

Číslo úlohy: 5 Skupina: 2  
 Kruh: Čtvrtek Jméno: Denis Krapivin  
 Datum měření: 21.10.2021 Kolega: Kseniia Politskovaia  
 Klasifikace:

---

# Část I - Měření Poissonovy konstanty

## 1 Pracovní úkoly

1. DU: Odvod'te rovnici pro Poissonovu konstantu.
2. Změřte Poissonovu konstantu metodou kmitajícího pístku
3. Změřte Poissonovu konstantu Clément-Désormesovou metodou. Nezapomeňte provést opravu vašeho měření na systematické chyby.
4. Oba výsledky vzájemně porovnejte (procentuálně) a diskutujte, jestli je v rámci chyb můžete považovat za stejné.

## 2 Pomůcky

Barometr, aparatura na měření Poissonovy konstanty Clément-Désormesovou metodou (skleněná baň se dvěma kohouty, otevřený manometr, gumový měch, stopky s fotoelektrickou bránou), aparatura pro měření Poissonovy konstanty metodou kmitajícího pístku (skleněná baňka, skleněná trubice s postranním otvorem, pístek, elektrická pumpička na vzduch, stopky s fotoelektrickou bránou, spojovací trubice).

## 3 Teorie

### 3.1 Clémentova-Désormesova metoda

Uvažujeme nádobu objemu  $V_1$  ve které se nachází ideální plyn s tlakem  $p_1 > p_a$ , kde  $p_a$  je atmosférický tlak. Rozdíl hodnot  $p_1$  a  $p_a$  označíme  $\Delta p$ . Teplota plynu v nádobě a teplota vně nádoby jsou stejné  $T_1$ . Pokud plyn z nádoby budeme vypouštět systém přejde adiabatickou expanzí ze stavu  $(V_1, T_1, p_1)$  do stavu  $(V_2, T_2 < T_1, p_2)$ , kde  $p_2 = p_a$ . Pro adiabatické ději platí Poissonova rovnice:

$$p_1 V_1^\kappa = p_3 V_2^\kappa \quad (1)$$

, kde  $\kappa$  je hledaná Poissonova konstanta.

Při vyrovnání teplot mezi plynem  $T_2$  a okolím  $T_1$  tlak v baňce se stoupne na hodnotu  $p_3 > p_a$ . Rozdíl hodnot  $p_3$  a  $p_a$  označíme  $\Delta p'$ . Změna ze stavu  $(V_1, T_1, p_1)$  do stavu  $(V_3 = V_2, T_1, p_3)$  je izotermická a platí pro ni Boyle-Mariotteův zákon:

$$p_1 V_1 = p_3 V_2 \quad (2)$$

Po úpravách vztahů (1) a (2) dostaneme pro Poissonovu konstantu  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{\Delta p}{\Delta p - \Delta p'} \quad (3)$$

### 3.2 Metoda kmitajícího pístku

Uvažujeme trubici s otvorem a pístkem poloměru  $r$  a hmotností  $m$  (Obr. 1). Horní strana trubice je otevřená a se strany atmosféry na pístek působí tlak  $p_a$ , dolní strana trubice spojená s baňkou objemu  $V$ , vzduch ve které má tlak  $p > p_a$ .

Pod vlivem přetlaku pístek se posune do otevřeného konce trubice, po překročení pístkem otvoru tlak v baňce  $p$  se zmenší, pístek poklesne a celý proces se opakuje. Vhodným nastavením tlaku v baňce lze docílit kmitání symetricky okolo otvoru. Jestliže se pístek posune v trubici o délku  $x$  z rovnovážné polohy, tlak  $p$  se změní o  $dp$ .

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \pi r^2 dp$$

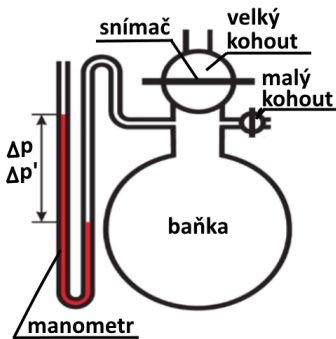
kde  $g$  je tíhové zrychlení.

Z tohoto vztahu jsme odvodili v domácí přípravě (viz Příloha) rovnici pro Poissonovu konstantu  $\kappa$ . Pro určení předpisu pro tlak  $p$  rozepíšeme síly působící na pístek a dosazením do vzorce pro  $\kappa$  z domácí přípravy máme:

$$mg = \pi r^2 p - \pi r^2 p_a \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{4\pi m V}{T^2 r^2 (\pi r^2 p_a + mg)} \quad (4)$$

## 4 Postup měření

### 4.1 Clémentova-Désormesova metoda



Obr. 2: Schéma Clémentova-Désormesova přístroje [1].

