FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM I
FJFI ČVUT v Praze

Cavendishův experiment

Číslo úlohy:	**4**	Skupina:	**2**
Kruh:	**Čtvrtek**	Jméno:	**Denis Krapivin**
Datum měření:	**14.10.2021**	Kolega:	**Kseniia Politskovaia**
Klasifikace:			

---

1 Pracovní úkoly

1. DU: Zopakovat si výpočet chyb nepřímého měření, vysvětlit rozdíl mezi lineárním a kvadratickým zákonem hromadění chyb a jejich použití.
2. DU: Odvodit vztah pro výpočet relativní chyby měření G a zamyslit se, jak vypadá chyba periody kmitu T a chyba rozdílu vzdáleností rovnovážných poloh S.
3. Ve spolupráci s asistentem zkontrolovat, zda je torzní kyvadlo horizontálně vyrovnané.
4. Pomocí torzního kyvadla změřit gravitační konstantu G. Do protokolu přiložit graf naměřených dat včetně errorbarů a nafitované funkce. Diskutovat, zda bylo kyvadlo rotačně vyrovnané.

2 Pomůcky

Torzní kyvadlo, He-Ne laser, ochranné brýle, podstavec pod laser, stopky, laserový dálkoměr.

3 Teorie

3.1 Měrení hodhoty gravitační konstanty pomocí torzního kyvadla

Podle Newtonova zákonu velikost gravitační síly F působící mezi dvěma tělesy o hmotnosti m a M ve vzdálenosti r se rovna:

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{1}$$

kde hodnotu G nazýváme gravitační konstantou. Jednou z metod, kterou můžeme tuto hodnotu změřit je metoda měření pomocí torzního kyvadla. Základní myšlenkou teto metody je to, že pro torze dostatečně tenkého a dlouhého lanka stačí velmi malá sila, kterou můžeme realizovat i v laboratoře pomocí koulí různé hmotnosti. Budeme zkoumat systém na Obr. 1 z malé tyčky délky $2d$ s dvěma malými koule o hmotnostech m na koncích s připevněném na ose otáčeni zrcátkem a velkých kouli o hmotností M. Pokud tyčku před měřením vyrovnáme bude na obě dvě koulí na koncích tyče působit ze strany Země stejná síla, která už nebude na zakroucení lanka mít vliv.

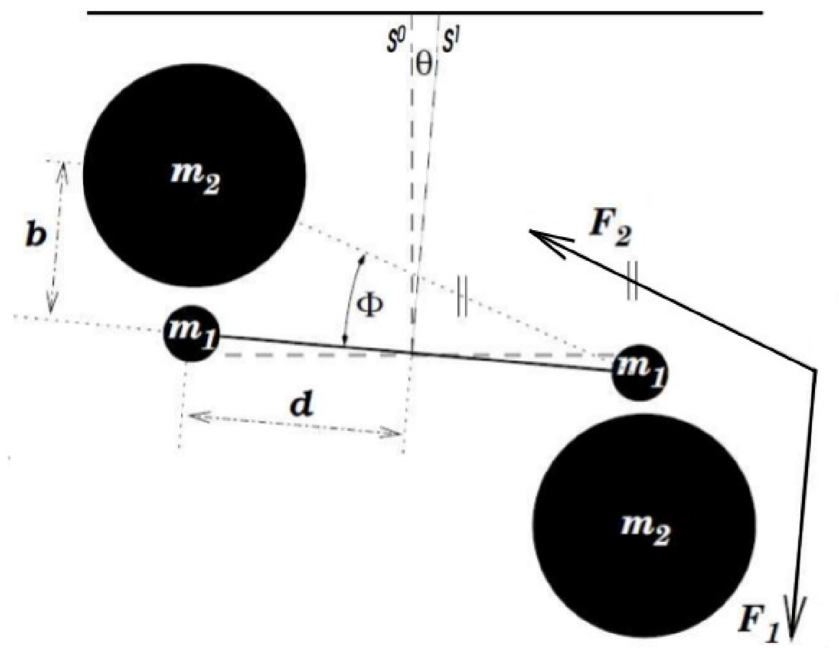
Pak budeme přibližovat k malým koulím velké kouli na vzdálenost b, bude mezí nimi působit gravitační síla, vnikne tak moment sil:

$$\tau = 2d(F_1 - F_2 \cdot \sin\Phi)$$

kde F_1 je sila mezi malou a bližší velkou koulí, F_2 síly mezí malou a další koulí, úhel Φ je na Obr.1.

Tento moment sil způsobí zkroucení lanka o úhel θ, který spojen s hodnotou torzního momentů konstantou k, popisující mechanické vlastností lanka:

$$2d(F_1 - F_2 \sin\Phi) = k\theta \tag{2}$$



Obr. 1: : Schéma torzního kyvadla, pohled z vrchu.

Dosadíme-li do (2) vzorec (1) pro F_1 a F_2 dostaneme:

$$2d(F_1 - F_2 \cdot \sin\Phi) = 2d\left(G\frac{mM}{b^2} + G\frac{mM}{b^2+4d^2}\sin\Phi\right) = k\theta \tag{3}$$

Hodnotu $\sin\Phi$ najdeme z geometrie úlohy (Obr. 1) a dosadíme do (3):

$$\sin\Phi = \frac{b}{\sqrt{b^2+4d^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad 2dGmM\left(\frac{1}{b^2} - \frac{b}{(b^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = k\theta$$

Zavedeme geometrický faktor β a výsledně máme:

$$\frac{2dGmM}{b^2}(1-\beta) = k\theta \qquad \text{kde} \qquad \beta = \frac{b^3}{(b^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Z tohoto vztahu potřebujeme určit hodnotu G, pokud známe vlastnosti lanka (torzní konstantu k) a úhel vychýlení tyčky θ, který odpovídá úhlu zkroucení lanka:

$$G = \frac{k\theta b^2}{2dmM(1-\beta)} \tag{4}$$

Vztah pro výpočet úhlu θ lze určit také z Obr. 1, kde S je vzdálenost rovnovážných poloh S_1 a S_2, a L je vzdálenost stupnice od zrcátka:

$$\tan(2\theta) \simeq 2\theta = \frac{S}{2L} = \frac{|S^2 - S^1|}{2L} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \frac{|S^2 - S^1|}{4L} \tag{5}$$

Torzní konstantu k určíme z doby kyvu T a ze znalosti momentu setrvačnosti tyčky:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \tag{6}$$

kde I je moment setrvačnosti tyčky. Ten určíme výpočtem z momentu setrvačnosti dvou koulí o hmotnosti m a poloměru r vzdálených o $2d$ vzhledem k ose kolmé na tyčku spojující tyto koule a procházející uprostřed mezi koulemi. Moment setrvačnosti tyčky a zrcátka můžeme zanedbat (díky relativně malé hmotnosti). S využitím Steinerovy věty a dosazením do vzorce (6) je potom:

$$I = 2m\left(d^2 + \frac{2}{5}r^2\right) \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{8\pi^2 m\left(d^2 + \frac{2}{5}r^2\right)}{T^2} \tag{7}$$

Po dosazení vzorců (5) a (7) do (4), dostaneme finální vztah pro výpočet gravitační konstanty:

$$G = \frac{b^2\pi^2\left(d^2 + \frac{2}{5}r^2\right)S}{dMLT^2(1-\beta)} \qquad kde \qquad S = |S^2 - S^1| \tag{8}$$

3.2 Kvadratický zákon hromadění chyb

Kvadratický zákon hromadění chyb počítá nejpravděpodobnější chybu nepřímých měření, která je menší než při použití lineárního zákona hromadění chyb [1]. V našem případe budeme používat kvadratický zákon hromadění chyb. Při hodnocení přesnosti měření najdeme relativní chybu měření δ_G jako podíl absolutní hodnoty rozdílu nalezené hodnoty G a tabulkové hodnoty G_0 [3] chyby nepřímého měření σ_G:

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2 (\sigma_T)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial G}{\partial S}\right)^2 (\sigma_S)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta_G = \frac{|G - G_0|}{\sigma_G} \tag{9}$$

4 Postup měření

Před vlastním měřením je nutné zkontrolovat, zda je kyvadlo horizontálně vyrovnané. Na spodku držáku je kulatá destička, která je o něco menší, než optický tubus pod kyvadlem. Nastavíme otáčením šroubu kyvadlo tak, aby obraz kulaté destičky v zrcátku tubusu se nacházel přesně uprostřed a kolem ní bylo vidět světelnou kružnici. Otáčením šroubu na podstavci můžeme nastavit i vertikální osu.

Měříme vzdálenost od zrcátka do stupnice pomocí laserového dálkoměru. Měření opakujeme několikrát pro lepší přesnost.

K malým koulím přiblížíme na držáku velké koule a aparaturu pomalu odaretujeme. Pokud jsme udělali všechno správně, torzní kyvadlo bude kmitat kolem rovnovážné polohy (bod S^1 na Obr. 1) a odraz laserového paprsku od zrcátka umístěného na tyčce kyvadla bude pohybovat s periodou v několik minut. Pro jistotu vyčkáme až se odraz dostane do krajní polohy výchylky. Pokud kyvadlo správné odaretováno, měl by se odraz v bodech obratu zadržovat. Pokud uvidíme výrazný odskok odrazu v teto poloze, musíme aparaturu zase odaretovat.

Je-li kyvadlo správné odaretováno, začneme zaznamenávat se stopkami v ruce polohy světelné značky ve 20-ti vteřinových intervalech. Pak velké koule opatrně přemístíme do druhé polohy, v této druhé poloze začne kyvadlo kmitat kolem rovnovážné polohy S^2, ale se stejnou periodou T.

