SPECIALIZOVANÉ PRAKTIKUM II FJFI ČVUT v Praze

Normální Zeemanův jev

Jméno: Krapivin Denis Kolega: Roman Jnovčik

Datum měření: 24.04.2025 Klasifikace:



1 Pracovní úkoly

• DÚ: V domácí přípravě odvoď te interferenční podmínku $\Delta = k\lambda$.

- Změřte veličinu Δ (viz teoretický úvod, $\Delta \approx \Delta_a^{i+1,i} \approx \Delta_b^{i+1,i}$). Pro statistické zpracování dat použijte postupnou metodu.
- ullet Změřte a určete závislost intenzity magnetického pole B mezi hroty elektromagnetu aparatury v závislosti na proudu I protékajícím cívkami.
- Změřte manuálně velikost Bohrova magnetonu.
- Měření zopakujte pomocí CCD kamery a počítačového zpracování dat. Využijte polarizačního filtru pro oddělení σ a π složek spektra. Změřte závislost velikosti rozštěpení hladin při Zeemanově efektu ΔE na intenzitě magnetického pole B.
- Výsledky předchozího měření zpracujte graficky a metodou nejmenších čtverců určete hodnotu Bohrova magnetonu ($\mu_{\rm B} = \frac{e \cdot \hbar}{-2 \cdot m_e}$, $\Delta E = \mu_{\rm B} \cdot B$).

2 Pomůcky

Optická lavice, $2 \times$ spojka 150 mm, červený filtr, Fabry-Perotův etalon, mikroskopický okulár, kadmiová výbojka se zdrojem, gaussmetr + univerzální měřicí přístroj Leybold, Bunsenův stojan s držákem na gaussmetr, dvojice cívek a regulovatelný proudový zdroj, ampérmetr, CCD kamera VideoCom + PC a software.

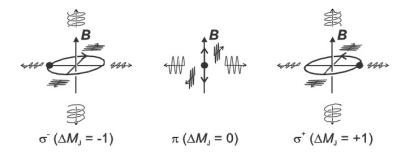
3 Teoretický úvod

Hlavním cílem spektroskopie je měření charakteristických frekvencí záření, které atomy vyzařují nebo absorbují. Aby bylo možné takové záření pozorovat, je nejprve nutné atomy přivést do excitovaného stavu.

Ve spektroskopických výbojkách dochází k excitaci atomů v důsledku srážek s elektrony, které jsou urychlovány elektrickým polem. Excitace znamená, že jeden nebo více elektronů v atomu přijme energii a přejde na vyšší energetickou hladinu. Takový excitovaný stav je nestabilní a při návratu elektronu do nižšího stavu atom vyzáří foton. Energie každé hladiny v atomu je přesně daná, a proto se při deexcitaci vyzařuje záření o přesně definované vlnové délce. Analýzou energie tohoto záření lze získat informace o rozložení energetických hladin atomu.

3.1 Magnetické pole

Zajímá nás chování excitovaného atomu ve vnějším magnetickém poli, přesněji řečeno změna vlnových délek vyzařovaného světla při působení tohoto pole. Magnetické pole ovlivňuje energetické hladiny atomu a způsobuje jejich rozštěpení podle orientace momentu hybnosti vzhledem k poli.



Obr. 2: Směr a polarizace charakteristického záření pro různé typy přechodů v závislosti na kvantovém čísle ΔM_J .

Pro vysvětlení tohoto jevu budeme používat poloklasické pojetí. Elektron si představíme jako bodový náboj e, který se pohybuje po kruhové dráze o poloměru r kolem jádra s rychlosti v. Takový pohyb lze přirovnat k elektrickému proudu I v malé smyčce, která vytváří magnetické pole - tedy i magnetický moment μ_l :

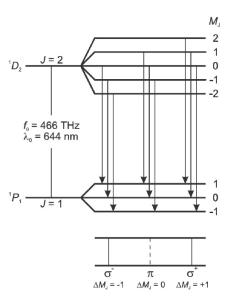
$$I = -e\frac{v}{2\pi r} \quad \rightarrow \quad \vec{\mu}_l = I \cdot \pi r^2 \cdot \vec{n} = \frac{e \cdot v \cdot r}{2} \cdot \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \\ m_e \cdot r \cdot v \cdot \vec{n} \end{vmatrix} = \frac{e}{2m_e} \vec{l}. \tag{1}$$

