Функция $v(x,t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{77}$$

и однородным дополнительным условиям

$$\left.\begin{aligned} v(x,\ 0) &= 0, \qquad & v(0,\ t) &= 0,\\ v_t(x,\ 0) &= 0; \qquad & v(l,\ t) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

а также условию 1) теоремы.

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \{k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\}\,dx \tag{79}$$

и покажем, что она не зависит от t. Физический смысл функции $E(t)$ очевиден: это полная энергия струны в момент времени t. Продифференцируем $E(t)$ по t, выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла [1])

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})\,dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое правой части, будем иметь:

$$\int_0^l kv_x v_{xt}\,dx = [kv_x v_t]_0^l - \int_0^l v_t(kv_x)_x\,dx. \tag{80}$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничных условий (из $v(0,t)=0$ следует $v_t(0,t)=0$ и аналогично для $x=l$). Отсюда следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [\rho v_t v_{tt} - v_t(kv_x)_x]\,dx = \int_0^l v_t[\rho v_{tt} - (kv_x)_x]\,dx = 0,$$

т. е. $E(t)=\mathrm{const}$. Учитывая начальные условия, получаем:

$$E(t) = \mathrm{const} = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^l [k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2]_{t=0}\,dx = 0, \tag{81}$$

[1]) Для дифференцирования под знаком интеграла достаточно, чтобы получаемое при этом подынтегральное выражение было непрерывно на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ при $t \geqslant 0$. Это требование в нашем случае выполнено, так как функция $v(x,t)$ удовлетворяет условию 1) теоремы, а $\rho(x)$ и $k(x)$ — условию 2).

так как

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Пользуясь формулой (81) и положительностью k и ρ, заключаем, что

$$v_x(x, t) \equiv 0, \quad v_t(x, t) \equiv 0,$$

откуда и следует тождество

$$v(x, t) = \text{const} = C_0. \tag{82}$$

Пользуясь начальным условием, находим:

$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$

тем самым доказано, что

$$v(x, t) \equiv 0. \tag{83}$$

Следовательно, если существуют две функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

Для второй краевой задачи функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет граничным условиям

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \tag{84}$$

и подстановка в формуле (80) также обращается в нуль. Дальнейшая часть доказательства теоремы естается без именений.

Для третьей краевой задачи доказательство требует некоторого видоизменения. Рассматривая по-прежнему два решения u_1 и u_2, получаем для их разности $v(x, t) = u_1 - u_2$ уравнение (77) и граничные условия

$$\left.\begin{aligned} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) &= 0 \quad (h_1 \geqslant 0), \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) &= 0 \quad (h_2 \geqslant 0). \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Представим подстановку в (80) в виде

$$[k v_x v_t]_0^l = -\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} [h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)].$$

Интегрируя $\frac{dE}{dt}$ в пределах от нуля до t, получим:

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (k v_x)_x] \, dx \, dt - \\ - \frac{k}{2} \{h_2 [v^2(l, t) - v^2(l, 0)] + h_1 [v^2(0, t) - v^2(0, 0)]\},$$

откуда в силу уравнения и начальных условий следует:

$$E(t) = -\frac{k}{2} [h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)] \leqslant 0. \tag{86}$$