Определения по матану, семестр 4

7 мая 2018 г.

Содержание

1 Теорема о вложении пространств L^p

$\mu E < +\infty,\ 1 \leq s < r \leq +\infty$
Тогда:

1. $L_r(E, \mu) \subset Ł_s(E, \mu)$
2. $\forall f-$ измеримы $||f||_s \leq \mu E^{1/s-1/r}||f||_r$

2 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$1 \leq p < +\infty,\ \ f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$
Тогда:

1. - $f \in L_p$
   - $f_n \to f$ в L_p

   Тогда: $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (по мере)
2. - $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (либо если $f_n \to f$ почти везде)
   - $|f_n| \leq g$ почти при всех n , $g \in L_p$

   Тогда: $f_n \to f$ в L_p

3 Полнота L_p

$L_p(E, \mu)\ \ 1 \leq p < \infty$ – полное
То есть любая фундаментальная последовательность сходиться по норме $||f||_p$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, k\ ||f_n - f_k|| < \varepsilon \Rightarrow \exists f \mid\ \ ||f_n - f|| \to 0$$

4 Лемма Урысона

F_0, F_1- два непересекающихся замкнутых множества из $\mathbb{R}^m$
Тогда $\exists f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (непрерывная): $f|_{F_0} = 0, f|_{F_1} = 1$

5 Плотность в L_p непрерывных финитных функций

$\forall p : 1 \leqslant p < +\infty \quad C_0$ всюду плотно в $L^p(R^m)$

6 Теорема о непрерывности сдвига

$f_n(x) = f(x+h)$
* f - равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \|f_n - f\|_\infty = 0$
* $1 \leqslant p < +\infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \|f_n - f\|_p = 0$
* $f \in \widetilde{C}[0,T] \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \|f_n - f\|_\infty = 0$
* $1 \leqslant p < +\infty \quad f \in L^p[0,T] \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \|f_n - f\|_p = 0$

7 Теорема об интеграле с функцией распределения

$(\mathbb{R}, B, X)$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \geq 0$, изм. по Борелю, п.в. конечн.
$h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ с функцией распределения $H(t)$

μ_H – мера Бореля-Стилтьеса (мера Лебега-Стилтьеса на B)

Тогда: $\int\limits_X f(h(x))\ d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\ d\mu_H(t)$

8 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow < x_n, y_n > \to < x, y >$
2. $\sum x_k$ сходится, тогда $\forall y : \sum < x_k, y > = < \sum x_k, y >$

3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

9 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.
2. $c_k = \dfrac{< x, e_k >}{||e_k||^2}$
3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$
   Иными словами $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

10 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} = Lin(e_1, e_2, ...e_n) \subset \mathbb{H}$

Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во $\mathcal{L}$. Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$
2. S_n — наилучшее приближение x в $\mathcal{L}$ ($||x - S_n|| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}} ||x - y||$)
3. $||S_n|| \leqslant ||x||$

11 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ – орт. сист. в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$ сх-ся в $\mathbb{H}$
2. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \; z \perp e_k$
3. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

12 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ – орт. сист. в $\mathbb{H}$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_k\}$ – базис
2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)
3. $\{e_k\}$ - замкн.
4. $\{e_k\}$ - полн.
5. $Lin(e_1, e_2, \ldots)$ - плотна в $\mathbb{H}$

13 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \to f$ в $L_1[-\pi, \pi]$

Тогда:

$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) coskx \; dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) sinkx \; dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$

$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \; dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$

14 Теорема Римана–Лебега

$E \subset \mathbb{R}$ — измеримо, $f \in L^1(E)$

Тогда $\displaystyle\int\limits_E f(x) \cdot e^{ikx} \; dx \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ (То же самое можно и с $\cos x$ и $\sin x$ вместо e^{ikx})

15 Принцип локализации Римана

$f, g \in L^1[-\pi, \pi] \quad x_0 \in [-\pi, \pi] \quad \exists \delta > 0$

$f(x) = g(x)$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Тогда $S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

16 Признак Дини. Следствия

$f \in L^1[-\pi, \pi] \quad x_0 \in [-\pi, \pi] \; S \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

$\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x_0+t) - 2S + f(x_0-t)|}{t} dt < +\infty$

Тогда: $S_n(f, x_0) \to S$

Следствие: $f \in L^1[-\pi,\pi] \quad x_0 \in [-\pi,\pi]$
Существуют 4 конечный предела $\alpha_\pm = \lim\limits_{t\to\pm 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0\pm 0)}{t}$
Тогда: ряд Фурье сходится в x_0 к $S = \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$
Следствие: $f \in L^1[-\pi,\pi]$ - непр. в x_0
Существует конечн. $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ и $\lim\limits_{t\to\pm 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0\pm 0)}{t}$
Тогда: $S_n(f,x_0) \to f(x_0)$

17 Корректность определения свертки

Свертка – корректно заданная функция из $L_1([-\pi,\pi])$

18 Свойства свертки функции из L^p с функцией из L^q

$$f \in L^p \quad k \in L^q[-\pi,\pi] \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \quad 1 \leqslant p < +\infty$$

Тогда $f * k$ - непрерывна на $[-\pi,\pi]$
$\|f * k\|_1 \leqslant \|f\|_p * \|k\|_q$

19 Формула Грина

$\mathbb{R}^2$ — ориент. с помощью нумерации координат.
$D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное, с C^2-гладкой границей.
(P,Q) — гладкое векторное поле.
Пусть граница $D(\partial D)$ ориентирована согласованно с ориентацией плоскости.
Тогда $\displaystyle\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

20 Формула Стокса

$D \subset \mathbb{R}^3$ — простая гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, ∂D — C^2-гладкая кривая,

n_0 — сторона поверхности; ориентированы согласованно с ∂D
 (P, Q, R) — гладкое векторное поле на D. Тогда:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy + Rdz =$$
$$= \iint_D (R'_y - Q'_z)\, dydz + (P'_z - R'_x)\, dzdx + (Q'_x - P'_y)\, dxdy$$

21 Формула Гаусса–Остроградского

$D \subset \mathbb{R}^3 \quad \partial D$ — ориент. полем внешних нормалей
(P, Q, R) — гл. век. поле в D. Тогда

$$\iint\limits_{\partial D} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_D (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dx\,dy\,dz$$

22 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

$A \in C^1$
A - соленоидально $\Leftrightarrow divA = 0$