

Číslo úlohy: **6** Skupina: **4**
Kruh: **Středa** Jméno: **Denis Krapivin**
Datum měření: **16.3.2022** Kolega: **Kseniia Politskovaia**
Klasifikace:

1 Pracovní úkoly

1. **DŮ:** V přípravě odvoďte rovnici (2), načrtněte chod paprsků a zdůvodněte nutnost podmínky $e > 4f$. Zjistěte, co je konvenční zřaková vzdálenost.
2. Určete ohniskovou vzdálenost spojné čočky +200 ze znalosti polohy předmětu a jeho obrazu (pro minimálně pět konfigurací, proveďte též graficky) a Besselovou metodou.
3. Změřte ohniskovou vzdálenost mikroskopického objektivu a Ramsdenova okuláru Besselovou metodou. V přípravě vysvětlete rozdíl mezi Ramsdenovým a Huygensovým okulárem.
4. Změřte zvětšení lupy při akomodaci oka na konvenční zřakovou vzdálenost. Stanovte z ohniskové vzdálenosti lupy zvětšení při oku akomodovaném na nekonečno.
5. Určete polohy ohniskových rovin tlustých čoček (mikroskopický objektiv a Ramsdenův okulár) nutných pro výpočet zvětšení mikroskopu.
6. Z mikroskopického objektivu a Ramsdenova okuláru sestavte na optické lavici mikroskop a změřte jeho zvětšení.
7. Ze spojky +200 a Ramsdenova okuláru sestavte na optické lavici dalekohled. Změřte jeho zvětšení přímou metodou.
8. Výsledky měření zvětšení mikroskopu a dalekohledu porovnejte s hodnotami vypočítanými z ohniskových vzdáleností.

2 Pomůcky

Dvě optické lavice (větší a menší) s jezdcí a držáky čoček, světelný zdroj pro optickou lavici, mikroskopický objektiv, Ramsdenův okulár v držáku s Abbeho kostkou, spojné čočky +200, matnice, clona se šípkou, pomocný světelný zdroj s milimetrovou stupnicí, křížový vodič s objektivovým mikrometrem (se stupnicí o velikosti 1 mm dělenou po 0,01 mm), pomocný mikroskop s měřicím okulárem, světelný zdroj pro optickou lavici s kvádříkem (se stupnicí o velikosti 5 mm, dělenou po 0,1 mm), pomocný dalekohled, měřítko (25 cm), trojnožka, stupnice na zdi.

3 Teorie

3.1 Určení ohniskové vzdálenosti

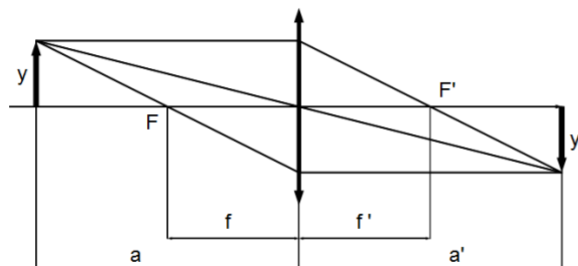
Při studiu optických čoček je důležitým pojmem tzv. ohnisková rovina, která obsahuje ohnisko a je kolmá k optické ose. Zobrazují se do ní předměty ležící v nekonečnu. Ohnisková vzdálenost je vzdálenost čočky od jejího ohniska [1].

3.1.1 Měření ohniskové vzdálenosti z polohy předmětu a jeho obrazu

Při měření ohniskové vzdálenosti f tenké spojně čočky (Obr. 1) podle [1] platí čočková rovnice:

$$f = \frac{aa'}{a + a'}, \quad (1)$$

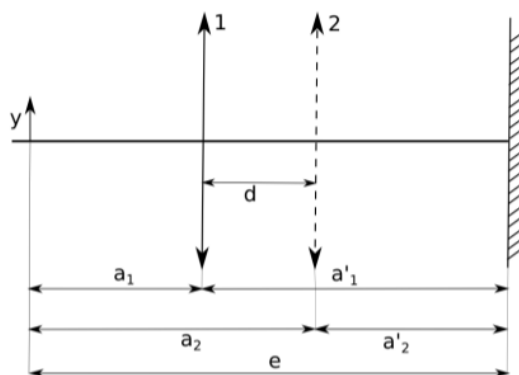
kde a je vzdálenost čočky od předmětu y , a' je vzdálenost obrazu y' od čočky.