Pro měření touto metodou se používá uspořádání patrné z Obr. 2.

Budeme měřit hodnotu přetlaku  $\Delta p$  před otevřením velkého kohoutu, dobu otevření velkého kohoutu  $t_k$  a hodnotu přetlaku  $\Delta p'$  po vyrovnání teplot s okolím.

Otevřeme malý kohout a stlačíme vzduch gumovým měchem, pak malý kohout zavřeme a nechme plyn v baňce vyrovnat teplotu s okolím. Odečítáme hodnoty výšek obou hladin manometru. Hodnotu přetlaku  $\Delta p$  najdeme jako výškový rozdíl hladin otevřeného manometru. Stiskem krátce otevřeme velký kohout, dobu otevření kohoutu nám ukáží stopky, které spojeny s digitálním snímačem. Snímač by měl být nastaven do režimu "gate".

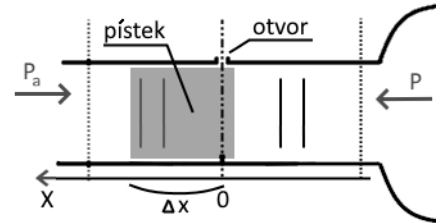
Měření několikrát opakujeme.

### 4.2 Metoda kmitajícího pístku

Měřicí sestava je vyobrazena na Obr. 3.

Vhodným nastavením otevření ventilu a regulačního knoflíku na pumpičce dosáhneme takového stavu, aby pístek kmital souměrně mezi ryskami na trubici a přerušoval světelný paprsek z fotoelektrické brány, který umístěn na vyšší konci trubice.

Pomocí snímače budeme měřit počet kmitu za pět minut. Chybu měření snímače zanedbejme. Měření následně několikrát opakujeme.



Obr. 1: Skleněná trubice s postranním otvorem a plastovým pístkem.

## 5 Zpracování dat

### 5.1 Clémentova-Désormesova metoda

Naměřené hodnoty rozdílu výšek hladin pro měření před otevřením kohoutu  $\Delta h$  a po otevření  $\Delta h'$ , časy otevření kohoutu  $K$  a vypočtené hodnoty Poissonovy konstanty  $\kappa$  s chybou  $\sigma_\kappa$  pro každé měření jsou v Tab. 1.

Chyba měření výšky hladiny je 1 mm, pak chyba měření rozdílu výšek se rovná 1,4 mm podle vztahu pro výpočet chyb nepřímého měření [2]. Chyba měření času  $K$  je zanedbatelná, chyba měření  $\sigma_\kappa$  nalezena jako chyba nepřímého měření.

Vzhledem k tomu, že popsáný děj můžeme považovat za adiabatický jen pro krátkou dobu otevření kohoutu hodnota Poissonovy konstanty by měla záviset na čase. Budeme tuto závislost uvažovat lineární. Proložení naměřených hodnot lineární funkcí je na Obr. 4.

Extrapolací naměřených hodnot zjistíme  $\kappa(0)$ :

$$\kappa(0) = (1,33 \pm 0,01)$$

$\Delta h[\text{cm}]$	4.4	3.6	7.6	6.6	12.5	7.0	1.9	2.0	4.1	13.3	12.5	7.6
$\Delta h'[\text{cm}]$	1.1	0.8	1.8	1.6	3.1	1.5	0.3	0.4	0.8	2.9	3.1	1.7
$K[\text{s}]$	0.147	0.150	0.183	0.222	0.189	0.358	0.218	0.219	0.529	0.793	0.169	0.335
$\kappa[-]$	1.30	1.29	1.31	1.32	1.33	1.27	1.20	1.3	1.24	1.28	1.33	1.29
$\sigma_\kappa[-]$	0.06	0.07	0.03	0.04	0.02	0.03	0.10	0.10	0.05	0.02	0.02	0.03

Tab. 1: Naměřené hodnoty rozdílu výšek hladin pro měření před otevřením kohoutu  $\Delta h$  a po otevření  $\Delta h'$ , časy otevření kohoutu  $K$ , vypočtené hodnoty Poissonovy konstanty  $\kappa$  s příslušnou chybou  $\sigma_\kappa$ .

