

Билеты по матану, семестр 3

23 октября 2018 г.

Содержание

1	Определения и формулировки	2
1.1	Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда	2
1.2	Равномерная сходимость функционального ряда	2
1.3	Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости	2
1.4	Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара	2
1.5	Экспонента как функция комплексного аргумента	2
1.6	Метод суммирования средними арифметическими	2
1.7	Метод суммирования Абеля–Пуассона	2
1.8	Частная производная второго порядка, k -го порядка	3
1.9	Классы $C^r(E)$	3
1.10	Мультииндекс и обозначения с ним	3
1.11	Формула Тейлора (различные виды записи)	3
1.12	n -й дифференциал	3
1.13	Норма линейного оператора	3
1.14	Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма	4
1.15	Локальный максимум, минимум, экстремум	4
1.16	Диффеоморфизм	4
1.17	Формулировка теоремы о локальной обратимости	4
1.18	Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений	4
1.19	Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений	4
1.20	Простое k -мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^m	5
1.21	Относительный локальный максимум, минимум, экстремум	5
1.22	Формулировка достаточного условия относительного экстремума	5
1.23	Касательное пространство к k -мерному многообразию в \mathbb{R}^m	5
1.24	Независимый набор функций	5
1.25	Кусочно-гладкий путь	5
1.26	Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути	5
1.27	Потенциал, потенциальное векторное поле	6
1.28	Локально потенциальное векторное поле	6
1.29	Похожие пути	6
1.30	Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути	6
1.31	Гомотопия путей связанная и петельная	6
1.32	Односвязная область	6
1.33	Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра	6
1.34	Объем	7
1.34.1	Конечная аддитивность	7
1.34.2	Объем	7

1.35	Ячейка	7
1.36	Классический объем в \mathbb{R}^m	7
1.37	Мера, пространство с мерой	7
1.38	Дискретная мера	7
1.39	Формулировка теоремы о непрерывности сверху	7
1.40	Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры	8
1.41	Полная мера	8
1.42	Сигма-конечная мера	8
1.43	Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество	8
1.44	Борелевская сигма-алгебра	8
1.45	Формулировка теоремы о мерах, инвариантных относительно сдвигов	8
1.46	Ступенчатая функция	8
1.47	Разбиение, допустимое для ступенчатой функции	8
1.48	Измеримая функция	9
2	Теоремы	9
2.1	Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда	9
2.2	Непрерывная дифференцируемость гамма функции	9
2.3	Теорема о круге сходимости степенного ряда	9
2.4	Теорема о непрерывности степенного ряда	10
2.5	Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.	10
2.6	Свойства экспоненты	10
2.7	Метод Абеля суммирования рядов. Следствие	11
2.8	Единственность разложения функции в ряд	11
2.9	Разложение бинома в ряд Тейлора	12
2.10	Пример функции, у которой ряд Тейлора расходится при $x \neq 0$	12
2.11	Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора	12
2.12	Теорема Таубера	13
2.13	Теорема Коши о перманентности метода средних арифметических	13
2.14	Преобразование Абеля степенного ряда	14
2.15	Теорема о связи суммируемости по Чезаро и по Абелю–Пуассону	14
2.16	Независимость частных производных от порядка дифференцирования	14
2.17	Полиномиальная формула	15
2.18	Лемма о дифференцировании «сдвига»	15
2.19	Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)	15
2.20	Теорема о пространстве линейных отображений	16
2.21	Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора	16
2.22	Теорема Лагранжа для отображений	17
2.23	Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому	17
2.24	Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях	17
2.25	Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах	18
2.26	Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля	18
2.26.1	Теорема Ферма	18
2.26.2	Необходимое условие экстремума	18
2.26.3	Теорема Ролля	18
2.27	Достаточное условие экстремума	18
2.28	Лемма о «почти локальной инъективности»	19
2.29	Теорема о сохранении области	19
2.30	Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности	20

2.31	Теорема о диффеоморфизме	20
2.32	Теорема о неявном отображении	20
2.33	Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений	21
2.34	Следствие о двух параметризациях	21
2.35	Необходимое условие относительного локального экстремума	22
2.36	Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел	22
2.37	Лемма о корректности определения касательного пространства	23
2.38	Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей	23
2.39	Теорема о функциональной зависимости	23
2.40	Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути	24
2.41	Обобщенная формула Ньютона–Лейбница	24
2.42	Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов	25
2.43	Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре	25
2.43.1	Необходимое условие потенциальности гладкого поля	25
2.43.2	Лемма Пуанкаре	25
2.44	Лемма о гусенице	26
2.45	Лемма о равенстве интегралов по похожим путям	26
2.46	Лемма о похожести путей, близких к данному	26
2.47	Равенство интегралов по гомотопным путям	27
2.48	Теорема о резиночке	27
2.49	Теорема Пуанкаре для односвязной области	27
2.50	Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность	28
2.51	Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности	28
2.52	Теорема о непрерывности снизу	28
2.53	Счетная аддитивность классического объема	29
2.54	Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0	29
2.55	Пример неизмеримого по Лебегу множества	30
2.56	Регулярность меры Лебега	30
2.57	Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении	31
2.58	Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов	31
2.59	Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании	31
2.60	Лемма «о структуре компактного оператора»	32
2.61	Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении	32
2.62	Теорема об измеримости пределов и супремумов	33
2.63	Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых	33

1 Определения и формулировки

1.1 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

$a_n, b_n : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на E , если:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на E .
2. Последовательность $b_n(x)$ равномерно ограничена на E и монотонна для всех $x \in E$.

