FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM I
FJFI ČVUT v Praze

Harmonické oscilace

Číslo úlohy:	**10**	Skupina:	**2**
Kruh:	**Čtvrtek**	Jméno:	**Denis Krapivin**
Datum měření:	**25.11.2021**	Kolega:	**Kseniia Politskovaia**
Klasifikace:			

---

1 Pracovní úkoly

1. **DÚ**: Ověřte, že (5) je řešením pohybové rovnice Pohlova kyvadla, nalezněte řešení pro polohovou a rychlostní podmínku a nakreslete jejich průběh.
2. Naměřte časový vývoj výchylky kmitů kyvadla pro volné netlumené kmity a určete vlastní frekvenci Pohlova kyvadla.
3. Změřte závislost koeficientu útlumu na tlumícím proudu v rozmezí do 2 A (alespoň 5 hodnot). Vyneste do grafu a extrapolací určete hodnotu proudu, při které nastane kritický útlum.
4. Experimentálně nalezněte hodnotu tlumícího proudu, pro který nastává kritický útlum. Realizujte polohovou i pohybovou podmínku a za pomoci domácího úkolu a úkolu 2. zjistěte, zda platí podmínka $\omega_0 = \delta$. Porovnejte s výsledkem úkolu 3.
5. Sestavte kalibrační křivku budícího motorku (závislost frekvence otáček na napětí).
6. Naměřte rezonanční křivky netlumeného, slabě tlumeného a středně tlumeného kyvadla. Vyneste je do jednoho grafu, určete vlastní frekvenci a diskutujte výsledek.

2 Pomůcky

Pohlovo kyvadlo, nastavitelný zdroj 0 - 3 A, zdroj 24 V - 650 mA, rotační senzor PASCO, PC, program DataStudio, 2 multimetry, vodiče, tachometr.

3 Teorie

3.1 Pohybová rovnice Pohlova kyvadla

Při odvození pohybové rovnice Pohlova kyvadla (sestavení je na Obr. 1) vyjdeme z Eulerových setrvačníkových rovnic vyjádřených v hlavních osách setrvačnosti (viz rovnice 4.40 v [3]):

$$I_i\dot{\Omega} + (I_k - I_j)\Omega_i\Omega_j = N_i,$$

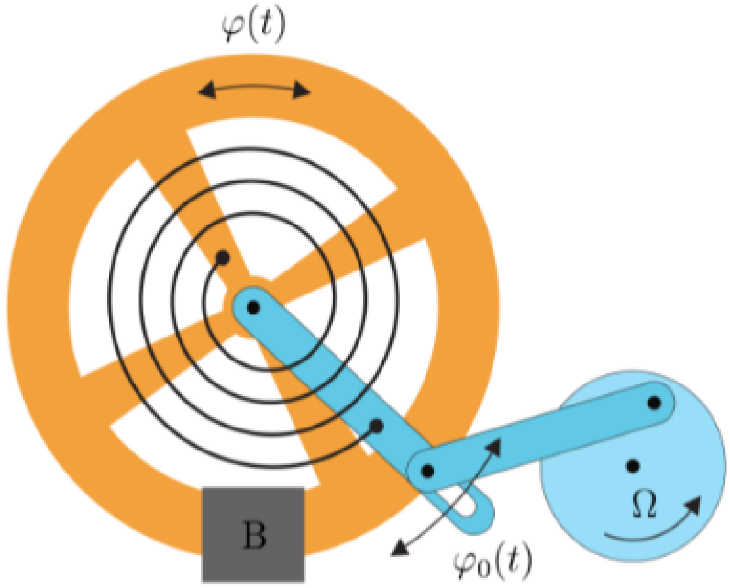
kde I_j jsou momenty setrvačnosti, Ω_i jsou úhlové rychlosti a N_i jsou výsledné momenty sil působící na setrvačník.

Vzhledem k tomu, že osa rotace kyvadla je upevněná, pak máme:

$$\Omega_1(t) = \Omega_2(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad I_3\ddot{\varphi} = N_3(t, \varphi, \dot{\varphi}, ...), \tag{1}$$

φ je úhel pootočení kolem osy z.

Výsledný moment sil působící na setrvačník N můžeme představit jako součet momentů sil generovaných pružinou N_P a momentů sil tlumících N_T generovaných cívkami.



Obr. 1: Pohlovo torzní kyvadlo. Měděný kotouč je propojen přes spirální pružinu s pákovým mechanismem. Písmenem B jsou označeny tlumící cívky napájenými vířivými proudy [1].

