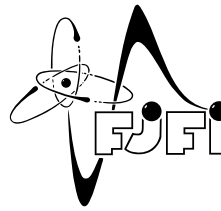


Určení Planckovy konstanty z charakteristických rentgenových spekter



Číslo úlohy: 12 Skupina: 4
Kruh: Středa 15:30 Jméno: Denis Krapivin
Datum měření: 27.4.2022 Kolega: Kseniia Politskovaia
Klasifikace:

1 Pracovní úkoly

1. **DŮ:** Odhadněte dobu měření spektra pro různé integrační časy a velikosti kroku úhlu s rozsahem od 5° do 75° . Rozmyslete, jak by šlo měření optimalizovat, aby zabralo méně času. Zamyslete se nad tím, jestli Vámi navržený postup bude mít vliv na kvalitu dat.
2. Zkalibrujte goniometr pro monokrystal LiF.
3. Změřte spektrum rentgenového záření molybdenové, měděné a železné anody při napětí 35 kV. Počet fotonů zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu vynesete do grafu.
4. Určete frekvence charakteristických čar K_α a K_β v naměřených spektrech anod ze železa, mědi a molybdenu. S jejich pomocí sestavte Moseleyho linii pro čáru K_α a K_β . Určete Rydbergovu frekvenci a Planckovu konstantu z Moseleyho linií.
5. Změřte a vykreslete celé spektrum wolframové anody, porovnejte ho s ostatními spektry a diskutujte rozdíly a pokuste se odhadnout, co je způsobuje. Rozhodněte, zda je toto spektrum možné použít pro prodloužení Moseleyho linií a své rozhodnutí zdůvodněte.
6. Změřte vysokoenergetické konce spektra wolframové anody pro 4 hodnoty urychlovacího napětí v rozmezí od 10 do 30 kV. Nalezněte úhly rozptylu pro maximální energie ve spektru a určete z nich hodnotu Planckovy konstanty.

2 Pomůcky

Rentgenová sada PHYWE (základní jednotka, goniometr, Geiger-Müllerův počítač), rentgenové trubice s molybdenovou, měděnou, železnou a wolframovou anodou, monokrystal LiF (fluoridu lithného) v držáku, kolimátor (2 mm), PC, program Measure.

3 Teoretický úvod

Rentgenové záření vzniká při srážce urychlených elektronů s hmotou. Elektrony jsou v zařízeních generujících rentgenové záření jsou urychleny vysokým napětím mezi katodou a anodou. Při dopadu urychlených elektronů na anodu vzniká záření se spojitým spektrem, ovšem vzhledem k vysokým energiím urychlené elektrony schopny vyřážet elektrony z obalu atomů anody. Na uvolněná místa pak přecházejí elektrony z vyšších slupek, přičemž vyzařují energii ve formě elektromagnetického záření - fotonů. Takto vzniklé rentgenové záření se nazývá charakteristické, neboť pozice a poloha maxim je závislá na přesné konfiguraci elektronového obalu (protonovém čísle), a tedy na materiálu.

Na principu difrakce záření na krystalu lze sestavit velmi přesné spektrometrické aparatury [1]. Při dopadu záření na krystal fotony se rozptylují do různých směrů. Z Braggovy rovnice je zřejmé, že úhel rozptylu záření závisí na jeho frekvenci. Pak ze znalosti uhlu rozptylu θ lze odvodit vztah pro frekvenci fotonu f :

$$f = \frac{nc}{2d \sin \theta}, \quad (1)$$

kde n je řád interferenčního maxima, $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$ je rychlost světla ve vakuu [3], $d = 201,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ je mřížková konstanta krystalu [1].

Podle Moseleyho zákona lze odvodit vztah mezi frekvencí linií v rentgenovém spektru f a protonovým číslem Z prvku, ze kterého byla vyrobena anoda [1]. Lineární závislost na protonovém čísle Z lze vyjádřit odmocněním jako tohoto vztahu jako:

$$\sqrt{f} = \sqrt{\frac{(n_1^2 - n_2^2)}{n_1^2 n_2^2}} \sqrt{f_R(Z - \sigma)}, \quad \text{kde} \quad f_R = \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3}, \quad (2)$$

kde $m_e = 510,9989461 \text{ keV} c^{-2}$ je hmotnost elektronu [4] s nábojem $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ [7], který vznikne po přechodu elektronu z hladiny s číslem n_1 na hladinu n_2 , σ je stínící konstanta materiálu, $\varepsilon_0 = 8,85418781 \text{ pFm}^{-1}$ permitivita vakua [5], h Planckova konstanta a f_R je Rydbergova frekvence. Ze znalosti hodnoty Rydbergove frekvence f_R lze najít hodnotu Planckove konstanty h jako:

$$h = 3 \sqrt{\frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 f_R}}. \quad (3)$$

Pro určení Planckovy konstanty z vysokoenergetického konce spektra využijeme vztahu pro frekvence fotonů na základě uhlu rozptylu (1). Ve spektru se nemůžou vyskytnout fotony s energií vyšší, než je energie urychlených elektronů v rentgence. Má-li se jednat o vysokoenergetický konec spektra, musí být úhel, pod kterým dojde ke konstruktivní interferenci pro fotony minimální a tedy musí být minimální i řád interferenčního maxima ($n = 1$). Proto pro určení Planckove konstanty z vysokoenergetického konce spektra platí rovnost:

$$h = \frac{2deU}{c} \sin \theta. \quad (4)$$

4 Postup měření

Rentgenová aparatura je ovládána pomocí programu Measure a v něm je znázorněna schématem na Obr. 6. v návodu [1]. Nejdřív otevřeme průhledná dvířka na přední straně aparatury a umístíme na rotační část zařízení monokrystal LiF a kolimátor o průměru 2 mm. Aby bylo možné spustit lampu, je nejprve potřeba zamknout dvířka experimentálního prostoru pomocí tlačítka na ovládacím panelu. Na panelu přístroje nastavíme urychlovací napětí na 35kV.

Kliknutím na experimentální oblast v oknu programu Measure se otevře nastavení goniometru, kde je ovládání kalibrace. Nastavíme „Mode“ na „1:2 coupling mode“ a „Crystal“ na „LiF“ a spustíme kalibraci. Po provedení kalibrace do prostoru pro lampu na levé straně zařízení vložíme lampu s molybdenovou anodou.