1.2 Равномерная сходимость функционального ряда

Функциональный ряд $\sum f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится к $f(x)$.

1.3 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости

Ряд $\sum f_n(x)$ равномерно сходится на E тогда и только тогда, когда

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall m \geq n \geq N, x \in E \mid \left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| < \epsilon$$

1.4 Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ — степенной ряд.
2. $R \in [0; +\infty]$: при $|x - x_0| < R$ ряд сходится, при $|x - x_0| > R$ ряд расходится — радиус сходимости степенного ряда.
3. Формула Адамара:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

1.5 Экспонента как функция комплексного аргумента

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

1.6 Метод суммирования средними арифметическими

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ — ряд. $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Сумма ряда по методу средних арифметических:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k$$

1.7 Метод суммирования Абеля–Пуассона

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — ряд. Его сумма по Абелю–Пуассону:

$$S = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

1.8 Частная производная второго порядка, k -го порядка

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E$, $U(a) \in E$.

$\exists f'_{x_i}$ в $U(a)$ — частная производная f по переменной x_i .

Если в $a \exists (f'_{x_i})'_{x_k}$, то она называется частной производной второго порядка по x_i и x_k в точке a ($f''_{x_i x_k}(a)$).

Аналогично — частные производные высших порядков.

1.9 Классы $C^r(E)$

$E \in \mathbb{R}^m$ — открыто.

Класс функций $C^r(E)$, $r \in \mathbb{N}$ — класс функций на E , у которых существуют все частные производные порядка r и они непрерывны.

$C^0(E) = C(E)$ — непрерывные на E функции.

$C^\infty(E) = C^0(E) \cap C^1(E) \cap C^2(E) \cap \dots$

1.10 Мультииндекс и обозначения с ним

$i = (i_1, \dots, i_m)$, $i_k \in \mathbb{Z}_+$ — мультииндекс.

1. $|i| = i_1 + \dots + i_m$ — высота мультииндекса.

2. $i! = i_1! \dots i_m!$

3. $x^i = x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$

4. $f^{(i)} = \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i} = \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}$

1.11 Формула Тейлора (различные виды записи)

$E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^{r+1}(E)$, $x \in E$, $(x+h) \in U(x) \subset E$, $\theta \in (0;1)$

$$f(x+h) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(x+\theta h)}{k!} h^k$$

$$f(x+h) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(|h|^r)$$

$$f(x+h) = \sum_{s=0}^r \frac{d^s(a, h)}{s!} + \frac{d^{r+1}(a, \theta h)}{(r+1)!}$$

1.12 n -й дифференциал

$$d^n f(x, h) = \sum_{|k|=n} \frac{n!}{k!} f^{(k)}(x) h^k$$

1.13 Норма линейного оператора

$L \in \mathcal{L}_{m,n}$

$\|L\| = \sup_{|x|=1} |Lx|$

1.14 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

$Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. $Q(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j$ — квадратичная форма.

1. $Q(x)$ — положительно определённая форма, если $\forall x \neq 0 \quad Q(x) > 0$.
2. $Q(x)$ — отрицательно определённая форма, если $\forall x \neq 0 \quad Q(x) < 0$.
3. $Q(x)$ — незнакоопределённая форма, если $\exists x : Q(x) > 0$ и $\exists x : Q(x) < 0$.
4. $Q(x)$ — положительно определённая вырожденная форма, если $\forall x \neq 0 \quad Q(x) \geq 0$, $\exists x \neq 0 : Q(x) = 0$.
5. $Q(x)$ — отрицательно определённая вырожденная форма, если $\forall x \neq 0 \quad Q(x) \leq 0$, $\exists x \neq 0 : Q(x) = 0$.

1.15 Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

1. $x_0 \in E$ — точка локального максимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \leq f(x_0)$.
2. $x_0 \in E$ — точка локального минимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \geq f(x_0)$.
3. $x_0 \in E$ — точка строгого локального максимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap e \setminus \{x_0\} \quad f(x) < f(x_0)$.
4. $x_0 \in E$ — точка строгого локального минимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap e \setminus \{x_0\} \quad f(x) > f(x_0)$.
5. $x_0 \in E$ — точка (строгого) локального экстремума, если она является точкой (строгого) локального максимума или минимума.

1.16 Диффеоморфизм

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, если F обратимо, F и F^{-1} дифференцируемы.

1.17 Формулировка теоремы о локальной обратимости

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, E открыто, $F \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in E$, $\det F'(x_0) \neq 0$.

Тогда $\exists U(x_0) \subset E$, такое что F , суженное на $U(x_0)$ — диффеоморфизм.

1.18 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = y_1 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$$

$f_i \in C^1$. $\exists x^0$ — решение, $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)) \neq 0$.

