

# Определения по матану, семестр 4

6 мая 2018 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Интегральные неравенства Гельдера и Минковского</b>	<b>2</b>
1.1	Неравенство Гельдера . . . . .	2
1.2	Неравенство Минковского . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Интеграл комплекснозначных функции</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Пространство <math>L_p(E, \mu)</math>, <math>1 \leq p &lt; +\infty</math></b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Пространство <math>L_\infty(E, \mu)</math></b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Существенный супремум</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Фундаментальная последовательность, полное пространство</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>Плотное множество</b>	<b>4</b>
<b>8</b>	<b>Финитная функция</b>	<b>4</b>
<b>9</b>	<b>Измеримое множество на простой двумерной поверхности в <math>R^3</math></b>	<b>4</b>
<b>10</b>	<b>Мера Лебега на простой двумерной поверхности в <math>R^3</math></b>	<b>4</b>

11 Поверхностный интеграл первого рода	4
12 Кусочно-гладкая поверхность в $R^3$	4
13 Гильбертово пространство	4
14 Ортогональный ряд	5
15 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве	5
16 Ортогональное семейство векторов	5
17 Ортонормированное семейство векторов	5
18 Коэффициенты Фурье	5
19 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве	6
20 Базис, полная, замкнутая ОС	6
21 Сторона поверхности	6
22 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов	6
23 Интеграл II рода	7
24 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности	7
25 Тригонометрический ряд	8
26 Коэффициенты Фурье функции	8
27 Ядро Дирихле	9
28 Ядро Фейера	9

29 Ротор, дивергенция векторного поля	9
30 Соленоидальное векторное поле	9
31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции	9
32 Свертка	9

# 1 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

## 1.1 Неравенство Гельдера

$(X, \mathbb{A}, \mu)$   $f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{C}$  ( $E$  - изм.) — заданы п.в, измеримы

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогда: } \int_E |fg| d\mu \leq \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

## 1.2 Неравенство Минковского

$(X, \mathbb{A}, \mu)$   $f, g$  — заданы п.в, измеримы

$$1 \leq p < +\infty. \text{ Тогда: } \left( \int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

# 2 Интеграл комплекснозначных функции

$(X, \mathbb{A}, \mu), f : X \rightarrow \mathbb{C}$

Назовем  $f$  - измеримой (суммируемой), если  $Re f, Im f$  — изм. (сумм.)

Тогда интегралом такой функции назовем:

$$\int_E f d\mu = \int_E Re f + i \int_E Im f$$

# 3 Пространство $L_p(E, \mu)$ , $1 \leq p < +\infty$

$(X, \mathbb{A}, \mu) E \in \mathbb{A}$

$$L'_p(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ изм., } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \}$$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект - если определить норму как  $\|f\| =$

$\left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ , то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0 будут давать норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$ , если  $f = g$  п.в.

$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu) / \sim$  - лин. норм. пр-во с нормой  $\|f\| = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ .

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать  $\|f\|_p$  за норму  $f$  в пространстве  $L_p$ .

## 4 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$L_\infty(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ess sup}_E |f| < +\infty \}$

NB1:  $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_E |f|$ .

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера :  $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$  (причем можно брать  $p = +\infty, q = 1$  или наоборот).

## 5 Существенный супремум

$(X, \mathbb{A}, \mu), E \subset X$  — изм.,  $f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

Тогда:  $\text{ess sup}_{x \in E} f(x) = \inf \{ A \in R : f(x) \leq A \text{ п.в. } x \}$ .

В этом определении  $A$  - существенная верхняя граница.

Свойства:

1.  $\operatorname{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2.  $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_E f$  при п.в.  $x \in E$ .
3.  $\int_E |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f| d\mu$ .

- 6    Фундаментальная последовательность, полное пространство
- 7    Плотное множество
- 8    Финитная функция
- 9    Измеримое множество на простой двумерной поверхности в  $R^3$
- 10   Мера Лебега на простой двумерной поверхности в  $R^3$
- 11   Поверхностный интеграл первого рода
- 12   Кусочно-гладкая поверхность в  $R^3$
- 13   Гильбертово пространство

$H$  - линейное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствующей нормы, называется Гильбертовым.