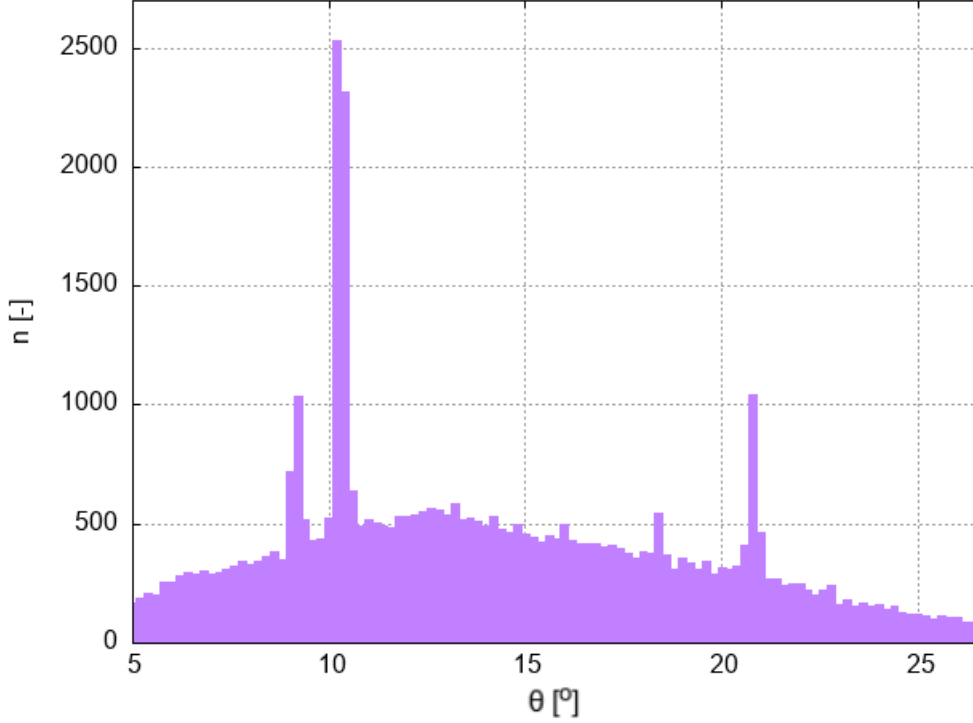
V programu Measure zadáme rozmezí úhlů $5^\circ - 75^\circ$ a zvolíme krok goniometru na $0,5^\circ$ a integrační čas na 1 s. Měření provedeme pro celý rozsah úhlů $5^\circ - 75^\circ$ nebo do objevování na grafu interferenčních maxim druhého řádu. Určíme na grafu oblast piků prvního a druhého řádu, proměříme je s krokem $0,5^\circ$ a integračním časem 5 s. Měření opakujeme pro měděnou a železnou lampu.

Vložíme wolframovou lampu do prostoru pro lampu a opakujeme měření spektra v rozmezí úhlů $5^\circ - 75^\circ$ s krokem $0,5^\circ$ a integračním časem 1 s.

Pro měření vysokoenergetického konce spektra provedeme měření v rozmezí $5^\circ - 20^\circ$ pro veličiny urychlovacího napětí 30kV, 23 kV a 17 kV.

5 Vypracování

Naměřené spektra rentgenového záření molybdenové, měděné a železné anody při napětí 35 kV jsou zobrazený na Obr. 1, Obr. 4, Obr. 5.



Obr. 1: Spektrum rentgenového záření molybdenové anody. Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ .

Proložení charakteristických piků 1. a 2. řadů funkcemi ve tvaru $n(\theta) = Ae^{-(\theta-B)^2/(2C^2)}/C+D$ s koeficienty A, B, C, D pro molybdenovou anodu jsou na Obr. 6 a Obr. 7, pro měděnou anodu jsou na Obr. 8 a Obr. 9, pro železnou na Obr. 10, Obr. 11 a Obr. 12.

Vypočtené podle (1) hodnoty frekvence charakteristických čar K_{α_i} a K_{β_i} pro piky 1. a 2. řadů v naměřených spektrech anod ze železa, mědi a molybdenu jsou v Tab. 1. Chyby jsou vypočtené jako chyby nepřímého měření [2].

Výsledné hodnoty frekvence charakteristických čar K_{α} a K_{β} v naměřených spektrech anod ze železa, mědi a molybdenu jsou v Tab. 2. Hodnoty frekvence K_{α} a K_{β} jsou spočítané podle vzorce pro vážený průměr, chyba je stanovena jako chyba váženého průměru [2].

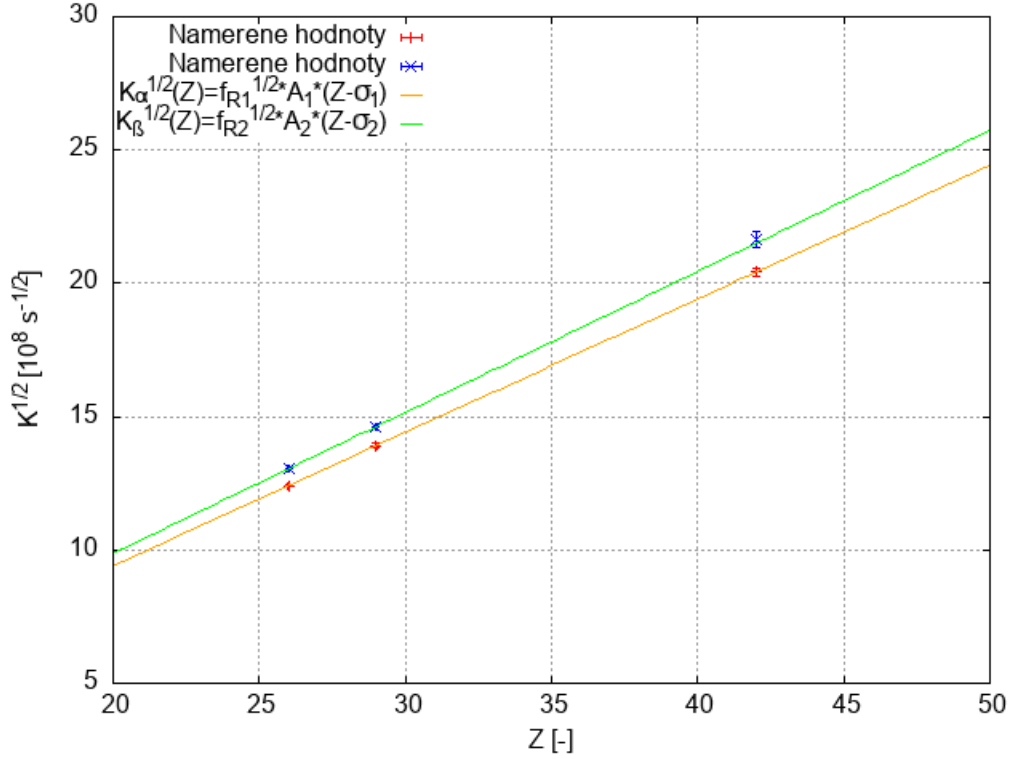
	$K_{\alpha_1}[10^{16} \text{ Hz}]$	$K_{\beta_1}[10^{16} \text{ Hz}]$	$K_{\alpha_2}[10^{16} \text{ Hz}]$	$K_{\beta_2}[10^{16} \text{ Hz}]$
molybden	$414,0 \pm 8,0$	$466,0 \pm 9,0$	$420,0 \pm 10,0$	$471,0 \pm 6,0$
měď	$192,6 \pm 0,7$	$212,0 \pm 1,2$	$194,1 \pm 0,5$	$215,3 \pm 0,5$
železo	$154,3 \pm 0,5$	$169,6 \pm 1,4$	$154,0 \pm 2,0$	$171,0 \pm 3,0$

Tab. 1: Vypočtené hodnoty frekvence charakteristických čar K_{α_i} a K_{β_i} pro piky 1. a 2. řadů v naměřených spektrech anod ze železa, mědi a molybdenu.

