Из уравнения (80) и условий (81) находим:

$$X_1(x) = C \sin\frac{\omega}{a} x, \qquad X_2(x) = D \sin\frac{\omega}{a}(l - x);$$

условия сопряжения (82) дают:

$$C \sin\frac{\omega}{a} x_0 - D \sin\frac{\omega}{a}(l - x_0) = 0,$$

$$C \frac{\omega}{a} \cos\frac{\omega}{a} x_0 + D \frac{\omega}{a} \cos\frac{\omega}{a}(l - x_0) = \frac{A}{k}.$$

Определяя отсюда коэффициенты C и D, получаем:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{Aa}{k\omega} \dfrac{\sin\frac{\omega}{a}(l - x_0)}{\sin\frac{\omega}{a} l} \sin\frac{\omega}{a} x \cos\omega t & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\[2ex] u_2 = \dfrac{Aa}{k\omega} \dfrac{\sin\frac{\omega}{a} x_0}{\sin\frac{\omega}{a} l} \sin\frac{\omega}{a}(l - x) \cos\omega t & \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Аналогично записывается решение при $f(t) = A \sin\omega t$.

Итак, получено решение для случая $f(t) = A\cos\omega t$ или $f(t) = A \sin\omega t$. Если $f(t)$ — периодическая функция, равная

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos\omega nt + \beta_n \sin\omega nt)$$

(ω — наименьшая частота), то, очевидно,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{k}\left\{\dfrac{\alpha_0 x}{2}\left(1 - \dfrac{x_0}{l}\right) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a \sin\frac{\omega n}{a}(l - x_0)}{\omega n \sin\frac{\omega n}{a} l} \sin\dfrac{\omega n x}{a} \times \right. \\ \qquad \left. \times (\alpha_n \cos\omega nt + \beta_n \sin\omega nt)\right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0; \\[2ex] u_2 = \dfrac{1}{k}\left\{\dfrac{\alpha_0 x_0}{2}\left(1 - \dfrac{x}{l}\right) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a \sin\frac{\omega n}{a} x_0}{\omega n \sin\frac{\omega n}{a} l} \sin\dfrac{\omega n (l - x)}{a} \times \right. \\ \qquad \left. \times (\alpha_n \cos\omega nt + \beta_n \sin\omega nt)\right\}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \qquad (83)^{1)}$$

1) Первые слагаемые этих сумм соответствуют стационарному прогибу, определяемому по величине силы $f(t) = \alpha_0/2 = \text{const}$, как нетрудно видеть, функциями:

$$u = \begin{cases} u_1(x, t) = u_1(x) = \dfrac{1}{k} \dfrac{\alpha_0}{2} x \left(1 - \dfrac{x_0}{l}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\[2ex] u_2(x, t) = u_2(x) = \dfrac{1}{k} \dfrac{\alpha_0}{2} x_0 \left(1 - \dfrac{x}{l}\right) & \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Если функция $f(t)$ непериодическая, то, представляя ее в виде интеграла Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Если знаменатель у этих функций (83) равен нулю

$$\sin\frac{\omega nl}{a}=0,$$

$$\omega n=\frac{\pi m}{l}a=\omega_m,$$

т. е. если спектр частот возбуждающей силы содержит одну из частот собственных колебаний (резонанс), то установившегося решения не существует.

Если точка приложения силы x_0 является одним из узлов стоячей волны, соответствующей свободному колебанию с частотой ω_m, то

$$\sin\frac{\omega_m}{a}x_0=0,$$

$$\sin\frac{\omega_m}{a}(l-x_0)=0.$$

При этом числители соответствующих слагаемых для u обращаются в нуль, и явление резонанса не имеет места. Если же точка приложения силы, действующей с частотой ω_m, является пучностью соответствующей стоячей волны с частотой ω_m, то

$$\sin\frac{\omega_m}{a}x_0=1,$$

и явление резонанса будет выражено наиболее резко.

Отсюда следует правило, что для возбуждения резонанса струны при действии на нее сосредоточенной силой надо, чтобы частота ее ω была равна одной из собственных частот струны, а точка приложения силы совпадала с одной из пучностей стоячей волны.

9. Общая схема метода разделения переменных. Метод разделения переменных применим не только для уравнения колебаний однородной струны, но и для уравнения колебаний неоднородной струны. Рассмотрим следующую задачу:

найти решение уравнения

$$L[u]=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<l,\ t>0,\quad (84)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0,\qquad t\geqslant 0,\quad (85)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant l.\quad (86)$$