Obr. 1: Zobrazení spojnou čočkou. a je vzdálenost čočky od předmětu y , a' vzdálenost obrazu y' od čočky, f a f' jsou ohniskové vzdálenosti, body F a F' jsou přímo ohniska [1].

Jiným způsobem jak můžeme najít ohniskové vzdálenosti f čočky je grafická metoda. Tato metoda spočívá v tom, že na vodorovnou osu x pravoúhlé soustavy souřadnic nanášíme vzdálenost čočky od předmětu a , na svislou osu y pak vzdálenost obrazu a' . Takto vynesené body pak spojíme úsečkou. Pak zjistíme, že se všechny úsečky protínají v jednom bodě. Přitom bude platit, že obě souřadnice tohoto bodu jsou rovny hledané ohniskové vzdálenosti měřené čočky f .

3.1.2 Měření ohniskové vzdálenosti Besselovou metodou



Obr. 2: Určení ohniskové vzdálenosti Besselovou metodou. a_1 , a'_1 , a_2 , a'_2 jsou vzdálenosti čočky od stínítka a od předmětu, d je vzdálenost poloh čočky a e je vzdálenost předmětu od stínítka [1].

Tato metoda je založena na poznatku, že pro jistou pevnou vzdálenost e předmětu a stínítka, na němž se vytváří obraz, existují dvě polohy čočky 1 a 2 (Obr. 2), při nichž dostaneme ostrý obraz. Takový případ může nastat jen v tom případě, kdy splněna nerovnost $e > 4f$ (viz Příloha. Domácí příprava).

Je-li d vzdálenost dvou polohy čočky, kdy je obraz ostrý, můžeme vypočítat ohniskovou vzdálenost f ze vztahu:

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (2)$$

3.1.3 Huygensův a Ramsdenův okulár

Huygensův okulár se skládá ze dvou plankonvexních spojných čoček, mezi nimiž je clona. Umožňuje korekci barevné chyby a dodnes se užívá u laciných přístrojů.

Ramsdenův okulár se skládá ze dvou identických plankonvexních čoček stejné ohniskové vzdálenosti. Jejich vyduté strany jsou přivráceny k sobě. Obě čočky Ramsdenova okuláru jsou od sebe vzdáleny $2/3$ až $3/4$ jejich ohniskové vzdálenosti. Má mnohem menší kulovou vadu než Huygensův okulár. Na rozdíl od Huygensova okuláru má však barevnou vadu.

3.2 Optické přístroje

3.2.1 Lupa

Pod zvětším lupy $Z_{l\infty}$ se obvykle rozumí zvětšení při oku akomodovaném na nekonečno:

$$Z_{l\infty} = \frac{l}{f}, \quad (3)$$

kde l označuje konvenční zrakovou vzdálenost a f předmětovou ohniskovou vzdálenost lupy.

Při akomodaci oka na normální zrakovou vzdálenost zvětšení lupy je větší:

$$Z_{l\text{norm}} = \frac{y'}{y}, \quad (4)$$

kde y je lineární velikost předmětu, y' je lineární velikostí obrazu.

3.2.2 Mikroskop

Mikroskop je tvořen dvěma optickými částmi, okulárem a objektivem. Každá z nich má své vlastní ohniska, vzdálenost bližších ohnisek f_1 a f_2 nazýváme optickým intervalem a značíme Δ . Pak zvětšení mikroskopu Z_m vypočteme jako:

$$Z_m = \frac{\Delta l}{f_1 f_2}, \quad (5)$$

kde l je konvenční zraková vzdálenost.

3.2.3 Dalekohled

Dalekohled je tvořen z objektivu s ohniskovou vzdáleností f_1 a okuláru s ohniskovou vzdáleností f_2 . Zvětšení přístroje se vypočítá podle vztahu:

$$Z_d = \frac{f_1}{f_2}, \quad (6)$$

4 Postup měření

4.1 Určení ohniskové vzdálenosti

4.1.1 Měření ohniskové vzdálenosti spojné čočky +200

Umístíme na optické lavici matnici, spojnou čočku +200, clonu s šipkou a zdroj světla. Polohu matnice nebudeme během měření měnit. Zvolíme libovolnou vzdálenost zdroje světla od matnice a hledáme polohu čočky, pro kterou budeme na matnici pozorovat ostrý obraz šipky. Pro vhodnou polohu čočky změříme vzdálenost od matnice do čočky a od čočky do matnice. Pak změníme polohu zdroje světla a postup opakujeme. Celkem provedeme 5 měření.

