Таким образом, если уравнение (12) в некоторой точке M принадлежит к определенному типу, то его можно привести к соответствующей канонической форме в этой точке.

Рассмотрим подробнее вопрос о том, можно ли привести уравнение к канонической форме в некоторой окрестности точки M, если во всех точках этой окрестности уравнение принадлежит к одному и тому же типу.

Для приведения уравнения в некоторой области к каноническому виду нам пришлось бы функции $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ подчинить дифференциальным соотношениям $\bar{a}_{kl} = 0$, для $k \neq l$. Число этих условий, равное $n(n-1)/2$, превосходит n — число определяемых функций ξ при $n > 3$. Для $n = 3$ недиагональные элементы матрицы $(\bar{a}_{ik})$, вообще говоря, можно было бы обратить в нули, но при этом диагональные элементы могут оказаться различными.

Следовательно, при $n \geqslant 3$ уравнение нельзя привести к каноническому виду в окрестности точки M. При $n = 2$ можно обратить в нуль единственный недиагональный коэффициент и удовлетворить условию равенства двух диагональных коэффициентов, что и было сделано в п. 1.

Если коэффициенты уравнения (12) постоянны, то, приводя (12) к канонической форме в одной точке M, мы получим уравнение, приведенное к канонической форме во всей области определения уравнения.

3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. В случае двух независимых переменных линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0. \tag{14}$$

Ему соответствует характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому характеристики будут прямыми линиями

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_1, \qquad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_2.$$

С помощью соответствующего преобразования переменных уравнение (14) приводится к одной из простейших форм:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad \text{(эллиптический тип)}, \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{\xi\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \\ \text{или} \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \end{array}\right\} \text{(гиперболический тип)}, \tag{16}$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad \text{(параболический тип)}. \tag{17}$$

Для дальнейшего упрощения введем вместо u новую функцию v:

$$u = e^{\lambda\xi+\mu\eta} \cdot v,$$

где λ и μ — неопределенные пока постоянные. Тогда

$$\begin{aligned}
u_\xi &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi + \lambda v),\\
u_\eta &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta + \mu v),\\
u_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),\\
u_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v),\\
u_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).
\end{aligned}$$

Подставляя выражения для производных в уравнение (15) и сокращая затем на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, получим:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda) v_\xi + (b_2 + 2\mu) v_\eta + \\ + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c) v + f_1 = 0.$$

Параметры λ и μ выбираем так, чтобы два коэффициента, например, при первых производных, обратились в нуль ($\lambda = -b_1/2$; $\mu = -b_2/2$). В результате получим:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

где γ — постоянная, выражающаяся через c, b_1 и b_2, $f_1 = fe^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$. Производя аналогичные операции и для случаев (16) и (17), приходим к следующим каноническим формам для уравнений с постоянными коэффициентами:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \quad \text{(эллиптический тип)},$$

$$\left.\begin{aligned} v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 \\ \text{или} \quad v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(гиперболический тип)},$$

$$v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f_1 = 0 \quad \text{(параболический тип)}.$$

Как было отмечено в п. 2, уравнение с постоянными коэффициентами в случае нескольких независимых переменных

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

при помощи линейного преобразования переменных приводится к каноническому виду одновременно для всех точек области его определения. Вводя вместо u новую функцию v

$$u = ve^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}$$