Při působení magnetického pole o intenzitě \vec{B} se energie elektronu s orbitálním magnetickým momentem $\vec{\mu}_l$ změní o hodnotu $\Delta E = -\vec{\mu}_l \cdot \vec{B}$. Je zřejmé, že tato změna energie závisí na směru orbitálního momentu \vec{l} vůči magnetickému poli. Vzhledem k tomu, že orbitální moment je kvantovaný, můžeme po zvolení směru magnetického pole \vec{B} jako osy z vyjádřit změnu energie ve tvaru:

$$\Delta E = -\vec{\mu}_l \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} \vec{l} \cdot \vec{B} = \left| l_z = m_l \cdot \hbar \right| = \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot m_l \cdot B = \mu_B \cdot m_l \cdot B, \tag{2}$$

kde kvantové číslo m_l nabývá hodnot v rozsahu $-l \leq m_l \leq l,$ a $\mu_{\rm B}$ je konstanta nazývaná Bohrův magneton.

3.2 Výběrová pravidla



Obr. 1: Rozštěpení energetických hladin atomu kadmia pod vlivem vnějšího magnetického pole.

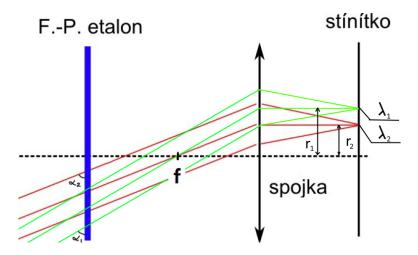
Na Obr.1 jsou znázorněny dvě energetické hladiny charakteristické pro atom kadmia a jejich rozštěpení na větší počet úrovní při působení magnetického pole. Vlnová délka fotonu emitovaného při deexcitaci atomu (644 nm) odpovídá červené barvě.

V souvislosti s tím, že při deexcitaci atomu musí platit zákon zachování momentu hybnosti, povoleny jsou pouze takové přechody, při než změna kvantového čísla je $\Delta M_J=0,\pm 1$, změna $\Delta J=\pm 1$ a změna spinu je $\Delta S=0$.

Při $\Delta M_J = 0$ (tzv. π -přechod) je vyzařování podobné vyzařování kmitajícího dipólu podél směru magnetického pole (Obr.2), tedy vyzařování ve směru kmitání chybí, zatímco ve všech ostatních směrech je vyzařování lineárně polarizované ve směru magnetického pole.

Pro $\Delta M_J=\pm 1$ fotony směřující podél magnetického pole jsou kruhově polarizované, zatímco fotony vycházející kolmo na toto pole mají lineární polarizaci. Přechody σ^+ a σ^- se od sebe liší směrem kruhové polarizace.

Tímto způsobem lze měřením polarizace vyzařování v závislosti na směru magnetického pole určit konkrétní typ přechodu.



Obr. 3: Schéma rozkladu světla podle vlnové délky pomocí F.-P. etalonu. Etalon funguje jako filtr, který propouští záření pod různými úhly v závislosti na délce vlny. Poloměry koncentrických kružnic r_1 a r_2 závisí na ohniskové vzdálenosti čočky f.

3.3 Fabry-Perotuv etalon

Pro spektroskopické rozložení emitovaného záření budeme používat tzv. Fabry-Perotův etalon, který představuje skleněnou destičku se stěnami z poloprůhledného zrcadla. Při vstupu paprsku do etalonu část světla vychází ven, část se odráží, odrazí se od protilehlé stěny a znovu částečně vychází ven. Paprsky, které vycházejí, pak mají vzájemný fázový posun úměrný optické dráze Δ , kterou prošly uvnitř skla. Výsledný fázový posun vede ke konstruktivní či destruktivní interferenci.

Z podmínky interferenčních maxim $\Delta = k\lambda$, $k \in \mathbb{N}$ je vidět, že pro každou délku vlny je potřebná vlastní Δ , která závisí na úhlu, pod kterým paprsek vstupuje do etalonu. Takto pro každou délku vlny existují diskrétní hodnoty úhlů, pro které je etalon průhledný. Po zaostření získaných paprsků na obrazovce uvidíme soustavu koncentrických kružnic, jejichž poloměry jsou určitým způsobem závislé na interferenčních maximech (Obr.3).

