Если в правую часть не входит u_ξ, то это уравнение будет обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от ξ как от параметра.

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнений (9) и (10) комплексны. Пусть

$$\varphi(x, y) = C$$

— комплексный интеграл уравнения (9). Тогда

$$\varphi^*(x, y) = C,$$

где φ^* — сопряженная к φ функция, будет представлять собой общий интеграл сопряженного уравнения (10). Перейдем к комплексным переменным, полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

При этом уравнение эллиптического типа приводится к такому же виду, что и гиперболическое.

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные α и β, равные

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

так что

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

В этом случае

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$
$$= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0,$$

т. е.

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \quad \text{и} \quad \bar{a}_{12} = 0.$$

Уравнение (4) после деления на коэффициент при $u_{\alpha\alpha}$ принимает вид [1])

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

Таким образом, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ имеют место следующие канонические формы

[1]) Подобное преобразование законно только в том случае, если коэффициенты уравнения (1) — аналитические функции. Действительно, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то правые части уравнений (9) и (10) комплексны, а следовательно, функция y должна иметь комплексные значения. О решении этих уравнений можно говорить лишь в том случае, когда коэффициенты $a_{ik}(x, y)$ определены для комплексных значений y. При приведении уравнения эллиптического типа к канонической форме мы ограничимся случаем аналитических коэффициентов.

уравнения (1):

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (гиперболический тип) $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ или $u_{xy} = \Phi$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (эллиптический тип) $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (параболический тип) $u_{xx} = \Phi$.

2. Классификация уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными. Рассмотрим линейное уравнение с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu + f = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{12}$$

где a, b, c, f являются функциями $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Введем новые независимые переменные ξ_k, полагая

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ik}, \qquad u_{x_ix_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k\xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}(\xi_k)_{x_ix_j},$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Подставляя выражения для производных в исходное уравнение, получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}u_{\xi_k\xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}, \qquad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_k)_{x_ix_j}.$$

Рассмотрим квадратическую форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 y_i y_j, \tag{13}$$

коэффициенты которой равны коэффициентам a_{ij} исходного уравнения в некоторой точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Производя над переменными y линейное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_k,$$

получим для квадратической формы новое выражение:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}^0\eta_k\eta_l, \quad \text{где} \quad \bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0\alpha_{ik}\alpha_{jl}.$$