含参变量积分

一、含参量正常积分

1. 定义：$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ y 对于积分来说是一个参变量

2. 性质：

(1) 连续性：$f: D=[a,b]\times[c,d]\longrightarrow \mathbb{R}$ 连续

$\Rightarrow I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ 在 $[c,d]$ 上连续

(2) 可微性：f_x, f_y (比上面条件更强!) 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续

$\Rightarrow I(y)$ 在 $[c,d]$ 上可导 且 $\boxed{\frac{d}{dy}I(y)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx}$

(1)(2) $\Rightarrow$ 求导、求极限可与积分交换次序 (注意条件)

<例1> $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}\,dx$

$=\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}\,dx$

$=\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x$

$=\int_0^1 \frac{d(e^x)}{e^x+e^{2x}}$

$=\int_1^e \frac{du}{u+u^2}$

3. 积分次序交换定理

f 连续 $\Rightarrow$ $\boxed{\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy}$

<例2> $\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$

$=\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})\,dx\int_a^b x^y\,dy$ $\leftarrow \frac{d}{dy}(x^y)=\frac{x^y}{\ln x}$

应用：$\begin{cases}\text{搞定一些难算的一元积分}\\ \text{多元积分}\end{cases}$

4. 上下限为函数的含参变量积分

$\Delta\ \frac{d}{dy}\int_{f(y)}^{F(y)} g(t)\,dt = g(F(y))F'(y)-g(f(y))f'(y)$

$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x,y)\,dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y)}$$

