ZÁKLADY FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ
FJFI ČVUT v Praze

Domácí úkol #2 : Nepřímé měření

Jméno: Denis Krapivin
Datum měření: 05.11.2020
Klasifikace:

---

1 Zadání

Těžítko z obchodu se starožitnostmi ve tvaru rotačního kužele bylo několikrát přeměřeno s následujícími výsledky:

Poloměr podstavy [mm]:	42.60	42.59	44.42	42.19	44.90	43.43	43.21;
Výška [mm]:	63.51	62.13	61.26	60.90	62.66	62.05	63.12;
Váha [g]:	264.10	256.82	261.15	260.36	255.92;		

2 Pracovní úkoly

1. Určit hustotu těžítka.
2. Spočítat a diskutovat chybu měření.

3 Metoda zpracování

Pro zpracování výsledků měření budeme předpokládat, že rozdělení chyb všech tří měření jsou dány Gaussovým rozdělením. Naším cílem je najít aritmetický průměr a směrodatnou odchylku aritmetického průměru tří měření. Pak pomoci vzorců pro objem kužele a hustotu spočítáme nejpravděnepodobnější hustotu těžítka a celkovou chybu.

3.1 Aritmetický průměr

Z teorie chyb plyne, že nejpravděpodobnější hodnota při normálním rozdělení je aritmetický průměr $\overline{x}$ ze změřených hodnot [1]. Aritmetický průměr určíme s přesností o jedno místo větší než byla přesnost měření. Předpokládáme, že žádná z naměřených hodnot není zatížena hrubými huby. Proto můžeme použit hodnotu aritmetického průměru pro výpočet náhodné chyby měření.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

3.2 Náhodná chyba měření

Aritmetický průměr je nejpravděpodobnější hodnotou, ovšem musíme určit jeho přesnost. Náhodnou chybu měření spočteme jako střední kvadratickou chybu aritmetického průměru $\sigma_{\overline{x}}$ [2]. Chybu následně zaokrouhlíme na jedno až dvě platná místa a aritmetický průměr na stejný počet desetinných míst.

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \tag{2}$$

3.3 Hustota kužele

Pro výpočet hustoty ρ kužele použijeme vzorec [3].

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi r^2 h} \tag{3}$$

kde m je váha $[kg]$, V je objem kužele $[m^3]$, r poloměr podstavy $[m]$, h je výška $[m]$.

3.4 Zjištění nejpravděpodobnější hodnoty

Aritmetické průměry přímo naměřených hodnot veličin $\overline{x}_i$ dosadíme do známé funkce [3] a vypočteme nejpravděpodobnější hodnotu nepřímo měřené hustoty $\overline{\rho}$ jako [4]

$$\overline{\rho} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) = \frac{3\overline{m}}{\pi \overline{r}^2 \overline{h}} \tag{4}$$

3.5 Celková chyba

Celková chyba $u_{\overline{\rho}}$ souvisí s náhodnými chybami přímých měření $\sigma_{\overline{x}_i}$ vztahem [5].

$$u_{\overline{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (\sigma_{\overline{x}_1})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\sigma_{\overline{x}_2})^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 (\sigma_{\overline{x}_n})^2} \tag{5}$$

3.6 Výsledek měření

Výsledkem měření bude hustota ρ [6].

$$\rho = \overline{\rho} \pm u_{\overline{\rho}} \tag{6}$$

při čemž chybu zaokrouhlíme na jedno až dvě platná místa, řád chyby nám ukáže poslední platné místo pro $\overline{\rho}$.

4 Zpracování dat

4.1 Zpracování naměřených hodnot

	$r_i[mm]$	$h_i[mm]$	$m_i[g]$
	42.60	63.51	264.10
	42.59	62.13	256.82
	44.42	61.26	261.15
	42.19	60.90	260.36
	44.90	62.66	255.92
	43.43	62.05	
	43.21	63.12	
průměr:	43.30	62.20	260.00
chyba:	0.4	0.4	1.5

Tab. 1: Naměřené hodnoty, jejich aritmetický průměr a chyba průměru.

Naměřené hodnoty uvedené tabulce [Tab.1]. představíme ve tvaru histogramů [Obr.1]. Z histogramů není možně určit,které rozdělení máme, ale budeme předpokládat normální rozdělení.