Abychom dokázali vyřešit pohybovou rovnici pro netlumené kmity Pohlova kyvadla, musíme vyslovit následující předpoklady [2]:

$$N_{\mathrm{P}} = -D\varphi(t) \qquad N_{\mathrm{T}} = -C\dot{\varphi}(t),$$

kde D je tuhostí pružiny, C je konstanta úměrnosti.

Pak pohybovou rovnici (2) můžeme přepsat pro úhel φ:

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\delta\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = 0, \tag{2}$$

kde δ je dekrement útlumu a ω_0 je vlastní frekvence kyvadla.

Řešení pohybové rovnice bude vždy lineární kombinací dvou nezavilých základních řešení:

1. Pro případ netlumených kmitu:
$$\varphi(t) = \varphi_{\max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0); \tag{3}$$

2. Pro případ malého útlumu je ve tvaru:
$$\varphi(t) = \varphi_{\max}e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad \text{kde} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \tag{4}$$

3. Pro kritický útlum:
$$\varphi_1(t) = e^{-\delta t} \qquad a \qquad \varphi_2(t) = te^{-\delta t}; \tag{5}$$

kde $\varphi_{\max}$ je amplituda výchylky kyvadla, φ_0 je fázový posuv.

Koeficienty příslušné lineární kombinace řešení získáme pomocí vhodných počátečních podmínek:

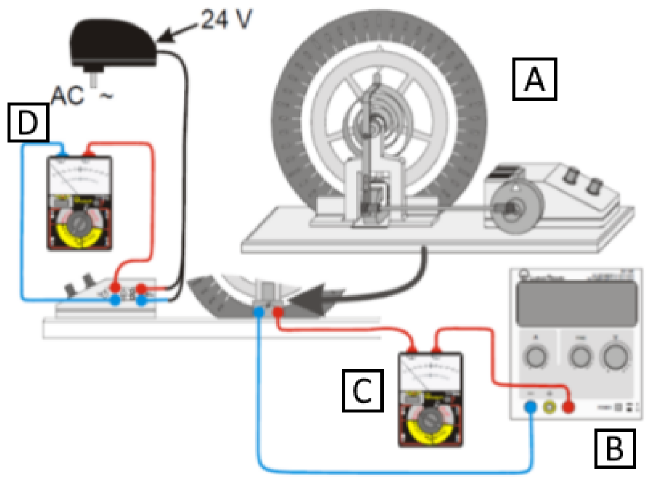
1. podmínka polohová:
$$\varphi(0) = \varphi_0 > 0 \qquad \text{a} \qquad \dot{\varphi}(0) = 0,$$

2. podmínka rychlostní:
$$\varphi(0) = 0 \qquad \text{a} \qquad \dot{\varphi}(0) = \Omega_0 > 0.$$

Jako domácí úkol (viz Příloha) jsme ověřili že (5) je je řešením pohybové rovnice Pohlova kyvadla (3).

4 Postup měření

4.1 Vlastní frekvence Pohlova kyvadla



Obr. 2: Schéma zapojení Pohlova kyvadla. Písmenem A je označeno Pohlovo kyvadlo, B je regulovatelný zdroj proudu, C je ampérmetr, D je voltmetr [2].

Před samotným měřením zapojujeme rotační senzor kyvadla do USB portu PC. V programu DataStudio pak můžeme vidět graf závislosti úhlové výchylky na čase.

Pro měření vlastní frekvence Pohlova kyvadla potřebujeme změřit časový vývoj výchylky kmitu kyvadla a proložením vhodnou funkcí najít vlastní frekvenci. Uvedeme kyvadlo rukou do pohybu a spustíme nabírání dat tlačítkem *Start*. Po 15-20 vteřinách měření ukončíme stejným tlačítkem. Měření opakujeme dvakrát pro lepší přesnost.

4.2 Závislost koeficientu útlumu na proudu

Pro měření se používá Pohlovo kyvadlo, zdroj proudu a ampérmetr (A, B, C na Obr. 2).

Nastavíme na zdroje proudu proud v rozmezí 0,1-2 A, pak uvedeme kyvadlo rukou do pohybu a spustíme nabírání dat. Stejně jako v minulé úloze měříme časový vývoj výchylky kmitu kyvadla a proložením vhodnou funkcí najdeme hodnotu dekrementu útlumu pro nastavený na zdroje proud. Měření opakujeme několikrát pro různé hodnoty tlumicího proudu.