Pro měření ohniskové vzdálenosti Besselovou metodou umístíme zdroj světla ve více než 4 ohniskové vzdálenosti, které jsme našli z předchozího měření. Posouváním čočky po lavici určíme dvě polohy, ve kterých se na matnici vytvoří ostrý obraz. Zaznamenáme vzdálenost těchto dvou bodů a vzdálenost mezi matnicí a zdrojem světla. Měření provedeme celkem 5krát.

4.1.2 Měření ohniskové vzdálenosti mikroskopického objektivu a Ramsdenova okuláru

Umístíme na optické lavici pomocný mikroskop, Ramsdenův okulár, clonu s šípkou a skleněný kvádřík se stupnicí. Před použitím pomocného mikroskopu určíme, v jaké vzdálenosti leží jeho předmětová rovina. Tuto vzdálenost je nutno odečíst od vzdáleností pomocného mikroskopu a čočky. Dálnější měření provádíme stejné jako v minulé úloze.

4.2 Optické přístroje

4.2.1 Lupa

Sestavíme na optické lavici lupu z Ramsdenova okuláru a skleněného kvádříku se stupnicí. Jako srovnávací stupnici použijeme milimetrové měřítko, které umístíme kolmo na Abbeho kostku ve vzdálenosti 25 cm od optické lavice. Tato kostka je připevněna k Ramsdenovu okuláru. Zvětšení lupy pak najdeme jako poměr velikostí obou stupnic.

4.3 Ohniskové roviny mikroskopického objektivu a Ramsdenova okuláru

Sestavíme na optické lavici systém z pomocného dalekohledu, Ramsdenova okuláru a skleněného kvádříku se stupnicí. Zvolíme libovolnou vzdálenost zdroje světla od dalekohledu a hledáme polohu čočky, pro kterou budeme v dalekohledu pozorovat ostrý obraz kvádříku. Tuto polohu zaznamenáme a postup opakujeme. Celkem provedeme 3 měření. Zaměníme Ramsdenův okulár za mikroskopický objektiv a stejným postupem provedeme další 3 měření. Mikroskopický objektiv má ohniskové roviny na opačné straně než Ramsdenův okulár, proto objektiv pro toto měření otočíme.

4.3.1 Mikroskop

Sestavíme na optické lavici mikroskop z Ramsdenova okuláru, mikroskopického objektivu a objektivového mikrometru. Stejně jako v minulé úloze umístíme kolmo na lavici ve vzdálenosti 25 cm od Abbeho kostky pomocný zdroj světla s milimetrovou stupnicí. Opět zaznamenáme poměr velikostí obou stupnic.

4.3.2 Dalekohled

Dalekohled sestavíme na menší optické lavici na trojnožku z Ramsdenova okuláru a čočkou +200. Jako předmět používáme stupnici dělenou po 1 cm umístěnou svisle na stěně ve vedlejší místnosti. Jako referenční stupnici používáme měřítko ve vzdálenosti 25 cm od Abbeho kostky. Jako v minulé úloze zaznamenáme poměr velikostí obou stupnic.

5 Zpracování dat

5.1 Určení ohniskové vzdálenosti

5.1.1 Měření ohniskové vzdálenosti spojné čočky +200 z polohy předmětu a jeho obrazu

Naměřené hodnoty vzdálenosti předmětu a a ostrého obrazu předmětu a' od čočky jsou v Tab. 1. Chyby těchto vzdáleností jsou určeny jako chyba nepřímého měření [2] na $\sigma_a = \sigma_{a'} = 0,07$ cm. Hodnoty ohniskové vzdálenosti f_i jsou nalezeny podle (1), příslušná chyba je chybou nepřímého měření.

