačnosti $\frac{I_1}{I_2}$ by měl byt roven poměru úhlových rychlostí $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Teto rychlostí najdeme proložením konstantní funkcí hodnot úhlových rychlostí pomocí programu GNUplot [Obr. 3].

Abychom určili výslednou hodnotu poměru úhlových rychlostí co nejpřesněji, změříme $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ třikrát [Tab. 4].

	A	B	C
$\omega_1[rad\,s^{-1}]$	9.30 ± 0.02	10.35 ± 0.02	12.2 ± 0.03
$\omega_2[rad\,s^{-1}]$	3.99 ± 0.01	4.57 ± 0.01	5.10 ± 0.02
$\omega_2 \backslash \omega_1$	0.43 ± 0.02	0.44 ± 0.02	0.42 ± 0.03

Tab. 4: Naměřené a vypočtené hodnoty úhlových rychlostí.

Hodnotu poměru úhlových rychlostí $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ určeme skládáním měření s různou přesností [9]:

$$\underline{\frac{\omega_2}{\omega_1} = (0.43 \pm 0.03)}$$

5.4 Uhlová rychlost precese

Hodnoty pro výpočet uhlové rychlosti precese: hmotnost závaží m, vzdálenosti závaží od osy gyroskopu d, poloměr kladky detektoru R_d, poloměr kladky disku R:

$m = (0,0470 \pm 0,0004) kg \qquad d = (0,191 \pm 0,005) m \qquad R_d = (0,025 \pm 0,005) m \qquad R = (0,028 \pm 0,005) m$

Pomocí rotačního senzoru připevněného k ose gyroskopu změříme rychlost precese. Výsledky měření jsou na grafu [Obr. 4]. Najdeme průměrnou hodnotu úhlové rychlosti precese ω_d aproximací konstantní funkcí:

$$\Omega_d = (0,191 \pm 0,009)\, rad\, s^{-1}$$

Protože kladka detektoru má jiný poloměr R_d než kladka disku R, musíme získanou rychlost ω_d přepočítat. Pomocí poloměrů kladek stanovíme úhlovou rychlost disku ω ze vztahu:

$$\Omega_1 = \frac{R_d}{R}\Omega_d = (0,17 \pm 0,05)\, rad\, s^{-1}$$

Určeme rychlosti precese ze vztahu [7] odvozené v teoretické části. Hodnotu úhlové rychlosti disku ω_k dostaneme aproximaci naměřených dat konstantní funkci [Obr. 5]. Stejně je nutně přepočítat:

$$\omega_k = (31,56 \pm 0,05)\, rad\, s^{-1}$$

$$\omega = \frac{R_d}{R}\omega_k = (28,18 \pm 0,05)\, rad\, s^{-1}$$

Hodnotu uhlové rychlosti precese z naměřených dat najdeme pomocí [7] a [9]. Hodnotu momentu setrvačnosti disku I vezmeme z první úlohy:

$$\Omega_2 = \frac{d\phi}{dt} = \frac{N}{L} = \frac{mgd}{I\omega} = (0,22 \pm 0,06)\, rad\, s^{-1}$$

6 Diskuze

Porovnáním výsledků momentů setrvačnosti pro disk a prstenec jsme zjistili, že hodnoty se liší od teoretické spočítaných skoro o třetinu. Může to být důsledkem nepřesností měření některých hodnot (pravděpodobně délek), nebo kvůli silnému vlivu tření. Při našich výpočtech jsme zanedbali všechny síly kromě gravitační. Účinek tření lze snížit použitím například oleje na osu disku a osu kladky.

Co se týka Steinerovy vety, rozdíl mezi očekávanou a naměřenou hodnotou je skoro 40%, ale přesnost experimentálního měření je velmi nízká, tím pádem výsledky se docela shodují.

Výsledky pokusů velmi dobře demonstrují platnost zákonů zachování momentu hybnosti. Poměr úhlových rychlosti všech třech pokusů se shoduje s poměrem momentu setrvačnosti. Ze grafu [Obr. 3] je vidět, že úhlová rychlost opravdu velmi rychle klesá , což určitě má vliv na výsledky měření.

Pro měření úhlové rychlostí precese byla použita hodnota momentu setrvačnosti disku z první úlohy. Ale disk gyroskopu se liší svými parametry od tohoto disku. Výsledky u přímého a nepřímého měření ale jsou velmi podobné až na hodnotu chyby.

7 Závěr

Ověřili jsme vztahy pro moment setrvačnosti disku a prstence, platnost Stejnerove věty a zákonů zachování momentu hybnosti. Změřili úhlovou rychlost precese gyroskopu pomocí metody přímého a nepřímého měření.

