

# Теоремы по матану, семестр 4

6 мая 2018 г.

## Содержание

1	Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия	2
2	Измеримость монотонной функции	3
3	Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере	3
4	Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде	5
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	5
5.1	Для определения (5)	5
5.2	Для окончательного определения	6
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	9
7	Теорема Леви	11
8	Линейность интеграла Лебега	12
9	Теорема об интегрировании положительных рядов	13
10	Теорема о произведении мер	13

<b>11 Абсолютная непрерывность интеграла</b>	<b>15</b>
11.1 Следствие . . . . .	15
<b>12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.</b>	<b>16</b>
<b>13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.</b>	<b>18</b>
<b>14 Теорема Фату. Следствия.</b>	<b>19</b>
14.1 Следствие 1 . . . . .	19
14.2 Следствие 2 . . . . .	19
<b>15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры</b>	<b>20</b>
15.1 Лемма . . . . .	20
15.2 Следствие . . . . .	20
15.3 Теорема . . . . .	20
<b>16 Критерий плотности</b>	<b>21</b>
<b>17 Лемма о единственности плотности</b>	<b>22</b>
<b>18 Лемма о множестве положительности</b>	<b>23</b>
<b>19 Теорема Радона—Никодима</b>	<b>24</b>
<b>20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости</b>	<b>25</b>
<b>21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»</b>	<b>26</b>
<b>22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме</b>	<b>28</b>
<b>23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега</b>	<b>28</b>

24 Теорема (принцип Кавальери)	29
25 Теорема Тонелли	30
26 Формула для Бета-функции	32
27 Объем шара в $\mathbb{R}^m$	33
28 Теорема о вложении пространств $L^p$	33
29 Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере	34
30 Полнота $L^p$	35
31 Лемма Урысона	36
32 Плотность в $L^p$ непрерывных финитных функций	36
33 Теорема о непрерывности сдвига	36
34 Теорема об интеграле с функцией распределения	36
35 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве	36
36 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе	37
37 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя	38
38 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля	39
39 Теорема о характеристике базиса	40
39.1 $1 \Rightarrow 2$ . . . . .	40
39.2 $2 \Rightarrow 3$ . . . . .	40
39.3 $3 \Rightarrow 4$ . . . . .	41

39.4	$4 \Rightarrow 1$	41
39.5	$4 \Rightarrow 5$	41
39.6	$5 \Rightarrow 4$	41

40	Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда	41
----	---	----

# 1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой.

$f$  — измеримая функция на  $X$ ,  $\forall x \ f(x) \geq 0$ . Тогда  $\exists$  ступенчатые функции  $f_n$ , такие что:

1.  $\forall x \ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ .
2.  $f_n(x)$  поточечно сходится к  $f(x)$ .

Следствие 1:

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измеримая. Тогда  $\exists$  ступенчатая  $f_n : \forall x : \lim f_n(x) = f(x)$  и  $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ .

Доказательство:

1. Рассмотрим  $f = f^+ - f^-$ .  $f^+ = \max(f, 0)$ ,  $f^- = \max(-f, 0)$ . Срезки измеримы:  $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$ , при этом  $f$  и  $g \equiv 0$  измеримы ( $f^-$  измерима аналогично).
2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции  $f_n^+ \rightarrow f^+$ ,  $f_n^- \rightarrow f^-$ . Тогда и  $f_n^+ - f_n^-$  это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов:  $f_n^+ - f_n^- \rightarrow f^+ - f^- = f$ . Неравенство с модулем верно при правильных эpsilon-неравенствах.

Следствие 2:

$f, g$  — измеримые функции. Тогда  $fg$  — измеримая функция. При этом считаем, что  $0 \cdot \infty = 0$ .

Доказательство:

1. Рассмотрим  $f_n \rightarrow f : |f_n| \leq |f|$ ,  $g_n \rightarrow g : |g_n| \leq |g|$  из первого следствия. Тогда  $f_n g_n \rightarrow fg$  и  $fg$  измерима по теореме об измеримости пределов и супремумов (произведение ступенчатых функций — ступенчатая функция, значит, измеримая)

Следствие 3:

$f, g$  — измеримые функции. Тогда  $f + g$  — измеримая функция. При этом считаем, что  $\forall x$  не может быть, что  $f(x) = \pm\infty, g(x) = \mp\infty$

Доказательство:

Доказывается как следствие 2.

## 2 Измеримость монотонной функции

Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$  — измеримое по Лебегу,  $E' \subset E, \lambda_m(E \setminus E') = 0, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть сужение  $f : E' \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно. Тогда  $f$  измерима на  $E$ .

Доказательство:

1.  $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a), e := E \setminus E', \lambda_m(e) = 0$ .
2.  $E'(f < a)$  открыто в  $E'$ , так как  $f$  непрерывна. Поэтому  $E' = G \cap E' \Rightarrow$ , где  $G$  — открытое в  $E$  множество. Значит,  $E'(f < a)$  — измеримо по Лебегу, так как оно является борелевским.
3. Но и  $e(f < a)$  измеримо, так  $\lambda_m(e) = 0$ , следовательно  $E(f < a)$  измеримо как объединение измеримых множеств

Следствие:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна. Тогда  $f$  измерима.

Доказательство:

Множество разрывов монотонной функции НБЧС множество, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

## 3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

$(X, a, \mu)$  — пространство с мерой,  $\mu \cdot X < +\infty$

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — п.в. конечны, измеримы

$f_n \rightarrow f$  (поточечно, п.в.)

Доказательство:

1. подменим значения  $f_n$  и  $f$  на некотором множестве меры 0 так, чтобы сходимость  $f_n \rightarrow f$  была всюду. (Так можно сделать. Действительно,  $f_n \rightarrow f$  на  $X \setminus e$ ,  $\mu e = 0$

$f_n$  - конечно на  $X \setminus e_n$ ,

$f$  - конечно на  $X \setminus e_0$ .

Тогда на  $(X \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n)$  функции конечны и есть сходимость  $f_n \rightarrow f$ . По

свойствам меры  $\mu \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n = 0$ . Тогда определим на  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n$   $f_n = f = 0$ .

Это очевидно даст нам необходимую конечность и поточечную сходимость. )

2. (частный случай)  $f_n \rightarrow f \equiv 0$ . Тогда пусть  $\forall x f_n(x)$  - монотонно (по  $n$ ).  $|f_n(x)|$  - убывает с ростом  $n$  и  $X(|f_n| \geq \epsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \epsilon)$ . А также  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} X(|f_n| \geq \epsilon) = \emptyset$ .

$$\begin{cases} \mu X < +\infty \\ \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu E_n \rightarrow \mu \bigcup E_n$  - Th о непрерывности меры сверху.

$\Rightarrow \mu X(|f_n| \geq \epsilon) \rightarrow \mu \emptyset = 0$

3. (общий случай)  $f_n \rightarrow f$ . Рассмотрим  $\phi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$ . Заметим свойства  $\phi$ :

$$\begin{cases} \phi_n(x) \rightarrow 0 \\ \phi_n \downarrow_n \end{cases}$$

$X(|f_n - f| \geq \epsilon) \subset X(|\phi_n| \geq \epsilon) \Rightarrow$  по монотонности меры имеем  $\mu X(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu X(\phi_n \geq \epsilon) \xrightarrow{part.case} 0$ , ч.т.д.

## 4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

$(X, a, \mu)$  - пространство с мерой

$f_n, f : X \rightarrow R$  - п.в. конечны, измеримы

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ .

Тогда  $\exists n_k \uparrow : f_{n_k} \rightarrow f$  п.в.

Доказательство:  $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда  $\exists n_k : \forall n \geq n_k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2k}$  (можно считать  $n_1 < n_2 < \dots$ )

Проверим  $f_{n_k} \rightarrow f$  п.в. :  $E_k := \bigcap_{j=k}^{\infty} X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j})$

$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$

$E_0 := \bigcap_{k \in N} E_k$ .

