вающей подробностью и при дальнейшем изложении курса будем ссылаться на этот параграф, опуская повторения доказательств.

Итак, будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим основную вспомогательную задачу: *найти решение уравнения*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)\,T(t), \tag{5}$$

где $X(x)$ — функция только переменного x, $T(t)$ — функция только переменного t.

Подставляя предполагаемую форму решения (5) в уравнение (1), получим:

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

или, после деления на XT,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{6}$$

Чтобы функция (5) была решением уравнения (1), равенство (6) должно удовлетворяться тождественно, т. е. для всех значений независимых переменных $0 < x < l$, $t > 0$. Правая часть равенства (6) является функцией только переменного t, а левая — только x. Фиксируя, например, некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части равенства (6) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{7}$$

где λ — постоянная, которую для удобства последующих выкладок берем со знаком минус, ничего не предполагая при этом о ее знаке.

Из соотношения (7) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \tag{8}$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \quad T(t) \not\equiv 0. \tag{9}$$

Граничные условия (4) дают:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$
$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{10}$$

так как иначе мы имели бы

$$T(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u(x, t) \equiv 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции $T(t)$ в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции $X(x)$ мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях:

найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\left.\begin{aligned} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями задачи (11). Сформулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма — Лиувилля.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При $\lambda < 0$ задача не имеет нетривиальных решений. Действительно, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$