4.2.1 Kalibrační křivka budícího motorku

Zapojujeme budicí motor do zdroje napětí a voltmetru (D na Obr. 2). Pro několik různých hodnot napětí na motorku měříme laserovým tachometrem počet otáček kola motorku za minutu. Pak proložením nalezených hodnot lineární funkcí dostaneme kalibrační křivku budícího motorku (závislost frekvence otáček na napětí).

4.2.2 Rezonanční křivky Pohlova kyvadla

Pro měření netlumených kmitů zapojujeme budicí motor Pohlova kyvadla do zdroje napětí a spustíme nabírání dat. Hodnotu napětí odečteme na voltmetru (D na Obr. 2). Po 15-30 vteřinách měření ukončíme a nastavíme jinou hodnotu napětí. Měření opakujeme několikrát pro různé hodnoty napětí na motorku.

Pro měření tlumených kmitů zapojujeme aparaturu podle Obr. 2. Všechna měření provádíme pro stejnou hodnotu proudu. Dale postupujeme podle postupu pro měření netlumených kmitů.

5 Zpracování dat

5.1 Vlastní frekvence Pohlova kyvadla

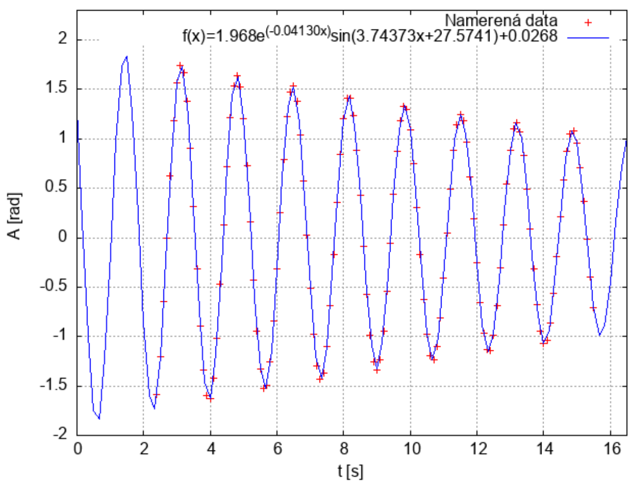
Naměřili jsme časový vývoj výchylky kmitů kyvadla pro volné netlumené kmity dvakrát. Pomocí programu GNUplot jsme proložili data funkcí ve tvaru $f(x) = Ae^{-Dx} sin(Bx + C) + E$. Výsledky jsme vynesli do grafu na Obr. 3. Proložením dat jsme dostali hodnoty konstant B_1, D_1 pro první a B_2, D_2 pro druhy pokus s příslušnými chybami:

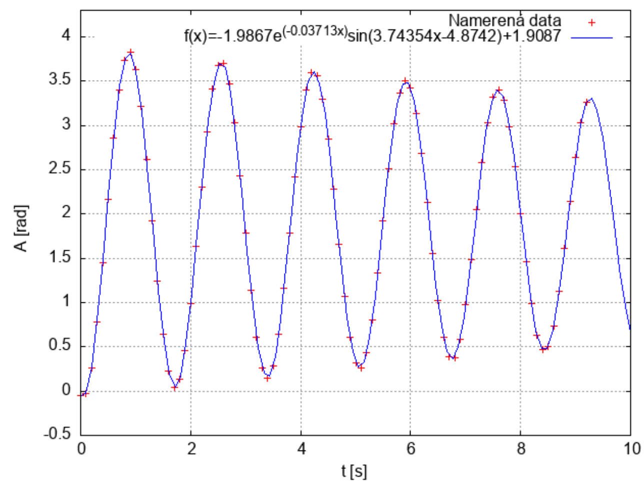
$$B_1 = 3,74373 \pm 0,00016, \qquad D_1 = 0,04130 \pm 0,00016;$$

$$B_2 = 3,74354 \pm 0,00014, \qquad D_2 = 0,03713 \pm 0,00014.$$

Pak podle vzorce pro nestejně přesná měření [4] najdeme hodnoty frekvence ω a utlumu δ. Chybu najdeme jako chybu měření s různou přesnosti [4]:

$$\omega = (3,7436 \pm 0,0001)\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad \delta = (0,0392 \pm 0,0001)\,\mathrm{s}^{-1}.$$





Obr. 3: Naměřené výchylky kmitů kyvadla A pro volné netlumené kmity v závislosti na čase t pro první (vlevo) a druhý (vpravo) pokus. Proložení těchto hodnot funkcemi ve tvaru $f(x) = Ae^{-Dx} sin(Bx + C) + E$.