Тогда $\exists U(x^0), V(y_0) : \forall y \in V(y_0) \quad \exists!$ решение $x \in U(x^0)$ и $x_i(y)$ — гладкие.

1.19 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

$F : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in C^1(E)$

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

$(a, b) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ — решение. $\det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}) \neq 0$.

Тогда $\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m, U(b) \subset \mathbb{R}^n : \forall (x_1, \dots, x_m) \in U(a)$ решение системы от (y_1, \dots, y_n) в $U(b)$ единственно.

1.20 Простое k-мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^m

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное многообразие в \mathbb{R}^m , если \exists область $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^m : \Phi(E) = M$, Φ — гомеоморфизм (непрерывное, обратимое, обратное непрерывно).

M — гладкое k-мерное многообразие класса C^r , если $\Phi \in C^r$.

1.21 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

$$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$M_\Phi = \{x \in E : \Phi(x) = 0\}$$

$x_0 \in M_\Phi$ — точка относительного локального максимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x) \cap M_\Phi \ f(x) \leq f(x_0)$.

Аналогично: минимум, экстремум, строгий экстремум.

1.22 Формулировка достаточного условия относительного экстремума

$$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi : E \subset \mathbb{R}^n, f, \Phi \in C^1.$$

$a \in E$ — подозрительная на экстремум точка: $\Phi(a) = 0$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n : G'(a) = f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0$.

Пусть $\text{rank } \Phi'(a) = k$ реализуется на последних k столбцах.

$h = (h_1, \dots, h_{m+n})$ — такой вектор, что $\Phi'(a)h = 0$. $h = (h_x, h_y)$, $h_y = \Psi(h_x)$ — линейно.

$G(x) = f(x) - \lambda \Phi(x)$. Квадратичная форма: $Q(h_x) = d^2 G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$.

1. Q положительно определённая $\Rightarrow a$ — точка относительного локального минимума.
2. Q отрицательно определённая $\Rightarrow a$ — точка относительного локального максимума.
3. Q не знакоопределённая $\Rightarrow a$ — не экстремум.

1.23 Касательное пространство к k-мерному многообразию в \mathbb{R}^m

$M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное многообразие, $\Phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ — параметризация.

$x_0 \in M$, $u_0 = \Phi^{-1}(x_0)$.

Касательное пространство к M в точке x_0 — это множество $\{\Phi'(u_0)h : h \in \mathbb{R}^k\}$

1.24 Независимый набор функций

$$f_1, \dots, f_n : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}. F = (f_1, \dots, f_n).$$

Функции f_1, \dots, f_n независимы в окрестности $U(x_0) \subset E$, если $(y_0 = F(x_0))$:

$\exists V(y_0) : \forall G : V(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна, выполнение тождества $G(F(x)) \equiv 0$ при $x \in U(x_0)$ возможно только при $G \equiv 0$.

1.25 Кусочно-гладкий путь

Путь $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, такой что \exists дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$: γ гладкий на каждом отрезке дробления.

1.26 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$E \subset \mathbb{R}^m$ — открытое. γ — кусочно-гладкий путь в E , V — векторное поле в E .

Интеграл V по γ :

$$I(V, \gamma) = \int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) d\gamma_i(t)$$

Обозначение: $\int_a^b V d\gamma$.

1.27 Потенциал, потенциальное векторное поле

E — область в \mathbb{R}^m . $V : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывное векторное поле.

V потенциально в E , если $\exists f : E \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(E) : \forall x \in E \ V(x) = \text{grad } f$.

1.28 Локально потенциальное векторное поле

E — область в \mathbb{R}^m . $V : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывное векторное поле.

V — локально потенциальное в E , если $\forall x \in E \ \exists U(x) : V$ потенциально в U .

1.29 Похожие пути

Пути $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow E$ (E — область), если у них есть общая «гусеница»:

\exists шары B_1, \dots, B_n , дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b : \forall \gamma_i([t_{j-1}, t_j]) \subset B_j$.

Замечания:

1. Можно требовать, что радиусы $< \delta$.
2. Можно требовать, чтобы в шарах некоторое векторное поле было потенциальным.
3. Любой путь похож на ломаную.

1.30 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

Интеграл локально-потенциального векторного поля V в E по произвольному пути γ — это его интеграл по похожему на него кусочно-гладкому пути.

1.31 Гомотопия путей связанная и петельная

$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow E$ — пути.

$\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow E$ — непрерывно.

$\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Γ — гомотопия.

Если $\forall s \in [0, 1] \ \Gamma(a, s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \Gamma(b, s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, то это связанная гомотопия.

Если $\forall s \in [0, 1] \ \Gamma(a, s) = \Gamma(b, s)$, то это петельная гомотопия.

1.32 Односвязная область

Область E односвязная, если $\forall \gamma$ — замкнутый путь в $E \ \exists$ петельная гомотопия γ в постоянный путь (точку).

1.33 Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

Семейство подмножеств \mathbb{P} множества X — полукольцо, если:

1. $\emptyset \in \mathbb{P}$.
2. Если $A, B \in \mathbb{P}$, то $A \cap B \in \mathbb{P}$.
3. Если $A, B \in \mathbb{P}$, то $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n C_k$, где $C_k \in \mathbb{P}$, дизъюнкты.

