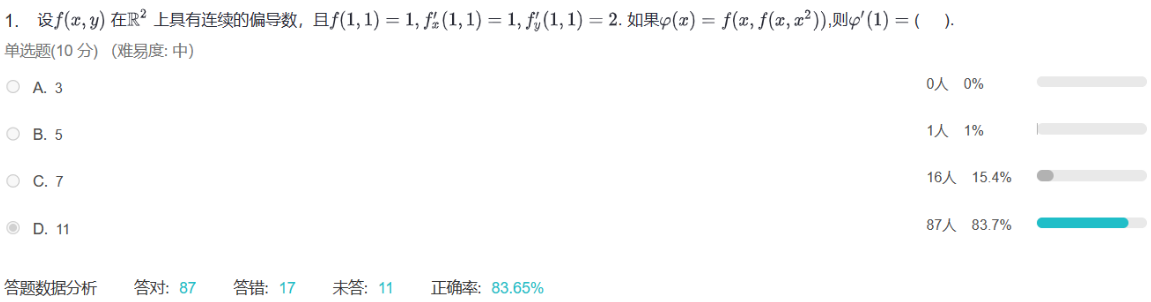
数学分析第二次小测

汤俊浩

May 25, 2023

1



1. 设$f(x,y)$ 在$\mathbb{R}^2$ 上具有连续的偏导数，且$f(1,1)=1, f'_x(1,1)=1, f'_y(1,1)=2$. 如果$\varphi(x)=f(x,f(x,x^2))$,则$\varphi'(1)=($ $)$.

单选题(10 分) (难易度: 中)

A. 3	0人	0%
B. 5	1人	1%
C. 7	16人	15.4%
D. 11	87人	83.7%

答题数据分析 答对: 87 答错: 17 未答: 11 正确率: 83.65%

Figure 1:

$$\varphi(x)=f(x,f(x,x^2)),\text{ 记 } g(x)=f(x,x^2).\text{ 则 } g'(x)=f'_x(x,x^2)+f'_y(x,x^2)(2x).$$

$$\varphi'(x)=f'_x(x,g(x))+f'_y(x,g(x))*g'(x)$$

由于 $g(1)=f(1,1)=1, g'(1)=f'_x(1,1)+f'_y(1,1)*2=5,$

$$\varphi'(1)=f'_x(1,g(1))+f'_y(1,g(1))*g'(1)=f'_x(1,1)+f'_y(1,1)*5=11$$

2

2. 设$f(x,y)=ax^3+bx^2+cy^2+dy^3+2xy$,其中$a,b,c,d$为常数。则满足条件( ) 的点$(x_0,y_0)$ 必定不是$f(x,y)$的极值点.

单选题(10 分) (难易度: 中)

A. $3ax_0+b>0$ 且 $(3ax_0+b)(3dy_0+c)>1$.	7人	6.7%
B. $3ax_0+b<0$ 且 $(3ax_0+b)(3dy_0+c)>1$.	8人	7.7%
C. $(3ax_0+b)(3dy_0+c)=1$.	8人	7.7%
D. $(3ax_0+b)(3dy_0+c)=-1$.	81人	77.9%

答题数据分析 答对: 81 答错: 23 未答: 11 正确率: 77.88%

Figure 2:

$\frac{\partial f}{\partial x}=3ax^2+2bx+y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=3dy^2+2cy+x$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=3ax^2+2bx+y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6dy+2c,$

$$Hesse \text{ 矩阵 } A=\begin{pmatrix} 6ax+2b & 1 \\ 1 & 6dy+2c \end{pmatrix}$$

A 的顺序主子式 $|A_1| = 6ax + 2b, |A_2| = 4(3ax + b)(3dy + c) - 1$.
若 $|A_1| > 0, |A_2| > 0$, 则 A 正定, 此时在驻点处取得极小值. 若 $|A_1| < 0, |A_2| > 0$, 则 A 负定, 此时在驻点处取得极大值. 若 $|A_2| < 0$, 则 A 不定, 此时不能取得极值.

3

3. 设函数$f(x,y)$在原点$(0,0)$的某邻域内有定义，则下述命题不正确的是(　).

单选题(10 分)（难易度: 中）

- A. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 都存在，则它们必然相等. 7人 6.5%
- B. 若$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 都存在，则它们必然相等. 98人 90.7%
- C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 有可能三者恰有一个存在. 1人 0.9%
- D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 有可能三者恰有两个存在. 2人 1.9%

答题数据分析　答对: 98　答错: 10　未答: 7　正确率: 90.74%

Figure 3:

重极限与累次极限的关系反映在下面的命题中.