Chtěli bychom, aby ve výsledném vzorci pro energii figurovaly pouze přímo měřitelné veličiny. Jednou z těchto veličin je poloměr kružnic na obrazovce r_i . Z Obr.3 je patrné, že:

$$\tan \alpha_i = \frac{r_i}{f} \longrightarrow r_i = f \tan \alpha_i \approx f \sin \alpha_i \approx f \alpha_i,$$
 (3)

kde α_i je úhel, pod kterým paprsek vystupuje z etalonu, f je ohnisková vzdálenost čočky.

Dalším cílem je nalezení úhlu α podle přímo měřených veličin. K tomu využijeme interferenční podmínku a dvě geometrická vyjádření pro optickou dráhu Δ (viz DU). Z první rovnice získáme vyjádření pro nulový interferenční maximum k_0 , druhá rovnice nám poskytne vyjádření úhlu β_i pomocí k_i a k_0 :

$$= 2d\sqrt{n^2 - \sin\alpha_i^2} \quad \to \quad k_i = \frac{2d}{\lambda}\sqrt{n^2 - \sin\alpha_i^2} \quad \to \quad k_0 = \frac{2dn}{\lambda};$$

$$k_i\lambda = \Delta$$

$$= 2dn\cos\beta_i = k_0(1 - 2\sin^2\frac{\beta_i}{2}) \stackrel{\sin\beta_i \approx \beta_i}{\approx} k_0(1 - \frac{\beta_i^2}{2}) \quad \to \quad \beta_i = \sqrt{\frac{2(k_0 - k_i)}{k_0}},$$

$$(4)$$

kde d je tloušťka Fabry-Perotova etalonu.

Protože k_0 není celé číslo, první interferenční maximum k_1 (k_1 celé číslo) lze vyjádřit jako kombinaci k_0 a malého čísla ϵ . Dále lze vyjádřit k_i takto:

$$k_1 = k_0 - \epsilon, \quad \epsilon \in (0, 1) \quad \rightarrow \quad k_i = k_0 - \epsilon - (i - 1).$$
 (5)

Dále, s využitím předpokladu malých úhlů α_i , β_i , dosadíme vztah (3) a (5) do (4). Tímto způsobem získáme vyjádření pro poloměry kružnic r_i pro určitou vlnovou délku λ :

$$n = \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i} \approx \frac{\alpha_i}{\beta_i} \quad \to \quad r_i = f\alpha_i = fn\beta_i = \sqrt{\frac{2f^2n^2(k_0 - k_i)}{k_0}} = \sqrt{\frac{2f^2n^2}{k_0}}\sqrt{\epsilon + (i-1)}. \tag{6}$$

Jako poslední krok zůstává odstranit z výrazu ϵ . K tomu vyjádříme ϵ pomocí rozdílu čtverců (i+1)-tého a i-tého interferenčního maxima:

$$r_{i+1}^2 - r_i^2 = \frac{2n^2 f^2}{k_0}; \qquad \epsilon = \frac{r_{i+1}^2}{r_{i+1}^2 - r_i^2} - i.$$
 (7)

Nyní předpokládejme, že do etalonu vstupuje světlo dvou velmi blízkých vlnových délek λ_a a λ_b . Je-li rozdíl vlnových délek dostatečně malý, interferenční kroužek příslušný k nějakému řádu se nepřekryje s kroužkem vedlejšího řádu příslušným k druhé vlnové délce, tedy $k_{1,b}-k_{1,a}=0$. S využitím vztahu mezi vlnovou délkou a frekvencí elektromagnetického záření $\nu=\frac{c}{\lambda}$ získáme vyjádření pro rozdíl frekvencí mezi paprsky s různou vlnovou délkou:

$$\epsilon_a - \epsilon_b = k_{0,a} - k_{1,a} - k_{0,b} + k_{1,b} = 2dn\left(\frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_b}\right) + (k_{1,b} - k_{1,a}) = \frac{2dn}{c}\Delta\nu \quad \rightarrow \quad \Delta\nu = \frac{c}{2dn}(\epsilon_a - \epsilon_b). \tag{8}$$

