

Číslo úlohy: **3** Skupina: **2**
 Kruh: **Čtvrtek** Jméno: **Denis Krapivin**
 Datum měření: **7.10.2021** Kolega: **Kseniia Politskovaia**
 Klasifikace:

1 Pracovní úkoly

- V domácí přípravě spočtete plošný moment setrvačnosti I tělesa s obdélníkovým průřezem šířky a a výšky b , odvodte vzorec pro výpočet modulu pružnosti ve smyku G (v závislosti na L , R , α), odvodte vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti torzního kyvadla $I = I_0 + I_1 + I_2$ (I_0 osa bez závaží, I_1 , I_2 závaží umístěná mimo osu rotace).
- Změřte závislost relativního délkového prodloužení $\varepsilon \equiv \frac{\Delta L}{L}$ ocelového drátu na napětí $\sigma \equiv \frac{F}{S}$ ve dvou případech: při postupném zatěžování a postupném odlehčování.
 - Pro oba případy sestrojte graf (v jednom obrázku).
 - Metodou nejmenších čtverců (ne fitem!) vypočítejte modul pružnosti v tahu E ocelového drátu. Získané parametry použijte k vykreslení přímek prokládající sestrojené grafy.
- Změřte závislost průhybu z ocelového nosníku na velikosti síly F ve dvou případech: při postupném zatěžování a postupném odlehčování.
 - Pro oba případy sestrojte graf (v jednom obrázku).
 - Metodou nejmenších čtverců (ne fitem!) vypočítejte modul pružnosti v tahu E ocelového drátu. Získané parametry použijte k vykreslení přímek prokládající sestrojené grafy.
- Změřte závislost úhlu zkroucení φ ocelového drátu na velikosti točivého momentu M ve dvou případech: při jeho postupném zvětšování a zmenšování.
 - Pro oba případy sestrojte graf (v jednom obrázku).
 - Metodou nejmenších čtverců (ne fitem!) vypočítejte modul pružnosti ve smyku G ocelového drátu. Parametry získané metodou nejmenších čtverců použijte k vykreslení přímek prokládající sestrojené grafy.
- Za pomoci torzního kyvadla určete moment setrvačnosti I_0 systému bez závaží, pomocí něj pak modul pružnosti ve smyku G ocelového drátu. Dobu torzních kmitů měřte postupnou metodou.

2 Pomůcky

Stojan se strunou a indikátorovými hodinami, soustava na měření Youngova modulu z průhybu nosníku, soustava na měření modulu pružnosti ve smyku z torze drátu statickou metodou, stojan s drátem a šroubem na upevnění závaží pro měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou, mikrometr, mikrometrický šroub, pásový metr, stopky, sada závaží, digitální váhy.

3 Teorie

3.1 Modul pružnosti v tahu

Uvažujeme homogenní izotropní těleso ve tvaru válce průřezu S a délky l_0 . Upevníme jednu podstavu tělesa a na druhou budeme působit silou F kolmo na podstavu, pak těleso se bude pod vlivem napětí σ deformovat. Tuto deformaci můžeme popsat pomocí Hookůva zákona:

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0} \quad (1)$$

kde Δl je rozdíl mezi délkou po deformaci a počáteční délkou l . Hodnotu E nazýváme modul pružnosti v tahu.

3.2 Modul pružnosti ve smyku

Pokud na volnou podstavu bude působit síla F rovnoběžně s podstavou, pak volná podstava se posune na δ vůči pevné podstavě. Označíme $tg\gamma = \frac{\delta}{l_0}$ úhel zkosu. Pro malé úhly γ (pro malé deformace) platí Hookův zákon pro smyk ve tvaru:

$$\frac{F}{S} = G \frac{\delta}{l_0} = G tg\gamma \approx G\gamma \quad (2)$$

Kde G je modul pružnosti ve smyku.