命题 18.1.1 当重极限存在且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 时,
(1) 如果 $y \neq y_0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = A$;
(2) 如果 $x \neq x_0$ 时, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = A$.

由此命题可见: 当重极限和某个累次极限都存在时, 则该累次极限的值应该等于重极限的值. 但在一般情况下, 重极限与累次极限没有什么必然的关系.

当重极限存在时, 两个二次极限可以都不存在, 也可以一个存在而另一个不存在, 例如

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

此时 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, 但 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

当重极限不存在时, 可以是两个二次极限存在且相等, 也可以是两个二次极限存在但不相等, 还可以是两个二次极限中一个存在而另一个不存在. 例如

$$f(x,y) = \frac{y}{x}, \quad 当\ \ x \neq 0,$$

显然有 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$, 但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 都不存在.

Figure 4:

参考谢惠民《数学分析习题课讲义 (下册)》. 图4.

Figure 5:

4

B

以下例子来源于汪林《实分析中的反例》.
考虑

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

首先证明 f 在 $(0,0)$ 处沿任意方向都可微. 取

$$F(t)=f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\begin{cases}\dfrac{(t\cos\theta)^5}{((t\sin\theta)-(t\cos\theta)^2)^2+(t\cos\theta)^6}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

当 $\sin\theta\neq0$ 时,

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{t\to0}\frac{F(t)-F(0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{t^2\cos^5\theta}{(\sin\theta-t\cos^2\theta)^2+t^4\cos^6\theta}=0\end{aligned}$$

当 $\sin\theta=0$ 时,

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{t\to0}\frac{F(t)-F(0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\cos^5\theta}{\cos^4\theta+t^2\cos^6\theta}=\cos\theta\end{aligned}$$

因此函数 f 在 $(0,0)$ 处沿任意方向都可微. 但是点 (x,y) 沿曲线 $y=x^2$ 趋近于 $(0,0)$ 时, 极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),y=x^2}\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}=\lim_{(x,y)\to(0,0),y=x^2}\frac{1}{x}$$

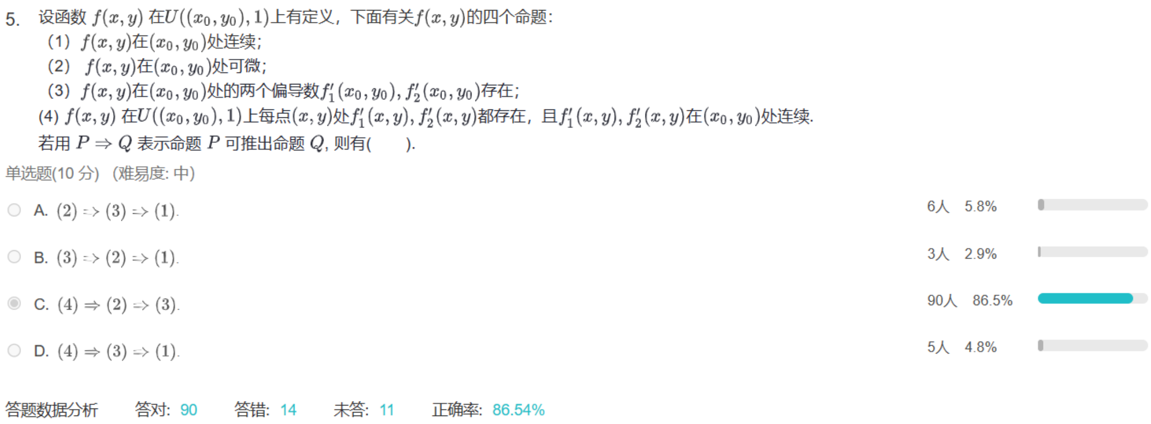
不存在, 从而极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在. 因此, 函数 f 在 $(0,0)$ 不连续.

A,C

若 f 在 P_0 处不连续, 则显然不可微.
另外, 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ 存在要求两侧的方向导数存在且相等, 上述例子中的 f 即不满足此条件.

5

参考谢惠民《数学分析习题课讲义 (下册)》. 图7.