### 5.2 Metoda kmitajícího pístku

Hodnoty objemu láhvi  $V$ , hmotnosti pístku  $m$  a jeho poloměru  $r$  považujeme ve výpočtech za přesné (tj. s nulovou chybou):

$$V = 1133 \text{ cm}^3 \quad m = 4,59 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad r = 5,95 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Naměřené hodnoty počtu kmitu  $N$  za 5 minutové intervaly jsou v Tab. 2

$N[-]$	890	887	883	887	884
--------	-----	-----	-----	-----	-----

Tab. 2: Naměřené hodnoty počtu kmitu  $N$  pístku za 5 minutové intervaly.

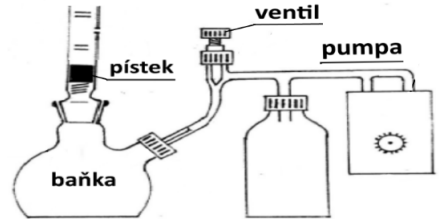
Najdeme střední počet kmitu  $N_{\text{str}}$  jako aritmetický průměr těchto hodnot, chybu najdeme jako střední kvadratickou chybu. Pak dostaneme hodnotu periody kmitu pístku  $T$ , chybu najdeme jako chybu nepřímého měření:

$$N_{\text{str}} = 886,2 \pm 1,3 \quad \implies \quad T = \frac{5 \text{ min}}{N_{\text{str}}} = (339,0 \pm 0,5) \text{ ms}$$

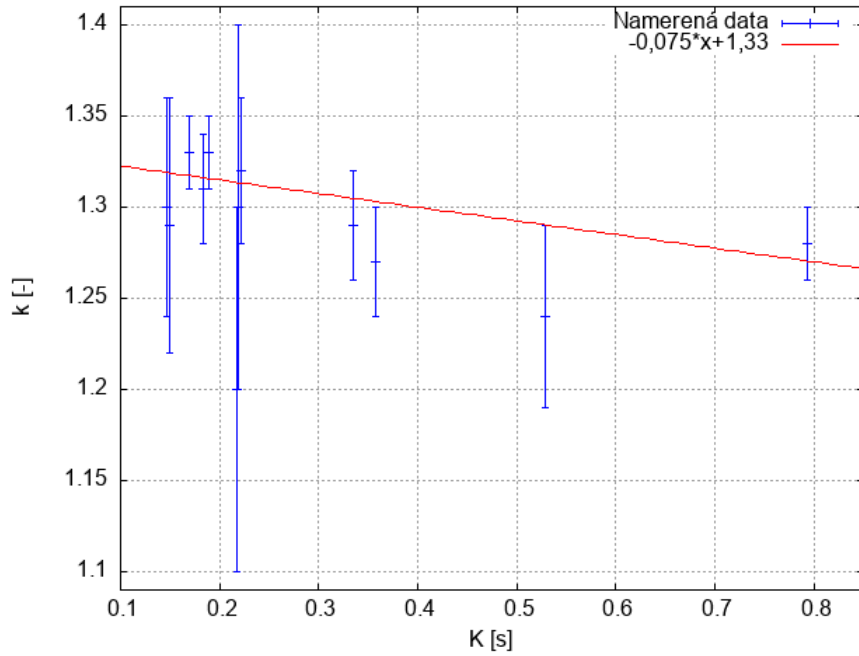
Podle vzorce (4) dostaneme hodnotu Poissonovy konstanty  $\kappa$ :

$$\kappa = (1,37 \pm 0,03)$$

Při výpočtu objemů jsme použili hodnoty tíhového zrychlení  $g$  [3] a atmosférického tlaku  $p_a$  [4]. Chybu měření  $\kappa$  jsme určili jako chybu nepřímého měření.



Obr. 3: Schéma aparatury na měření Poissonovy konstanty metodou kmitajícího pístku [1].



Obr. 4: Vypočtené hodnoty Poissonovy konstanty  $\kappa$  pro naměřené hodnoty času otevření kohoutu  $K$  a proložení dat lineární funkcí.

## 6 Diskuze

Hodnotu Poissonovy konstanty jsme pomocí Clémentove-Désormesovy metody naměřili s chybou 0,75%, ale při srovnání s tabulkovou hodnotou Poissonovy konstanty [5] je vidět, že hodnoty od sebe vzdáleny  $\geq 7\sigma$ , tím pádem hodnoty nemůžeme považovat za shodné.