Literatura

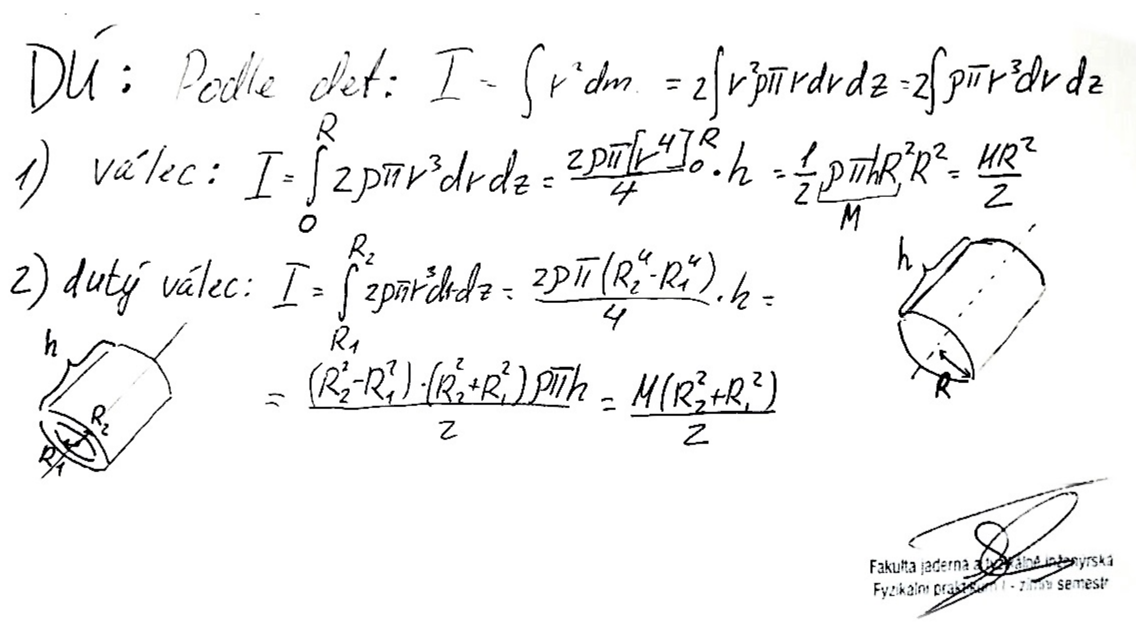
[1] doc. Ing. Ivan Stoll, CSc., Mechanika, Vydavatelství ČVUT Praha, 2003

[2] doc. Ing Ivan Stoll, CSc., doc. Ing. Jiří Tolar, CSc., Teoretická fyzika, Vydavatelství ČVUT Praha, 1984

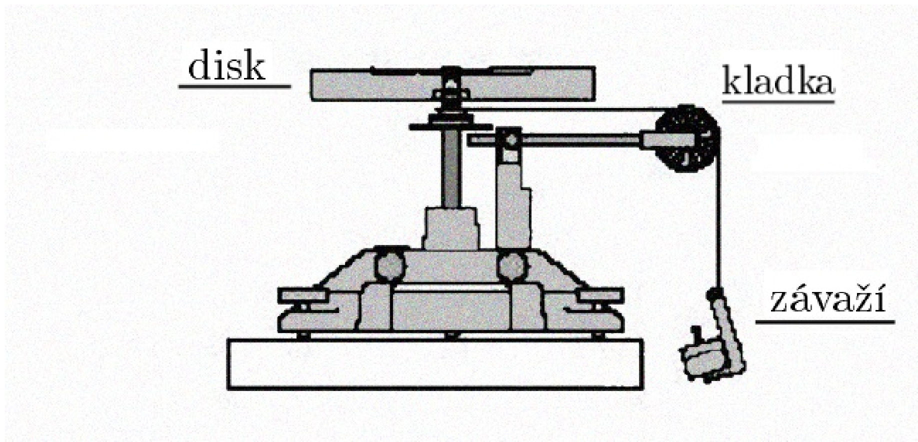
[3] Základy fyzikálních měření, prezentace - https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf [cit.05.10.2021]

[4] Základy teorie chyb a zpracování fyzikálních měření - https://http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/teoriechyb.pdf [cit.05.10.2021]