$\mu E_k \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$  - конечно  $\Rightarrow \mu E_k \rightarrow$

$\mu E_0 \Rightarrow \mu E_0 = 0$  (т.к.  $\mu E_k \rightarrow 0$ ).

Рассмотрим  $X \notin E_0$ , т.е. если  $X \notin E_0$ , то  $\exists k : X \notin E_k$ , тогда  $\forall j \geq k |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$  при  $n \geq n_j$ , т.е.  $f_{n_k} \rightarrow f$ , ч.т.д. Следствие:  $f_n \Rightarrow f$

$|f_n| \leq g$  п.в. Док-во: Рассмотрим последовательность  $f_{n_k}$  где  $f_{n_k} \rightarrow f$  п.в. и вдоль нее применим Th о двух городских.

$$\begin{cases} f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X \setminus e_1 \\ |f_n(x)| \leq g(x) \forall x \in X \setminus e_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow |f| \leq g$  на  $(X \setminus e_1) \setminus e_2$

## 5 Простейшие свойства интеграла Лебега

### 5.1 Для определения (5)

1.  $\int_X f$  не зависит от представления  $f$  как ступенчатой функции, то

есть если  $f$  реализуется как  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$  и как  $f = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$ ,

интегралы по этим функциям равны

Доказательство:



Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

Пусть  $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_i (\lambda_i \cdot \sum_j (\mu F_{i,j})) = \sum_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f$  для первого разбиения

Аналогично для второго разбиения получаем

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_j (\alpha_j \cdot \sum_i (\mu F_{i,j})) = \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int f$  для второго разбиения, что и требовалось доказать

2.  $f, g$  -измеримые ступенчатые функции,  $f \leq g$ , тогда  $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

Пусть  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ ,  $g = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

Пусть  $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда  $\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leq \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int g$ , что и требовалось доказать

## 5.2 Для окончательного определения

1. Монотонность  $f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

(а)  $f, g \geq 0$ , тогда доказательство тривиально (по свойствам супремума)

(b)  $\int_{\mathbb{X}} f = \int_{\mathbb{X}} f^+ - \int_{\mathbb{X}} f^-$   
 $\int_{\mathbb{X}} g = \int_{\mathbb{X}} g^+ - \int_{\mathbb{X}} g^-$

Из того, что  $\int_{\mathbb{X}} f^+ \leq \int_{\mathbb{X}} g^+$ , а  $\int_{\mathbb{X}} f^- \geq \int_{\mathbb{X}} g^-$  следует, что  $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

$$2. \int_{\mathbb{E}} 1 \cdot d\mu = \mu E$$

$$\int_{\mathbb{E}} 0 \cdot d\mu = 0$$

Очевидно из определения интеграла ступенчатой функции

$$3. \mu E = 0, f\text{-измерима, тогда } \int_{\mathbb{E}} f = 0, \text{ даже если } f = \infty \text{ на } \mathbb{E}$$

Доказательство:

(a)  $f$ -ступенчатая  $\Rightarrow$  ограниченная

$$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}), \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sum \lambda_k \cdot \mu(E \cap E_k)$$

$$\text{Но } \mu(E \cap E_k) = 0 \text{ (так как } \mu E = 0), \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} f = 0$$

(b)  $f$  - измеримая,  $f \geq 0$ .

$$\int_{\mathbb{E}} f = \sup \left( \int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq f, g \text{ - ступенчатая}$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sup(0) = 0$$

(c)  $f$  - произвольная измеримая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- = 0 - 0 = 0$$

$$4. (a) \int_{\mathbb{E}} -f = - \int_{\mathbb{E}} f$$

$$(b) \forall c \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

Доказательство:

$$(a) (-f)^+ = f^-$$

$$(-f)^- = f^+$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} -f = \int_{\mathbb{E}} (-f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (-f)^- = \int_{\mathbb{E}} f^- - \int_{\mathbb{E}} f^+ = - \int_{\mathbb{E}} f$$

(b) Пусть  $c > 0$ . Если  $c < 0$ , то по предыдущему случаю можем рассматривать для  $-c < 0$ . Если  $c = 0$ , то по предыдущей теореме

$$\int_{\mathbb{E}} (0 \cdot f) = \int_{\mathbb{E}} 0 = 0 = 0 \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

i. Пусть  $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq c \cdot f, \text{ } g \text{ - ступенчатая}$$

$$\text{Пусть } g = c \cdot \tilde{g}, \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right), \text{ где } 0 \leq c \cdot \tilde{g} \leq c \cdot f,$$

$\tilde{g}$  - ступенчатая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right) = \sup_{\mathbb{E}} (c \cdot \int_{\mathbb{E}} \tilde{g}) = c \cdot \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

ii. Если  $f$  - произвольная:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) &= \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^- = \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^+ - \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^- = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^+ - \\ &c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^- = c \cdot \left( \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f \end{aligned}$$

5. Если существует  $\int_{\mathbb{E}} f d\mu$ , то  $\left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$

Доказательство:

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\int_{\mathbb{E}} -|f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$-\int_{\mathbb{E}} |f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$\text{Тогда } \left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

6.  $f$  - измеримая на  $\mathbb{E}$ ,  $\mu\mathbb{E} < \infty$

$$a \leq f \leq b, \text{ тогда } a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Доказательство:

$$a \leq f \leq b \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} a \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} b$$

$$a \cdot \int_{\mathbb{E}} 1 \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \int_{\mathbb{E}} 1$$

$$a \cdot \mu \mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu \mathbb{E}$$

Следствие:

Если  $f$  - Измеримая и ограниченная на  $\mathbb{E}$ ,  $\mu \mathbb{E} < \infty$ , тогда  $f$  - суммируемая на  $\mathbb{E}$

7.  $f$  - суммируемая на  $\mathbb{E} \Rightarrow f$  почти везде конечная на  $\mathbb{E}$  (то есть  $f \in \alpha^0(\mathbb{E})$ )

Доказательство:

(a) Пусть  $f \geq 0$

Пусть  $f = +\infty$  на  $A$  и пусть  $\mu A > 0$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : f \geq n \cdot \chi_A$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{E}} f \geq n \cdot \int_{\mathbb{E}} \chi_A = n \cdot \mu A \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} f = +\infty$

(b)  $f$  любого знака

Распишем  $f = f^+ - f^-$ , по предыдущему пункту  $f^+, f^-$  конечны почти везде  $\Rightarrow f$  тоже конечно почти везде

## 6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$  — измеримы.  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — изм.,  $f \geq 0$

Тогда:  $\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$

Доказательство:

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

$$\int_A f d\mu = \sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum_k (\lambda_k \cdot (\sum_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i \left( \int_{A_i} f \right)$$

2. Докажем, что  $\int_A f \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) Рассмотрим  $0 \leq g \leq f$  – ступенчатая.  $\int_A g = \sum_i \int_{A_i} g \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(b) Переходя к *sup* получаем желаемое

3. Теперь докажем, что  $\int_A f \geq \sum_i \int_{A_i} f$

(a)  $A = A_1 \sqcup A_2$

i. Рассмотрим  $g_1, g_2$  – ступенчатые такие, что  $0 \leq g_i \leq f \cdot \chi_{A_i}$

ii. Рассмотрим их общее разбиение  $E_k$ :  $g_i = \sum_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

iii.  $g_1 + g_2$  – ступенчатая и  $0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$

iv.  $\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \stackrel{lemma}{=} \int_A (g_1 + g_2) \stackrel{iii}{\leq} \int_A f$

v. Поочерёдно переходя к *sup* по  $g_1$  и  $g_2$  получаем:  $\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq$

$$\int_A f$$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , что  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$  будем последовательно отщеплять последнее множество по (a)

