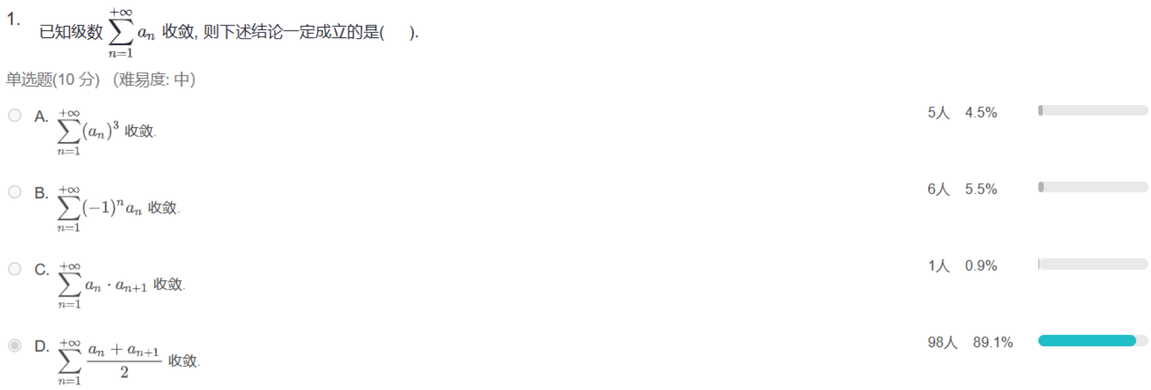
数学分析第一次小测

汤俊浩

April 13, 2023

1



1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则下述结论一定成立的是(　).

单选题(10 分) (难易度: 中)

A. $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^3$ 收敛. 5人 4.5%

B. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛. 6人 5.5%

C. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot a_{n+1}$ 收敛. 1人 0.9%

D. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛. 98人 89.1%

Figure 1:

A

$\sum a_n$ 收敛但 $\sum a_n^2$ 与 $\sum a_n^3$ 不收敛的例子.

(1)

$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,$a_n^2 = \frac{1}{n}$

(2)

$$\sum a_n = 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \overbrace{\frac{1}{k\sqrt[3]{k}} - \cdots - \frac{1}{k\sqrt[3]{k}}}^{k\text{个}} + \cdots$$

$$\sum a_n^3 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{k} - \overbrace{\frac{1}{k^4} - \cdots - \frac{1}{k^4}}^{k\text{个}} + \cdots$$

此时记 $k_n = 2 + 3 + \cdots + (n+1)$

$$S_{k_n} = \sum_{j=1}^{k_n} a_j^3 = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) - (1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}) \to \infty$$

即 S_n 有一个子列趋向于正无穷大.S_n 发散.

B

取 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则 $(-1)^n a_n = \frac{1}{n}$

C

取 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $a_n a_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, 且有 $-\frac{1}{n} < a_n a_{n+1} < -\frac{1}{n+1}$

D

记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k \to S$, 则 $S_n' = \sum_{k=1}^n \frac{a_k + a_{k+1}}{2} = \frac{S_n + S_{n+1} - a_1}{2} \to S - \frac{a_1}{2}$

2

2. 下列函数项级数在区间$[0,1]$上一致收敛的是(　).

单选题(10 分) (难易度: 中)

A. $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-x)x^n$. 23人 20.9%

B. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-x)x^n$. 56人 50.9%

C. $\sum_{n=1}^{+\infty}xe^{-nx^2}$. 12人 10.9%

D. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. 19人 17.3%

Figure 2:

此时都可以求出前 n 项的和 $S_n(x)$, 进而可求出 $S(x)$, 通过 $S(x)$ 的不连续性排除选项 A,C,D. 计算 $\sup_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| \to 0$ 可得到选项 B 的正确性.

A

$$S_n(x) = (1-x)\frac{x(1-x^n)}{1-x} = x(1-x^n) \to S(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

B

$$S_n(x) = (1-x)\frac{(-x)(1-(-x)^n)}{1-(-x)} = \frac{x(x-1)}{x+1}(1-(-x)^n) \to S(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{x+1} & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

C

$$S_n(x) = x\frac{e^{-x^2}(1-e^{-nx^2})}{1-e^{-x^2}} = \frac{x}{e^{x^2}-1}(1-e^{-nx^2}) \to S(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{x}{e^{x^2}-1} & x \in (0,1] \end{cases}$$

D

$$S_n(x) = x^2 \frac{\frac{1}{1+x^2}(1 - \frac{1}{(1+x^2)^n})}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{(1+x^2)^n} \to S(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0,1] \end{cases}$$

3

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n+1}$ 的和函数是( ).