Семейство подмножеств \mathbb{A} множества X — алгебра, если:

1. $\emptyset \in \mathbb{A}$.
2. Если $A \in \mathbb{A}$, то $X \setminus A \in \mathbb{A}$.
3. Если $A, B \in \mathbb{A}$, то $A \cup B \in \mathbb{A}$.

Семейство подмножеств \mathbb{A} множества X — σ -алгебра, если:

1. $\emptyset \in \mathbb{A}$.
2. Если $A \in \mathbb{A}$, то $X \setminus A \in \mathbb{A}$.
3. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$, то $\bigcup A_k \in \mathbb{A}$.

1.34 Объем

1.34.1 Конечная аддитивность

$\mu : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (\mathbb{P} — полукольцо) — конечно аддитивна, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $+\infty$ и $-\infty$ не могут оба включаться в область значений μ .
3. Если $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{P}$, дизъюнкты, $\bigcup A_i \in \mathbb{P}$, то $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

1.34.2 Объем

$\mu : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{P} — полукольцо) — объём, если:

1. $\forall A \mu(a) \geq 0$.
2. μ конечно аддитивна.

1.35 Ячейка

$a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$ ($\forall k a_k < b_k$).

Ячейка — параллелепипед $[a, b) = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$.

\emptyset — тоже ячейка.

Множество всех ячеек — \mathbb{P}_n

1.36 Классический объем в \mathbb{R}^m

$v : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{R}_+$. $v[a, b) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$, $v(\emptyset) = 0$.

1.37 Мера, пространство с мерой

$\mu : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{P} — полукольцо) — мера, если:

1. μ — объём.
2. Счётная аддитивность: $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{P}$, дизъюнкты, $\bigcup A_i \in \mathbb{P}$, тогда $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

Пространство с мерой — тройка (X, \mathbb{A}, μ) : X — множество, \mathbb{A} — σ -алгебра подмножеств X , μ — мера на \mathbb{A} .

1.38 Дискретная мера

$x_1, x_2, \dots \in X$, $h_1, h_2, \dots \in [0, +\infty]$.

$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} h_i$.

1.39 Формулировка теоремы о непрерывности сверху

\mathbb{A} — алгебра подмножеств X , μ — конечный объём на \mathbb{A} . Тогда эквивалентно:

1. μ — мера.
2. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$, $\forall k A_k \supset A_{k+1}$, $A = \bigcap A_k \in \mathbb{A}$, то $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

1.40 Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

\mathbb{P}_0 — полукольцо подмножеств X , μ_0 — σ -конечная мера на \mathbb{P}_0 .

Тогда \exists σ -алгебра \mathbb{A} и мера μ на \mathbb{A} , что:

1. $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{A}$ и μ — продолжение μ_0 .
2. μ — полная мера.
3. μ — минимальная: если найдётся σ -алгебра \mathbb{A}_1 и мера μ_1 на ней, удовлетворяющие (1) и (2), то $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}_1$ и μ_1 — продолжение μ .
4. Если \mathbb{P} — полукольцо, $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{A}$, $\bar{\mu}$ — мера на \mathbb{P} , являющаяся продолжением μ_0 , то $\bar{\mu}$ — сужение μ .
5. $\forall A \in \mathbb{A} \quad \mu(A) = \inf_{(P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_0, A \subset \bigcup P_i)} \sum \mu(P_i)$.

1.41 Полная мера

Мера, заданная на полукольце \mathbb{P} , называется полной, если любое подмножество множества меры 0 также принадлежит \mathbb{P} .

1.42 Сигма-конечная мера

μ — мера на полукольце \mathbb{P} над X . Если $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, где $X_k \in \mathbb{P}$ и $\mu(X_k) < +\infty$, то мера μ σ -конечная.

1.43 Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

\mathbb{P}_n — полукольцо ячеек в \mathbb{R}^n , μ — классический объём.

Мера Лебега — это лебеговское продолжение меры μ из теоремы о лебеговском продолжении меры на σ -алгебру \mathfrak{M}^n .

Элементы \mathfrak{M}^n — измеримые по Лебегу множества.

1.44 Борелевская сигма-алгебра

Борелевская σ -алгебра над метрическим пространством X — это минимальная по включению σ -алгебра, содержащая все открытые подмножества X .

1.45 Формулировка теоремы о мерах, инвариантных относительно сдвигов

μ — мера в \mathbb{R}^m на \mathfrak{M}^m .

1. $\forall A \in \mathfrak{M}^m, V \in \mathbb{R}^m \quad \mu(A) = \mu(A + V)$.
2. Если $A \in \mathfrak{M}^m$ ограничено, то $\mu(A) < +\infty$.

Тогда $\exists k \geq 0$, что $\mu = k\lambda_m$ (λ_m — мера Лебега).

1.46 Ступенчатая функция

Функция $f : x \rightarrow \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если \exists конечное разбиение $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$, что f константна на каждом X_i .

1.47 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

Разбиение $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ — допустимое для ступенчатой функции f , если f константна на каждом X_i .