Hodnota redukovaného  $\chi^2$  se rovná přibližně 0,5. Pravděpodobně by to mohlo být spojeno s příliš velkými chybami jednotlivých měření  $\kappa$  a hlavně s malým počtem měření.

Celkem je vidět, že hodnota Poissonovy konstanty opravdu závisí na  $K$  a našli jsme ji s poměrně vysokou přesností. Nesoulad s tabulkovou hodnotou je pravděpodobně způsoben systematickou chybou, která mohla být způsobena například výměnou tepla stěnami nádoby během expanzi (není adiabatický dej). Během experimentu se také mohlo stát, že při příliš krátkém otevření kohoutku nestihl tlak klesnout na atmosférický.

Hodnota Poissonovy konstanty nalezená metodou kmitajícího pístku už shoduje s tabulkovou hodnotou v rámci  $2,3\sigma \leq 3\sigma$ , tím pádem hodnoty jsou srovnatelné.

Hodnoty Poissonovy konstanty nalezené dvěma různými metodami se shoduje v rámci  $1,3\sigma \leq 3\sigma$ .

U obou metod bereme ideální plyn pro zjednodušení výpočtů, což může mít také vliv na výsledek.

## 7 Závěr

Změřili jsme hodnotu Poissonovy konstanty Clémentovou-Désormesovou metodou a dostali výsledkem  $\kappa = (1,33 \pm 0,01)$ . V diskuzi jsme rozhodli, že hodnota pravděpodobně zatížena systematickou chybou.

Pro měření metodou kmitajícího pístku jsme dostali hodnotu Poissonovy konstanty  $\kappa = (1,37 \pm 0,03)$ . Tento výsledek shoduje s tabulkovou hodnotou v rámci  $2,3\sigma$ .

# Část II - Měření dutých objemů

## 8 Pracovní úkoly

1. Určit objem prachovnice metodou vážení.
2. Určit objem téže prachovnice pomocí komprese plynu.
3. Oba výsledky vzájemně porovnat.

## 9 Pomůcky

Měřený objem (prachovnice), záslepka, speciální plynová byreta s porovnávacím ramenem, katetometr, teploměr, barometr, digitální váhy.

## 10 Teorie

### 10.1 Metoda vážení

Pokud vyplníme nějaký dutý objem  $V$  kapalinou (například vodou) známe hustoty  $\rho_v$  a najdeme hmotnost vody  $m_v$  jako rozdíl hmotností prázdného a plného objemu, pak dostaneme vzorec pro výpočet  $V$ . Nezapomeneme na to, že hustota vody závislá na teplotě  $t$ :

$$\rho_v = \frac{1}{0.9998(1 + 0.00018t)} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_v}{\rho_v} = 0.9998m_v(1 + 0.00018t) \quad (5)$$

### 10.2 Metoda kompresí plynu

Při kompresní metodě spojíme zkoumaný objem  $V$  trubicí objemu  $V_t$  s byretou. Druhy konec byrety je spojen s se zásobní nádobou. Změnou výšky budeme vytlačovat vodu do byrety, sahá-li voda v byretě před kompresí k dílku  $V_1$  a stoupne-li po kompresi k dílku  $V_2$ , stoupne tlak v objemu z  $p$  na hodnotu  $p + \Delta p$ . Z úpravy Boyle-Mariotteova zákona platí:

$$V + V_t = (V_2 - V_1) \frac{p}{\Delta p} + V_2 - V_b \quad (6)$$

Přetlak  $\Delta p$  budeme hledat pomocí otevřeného manometru, ze kterého lze odečítat rozdíl hladin  $\Delta h$ . Dosazením do (6) dostaneme výslednou rovnici:

$$\Delta p = \Delta h \rho g \quad \Rightarrow \quad V + V_t = (V_2 - V_1) \frac{p}{\Delta h \rho g} + V_2 - V_b \quad (7)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení,  $\rho$  je hustota vody a  $V_b$  je celkový objem byrety.

## 11 Postup měření

### 11.1 Metoda vážení

Nejdřív potřebujeme změřit teplotu vzduchu v místnosti. Pomocí digitálních vah určíme hmotnost prázdné prachovnice.

Velkou lahev naplníme vodou, při míchání vody chceme docílit teplotu vody stejnou s teplotou vzduchu, teplotu vody  $t$  změříme teploměrem. Naplníme prachovnice vodou až po okraj s pomocí injekční stříkačky a ji zvážíme. Po vážení vodu vylijeme a znovu naplníme lahev. Pak postup se několikrát opakuje.