单选题(10 分) (难易度: 中)

- A. $\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$, $x \in (-1,1)$. 101人 92.7%
- B. $-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$, $x \in (-1,1)$. 2人 1.8%
- C. $-\frac{x^2}{1-x}$, $x \in (-1,1)$. 0人 0%
- D. $\frac{x^2}{1-x}$, $x \in (-1,1)$. 6人 5.5%

Figure 3:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, x \in (-1,1)$$

逐项求导可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1,1)$$

最后

$$\sum_{k=1}^{\infty} nx^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, x \in (-1,1)$$

4

4. 已知 $f(x)$ 是$\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的周期函数，且 对$\forall x \in [0,2\pi), f(x) = x^2$. 又设 $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. 则下述命题正确的有 ( ) .

多选题(10 分) (难易度: 中)

- A. f 的Fourier级数在$\mathbb{R}$ 上处处收敛. 83人 76.1%
- B. $f(x) \sim \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos(nx) - \frac{\pi}{n}\sin(nx)\right)$. 79人 72.5%
- C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{8}$. 20人 18.3%
- D. $\int_0^1 g(x)dx = \frac{\pi^2}{12}$. 91人 83.5%

Figure 4:

A

$f(x)$ 分段单调的有界函数, 利用 Dirichlet-Jordan 判别法可得 Fourier 级数收敛.

B

计算 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$,$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$ 即可.

C

在选项 B 中, 取 $x=0$, 得到 $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{0+(2\pi)^2}{2} = 2\pi^2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

进而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

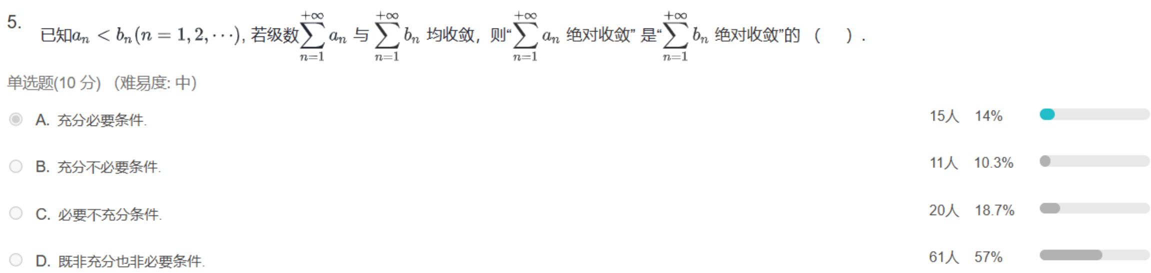
D

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-1}$$

注意到右侧幂级数的收敛半径为 1, 且收敛域为 $(-1,1]$. 逐项积分得

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

5



5. 已知$a_n < b_n (n=1,2,\cdots)$, 若级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 均收敛, 则"$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 绝对收敛" 是"$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 绝对收敛"的 ( ) .

单选题(10 分) (难易度: 中)

A. 充分必要条件.	15人	14%
B. 充分不必要条件.	11人	10.3%
C. 必要不充分条件.	20人	18.7%
D. 既非充分也非必要条件.	61人	57%

Figure 5:

注意到在 $b_n > a_n$ 时, 我们有

$$|b_n| = |a_n + (b_n - a_n)| \le |a_n| + |b_n - a_n| = |a_n| + b_n - a_n$$

$$|a_n| = |b_n + (a_n - b_n)| \le |b_n| + |a_n - b_n| = |b_n| + b_n - a_n$$

故在 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 收敛的条件下,$\sum|a_n|$ 收敛与 $\sum|b_n|$ 收敛等价.