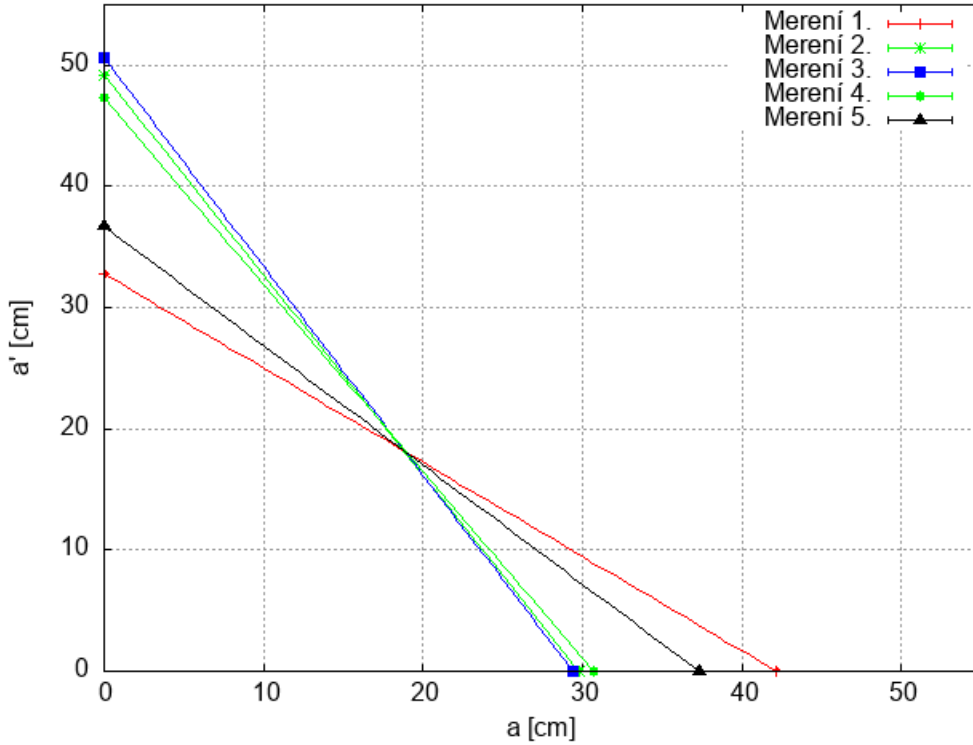
Výslednou hodnotu ohniskové vzdálenosti čočky f_1 jsme našli jako aritmetický průměr hodnot f_i pro jednotlivé měření a chybu jako chybu aritmetického průměru [2]:

$$f_1 = (18,55 \pm 0,04) \text{ cm},$$

což odpovídá situaci na Obr. 3 pro grafickou metodu hledání ohniskové vzdálenosti.

a [cm]	a' [cm]	f_i [cm]
32,8	42,2	$18,46 \pm 0,02$
49,2	29,8	$18,56 \pm 0,04$
50,6	29,4	$18,60 \pm 0,04$
47,3	30,7	$18,62 \pm 0,04$
36,7	37,3	$18,50 \pm 0,02$

Tab. 1: Naměřené hodnoty vzdálenosti předmětu a a ostrého obrazu předmětu a' od čočky s chybami $\sigma_a = \sigma_{a'} = 0,07$ cm, f je vypočtená hodnota ohniskové vzdálenosti s příslušnou chybou.



Obr. 3: Grafická metoda pro řešení čočkové rovnice. a je vzdálenost čočky od předmětu, a' je vzdálenost obrazu od čočky.

5.1.2 Měření ohniskové vzdálenosti spojné čočky +200 Besselovou metodou

Naměřené hodnoty vzdálenosti předmětu od stínítka e a vzdálenosti d dvou poloh čočky, ve kterých čočka dává ostrý obraz předmětu jsou v Tab. 2. Chyba těchto vzdáleností jsou určeny jako chyba nepřímého měření na $\sigma_d = \sigma_e = 0,07$ cm. Hodnoty ohniskové vzdálenosti f_i jsou nalezený podle (2), příslušná chyba je chybou nepřímého měření.