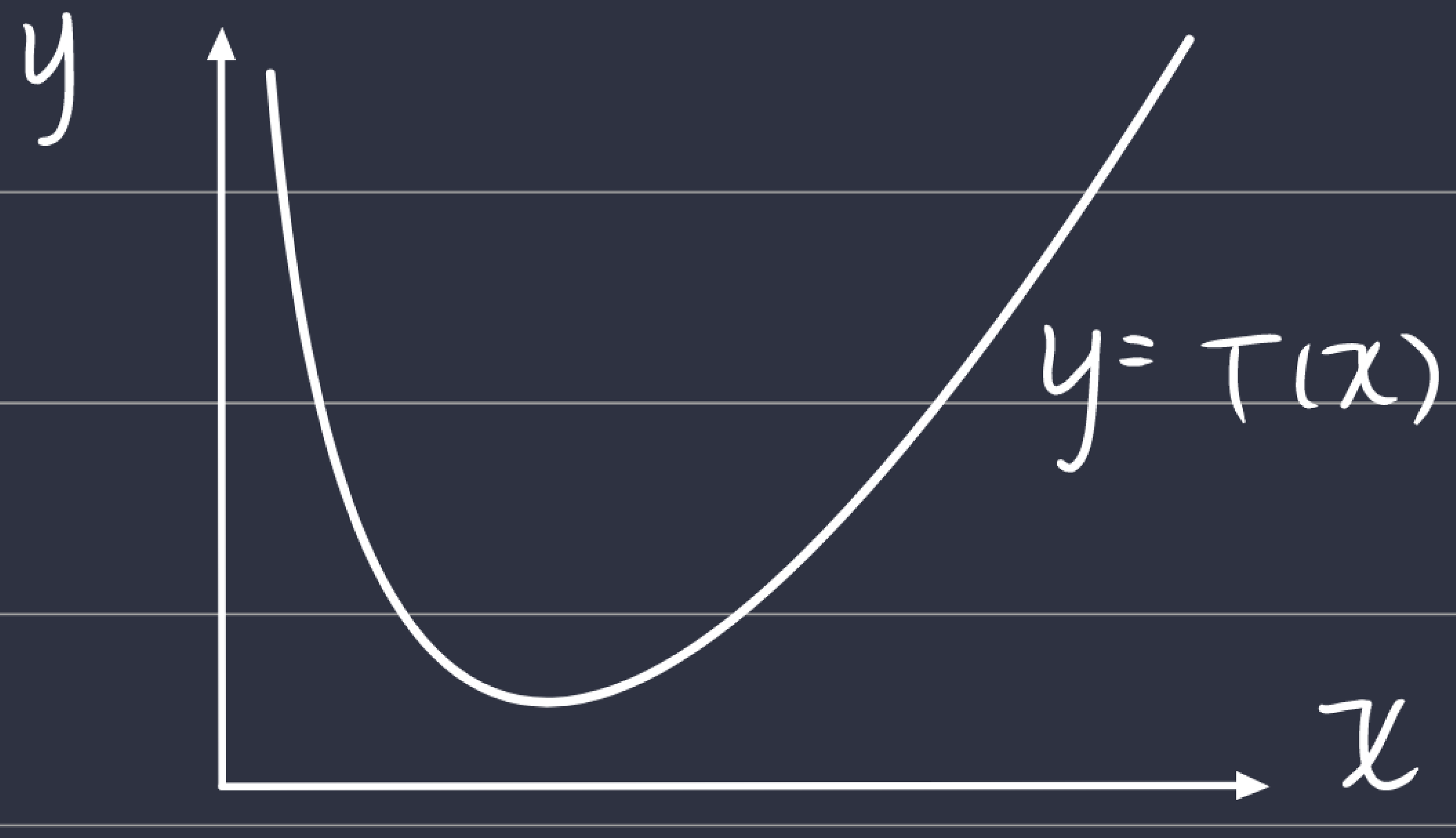
← $\alpha(y), \beta(y)$ 为常数

← $f(x,y)$ 为常数

巧记：联想 $(AB)' = AB' + A'B$

二. 欧拉积分（了解）

1. Gamma 函数



$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

(1) $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = x\Gamma(x-1)$

(2) $\Gamma(n+1) = n!$ （n 为整数）

(3) 余元公式：$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$

2. Beta 函数

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

（x, y 居然是对称的！）

※ 卷积 $f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt = g*f(x)$

3. Stirling 公式（本节唯一重点）

$$\boxed{\text{当 } n \to +\infty \text{ 时}，\ n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

<例3>. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

曲线积分

一、第一类曲线积分计算方法

(一) 二维

1. 定义法直接解

(1) 参数方程:

$$\boxed{\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}$$

适用条件: 已给出 $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ 或曲线能参数化

eg. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{2} \Rightarrow \begin{cases} x=a^3\sin^3\theta \\ y=a^3\cos^3\theta \end{cases}$

(2) 直角坐标:

$$\boxed{\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx}$$

适用条件: 已给出 $y=y(x)$

(3) 极坐标:

$$\boxed{\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,d\theta}$$

适用条件: (椭)圆形曲线

eg. $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow ds=a\,d\theta$

2. 奇偶性

若曲线关于y轴对称 eg. $y=x^2$. $(-a\le x\le a)$

则 $\int_L f(x,y)ds = \begin{cases} 2\int_{\frac{1}{2}L} f(x,y)ds \\ \quad (f(x,y)\text{关于}x\text{为偶函数} \\ \quad \text{eg. } f(x,y)=x^2.) \\ 0 \quad (f(x,y)\text{关于}x\text{为奇函数} \\ \quad \text{eg. } f(x,y)=xy.) \end{cases}$

更常用

3. 对称性

适用条件：曲线中 x, y 等价，被积函数可化为常数

eg. $\int_L x^2 ds \quad L: x^2+y^2=a^2$

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)\, ds = \frac{1}{2} a^2 \times 2\pi a$$

(二) 三维

(1) 定义法直接算

$$\boxed{\int_L f(x,y,z)\,ds = \int_L f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt}$$

(2) 对称性

eg. $\int_L (xy+yz+xz)\,ds \quad L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$$xy+yz+xz = \frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]$$

二. 第二类曲线积分计算方法

1. 定义法

$$\boxed{\begin{aligned} \int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \\ &= \int_L P(x(t),y(t))\,d(x(t)) + Q(x(t),y(t))\,d(y(t)) \\ &\text{或} \int_L [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x)]\,dx \end{aligned}}$$

2. 转化为第一类曲线积分

$$\begin{aligned} \int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds \end{aligned}$$

如果直接给出 $x(t), y(t), z(t)$

单位切向量 $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$= \frac{(x'(t),\ y'(t),\ z'(t))}{\sqrt{x'(t),\ y'(t),\ z'(t)}}$$

如果给出 $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0.\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$

则 $\vec{\tau}$ 与 $\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}$ 同向. 再单位化即可.

$(\vec{n_F}\times\vec{n_G})$

eg. $I=\int_L y\,dx+z\,dy+x\,dz$. $\quad L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0\\ x+y+z-1=0.\end{cases}$

$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2x & 2y & 2z\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2(y-z,z-x,x-y).$$

注意方向!