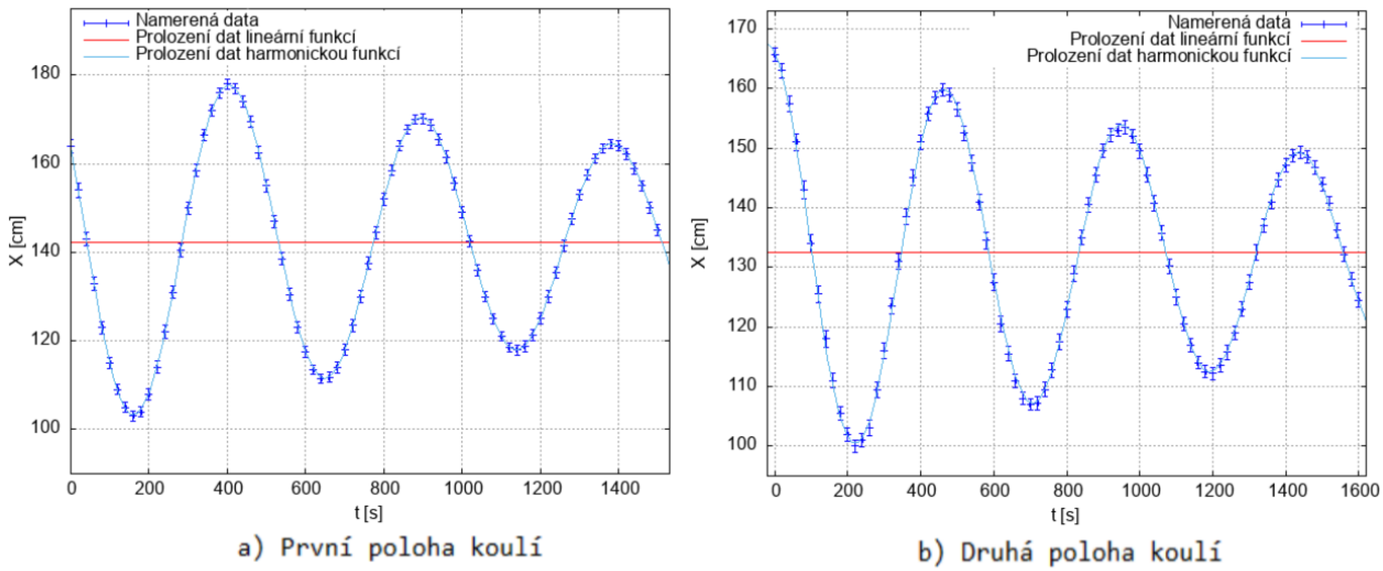
5 Zpracování dat

Hodnoty hmotností velkých koule M, poloměru malých kouli r, vzdálenost těchto koule od osy otáčeni d a nejmenší vzdálenost mezí středem malé a velké koule b považujeme ve výpočtech za přesné (tj. s nulovou chybou):

$$M = 1,24\ \text{kg} \qquad r = 9,55 \times 10^{-3}\,\text{m} \qquad d = 50,7 \times 10^{-3}\,\text{m} \qquad b = 45 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

Pro určení hodnoty G ze vztahu (8) potřebujeme najít hodnoty S a T. Stačí si uvědomit, že kyvadlo vykonává tlumený harmonický pohyb, který je popsán funkcí:

$$x(t) = Aexp^{-\delta t} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \tag{10}$$



Obr. 2: Naměřené hodnoty polohy x odrazu laseru v čase t, proložení naměřených hodnot konstantní funkcí a funkcí popsanou rovnicí (10).

kde t je čas (ten je jedinou proměnnou, ostatní jsou konstanty), A amplituda výchylky, T perioda kmitu, φ počáteční fáze, δ je dekrement útlumu a S je rovnovážná poloha.

Pro naměřená data se třeba odhadnout hodnoty chyb měření. Vzhledem k tomu, že nemáme možnost přesně najít reakční dobu člověka a náhodné chyby měření času, položíme celkovou chybu měření času $\sigma_t = 0,5$ s podle [2]. Chyba měření polohy odrazu laserového paprsku od zrcátka záleží na hodnotě rychlostí pohybu odrazu v. Odhadneme chybu měření polohy σ_x následujícím vzorcem: $\sigma_x = \sigma_t v + 0,25$ cm. Proložení naměřených hodnot konstantní funkcí a fitem je na Obr. 2.

Konstanty ve vztahu (10) určíme nafitováním naměřených dat:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
A_1 & = & (42,64 \pm 0,09)\,\mathrm{cm} & A_2 & = & (35,2 \pm 0,2)\,\mathrm{cm} \\
\delta_1 & = & (4,81 \pm 0,03) \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1} & \delta_2 & = & (4,93 \pm 0,07) \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1} \\
T_1 & = & (489,2 \pm 0,1)\,\mathrm{s} & T_2 & = & (485,6 \pm 0,3)\,\mathrm{s} \\
\varphi_1 & = & (2,619 \pm 0,002)\,\mathrm{rad} & \varphi_2 & = & (309,689 \pm 0,006)\,\mathrm{rad} \\
S^1 & = & (142,0 \pm 2,5)\,\mathrm{cm} & S^2 & = & (133, \pm 2,0)\,\mathrm{cm}
\end{array}
$$

Z určených koeficientů najdeme period kyvadla T jako vážený průměr dvou měření. Chybu vypočítáme podle vzorce pro skládaní měření s různou přesností [1]. Hodnotu najdeme jako $S = |S^1 + S^2|$. Pro vzdálenost L chybu najdeme standardním zpracováním dat pro opakované měření [1].