5. 设函数 $f(x,y)$ 在$U((x_0,y_0),1)$上有定义，下面有关$f(x,y)$的四个命题：

（1）$f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续；

（2）$f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微；

（3）$f(x,y)$在(x_0,y_0)处的两个偏导数$f_1'(x_0,y_0)$, $f_2'(x_0,y_0)$存在；

(4) $f(x,y)$ 在$U((x_0,y_0),1)$上每点(x,y)处$f_1'(x,y)$, $f_2'(x,y)$都存在，且$f_1'(x,y)$, $f_2'(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

若用 $P\Rightarrow Q$ 表示命题 P 可推出命题 Q, 则有(　　).

单选题(10 分)（难易度: 中）

A. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. 6人 5.8%

B. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. 3人 2.9%

C. $(4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$. 90人 86.5%

D. $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. 5人 4.8%

答题数据分析 答对: 90 答错: 14 未答: 11 正确率: 86.54%

Figure 6:

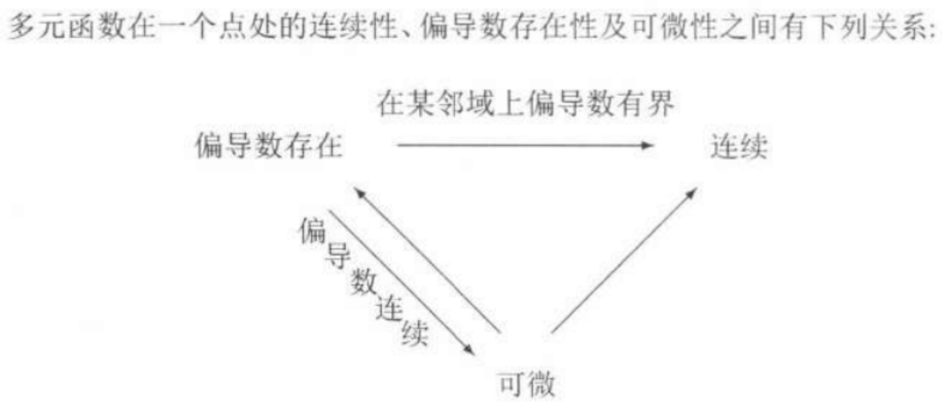


Figure 7:

(2)⇒(1),(3)

$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微, 即存在常数 A,B 使得 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(r)$, 其中 $o(r)$ 为 $r\to 0$ 时关于 r 的高阶无穷小量. 显然 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在. 例如

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x-x_0)+o(r)}{x-x_0}=A$$

(4)⇒(2)

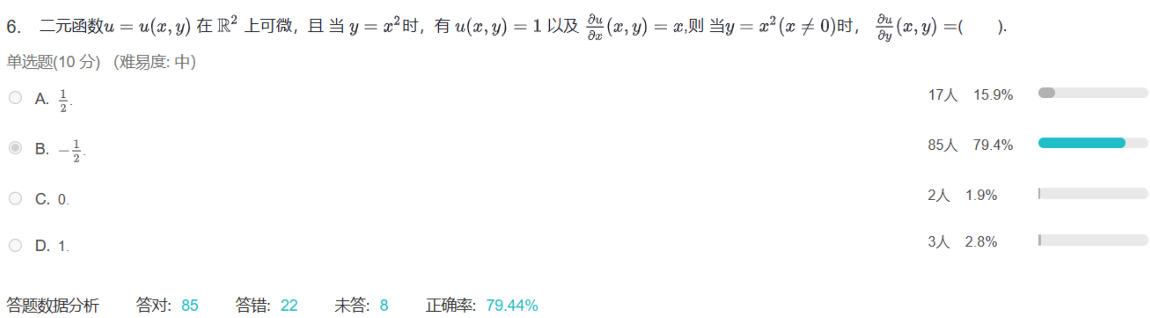
我们来证明此时有 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(r)$, 利用中值定理

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\\&=f'_x(\xi,y)(x-x_0)+f'_y(x_0,\eta)(y-y_0)\end{aligned}$$

记 $\triangle x=x-x_0,\triangle y=y-y_0$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\triangle x-f'_y(x_0,y_0)\triangle y}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}\right|&=\left|\frac{(f'_x(\xi,y)-f'_x(x_0,y_0))\triangle x+(f'_y(x_0,\eta)-f'_y(x_0,y_0))\triangle x}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}\right|\\&\le|(f'_x(\xi,y)-f'_x(x_0,y_0))|+|(f'_y(x_0,\eta)-f'_y(x_0,y_0))|\to 0\end{aligned}$$

6



6. 二元函数$u=u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微，且当 $y=x^2$时，有 $u(x,y)=1$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=x$,则 当$y=x^2(x\neq 0)$时，$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=($ $)$.

