2023-2024数学分析辅学第一次授课

1 实数完备性定理

1.0

1. 给出概念、定理的名字可以使用数学语言准确叙述。
2. 掌握基本的定理证明链（详细参考1.4.1 1.4.2）：
   - 确界原理→单调有界定理→致密性定理→Cauchy准则
   - 单调有界定理→闭区间套定理→有限覆盖定理（聚点原理和Dedekind分割定理不要求）
   - 确界原理→各个定理
3. 期末考试会在这几个定理里出叙述题和证明题；小测会考各个定理的数学叙述细节。

1.1 概念叙述

1. 有界，无界

$$\begin{aligned} \text{数列有界：}\quad & \forall n > 0, \exists M \in \mathrm{R}, \text{使}|x_n| < M\text{恒成立} \\ \text{数列无界：}\quad & \forall M \in \mathrm{R}, \exists n > 0, \text{使}|x_n| > M \\ \text{错误(?)：}\quad & \exists n > 0, \forall M \in \mathrm{R}, \text{使}x_n > M \end{aligned}$$

   数学语言的否定：转换全称量词和存在量词，**注意量词顺序**，改变符号

2. 最大数，最小数

$$\begin{aligned} \max\{S\} = a \iff & a \in S\text{且}\forall x \in S, a \geq x \\ \min\{S\} = b \iff & b \in S\text{且}\forall x \in S, b \leq x \end{aligned}$$

3. 上确界，下确界

$$
\begin{aligned}
M=\sup\{S\} &\iff \forall x\in S, x\le M\text{且}\forall\epsilon>0,\exists x'\in S\text{有}x'>M-\epsilon\\
m=\inf\{S\} &\iff \forall x\in S, x\ge m\text{且}\forall\epsilon>0,\exists x'\in S\text{有}x'<M+\epsilon
\end{aligned}
$$

1.2 定理叙述

1. 确界原理

   非空有界集必有上下确界

2. 单调有界定理

   单调有界数列必收敛

3. 致密性定理

   任何有界数列必有收敛子列

4. Cauchy准则

$$
\begin{aligned}
a_n\text{收敛} &\iff \forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall m,n>N,\text{均有}|a_m-a_n|<\epsilon\\
&\iff \forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,p>0,\text{均有}|a_{n+p}-a_n|<\epsilon
\end{aligned}
$$

5. 区间套定理

$$
\begin{aligned}
&\text{设闭区间列}\{[a_n,b_n]\}\text{满足：}\\
&1.[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],n=1,2,3..\\
&2.\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0\\
&\text{则存在唯一实数}\xi\text{，满足}\xi\in[a_n,b_n],n=1,2..
\end{aligned}
$$

6. 有限覆盖定理

$$
\begin{aligned}
&\text{设}[a,b]\text{是一个闭区间，}\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\text{是}[a,b]\text{的任意一个开覆盖，}\\
&\text{则必存在}\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\text{的一个子集构成}[a,b]\text{的一个有限覆盖。}\\
\iff &\text{在}\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\text{必有有限个开区间}E_1,E_2..E_N\text{使}[a,b]\subset\cup_{j=1}^N E_j
\end{aligned}
$$

1.3 常用技巧

1. 证明集合相等的常用方法：相互包含

   例题：确界的关系式

   设A，B是两个由非负数组成的任意数集,试证明$\sup\limits_{x\in A}\{x\}\cdot\sup\limits_{y\in B}\{y\}=\sup\limits_{x\in A,y\in B}\{xy\}$

2. 对于实数完备性定理的证明题，首先将给的条件和证明内容均翻译成数学语言（方便骗分），再观察条件和证明内容的联系。

1.4 例题&习题

1. 用确界原理证明单调有界原理、致密性定理、Cauchy准则、闭区间套定理、有限覆盖定理。

2. 用单调有界定理证明闭区间套定理，用闭区间套定理证明有限覆盖定理；用致密性定理证明Cauchy收敛准则。

3. f, g为D上有界函数, pf: $\inf\{f(x)+g(x)\} \leq \inf f(x)+\sup g(x)$

4. 设$f(x)$在$[0,1]$上递增, $f(0)>0, f(1)<1$, 求证 : $\exists x_0 \in (0,1)$, 使得$f(x_0)=x_0^2$ (Hint:确界原理or区间套定理)

5. 设$f(x)$在$[a,b]$上有定义且在每一点处函数的极限存在，求证$f(x)$在$[a,b]$上有界 (Hint:有限覆盖)

6. 设$f(x)$在(a,b)内有定义，$\forall \xi \in (a,b), \exists \delta>0$, 当$x \in (\xi-\delta, \xi+\delta) \cap (a,b)$时, 有当$x<\xi$时,$f(x)<f(\xi)$, 当$x>\xi$时,$f(x)>f(\xi)$.请证明:$f(x)$在$(a,b)$内严格递增 (Hint:有限覆盖)

2 数列极限

2.0

1. 从小测的角度来说，概念，定理以及判断题是比较重要（搞脑子）的，当然也会有计算题
2. 期末考试可能会出1-2道求极限，1道非常简单的极限证明题（附在定理叙述上）
3. 计算也需要掌握，但是技巧性强的可以不掌握

