так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi(x)$, а второе равно нулю, поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю.

Аналогично доказывается лемма 2. Условия четности начальных данных имеют вид

$$\varphi(x)=\varphi(-x); \quad \psi(x)=\psi(-x).$$

Заметим, что производная четной функции является функцией нечетной

$$\varphi'(x)=-\varphi'(-x).$$

Из формулы (9) следует:

$$u_x(0, t)=\frac{\varphi'(at)+\varphi'(-at)}{2}+\frac{1}{2a}[\psi(at)-\psi(-at)]=0, \quad t>0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi'(x)$, а второе — в силу четности $\psi(x)$ [1]).

Приведенное выше доказательство фактически опирается на формулу Даламбера и не связано с двукратной дифференцируемостью функции $u(x,t)$. Тем самым доказано, что лемма 1 верна для любых функций, представимых формулой Даламбера, а лемма 2 — для функций того же вида с дифференцируемой функцией $\psi(x)$, т. е. для обобщенных решений задачи (1)—(2).

При помощи этих двух лемм можно решить следующие задачи:

требуется найти решение уравнения (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0)&=\varphi(x), \\ u_t(x, 0)&=\psi(x) \end{aligned}\right\} 0<x<\infty, \tag{2'}$$

и граничному условию

$$u(0, t)=0, \quad t>0$$

(первая краевая задача).

Рассмотрим функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, являющиеся нечетным продолжением $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящих в условие (2'):

$$\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x) & \text{для } x>0, \\ -\varphi(-x) & \text{для } x<0, \end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x) & \text{для } x>0, \\ -\psi(-x) & \text{для } x<0. \end{cases}$$

---

[1]) Эти две леммы являются следствием того, что если начальные условия четны (или нечетны), то и при $t>0$ функция $u(x, t)$, определяемая формулой Даламбера, обладает тем же свойством (предоставляем читателю доказать это). Геометрически очевидно, что нечетная непрерывная функция и производная четной дифференцируемой функции равны нулю при $x=0$.

Функция

$$u(x, t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)\,d\alpha$$

определена для всех x и $t>0$. В силу леммы 1

$$u(0, t)=0.$$

Кроме того, эта функция удовлетворяет при $t=0$ и $x>0$ следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0)&=\Phi(x)=\varphi(x),\\ u_t(x, 0)&=\Psi(x)=\psi(x),\end{aligned}\right\}\quad x>0.$$

Таким образом, рассматривая полученную функцию $u(x,t)$ только для $x\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Возвращаясь к прежним функциям, можно написать:

$$u(x, t)=\left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\\ &\qquad+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha \quad \text{для} \quad t<\frac{x}{a},\quad x>0\\ &\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\\ &\qquad+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha \quad \text{для} \quad t>\frac{x}{a},\quad x>0.\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

В области $t<x/a$ влияние граничных условий не сказывается, и выражение для $u(x,t)$ совпадает с решением (9) для бесконечной прямой.

Аналогично, если при $x=0$ мы имеем *свободный конец*

$$u_x(0, t)=0,$$

то, беря четное продолжение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{для} \quad x>0,\\ \varphi(-x) & \text{для} \quad x<0;\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & \text{для} \quad x>0,\\ \psi(-x) & \text{для} \quad x<0,\end{cases}$$

получим решение уравнения колебаний

$$u(x, t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)\,d\alpha$$