Vypočtené hodnoty $K^{\frac{1}{2}}$ v závislosti na protonovém čísle prvků Z a proložení závislosti funkce ve tvaru (2) (Moseleyho linií) jsou na Obr. 2. Proložení dat jsou nalezené hodnoty Rydbergovy frekvence $f_{R1} = (0,3341 \pm 0,0003) 10^{16} \text{ Hz}$, $f_{R2} = (0,314 \pm 0,006) 10^{16} \text{ Hz}$.

	$Z[-]$	$K_\alpha[10^{16} \text{ Hz}]$	$K_\beta[10^{16} \text{ Hz}]$
molybden	42	$417,0 \pm 9,0$	$469,0 \pm 8,0$
měď	29	$193,4 \pm 0,6$	$213,7 \pm 0,8$
železo	26	$154,1 \pm 1,6$	$170,0 \pm 2,0$

Tab. 2: Výsledné hodnoty frekvence charakteristických čar K_α a K_β v naměřených spektrech anod ze železa, mědi a molybden, kde Z je protonové číslo.



Obr. 2: Moseleyho linii pro čáru K_α a K_β . Vypočtené hodnoty $K^{1/2}$ v závislosti na protonovém čísle prvků Z a proložení závislosti funkci ve tvaru $K^{1/2}(Z)$ s koeficienty $A_1 = 0,866$, $A_2 = 0,9428$, $\sigma_1 = 1,21 \pm 0,01$, $\sigma_2 = 1,3 \pm 0,2$, $f_{R1} = 0,3341 \pm 0,0003$, $f_{R2} = 0,314 \pm 0,006$.

Výsledná hodnota Rydbergove frekvence f_R je nalezena jako vážený průměr. Chyba je vypočtena jako chyba váženého průměru:

$$f_R = (3,24 \pm 0,06) 10^{15} \text{ Hz}.$$

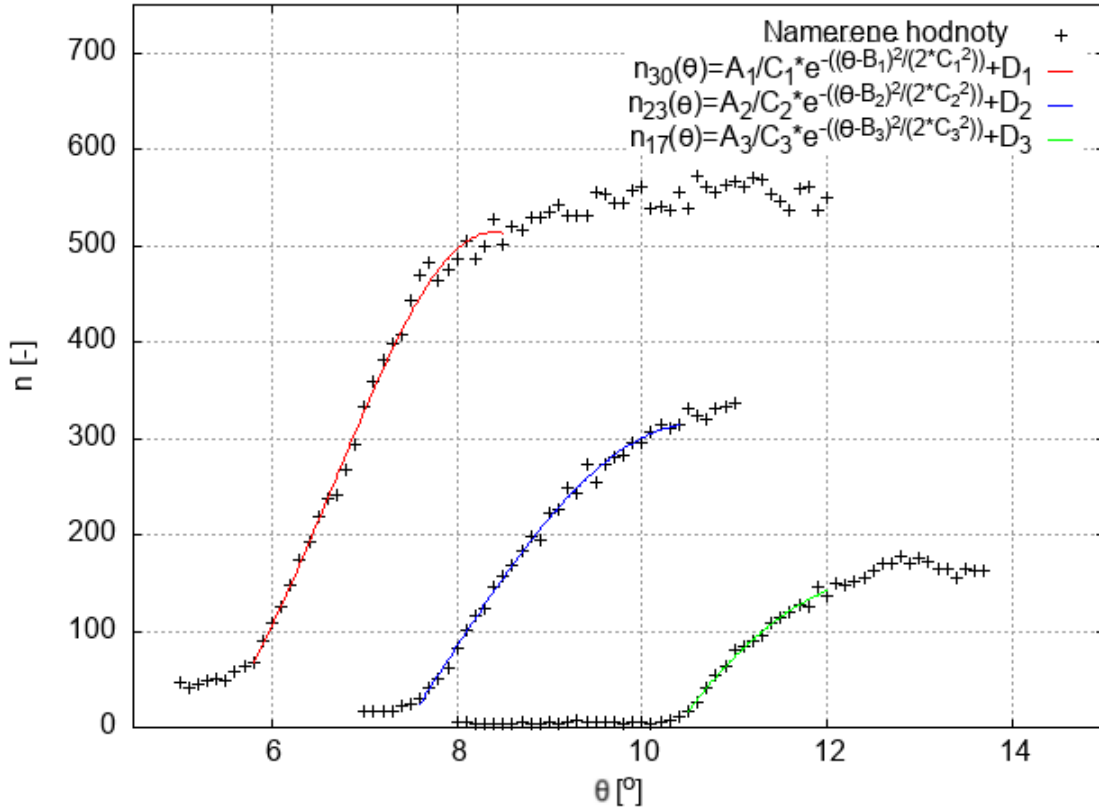
Využitím vztahu (3) je vypočtena hodnota Planckovy konstanty h :

$$h = (6,66 \pm 0,04) \cdot 10^{-34} \text{ Js},$$

kde chyba je nalezena jako chyba nepřímého měření.

Spektrum wolframové anody pro úhly stočení krystalu θ 5 – 75 ° je na Obr. 13.

Vysokoenergetické konce spektra wolframové anody pro hodnoty urychlovacího napětí 30kV, 23 kV a 17 kV, tj. naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ a proložení dat funkcemi ve tvaru $n(\theta) = Ae^{-(\theta-B)^2/(2C^2)}/C+D$ jsou na Obr. 3. Proložení dat a užitím vzorce (4) jsou nalezené hodnoty Planckové konstanty pro každé měření $h_1 = (7,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $h_2 = (6,8 \pm 0,9) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $h_3 = (6,4 \pm 1,2) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.