(c)  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$

i. Фиксируем  $n \in \mathbb{N}$

ii.  $A = (\bigsqcup_{i=1}^n A_i) \sqcup B$ , где  $B = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$

iii.  $\int_A f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$

iv. Переходим к  $\lim$  по  $n$

Следствие 1:  $0 \leq f \leq g$  - измеримы и  $A \subset B$  - измеримы  $\Rightarrow \int_A f \leq \int_B g$

$$\int_B g \geq \int_B f = \int_A f + \int_{B \setminus A} f \geq \int_A f$$

Следствие 2:  $f$  - суммируема на  $A \Rightarrow \int_A f = \sum_i \int_{A_i} f$

Достаточно рассмотреть срезки  $f^+$  и  $f^-$

Следствие 3:  $f \geq 0$  - изм.  $\delta : \mathbb{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (A \mapsto \int_A f d\mu) \Rightarrow \delta$  - мера

## 7 Теорема Леви

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ ,  $f_n \geq 0$  - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$  при почти всех  $x$

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$  (считаем, что при остальных  $x : f \equiv 0$ )

Тогда:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

Доказательство:

N.B.  $\int_X f_n \leq \int_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$

$f$  - измерима как предел последовательности измеримых функций

1.  $\leq$

Очевидно  $f_n \leq f$  при п.в  $x \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f$ . Делаем предельный переход по  $n$

2.  $\geq$

(a) Логичная редукция:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq \int_x g$ , где  $0 \leq g \leq f$  - ступенчатая

(b) Наглая редукция:  $\forall c \in (0, 1) : \lim \int_X f_n(x) \geq c \cdot \int_X g$

- i.  $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq c \cdot g\}$ . Очевидно  $E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$
- ii.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$  т.к.  $c < 1$
- iii.  $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} g \Rightarrow \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g$
- iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем непрерывность меры снизу

## 8 Линейность интеграла Лебега

$f, g \geq 0$ , измеримые

Тогда  $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$

Доказательство:

1. Пусть  $f, g$  - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

$$f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$g = \sum_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \sum_k (\lambda_k + \alpha_k) \cdot \mu E_k = \sum_k \lambda_k \cdot \mu E_k + \sum_k \alpha_k \cdot \mu E_k = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g,$$

что и требовалось доказать

2.  $f, g \geq 0$ , измеримые

Тогда  $\exists h_n : 0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$ ,  $h_n$  ступенчатые

$\exists \widetilde{h}_n : 0 \leq \widetilde{h}_n \leq \widetilde{h}_{n+1} \leq g$ ,  $\widetilde{h}_n$  ступенчатые

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = f$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widetilde{h}_n = g$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h}_n) = \int_{\mathbb{E}} h_n + \int_{\mathbb{E}} \widetilde{h}_n$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h_n}) \rightarrow \int_{\mathbb{E}} (f + g)$$

$$\int_{\mathbb{E}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} f$$

$$\int_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n} \rightarrow \int_{\mathbb{E}} g$$

Тогда  $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$ , что и требовалось доказать

3. Если  $f, g$  - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

## 9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$  почти всюду на  $\mathbb{E}$ , тогда  $\int_{\mathbb{E}} (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

Доказательство:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x); S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$$1. S_N - \text{возрастает к } S \text{ при почти всех } x \xrightarrow{\text{Т. Леви}} \int_{\mathbb{E}} S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{E}} S =$$

$$\int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$$2. \text{ С другой стороны } \int_{\mathbb{E}} S_N = \int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu$$

3. Найденные пределы совпадают в силу единственности предела последовательности, что и требовалось доказать.

## 10 Теорема о произведении мер

$\langle \mathbb{X}, \alpha, \mu \rangle, \langle \mathbb{Y}, \beta, \nu \rangle$  - пространства с мерой

$$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : A \in \alpha, B \in \beta\}$$



$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

Тогда:

1.  $m_0$  - мера на полукольце  $\alpha \times \beta$
2.  $\mu, \nu$  -  $\sigma$ -конечны  $\Rightarrow m_0$  -  $\sigma$ -конечна

Доказательство:

1. Неотрицательность  $m_0$  очевидна. Необходимо доказать счетную аддитивность

Пусть  $P = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} P_k$ , где  $P \in \alpha \times \beta$   
 $P = A \times B$ ;  $P_k = A_k \times B_k$

Заметим, что:

- $\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y)$ , в силу дизъюнктности  $P_k$  ((x, y) входит максимум в одно множество из всех  $P_k$ )
- $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$ , так как  $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$  И  $y \in B$

Воспользовавшись вышесказанным получим:

$$\begin{aligned} \chi_P(x, y) &= \chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) \\ \chi_P(x, y) &= \sum \chi_{P_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y) \end{aligned}$$

Имеем следующее равенство:

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y)$$

Проинтегрируем его по мере  $\mu$  по x, затем по мере  $\nu$  по y, получим:

$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$ , то есть  $m_0(P) = \sum m_0(P_k)$ , что и требовалось доказать.

2.  $\mu, \nu$  -  $\sigma$ -конечны  $\Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , где  $\mu A_k < +\infty$ ;  $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ , где  $\nu B_k < +\infty$

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_j)$$

$m_0(A_i \times B_j) = \mu A_i \cdot \nu B_j < +\infty$ , так как  $\mu A_i < +\infty$  и  $\nu B_j < +\infty$   
 все  $(A_i \times B_j) \in \alpha \times \beta$  по определению

Что и требовалось доказать.

## 11 Абсолютная непрерывность интеграла

$\langle X, \alpha, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  - суммируема

Тогда  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E - \text{измеримое } \mu E < \delta \mid \int_E f d\mu < \epsilon$

Доказательство:

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \subset X_{n+1} \subset \dots$$

$\mu(\cap X_n) = 0$ , т.к.  $f$  - суммируема

1. Мера :  $(A \mapsto \int_A |f|)$  непрерывна сверху, т.е.  $\forall \epsilon \exists n_\epsilon \int_{X_{n_\epsilon}} |f| < \epsilon/2$

2. Зафиксируем  $\epsilon$  в доказываемом утверждении, возьмем  $\delta := \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon}$

$$3. \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\epsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\epsilon}^c} |f| \stackrel{*}{\leq} \int_{X_{n_\epsilon}} |f| + n_\epsilon \cdot \mu(E \cap X_{n_\epsilon}^c) \stackrel{**}{<} \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$$

$$\epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$$

\* - В первом слагаемом увеличили множество, во втором посмотрели на определение  $X_n$ , взяли дополнение, воспользовались 6-м простейшим свойством интеграла

\*\* - Воспользовались непрерывностью сверху

### 11.1 Следствие

$f$  - суммируема

$e_n$  - измеримые множества

$$\mu e_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{e_n} f \rightarrow 0$$

## 12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой,

$f_n, f$  – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$  (сходится по мере),

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  такая, что:

- $\forall n$ , для «почти всех»  $x$   $|f_n(x)| \leq g(x)$  ( $g$  – называется мажорантой)
- $g$  – суммируемая

Тогда:

- $f_n, f$  – суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$  («уж тем более»)

Доказательство:

1.  $f_n$  – суммируема, так как существует мажоранта  $g$
2.  $f$  – суммируема по теореме Рисса ( $f_{nk} \rightarrow f$  почти везде,  $|f_{nk}| \leq g$ , тогда  $|f| \leq g$  почти везде)
3. «уж тем более»:

$$\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \int_X |f_n - f|$$

Допустим, что  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$  уже доказано.

Тогда «уж тем более» очевидно.