Pak výslednou vlastní frekvence kyvadla najdeme pomoci (4):

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = (3,7438 \pm 0,0001)\,\mathrm{s}^{-1}.$$

5.1.1 Závislost koeficientu útlumu na proudu

Z naměřených dat jsme dostali proložením funkcí $f(x) = Ae^{-Dx} sin(Bx + C) + E$ hodnoty útlumu δ s chybou σ_δ v závislosti na proudu I s chybou $\sigma_I = 0,01$ A, která je chybou měřícího přístroje. Data jsou v Tab. 1.

Pomocí programu GNUplot jsme proložili data funkcí ve tvaru $f(x) = Axe^{Bx} + C$. Výsledky jsme vynesli do grafu na Obr. 4 (vlevo). Proložením dat jsme dostali hodnoty konstant A, B, C s příslušnými chybami:

$$A = 0,028 \pm 0,004 \qquad B = 0,86 \pm 0,09 \qquad C = 0,038 \pm 0,001$$

Pak výsledný vztah pro závislost koeficientu útlumu δ na proudu I je:

$$\delta(I) = A \cdot I \cdot e^{B \cdot I} + C = 0,028 \cdot I \cdot e^{0,86 \cdot I} + 0,038. \tag{6}$$

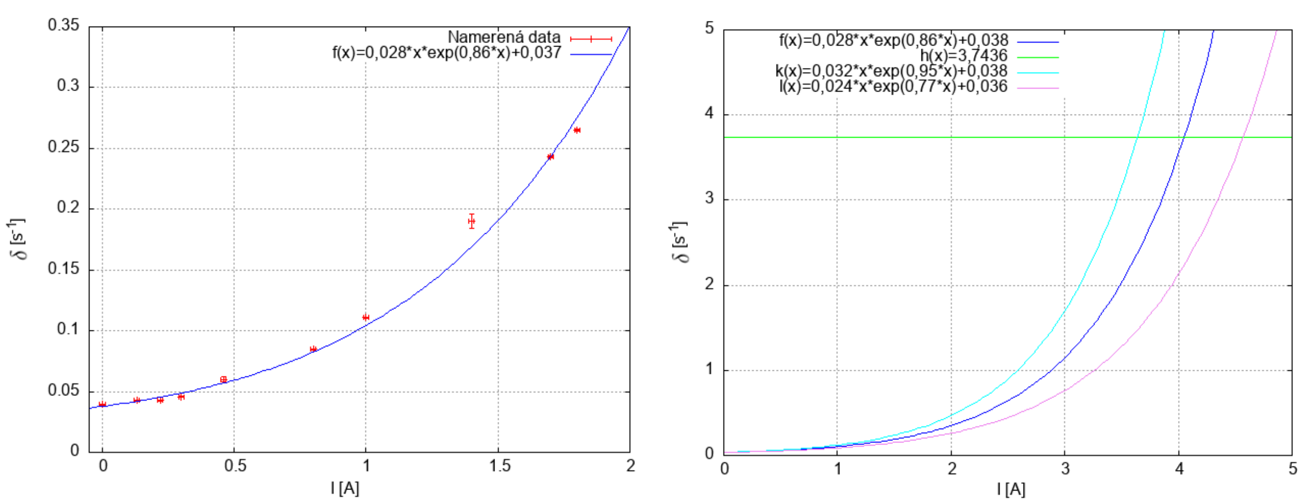
Extrapolací jsme určili hodnotu proudu při které nastane kritický útlum I_{krit}:

$$I_{\text{krit}} = (4,0 \pm 0,5)\,\text{A}.$$

Vzhledem k tomu, že fitovací funkce je příliš složitá, chybu I_{krit} jsme odhadli pomocí Obr. 4 (vpravo). Modrý graf je výsledný vztah pro závislost koeficientu útlumu na proudu, světlomodrý a fialový jsou grafy pro maximální a minimální hodnoty chyb křivky (6), tím pádem chybu I_{krit} odhadneme jako největší vzdálenost mezi modrou a světlomodrou nebo modrou a fialovou křivkou pro $\delta = \omega_0$.

I [A]	δ [s^{-1}]	σ_δ [s^{-1}]
0, 13	0, 04270	0, 00030
0, 22	0, 04252	0, 00016
0, 30	0, 04570	0, 00020
0, 46	0, 06000	0, 00200
0, 80	0, 08460	0, 00030
1, 00	0, 11070	0, 00030
1, 40	0, 19000	0, 00600
1, 70	0, 24330	0, 00070
1, 80	0, 26510	0, 00080

Tab. 1: Hodnoty útlumu δ s chybou σ_δ v závislosti na tlumicím proudu I s chybou 0, 01 A pro Pohlovo kyvadlo.