1.48 Измеримая функция

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

Функция $f : E \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($E \in \mathbb{A}$) — измерима на E , если для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in E : f(x) < a\}$ измеримо.

2 Теоремы

2.1 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

$a_n, b_n : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на E , если:

1. Частичные суммы $\sum a_n(x)$ равномерно ограничены на E .
2. $\forall x$ $b_n(x)$ монотонно, $b_n(x)$ равномерно сходится к 0.

Доказательство:

1. Доказываем по критерию Коши: $\forall \epsilon > 0 \exists K : \forall M > N > K, \forall x \mid \sum_{k=N}^M a_n(x)b_n(x) \mid < \epsilon$.
2. Преобразование Абеля: $\sum_{k=N}^M a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$.
3. $|A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k| \leq C_A (|b_M| + |b_N| + \sum_{k=N}^{M-1} |b_k - b_{k+1}|) \leq C_A (|b_M| + 2|b_N|)$.
Это $< \epsilon$ НСНМ.

2.2 Непрерывная дифференцируемость гамма функции

$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ — непрерывно дифференцируема.

Доказательство:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$
$$-\ln \Gamma(z) = \ln z + \gamma z + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - \frac{z}{k}\right)}_{u_k(z)}$$
$$u'_k(z) = \frac{-z}{k(z+k)}$$

Ряд $\sum u'_k(z)$ равномерно сходится в окрестности любой точки, значит, $\sum u_k(z)$ непрерывно дифференцируем. Всё остальное в $\ln \Gamma(z)$ тоже дифференцируемо.

2.3 Теорема о круге сходимости степенного ряда

$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ — степенной ряд.

Возможны три случая:

1. A сходится только в z_0 .
2. A сходится на \mathbb{C} .
3. $\exists R \in (0; \infty)$: A сходится при $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$.

Доказательство:

1. Признак Коши для ряда $\sum b_n$: если $\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$, ряд сходится, если > 1 , расходится.
2. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = (\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}) |z - z_0|$.
3. Дальше просто.

2.4 Теорема о непрерывности степенного ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд. $R > 0$ — радиус сходимости.

1. $\forall 0 < r < R$ ряд сходится равномерно в круге $B(z_0, r)$.
2. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ непрерывна на $B(z_0, R)$.

Доказательство:

1. (а) Признак Вейрштрасса. $z \in B(z_0, r)$. $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n|r^n$.
(б) $\sum |a_n|r^n$ сходится, так как $\sum |a_n|(z - z_0)^n$ сходится при $z = z_0 + r$.
2. Непрерывность следует из равномерной сходимости.

2.5 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

$(A) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд. $R > 0$ — радиус сходимости.

$(A') : \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z - z_0)^{n-1}$.

Тогда:

1. Радиус сходимости A' равен R .
2. $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z - z_0)^{n-1}$.

Следствие:

$(A) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_n(z - z_0)^{n+1}$.

Тогда:

1. Радиус сходимости $'A$ равен R .
2. $\int_{z_0}^z f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_n(z - z_0)^{n+1}$.

Доказательство:

1. $R' = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)a_{n+1}}} = R$ (несложно).
2. Ряд из производных равномерно сходится, значит, исходный ряд дифференцируем и имеет такие производные.
3. Про интеграл изи.

2.6 Свойства экспоненты

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp \in C^\infty(\mathbb{C})$, $\exp' = \exp$
3. $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$
4. $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$
5. $\forall z \exp(z) \neq 0$

Пусть $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, $\exp(ix) = T(x \in \mathbb{R})$.

6. $\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
7. $\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

8. $T(x+y) = T(x) \cdot T(y)$
9. $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
10. $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
11. $|T(x)| = 1$
12. $T'(x) = iT(x)$

Доказательство:

1. Очевидно.
2. Взять и продифференцировать.
3. $\exp(z_1 + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$.
4. Очевидно.
5. Если $\exp(z_0) = 0$, то $\exp(0) = \exp(-z + z) = \exp(-z) \cdot 0 = 0$, а это не так.
6. Взять и посчитать.
7. Взять и посчитать.
8. Из пункта 3.
9. Взять и посчитать.
10. Взять и посчитать.
11. Взять и посчитать.
12. Взять и продифференцировать.

2.7 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — сходится.

Тогда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ корректно задана на $(-1; 1)$ и $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Доказательство:

1. $\sum a_n x^n$ сходится при $x = 1$, значит, $R \geq 1$. Доказать: $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$.
2. $\sum a_n x^n$ равномерно сходится на $[0, 1]$, потому что $\sum a_n$ равномерно сходится относительно x , x^n монотонна и ограничена (признак Абеля).

2.8 Единственность разложения функции в ряд

Если функция f раскладывается в степенной ряд в $U(x_0)$, то разложение единственно.

Доказательство:

Коэффициенты однозначно определяются производными всех порядков f в точке x_0 .