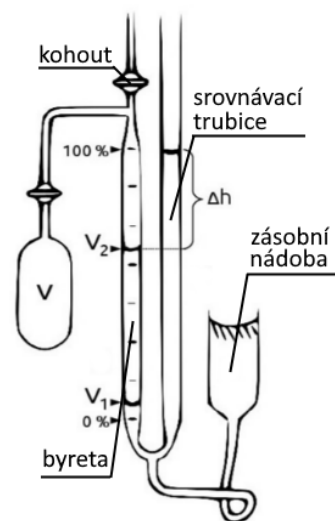
## 11.2 Metoda kompresí plynu

Shéma aparatury na měření objemů kompresí plynů je na Obr. 5.

Prachovnice připojíme k hornímu konci byrety, povolíme výpustný kohout na byretě a počkáme až hladiny v byretě a srovnávací trubici se vyrovnají.

Kohout zavřeme a odečteme hodnotu  $V_1$  na stupnici na byretě. Zvedneme nádobu s vodou a odečteme novou hodnotu  $V_2$  ze stupnice a pomocí katetometru určíme rozdíl hladin  $\Delta h$  v byretě a srovnávací trubici. Pak nádobu opustíme a otevřeme kohout aby tlak se vyrovnal s atmosférickým. Tento postup opakujeme několikrát.

Následně vyměníme lahev za záslepku a aplikujeme stejný postup měření. Výsledný objem potom získáme vzájemným odečtením obou výsledků.



Obr. 5: Schéma aparatury na měření objemů kompresí plynu

## 12 Zpracování dat

### 12.1 Metoda vážení

Uvedeme výsledky pro měření teplotu místnosti  $t_m$  a teplotu vody  $t_v$ :

$$t_m = 22,9^\circ\text{C} \quad t_v = 26^\circ\text{C}$$

Chyby měření vzhledem k tvaru rovnice (5), pro kterou tyto hodnoty potřebujeme [1], jsou zanedbatelné.

Naměřené hodnoty hmotnosti  $m$  prachovnice s vodou a bez uvedeny v Tab. 3.

Lahev	S vodou					Prázdná
$m[\text{g}]$	211.7	211.6	211.7	211.9	211.9	96.4
$\sigma_m[\text{g}]$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Tab. 3: Naměřené hmotnosti prázdné a plněné vodou prachovnice  $m$  a jejich chyba  $\sigma_m$

Chyby měření hmotností jsou chybami měřicího přístroje. Najdeme výslednou hodnotu hmotnosti prachovnice s vodou  $m_{pv}$  a chybu této hodnoty jako střední kvadratickou chybu:

$$m_{pv} = (211,76 \pm 0,06) \text{ g}$$

Odečtením od  $m_{pv}$  hodnoty hmotnosti prázdné prachovnice a dosazením do (5) dostaneme:

$$V = (115,92 \pm 0,14) \text{ cm}^3$$

Chybu  $V$  jsme spočetli jako chybu nepřímého měření.

## 12.2 Metoda kompresí plynu

Naměřené hodnoty objemů  $V_1$ ,  $V_2$  a rozdílu hladin v byretě a srovnávací trubici  $\Delta h$  jsou v Tab. 4. Hodnoty  $V_1$  a  $V_2$  jsou uvedeny v tabulce po převodu mezi stupnicí na byretě a jejím objemem podle [1].

Vypočtené hodnoty objemů  $V$  pomocí vzorce (7) pro zkoumanou nádobu s trubicí a bez trubky taky uvedené v Tab. 4. Při výpočtu objemů  $V$  jsme použili hodnotu tíhového zrychlení  $g$  [3] a atmosférického tlaku  $p_a$  [4].

Chybu měření objemů  $V_1$  a  $V_2$  podle stupnice bereme jako půlku nejmenšího dílku na stupnici byrety, co po převodu je  $0,2 \text{ cm}^3$ . Jako chybu měření  $\Delta h$  katetometrem uvažujeme  $0,1 \text{ mm}$ . Chybu měření výsledného objemu  $\sigma_V$  najdeme jako chybu nepřímého měření.