4. Докажем основное утверждение:

Разберем два случая:

(a)  $\mu\mathbb{X} < \infty$  Фиксируем  $\epsilon \geq 0$   $X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$

$\mu X \rightarrow 0$  (так как  $f_n \Rightarrow f$ )

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int_{X_n} |f_n - f| + \int_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon\mu\mathbb{X}$$

(прим.  $\int_{X_n} 2g \rightarrow 0$  по след. к т. об абс. сходимости )

(b)  $\mu\mathbb{X} = \infty$

Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для  $g$ :

$$\forall \epsilon \exists A \subset \mathbb{X} \mid \mu A - \text{конеч.} \quad \int_{X \setminus A} g < \epsilon$$

*доказательство:*

$$\int_{\mathbb{X}} = \sup \left( \int_{\mathbb{X}} g_k \mid 0 \leq g_k \leq g \right) (g_k - \text{ступен.})$$

$$\exists g_n \quad \int_{\mathbb{X}} g - \int_{\mathbb{X}} g_n < \epsilon$$

$$A := \text{supp } g_n \quad (\text{supp } f := \text{замыкание } \{x \mid f(x) \neq 0\})$$

$$A = \bigcup_{k \mid \alpha_k \neq 0} E_k$$

$$g = \sum_{kon} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k} \quad (X = \bigsqcup E_k)$$

$$\int_{\mathbb{X}} g_n = \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty \quad (\mu A - \text{конеч.})$$

$$\int_{\mathbb{X} \setminus A} g = \int_{\mathbb{X} \setminus A} g - g_n \leq \int_{\mathbb{X}} g - g_n < \epsilon$$

Теперь докажем основное утверждение:

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| + \int_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon$$

$$\left( \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| \rightarrow 0 \text{ по п. (a)} \right)$$

# 13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой,

$f_n, f$  – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$  почти везде,

$\exists g : \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  такая, что:

- $\forall n$ , для «почти всех»  $x$   $|f_n(x)| \leq g(x)$  ( $g$  – называется мажорантой)
- $g$  – суммируемая

Тогда:

- $f_n, f$  – суммируемы
- $\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_{\mathbb{X}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{X}} f$  («уж тем более»)

Доказательство:

1. «уж тем более» см. пред. теорему.

2. Докажем основное утверждение:

$$h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

Заметим, что при фикс.  $x$  выпол.  $0 \leq h_n \leq 2g$  почти везде

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| = 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \uparrow$ ,  $2g - h_n \rightarrow 2g$  почти везде

$$\int_{\mathbb{X}} (2g - h_n) d\mu \rightarrow \int_{\mathbb{X}} 2g \text{ (по т. Леви)}$$

$$\int_{\mathbb{X}} 2g - \int_{\mathbb{X}} h_n \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

## 14 Теорема Фату. Следствия.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой

$f_n, f$  – измеримы,

$$f_n \geq 0$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ «почти везде»,}$$

$$\exists C > 0 \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \leq C$$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$$

$$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) = \text{почти везде} = \lim f_n = f \quad (g_n \rightarrow f \text{ почти везде})$$

$$\int_{\mathbb{X}} g_n \leq \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$$

$$\int_{\mathbb{X}} f = \text{по т. Леви} = \lim \int_{\mathbb{X}} g_n \leq C$$

### 14.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$  – измер.

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

$$\exists C \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$$\exists f_{n_k} \rightarrow f \text{ почти везде}$$

### 14.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$  – измер.

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} \underline{\lim}(f_n) \geq \underline{\lim} \left( \int_{\mathbb{X}} f_n \right)$$

Доказательство:

$$\exists n_k \mid \int_{\mathbb{X}} f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n$$

Рассмотрим  $g_{n_k}$  такое, что  $g_{n_k} \uparrow$  и  $g_{n_k} \rightarrow \underline{\lim} f$

Применяем теорему Леви к нер-ву  $\int_{\mathbb{X}} g_{n_k} \leq \int_{\mathbb{X}} f_{n_k}$

$$\int_{\mathbb{X}} \underline{\lim} f \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n$$

## 15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

### 15.1 Лемма

Пусть у нас есть  $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  и  $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$  и  $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть  $\Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A}$  (Кохась сказал, что это легко, и вроде это следует из предыдущих теорем)

Для  $\forall E \subset B$  и  $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$

Тогда:

$$\nu - \text{мера на } B, \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu$$

Доказательство:

Докажем по определению меры:

$$\nu(\bigsqcup E_i) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E_i)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_i)) = \sum \mu \Phi^{-1}(E_i) = \sum \nu E_i$$

### 15.2 Следствие

Из этого следует что  $f$  - измерима относительно  $B \Rightarrow f \circ \Phi$  — измерима относительно  $\Gamma$

### 15.3 Теорема

Есть пространства  $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  и  $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ .

$\Phi : X \rightarrow Y; w \geq 0$  — измеримо

$\nu$  - взвешенный образ  $\mu$

Тогда:

Для  $\forall f \geq 0$  - измеримо на  $Y$ ,  $f \odot \Phi$  - измерима (относительно  $\mu$ )

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$$

Замечание: Тоже верно для  $f$  - сумм.

Доказательство:

- $f \odot \Phi$  - измерима (из леммы)
- Возьмем в качестве  $f = \chi_E, E \in \mathcal{B}$   
 $(f \odot \Phi)(x) = \chi_{\Phi^{-1}(E)}$  - определение взвешенного образа меры  
 $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$  - доказали первый пункт
- —  $f$  - ступенчатая  $\Rightarrow f = \sum \alpha_k * \chi_{E_k}$   
—  $\int_Y \sum \alpha_k * \chi_{E_k} d\mu = \sum \alpha_k \chi_{E_k} d\nu = /*firstcase*/ = \sum \alpha_k \int_X \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) dx = \int_X \sum \alpha_k \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x) = \int f \odot \Phi * \omega d\mu$

## 16 Критерий плотности

Есть пространство  $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$

$\nu$  - еще одна мера

$\omega \geq 0$  - измерима на  $X$

Тогда:

$\omega$  - плотность  $\nu$  относительно  $\mu \iff$  Для любого  $A \in \mathbb{A} : \mu A * \inf(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A * \sup_A(\omega)$

Доказательство:

- $\Rightarrow$  - очевидно из стандартного свойства интеграла
- $\Leftarrow$ 
  - Достаточно доказать, что  $\omega > 0$  (когда  $\omega = 0$ , откуда следует что интеграл = 0 из оценок, что  $\nu(E) = 0$ )



- Давайте брать такие  $A \subset X(\omega > 0)$ , тогда  $\nu A = \int_A \omega(x) d\mu$
- Тогда для любого  $A \in \mathbb{A}$   $A = A_1 \sqcup A_2$ , где  $A_1 \subset A(\omega > 0)$  и  $A_2 \subset A(\omega = 0)$
- Получаем, что  $\nu A = \nu A_1 + \nu A_2 = \int_{A_1} \omega + 0 = \int_{A_1} \omega + \int_{A_2} \omega = \int_A \omega$
- Пусть  $q \in (0, 1)$  и  $A_j := A(q^j \leq \omega(x) < q^{j-1})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Получается, что  $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$
- Рассмотрим  $q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} * \mu A_j$  и  $\nu A_j = \int_{A_j} \omega d\mu$
- $q * \int_A \omega d\mu = q * \sum \int_{A_j} \omega \leq \sum q^j * \mu A_j \leq \sum q^{j-1} * \mu A_j = \nu(A) \leq 1/q * \sum q^j * \mu A_j \leq 1/q * \sum \int_{A_j} \omega = 1/q * \int_A \omega$
- $q * \int_A \omega d\mu \leq \nu(A) \leq 1/q * \int_A \omega d\mu$
- Устремим  $q$  к 1 и мы победили

## 17 Лемма о единственности плотности

$f, g \in L(x)$ .

Пусть  $\forall A$  - измерима и  $\int_A f = \int_A g$ .

Тогда:

$f = g$  почти везде

Следствие:

Плотность  $\nu$  относительно  $\mu$  определена однозначно с точностью до  $\mu$  почти везде.