Obr. 3: Vysokoenergetické konce spektra wolframové anody pro hodnoty urychlovacího napětí 30kV, 23 kV a 17 kV. Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítacem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ a proložení závislosti funkcemi ve tvaru $n_i(\theta)$ s koeficienty $A_1 = 1000 \pm 200$, $A_2 = 2700 \pm 1500$, $A_3 = 17000 \pm 3000$, $B_1 = 8,40 \pm 0,01$, $B_2 = 10,6 \pm 0,2$, $B_3 = 12,7 \pm 0,7$, $C_1 = 1,7 \pm 0,2$, $C_2 = 3 \pm 1$, $C_3 = 0 \pm 40$, $D_1 = -140 \pm 60$, $D_2 = -500 \pm 300$, $D_3 = -2000 \pm 500$.

Výsledná hodnota Planckovy konstanty h je nalezena jako vážený průměr, chyba je vypočtena jako chyba váženého průměru:

$$h = (6,8 \pm 0,8) \cdot 10^{-34} \text{ J s.}$$

6 Diskuze

Hodnoty úhlů jsme považovali za přesné, chybu měření počtu pulzů zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítacem jsme odhadli na 1 pulz, ale také při zpracování dat zanedbali.

Naměřená hodnota Planckovy konstanty z Moseleyho linií $h = (6,66 \pm 0,04) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ má malou relativitou chybu cca 0,6%, naměřená hodnota odpovídá v rámci 3σ tabulkové hodnotě $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, tím pádem hodnoty můžeme považovat za shodné.

Vypočtena podle úhlů rozptylu pro maximální energie ve spektru wolframu hodnota Planckovy konstanty $h = (6,8 \pm 0,8) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ má relativitou chybu cca 12%, naměřená hodnota odpovídá v rámci 3σ tabulkové hodnotě $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, tím pádem hodnoty můžeme považovat za shodné. Měření Planckovy konstanty pomocí Moseleyho linií nám vyháží mnohem přesnější.

Při porovnání spekter Obr. 1, Obr. 4, Obr. 5 je vidět, že uhel rozptylu fotonu je tím menší čím větší protonové číslo materiálu anody. Z Braggovy rovnice lze ukázat, že uhel rozptylu záření závisí na jeho vlnové délce, tím pádem i na energii fotonu. Wolfram má dostatečně velké protonové číslo (72), tím pádem i energie fotonů, které vznikl

ionizací wolframu je větší. Proto lze předpokládat, že piky zobrazené na Obr. 1 není charakteristickými piky 1. a 2. řadu, a hledané piky by se měli naházet v okolí 0° . Tím pádem wolfram není možné použít pro prodloužení Moseleyho linií.

Výslednou chybu spočítaných hodnot určitě šlo by zmenšit lepším nastavováním vstupních konstant při proložení charakteristických piků a vysokoenergetických konce spektra wolframové anody (při zvolení těchto konstant je velmi složité správně uhádnout nutnou hodnotu, občas pro různé hodnoty konstant nám vyházeli různé, ale skoro stejně přesné hodnoty)

7 Závěr

Seznámili jsme s metodou měření spektra rentgenového záření, sestavením Moseleyho linií a určením z nich hodnoty Planckovy konstanty.

Změřili jsme spektrum rentgenového záření molybdenové, měděné a železné anody Obr. 1, Obr. 4, Obr. 5.

Proložení charakteristických piků jsme určili frekvence čar K_α a K_β v naměřených spektrech anod ze železa, mědi a molybdenu, s jejich pomocí jsme sestavili Moseleyho linií a určili Rydbergovu frekvenci na $f_R = (3,24 \pm 0,06) \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ a Planckovu konstantu na $h = (6,66 \pm 0,04) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

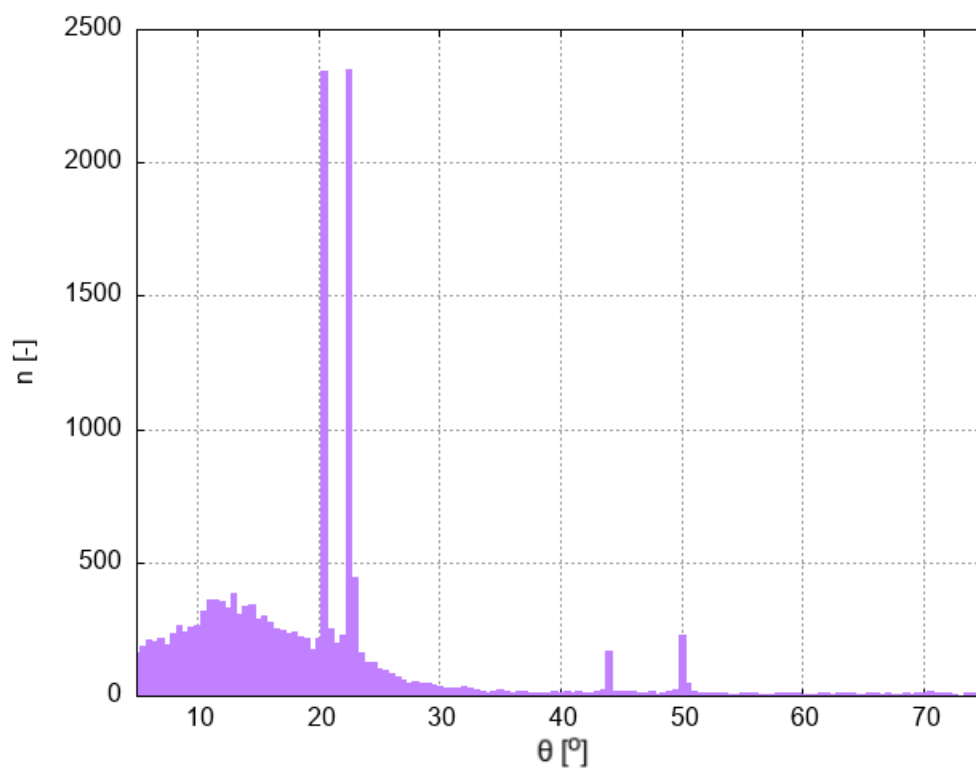
Změřili jsme vysokoenergetické konce spektra wolframové anody pro 3 hodnoty urychlovacího napětí Obr. 3, našli jsme úhly rozptylu pro maximální energie ve spektru a určili z nich hodnotu Planckovy konstanty na $h = (6,8 \pm 0,8) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