Pokud vypočítáme objem nádoby s trubicí z opakovaných měření jako vážený průměr a odečteme změřený objem trubky, dostaneme výsledný objem nádoby:

$$V_n = (130 \pm 40) \text{ cm}^3$$

	Trubka a nádoba					Trubka
$V_1[\text{cm}^3]$	10.5	4.9	3.0	2.0	3.8	8.7
$V_2[\text{cm}^3]$	11.0	5.4	3.6	2.8	4.4	9.0
$\Delta h[\text{mm}]$	30.4	28.0	32.1	44.3	27.2	54.3
$V[\text{cm}^3]$	120	130	130	120	170	0
$\sigma_V[\text{cm}^3]$	100	100	90	70	100	50

Tab. 4: Naměřené hodnoty objemů  $V_1$ ,  $V_2$  a rozdílu hladin v byrete a srovnávací trubice  $\Delta h$ , vypočtené hodnoty objemu  $V$  pro zkoumanou nádobu s trubkou a bez trubky, příslušná chyba  $\sigma_V$ .

## 13 Diskuze

Naměřená hodnota objemu prachovnice  $V_n = (115,92 \pm 0,14) \text{ cm}^3$  má malou relativitou chybu cca 0,12%. Pro měření objemů jsme použili vodu o teplotě  $26^\circ\text{C}$ , což o  $3,1^\circ\text{C}$  více než teplota v místnosti. To ale nemělo by ovlivnit výsledek o více než  $0,8 \text{ cm}^3$ . Tím pádem výsledná hodnota objemu prachovnice změřená metodou vážení je  $V_n = (115,9 \pm 1) \text{ cm}^3$ .

Měřením metodou kompresí plynu nám se nepovedlo dost přesně zjistit hodnotu objemu prachovnice  $V_n = (130 \pm 40) \text{ cm}^3$  (relativní chyba měření je cca 30%). Pravděpodobně by šlo výsledek zpřesnit zvětšením počtu měření pro prachovnice s trubkou a hlavně pro samotnou trubku.

Největší vliv na hodnotu chyby měření měla chyba měření objemu byrety. Tato chyba způsobena tím, že nejmenší dílek na stupnici byrety á hodnotu 0,5%. Pokud by celkový objem byrety byl menší, šlo by objem naměřit přesněji.

Hodnoty objemu změřené dvěma metodami se shoduje v rámci  $2,2\sigma \leq 3\sigma$ .

## 14 Závěr

Změřili jsme hodnotu objemu prachovnice metodou vážení a dostali výsledkem  $V_n = (115,9 \pm 1) \text{ cm}^3$ . Metodou kompresí plynu nám se nepovedlo dost přesně zjistit hodnotu objemu prachovnice  $V_n = (130 \pm 40) \text{ cm}^3$  (relativní chyba měření je cca 30%).

Hodnoty objemu změřené dvěma metodami se shoduje v rámci  $2,2\sigma$ . Metoda vážení dává přesnější výsledek než měření metodou kompresí plynu.

## Literatura

- [1] Návod - Poissonova konstanta a měření dutých objemů - [https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435328/mod\\_resource/content/8/Poisson\\_201119.pdf](https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435328/mod_resource/content/8/Poisson_201119.pdf) [cit.25.10.2021]
- [2] Základy fyzikálních měření, prezentace - <https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf> [cit.25.10.2021]
- [3] WolframAlpha - <https://www.wolframalpha.com/input/?i=gravitation+acceleration+in+prague> [cit.25.10.2021]
- [4] WolframAlpha - <https://www.wolframalpha.com/input/?i=atmospheric+pressure> [cit.25.10.2021]
- [5] WolframAlpha - <https://www.wolframalpha.com/input/?i=Heat+capacity+ratio+for+air> [cit.25.10.2021]

# Příloha

## 15 Domácí příprava

DU: Odvodte rovnici pro Poissonovu konstantu z rovnice  $pV^k = \text{konst}$ , a

$$d(pV^k) = dpV^k + pkV^{k-1}dV = 0 \quad \boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} = \pi r^2 dp} \star$$

Použijme aproximaci pro malé výchylky:

$$dV = \pi r^2 x \Rightarrow dp = -\frac{pkV^{k-1}dV}{V^k} = -\frac{pkV^{k-1}\pi r^2 x}{V^k} = -\frac{pk\pi r^2}{V} x$$

Dosazením do rovnice  $\star$  dostaneme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{pk\pi r^2}{V} x \Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{pk\pi r^2}{mV}\right)}_{\omega^2} x = 0$$

je rovnice harmonického oscilátoru,

popisuje

harmonický pohyb s

periodou  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$T = \frac{4\pi^2 mV}{pk\pi r^2} = \frac{4mV}{k\pi r^2} \Rightarrow \boxed{K = \frac{4mV}{T^2 \pi r^2}}$$