Výslednou hodnotu ohniskové vzdálenosti čočky f_2 Besselovou metodou jsme našli jako aritmetický průměr hodnot f_i pro jednotlivé měření a chybu jako chybu aritmetického průměru:

$$f_2 = (18,45 \pm 0,02) \text{ cm.}$$

5.1.3 Měření ohniskové vzdálenosti mikroskopického objektivu a Ramsdenova okuláru Besselovou metodou

Vzdálenost předmětové roviny pomocného mikroskopu jsme určili na $p = (24,60 \pm 0,07)$ cm, chyba je chybou nepřímého měření.

d [cm]	e [cm]	f_i [cm]
29,3	84,0	$18,44 \pm 0,02$
38,1	90,0	$18,47 \pm 0,03$
35,2	88,0	$18,48 \pm 0,02$
21,9	80,0	$18,50 \pm 0,02$
15,2	77,0	$18,50 \pm 0,02$

Tab. 2: Naměřené hodnoty vzdálenosti d dvou poloh čočky, ve kterých čočka dává ostrý obraz předmětu při měření ohniskové vzdálenosti čočky Besselovou metodou, e je vzdálenost předmětu od stínítka, chyby $\sigma_d = \sigma_e = 0,07$ cm, f je vypočtená hodnota ohniskové vzdálenosti s příslušnou chybou.

Naměřené a vypočtené hodnoty pro mikroskopický objektiv a Ramsdenův okulár jsou v Tab. 3. d jsou vzdálenosti dvou poloh čoček, ve kterých čočky dávají ostrý obraz předmětu. Vzdálenost kvadriku od pomocného mikroskopu e je uvedena s korekcí na polohu předmětové roviny. Chyba těchto vzdáleností jsou určeny jako chyba nepřímého měření na $\sigma_d = \sigma_e = 0,07$ cm. Hodnoty ohniskové vzdálenosti f_i jsou nalezeny podle (2), příslušná chyba je chybou nepřímého měření.

Mikroskopický objektiv			Ramsdenův okulár		
d [cm]	e [cm]	f_{m_i} [cm]	d [cm]	e [cm]	f_{r_i} [cm]
13,2	18,6	$2,31 \pm 0,05$	5,3	14,2	$3,06 \pm 0,03$
18,2	23,4	$2,31 \pm 0,05$	14,1	21,4	$3,03 \pm 0,04$
8,6	14,4	$2,32 \pm 0,04$	18,3	24,4	$3,05 \pm 0,05$

Tab. 3: Naměřené a vypočtené hodnoty pro mikroskopický objektiv a Ramsdenův okulár. d jsou vzdálenosti dvou poloh čočky, ve kterých čočka dává ostrý obraz předmětu, e je vzdálenost kvadriku od pomocného mikroskopu zmenšená o vzdálenost předmětové roviny $p = (24,60 \pm 0,07)$ cm, chyby $\sigma_d = \sigma_e = 0,07$ cm, f_{m_i} a f_{r_i} jsou vypočtené hodnoty ohniskových vzdáleností s příslušnými chybami.

Výsledné hodnoty ohniskových vzdáleností mikroskopického objektivu f_m a Ramsdenova okuláru f_r jsme našli jako aritmetický průměr hodnot f_{m_i} a f_{r_i} pro jednotlivé měření a chybu jako chybu aritmetického průměru:

$$f_m = (2,31 \pm 0,03) \text{ cm}, \quad f_r = (3,05 \pm 0,02) \text{ cm}.$$

5.2 Optické přístroje

5.2.1 Lupa

Porovnáním velikosti obrazu předmětu $y' = (5 \pm 0,5)$ mm, kterou jsme změřili milimetrovou stupnicí a velikosti předmětu $y = (0,50 \pm 0,05)$ mm (měřítka na kvadriku dělená po 0,1 mm) jsme určili hodnotu zvětšení lupy Z_{lnorm} podle vztahu (4):

$$Z_{\text{lnorm}} = (10,0 \pm 1,4) [-],$$

chyba je určena jako chyba nepřímého měření.

Z ohniskové vzdálenosti Ramsdenova okuláru $f_r = (3,05 \pm 0,02)$ cm a konvenční zrakové vzdálenosti $l = 25$ cm [2], stanovili jsme zvětšení lupy $Z_{l\infty}$ podle vztahu (3):

$$Z_{l\infty} = (8,20 \pm 0,05) [-],$$

chyba je určena jako chyba nepřímého měření.

5.3 Ohniskové roviny mikroskopického objektivu a Ramsdenova okuláru

Naměřili jsme polohy ohniskových rovin mikroskopického objektivu p_m a Ramsdenova okuláru p_r :

$$p_m = (0,71 \pm 0,07) \text{ cm}, \quad p_r = (0,19 \pm 0,07) \text{ cm}.$$

Chyby těchto poloh jsou určeny podle vzorci pro chyby nepřímého měření.

