线性代数 II（H）期末历年卷试题集

2022-2023 学年线性代数 II（H）期末考前练习

任课老师：刘康生　　　　考试时长：无

一、 A 是复（实）正规矩阵的充要条件是：存在复（实）矩阵 S_1, S_2 满足 $\overline{S_1}^{\mathrm{T}} = S_1$，$\overline{S_2}^{\mathrm{T}} = -S_2$，$S_1S_2 = S_2S_1$，$A = S_1 + S_2$. 另外，$A$ 的如上分解是唯一的.

二、 证明：A 是实正规矩阵的充要条件是存在镜面映像 $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t$ 使得

$$A^{\mathrm{T}} = \pi_t \cdots \pi_2 \pi_1 A.$$

三、 将如下 $\mathbf{R}^3$ 上变换 T 表示为两个镜面映像之积：

$T:$ 先绕 x 轴旋转 φ 角度，再绕 z 轴旋转 θ 角度（右手系，$0 < \varphi, \theta < \dfrac{\pi}{2}$）.

四、 求下列变换的所有不变子空间：

(1) $\sigma_A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$；

(2) $T \in \mathcal{L}(V)$，$\dim V = n$，$T^n = O$，$T^{n-1} \neq O$；

(3) $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^5)$，$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\det(\lambda E - A) = \lambda^2(\lambda - 1)^3$.

五、 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 20 & 23 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 28\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，证明：不存在复矩阵 B 使得 $B^2=A$.

六、 已知 $\alpha_1=(1,2,0)$，$\alpha_2=(0,1,2)$，$\alpha_3=(2,0,1)\in\mathbf{R}^3$. 设 $T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$，且有 $T(\alpha_1)=(-1,0,-2)$，$T(\alpha_2)=(-2,-1,0)$，$T(\alpha_3)=(0,-2,-1)$. 证明：T 是一个镜面映像.

七、 定义在 $V=\mathbf{R}^3$ 上的运算

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_V=a(x_2-x_1)(y_2-y_1)+bx_2y_2+x_3y_3(a,b>0).$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$.

(1) 验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个内积;

(2) 求 $\mathbf{R}^3$ 在 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 下的一组标准正交基;

(3) 求 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 使得 $\forall\boldsymbol{x}\in V: x_1+x_2+x_3=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}\rangle_V$.

八、 考虑二直线

$$l_1:\begin{cases}x=t\\ y=-t-1\\ z=3t\end{cases},\quad l_2:\begin{cases}ax+2y+z=0\\ x-y-z+d=0,\end{cases}$$

求 a，d 满足的条件，使得二直线

(1) 平行;

(2) 重合;

(3) 相交;

(4) 异面.