Literatura

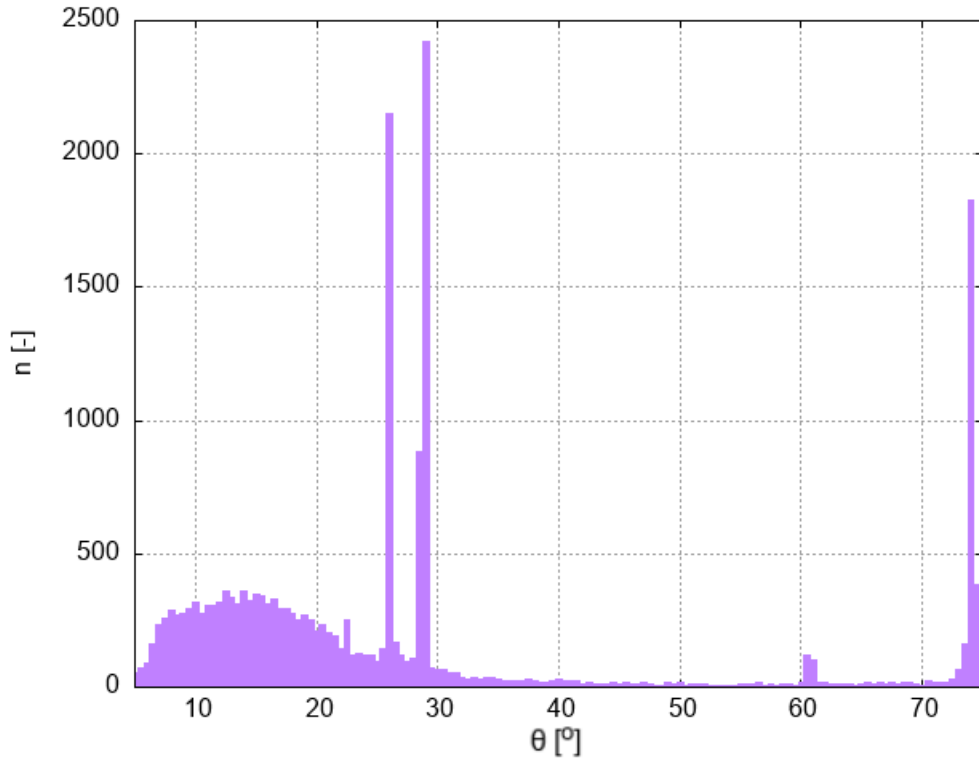
- [1] Kolektiv praktika, *Určení Planckovy konstanty z charakteristických rentgenových spekter*, [online, cit.1.5.2022] - https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435657/mod_resource/content/3/praz2_rtg_220220.pdf
- [2] Petr Chaloupka, *Základy fyzikálních měření*, prezentace [online, cit.1.5.2022] - <https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf>
- [3] WolframAlpha, *Speed of light*, [online, cit.1.5.2022] - <https://www.wolframalpha.com/input?i=speed+of+light>
- [4] WolframAlpha, *Mass of electron*, [online, cit.1.5.2022] - <https://www.wolframalpha.com/input?i=mass+of+electron>
- [5] WolframAlpha, *Permittivity of vacuum*, [online, cit.1.5.2022] - <https://www.wolframalpha.com/input?i=permittivity+of+vacuum>
- [6] WolframAlpha, *Planck constant*, [online, cit.1.5.2022] - <https://www.wolframalpha.com/input?i=Planck+constant>
- [7] WolframAlpha, *Charge of electron*, [online, cit.1.5.2022] - <https://www.wolframalpha.com/input?i=electron+charge>