5.3.1 Mikroskop

Porovnáním velikosti obrazu předmětu $y' = (2 \pm 0,5) \text{ mm}$, kterou jsme změřili milimetrovou stupnicí a velikosti předmětu $y = (0,10 \pm 0,05) \text{ mm}$ (měřítka na kvadriku dělené po $0,1 \text{ mm}$) jsme určili hodnotu zvětšení mikroskopu Z_{m1} přímou metodou:

$$Z_{m1} = (20,0 \pm 1,4) [-],$$

chyba je určena jako chyba nepřímého měření.

Z vypočtených poloh ohniskových rovin a ohniskových vzdáleností stanovili jsme zvětšení mikroskopu Z_{l2} podle vztahu (5):

$$Z_{m2} = (19,5 \pm 0,4) [-],$$

chyba je určena jako chyba nepřímého měření.

5.3.2 Dalekohled

Přímou metodou jsme změřili hodnotu zvětšení dalekohledu Z_{d1} na:

$$Z_{d1} = (6 \pm 1) [-],$$

kde chyba je chybou nepřímého měření.

Z vypočtených ohniskových vzdáleností čočky +200 $f_1 = (18,45 \pm 0,02) \text{ cm}$ a Ramsdenova okuláru $f_2 = (3,05 \pm 0,02) \text{ cm}$ jsme stanovili zvětšení dalekohledu Z_{d2} podle vztahu (6):

$$Z_{d2} = (6,08 \pm 0,02) [-],$$

kde chyba je chybou nepřímého měření.

6 Diskuze

Polohu čoček, clony se šipkou a matnici jsme odečítali pomocí kovového měřítka s chybou $0,05 \text{ cm}$. Pak vzdálenosti jsme určovali odečtením těchto poloh, proto je chyby všech vzdáleností jsme určili jako chybu nepřímého měření na $0,07 \text{ cm}$.

6.1 Určení ohniskové vzdálenosti

6.1.1 Měření ohniskové vzdálenosti spojné čočky +200 z polohy předmětu a jeho obrazu

Určili jsme ohniskovou vzdálenost spojné čočky +200 ze znalosti polohy předmětu a jeho obrazu na $f_1 = (18,55 \pm 0,04) \text{ cm}$ s relativně malou chybou cca $0,2\%$ a Besselovou metodou $f_2 = (18,45 \pm 0,02) \text{ cm}$ s chybou cca $0,01\%$. Hodnoty od sebe vzdáleny $\leq 3\sigma$, tím pádem hodnoty můžeme považovat za shodné.

6.1.2 Měření ohniskové vzdálenosti Besselovou metodou

Změřili jsme ohniskovou vzdálenost mikroskopického objektivu na $f_m = (2,31 \pm 0,03)$ cm s chybou cca 1,2% a Ramsdenova okuláru na $f_r = (3,05 \pm 0,02)$ cm s chybou cca 0,6%.

6.2 Optické přístroje

6.2.1 Lupa

Zvětšení lupy jsme změřili při akomodaci oka na konvenční zrakovou vzdálenost $Z_{\text{lnorm}} = 10,0 \pm 1,4$ s chybou cca 14% a stanovili jsme z ohniskové vzdálenosti lupy zvětšení při oku akomodovaném na nekonečno $Z_{\text{l}\infty} = 8,20 \pm 0,05$ s chybou cca 6%.

6.2.2 Mikroskop

Při zkoumání mikroskopu naměřili jsme hodnotu zvětšení přímou metodou na $Z_{m1} = 20,0 \pm 1,4$ s chybou cca 7% a teoretickou metodou $Z_{m2} = 19,5 \pm 0,4$ s chybou cca 2%. Hodnoty od sebe vzdáleny $\leq 3\sigma$, tím pádem můžeme říct, že hodnotu zvětšení jsme ověřili správně.

6.2.3 Dalekohled

Při zkoumání dalekohledu jsme získali hodnotu zvětšení přímou metodou na $d_1 = 6 \pm 1$ s chybou cca 16% a teoretickou metodou $Z_{d2} = 6,08 \pm 0,02$ s chybou cca 0,3%. Hodnoty od sebe vzdáleny $\leq 3\sigma$, tím pádem hodnoty můžeme považovat za shodné.