$$
T = (488,83 \pm 0,09)\,\mathrm{s} \qquad S = (9,4 \pm 3,0)\,\mathrm{cm} \qquad L = (5,96 \pm 0,02)\,\mathrm{m}
$$

Pomocí vzorce (8) najdeme hodnotu gravitační konstanty G a podle (9) určíme celkovou chybu σ_G a relativní chybu δ_G měření gravitační konstanty G:

$$
G = (5,5 \pm 2,0) \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2} \qquad \delta_G \approx 0,6
$$

6 Diskuze

Nalezená hodnota gravitační konstanty G je zatížena relativně velkou chybou cca 35%, ale výsledek se shoduje s tabulkovou hodnotou v rámci $0,6\sigma_G < 3\sigma_G$, tím pádem můžeme říct, že gravitační konstantu jsme určili správně.

Velkým problémem během zpracování dat bylo určit chyby měření hodnoty odchylky odrazu laserového paprsku σ_x a chybu měření času σ_t. Vzhledem k tomu, že stupnice ze kterou jsme odečítali data se nacházela vysoko na zdi nešlo odečítat hodnoty výchylky odrazu přesně po 20 vteřinách, museli jsme kontrolovat čas na stopkách a už po 20 vteřinách se dívat na polohu odrazu. Tato metoda pravděpodobně vede ke vzniku systematické chyby.

Navíc k tomu díky nerovnoměrnému pohybu odrazu obrazu hodnota chyby polohy by měla záviset na rychlosti odrazu v (Obr. 3). Zkusili jme tuto závislost odhadnout jako lineární funkci $\sigma_x = \sigma_x(v)$. Teoreticky to by mělo zpřesnit výsledky fitování funkci $x(t)$. Hodnoty rychlosti odrazu jsme spočítali jako střední rychlost v intervalech 20 vteřin:

$$v_i = \frac{|x_{i+1} - x_i|}{20}$$

Pravděpodobně by se šlo zbavit těchto chyb nebo výrazně snížit jejich vliv měřením pro menší rychlost. Dalším návrhem by bylo neuvažovat ve fitování body, ve kterých odraz má příliš velkou rychlost (body vedle rovnovážné polohy).

7 Závěr

Pomocí torzního kyvadla jsme změřili gravitační konstantu a určili chybu:

$$G = (5,5 \pm 2,0) \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$$

Literatura

[1] Základy fyzikálních měření, prezentace - https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf [cit.19.10.2021]

[2] Reakční čas - https://www.cspsd.cz/storage/files/reakcni_cas.pdf [cit.19.10.2021]

[3] WolframAlpha - https://www.wolframalpha.com/input/?i=gravitational+constant [cit.19.10.2021]

