2022-2023学年春夏学期数学分析(甲)II(H)第二次小测

1. 设函数$f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义，并且f在点$P_0(x_0,y_0)$的所有方向导数都存在，则以下说法错误的是(　　).

多选题(10 分)

A. 偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ 一定都存在.

B. f 一定在点 P_0 处可微.

C. f 一定在点 P_0 处连续.

D. f 在点 P_0 处不一定连续.

2. 设函数$f(x,y)$在原点$(0,0)$ 的某邻域内有定义，则下述命题不正确的是(　　).

单选题(10 分)

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 有可能三者恰有两个存在.

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 有可能三者恰有一个存在.

C. 若$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 都存在，则它们必然相等.

D. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 都存在，则它们必然相等.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在$U((x_0,y_0),1)$上有定义，下面有关$f(x,y)$的四个命题：

(1) $f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续；

(2) $f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微；

(3) $f(x,y)$在(x_0,y_0)处的两个偏导数$f_1'(x_0,y_0), f_2'(x_0,y_0)$存在；

(4) $f(x,y)$ 在$U((x_0,y_0),1)$上每点(x,y)处$f_1'(x,y), f_2'(x,y)$都存在，且$f_1'(x,y), f_2'(x,y)$在(x_0,y_0)处连续.

若用 $P \Rightarrow Q$ 表示命题 P 可推出命题 Q, 则有(　　).

单选题(10 分)

A. $(4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

B. $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

C. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

D. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$.

4. 设$f(x,y)$ 在$\mathbb{R}^2$ 上具有连续的偏导数，且$f(1,1)=1, f_x'(1,1)=1, f_y'(1,1)=2$. 如果$\varphi(x)=f(x,f(x,x^2))$,则$\varphi'(1)=$(　　).

单选题(10 分)

A. 7

B. 3

C. 5

D. 11

5. 曲线 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 6 \end{cases}$ 在点$(1,-2,1)$处的切线一定平行于（　）

曲线Γ：$\begin{cases} \quad \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点$(1,-2,1)$处的切线一定平行于（ ）.

单选题(10 分)

A. 平面$x+y+z=0$.

B. 坐标平面YOZ.

C. 坐标平面ZOX.

D. 坐标平面 XOY.

6. 设函数$f(x,y)$在原点 $(0,0)$ 的某个邻域内有定义且在点$(0,0)$处连续，则下述命题正确的是(　　　).

单选题(10 分)

A. 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微.

B. 若$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

C. 若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微.

D. 若$f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

7. 设二元函数 $\varphi(u,v)$在$\mathbb{R}^2$上有所有的二阶偏导函数，且所有的二阶偏导函数在$\mathbb{R}^2$上连续. 再设 $z=\sin(xy)+\varphi(x+y,\frac{x}{y})$,则下述结论正确的有(　　).

多选题(10 分)

A. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+\varphi_1'(x+y,\frac{x}{y})+\frac{1}{y}\varphi_2'(x+y,\frac{x}{y})$.

B. $\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \cos(xy)-xy\sin(xy)+\varphi_{11}''(x+y,\frac{x}{y}) \\ &+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})\varphi_{12}''(x+y,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^3}\varphi_{22}''(x+y,\frac{x}{y}).\end{aligned}$

C. $\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \cos(xy)-xy\sin(xy)+\varphi_{11}''(x+y,\frac{x}{y}) \\ &+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})\varphi_{12}''(x+y,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^3}\varphi_{22}''(x+y,\frac{x}{y})-\frac{1}{y^2}\varphi_2'(x+y,\frac{x}{y}).\end{aligned}$

D. $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+\varphi_1'(x+y,\frac{x}{y})-\frac{x}{y^2}\varphi_2'(x+y,\frac{x}{y})$.

8. 二元函数$u=u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微，且 当 $y=x^2$时，有 $u(x,y)=1$ 以及 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=x$,则 当$y=x^2(x\neq 0)$时， $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=$(　).

单选题(10 分)

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. 0.

D. 1.

9. 下述命题中正确的有(　　).

多选题(10 分)

A. $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 在点$(3,4)$处沿方向 $\vec{l}=(3,4)$ 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(3,4)}=\frac{1}{5}$.

B. $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线$x+y=6,x$ 轴和 y 轴所围成的有界闭区域 D上的最大值为 4，最小值为 -64.

C. $z=z(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$ 满足方程 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$.

D. 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 上点 $(1,-1,1)$ 处的切平面方程为 $x-2y+3z=6$.

E. $z=z(x,y)=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$ 满足方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

10. 设$f(x,y)=ax^3+bx^2+cy^2+dy^3+2xy$,其中$a,b,c,d$为常数。则满足条件(　　) 的点$(x_0,y_0)$ 必定不是$f(x,y)$的极值点.

单选题(10 分)

A. $3ax_0+b>0$ 且 $(3ax_0+b)(3dy_0+c)>1$.

B. $(3ax_0+b)(3dy_0+c)=-1$.

C. $3ax_0+b<0$ 且 $(3ax_0+b)(3dy_0+c)>1$.

D. $(3ax_0+b)(3dy_0+c)=1$.