Obr. 4: Vlevo: hodnoty dekrementu útlumu δ pro hodnoty tlumícího proudu I v cívkách Pohlova kyvadla. Proložení závislosti funkcí ve tvaru $f(x) = Axe^{Bx} + C$. Vpravo: $f(x)$ je graf závislost koeficientu útlumu na proudu, $k(x)$ a $l(x)$ jsou grafy pro maximální a minimální hodnoty chyb křivky $f(x)$, $h(x)$ je vlastní frekvencí Pohlova kyvadla.

5.1.2 Kalibrační křivka budícího motorku

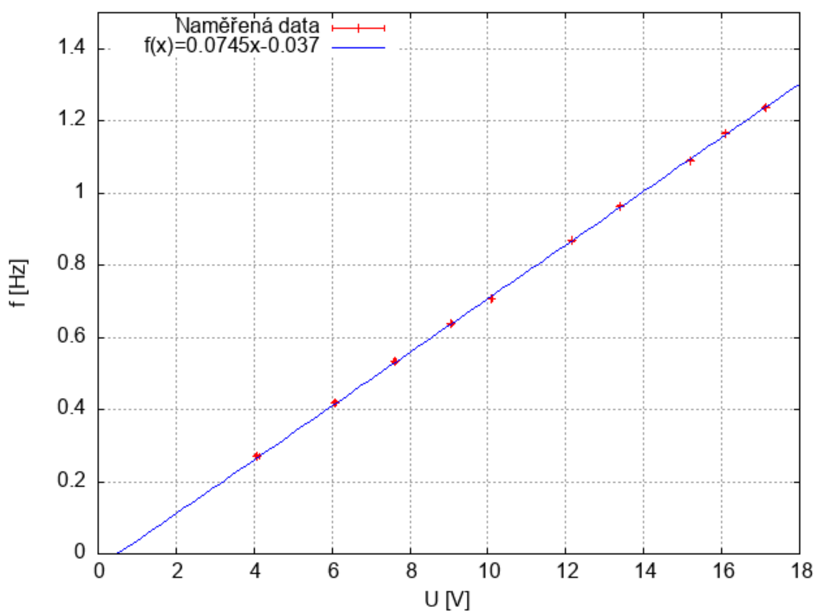
Frekvenci budicího motorku f v závislosti na napětí U jsme měřili pomoci tachometru. Tachometr měří frekvenci v jednotkách ot/min s chybou 0,1 ot/min, tj. 0, 0017 Hz. Data jsou v Tab. 2.

Pomocí programu GNUplot jsme proložili data lineární funkcí ve tvaru $f(x) = Ax + B$ a dostali kalibrační přímku. Výsledky jsme vynesli do grafu na Obr. 5. Proložením dat jsme dostali hodnoty konstant A a B s příslušnými chybami:

$$A = 0,0745 \pm 0,0004, \qquad B = -0,037 \pm 0,005.$$

U [V]	f [Hz]	σ_U [V]
$10,10$	$0,7067$	$0,01$
$15,20$	$1,0900$	$0,01$
$17,12$	$1,2383$	$0,01$
$12,16$	$0,8683$	$0,01$
$9,06$	$0,6367$	$0,01$
$6,08$	$0,4200$	$0,03$
$4,08$	$0,2717$	$0,05$
$7,62$	$0,5333$	$0,03$
$16,10$	$1,1650$	$0,01$
$13,39$	$0,9633$	$0,01$

Tab. 2: Naměřené hodnoty frekvenci f budícího motorku s chybou $0,0017$ Hz pro napětí U na motorku s příslušnou chybou σ_U.



Obr. 5: Naměřené hodnoty frekvenci f budícího motorku s chybou $0,0017$ Hz pro napětí U na motorku s příslušnou chybou σ_U. Proložení těchto hodnot lineární funkcí ve tvaru $f(x) = 0,0745x + 0,037$.

Pak výsledná kalibrační křivka motorku (závislost frekvence otáček na napětí) je:

$$f(U) = A \cdot U + B = 0,0745 \cdot U - 0,037.$$

5.1.3 Rezonanční křivky kyvadla

Naměřené hodnoty amplitudy kyvadla A netlumených kmitů pro různé hodnoty uhlové frekvence budicí sily Ω jsou v Tab. 3.

Hodnoty uhlové frekvence budicí sily Ω jsme spočetli z frekvence otáčeni motorku f jako $\Omega = 2\pi f$. Chybu jsme našli jako chybu nepřímého měření.