单位化: $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-z,z-x,x-y)$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_L[y(y-z)+z(z-x)+x(x-y)]\,ds$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_L\left[\frac{1}{2}(x+y+z)^2-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)\right]ds$$

3. 格林公式

$$\boxed{\oint_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}dx\,dy}$$

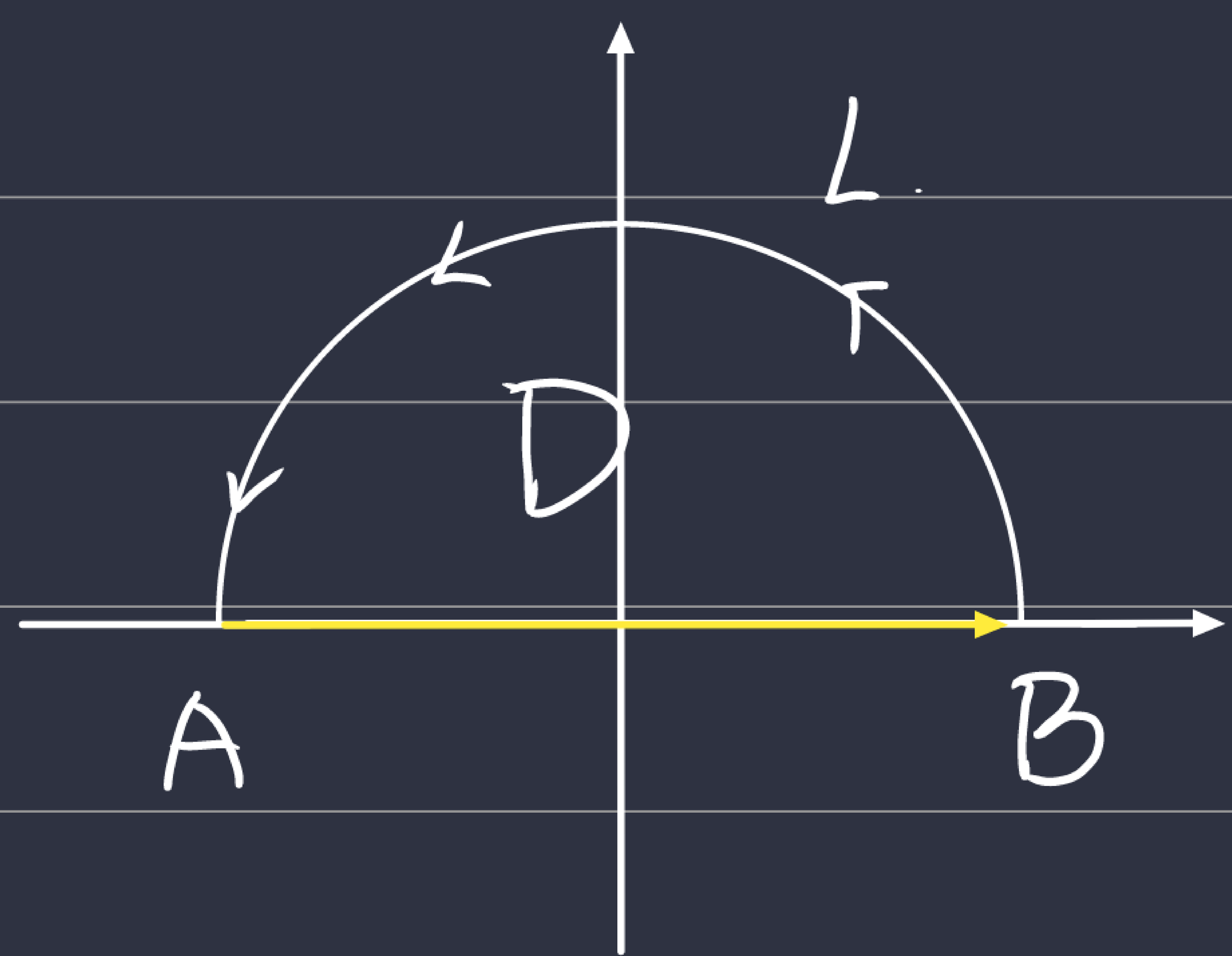
适用条件:

<1> D 为封闭区域. ∂D 正定向

<2> $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上连续

两种特殊情形:

<1> 不封闭? 补全!



