1. 设函数 $f(x)$ 在$\mathbb{R}$上连续，且满足$f'(0) > 0$，则存在 $\delta > 0$ 使得(　　).

单选题 (10 分)

- ○ A. $\forall x \in (-\delta, 0)$, 有 $f(x) > f(0)$.
- ○ B. $f(x)$在$(0, \delta)$内单调增加;
- ◉ C. $\forall x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) > f(0)$;
- ○ D. $f(x)$在$(-\delta, 0)$内单调减少;

2. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$上可导，令$F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$. 若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，则必有 （　）.

单选题 (10 分)

- ◉ A. $f(0) = 0$.
- ○ B. $f(0) - f'(0) = 0$.
- ○ C. $f'(0) = 0$.
- ○ D. $f(0) + f'(0) = 0$.

3. 设函数$f(x)$在$x = 0$处连续，则下列命题中错误的是 (　　).

单选题 (10 分)

- ○ A. 若极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$存在，则$f(0) = 0$
- ◉ B. 若极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) + f(-x)}{x}$存在，则$f'(0)$存在
- ○ C. 若极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) + f(-x)}{x}$存在，则$f(0) = 0$

1. 略，网站上有详解

2.

解 $F(x) = f(x) + \underline{f(x)|\sin x|}$

$F(0) = f(0)$

$$F'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) + f(\Delta x)|\sin \Delta x| - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)|\sin \Delta x|}{\Delta x}$$

左极限: $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x)|\sin \Delta x|}{\Delta x} = -f(0) \cdot \underbrace{\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{1}$

$$= -f(0)$$

右极限: $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x)|\sin \Delta x|}{\Delta x} = f(0)$

若导数存在,则左极限=右极限:

$$-f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

3. $f(x) = |x|$

4. 极坐标方程表示的曲线$r=2\theta$在$\theta=\frac{\pi}{2}$处的切线方程为（ ）.

单选题 (10 分)

○ A. $r-\pi=2(\theta-\frac{\pi}{2})$;

◉ B. $y=-\frac{2}{\pi}x+\pi$;

○ C. $y=-\frac{\pi}{2}x+\pi$;

○ D. 不存在

5. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在x_0处必( ).

单选题 (10 分)

○ A. 不连续. ○ B. 不可导. ○ C. 可导. ◉ D. 连续.

6. 设$f(x)$在$x=1$处连续，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{xe^x-e}=1$,则$f'(1)=($).

单选题 (10 分)

○ A. 1 ○ B. 2 ◉ C. 2e ○ D. e

4.

4. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\theta\cos\theta \\ y = 2\theta\sin\theta \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{2\sin\theta + 2\theta\cos\theta}{2\cos\theta - 2\theta\sin\theta}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{-\pi}$$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pi \end{cases}$ $\quad y - \pi = -\frac{2}{\pi}x$

$\Rightarrow y = -\frac{2}{\pi}x + \pi$

5. $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处

6. 由 L'Hospital：

$$\left.\frac{f'(x)}{(x+1)e^x}\right|_{x=1} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{f'(1)}{2e} = 1$$
$$\Rightarrow \quad f'(1) = 2e$$

7. 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有界且可导，则下列陈述错误的是(　　).

多选题 (10 分)

- [x] A. 当 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$时，必有 $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=0$
- [ ] B. 当 $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)=0$
- [x] C. 当 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$时，必有 $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)=0$
- [x] D. 当 $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=0$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)-(x-\frac{x^2}{2})}{x^3}=$(　　).

单选题 (10 分)

○ A. $-\frac{1}{3}$.　　○ B. $\frac{1}{3}$　　○ C. $-\frac{1}{6}$.　　◉ D. $\frac{1}{6}$.

9. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取到极小值 -2, 则下述成立的有 (　　).

多选题 (10 分)

- [x] A. $a=0$.
- [ ] B. $a=-1$.
- [x] C. $b=-3$.
- [ ] D. $b=1$.

7. a

A. 反例：$f(x)=sin\,x$

B. 若不存在，则

$\exists G>0,\ A\in\mathbb{R},\ \forall x>G,$ 有$|f'(x)|>|\frac{A}{2}|$, 无论A的正负，都会导致$|f(x)|$的值不断增大，与有界矛盾

C. 反例：取反例 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$，则$f'(x)=2\cos x^2-\dfrac{\sin x^2}{x^2}$ 保持振荡

D. 反例: 取反例 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则$f'(x)=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$，$x>0$。显然有 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$，但是 $f'(x)$ 振荡无界。

8. 用 3 次 L'Hospital 法则

9. $\begin{cases}f(1) &=-2\\ f'(1) &=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=0\\ b=-3\end{cases}$

10. 下述陈述错误的是 （　　）.

多选题 (10 分)

- [ ] A. 若$f(x)$ 在区间 I上一致连续，则 $f(x)$在I上有界.
- [x] B. 若 f 在区间I内可导，且 f 在 x_0 处取极小值，则 $\exists\delta>0$, 使得 f 在 $U_-(x_0,\delta)$内单调递减，在 $U_+(x_0,\delta)$内单调递增.
- [x] C. 若函数 f,g 在区间 I 上一致连续，则 $f\cdot g$ 在区间 I 上也一致连续.
- [ ] D. 若 f 在区间I上存在有界的导函数，则 f在 I 上一致连续.

10.

A. 闭区间显然正确，开区间可由教材 P.98 **定理3.4.7** 易得

B. 反例：$f(x)=\begin{cases} x^4(2+sin\frac{1}{x}), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，易得 $x=0$ 是其极值点

$$f(x)=x^4(2+sin\frac{1}{x})$$
$$f'(x)=8x^3+4x^3sin\frac{1}{x}-x^2cos\frac{1}{x}$$

令 $x=\frac{1}{n\pi}$ 得 $f'(x)=\frac{8-(-1)^n\cdot n\pi}{n^3\pi^3}$ 导数有正有负。

C. $f(x)=x,\ g(x)=x,\ f(x)g(x)=x^2,\ I=[0,\infty)$ 则 $f,\ g$ 在 I 上一致连续，$f\cdot g$ 在 I 上不一致连续

D. 设$f'(x)<A,$ 只需取$\delta=\frac{\epsilon}{A}$即可