Доказательство:

- Вместо двух функций давайте рассмотрим одну  $h = f - g$  и  $\forall \int_A h = 0$ . Пусть  $A_+ = X(h \geq 0)$  и  $A_- = X(h < 0)$
- $\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$

$$\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0$$

- Пусть  $X = A_+ \sqcup A_-$ . Тогда  $\int_X |h| = \int_{A_+} |h| + \int_{A_-} |h| = 0 \Rightarrow h = 0$  почти везде.

## 18 Лемма о множестве положительности

Пусть пространство  $\langle X, \mathbb{A} \rangle$  и  $\phi$  - заряд

Тогда:

$\forall A \in \mathbb{A} \exists B \subset A : \phi(B) \leq \phi(A)$ , где  $B$  - множество положительности

Доказательство:

- Пусть  $(\phi(A) \geq 0) \&\& (B = \emptyset) \rightarrow \phi(A) \geq 0$
- $E$  - множество  $\epsilon$  - положительности (Меп), если  $\forall C \subset E$  - измеримого  $\phi(C) \geq -\epsilon$
- **Утверждение:** Пусть  $E$  - Меп. Тогда для любого измеримого  $C \subset E$  выполнено  $\phi(C) \geq \phi(A)$ 
  1. Если  $A$  - Меп  $\Rightarrow C = A$
  2. Пусть  $A$  - не Меп. Тогда существует  $C_1 \subset A : \phi(C_1) < -\epsilon$  и  $\phi(A) = \phi(A_1) + \phi(C)$   
Тогда  $A_1 = A - C_1$  и  $\phi(A_1) > \phi(A)$
  3.  $A_1$  - Меп  $\Rightarrow$  хорошо
  4. Иначе повторяем тоже самое с  $C_2$  и так далее пока не будет хорошо
  5. Процесс конечен так как все  $C_i$  дизъюнкты и  $\phi(\bigsqcup C_i) \neq -\infty$ .
- Построим  $B$ :  $C_1$  - множество 1 положительности.  $C_2 - 1/2$ . Тогда  $B = \cap C_i$  - Меп
- $\phi(B) = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(C_i) \geq \phi(A)$

# 19 Теорема Радона—Никодима

Пусть есть пространство  $(X, \mathbb{A}, \mu)$

$\nu$  - мера из  $\mathbb{A}$

Обе меры конечные и  $\nu \prec \mu$ .

Тогда:

$\exists! f : X \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  (с точн до почти везде), которая является плотностью  $\nu$  относительно  $\mu$  и при этом  $(f - \mu)$  суммируема

Доказательство:

- единственность - из леммы

- строим кандидата на роль  $f$ .  $P = \{p(x) \geq 0, |\forall E : \int_E p * d\mu \leq \nu(E)\}$

1.  $P \neq \emptyset$  и  $0 \in P$

2.  $p_1, p_2 \in P \Rightarrow h = \max(p_1, p_2) \in P$

$$\forall E \int_E h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} h d\mu + \int_{E(p_1 < p_2)} h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} p_1 + \int_{E(p_1 < p_2)} p_2 \leq \nu(E(p_1 \geq p_2)) + \nu(E(p_1 < p_2)) = \nu E$$

По индукции  $\max(p_1 \dots p_n) \in P$

3.  $I = \sup \left\{ \int_X p d\mu \mid p \in P \right\}$

$\exists$  последовательность  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \in P : \int_X f_n \rightarrow I$

4. Рассмотрим  $p_1, p_2 \dots : \int_X p_n \rightarrow I$ , а также  $f_n = \max(p_1 \dots p_n) \in P$

5. Из предыдущих двух получаем, что  $f = \lim f_n$  и  $\int = / * thLevi *$

$$/ = \lim \int_E f_n \leq \nu E, \text{ а следовательно } \int_X f = \lim \int_X f_n = I \leq \nu(X)$$

6. Отлично, проверим, что  $f$  - плотность  $\nu$  относительно  $\mu$ .

– Докажем, что это не так:  $\exists E_0 : \nu E_0 > \int_{E_0} f d\mu$

–  $\mu E_0 > 0$  (иначе интеграл равно нулю и мера равна нулю из абстрактной непрерывности)

- Тогда  $\mu E_0$  - конечна. Возьмем  $a > 0 : \nu E_0 - \int_{E_0} f d\mu > a * \mu E_0$
- Тут недостаточно термина мер, поэтому рассмотрим заряд  $\phi(E) = \nu E - \int_E f d\mu - a * \mu E$
- Пусть  $\phi(E_0) > 0$ . Возьмем МП  $B \subset E_0 : \phi(B) \geq \phi(E_0) > 0$ . Тогда  $\nu(B) = \phi(B) + \int_B f * d\mu + a * \mu B \geq \phi(B) > 0$
- Проверим, что  $f + a * \chi_B \in P$ . Тогда по определению  $\int_E (f + a * \chi_B) d\mu = \int_{E \setminus B} f * d\mu + \int_{E \cap B} f * d\mu + a * \mu(B \cap E) = / * E \leftrightarrow E \cap B * / = \int_{E \setminus B} f + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) \leq / * def\_class\_P\_and\_f \in P * / \leq \nu(E \setminus B) + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) = \nu E - \phi(E \cap B) \leq / * \phi \geq 0 * / \leq \nu E$
- Проверим, что  $\int_X f + a * \chi_B = I + a * \mu B > I$ , что противоречит определению I

## 20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in O, \Phi \in C^1(O)$

Возьмём  $c > |\Phi'(a)| \neq 0$

тогда  $\exists \delta > 0 : \forall$  кубической ячейки  $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$  выполняется  $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Доказательство

$\Phi(Q)$  измеримо, так как образ измеримого множества при гладком отображении измерим

$L := \Phi'(a), L$  обратимо, так как  $|L| \neq 0$ .

$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$

Можем писать о малое, так как растяжение произошло не более чем в  $|L^{-1}|$  раз, а  $|L| \neq 0$

Пусть  $\Psi(x) := a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))$

$\forall \epsilon > 0 \exists B(a, \delta)$ , такой, что при  $x \in B(a, \delta)$   $|\Psi(x) - x| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$  (так

как  $\Psi(x)$  это почти  $x$ , только плюс  $o(a - x)$ )

$a \in Q \subset B(a, \delta)$ , где  $Q$  - куб со стороной  $h$

$x \in Q$ , тогда  $|a - x| < \sqrt{m} \cdot h$  (так как диагональ  $m$ -мерного куба со стороной  $h$  равна  $\sqrt{m} \cdot h$ )

Тогда  $|\Psi(x) - x| < \epsilon h$

При  $x, y \in Q, i \in \{1 \dots m\}$

$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |\Psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + |\Psi(y) - y| + h < (1 + 2\epsilon)h$

$\Psi(Q) \subset$  кубу со стороной  $(1 + 2\epsilon)h$

$\lambda(\Psi(Q)) < (1 + 2\epsilon)^m \lambda Q$

$\Phi$  выражается через  $\Psi$  через сдвиги и линейные преобразования. Тогда

$\lambda(\Phi(Q)) = |\det L| \cdot \lambda \Psi(Q) \leq |\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m \cdot \lambda Q$

Возьмём  $\epsilon$  так, чтобы  $|\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m$  было меньше  $c$ . Тогда при таком  $\epsilon$

$\lambda(\Phi(Q)) < c \cdot \lambda Q$

## 21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$A \subset O$ ,  $A$  - открыто.

$A \subset Q$  (кубическая ячейка)  $\subset \overline{Q} \subset O$ , то есть граница  $A$  не лежит на границе  $O$ .

Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G - \text{open set}} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство

Докажем, что левая часть  $\geq$  и  $\leq$  правой

$\geq$  очевидно, так как правая часть - нижняя граница для всего, встречающегося под  $\inf$

Докажем  $\leq$

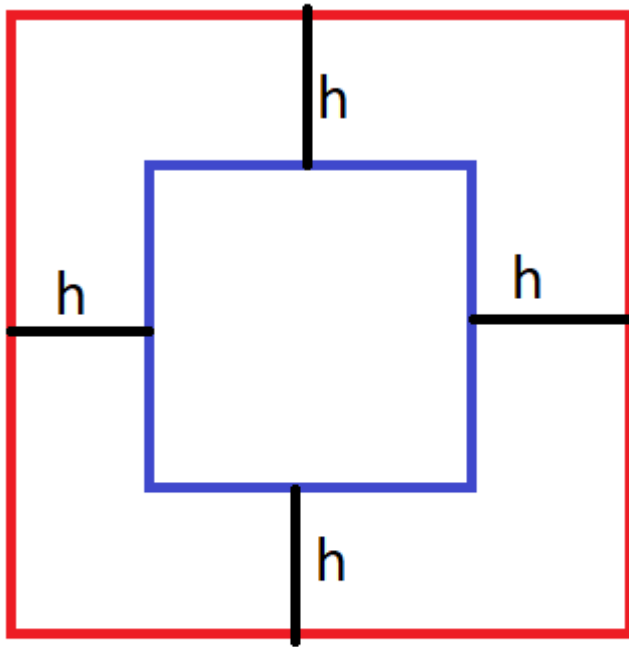
1.  $\lambda A = 0$ . Тогда правая часть  $= 0$ .

$$A \subset \overline{Q} \Rightarrow \sup f < +\infty$$

$\overline{Q}$  - компакт,  $\alpha := \text{dist}(\overline{Q}, \partial O) > 0$

Для множества  $G : A \subset G \subset \frac{\alpha}{2}$ -окрестности ячейки  $Q$

Назовём  $Q_1$  кубическую ячейку, которая больше  $Q$  и у которой каждая сторона отстоит на  $\frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$  от соответствующей стороны  $Q$ .



$$h = \frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$$

$$A \subset G \subset \text{Int}(Q_1)$$

$$\sup_G f \leq \sup_{\overline{Q_1}} f < +\infty$$

При этом  $\lambda G$  может быть выбрана сколь угодно близко к  $\lambda A = 0$  по регулярности меры Лебега.

2.  $\lambda A > 0, \sup_A f < c$

Возьмём  $c_1$ :

$$\sup_A f < c_1 < c$$

Выберем  $\epsilon$  так чтобы

$$\epsilon \cdot c_1 < \lambda A \cdot (c - c_1) \quad (*)$$

$G_\epsilon$  - такое множество, что  $A \subset G_\epsilon$ ,  $G_\epsilon$  - открытое,  $\lambda(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$

$G_1 := f^{-1}((-\infty; c_1)) \cap G_\epsilon$  - открытое

$$\lambda(G_1 \setminus A) < \epsilon$$

$$\lambda G_1 \cdot \sup_{G_1} f \leq (\lambda A + \epsilon) \cdot c_1 < \lambda A \cdot c \quad (\text{из } (*))$$

(так как  $G \subset f^{-1}((-\infty; c_1))$ , то есть  $f$  на  $G_1$  не больше  $c_1$ )

$$\inf(\lambda G \cdot_G f) < \lambda A \cdot c$$

Переходя к  $\inf$  по  $c$ , получаем что требовалось

## 22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - Диффеоморфизм,  $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

TODO: Илья

## 23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - диффеоморфизм

$O' = \Phi(O)$  - открытое

$f$  задана на  $O'$ ,  $f \geq 0$ , Измерима по Лебегу, тогда

$$\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$$

Доказательство:

Из

$$\nu(A) = \lambda\Phi(A), \nu \text{ имеет плотность } J\Phi \text{ по отношению к } \lambda$$

Применить теорему об интеграле по взвешенному образу меры

## 24 Теорема (принцип Кавальери)

$(X, \alpha, \mu)$  и  $(Y, \beta, \nu)$  - пространства с мерами, причем  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные

$m = \mu \times \nu$ ,  $C \in \alpha \times \beta$ , тогда:

1. При п.в.  $x$   $C_x$  - измеримо ( $\nu$ -измеримо), т.е.  $C_x \in \beta$
2. Функция  $x \rightarrow \nu C_x$  — измеримая (в широком смысле) на  $X$

NB:  $\phi$  — измерима в широком смысле, если она задана при п.в.  $x$ , и  $\exists f : X \rightarrow R'$  - измеримая и  $\phi = f$  п.в. При этом  $\int_X \phi = \int_X f$  (по опр.)

$$3. mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$$

Доказательство: Рассмотрим  $D$  — совокупность все множеств, для которых утв. теоремы верно.

$\rho = \alpha \otimes \beta$  — п/к изм. пр-ков.

$$1. \rho \subset D$$

$C = A \times B$ . то есть  $\forall x C_x = \emptyset$  if  $x \notin A$ ,  $B$  if  $x \in A$

$(\mu A < +\infty, \nu B < +\infty)$

$x \rightarrow \nu(C_x)$ , функция  $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$  — изм.

$$\int_X \nu(C_x) d\mu = \nu B \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \nu B \cdot \mu A = mC$$

$$2. E_i \in D, E_i - dis \Rightarrow E := \sqcup E_i \in D$$

при п.в.  $x$   $(E_i)_x$  — измеримы

при п.в.  $x$  все  $(E_i)_x$  — измеримы,  $E_x = \sqcup (E_i)_x$  — изм.

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$  ( $\nu(E_i)_x$  — изм. как функция от  $x$ )  $\Rightarrow$  функция

$x \rightarrow \nu E_x$  — измерима

$$\int_X \nu E_x d\mu(x) = \sum_i \int \nu(E_i)_x d\mu(x) = \sum_i mE_i = mE$$

$$3. E_i \in D, E_1 \supset E_2 \supset \dots; mE_i < +\infty. \text{ Тогда } E := \cap E_i \in D$$

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty (*)$$



функция  $x \rightarrow \nu(E_i)_x$  — суммируема  $\Rightarrow$  п.в. конечна.

при всех  $x$   $(E_i)_x \downarrow E_x$ , т.е.  $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots$  и  $\bigcap (E_i)_x = E_x$

при п.в.  $x$   $\nu(E_i)_x$  — конечны (для таких  $x$ ).

Тогда  $E_x$  — измерима и  $\lim \nu(E_i)_x = \nu E_x$  по непр-ти меры  $\nu$  сверху.

(Th. Лебега)  $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$  — сумм.  $\Rightarrow$  функция  $x \rightarrow \nu E_x$  — изм.

$\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim m E_i = m E$  (непр. сверху меры  $m$ ).

Этот предельный переход корректен как раз по теореме Лебега ( $f_n \rightarrow f$  п.в.  $g : |f_n| \leq g$  — сумм. Тогда  $\int f_n \rightarrow \int f$ ).

NB: мы доказали про пересечения и про объединения (пусть пересечения убывающие, а объединения — дизъюнктивные, но это лечится).

Поэтому  $\bigcap_j (\bigcup_i A_{i,j}) \in D$ , если  $A_{i,j} \in \rho$  ( $\rho \subset D$ ).

#### 4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$

$\exists H \in D$ ,  $H$  имеет вид  $\bigcap (\bigcup A_{i,j})$ , где все  $A_{i,j} \in \rho$

$E \subset H$ ,  $mH = 0$  из п.5 т. о продолжении (ЧТО?! поясните плез)

$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu(x) \Rightarrow \nu H_x = 0$  (= 0 при п.в.  $x$ ).

$E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$  —  $\nu$ -изм. (из полноты  $\nu$ ) и  $\nu E_x = 0$  п.в.  $x$

$\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$

#### 5. $C$ — неизм., $mC < +\infty$ . Тогда $C \in D$ .

$C = H \setminus e$ , где  $me = 0$ ,  $H$  — вида  $\bigcap (\bigcup A_{i,j})$ .