Dosazením výrazu (7) do výrazu (8) získáme vzorec pro určení rozdílu frekvencí $\Delta \nu$, kde vystupují pouze přímo měřené veličiny (poloměry proužků). Výraz je nicméně poměrně komplikovaný a lze jej zjednodušit, pokud vezmeme v úvahu, že při blízkých hodnotách λ_a a λ_b platí $\Delta \approx \Delta_a^{i+1,i} \approx \Delta_b^{i+1,i}$ (díky blízkosti $k_{0;a}$ a $k_{0;b}$). Ze stejného důvodu tento vztah platí také pro vzdálenost mezi proužky jednoho interferenčního řádu pro dvě blízké vlnové délky: $\delta \approx r_{i+1,a}^2 - r_{i+1,b}^2$

Tímto způsobem získáme vzorec nezávislý na i:

$$\Delta \nu = \frac{c}{2dn} \left[\frac{r_{i+1,a}^2}{r_{i+1,a}^2 - r_{i,a}^2} - \frac{r_{i+1,b}^2}{r_{i+1,b}^2 - r_{i,b}^2} \right] = \frac{c}{2dn} \frac{\delta}{\Delta}.$$
 (9)

4 Postup měření

Před samotným měřením jsme nejprve určili závislost mezi velikostí proudu a magnetickým polem pomocí sondy. Odstranili jsme výřez ze prostoru mezi magnety a místo něj jsme umístili sondu kolmo na směr magnetického pole. Měření jsme provedli pro proudy v rozsahu $1-8\,\mathrm{A}$.

Následně jsme změřili poloměry kružnic odpovídajících základní hladině a rozštěpeným hladinám. Poté jsme znovu instalovali žárovku a změřili základní hladinu bez magnetického pole.

Poté jsme přestavili aparaturu pro použití CCD kamery. Pro filtrování σ a π složek jsme použili polarizační filtry.

5 Výsledky měření

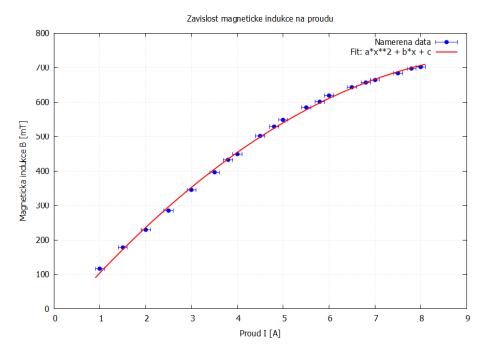
Naměřené hodnoty intenzity magnetického pole B mezi hroty elektromagnetu aparatury v závislosti na proudu I protékajícím cívkami jsou uvedeny v Tab. 4. Chyba měření proudu je $\sigma_I = 0.1$ A, chyba měření intenzity magnetického pole je $\sigma_B = 1$ mT. Tuto závislost jsme vykreslili do grafu na Obr. 5 a proložením kvadratickou funkcí ve tvaru $B(I) = aI^2 + bI + c$ jsme určili hodnoty konstant:

$$a = -7.7 \pm 0.4$$
, $b = 155 \pm 4$, $c = -43 \pm 8$.

Postupnou metodou jsme určili hodnotu $\Delta = 5, 5 \pm 0, 5 \ \mu\text{m}^2$ bez přítomnosti magnetického pole. Pro další výpočty jsme použili hodnoty konstant:

$$d = 4 \text{ mm}, \quad n = 1,457, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \hbar = 6,58212 \cdot 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}.$$

$I [A] \pm 0.1$	$B [mT] \pm 1$
1.0	116
1.5	178
2.0	230
2.5	285
3.0	345
3.5	396
3.8	432
4.0	449
4.5	502
4.8	529
5.0	549
5.5	585
5.8	601
6.0	619
6.5	644
6.8	657
7.0	665
7.5	684
7.8	697
8.0	702



Obr. 4: Závislost intenzity magnetického pole B mezi hroty elektromagnetu aparatury v závislosti na proudu I protékajícím cívkami.

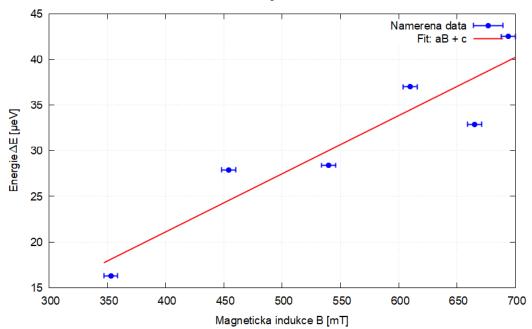
Obr. 5: Graf závislosti intenzity magnetického pole B na velikosti přiváděného proudu I a proložení závislosti funkcí ve tvaru $f(x) = ax^2 + bx + c$ s koeficienty $a = -7, 7 \pm 0, 4, b = 155 \pm 4, c = -43 \pm 8$.