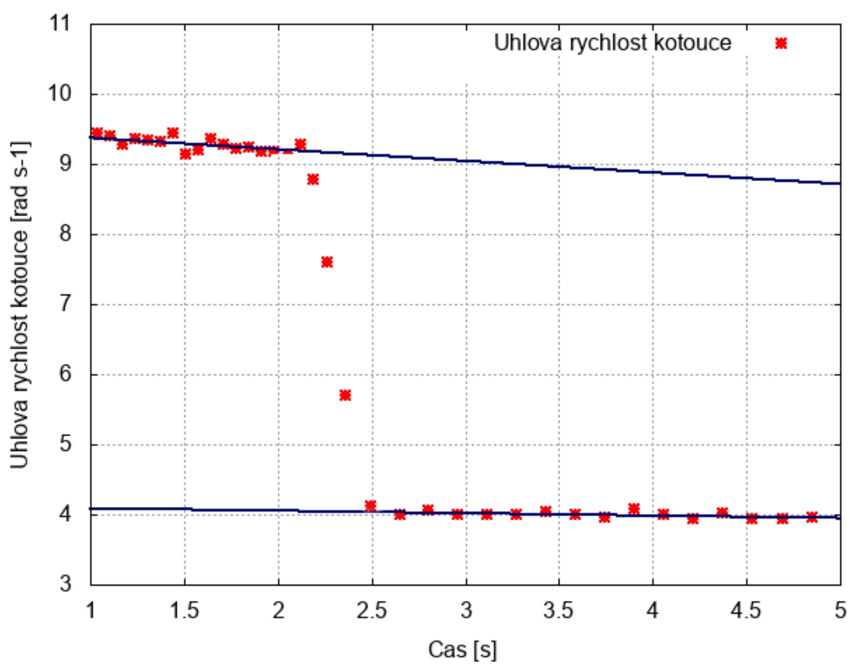
8 Grafy



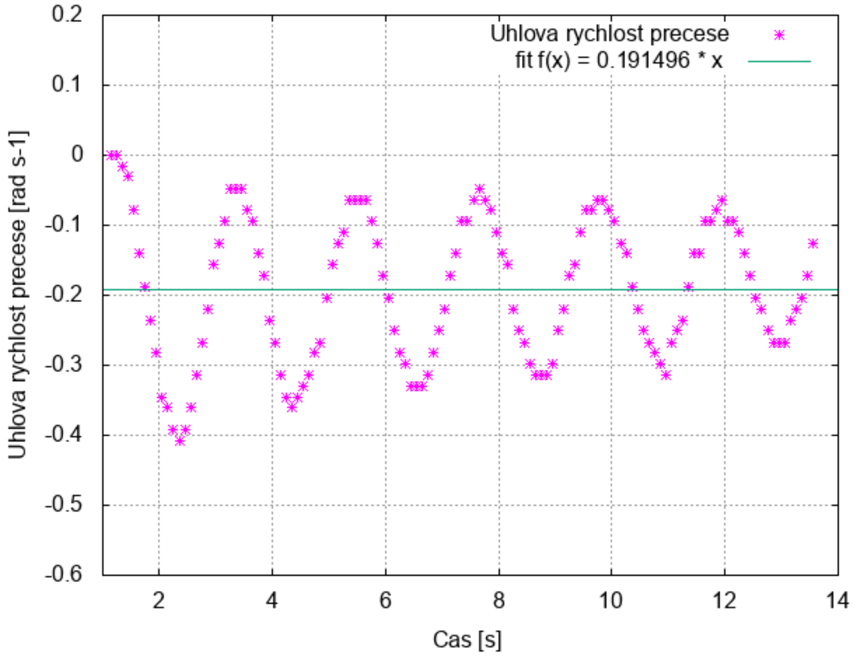
Obr. 1: Odvození vzorců pro výpočet momentu setrvačnosti



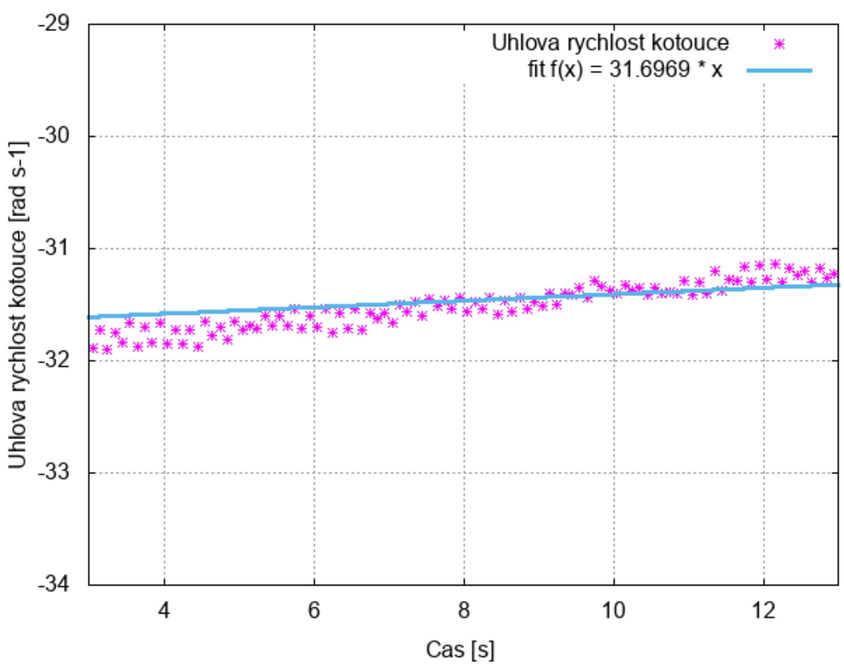
Obr. 2: Experimentální uspořádání měření momentu setrvačnosti



Obr. 3: Časový průběh uhlové rychlosti precese



Obr. 4: Uhlová rychlost precese



Obr. 5: Graf znázorňující uhlovou rychlost kotouče