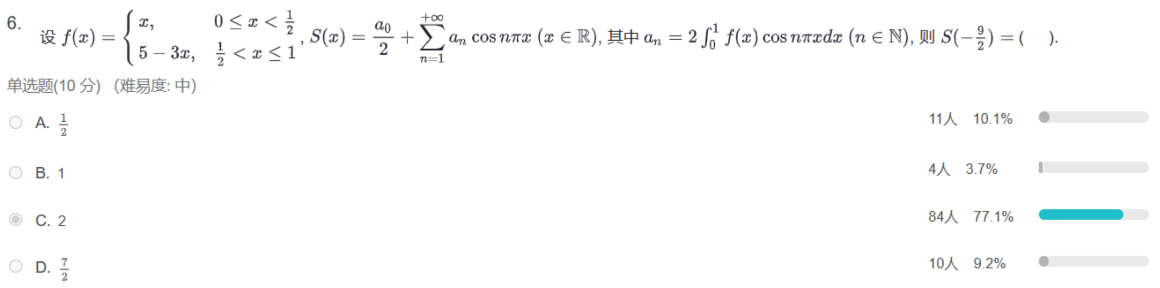


Figure 6:

6

首先对 $f(x)$ 做偶延拓, 展开为余弦级数. 再对 $f(x)$ 做周期性延拓, 周期 $T=1$.
最后利用 $f(x)$ 分段单调的有界函数, 利用 Dirichlet-Jordan 判别法,

$$S(-\frac{9}{2})=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})=\frac{f(\frac{1}{2}+)+f(\frac{1}{2}-)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{2}=2$$

7

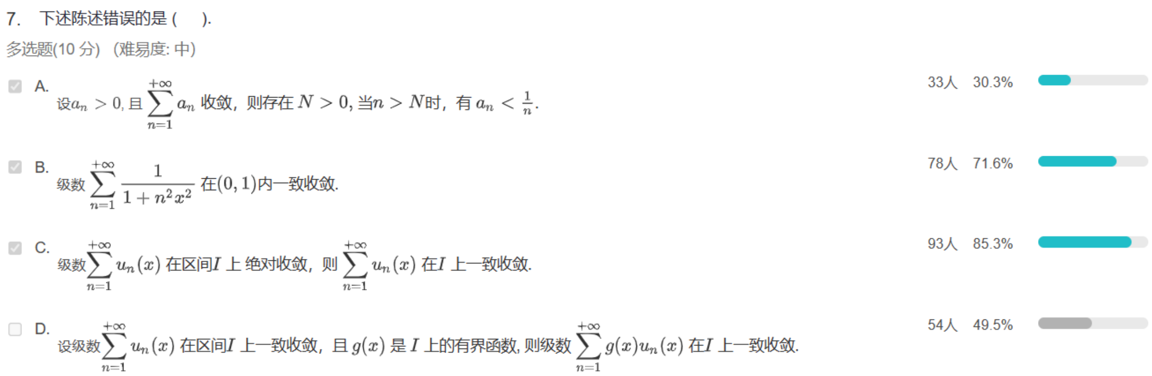


Figure 7:

A

$$a_n=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & n=k^4 \\ \frac{1}{n^2} & n\neq k^4 \end{cases}$$

B

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{1+k^2x^2}\geq\frac{m-n}{1+(n+1)^2x^2}$$

取 $x=\frac{1}{n+1}, m=2n, \epsilon_0=1$. $\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{1+k^2x^2}\geq\frac{n}{2}\geq\epsilon_0$ 由 Cauchy 收敛准则得知原函数项级数发散.

C

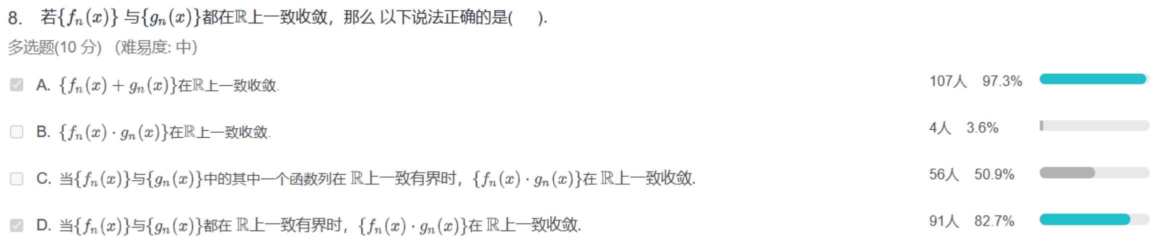
取 $u_n(x) \geq 0, \forall x \in I, \sum u_n(x)$ 收敛但是不一致收敛即可. 例如题 2 中的选项 ACD.