3.3 Ohyb nosníku

Uvažujeme přímý nosník délky l_0 . Úsek nosníku je na obrázku Obr. 1. Pod vlivem síly F se nosník ohne. Materiál na vnitřní části nosníku se stlačí, na vnější straně je naopak roztažen. Uprostřed těchto částí se nachází tzv. neutrální plocha původní délky l_0 . Deformace nosníku Δl je úměrná vzdálenosti od neutrální plochy y :

$$\Delta l = \frac{l_0}{R} y$$

Kde R je poloměr křivosti.

Použijeme-li Hookův zákon (1) dostaneme:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0} = E \frac{y}{R}$$

Nad neutrální rovinou síla F způsobující roztažení působí v jednom směru, pod neutrální rovinou stlačující síla F působí v opačném směru. Tímto vzniká moment sil M :

$$M = \int_S y dF = \frac{E}{R} \int_S y^2 dS$$

Označíme $I = \int_S y^2 dS$. Hodnotu I nazveme plošným momentem setrvačnosti geometrického příčného průřezu vzhledem k vodorovné ose procházející jeho plošným těžištěm.

Podle [1] dostaneme rovnici:

$$z = -\frac{FL^3}{48EI} \quad (3)$$

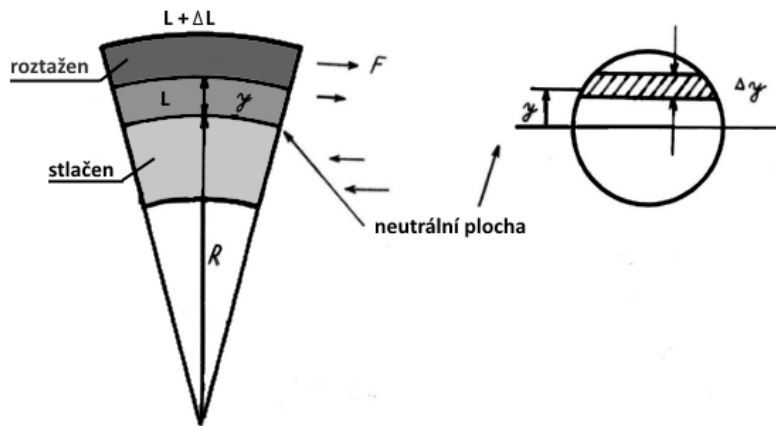
kde z je hodnota průhybu nosníku.

Budeme pracovat s nosníkem obdélníkového průřezu o šířce a a výšce b . Pro plošný moment setrvačnosti I dostaneme:

$$I = \int_S y^2 dS = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy dx = \frac{1}{12} ab^3$$

Dosažením do (3) dostaneme finální rovnici:

$$z = -\frac{mgL^3}{4Eab^3} \quad (4)$$



Obr. 1: Průhyb nosníku [?].

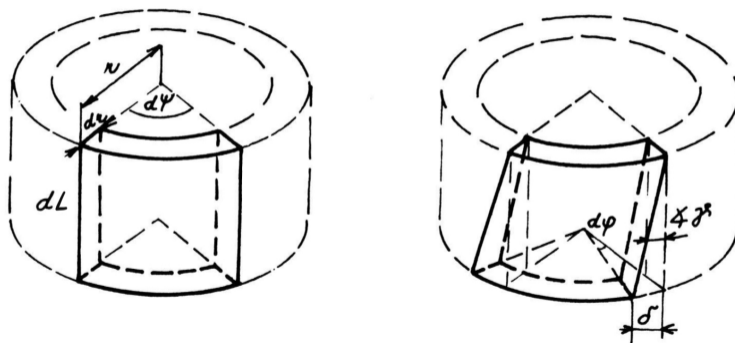
3.4 Torze

Uvažujeme válec poloměru R a výšky l . Upevníme dolní podstavu a horní otočíme kolem osy symetrie válce o úhel φ , tento typ deformace se nazývá torze. Mírou torze je úhel otočení na jednotku délky $\alpha = \frac{\varphi}{l}$

Pro elementární hranolek (levá část obrázku Obr. 2) výšky dl , šířky dr a délky $r d\psi$ úhel pootočení horní podstavy kolem osy je αdl (práva část obrázku Obr. 2). Posunutí δ horní podstavy vůči dolní $\delta = r \alpha dl$, kde r je vzdálenost elementárního hranolu od osy válce. Pro malý úhel smyku γ platí $\gamma = \frac{\delta}{l} = r \alpha$. Z Hookova zákona pro smyk (2) smykové napětí $\tau = G r \alpha$.