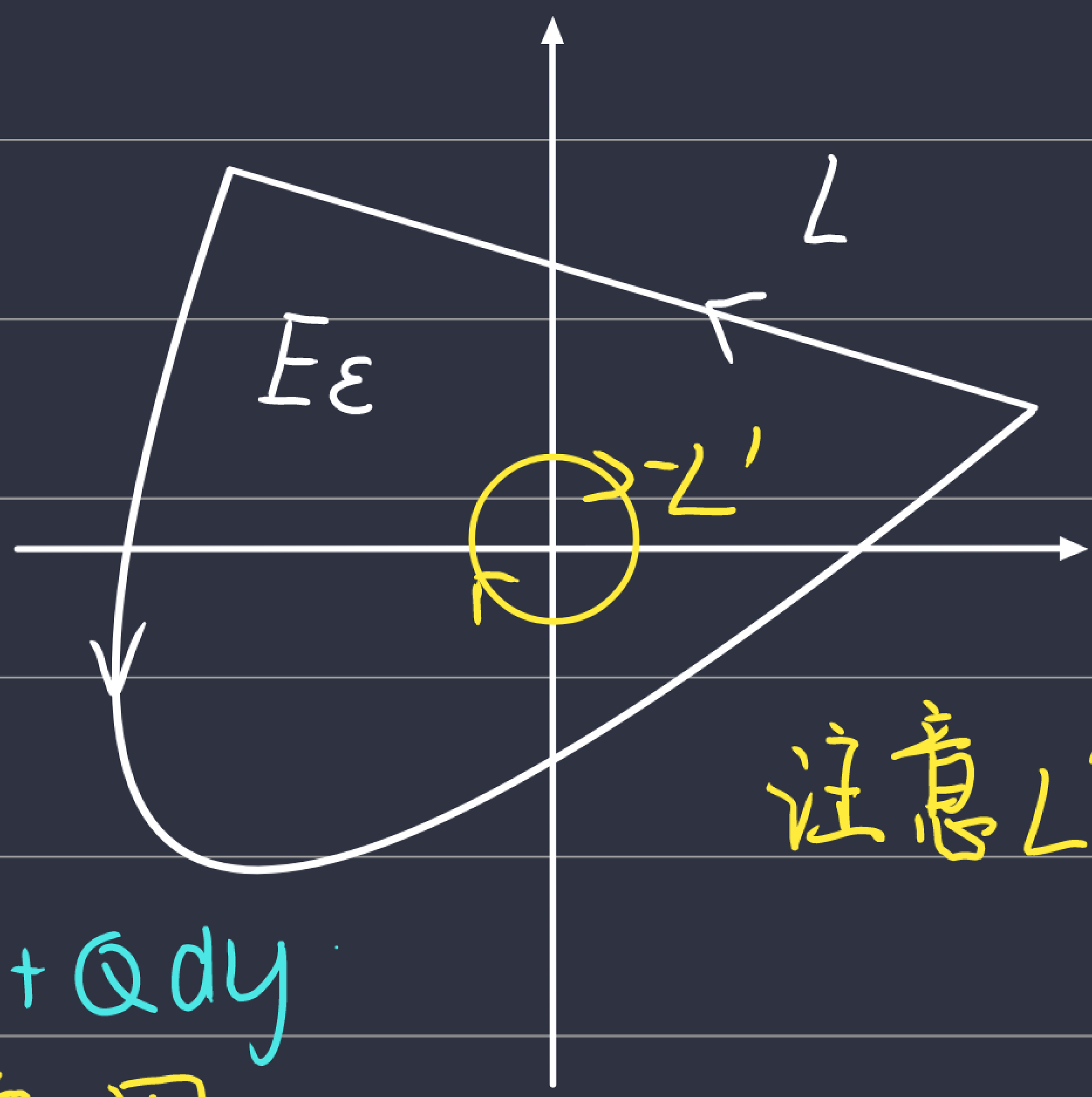
eg. $\int_L P\,dx+Q\,dy=$

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy-\int_{\overline{AB}}P\,dx$$