D

利用 Cauchy 收敛准则证明.

$$|\sum_{k=n+1}^{m} g(x)u_k(x)| \leq M|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)|$$

8


8. 若$\{f_n(x)\}$ 与$\{g_n(x)\}$都在$\mathbb{R}$上一致收敛，那么 以下说法正确的是(　).

多选题(10 分) (难易度: 中)

A. $\{f_n(x)+g_n(x)\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛. 107人 97.3%

B. $\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$在$\mathbb{R}$上一致收敛. 4人 3.6%

C. 当$\{f_n(x)\}$与$\{g_n(x)\}$中的其中一个函数列在 $\mathbb{R}$上一致有界时，$\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$在 $\mathbb{R}$上一致收敛. 56人 50.9%

D. 当$\{f_n(x)\}$与$\{g_n(x)\}$都在 $\mathbb{R}$上一致有界时，$\{f_n(x)\cdot g_n(x)\}$在 $\mathbb{R}$上一致收敛. 91人 82.7%

Figure 8:

A

$$|(f_n(x)+g_n(x))-(f(x)+g(x))| \leq |f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|$$

D

$$\begin{aligned}|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)| &= |f_n(x)(g_n(x)-g(x))+(f_n(x)-f(x))g(x)| \\ &\leq |f_n(x)||g_n(x)-g(x)|+|f_n(x)-f(x)||g(x)| \\ &\leq M(|g_n(x)-g(x)|+|f_n(x)-f(x)|)\end{aligned}$$

$f_n(x), g_n(x)$ 一致有界,$\exists M>0, s.t. |f_n(x)| \leq M, |g_n(x)| \leq M$. 再由 $g_n(x) \to g(x)$, 故 $|g(x)| \leq M$.

B,C

$f_n(x)=\frac{1}{n}$ 一致有界 $|f_n(x)| \leq 1, \forall n, \forall x \in \mathbb{R}$, 再取 $g_n(x)=x$

$$f_n(x)g_n(x)=\frac{x}{n} \to F(x)=0$$

但在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛

9

一致收敛的定义:$\forall \epsilon>0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, s.t. \forall n>N, \forall x \in I, |f_n(x)-f(x)|<\epsilon$

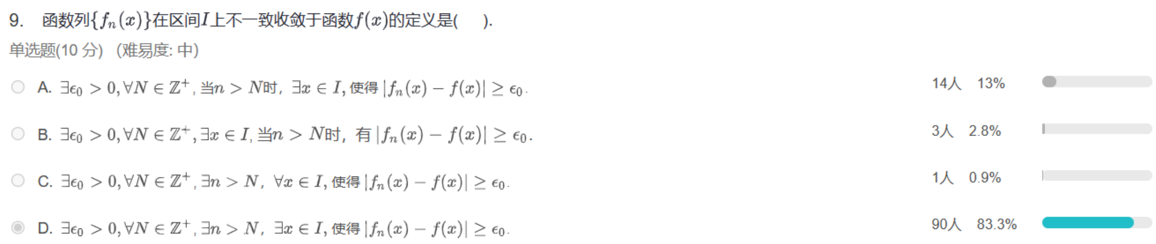


Figure 9:

10

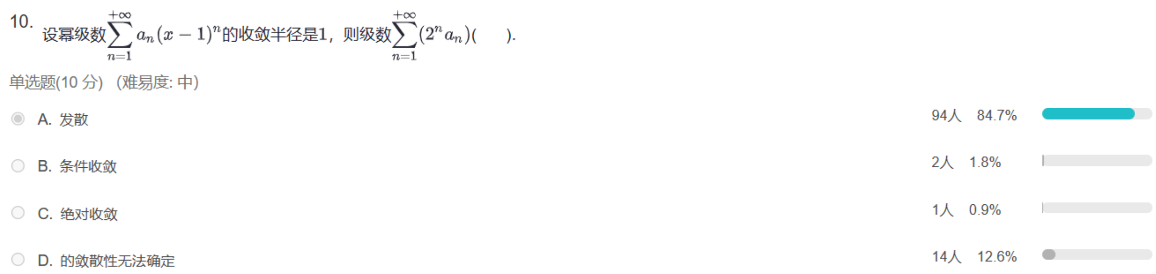


Figure 10:

由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}=1$. 故 $\exists N,\forall n>N$, $\sqrt[n]{|a_n|}>\frac{1}{2}$, 所以 $|2^na_n|>1$. 即 $2^na_n\nrightarrow 0$,$\sum 2^na_n$ 发散.