7 Závěr

1. **DŮ:** V přípravě (viz Příloha. Domácí příprava) jsme odvodili vzorec (2), načrtli jsme chod paprsků a zdůvodnili nutnost podmínky $e > 4f$.
2. Určili jsme ohniskovou vzdálenost spojné čočky +200 ze znalosti polohy předmětu a jeho obrazu (pro pět konfigurací, provedli jsme graficky na Obr. (3)) f_1 a Besselovou metodou f_2 .

$$f_1 = (18,55 \pm 0,04) \text{ cm}, \quad f_2 = (18,45 \pm 0,02) \text{ cm}.$$

3. Změřili jsme ohniskovou vzdálenost mikroskopického objektivu f_m a Ramsdenova okuláru f_r Besselovou metodou:

$$f_m = (2,31 \pm 0,03) \text{ cm}, \quad f_r = (3,05 \pm 0,02) \text{ cm}.$$

V přípravě jsme vysvětlili rozdíl mezi Ramsdenovým a Huyensovým okulárem.

4. Změřili jsme zvětšení lupy při akomodaci oka na konvenční zrakovou vzdálenost Z_{lnorm} a stanovili jsme z ohniskové vzdálenosti lupy zvětšení při oku akomodovaném na nekonečno $Z_{\text{l}\infty}$:

$$Z_{\text{lnorm}} = (10,0 \pm 1,4) [-], \quad Z_{\text{l}\infty} = (8,20 \pm 0,05) [-].$$

5. Určili jsme polohy ohniskových rovin tlustých čoček mikroskopického objektivu p_m a Ramsdenova okuláru p_r :

$$p_m = (0,71 \pm 0,07) \text{ cm}, \quad p_r = (0,19 \pm 0,07) \text{ cm}.$$

6. Z mikroskopického objektivu a Ramsdenova okuláru jsme sestavili na optické lavici mikroskop a změřili jeho zvětšení přímou metodou Z_{m1} a teoretickou metodou Z_{m2} :

$$Z_{m1} = (20,0 \pm 1,4) [-], \quad Z_{m2} = (19,5 \pm 0,4) [-].$$

7. Ze spojky +200 a Ramsdenova okuláru jsme sestavili na optické lavici dalekohled. Změřili jsme jeho zvětšení přímou metodou Z_{d_1} a teoretickou metodou Z_{d_2} :

$$Z_{d_1} = (6 \pm 1) [-], \quad Z_{d_2} = (6,08 \pm 0,02) [-].$$

8. Výsledky měření zvětšení mikroskopu a dalekohledu jsme porovnali s hodnotami vypočítanými z ohniskových vzdáleností.

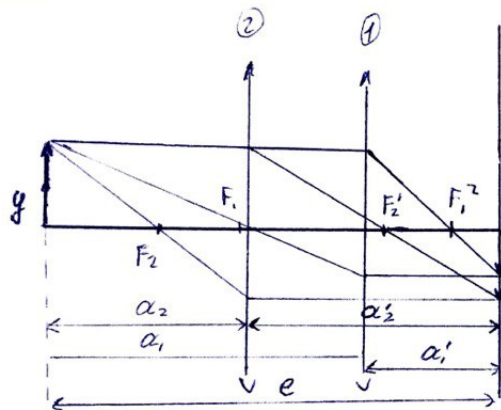
Literatura

- [1] FJFI ČVUT: Balmerova série [online] -
https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435579/mod_resource/content/6/optika_180226.pdf
[cit.20.3.2022]
- [2] Petr Chaloupka, Základy fyzikálních měření, prezentace [online] -
<https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf> [cit.20.3.2022]

Příloha

8 Domácí příprava

Du:



$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{e}{ae - a^2}$$

$$a + a' = e$$

$$a^2 - ae + ef = 0$$

$$D = e^2 - 4ef$$

$$a = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 4ef}}{2}$$

$\sqrt{e^2 - 4ef}$ má podmínku
 $e > 4f$

$$d = \frac{e + \sqrt{e^2 - 4ef}}{2} - \frac{e - \sqrt{e^2 - 4ef}}{2}$$

$$d = \sqrt{e^2 - 4ef}$$

$$\Rightarrow f = \frac{e^2 - d^2}{4e}$$