Síla která vyvolává toto smykové napětí je kolmá k ose válce, proto její příspěvek k momentu sil $dM = r \tau dS$ vzhledem k ose válce. Celkovou velikost momentu síly M najdeme integraci:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \tau d\psi dr = G \alpha \frac{\pi R^4}{2} = G \frac{\pi R^4}{2l} \varphi \quad (5)$$



Obr. 2: Smyk elementárního hranolu v objemu válce [?].

3.5 Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Na spodní konec drátu délky L a poloměru R je připevněna tyč. Stočíme-li drát v rovině kolmý k osy drátu, pak na tyč působí moment síly (5). Perioda kmitů torzního kyvadla T se rovná:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2LI}{\pi GR^4}} \quad (6)$$

Ze vztahu (6) dostaneme výraz pro modul pružnosti ve smyku G :

$$G = \frac{8\pi L}{T^2 R^4} I \quad (7)$$

kde I je moment setrvačnosti torzního kyvadla. Moment setrvačnosti torzního kyvadla I se skládá z momentu setrvačnosti tyče I_0 a momentu setrvačnosti dvou totožných závaží (dutých válců) umístěných mimo osu:

$$I = I_0 + I_i = I_0 + \frac{m}{2} \left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{V^2}{3} \right) + 2m \left(d_i + \frac{V^2}{2} \right) \quad (8)$$

kde m je hmotnost válce, R_1 a R_2 je vnější a vnitřní poloměr, V je výška, d_i je vzdálenost válce od osy otáčení, I_i označíme společný moment setrvačnosti dvou stejných závaží umístěných mimo osu na vzdálenostní d_i .

Pokud máme momenty setrvačnosti kyvadla pro dvě různá vzdálenosti závaží od osy otáčení (I_1, I_2) a máme periody kmitů pro této dvě nastavení (T_1, T_2), pak pomocí (7) můžeme najít moment setrvačnosti tyče I_0 :

$$G = \frac{I_0 + I_1}{T_1^2} = \frac{I_0 + I_2}{T_2^2} \quad \implies \quad I_0 = \frac{I_1 T_2^2 - I_2 T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} \quad (9)$$

3.6 Metoda nejmenších čtverců

Tuto metodu použijeme k odhadu koeficientů lineární funkce ve tvaru $f(x) = ax + b$. Potřebujeme najít koeficienty pro tři funkce, které dostaneme z (1), (4), (5):

$$\Delta l = A \frac{lF}{S} \quad z = B \left(-\frac{mgL^3}{4ab^3} \right) \quad \varphi = C \frac{2lM}{\pi R^4}$$

Dostaneme sadu rovnic $\Delta y_i = f(x) - y_i$, kde $f(x)$ je hodnota očekávaná, y_i je hodnota naměřená, Δy_i je odchylka náměrných hodnot od očekávaných. Z počátečních podmínek $dl(0) = 0$, $z(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ vidíme, že funkce mají tvar $f(x) = ax$. Proto pro i -té měření můžeme napsat $\Delta y_i = ax_i - y_i$. Pro metodu nejmenších čtverců potřebujeme udělat kvadráty těchto rovnic a je sečíst:

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 = a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2a \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Abychom našli koeficient co nejpřesněji, chceme, aby $\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2$ byl co nejmenší:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 \right) = 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \quad \implies \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Použijeme metodu pro naše účely:

1. Pro modul pružnosti v tahu E z (1) dostaneme:

$$\Delta y_i = A \frac{l m_i g}{S} - \Delta l_i \quad \implies \quad E = \frac{1}{A} = \frac{gl \sum_{i=1}^n m_i^2}{\pi R^2 \sum_{i=1}^n m_i \Delta l_i} \quad (10)$$

2. Pro modul pružnosti v tahu E z (4) dostaneme:

$$\Delta y_i = B \left(-\frac{m_i g L^3}{4ab^3} \right) - z_i \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{B} = -\frac{gl^3 \sum_{i=1}^n m_i^2}{4ab^3 \sum_{i=1}^n m_i z_i} \quad (11)$$

3. Pro modul pružnosti ve smyku G z (5) dostaneme:

$$\Delta y_i = C \frac{2lM}{\pi R^4} - \varphi_i \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{C} = \frac{2l \sum_{i=1}^n M_i^2}{\pi R^4 \sum_{i=1}^n M_i \varphi_i} \quad (12)$$

4 Postup měření

4.1 Měření modulu pružnosti v tahu

4.1.1 Prodloužení drátu

Uvažujeme ocelový drát pevně uchycený za jeden konec. Před měřením vypneme drát závažím o hmotnosti 1 kg. Změříme počáteční délku drátu pomocí pásového měřítka, průměr drátu změříme mikrometrickým šroubem. Postupně přidáváme závaží a měříme prodloužení drátu indikátorovými hodinkami. Měření provádíme přidáním jeden za druhým deseti závaží, pak měříme pro postupné odlehčování.

4.1.2 Ohyb nosníku

Máme kovový nosník čtvercového průřezu. Nosník budeme postupně zatěžovat závažími a pomocí mikroskopu měřit průhyb nosníku. Průhyb nosníku o jeden dílek na okuláru mikroskopu odpovídá 0,0253 mm. Vzdálenost břitů měříme pásovým měřítkem, šířku a výšku nosníku mikrometrickým šroubem. Měření provádíme postupně pro 6 závaží. Opakujeme měření pro odlehčování.

4.2 Měření modulu pružnosti ve smyku

4.2.1 Statická metoda

Máme drát, na jehož konci je připevněna kruhová deska. Na desku jsou navinuta dvě vlákna, které budeme zatěžovat závažími stejné hmotnosti. Tím pádem deska s drátem se otáčí. Úhel otáčení určíme ze stupnice na kruhové desce. Pak pomocí (5) už můžeme najít hodnotu modulu pružnosti ve smyku. Poloměr kotouče a délku drátu měříme pásovým měřítkem, průměr drátu mikrometrickým šroubem. Měření provádíme čtyřikrát pro zatěžování a stejně pro odlehčování.

4.2.2 Dynamická metoda

Změříme délku drátu, vzdálenost závaží od osy otáčení a rozměry závaží pásovým měřítkem, průměr drátu a výšku závaží mikrometrickým šroubem. Hmotnost závaží stanovíme na digitálních vahách. Pak potřebujeme změřit dobu kmitů pro dvě různé vzdálenosti od osy otáčení. Budeme zapisovat mezičas každého kmitu. Mezičas měříme desetkrát pro každou vzdálenost.

5 Zpracování dat

Všude dál hodnoty chyb naměřených hodnot jsou přímo chybami přístrojů. Chybu digitálních vah najdeme přímo v datasheetu [2]. U ostatních měřicích přístrojů položíme jako chybu půlku nejmenšího dílku.

Chyby všech nepřímo naměřených hodnot jsou nalezena jako chyby nepřímého měření [3].

Hodnotu tíhové zrychlení všude položíme $g = 9,81049 \text{ ms}^{-2}$ podle [4].

