с линейными дополнительными условиями. Этим свойством мы в дальнейшем неоднократно будем пользоваться.

Решение общей краевой задачи

$$\left.\begin{array}{c} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t) \\ (0<x<l,\ t>0); \\ u(0,\ t)=\mu_1(t), \\ u(l,\ t)=\mu_2(t); \\ u(x,\ 0)=\varphi(x), \\ u_t(x,\ 0)=\psi(x) \end{array}\right\} \tag{69}$$

может быть представлено в виде суммы

$$u(x,\ t)=u_1(x,\ t)+u_2(x,\ t)+u_3(x,\ t)+u_4(x,\ t), \tag{70}$$

где u_1, u_2, u_3, u_4 — решения следующих частных краевых задач:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3), & \\ & (0<x<l,\ t>0), \\ \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x^2}+f(x,\ t), & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{llll} u_1(0,\ t)=0, & u_2(0,\ t)=\mu_1(t), & u_3(0,\ t)=0, & u_4(0,\ t)=0, \\ u_1(l,\ t)=0; & u_2(l,\ t)=0; & u_3(l,\ t)=\mu_2(t); & u_4(l,\ t)=0; \\ u_1(x,\ 0)=\varphi(x), & u_2(x,\ 0)=0, & u_3(x,\ 0)=0, & u_4(x,\ 0)=0, \\ u_{1t}(x,\ 0)=\psi(x), & u_{2t}(x,\ 0)=0; & u_{3t}(x,\ 0)=0; & u_{4t}(x,\ 0)=0. \end{array}\right\} \tag{71}$$

Мы ограничимся здесь этой формальной редукцией для того, чтобы характеризовать частные краевые задачи, составляющие основные этапы при решении общей задачи. Аналогичная редукция может быть произведена и для предельных случаев общей краевой задачи.

9. Постановка краевых задач для случая многих переменных. Мы подробно рассмотрели постановку краевых задач для случая одной независимой геометрической переменной x (и времени t). Если число геометрических переменных $n>1$ (например, $n=3$), то первая краевая задача ставится совершенно сходным образом:

требуется найти функцию $u(M,t)=u(x,y,z,t)$, определенную при $t\geqslant 0$ внутри заданной области T с границей Σ, удовлетворяющую при $t>0$ внутри T уравнению

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(M,\ t) \quad (M(x,\ y,\ z)\in T,\ t>0), \tag{72}$$

граничному условию на Σ

$$u|_{\Sigma}=\mu(P,\ t) \quad (P(x,\ y,\ z)\in\Sigma,\ t\geqslant 0) \tag{73}$$

$(\mu(x,y,z,t)$ *есть функция, заданная на* $\Sigma)$ *и начальным условиям*

$$\left.\begin{aligned} u(M,\ 0)&=\varphi(M),\\ u_t(M,\ 0)&=\psi(M) \end{aligned}\right\} \quad (M(x,\ y,\ z)\in T). \tag{74}$$

Разложение общей краевой задачи на ряд более простых происходит аналогично предшествующему. Отметим, что возможна также постановка предельных краевых задач для неограниченной области, полупространства и т. д.

10. Теорема единственности. При решении краевых задач:

1) надо убедиться в том, что дополнительные условия достаточны для выделения однозначного решения; это достигается доказательством теоремы единственности;

2) надо убедиться в том, что дополнительные условия не переопределяют задачу, т. е. среди них нет несовместных условий; это достигается доказательством теоремы существования; доказательство существования решения обычно тесно связано с методом нахождения решения.

В настоящем пункте нами будет доказана следующая теорема единственности:

Возможно существование только одной функции $u(x,t)$, *определенной в области* $0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0$ *и удовлетворяющей уравнению*

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,\ t) \quad (\rho(x)>0,\ k(x)>0),$$
$$0<x<l,\quad t>0, \tag{75}$$

начальным и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0)&=\varphi(x), & u_t(x,\ 0)&=\psi(x),\\ u(0,\ t)&=\mu_1(t), & u(l,\ t)&=\mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

если выполнены условия:

1) *функция* $u(x,t)$ *и производные, входящие в уравнение* (75), *а также производная* u_{xt} *непрерывны на отрезке* $0\leqslant x\leqslant l$ при $t\geqslant 0$;

2) *коэффициенты* $\rho(x)$ *и* $k(x)$ *непрерывны на отрезке* $0\leqslant x\leqslant l$.

Допустим, что существует два решения рассматриваемой задачи:

$$u_1(x,\ t),\quad u_2(x,\ t),$$

и рассмотрим разность $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$.