2.9 Разложение бинома в ряд Тейлора

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n x^n, |x| < 1$$

$$C_a^n = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$$

Доказательство:

1. Рассмотрим ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n x^n$.
2. По правилу Даламбера, $R = \lim | \frac{c_n}{c_{n+1}} | = \lim | \frac{n+1}{a-n} | = 1$.
3. Продифференцируем его: $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} x^n$.
4. Домножаем на $(1+x)$: $(1+x)f'(x) = a + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(n-1)!})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} = af(x)$.
5. Пусть $g(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^a}$. $g'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^a - a(1+x)^{a-1}f(x)}{(1+x)^{2a}} = \frac{f'(x)(1+x) - af(x)}{(1+x)^{a+1}} = 0$.
6. Производная g равна нулю, поэтому $g \equiv \text{const} = g(0) = 1$. Поэтому $f(x) = (1+x)^a$.

2.10 Пример функции, у которой ряд Тейлора расходится при $x \neq 0$

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{1+t^2 x}$$

Доказательство:

1. $\frac{1}{1+t^2 x} = 1 - t^2 x + (t^2 x)^2 + \dots + (-t^2 x)^n + \frac{(-t^2 x)^{n+1}}{1+t^2 x}$. Доказательство: домножить всё на $1+t^2 x$.
2. Домножим на e^{-x} и проинтегрируем по x .
 $f(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx + \dots + (-1)^n t^{2n} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx + (-1)^{n+1} t^{2n+2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} x^{n+1}}{1+t^2 x} dx$.
3. Остаток тут $o(t^{2n+1})$, поэтому это ряд Тейлора. Члены ряда тут последовательные факториалы, поэтому он расходится.

2.11 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

$$f \in C^{\infty}((x_0 - h; x_0 + h))$$

f разложима в ряд Тейлора в окрестности x_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists \delta, c, A > 0 : \forall n, |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| \leq c A^n n!$$

Доказательство:

1. \Leftarrow

$$(a) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

$$(b) \quad \text{Остаток должен} \rightarrow 0. \quad \left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq c(A|x - x_0|)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (\text{в некоторой окрестности } x_0).$$

2. \Rightarrow

(а) Рассмотрим точку $x_1 \neq x_0$, $f(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x_1 - x_0)^k$.

Ряд сходится, поэтому слагаемые ограничены по модулю: $\forall k \left| \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x_1 - x_0)^k \right| \leq c$.

(б) $b = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$. Тогда $|f^{(k)}(x_0)| \leq ck!b^k$.

(с) Пусть $x \in B(x_0, \frac{1}{2b})$. $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-n)!} (x - x_0)^{k-n}$.

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(x_0)|}{(k-n)!} |x - x_0|^{k-n} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{ck!b^k}{(k-n)!} |x - x_0|^{k-n} = cb^n \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) (b|x - x_0|)^{k-n} = \\ &= cb^n \frac{n!}{(1 - b|x - x_0|)^{n+1}} \leq \frac{cb^n n!}{(\frac{1}{2})^{n+1}} = 2c(2b)^n n! \end{aligned}$$

2.12 Теорема Таубера

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum a_n x^n = A, \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Тогда $\sum a_n = A$.

Доказательство:

1. $\delta_n = \max_{k \geq n} |k \cdot a_k|$ (достигается, т.к. $\rightarrow 0$). $\delta_n \rightarrow 0$.
2. $\sum_{n=1}^N a_n - A = (\sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N a_n x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + (\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - A)$.
3. $|\sum_{n=1}^N a_n - A| \leq \sum_{n=1}^N |a_n| |1 - x^n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|na_n| x^n}{n} + |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - A|$ (3).
4. Неравенство Бернулли: $1 - x^n \leq n(1 - x)$.

$$(3) \leq N\delta_1(1 - x) + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - A| \quad (4).$$

5. $\epsilon > 0$. $N \rightarrow \infty$. x такое, что $(1 - x)N = \epsilon$.

(а) $\delta_{N+1} < \epsilon^2$ НСНМ.

(б) $|\sum a_n x^n - A| < \epsilon$ НСНМ.

$$\text{Тогда } (4) \leq \epsilon\delta_1 + \frac{\epsilon^2 N}{(N+1)\epsilon} + \epsilon \leq \epsilon(\delta_1 + 2).$$

2.13 Теорема Коши о перманентности метода средних арифметических

Если ряд сходится к S , то его сумма по методу средних арифметических равна S .

Доказательство:

1. $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N |S_n - S| < \epsilon$.
2. $|\sigma_n - S| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k - S \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |S_k - S|$ (2).
3. При $n > N$: $(2) < \frac{\sum_{k=0}^N |S_k - S|}{n+1} + \sum_{k=N+1}^n \frac{\epsilon}{n+1}$.

НСНМ это $< 2\epsilon$.

2.14 Преобразование Абеля степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ — частичные суммы, $|x| < \min(1, R)$

Доказательство:

1. Рассмотрим произведение $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot \frac{1}{1-x}$.
2. При $|x| < \min(1, R)$, $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot \frac{1}{1-x} = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$.
3. Поэтому $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$.

2.15 Теорема о связи суммируемости по Чезаро и по Абелю–Пуассону

Если сумма ряда по методу средних арифметических равна A , то и его сумма по методу Абеля равна A .