5.1 Měření modulu pružnosti v tahu (prodloužení drátu)

Měříme délku L_d , poloměr R a plochu průřezu S drátu:

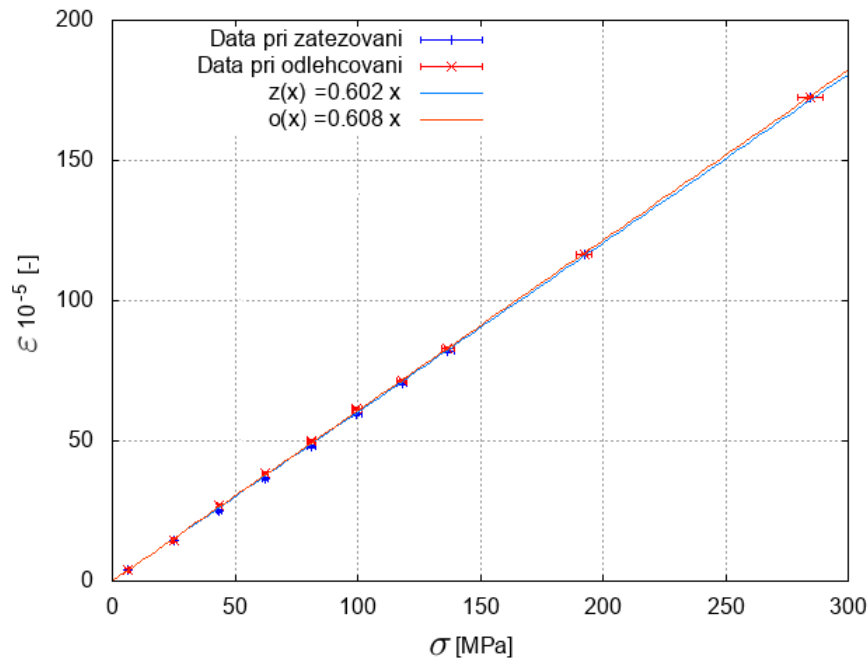
$$L_d = (96,2 \pm 0,05) \times 10^{-2} \text{ m} \quad R = (0,13 \pm 0,0025) \times 10^{-3} \text{ m} \quad S = (530,0 \pm 20,0) \times 10^{-10} \text{ m}^2$$

Naměřené hodnoty hmotnosti závaží m_i , odpovídající prodloužení drátu při zatěžování ΔL_{z_i} a odlehčování ΔL_{o_i} , vypočtené hodnoty relativního délkového prodloužení ε a napětí σ jsou uvedeny v Tab. 1.

$m[10^{-3} \text{ kg}]$	33.82	134.74	235.7	336.64	437.88	537.8	638.58	739.54	1039.8	1539.56
$\Delta L_z[10^{-5} \text{ m}]$	4	14	24	35	46	57	68	79	112	166
$\Delta L_o[10^{-5} \text{ m}]$	4	16	26	37	48	59	69	80	112	166
$\varepsilon_z[10^{-5}]$	4.2	14.6	24.9	36.4	47.8	59.3	70.7	82.1	116.4	172.6
$\varepsilon_o[10^{-5}]$	4.2	16.6	27.0	38.5	49.9	61.3	71.7	83.2	116.4	172.6
$\sigma[\text{MPa}]$	6.3	24.9	43.6	62.3	81.0	99.5	118.1	136.8	192.3	284.7

Tab. 1: Naměřené hodnoty hmotnosti závaží m , odpovídající prodloužení drátu při zatěžování ΔL_z a odlehčování ΔL_o , vypočtené hodnoty relativního délkového prodloužení při zatěžování ε_z a odlehčování ε_o a napětí σ .

Závislost relativního délkového prodloužení na napětí naleznete na Obr. 3.



Obr. 3: Naměřené hodnoty relativního délkového prodloužení ε a závislost na napětí σ .