Hodnoty amplitudy kyvů A, uhlové frekvence budicí síly Ω, frekvence otáčeni motorku f a hodnoty napětí U na němž pro tlumené kmity jsou v Tab. 4.

Tlumení jsme realizovali proudem $I = (1,30 \pm 0,01)$ A. Pak podle vztahu (6) dekrement útlumu je roven $\delta = (0,15 \pm 0,01)\ \mathrm{s}^{-1}$. Chyba σ_δ nalezena jako chyba nepřímého měření.

U [V]	f [s^{-1}]	σ_f [s^{-1}]	Ω [s^{-1}]	σ_Ω [s^{-1}]	A [rad]	σ_A [rad]
9,25	0,652	0,005	4,095	0,012	0,4182	0,0003
4,67	0,311	0,004	1,953	0,011	0,1260	0,0020
14,12	1,015	0,006	6,374	0,015	0,0490	0,0020
10,07	0,713	0,005	4,479	0,013	0,5200	0,0300
16,08	1,161	0,006	7,291	0,016	0,1010	0,0040
11,21	0,799	0,005	5,012	0,013	0,2960	0,0040
7,18	0,498	0,005	3,127	0,012	0,1360	0,0040
8,75	0,615	0,005	3,862	0,012	1,7500	0,1200
8,06	0,563	0,005	3,539	0,012	0,8900	0,0030
8,38	0,587	0,005	3,688	0,012	2,3950	0,0030

Tab. 3: Vypočtené hodnoty amplitudy A netlumených kyvů Pohlova kyvadla při buzení kyvadla budicí sílou s uhlovou frekvencí Ω. Uhlova frekvence Ω vypočtena z frekvencí motorku f s chybou σ_f. U je hodnota napětí na motorku měřené s chybou 0,01 V, σ_Ω je hodnota chyby uhlové frekvence budicího motorku, σ_A je chyba měření amplitudy. Chyby σ_Ω a σ_f vypočtené jako chyby nepřímého měření, σ_A nalezená fitovaním.

U [V]	f [s^{-1}]	σ_f [s^{-1}]	Ω [s^{-1}]	σ_Ω [s^{-1}]	A [rad]	σ_A [rad]
6,08	0,418	0,004	2,626	0,011	0,1755	0,0003
7,80	0,546	0,005	3,427	0,012	0,5201	0,0007
6,87	0,477	0,005	2,994	0,011	0,2440	0,0002
8,13	0,570	0,005	3,581	0,012	0,7790	0,0030
9,25	0,653	0,005	4,103	0,012	0,3766	0,0006
8,40	0,590	0,005	3,707	0,012	1,0437	0,0007
8,74	0,616	0,005	3,865	0,012	0,9980	0,0040
8,52	0,599	0,005	3,763	0,012	1,1041	0,0006
8,00	0,561	0,005	3,521	0,012	0,6758	0,0011
5,07	0,343	0,004	2,155	0,011	0,1334	0,0008
10,16	0,721	0,005	4,527	0,013	0,1830	0,0040

Tab. 4: Vypočtené hodnoty amplitudy A tlumených kyvů Pohlova kyvadla při buzení kyvadla budicí sílou s uhlovou frekvencí Ω. Uhlova frekvence Ω vypočtena z frekvencí motorku f s chybou σ_f. U je hodnota napětí na motorku měřené s chybou 0,01 V, σ_Ω je hodnota chyby uhlové frekvence budicího motorku, σ_A je chyba měření amplitudy. Chyby σ_Ω a σ_f vypočtené jako chyby nepřímého měření, σ_A nalezená fitovaním.

Naměřené rezonanční křivky netlumeného a tlumeného kyvadla jsou na Obr. 6. Pro proložení rezonanční křivky jsme použili pro netlumený kmit funkci

$$A = \frac{B}{|\omega_0^2 - \Omega^2|},$$

kde ω_0 je vlastní frekvence a B je konstanta. Po fitovaní jsme dostali hodnotu vlastní frekvence:

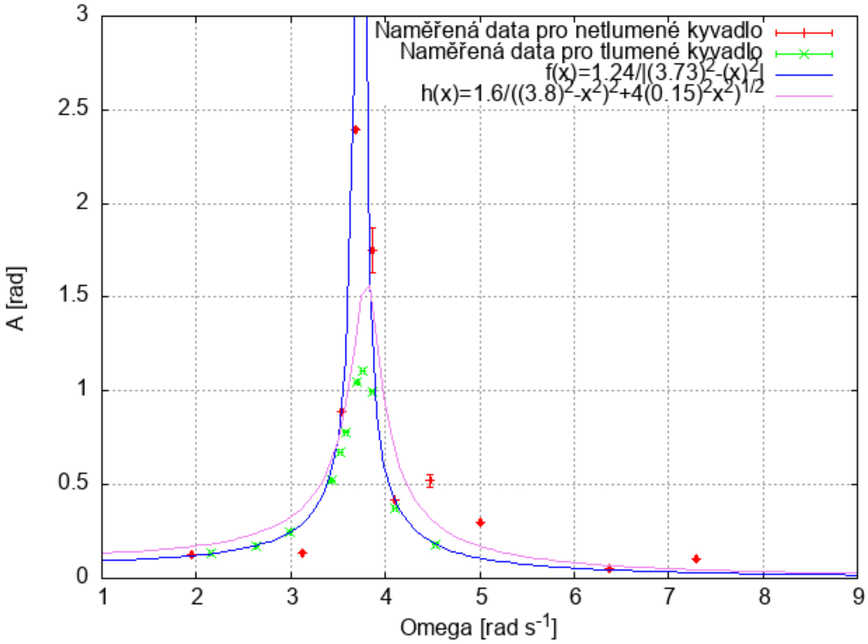
$$\omega_0 = (3,73 \pm 0,01)\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Pro proložení rezonanční křivky jsme použili pro tlumený kmit funkci

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}},$$

Po fitovaní jsme dostali hodnotu vlastní frekvence:

$$\omega_0 = (3,80 \pm 0,13)\,\mathrm{s}^{-1}.$$



Obr. 6: Naměřené závislosti amplitudy kmitu A Pohlova kyvadla na hodnotě uhlové frekvence budicí síly Ω. Rezonanční křivky netlumeného (modrý) a tlumeného (fialový) kyvadla.

6 Diskuze

Při hledaní vlastní frekvence Pohlova kyvadla ω_0 jsme chtěli fritovat data funkcí, která odpovídá netlumeným kmitům (3), ale z Obr. 3 je vidět že amplituda kmitu klesá výrazné rychle, proto pro fit jsme využili funkci popisující kmity s malým útlumem (5). Jako výsledek jsme dostlali hodnotu vlastní frekvencí Pohlova kyvadla $\omega_0 = (3,7438 \pm 0,0001)\,\mathrm{s}^{-1}$ s velmi malou relativitou chybou 0,003 %.

Pro proložení závislosti koeficientu útlumu na proudu jsme zkusili použit několik různých funkci, ale největší přesnost jsme dostali pro funkci ve tvaru $f(x) = Axe^{Bx} + C$, Obr. 4 (vlevo). Hodnoty konstant jsou:

$$A = 0,028 \pm 0,004, \qquad B = 0,86 \pm 0,09, \qquad C = 0,038 \pm 0,001,$$

s relativními chybami 14%, 10% a 3%. Tím pádem křivka pravděpodobně muže mít tento tvar. Rozhodně by šlo odhadnout funkci mnohem lépe při větším počtu měření pro vetší veličiny proudu.

Kvůli chybějící tlumicí cívce nemohli jsme experimentálně ověřit hodnotu tlumícího proudu, pro který nastává kritický útlum, pak museli jsme tuto hodnotu odhadnout z extrapolace:

$$I_{\mathrm{krit}} = (4,0 \pm 0,5)\,\mathrm{A}.$$

Naměřili jsme rezonanční křivky netlumeného a tlumeného kyvadla Obr. 6. Z grafů je vidět, že v obou případech amplituda kmitů roste při přibližování frekvence motorku vlastní frekvenci kyvadla. Pomocí těchto křivek jsme zkusili najít hodnoty vlastní frekvence kyvadla při měřeni bez tlumení ω_1 a s tlumení ω_2:

$$\omega_1 = (3,73 \pm 0,01)\,\mathrm{s}^{-1} \qquad \omega_2 = (3,80 \pm 0,13)\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Relativní chyba druhého měření se výrazně liší od prvního (0,3% pro první a 3,5% pro druhé měření) a oba dva měření mají chybu větší než hodnota, kterou jsme dostali v první úloze.

7 Závěr

Naměřili jsme časový vývoj výchylky kmitů kyvadla pro volné netlumené kmity (Obr. 3) a určili vlastní frekvenci Pohlova kyvadla $\omega_0 = (3,7436 \pm 0,0001)\ \mathrm{s}^{-1}$.

Změřili jsme závislost koeficientu útlumu na tlumícím proudu v rozmezí do 2 A (6), vynesli do grafu na Obr. 4 a extrapolací našli hodnotu proudu, při které nastane kritický útlum $I_{\mathrm{krit}} = (4,0 \pm 0,5)$ A.