Příloha

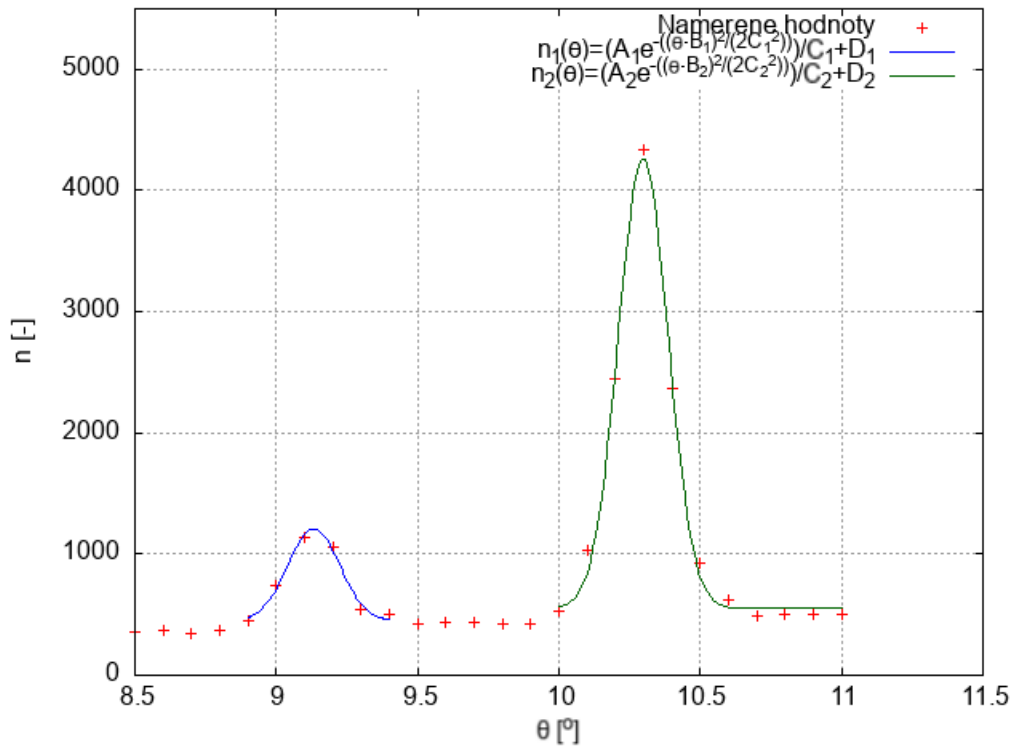
8 Grafy



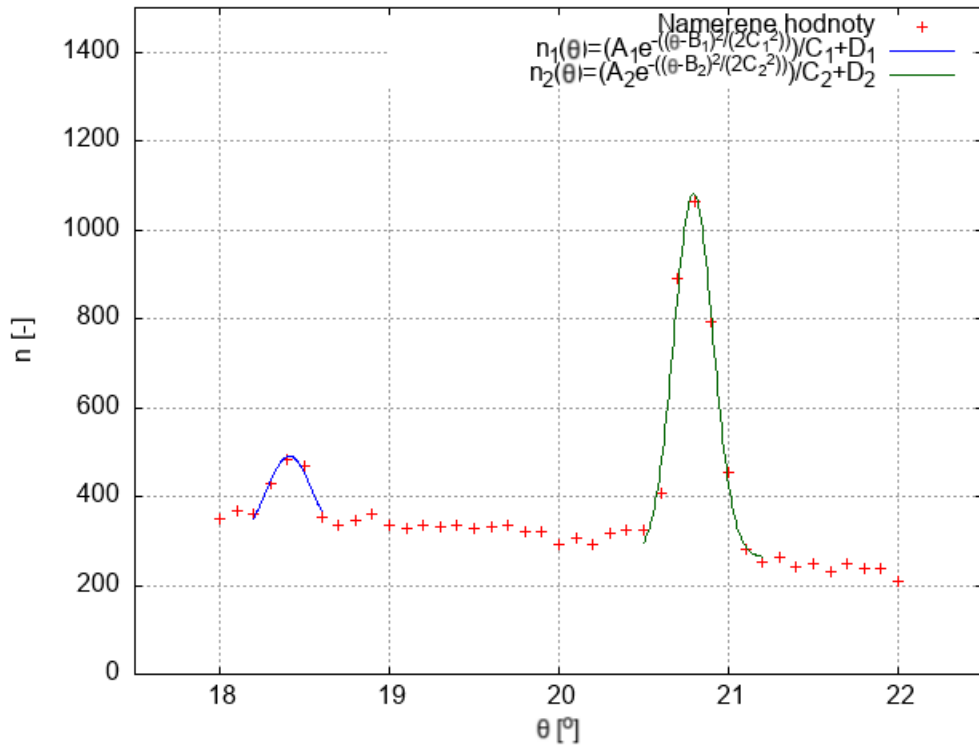
Obr. 4: Spektrum rentgenového záření měděné anody. Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ .



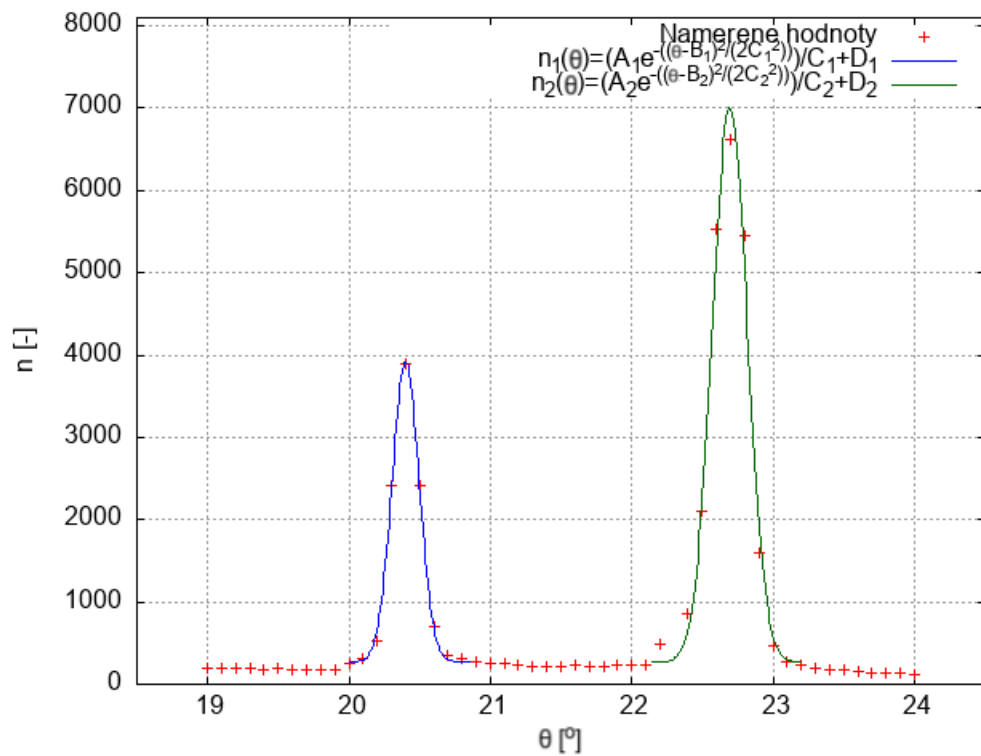
Obr. 5: Spektrum rentgenového záření železné anody. Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ .



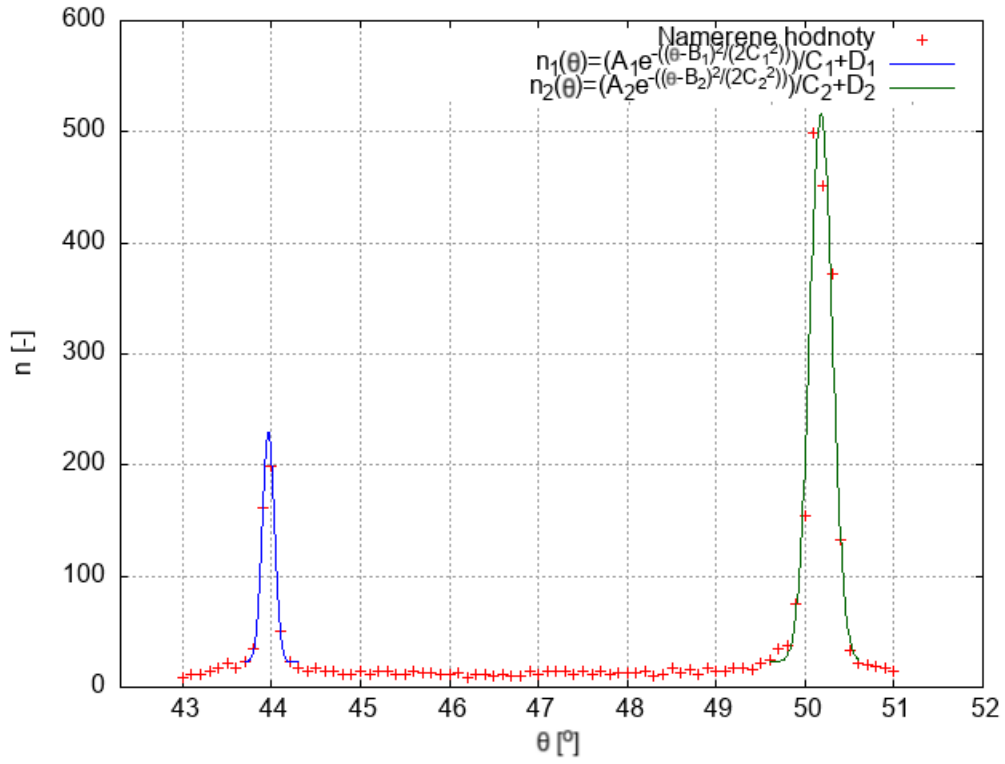
Obr. 6: Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ v oblasti charakteristických piků 1. řady molybdenové anody. Proložení piků funkcemi ve tvaru $n_i(\theta)$ s koeficienty $A_1 = 70 \pm 10$, $A_2 = 326 \pm 12$, $B_1 = 9,133 \pm 0,007$, $B_2 = 10,300 \pm 0,003$, $C_1 = 0,09 \pm 0,01$, $C_2 = 0,088 \pm 0,003$, $D_1 = 450 \pm 50$, $D_2 = 550 \pm 40$.