## 14 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}$ ,  $\sum x_k$  называется ортогональным рядом, если  $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$

## 15 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$   
 $\sum x_n$  сходится к  $x$ , если  
 $S_n := \sum_{k=1}^n x_k, S_n \rightarrow x$  (то есть  $|S_n - x| \rightarrow 0$  - сходимости по мере)

## 16 Ортогональное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$  - ортогональное семейство векторов, если  $\forall k \neq l : e_k \perp e_l, e_k \neq 0, e_l \neq 0$ .

## 17 Ортонормированное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$  - ортонормированное семейство векторов, если  $e_k$  - ортогональное семейство векторов, и  $\forall k : |e_k| = 1$

## 18 Коэффициенты Фурье

$\{e_k\}$  - ортонормированная система в  $\mathbb{H}, x \in \mathbb{H}$ .  
 $c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$  называются коэффициентами Фурье вектора  $x$  по ортогональной системе  $\{e_k\}$

## 19 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$  называется рядом Фурье вектора  $x$  по ортогональной системе  $\{e_k\}$

## 20 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathbb{H}$

1.  $\{e_k\}$  — **базис**, если  $\forall x \in \mathbb{H} : \exists c_k$ , что  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

2.  $\{e_k\}$  — **полная** О.С., если  $\forall k : z \perp e_k \Rightarrow z = 0$

3.  $\{e_k\}$  — **замкнутая** О.С., если  $\forall x \in \mathbb{H} : \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

## 21 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

## 22 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

$F_1, F_2$  — два касательных векторных поля к  $M$

$\forall p \in M \quad F_1(p), F_2(p)$  — Л.Н.З. касательные векторы

Тогда поле нормалей стороны определяется, как  $n := F_1 \times F_2$

Репер — пара векторов из  $F_1 \times F_2$ .



## 23 Интеграл II рода

$M$  – простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в  $\mathbb{R}^3$

$n_0$  – фиксированная сторона (одна из двух)

$F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  – векторное поле

Тогда интегралом II рода назовем  $\int_M \langle F, n_0 \rangle ds$

Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака
2. Не зависит от параметризации
3.  $F = (P, Q, R)$

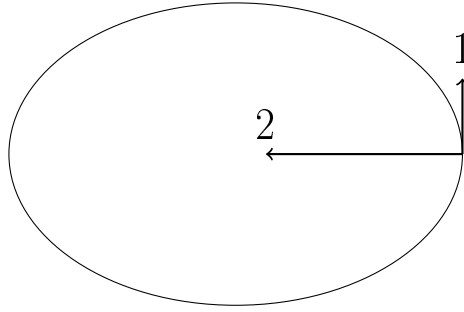
Тогда интеграл имеет вид  $\iint P dydz + Q dzdx + R dx dy$

NB:  $Q dx dz = -Q dz dx$

## 24 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый – снаружи от контура (задает направление ”движения” по петле), второй – внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали поверхности.



## 25 Тригонометрический ряд

•

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

(где  $a_i, b_i$  – коэффициенты ряда)

• Другая форма:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

Тогда  $S_n := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$

## 26 Коэффициенты Фурье функции

•

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

•

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

•

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

## 27 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right)$$

## 28 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

## 29 Ротор, дивергенция векторного поля

## 30 Соленоидальное векторное поле

## 31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

$$\forall a \forall n_0 : \operatorname{rot}(F, a, n_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\pi r^2} \int_{\delta B(a, r)} F_l dl \right)$$

где  $F_l$  - проекция  $F$  на касательное направление

$$\forall a \forall n_0 : \operatorname{div}(F, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\lambda_3(B(a, r))} \iint_{\delta B(a, r)} \langle F, n_o \rangle dS \right)$$

## 32 Свертка

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) K(t) dt$$

где  $f, K \in L_1([-\pi, \pi])$