Naměřené hodnoty poloměrů $r_{\sigma^-}, r_{\sigma^+}, r_{\pi}$ s chybou $\sigma_r = 0,05\,\mu\mathrm{m}$ v závislosti na velikosti proudu I s chybou $\sigma_I = 0,1\,\mathrm{A}$ a vypočtené hodnoty δ s chybou $\sigma_r = 0,3\,\mu\mathrm{m}^2$, vypočtené podle rovnice (9) hodnoty frekvencí $\Delta\nu$ s chybou $\sigma_{\Delta\nu} = 2\cdot 10^8\,\mathrm{Hz}$ jsou uvedeny v Tab. 1. Hodnoty indukce magnetického pole B byly určeny s chybou $\sigma_B = 0,006\,\mathrm{T}$ pomocí funkce, kterou jsme určili výše. hyba hodnot energie ΔE je $\sigma_{\Delta E} = 0,4\cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV}$. Chyby byly vypočteny jako chyby nepřímého měření. Konečná hodnota Bohrova magnetonu μ_B je $\sigma_{\mu_B} = 0,7\cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{T}}$.

I [A]	$r_{\sigma^{-}} [\mu \mathrm{m}]$	r_{σ^+} [μ m]	$r_{\pi} [\mu \mathrm{m}]$	$\delta \ [\mu \mathrm{m}^2]$	$\Delta \nu \ [10^8 \ \mathrm{Hz}]$	B [T]	$\Delta E [10^{-5} \text{ eV}]$	$\mu_B \ [10^{-5} \ \frac{\text{eV}}{\text{T}}]$
2	2,3	2,6	2,45	0,8	36	0,236	1,44	6,1
3	2,2	2,7	2,45	1,3	60	0,353	2,48	7,0
4	2,1	2,7	2,40	1,5	72	0,454	2,98	6,6
5	2,0	2,8	2,40	2,1	97	0,540	4,01	7,4
6	2,0	2,9	2,45	2,4	113	0,610	4,67	7,7
7	2,1	2,9	2,45	2,1	99	0,665	4,09	6,2
8	1,9	3,0	2,45	3,0	140	0,704	5,79	8,2

Tabulka 1: Naměřené hodnoty poloměrů $r_{\sigma^-}, r_{\sigma^+}, r_{\pi}$ s chybou $\sigma_r = 0,05 \,\mu\mathrm{m}$ v závislosti na velikosti proudu I s chybou $\sigma_I = 0,1$ A, vypočtené hodnoty δ s chybou $\sigma_r = 0,3 \,\mu\mathrm{m}^2$, vypočtené podle rovnice (9) hodnoty frekvencí $\Delta \nu$ s chybou $\sigma_{\Delta \nu} = 2 \cdot 10^8$ Hz. Hodnoty indukce magnetického pole B byly určeny s chybou $\sigma_B = 0,006$ T, chyba hodnot energie ΔE je $\sigma_{\Delta E} = 0,4 \cdot 10^{-5}$ eV. Konečná chyba Bohrova magnetonu μ_B je $\sigma_{\mu_B} = 0,7 \cdot 10^{-5} \, \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{T}}$.

Zavislost energie∆E na indukci B



Obr. 6: Graf závislosti energie ΔE na velikosti intenzity magnetického pole B a proložení závislosti funkcí ve tvaru $\Delta E(B) = aB + b$ s koeficienty $a = 0.064 \pm 0.013$, $b = -4 \pm 7$.

Konečnou hodnotu Bohrův magnetonu jsme určili jako aritmetický průměr s odpovídající chybou:

$$\mu_B = (7, 0 \pm 0, 4) \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}}.$$
 (10)

Naměřené pomocí CCD kamery hodnoty úhlů obou píků α_1 , α_2 v závislosti na velikosti proudu I s chybou $\sigma_I = 0.1 \,\mathrm{A}$ a vypočtené hodnoty energie ΔE . Hodnoty indukce magnetického pole B byly určeny s chybou $\sigma_B = 0.006 \,\mathrm{T}$. jsou uvedeny v Tab. 2. Hodnoty indukce magnetického pole B byly určeny s chybou $\sigma_B = 0.006 \,\mathrm{T}$ pomocí funkce, kterou jsme určili výše.