$C_x = H_x \setminus e_x$  — изм. при п.в.  $x$

$\nu e_x = 0$  п.в.  $x$  (проверено в п.4)

$\nu C_x = \nu H_x = \nu e_x$  — изм. п.в.  $x$

$\int_X \nu C_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = \int \nu H_x = mH = mC$ .

#### 6. $C$ — $m$ -изм. произвольное

$X = \sqcup X_k, Y = \sqcup Y_n$  ( $\mu X_k$  — кон.,  $\nu Y_n$  — кон.).

$C = \sqcup_{k,n} (\subset \cap (X_k \times Y_n)) \in D$  (по п.2) (т.к.  $\subset \cap (X_k \times Y_n) \in D$  по п.5)

## 25 Теорема Тонелли

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$  — пространства с мерой

$\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечны, полные

$m = \mu \times \nu$

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ ,  $f$  - измерима относительно  $m$

Тогда:

1. при *почти всех*  $x \in X$   $f_x$  - измерима на  $\mathbb{Y}$ ,  
где  $f_x : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f_x(y) = f(x, y)$   
(симметричное утверждение верно для  $y$ )
2. Функция  $x \mapsto \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \int_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)$  - измерима<sup>\*</sup> на  $\mathbb{X}$   
(симметричное утверждение верно для  $y$ )
3.  $\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f(x, y) dm = \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left( \int_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{Y}} \left( \int_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство:

Докажем в 3 пункта, постепенно ослабляя ограничения на функцию  $f$

1. Пусть  $C \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  - измеримо относительно  $m$ ,  $f = \chi_C$ 
  - (a)  $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$ , где  $C_x$  - сечение по  $x$   
 $C_x$  - измеримо при *почти всех*  $x$ , так как это одномерное сечение, таким образом  $f_x$  - измеримо, при *почти всех*  $x$ .
  - (b)  $\phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \nu C_x$  - по принципу Кавальери это измеримая<sup>\*</sup> функция.
  - (c)  $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \nu C_x d\mu \stackrel{\text{Кавальери}}{=} m C \stackrel{\text{опр. инт}}{=} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} \chi_C dm = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f(x, y) dm$
2. Пусть  $f$  - ступенчатая,  $f \geq 0$ ,  $f = \sum_{\text{кон}} a_k \chi_{C_k}$ 
  - (a)  $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}$  - измерима при почти всех  $x$
  - (b)  $\phi(x) = \sum a_k \nu(C_k)_x$  - измерима<sup>\*</sup> как конечная сумма измеримых
  - (c)  $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \sum_{\text{кон}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} \int_{\mathbb{X}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} a_k m C_k = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm$

3. Пусть  $f$  - измеримая,  $f \geq 0$

$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$ , где  $g_n \geq 0$  - ступенчатая,  $g_n$  - монотонно возрастает к  $f$   
(из Теоремы об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми)

(a)  $f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$  - измерима при *почти всех*  $x$ .

(b)  $\phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \lim_{\mathbb{Y}} \int (g_n)_x d\nu$

$\phi_n(x) := \int_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu$  - измерима по пункту 1

$0 \leq (g_n)_x$  - возрастает, тогда  $\phi(x)$  - измерима,  $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq \dots$  и  $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$

(c)  $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \phi_n(x) d\mu \stackrel{\text{п.2}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} g_n dm \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \int f dm$

## 26 Формула для Бета-функции

$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1}$ , где  $s$  и  $t > 0$  - Бета-функция

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ , где  $s > 0$ , тогда  $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left( \int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \left[ \begin{array}{c} y \rightarrow u \\ y = u - x \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \left( \int_x^{+\infty} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx = \\ &= \int_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq x}} \dots = \text{меняем порядок интегрирования} \\ &= \int_0^{+\infty} du \int_0^u dx (x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u}) = \left[ \begin{array}{c} x \rightarrow v \\ x = uv \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left( \int_0^1 u^{s-1} v^{s-t} u^{t-1} (1-v)^{t-1} u dv \right) du = \\ &= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left( \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du = B(s, t) \Gamma(s+t), \text{ чтд.} \end{aligned}$$

## 27 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$$B(0, R) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} \lambda_m(B(0, R)) &= \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi_1 \dots \int_0^\pi d\phi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{m-1} r^{m-1} (\sin\phi_1)^{m-2} \dots (\sin\phi_{m-2}) \\ &= \int_0^\pi (\sin\phi_k)^{m-2-(k+1)} d\phi_k = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2}+\frac{1}{2})} \\ &\rightarrow = \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \dots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi = \\ &= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} R^m \end{aligned}$$

## 28 Теорема о вложении пространств $L^p$

$$\mu E < +\infty \quad 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1.  $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2.  $\forall f$  — измеримы  $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

Доказательство:

- $2 \Rightarrow 1$  (Это очевидно: достаточно рассмотреть неравенство из пункта 2. Из него следует, что  $\|f\|_s < \|f\|_r$ . см. опред.  $L_p$ )
- Рассмотрим два случая:

1.  $r = +\infty$  (очев.)

$$\|f\|_s \leq \left( \int |f|^s * 1 \right)^{1/s} \leq ((esssup|f|)^s \int 1 d\mu)^{1/s} = \|f\|_\infty * \mu E^{1/s}$$

(последнее по опред.  $esssup$ )

2.  $r < +\infty$

$$(\|f\|_s)^s = \int |f|^s * 1 d\mu \leq \left( \int |f|^r \right)^{\frac{s}{r}} * \left( \int 1^{\frac{r}{r-s}} \right)^{\frac{(r-s)}{r}} = (\|f\|_r)^s * \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$

(существенный шаг: применить неравенство Гельдера)

## 29 Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере

$$1 \leq p < +\infty$$
$$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

Тогда:

1. •  $f \in L_p$   
•  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$

Тогда:  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (по мере)

2. •  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (либо если  $f_n \rightarrow f$  почти везде)  
•  $|f_n| \leq g$  почти при всех  $n$ ,  $g \in L_p$

Тогда:  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$

Доказательство:

1.

$$X_n(\epsilon) := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\mu X_n(\epsilon) = \int_{X_n} \left(\frac{|f_n - f|}{\epsilon}\right)^p = \frac{1}{\epsilon^p} \int_{X_n} |f_n - f|^p \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_X |f_n - f|^p = \frac{1}{\epsilon^p} (\|f_n - f\|_p)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2.  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  Тогда  $\exists n_k \mid f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

Тогда  $|f| \leq g$  п. в.

$|f_n - f|^p \leq (2g)^p$  — сумм. функции т. к.  $g \in L_p$

$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (по теореме Лебега)

## 30 Полнота $L^p$

$L_p(E, \mu)$   $1 \leq p < \infty$  – полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходится по норме  $\|f\|_p$ .

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, k \quad \|f_n - f_k\| < \epsilon \Rightarrow \exists f \mid \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

### Доказательство:

1. Построим  $f$ .

Рассмотрим фундаментальную последовательность  $f_n$ .

$$\exists N_1 \text{ при } n = n_1 \quad k > N_1 \quad \|f_{n_1} - f_k\| < \frac{1}{2}$$

$$\exists N_2 \text{ при } n = n_2 \quad k > N_2, N_1 \quad \|f_{n_2} - f_k\| < \frac{1}{4}$$

...

$$\text{Тогда: } \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1$$

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

Докажем, это функция  $f$  корректно задана:

$$\begin{aligned} \bullet S_N(x) &:= \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \\ \|S_N\|_p &\leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1 \\ \text{Тогда по Теореме Фату: } \|S\|_p &\leq 1 \end{aligned}$$

Тогда  $|S|^p$  – суммируема

Тогда  $S(x)$  конечна при п. в.  $x$  и ряд  $\sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$  абс. сход., а значит и просто сходиться при п. в.  $x$

$$f := f_{n_1} + \sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \text{ т. е. } f = \text{п. в. } \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

2. Проверим, что  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$

$$\begin{aligned} \text{Т. к. } f_n - \text{фунд.}, \text{ то } \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n_k > N \quad \|f_n - f_{n_k}\| < \epsilon \Rightarrow \\ \|f_n - f_{n_k}\|^p &= \int_E |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \epsilon^p \end{aligned}$$

$$\text{Тогда по теореме Фату: } \int_E |f - f_n|^p \leq \epsilon^p$$

$$\text{Тогда } \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad \|f - f_n\|_p < \epsilon$$

Замечание:  $L_\infty$  – полное (упражнение)

### 31 Лемма Урысона

### 32 Плотность в $L^p$ непрерывных финитных функций

### 33 Теорема о непрерывности сдвига

### 34 Теорема об интеграле с функцией распределения

$(\mathbb{R}, B, X)$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$ , изм. по Борелю, п.в. конечн.