Podle vzorce [3] najdeme nejpravděpodobnější hodnotu $\overline{\rho}$ z aritmetických průměrů přímo naměřených hodnot

$$\overline{\rho} = \frac{3 \cdot 260 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (43.3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 62.2 \cdot 10^{-3}} = 2129 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Najdeme parciální derivace funkce [3] podle každé z proměnných:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = 98.3 \cdot 10^3 \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right) = 34.2 \cdot 10^3 \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial m}\right) = 8.2 \cdot 10^3 \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$$

Pro výpočet celkové chyby použijeme vzorec [5]

$$u_{\overline{\rho}} = \sqrt{(39.32)^2 + (13,68)^2 + (12.3)^2} = 43.4 \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$$

Zaokrouhlíme celkovou chybu na jedno platné místo. Řad chyby nám udá poslední platné místo pro hustotu $\overline{\rho}$. Výsledkem podle vzorce [6] je

$$\underline{\rho = (2130 \pm 40) \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}}$$

5 Diskuze

Podle histogramů nelze jednoznačně rozhodnout o typu rozdělení. Relativně malý počet naměřených hodnot sedavá možnost najít podezřelé na zatížení hrubými chybami hodnoty tím pádem snížit velikost schodné chyby.

Z vypočtu chyby $u_{\overline{\rho}}$ je vidět, že pro přesnost měření relativně velkou roli hraje poloměr podstavy. Tím pádem lze značně zlepšit přesnost měření hustoty pomocí zpřesnění hodnoty poloměru.

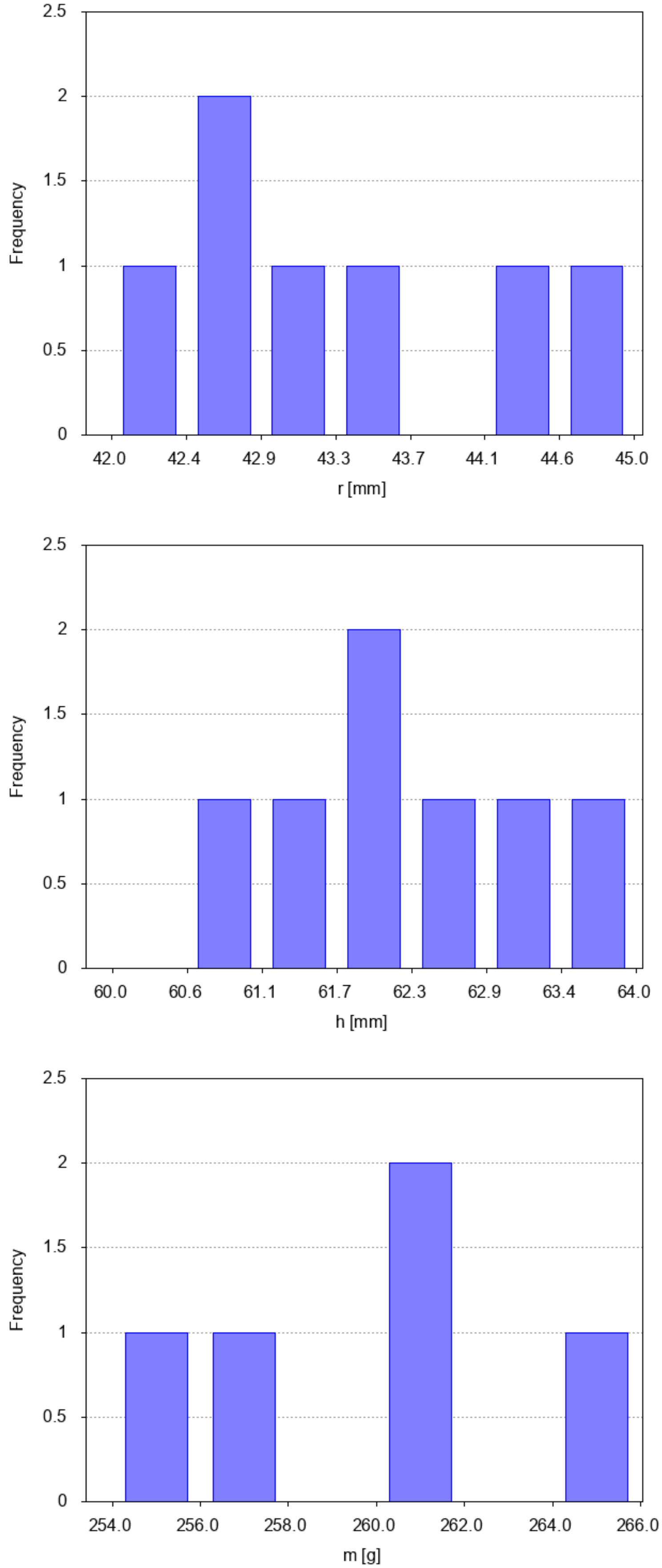
6 Závěr

Hustotu těžítka ze změřených hodnot jsme určili na (2130 ± 40) kg $\cdot$ m^{-3}. Pravděpodobně by šlo snížit velikost chyby zvětšením počtu měření hodnot, hlavně poloměru podstavy.

Literatura

[1] Základy fyzikálních měření, přednáška 4 - http://https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/h4.pdf [cit.05.11.2020]

[2] Základy teorie chyb a zpracování fyzikálních měření - https://http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/teoriechyb.pdf [cit.05.11.2020]



Obr. 1: Histogramy znázorňující rozdělení změřených hodnot