и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (t \geqslant 0). \tag{3}$$

Изучение общей первой краевой задачи начнем с решения следующей простейшей задачи I:

найти непрерывное в замкнутой области $(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ *решение однородного уравнения*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2}$$

и однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{5}$$

и представимое в виде

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{6}$$

где $X(x)$ — *функция только переменного* x, $T(t)$ — *функция только переменного* t.

Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (4) и производя деление обеих частей равенства на a^2XT, получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{7}$$

где $\lambda = \text{const}$, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая — только от x.

Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{8'}$$

Граничные условия (5) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма — Лиувилля)

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(l) = 0, \tag{10}$$

исследованную при решении уравнения колебаний в главе II (см. § 3, п. 1). При этом было показано, что только для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{11}$$

существуют нетривиальные решения уравнения (8), равные

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{12}$$

Этим значениям λ_n соответствуют решения уравнения (8′)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}, \tag{13}$$

где C_n — не определенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x,\ t) = X_n(x)\,T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{14}$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (I). Составим формально ряд

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{15}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = u(x,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{16}$$

т. е. C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $(0,\ l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\cdot d\xi. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь ряд (15) с коэффициентами C_n, определяемыми по формуле (17), и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (I). Для этого надо доказать, что