$h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  с функцией распределения  $H(t)$

$\mu_H$  – мера Бореля-Стилтьеса (мера Лебега-Стилтьеса на  $B$ )

$$\underline{\text{Тогда}} \int_X f(h(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t)$$

Доказательство: Следует из теоремы о вычислении интеграла по взвешенному образу меры.

### 35 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

$$1. x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

$$2. \sum x_k \text{ сходится, тогда } \forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$$

$$3. \sum x_k - \text{ ортогональный ряд, тогда } \sum x_k - \text{ сх } \Leftrightarrow \sum |x_k|^2 \text{ сходится, при этом } \left| \sum x_k \right|^2 = \sum |x_k|^2$$

## Доказательство

$$1. \quad | \langle x_k, y_k \rangle - \langle x, y \rangle | = | \langle x_k, y_k \rangle - \langle x_k, y \rangle + \langle x_k, y \rangle - \langle x, y \rangle | \leq | \langle x_k, y_k - y \rangle | + | \langle x_k - x, y \rangle | \leq |x_k| \cdot |y_k - y| + |x_k - x| \cdot |y| \rightarrow 0 \quad (\text{так как } \text{огр} \cdot \text{б.м.} + \text{б.м.} \cdot \text{огр} \rightarrow 0)$$

$$2. \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$
$$\langle \sum_{k=1}^n x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, y \rangle$$

Устремляя  $n$  к  $\infty$  получаем требуемое равенство

$$3. \quad \text{Обозначим } C_n := \sum_{k=1}^n |x_k|^2$$
$$|S_n|^2 = \langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{j=1}^n x_j \rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_k \rangle \quad (\text{так как}$$
$$k \neq j \Rightarrow \langle x_k, x_j \rangle = 0) = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = C_n$$

Аналогично,  $|S_n - S_m|^2 = |C_n - C_m|$

Тогда  $C_n, S_n$  фундаментальны одновременно  $\Rightarrow$  сходятся одновременно при устремлении  $n$  к  $\infty$

## 36 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}, x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1.  $\{e_k\}$  — Л.Н.З.

$$2. \quad c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$



3.  $c_k \cdot e_k$  — проекция  $x$  на прямую  $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

Иными словами  $x = c_k \cdot e_k + z$ , где  $z \perp e_k$

Доказательство:

1. Пусть  $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$ . Умножим скалярно на  $e_m$  ( $1 \leq m \leq N$ )

Получим:  $\alpha_m \|e_m\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \Rightarrow$  комб. тривиальная  $\Rightarrow$  Л.Н.З.

2.  $\langle x, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k e_k, e_m \rangle = c_m \cdot \|e_m\|^2$  (верно в силу сходимости ряда)

3.  $x = c_k \cdot e_k + z$  ?  $z \perp e_k$  Докажем это:

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - c_k e_k, e_k \rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2 - c_k \cdot \|e_k\|^2 = 0$$

## 37 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \quad \mathcal{L} = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots) \subset \mathbb{H}$$

Тогда:

1.  $S_n$  — орт. проекция  $x$  на пр-во  $\mathcal{L}$ . Иными словами  $x = S_n + z$ ,  $z \perp \mathcal{L}$

2.  $S_n$  — наилучшее приближение  $x$  в  $\mathcal{L}$  ( $\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$ )

$$3. \|S_n\| \leq \|x\|$$

Доказательство:

$$1. (a) z = x - S_n$$

$$(b) z \perp \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n : z \perp e_k$$

$$(c) \langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = c_k \|e_k\|^2 - c_k \|e_k\|^2 = 0$$

$$2. \|x - y\|^2 = \|S_n + z - y\|^2 = \|(S_n - y) + z\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

$$3. \|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$$

Следствие: Неравенство Бесселя

$$\forall \{e_k\} - \text{O.C.} : \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

## 38 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$  – орт. сист. в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

$$1. \text{Ряд Фурье } \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \text{ сх-ся в } \mathbb{H}$$

$$2. x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$$

$$3. x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

Доказательство:

$$1. \text{Ряд Фурье – ортогональный ряд} \\ \text{его сходимость} \Leftrightarrow \text{сходимости } \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2 \text{ по неравенству Бесселя}$$

$$2. \langle z, e_k \rangle = \langle x - \sum c_i e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{+\infty} \langle c_i(x) e_i, e_k \rangle = 0$$

3.  $\Rightarrow$  - утв. 3 теоремы о св-вах сх-ти в гильбертовом пр-ве

$\Leftarrow$  Из п. 2 ряд ортог.

$$\|x\|^2 = \|\sum c_k e_k\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$$

## 39 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$  – орт. сист. в  $\mathbb{H}$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $e_1$  – базис

2.  $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$  (обобщенное уравнение замкнутости)

3.  $\{e_k\}$  – замкн.

4.  $\{e_k\}$  – полн.

5.  $Lin(e_1, e_2, \dots)$  – плотна в  $\mathbb{H}$

Доказательство:

### 39.1 $1 \Rightarrow 2$

$x = \sum c_k(x) e_k$  – единственно (из геом. соображений:  $c_k e_k$  – проекция)

$$\langle e_k, y \rangle = \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \langle e_k, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

### 39.2 $2 \Rightarrow 3$

$$y := x$$

$$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \quad (\text{см. п. 3 из опр.})$$

### 39.3 $3 \Rightarrow 4$

Пусть  $\forall k \quad x_0 \perp e_k$

$$c_k(x_0) = \frac{\langle x_0, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = 0$$

$$\|x_0\|^2 = \sum |c_k(x_0)|^2 \|e_k\|^2 = 0 \quad (\text{см. п. 2 из опр.})$$

### 39.4 $4 \Rightarrow 1$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow (\text{т. Рисса-Фишера (2)}) \quad \forall k \quad z \perp e_k \Rightarrow (\text{из полноты}) \quad z = 0$$

(см. п. 1 из опр.)

### 39.5 $4 \Rightarrow 5$

Пусть  $ClLin(e_1, e_2, \dots) \neq \mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H} \setminus ClLin(e_1, e_2, \dots)$

$$\text{из т. Рисса-Фишера (2): } x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \quad z \perp e_k \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Rightarrow$$

$$x \in ClLin(e_1, e_2, \dots)$$

Противоречие.

### 39.6 $5 \Rightarrow 4$

$$\forall k \quad x_0 \perp e_k \Rightarrow x_0 \perp Lin(e_1, e_2, \dots) \Rightarrow x_0 \perp ClLin(e_1, e_2, \dots) (= \mathbb{H}) \Rightarrow x_0 \perp x_0 \Rightarrow \|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

## 40 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть  $S_n \rightarrow f$  в  $L_1(-\pi, \pi]$

Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство:

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n a_j \cos jx + b_j \sin jx \quad (- \text{ это } T_n)$$

При  $n \geq k$  :

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx \, dx = \pi a_k$$

$$2. \left| \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \pi |S_n(x) - f(x)| \cdot |\cos kx| \, dx \leq$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| \, dx \rightarrow 0$$

Из 1 и 2 следует равенство для  $a_k$ . Аналогично доказывается и для других.