Доказательство:

1. $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n A_k$. $\sigma_n \rightarrow A$.
2. $\sum a_k$ сходится по Чезаро, поэтому $a_k = o(k)$:
 - (а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}) - (n\sigma_{n-1} - (n-1)\sigma_{n-2})}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)A - 2nA + (n-1)A}{n} = 0$.
3. $f(x) = \sum a_k x^k$ имеет радиус сходимости $R \geq 1$:
 - (а) $\overline{\lim} \sqrt[n]{o(n)} \leq 1$.
 - (б) $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{o(n)}} \geq 1$.
4. $\sum a_k x^k = (1-x) \sum A_k x^k = (1-x)^2 \sum (k+1) \sigma_k x^k$.
5. $(1-x)^2 \sum (k+1) x^k = 1$, значит, $(1-x)^2 \sum (k+1) A x^k = A$ ($\sigma_k \rightarrow A$).
6. $f(x) - A = (1-x)^2 \sum (k+1)(\sigma_k - A) x^k = (1-x)^2 \sum_{k=0}^N (k+1)(\sigma_k - A) x^k + (1-x)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - A) x^k$
 - (а) $N : |\sigma_k - A| < \epsilon$
 $|(1-x)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - A) x^k| \leq \epsilon$
 - (б) При $1 > x > x_0$, $|(1-x)^2 \sum_{k=0}^N (k+1)(\sigma_k - A) x^k| < \epsilon$
 - (с) Таким образом, при $x \rightarrow 1-0$ $f(x) \rightarrow A$.

2.16 Независимость частных производных от порядка дифференцирования

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(E)$

$a \in E$

Тогда $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$

Общий вид:

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^k(E)$

$a \in E$

i_1, \dots, i_k — набор индексов, $i_r \in \{1, \dots, m\}$

j_1, \dots, j_k — его перестановка

Тогда $\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} f(a) = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} f(a)$

Доказательство:

1. Пусть $\Delta^2 f(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$.
2. $\alpha(h) = \Delta^2 f(h, k)$ при фиксированном k .
 $\alpha(0) = 0$. $\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) = \alpha'(\bar{h})h$ (теорема Лагранжа по h)
 $= (f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0))h = f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk$ (теорема Лагранжа по k)
3. $\beta(k) = \Delta^2 f(h, k)$ при фиксированном h . Аналогично:
 $\beta(k) = f''_{yx}(x_0 + \bar{\bar{h}}, y_0 + \bar{\bar{k}})hk$
4. При фиксированных h и k : $f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk = f''_{yx}(x_0 + \bar{\bar{h}}, y_0 + \bar{\bar{k}})hk$
 При $(h, k) \rightarrow 0$, по непрерывности $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.
5. Про высшие порядки — простое следствие.

2.17 Полиномиальная формула

$$a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}_0$$

$$(a_1 + \dots + a_m)^r = \sum_{|j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Доказательство: Индукция по r . Взять и посчитать.

2.18 Лемма о дифференцировании «сдвига»

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, E открыто, $f \in C^r(E)$, $h \in \mathbb{R}^m$, $a \in E$

$\forall t \in (-\epsilon; \epsilon)$ $a + th \in E$, $\phi(t) = f(a + th)$

Тогда $\forall k \leq r$, $k \in \mathbb{N}$ $\phi^{(k)}(0) = \sum_{|i|=k} \frac{k!}{i!} h^i \frac{\partial^k f}{\partial x^i}(a)$

Доказательство: Индукция по k .

1. База: $k = 0$. $\phi(0) = f(a)$.

2. Шаг.

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{|i|=k} \frac{k!}{i!} h^i \frac{\partial^k f}{\partial x^i}(a + th) \right)'_t = \sum_{j=1}^m \sum_{|i|=k} \frac{k!}{i!} h^i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i \partial x_j}(a + th) h_j = \\ & = \sum_{j=1}^m \sum_{|i|=k+1, i_j \geq 1} \frac{k! i_j}{i!} h^i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i}(a + th) = \sum_{|i|=k+1} \frac{(k+1)!}{i!} h^i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i}(a + th) \end{aligned}$$

2.19 Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

$E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^{r+1}(E)$, $a \in E$, $x \in B(a) \subset E$

Тогда $\exists \theta \in (0; 1)$:

Лагранж:

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \theta(x - a))}{k!} (x - a)^k$$

Пеано:

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o(|x - a|^r)$$

Доказательство:

$$x = a + h, \phi(t) = f(a + th)$$

$$\phi(1) = \sum_{k=0}^r \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\phi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}$$

Применяем лемму о дифференцировании сдвига:

$$f(a+h) = \sum_{s=0}^r \sum_{|k|=s} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!} h^k$$

Остаток — $o(|h|^r)$.

2.20 Теорема о пространстве линейных отображений

1. В $\mathcal{L}_{m,n}$ $\|L\|$ — это норма.
2. $L \in \mathcal{L}_{m,n}$, $M \in \mathcal{L}_{n,p}$. Тогда $\|ML\| \leq \|L\| \cdot \|M\|$.