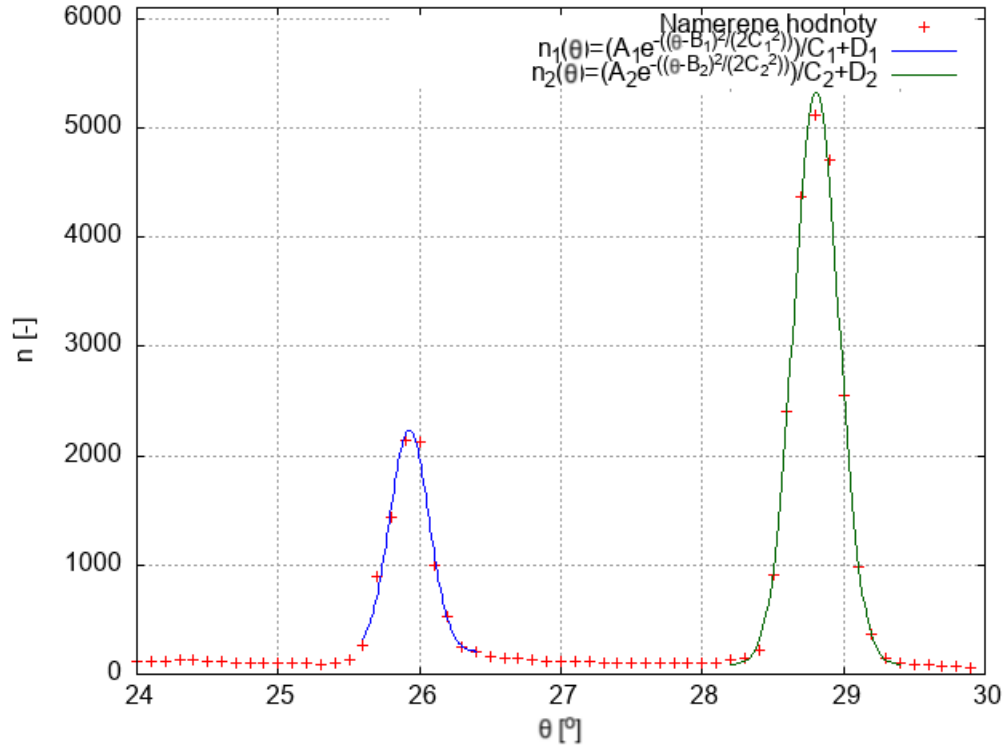
Obr. 7: Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ v oblasti charakteristických piků 2. řadu molybdenové anody. Proložení piků funkcemi ve tvaru $n_i(\theta)$ s koeficienty $A_1 = 28 \pm 9$, $A_2 = 94 \pm 8$, $B_1 = 18,41 \pm 0,02$, $B_2 = 20,794 \pm 0,006$, $C_1 = 0,2 \pm 0,1$, $C_2 = 0,115 \pm 0,008$, $D_1 = 290 \pm 50$, $D_2 = 260 \pm 30$.



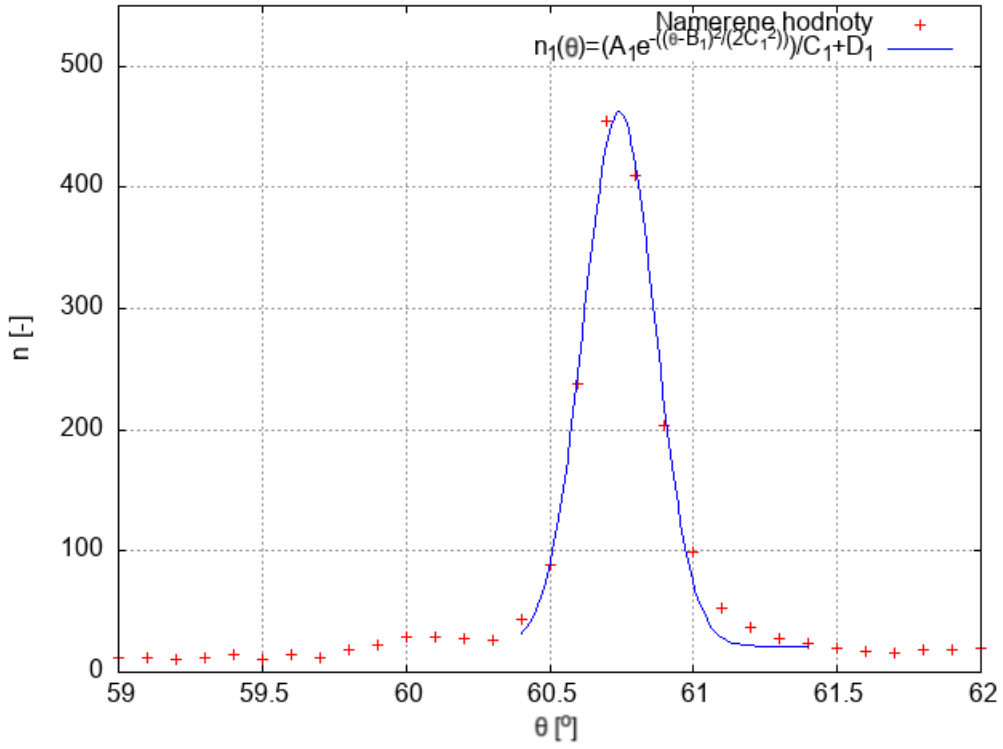
Obr. 8: Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ v oblasti charakteristických piků 1. řady měděné anody. Proložení piků funkcemi ve tvaru $n_i(\theta)$ s koeficienty $A_1 = 347 \pm 9$, $A_2 = 840 \pm 50$, $B_1 = 20,401 \pm 0,002$, $B_2 = 22,695 \pm 0,006$, $C_1 = 0,095 \pm 0,002$, $C_2 = 0,124 \pm 0,007$, $D_1 = 270 \pm 30$, $D_2 = 267 \pm 14$.