Pomocí vzorce (10) jsme našli hodnotu modulu pružnosti v tahu pro zatěžování E_z a odlehčování E_o :

$$E_z = (166,0 \pm 2,0) \text{ GPa} \quad E_o = (165,0 \pm 2,0) \text{ GPa}$$

5.2 Měření modulu pružnosti v tahu (ohyb nosníku)

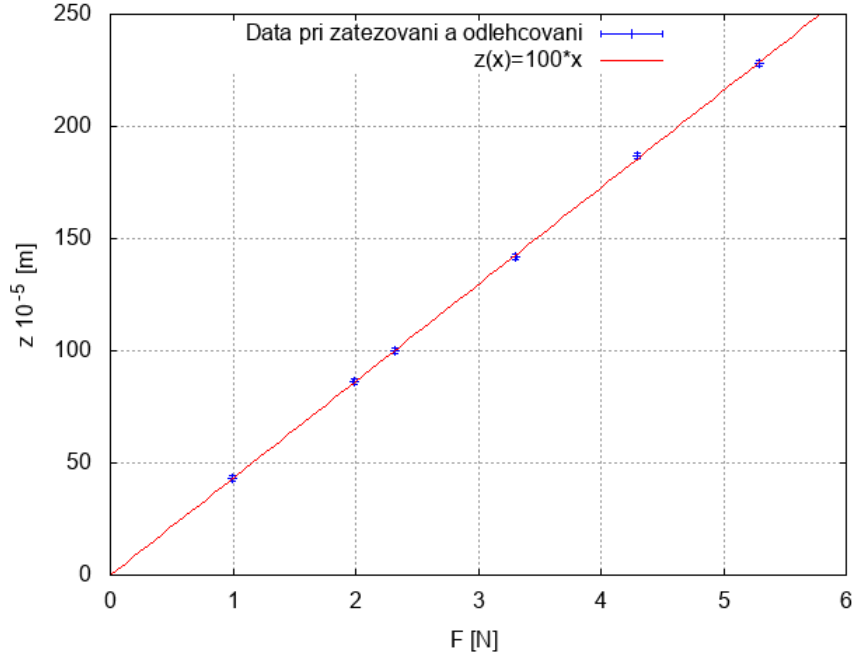
Najdeme šířku a a tloušťku b nosníku, vzdálenost mezi břity L na kterých nosník leží.

$$a = (10,000 \pm 0,005) \times 10^{-3} \text{ m} \quad b = (4,000 \pm 0,005) \times 10^{-3} \text{ m} \quad L = (48,00 \pm 0,05) \times 10^{-2} \text{ m}$$

Naměřená data jsou v Tab. 2.

$m[10^{-3}kg]$	100.9	202.2	236.0	337.0	437.9	538.8
$F[N]$	0.9904	1.9834	2.3160	3.3075	4.2983	5.2874
$z[10^{-5}m]$	43	86	101	142	187	227

Tab. 2: Naměřené hodnoty hmotnosti m , vypočtené hodnoty síly F a průhybu nosníku z .



Obr. 4: Vypočtené hodnoty síly F a průhybu nosníku z a jejich proložení lineární funkcí.

Závislost průhybu nosníku při postupném zatěžování (odlehčování) z na velikosti síly F je na Obr. 4.

Pomocí metody nejmenších čtverců ve tvaru (11) našli jsme velikost modulu pružnosti E , který pro zatěžování a odlehčování nám vyšel úplně stejně:

$$E = (100, 0 \pm 4, 0) \text{ GPa}$$

5.3 Měření modulu pružnosti ve smyku

5.3.1 Statická metoda

Najdeme poloměr kotouče a , délku L a poloměr R drátu:

$$a = (2, 50 \pm 0, 05) \times 10^{-2} \text{ m} \quad R = (1, 000 \pm 0, 003) \times 10^{-3} \text{ m} \quad L = (67, 00 \pm 0, 05) \times 10^{-2} \text{ m}$$

Naměřené hmotnosti závaží a hodnoty uhlů otáčení jsou v Tab. ???. Na Obr. 5 jsou naměřené hodnoty a graf závislosti úhlu otočení na velikosti momentu sil $M = 2mga$.