Příloha

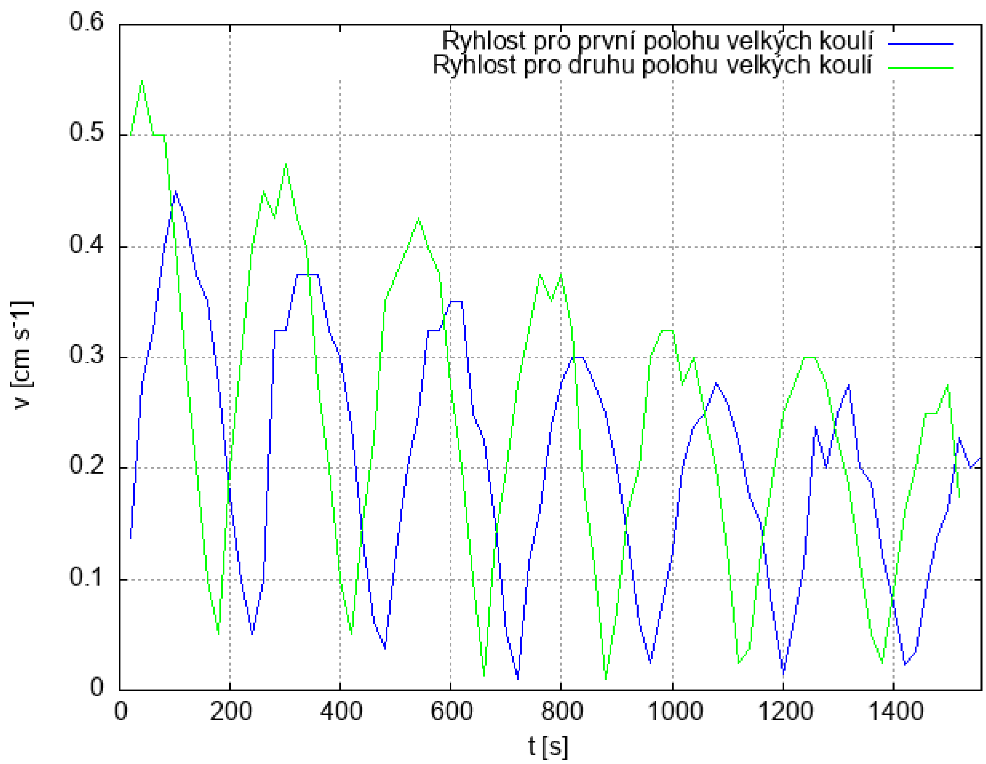
8 Tabulky a grafy

$i[-]$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
$x_i[cm]$	154	143	133	123	115	109	105	103	104	108	114
$i[-]$	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.
$x_i[cm]$	122	131	140,5	150	158,5	166,5	172	176	178	177	174
$i[-]$	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.	33.
$x_i[cm]$	169,5	162,5	155	147	138,5	130,5	123	117,5	113,5	111,5	111,75
$i[-]$	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.	41.	42.	43.	44.
$x_i[cm]$	114	118	123,5	130	137,5	144,5	152	158,5	164	167,75	170
$i[-]$	45.	46.	47.	48.	49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.
$x_i[cm]$	170,2	168,75	165,5	161,5	155,5	149	142,5	136	130	125	121
$i[-]$	56.	57.	58.	59.	60.	61.	62.	63.	64.	65.	66.
$x_i[cm]$	118,5	118	118,75	121,25	125	130	135,5	141,5	147,5	153	157,5
$i[-]$	67.	68.	69.	70.	71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.
$x_i[cm]$	161,2	163,5	164,5	164	162,2	159	155	150	145	139,5	135

Tab. 1: Naměřené hodnoty polohy odrazu laserového paprsku x_i pro první nastavení koulí pro i-tý časový interval.

$i[-]$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$x_i[cm]$	163	157.5	151	142	134	125.5	118	111	105.5	102
$i[-]$	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
$x_i[cm]$	100	101	103	109.5	116	123.5	131	138.5	145	151
$i[-]$	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
$x_i[cm]$	155.75	158.5	159.75	159	156.5	152.5	147.5	141	134.5	127.5
$i[-]$	31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
$x_i[cm]$	120.5	115.5	111	108	107	107.2	109.5	112.75	117.5	123
$i[-]$	41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
$x_i[cm]$	129	135	140.5	145.5	149.5	152.2	153	153.5	152	149.5
$i[-]$	51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
$x_i[cm]$	145.5	140.75	135.75	130.2	125	120.5	117	114	112.5	112.2
$i[-]$	61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
$x_i[cm]$	113.5	115.75	119	123	127.5	132.5	137	141	144.75	147.2
$i[-]$	71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
$x_i[cm]$	148.75	149.2	148.5	146.75	144	140.75	136.2	132.2	128	124.5

Tab. 2: Naměřené hodnoty polohy odrazu laserového paprsku x_i pro druhé nastavení koulí pro i-tý časový interval.



Obr. 3: Rychlost pohybu v odrazu laserového paprsku od zrcátka umístěného na čince kyvadla v závislosti na času.