Nepodařilo se nám experimentálně určit hodnotu tlumícího proudu, pro který nastává kritický útlum kvůli nedostatku vybavení (chyběla nám jedna ze dvou tlumicích cívek).

Sestavili jsme kalibrační křivku budícího motorku (závislost frekvence otáček na napětí), Obr. 5.

Naměřili jsme rezonanční křivky netlumeného a tlumeného kyvadla. Vynesli jsme je do grafu na Obr. 6. Pak jsme určili vlastní frekvenci Pohlova kyvadla a diskutovali výsledek.

Literatura

[1] BAJER, Jiří. Mechanika 3, Univerzita Palackého v Olomouci: Olomouc, 2006.

[2] Návod - Harmonické oscilace - https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435399/mod_resource/content/9/PohlovoKyvad [cit.29.11.2021]

[3] LANDAU, Lev D. Mechanics, 1976.

[4] Základy fyzikálních měření, prezentace - https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf [cit.29.11.2021]

Příloha

8 Domácí příprava

DÚ: 1) Ověřte, že $\varphi_1(t)=e^{-\delta t}$ a $\varphi_2(t)=te^{-\delta t}$ je řešením pohybové rovnice Pohlova kyvadla v případe $\omega_0=\delta$ (kritický útlum):

$$\ddot{\varphi}(t)+2\delta\dot{\varphi}(t)+\omega_0^2\varphi(t) = \ddot{\varphi}(t)+2\delta\dot{\varphi}(t)+\delta^2\varphi(t)=0$$

dosazením: $\varphi_1(t)=e^{-\delta t}$ $\quad\dot{\varphi}_1(t)=-\delta e^{-\delta t}$ $\quad\ddot{\varphi}(t)=\delta^2 e^{-\delta t}$

$$\delta^2+(-2\delta^2)+\delta^2=0 \Rightarrow \varphi_1(t)=e^{-\delta t} \text{ je řešením}$$

dosazením: $\varphi_2(t)=te^{-\delta t}$ $\quad\dot{\varphi}_2(t)=e^{-\delta t}-\delta te^{-\delta t}$ $\quad\ddot{\varphi}_2(t)=-\delta e^{-\delta t}-\delta e^{-\delta t}+\delta^2 te^{-\delta t}$

$$\underbrace{-\delta-\delta+\delta^2 t}_{\ddot{\varphi}_2(t)/e^{-\delta t}}+\underbrace{2\delta-2\delta^2 t}_{\dot{\varphi}_2(t)/e^{-\delta t}}+\underbrace{\delta^2 t}_{\varphi_2(t)/e^{-\delta t}}=0 \Rightarrow \varphi_2(t)=te^{-\delta t} \text{ je řešením}$$

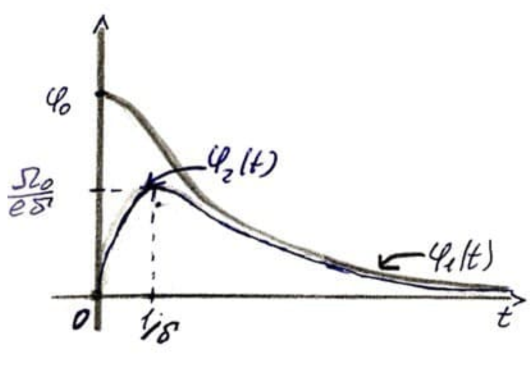
2) Naleznete řešení pro polohovou a rychlostní podmínku.

polohová: $\varphi(0)=\varphi_0>0$, $\dot{\varphi}(0)=0$
rychlostní: $\varphi(0)=0$, $\dot{\varphi}(0)=\Omega_0>0$

$\varphi(t)=C_1e^{-\delta t}+C_2te^{-\delta t}$ ← řešení

polohová: $\varphi(0)=C_1=\varphi_0>0$
$\dot{\varphi}(0)=-\delta\varphi_0+C_2=0 \Rightarrow C_2=\delta\varphi_0 \Rightarrow \varphi(t)=\varphi_0e^{-\delta t}+\delta\varphi_0te^{-\delta t}$

rychlostní: $\varphi(0)=C_1=0$
$\dot{\varphi}(0)=C_2=\Omega_0 \Rightarrow \varphi_2(t)=\Omega_0te^{-\delta t}$



$\varphi_1(0)=\varphi_0$

$\varphi_2(0)=0$, $\dot{\varphi}_2(\frac{1}{\delta})=0$, $\varphi_2(\frac{1}{\delta})=\frac{\Omega_0}{e\delta}$