数学分析（甲）II（H）2022-2023 春夏期末

图灵回忆卷

2023 年 6 月 23 日

一、(10 分) 叙述函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛的定义，并据定义证明函数列 $\left\{f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^4}}\right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

二、(40 分) 计算:

1. 设 $z=f(x^2e^{-y},xy)$，函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 有二阶连续偏导数，请计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

2. 空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\ x+2y+3z=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,-1)$ 处的切线与法平面;

3. 第一类曲线积分 $I=\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$，其中 γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=e^t\end{cases}$，$t\in[0,\pi]$;

4. 第二类曲线积分 $I=\displaystyle\int_C (e^x-y^3)\,\mathrm{d}x+\left(\cos(y^2)+x^3\right)\,\mathrm{d}y$，其中 $C=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,y\geq 0\right\}$ 为单位圆的上半圆，方向为逆时针从 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$;

5. 三重积分 $I=\displaystyle\iiint_\Omega \sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$ 为单位球.

三、(10 分) 请证明函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 在 $(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数都存在，但在 $(0,0)$ 处不可微.

四、(10 分) 请计算幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛域与和函数.

五、(10 分) 请证明在 $(0,0)$ 的某邻域内存在唯一的可导函数 $y=\varphi(x)$ 满足 $\sin y+\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=x$，并求其导函数 $\varphi'(x)$.

六、(10 分) 证明：$\forall x\in(0,\pi)$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$.

七、(10 分) 已知 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\ln n}$. 证明:

1. $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续;

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$ 在 $(0,\pi)$ 上非一致收敛;

3. $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上可导，且 $f'(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln n}$.