单选题(10 分) (难易度: 中)

A. $\frac{1}{2}$. 17人 15.9%

B. $-\frac{1}{2}$. 85人 79.4%

C. 0. 2人 1.9%

D. 1. 3人 2.8%

答题数据分析 答对: 85 答错: 22 未答: 8 正确率: 79.44%

Figure 8:

记 $f(x)=u(x,x^2)\equiv 1$. 故 $f'(x)\equiv 0=u'_x(x,x^2)+u'_y(x,x^2)*(2x)$. 故 $u'_y(x,x^2)\equiv -\frac{1}{2}$

7

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\cos(xy)y+\varphi'_1(x+y,\frac{x}{y})+\varphi'_2(x+y,\frac{x}{y})(\frac{1}{y})\\\frac{\partial z}{\partial y}&=\cos(xy)x+\varphi'_1(x+y,\frac{x}{y})+\varphi'_2(x+y,\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=&\cos(xy)-\sin(xy)xy+\varphi''_{11}(x+y,\frac{x}{y})+\varphi''_{12}(x+y,\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2})\\&+\left(\varphi''_{21}(x+y,\frac{x}{y})+\varphi''_{22}(x+y,\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2})\right)(\frac{1}{y})+\varphi'_2(x+y,\frac{x}{y})(-\frac{1}{y^2})\end{aligned}$$

7. 设二元函数 $\varphi(u,v)$在$\mathbb{R}^2$上有所有的二阶偏导函数，且所有的二阶偏导函数在$\mathbb{R}^2$上连续. 再设 $z=\sin(xy)+\varphi(x+y,\frac{x}{y})$,则下述结论正确的有(　　).

多选题(10 分) (难易度: 中)

- ☑ A. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+\varphi_1'(x+y,\frac{x}{y})+\frac{1}{y}\varphi_2'(x+y,\frac{x}{y})$.　　104人　96.3%
- ☑ B. $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+\varphi_1'(x+y,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^2}\varphi_2'(x+y,\frac{x}{y})$.　　104人　96.3%
- ☐ C. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)+\varphi_{11}''(x+y,\frac{x}{y})+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})\varphi_{12}''(x+y,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^3}\varphi_{22}''(x+y,\frac{x}{y})$.　　16人　14.8%
- ☑ D. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)+\varphi_{11}''(x+y,\frac{x}{y})+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})\varphi_{12}''(x+y,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^3}\varphi_{22}''(x+y,\frac{x}{y})-\frac{1}{y^2}\varphi_2'(x+y,\frac{x}{y})$.　　93人　86.1%

答题数据分析　答对: 87　答错: 21　未答: 7　正确率: 80.56%

Figure 9:

8. 曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2&=6\\ x+y+z&=0\end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线一定平行于（　）.

单选题(10 分) (难易度: 中)

- ○ A. 坐标平面 XOY.　　0人　0%
- ○ B. 坐标平面YOZ.　　0人　0%
- ◉ C. 坐标平面ZOX.　　99人　91.7%
- ○ D. 平面$x+y+z=0$.　　9人　8.3%

答题数据分析　答对: 99　答错: 9　未答: 7　正确率: 91.67%

Figure 10:

如果空间曲线 l 是用两个曲面

$$F(x,y,z)=0,\quad G(x,y,z)=0$$

的交线来表示的, 又设 F 和 G 关于 x,y,z 有连续的偏导数. 点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足这一方程组, 即 $F(x_0,y_0,z_0)=0, G(x_0,y_0,z_0)=0$, 并且 F,G 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{pmatrix}$$

在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的秩为 2, 则曲线 l 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\bigg|_{\boldsymbol{p}_0}.$$

Figure 11:

8

参考谢惠民《数学分析习题课讲义 (下册)》. 图11.

