

Лабораторная работа № 4

1. Найдите предел функции

N	$f(x)$	a	N	$f(x)$	a
1	$\frac{(x^2-1)(x+3)}{x-1}$	1	3	$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	4
2	$\frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$	$\frac{\pi}{4}$	4	$\frac{(x^3-1)(x+3)}{x-1}$	1

N	$f(x)$	a	N	$f(x)$	a
5	$\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	-2	13	$\frac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$	2
6	$\frac{2^x-2}{\ln x}$	1	14	$\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$	1
7	$\frac{(x^4-1)(x+5)}{x-1}$	1	15	$\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$	4
8	$\frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}$	2π	16	$\frac{5^x-5}{\ln x}$	1
9	$\frac{(x^3+1)(x^2+3)}{x+1}$	-1	17	$\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$	0
10	$\frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$	π	18	$\frac{\ln \sin 3x}{(6x-\pi)^2}$	$\frac{\pi}{6}$
11	$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{\sin \ln(x-1)}$	2	19	$\frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1}$	3
12	$\frac{a^x - a^b}{x-b}$	b	20	$\frac{(x^2-4)(x+2)}{x-2}$	2

2. Вычислите неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ и проверьте правильность вычислений, постройте графики семейства первообразных.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$\frac{1}{\sin^2 x(1 - \cos x)}$	11	$\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \sin x}$
2	$\frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2}$	12	$\frac{\sin x}{1 + \cos x + \sin x}$
3	$\frac{1}{\sin x(1 - \sin x)}$	13	$\frac{\cos x}{1 + \cos x + \sin x}$
4	$\frac{\cos x}{5 + 4 \cos x}$	14	$\frac{\cos x}{1 + \cos x - \sin x}$
5	$\frac{\cos x}{1 + \sin x - \cos x}$	15	$\frac{\cos x}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$
6	$\frac{\cos x}{2 + \sin x}$	16	$\frac{\sin x}{(1 + \sin x)^2}$
7	$\frac{\cos x}{(1 - \cos x)^2}$	17	$\frac{\sin x}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$
8	$\frac{1}{\cos x(1 - \cos x)}$	18	$\frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$
9	$\frac{1}{(1 + \sin x - \cos x)^2}$	19	$\frac{1}{\sin x(1 + \sin x)}$
10	$\frac{1 + \sin x}{1 + \sin x - \cos x}$	20	$\frac{\sin x}{2 + \sin x}$

3. Вычислите определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

N	$f(x)$	$[a, b]$	N	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sqrt{256 - x^2}$	$[0, 16]$	11	$\frac{1}{(64 - x^2)^{3/2}}$	$[0, 4\sqrt{3}]$
2	$x^2\sqrt{1 - x^2}$	$[0, 1]$	12	$\frac{x^4}{(16 - x^2)^{3/2}}$	$[0, 2\sqrt{2}]$

3	$\frac{1}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$	$[0, 5]$	13	$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$	$[0, \sqrt{3}]$
4	$\sqrt{\frac{2-x}{x-6}}$	$[3, 5]$	14	$\sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}$	$[6, 9]$
5	$\frac{1}{(5-x^2)^{3/2}}$	$\left[0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$	15	$\sqrt{\frac{6-x}{x-14}}$	$[8, 12]$
6	$\frac{x^4}{(1-x^2)^{3/2}}$	$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	16	$\sqrt{\frac{4-x}{x-12}}$	$[6, 10]$
7	$\frac{\exp\left(\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}\right)}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}$	$[0, 4]$	17	$\frac{1}{(9+x^2)^{3/2}}$	$[0, 3]$
8	$\sqrt{4-x^2}$	$[0, 2]$	18	$\frac{1-\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$	$[1, 64]$
9	$x^2\sqrt{16-x^2}$	$[0, 4]$	19	$\frac{\exp\left(\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\right)}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}$	$[0, 3]$
10	$x^2\sqrt{25-x^2}$	$[0, 5]$	20	$\frac{x^4}{(2-x^2)^{3/2}}$	$[0, 1]$

4. Найдите (аналитически и графически) точки, в которых достигаются наибольшее и наименьшее значения заданной на отрезке непрерывной функции. Найдите нуль функции на заданном отрезке. Решите уравнение $f(x)=0$.

N	$f(x)$	Отрезок
1	$\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$	$[0, 6]$
2	$4-x-\frac{4}{x^2}$	$[1, 4]$
3	$x^2+\frac{16}{x}-16$	$[1, 4]$
4	$\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}-1$	$[-3, 3]$
5	$2\sqrt{x}-x-0.5$	$[0, 4]$
6	$1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$	$[-1, 5]$
7	$x-4\sqrt{x}+3$	$[1, 9]$
8	$\frac{10x}{x^2+1}-3$	$[0, 3]$
9	$-2+\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}$	$[-3, 3]$
10	$2x^2+\frac{108}{x^2}-59$	$[2, 4]$

11	$2 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$	$[-1, 2]$
12	$\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$	$[-1, 6]$
13	$\frac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2} - 1$	$[1, 4]$
14	$x - 4\sqrt{x+2} + 5.5$	$[-1, 7]$
15	$1 - \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$	$[1, 5]$
16	$\frac{4x}{x^2+4}$	$[-4, 2]$
17	$8 + \frac{8}{x} - \frac{x^2}{2}$	$[-4, -1]$
18	$1 + \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$	$[-2, 4]$

N	$f(x)$	Отрезок
19	$\frac{2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$	$[-2, 1]$
20	$-\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5} + 2$	$[-5, -2.8]$

5. Изобразите линию заданную в декартовых координатах явно $y=f(x)$. Запишите уравнения касательной и нормали к кривой в указанной точке и изобразите их на графике.

N	$f(x)$	x_0
1	$\operatorname{sh} x$	1
2	$\ln x$	2
3	$1 + \frac{1}{x}$	1
4	$1 + \frac{1}{x}$	-1
5	$\frac{ x (x-1)}{x+1}$	2
6	$\frac{ x (x-1)}{x+1}$	-2

7	$\frac{x^3-32}{x^2}$	1
8	$\frac{x^3-32}{x^2}$	-5
9	$\sqrt[3]{x(x+6)^2}$	5
10	$\operatorname{sh} 3x$	0.5
11	$\ln(-3x)$	-1
12	$2 + \frac{1}{x}$	-1
13	$2 + \frac{1}{x}$	1
14	$\frac{ x (x-2)}{x+2}$	3
15	$\frac{ x (x-2)}{x+2}$	-3

N	$f(x)$	x_0
16	$\sqrt[3]{x(x+6)^2}$	-8
17	$\frac{x^2+8}{\sqrt{x^2-4}}$	3
18	$\frac{x^2+8}{\sqrt{x^2-4}}$	-3
19	$\frac{10x^2-9}{\sqrt{4x^2-1}}$	10
20	$\frac{10x^2-9}{\sqrt{4x^2-1}}$	-10

6. Вычислите несобственный интеграл по неограниченному промежутку непосредственно и через предел.

$$\begin{array}{llll}
 1. \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4+5} & 2. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} & 3. \int_0^{\infty} x e^{-2x^2} & 4. \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \\
 5. \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} & 6. \int_1^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} & 7. \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} & 8. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \\
 9. \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x^2} & 10. \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} & 11. \int_0^{\infty} x e^{-x} & 12. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \\
 13. \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+2} & 14. \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} & 15. \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} & 16. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \\
 17. \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} & 18. \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & 19. \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^3} & 20. \int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^2}
 \end{array}$$