I[A]	B [mT]	$\alpha_1 [\mu \mathrm{m}]$	$\alpha_2 [\mu \mathrm{m}]$	$\Delta E [\mu eV]$
3,0	353	0,471	0,321	16,3
4,0	454	0,541	0,300	27,9
5,0	540	0,556	0,321	28,4
6,0	610	0,599	0,300	37,0
7,0	665	0,621	0,278	32,9
7,7	694	0,642	0,321	42,5

Tabulka 2: Naměřené pomocí CCD kamery hodnoty úhlů α_1 , α_2 v závislosti na velikosti proudu I s chybou $\sigma_I = 0.1$ A a vypočtené hodnoty energie ΔE . Hodnoty indukce magnetického pole B mají chybu $\sigma_B = 0.006$ T.

Závislost energie ΔE na B jsme vykreslili do grafu na Obr. 6 a proložením funkcí ve tvaru $\Delta E(B) = aB + b$ jsme určili hodnoty konstant:

$$a = -0.064 \pm 0.013$$
, $b = -4 \pm 7$.

Konečnou hodnotu Bohrova magnetonu jsme stanovili na:

$$\mu_B = (6, 4 \pm 1, 3) \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}}.$$
 (11)

6 Diskuze

Ručně vypočtená hodnota Bohrova magnetonu $\mu_B=(7,0\pm0,4)\cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{T}}$ má relativní malou chybu cca 6% a shoduje se v rámci $\sigma\leq 3\sigma$ s tabulkovou hodnotou $\mu_B=5,788\cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{T}}$ [1], tím pádem hodnoty můžeme považovat za shodné.

Nicméně i přes relativně malou chybu se vypočtená veličina nachází přímo na hranici 3σ , což nás nutí zamyslet se nad možným zdrojem systematické chyby. Jedním z takových zdrojů může být nepřesné odečítání hodnot na měřítku v okuláru, protože nebylo vždy snadné jej správně nastavit. Dalším zdrojem chyby mohly být nepřesné zaokrouhlování při určování chyb měření, protože samotný proces výpočtu hodnoty magnetonu podle naměřených poloměrů je poměrně pracný.

Vypočtená pomocí CCD kamery hodnota Bohrova magnetonu $\mu_B = (6, 4\pm 1, 3)\cdot 10^{-5} \, \frac{\text{eV}}{\text{T}}$ má relativní velkou chybu cca 20% a shoduje se v rámci $\sigma \leq 3\sigma$ s tabulkovou hodnotou $\mu_B = 5,788\cdot 10^{-5}\, \frac{\text{eV}}{\text{T}}$ [1], tím pádem hodnoty můžeme považovat za shodné.

V tomto případě jsme získali poměrně velkou chybu, a to 20%. Hlavním zdrojem chyby je fitování získaných dat. Problém spočívá v relativně malém počtu měření, tedy chybu by bylo možné snížit provedením většího počtu měření.

7 Závěr

V domácí přípravě (viz Příloha) jsme odvodili interferenční podmínku $\Delta = k\lambda$.

Postupnou metodou jsme určili hodnotu $\Delta = 5, 5 \pm 0, 5 \ \mu \text{m}^2$.

Změřili jsme a určili závislost intenzity magnetického pole B mezi hroty elektromagnetu aparatury v závislosti na proudu I protékajícím cívkami (viz Obr. 5) a manuálně určili velikost Bohrova magnetonu $\mu_B = (7,0\pm0,4)\cdot 10^{-5}\,{\rm eV\over T}.$ Měření jsme zopakovali pomocí CCD kamery a počítačového zpracování dat. Využili jsme polarizační filtr pro

Měření jsme zopakovali pomocí CCD kamery a počítačového zpracování dat. Využili jsme polarizační filtr pro oddělení σ a π složek spektra. Změřili jsme závislost velikosti rozštěpení hladin při Zeemanově efektu ΔE na intenzitě magnetického pole B. Výsledky jsme zpracovali graficky (viz Obr. 6) a metodou nejmenších čtverců určili hodnotu Bohrův magnetonu $\mu_B = (6, 4 \pm 1, 3) \cdot 10^{-5} \, \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{T}}$.

Reference

[1] WolframAlpha: Bohr magneton [online]: https://www.wolframalpha.com/input?i=Bohr+magneton, cit. 21. 8. 2025.

A Příloha

