Если $\mu_1(t) = 0$, а $\mu_2(t)$ — периодическая функция, представимая в виде ряда

$$\mu_2(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t), \tag{74}$$

где ω — наименьшая частота, A_n и B_n — коэффициенты Фурье, то решение задачи для случая $\alpha = 0$ принимает вид

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t) \frac{\sin \frac{\omega n}{a} x}{\sin \frac{\omega n}{a} l},$$

если только ни одна из частот ωn не совпадает с собственными частотами закрепленной струны.

Если же $\mu_2(t)$ — непериодическая функция, то, разлагая ее в интеграл Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Отметим, что решение задачи без начальных условий при $\alpha = 0$ определено неоднозначно, если только не накладывать каких-либо дополнительных условий. В самом деле, прибавляя к какому-либо решению этой задачи любую комбинацию стоячих волн

$$\sum \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные, видим, что эта сумма будет удовлетворять тому же уравнению и тем же граничным условиям.

Чтобы получить единственное решение задачи (I_α) при $\alpha = 0$, введем дополнительное условие «исчезающего трения»:

Решение задачи (I_0) *мы называем удовлетворяющим условию «исчезающего трения», если оно является решением задачи* (I_α) *при* $\alpha \to 0$.

Аналогично решается задача, если конец $x = l$ закреплен, а при $x = 0$ задан граничный режим.

Решение общей задачи без начальных условий

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определяется в виде суммы двух слагаемых, для каждого из которых неоднородно лишь одно из граничных условий.

Докажем единственность ограниченного решения задачи без начальных условий для уравнения (61). При этом мы будем предполагать непрерывность решения вместе с его производными до второго порядка включительно в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $-\infty < t < t_0$, если граничные значения

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определены в области $-\infty < t < t_0$.

Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — два ограниченных решения рассматриваемой задачи (I),

$$|u_1|<M, \quad |u_2|<M,$$

где $M>0$ — некоторое число.

Разность этих функций

$$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$$

ограничена ($|v|<2M$), удовлетворяет уравнению (61) и однородным граничным условиям

$$v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0.$$

Коэффициенты Фурье для функции v

$$v_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l v(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,$$

очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\ddot{v}_n+\alpha\dot{v}_n+\omega_n^2 v_n=0 \quad \left(\omega_n=\frac{\pi n}{l}a\right), \tag{*}$$

так как вторые производные функции $v(x,t)$ непрерывны для $0\leqslant x\leqslant l$.

Общее решение уравнения (*) имеет вид

$$v_n(t)=A_n e^{q_n^{(1)}t}+B_n e^{q_n^{(2)}t}, \tag{**}$$

где $q_n^{(1)}$ и $q_n^{(2)}$ — корни характеристического уравнения, равные

$$q_n^{(1)}=-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\omega_n^2}, \quad q_n^{(2)}=-\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\omega_n^2} \quad (\alpha>0).$$

Так как $\alpha>0$, то $\operatorname{Re}q_n^{(1,2)}<0$. Следовательно, решение (**) уравнения (*) будет ограниченным при $t\to-\infty$ лишь при $A_n=0$ и $B_n=0$, т. е. $v_n(t)\equiv 0$ для любого n.

Таким образом,

$$v(x,t)\equiv 0 \quad \text{и} \quad u_1(x,t)\equiv u_2(x,t).$$

8. **Сосредоточенная сила.** Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенной силы, приложенной в точке $x=x_0$. Если сила распределена на некотором участке $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$, то решение находится по формуле (55). Совершая предельный переход при $\varepsilon\to 0$, можно получить решение поставленной задачи.

С другой стороны, при выводе уравнения колебаний мы видели (см. (8), п. 1 §1), что в точке x_0, к которой приложена сосредоточенная сила, происходит разрыв первой производной, а сама функция остается непрерывной. Решение задачи $u(x,t)$ о колебаниях струны под действием силы, сосредоточенной в точке x_0, можно представить двумя различными функциями:

$$\left.\begin{aligned} u(x,t)&=u_1(x,t) \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant x_0,\\ u(x,t)&=u_2(x,t) \quad \text{при} \quad x_0\leqslant x\leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$