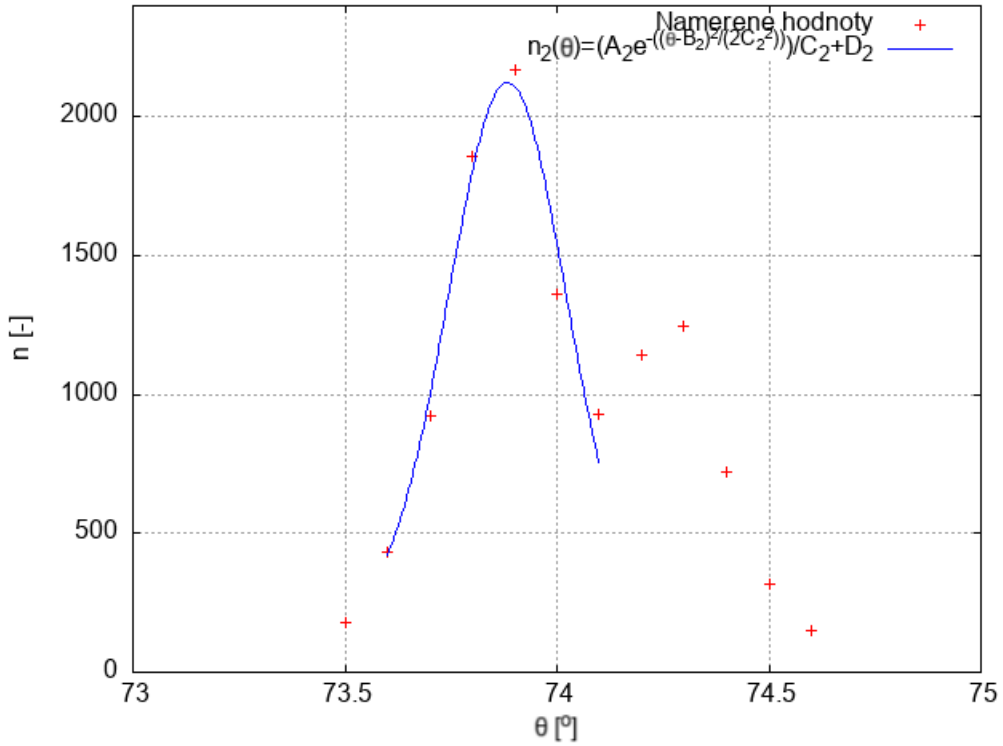
Obr. 9: Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ v oblasti charakteristických piků 2. řadu měděné anody. Proložení piků funkcemi ve tvaru $n_i(\theta)$ s koeficienty $A_1 = 14 \pm 1$, $A_2 = 63 \pm 6$, $B_1 = 43,9616 \pm 0,0005$, $B_2 = 50,18 \pm 0,01$, $C_1 = 0,07 \pm 0,01$, $C_2 = 0,13 \pm 0,01$, $D_1 = 22 \pm 1$, $D_2 = 22 \pm 7$.



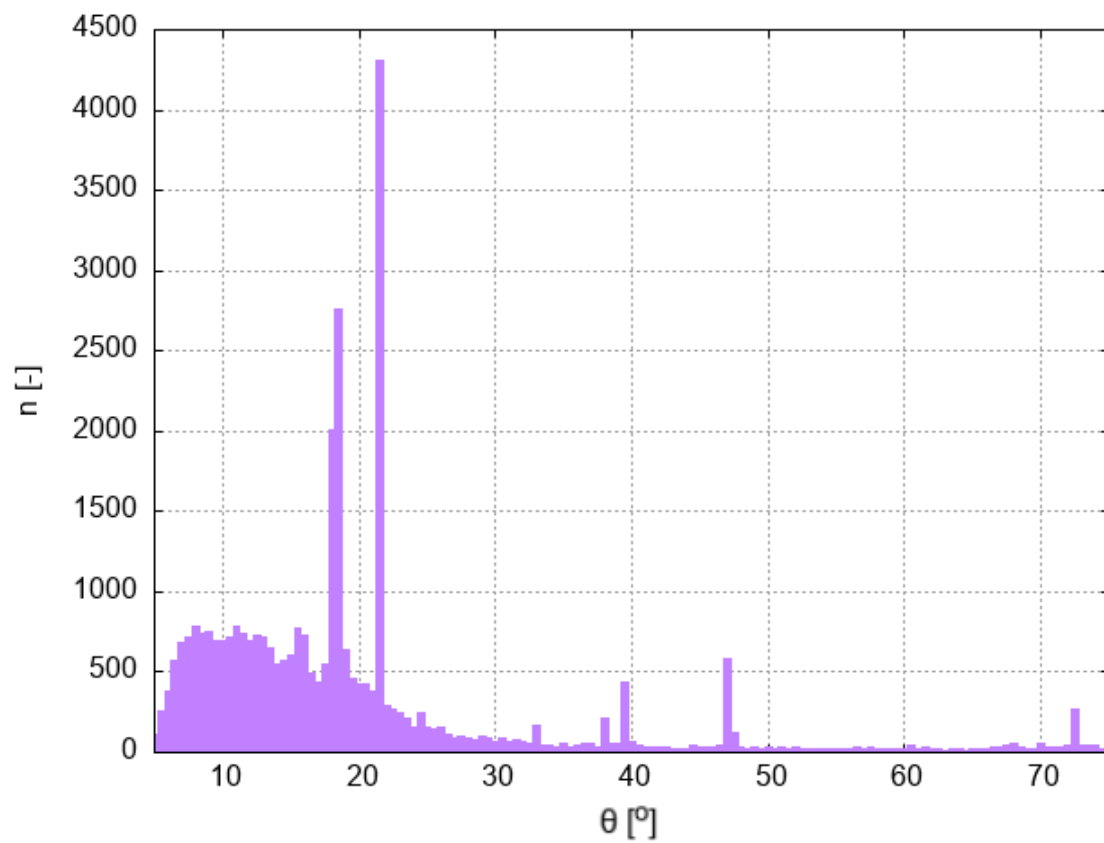
Obr. 10: Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ v oblasti charakteristických piků 1. řadu železné anody. Proložení piků funkcemi ve tvaru $n_i(\theta)$ s koeficienty $A_1 = 280 \pm 30$, $A_2 = 840 \pm 20$, $B_1 = 25,928 \pm 0,009$, $B_2 = 28,806 \pm 0,003$, $C_1 = 0,138 \pm 0,012$, $C_2 = 0,16 \pm 0,01$, $D_1 = 200 \pm 10$, $D_2 = 80 \pm 20$.



Obr. 11: Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ v oblasti charakteristického piku 2. řadu železné anody. Proložení piku funkci ve tvaru $n_1(\theta)$ s koeficienty $A_1 = 54 \pm 1$, $B_1 = 60,742 \pm 0,003$, $C_1 = 0,125 \pm 0,003$, $D_1 = 21 \pm 2$.



Obr. 12: Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ v oblasti charakteristického piku 2. řadu železné anody. Proložení piku funkci ve tvaru $n_2(\theta)$ s koeficienty $A_2 = 260 \pm 50$, $B_2 = 73,88 \pm 0,01$, $C_2 = 0,14 \pm 0,02$, $D_2 = 180 \pm 50$.



Obr. 13: Spektrum rentgenového záření wolframové anody. Naměřený počet fotonů n zaznamenaných Geiger-Müllerovým počítačem v závislosti na úhlu stočení krystalu θ .