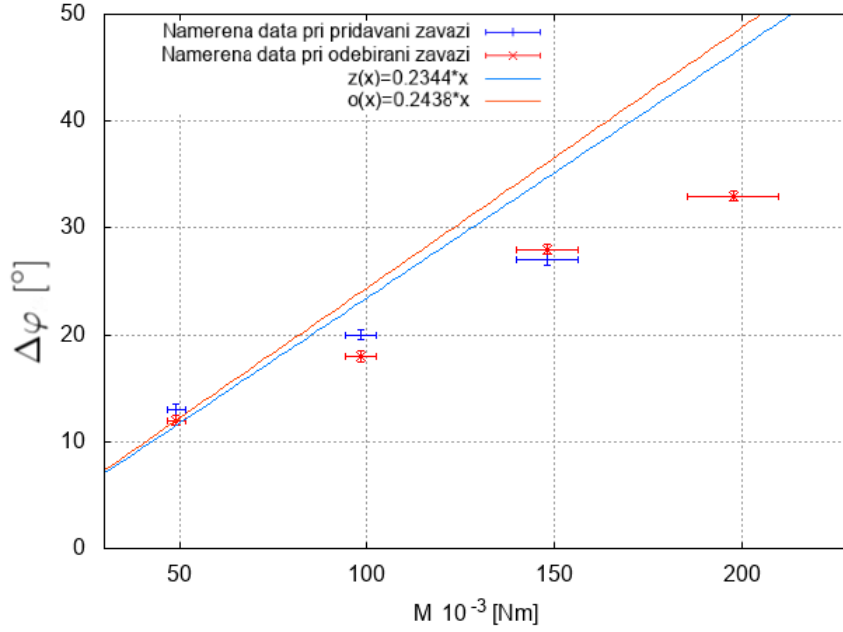
Pro následný výpočet modulu pružnosti ve smyku G jsme použili vzorec (12). Dostali jsme hodnoty pro zatěžování G_z a odlehčování G_o :

$$G_z = (136, 0 \pm 4, 0) \times 10^{-3} \text{ GPa} \quad G_o = (137, 0 \pm 4, 0) \times 10^{-3} \text{ GPa}$$

5.3.2 Dynamická metoda

Změřili jsme parametry válců: vnější R_1 a vnitřní R_2 poloměr, výšku V a hmotnost M . Dále potřebujeme délku kyvadla L , poloměr drátu R_d a vzdálenost závaží od středu tyčky pro první d_1 a druhou d_2 kombinaci:

$$R_1 = (17, 6 \pm 0, 25) \times 10^{-3} \text{ m} \quad R_2 = (3, 5 \pm 0, 25) \times 10^{-3} \text{ m} \quad V = (7, 9 \pm 0, 5) \times 10^{-3} \text{ m}$$



Obr. 5: Vypočtené hodnoty momentu síly M a úhlu otočení $\Delta\varphi$ a jejich proložení lineární funkcí.

$$M = (127,2 \pm 0,2) \times 10^{-3} \text{ kg} \quad R_d = (0,25 \pm 0,0025) \times 10^{-3} \text{ m} \quad L = (246,0 \pm 0,5) \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = (105 \pm 0,5) \times 10^{-3} \text{ m} \quad I_1 = (3,0 \pm 0,3) \times 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad I_2 = (1,2 \pm 0,1) \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

Hodnoty I_1 a I_2 jsme našli podle (8) a I_0 podle (9). V Tab. 3 jsou naměřené hodnoty period kmitu pro dvě polohy závaží.

