Отсюда видно, что в точке приложения сосредоточенной силы первые производные претерпевают разрыв и дифференциальное уравнение теряет смысл. В этой точке должны выполняться два условия сопряжения

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0+0,\ t)=u(x_0-0,\ t),\\ &u_x(x_0+0,\ t)-u_x(x_0-0,\ t)=-\frac{1}{T_0}f_0(t), \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

первое из которых выражает непрерывность струны, второе определяет величину излома струны в точке x_0, зависящую от $f_0(t)$ и натяжения T_0.

2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Уравнения продольных колебаний для струны, стержня и пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке $(0,\ l)$ оси x. Процесс продольных колебаний может быть описан одной функцией $u(x,t)$, представляющей в момент t смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x[1]. При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука.

Подсчитаем относительное удлинение элемента $(x,\ x+\Delta x)$ в момент t. Координаты концов этого элемента в момент t имеют значения

$$x+u(x,\ t),\quad x+\Delta x+u(x+\Delta x,\ t),$$

а относительное удлинение равно

$$\frac{[\Delta x+u(x+\Delta x,\ t)-u(x,\ t)]-\Delta x}{\Delta x}=u_x(x+\theta\,\Delta x,\ t)$$
$$(0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим, что относительное удлинение в точке x определяется функцией $u_x(x,t)$. В силу

[1]) Выбранная здесь геометрическая переменная x называется переменной Лагранжа. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x. Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x, в любой последующий момент t находится в точке с координатой $X=x+u(x,t)$. Если мы фиксируем некоторую геометрическую точку A с координатой X, то в различные моменты времени в этой точке будут находиться различные физические точки (с разными лагранжевыми координатами x). Часто пользуются также переменными Эйлера $X,\ t$, где X — геометрическая координата. Если $U(X,t)$ — смещение точки с эйлеровой координатой X, то лагранжева координата

$$x=X-U(X,\ t).$$

Пример использования координат Эйлера приведен в п. 6

закона Гука натяжение $T(x, t)$ равно

$$T(x,\ t) = k(x)\, u_x(x,\ t), \tag{9}$$

где $k(x)$ — модуль Юнга в точке $x\,(k(x) > 0)$.

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, получаем интегральное уравнение колебаний

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi,\ t_2) - u_t(\xi,\ t_1)]\, \rho(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} [k(x_2)\, u_x(x_2,\ \tau) - k(x_1)\, u_x(x_1,\ \tau)]\, d\tau + \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{t_1}^{t_2} F(\xi,\ \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{10}$$

где $F(x,t)$ — плотность внешней силы, рассчитанная на единицу длины.

Предположим существование и непрерывность вторых производных функции $u(x,t)$. Применяя теорему о среднем и совершая предельный переход[1]) при $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$ и $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, приходим к дифференциальному уравнению продольных колебаний стержня[2])

$$[k(x)\, u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x,\ t). \tag{11}$$

Если стержень однороден $(k(x) = \text{const},\ \rho = \text{const})$, то это уравнение записывают следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\ t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\right), \tag{12}$$

где

$$f(x,\ t) = \frac{F(x,\ t)}{\rho} \tag{13}$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы.

3. Энергия колебаний струны. Найдем выражение для энергии поперечных колебаний струны $E = K + U$, где K — кинетическая и U — потенциальная энергия. Элемент струны dx, движущийся со скоростью $v = u_t$, обладает кинетической энергией

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x)\, dx\, (u_t)^2 \qquad (m = \rho\, dx).$$

---

[1]) В дальнейшем мы будем опускать подробности, связанные с предельными переходами, которые были разобраны при выводе уравнения поперечных колебаний струны.

[2]) Условие малости колебаний в данном случае связано только с границей применимости закона Гука. В общем случае $T = k(x, u_x) u_x$, и мы приходим к квазилинейному уравнению

$$[k\ (x,\ u_x)\ u_x]_x = \rho u_{tt}\ F\ (x,t).$$