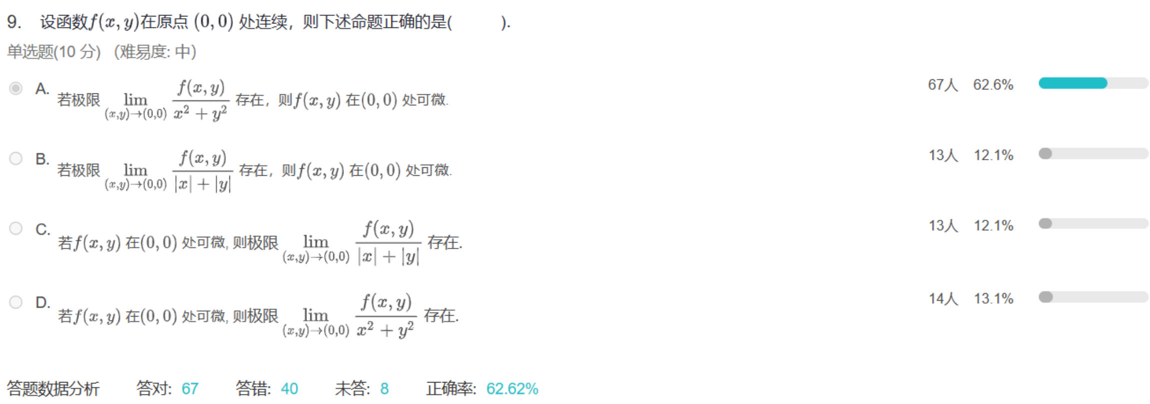
$$Jocobi \text{ 矩阵 } J=\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

该点切向量为 $\tau=(2y-2z,2z-2x,2x-2y)|_{(1,-2,1)}=(-6,0,6)$. 该点的切线方程为

$$\frac{x}{-6}=\frac{z}{6}, y=-2$$

切向量 $\tau \perp \text{span}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$, 而 $(0,1,0)$ 为坐标平面 ZOX 的法向量, 故该点的切线垂直于坐标平面 ZOX.

9



9. 设函数$f(x,y)$在原点 $(0,0)$ 处连续，则下述命题正确的是(　　).

单选题(10 分)　(难易度: 中)

A. 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微.　67人　62.6%

B. 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微.　13人　12.1%

C. 若$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.　13人　12.1%

D. 若$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.　14人　13.1%

答题数据分析　答对: 67　答错: 40　未答: 8　正确率: 62.62%

Figure 12:

A

不妨设

$$A=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$$

上式极限存在, 显然有 $f(0,0)=0$. 则上式可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{r}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{r^2}*r=0$$

故 $f(x,y)=f(0,0)+o(r)$ 即为 $f(x,y)$ 在零点的可微性.

B

考虑 $f(x,y)=|x|+|y|$ 即可. 显然 $f(x,y)$ 满足条件, 但是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数不存在, 进而也不可微.

C,D

考虑 $f(x,y)=x+y$ 即可. 显然 $f(x,y)$ 满足可微条件, 但是两者的极限都不存在.

10

10. 下述命题中正确的有(　　).

多选题(10 分) (难易度: 中)

- A. $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 在点$(3,4)$处沿方向 $\vec{l}=(3,4)$ 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(3,4)}=\frac{1}{5}$. 86人 80.4%
- B. $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线$x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域 D上的最大值为 4，最小值为 -64. 85人 79.4%
- C. 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 上点 $(1,-1,1)$ 处的切平面方程为 $x-2y+3z=6$. 96人 89.7%
- D. $z=z(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$ 满足方程 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$. 82人 76.6%
- E. $z=z(x,y)=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$ 满足方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$. 93人 86.9%

答题数据分析　答对: 48　答错: 59　未答: 8　正确率: 44.86%

Figure 13:

A

$\nabla z=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(3,4)}=\nabla z\cdot\vec{l}\Big|_{(3,4)}=(\frac{3}{25},\frac{4}{25})\cdot(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=\frac{1}{5}$$

B

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy(4-x-y)-x^2y=xy(8-3x-2y),\frac{\partial f}{\partial y}=x^2(4-x-y)-x^2y=x^2(4-x-2y)$$

在 $x\neq 0,y\neq 0$ 下解 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 得到 $x=2,y=1$. 此时 $f(2,1)=4$.

再来考虑边界处,$x=0$ 或 $y=0$ 时,$f(x,y)=0$. $x+y=6$ 时, $f(x,y)=x^2(6-x)(-2)=2x^3-12x^2$. 通过求导知 $x=4$ 取极小值,$f(4,2)=-64$.

C

法向量 $\vec{n}=(F'_x(x,y,z),F'_y(x,y,z),F'_z(x,y,z))=(2x,4y,6z)$ 切平面 $2(x-1)-4(y+1)+6(z-1)=0$, 即 $x-2y+3z=6$.

D

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-x^2y^2}*y,\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-x^2y^2}*x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{-x^2y^2}*(-2xy^3),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-x^2y^2}*(1-2x^2y^2),\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-x^2y^2}*(-2x^3y)$$

E

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z*\frac{1}{x^2},\frac{\partial z}{\partial y}=z*\frac{1}{y^2}$$