<2> 区域内有奇点？去掉！

eg. $I=\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$

（直接格林公式？$I=0$. ×）



注意L'方向！

$\int_{L-L'} P\,dx+Q\,dy$

$=\iint_{E_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

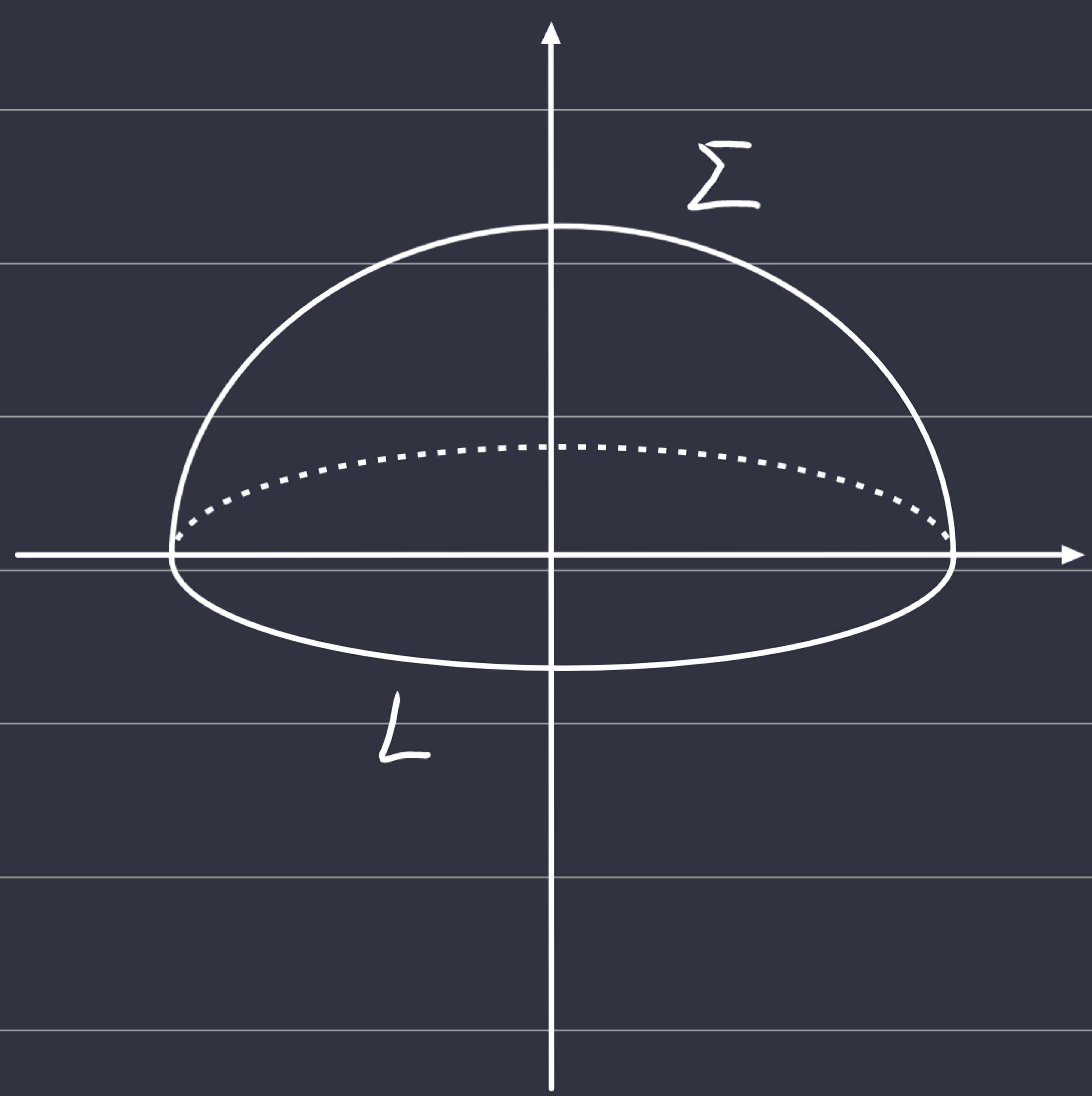
$I=\iint_{E_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\int_{L'} P\,dx+Q\,dy$

Tip：用格林函数算之前先画圈！

4. Stokes 公式

$$\boxed{\oint_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS}$$

（曲线积分 ⇒ 第二类曲面积分）



曲面积分

一、第一类曲面积分计算方法

1. 定义法直接解

(1) 参数方程

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS\\ =&\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left\|\begin{matrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{matrix}\right\|\,du\,dv\end{aligned}}$$

(2) $z=z(x,y)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS\\ =&\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\end{aligned}}$$

2. 奇偶性

若积分曲面关于 xoy 平面对称

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS=\begin{cases}2\iint_{\Sigma_{上}} f(x,y,z)\,dS & f\text{关于}z\text{:偶函数}\\ 0 & f\text{关于}z\text{:奇函数}\end{cases}$$

（常用）

3. 对称性

eg. $\iint_\Sigma x^2\,dS$ $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