4. 学好数列极限对函数极限和级数都很有帮助，而学好了函数极限就可以学好导数和积分，然后你就学会了数分1

2.1 概念叙述

1. 数列极限（$\epsilon - N$语言）

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |x_n - A| < \epsilon \text{称} \lim_{x\to\infty} x_n = A$$
$$* : |x_n - A| < f(\epsilon), f(x)\text{满足} \lim_{x\to 0} f(x) = 0\text{即可}$$

2. 数列发散

$$\forall A \in R, \exists \epsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n_N > N, |x_n - A| \geq \epsilon_0$$

3. 子列

$$\{a_n\}\text{收敛} \iff \{a_n\}\text{的任意子列都收敛于}A(\text{请注意减弱命题})$$

4. 无穷小量和无穷大量

$$\begin{aligned} &\text{无穷小量}: \lim_{x\to\infty} \quad = 0 \\ &\text{无穷大量}: \forall M > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n| > M \end{aligned}$$

2.2 定理叙述

1. Stolz定理

   常用于计算形式需要洛必达的极限

2. Cauchy收敛准则、等价形式及否定

$$\begin{aligned} a_n\text{收敛} &\iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N, \text{均有}|a_m - a_n| < \epsilon \\ &\iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, p > 0, \text{均有}|a_{n+p} - a_n| < \epsilon \\ \text{否定形式}: a_n\text{发散} &\iff \exists \epsilon_0 > 0, \forall N, \exists n_0 > N, p > 0, |x_{n_0+p} - x_{n_0}| \geq \epsilon_0 \end{aligned}$$

2.3 常用技巧

1. 一些关系链:
    a. $n\to\infty$时

    $$\log\log n \ll \log n \ll n^a \ll b^n \ll n! \ll n^n \quad (a,b>0)$$

    b. $x\to 0$时

$$\begin{aligned} x \sim & \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ \sim & \ln(1+x) \sim \mathrm{e}^x - 1 \sim \frac{a^x-1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^b-1}{b} \quad (a>0, b\neq 0) \\ & 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

2. 证明数列极限存在:
    a. 定义（$\epsilon - N$方法）

    技巧：放大法(常用)/分步法/构造形式类似的项/拟合法(技巧性较强)
    b. Cauchy准则：不需要知道极限值
    c. Cauchy准则的推论：常用于判断数项级数是否收敛($a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$)
    d. 单调有界原理：不动点，递推式考虑
    e. 极限的运算性质：本身存在极限 有限项运算
3. 证明数列极限不存在:
    a. Cauchy命题的否定形式
    b. 子列不收敛或收敛于不同的数
4. 求数列(函数)极限:
    a. 极限的运算性质

    一些重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
    b. Stolz定理
    c. 夹逼定理
    d. 等价代换与初等变形
    e. 递推形式的极限：单调有界原理+证明/压缩映像(略难)/Stolz公式的应用
    f. Taylor/L'Hospital/积分定义/数项级数/级数的连续性...:
    很重要，但这是后事了

2.4 例题&习题

1. 判断下列关于子列的命题

   a. 设$\{a_n\}$是一个数列，若在任一子列$\{a_{n_k}\}$中均存在收敛子列$\{a_{n_{k_r}}\}$,则$\{a_n\}$必收敛

   b. $\{a_n\}$单调递增，$\{a_{n_k}\}$为其中一个子列，$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

   c. $\{a_{2k}\}\{a_{2p+1}\}\{a_{2023t+2024}\}$均收敛，则$\{a_n\}$收敛

   d. $\{a_{2k}\}\{a_{2t+1}\}\{a_{6p+5}\}$均收敛，则$\{a_n\}$收敛

2. 判断下列关于无穷小量的命题

   a. 无穷多个无穷小量之和是无穷小量

   b. 无穷多个无穷小量之积是无穷小量

   c. 无穷小量与有界量之积为无穷小量

3. 判断下列关于数列极限的命题

   a. 数列a_n收敛 $\iff \forall p \in N, \lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \iff \forall k \in \mathrm{N}, \exists N > 0, \forall n > N, |x_n - A| < \frac{1}{k}$

   c. a_n收敛 $\iff \exists N > 0, \forall \epsilon > 0, \forall m, n > N,$ 均有$|a_m - a_n| < \epsilon$

4. 重要的二级结论：

$$Cauchy\text{定理}: \lim_{n\to\infty} x_n = A, \text{则} \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = A$$

5. $x_n = \sum_{i=1}^{n} \sin(\frac{2i-1}{n^2}a)$, pf: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (Hint:拟合法)

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$：

   a. $x_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

   b. $x_n = (\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2})^n$

c. $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

d. $x_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}$

e. $x_n = \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}$

7. (2019(?)年数分1期末)

$$\text{对于数列} x_0 = a, 0 < a < \frac{\pi}{2}, x_n = \sin x_{n-1} (n = 1, 2, \cdots).$$

$$\text{pf:(1)} \lim_{n\to\infty} x_n = 0; (2) \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$$