$T_1[\text{s}]$	8.41	8.21	8.15	8.18	8.23	8.36	8.14	8.34	8.16	8.28
$T_2[\text{s}]$	5.38	5.49	5.36	5.25	5.44	5.34	5.41	5.48	5.52	5.23

Tab. 3: Naměřené hodnoty period kmitu T_1 , T_2 pro dvě polohy závaží.

$$I_0 = (0,14 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Výsledná hodnota modulu pružnosti ve smyku G je spočtena podle (12).

$$G = (71,0 \pm 2,0) \text{ GPa}$$

6 Diskuze

6.1 Měření modulu pružnosti v tahu

Pro moduly pružnosti v tahu pro zatěžování a odlehčování jsme dostali dvě docela podobné hodnoty. Relativně malý, ale viditelný rozdíl hodnot Δl pro oba případy (Tab. 1) je pravděpodobně důsledkem dopružování (elastické hystereze), která se projevuje tak, že po odstranění zatížení se deformace vytrácí postupně po určité době a ne okamžitě.

V experimentu s nosníkem jasný projev hystereze není vidět, ale není to divné. V minulém pokusu projev hystereze byl malým (skoro hodnota chyby), ale viditelným, tady působí na tyč skoro stejná síla, ale na mnohem větší průřez. Deformace je tak malá, že musíme používat mikroskop, který je hodně citlivý k různým vibracím, kterých bylo během měření hodně. Výsledná hodnota E odpovídá mosazi (navenek nosník vypadá také jako mosaz).

6.2 Měření modulu pružnosti ve smyku

V tomto měření se nepodařilo dobře proložit závislost lineární funkcí s nulovým konstantním členem, ale z grafu na Obr. 5 je vidět, že to by šlo nafitovat lineární funkcí s posunutím o konstantu. To znamená, že závislost lineární je, ale pravděpodobně měli jsme systematickou chybu, která posouvá výsledky o konstantu. Tím pádem výsledek E nemůžeme považovat za správný.

Modul pružnosti ve smyku, který jsme našli dynamickou metodou, docela odpovídá oceli (pro ocel máme v tabulce 80 GPa [5]). Taková velká nepřesnost v hodnotě 10% je pravděpodobně způsobena špatným sestavením experimentu. Během experimentu jsme zjistili, že osa otáčení tyče není přímo uprostřed, ale o několik centimetru mimo střed. To určitě mělo vliv na rozložení hmoty v systému.

7 Závěr

Změřili jsme závislost:

- relativního délkového prodloužení ε ocelového drátu na napětí σ při zatěžování a odlehčování,
- průhybu z nosníku na velikosti síly F při zatěžování a odlehčování,
- úhlu zkroucení φ ocelového drátu na velikosti točivého momentu M při zatěžování a odlehčování.

Pro této závislosti jsme sestrojili grafy a vykreslili přímky prokládající sestrojené grafy.

Metodou nejmenších čtverců jsme stanovili:

- hodnotu modulu pružnosti v tahu E ocelového drátu při zatěžování na $(166, 0 \pm 2, 0)$ GPa a při odlehčování na $(165, 0 \pm 2, 0)$ GPa,
- hodnotu modulu pružnosti v tahu E nosníku na $(100, 0 \pm 4, 0)$ GPa,
- hodnotu modulu pružnosti ve smyku G ocelového drátu statickou metodou na $(136, 0 \pm 4, 0)$ GPa při zatěžování a $(137, 0 \pm 4, 0)$ GPa při odlehčování.

Pomocí torzního kyvadla jsme určili moment setrvačnosti I_0 systému bez závaží, pomocí něj pak jsme stanovili modul pružnosti ve smyku G ocelového drátu na $(71, 0 \pm 2, 0)$ GPa.

Literatura

- [1] FJFI CVUT, Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha, 1983, str. 120-127
- [2] Digital scale LUTRON GM-5000 Datasheet - <https://eshop.micronix.eu/data/eu/att/001/1237-588.pdf> [cit.13.10.2021]
- [3] Základy fyzikálních měření, prezentace - <https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf> [cit.13.10.2021]
- [4] WolframAlpha - <https://www.wolframalpha.com/input/?i=gravitational+acceleration+in+prague> [cit.13.10.2021]
- [5] WolframAlpha - <https://www.wolframalpha.com/input/?i=shear+modulus+of+steel> [cit.13.10.2021]