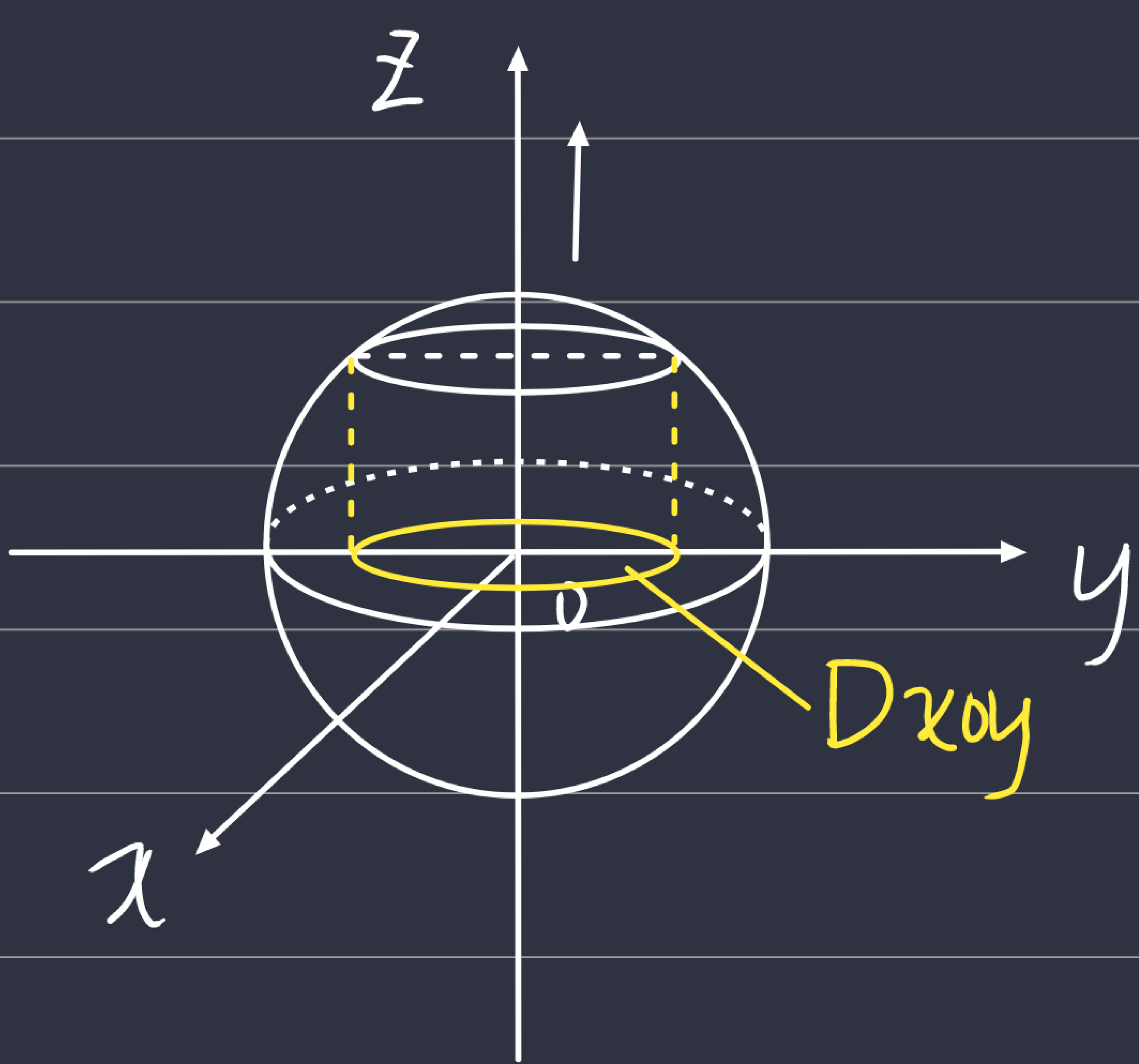
二、第二类曲面积分计算方法

1. 定义法（一投二代三定号）

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,dx\wedge dy$$
$$=\iint_{D_{xoy}} P(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$$

符号：外侧朝上为正，朝下为负

（看题目怎么给）



2. 转化为第一类曲面积分

$$\iint_\Sigma \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

$$= \iint_\Sigma P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$$

设 $\Sigma: z = z(x,y)$.

$$\boxed{\iint_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{S} = \pm\iint_D [-PZ_x - QZ_y + R]\,dx\,dy}$$ (常用!)

3. 高斯公式

$$\oiint_{\partial\Omega} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$$

$$= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

"缺什么补什么"

注意：高斯面一定要封闭！(若不封闭考虑补全)