Доказательство:

1. По определению нормы
 - (a) $\|L\| \geq 0$, $\|L\| = 0 \Leftrightarrow L = 0$ — очевидно.
 - (b) $\|\lambda L\| = |\lambda| \cdot \|L\|$ — очевидно.
 - (c) $|(L_1 + L_2)x| \leq |L_1x| + |L_2x| \leq (\|L_1\| + \|L_2\|)|x|$
 $\sup_{|x|=1} |(L_1 + L_2)x| \leq \|L_1\| + \|L_2\|$
2. $|MLx| \leq \|M\| \cdot \|L\| \cdot |x|$
 $\sup_{|x|=1} |MLx| \leq \|M\| \cdot \|L\|$

2.21 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

X, Y — нормированные пространства. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. A ограничен ($\|A\|$ конечна)
2. A непрерывен в 0
3. A непрерывен в X
4. A равномерно непрерывен в X

Доказательство:

1. (4) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (2) — очевидно.
2. (2) \Rightarrow (1). A непрерывен в 0: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta \Rightarrow |Ax| < \epsilon$.
 $\epsilon = 1$. $\exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta \Rightarrow |Ax| < 1$.
Домножим x на $\frac{2}{\delta}$. $\forall x : |x| < \delta \Rightarrow |Ax| \leq \frac{2}{\delta}$. Норма ограничена.
3. 1 \Rightarrow 4. Определение равномерной непрерывности:
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta (= \frac{\epsilon}{\|A\|}) > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |Ax_1 - Ax_2| < \epsilon$.
Так и есть.

2.22 Теорема Лагранжа для отображений

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, E открыто, F дифференцируема на E .

$[a; b] \subset E$ ($[a; b] = \{a + (b - a)t \mid t \in [0; 1]\}$). Тогда $\exists c \in [a; b] : |F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| \cdot |b - a|$.

Доказательство:

$$\phi(t) = F(a + (b - a)t), \quad t \in [0, 1]. \quad \phi'(t) = F'(a + (b - a)t) \cdot (b - a).$$

Теорема Лагранжа: $\exists t \in [0, 1] : \phi(1) - \phi(0) = \phi'(t)$.

$$\exists c \in [a, b] : F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a).$$

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| \cdot |b - a|.$$

2.23 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

$L \in \Omega_m$ (обратимый линейный оператор $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$).

$$M \in \mathcal{L}_{m,m}, \quad \|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$$

Тогда:

1. M обратим
2. $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
3. $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\| \cdot \|L - M\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$

Доказательство:

1. (а) $A \in \mathcal{L}_{m,m}$. Если $\exists c > 0 : \forall x \quad |Ax| \geq c|x|$, то A обратим, и $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$.
 - i. Обратим, потому что $\text{Ker } A = \{0\}$.
 - ii. Ограничение на норму несложно выводится.
- (б) $|L^{-1}Lx| = |x| \Rightarrow \|L^{-1}\| \cdot |Lx| \geq |x| \Rightarrow |Lx| \geq \|L^{-1}\|^{-1}|x|$.
- (с) $Mx = Lx + (M - L)x$.

$$|Mx| \geq |Lx| - |(M - L)x| \geq |Lx| - \|M - L\| \cdot |x| \geq \|L^{-1}\|^{-1} \cdot |x| - \|M - L\| \cdot |x| = (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|)|x| = c|x|,$$

$$c > 0.$$

Значит, M обратим.
2. $|Mx| \geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) \cdot |x|$.

$$\|M^{-1}\| \leq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|)^{-1}.$$
3. $\|L^{-1} - M^{-1}\| = \|L^{-1}(M - L)M^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|M - L\| \cdot \|M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\| \cdot \|M - L\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|}.$

2.24 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $F' : E \rightarrow \mathcal{L}_{m,l}$

Следующие утверждения эквивалентны:

1. $F \in C^1(E)$ (все частные производные непрерывны).
2. F' непрерывно.

Доказательство:

1. (1) \Rightarrow (2)
 - (а) Фиксируем $a \in E$. $\|F'(a) - F'(b)\| \leq \sqrt{\sum (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b))^2}$
 - (б) Доказать: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall b : |a - b| < \delta \Rightarrow \|F'(a) - F'(b)\| < \epsilon$.

$$\delta : \forall b \in B(a, \delta), i, j \quad |\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{ml}} - \text{существует по непрерывности частных производных.}$$

2. (2) \Rightarrow (1)

$$|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b)| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^l (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b))^2} = |(F'(a) - F'(b)) \cdot (0 \dots 1 \dots 0)| \leq \|F'(a) - F'(b)\|$$

2.25 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

1. Q — положительно определённая квадратичная форма в \mathbb{R}^m .

Тогда $\exists c_Q > 0 : \forall h |Qh| \geq c_Q |h|^2$

2. $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — норма.

Тогда $\exists c_1, c_2 > 0 : \forall x \ c_1 |x| \leq p(x) \leq c_2 |x|$

Доказательство:

1. $S(0, 1)$ — единичная сфера, компакт. Q достигает минимума на S . c_Q — этот минимум.

2. (а) Докажем непрерывность $p(x)$ (e^k — базисные векторы):

$$p(x - y) = p(\sum_{k=1}^m (x_k - y_k) e^k) \leq \sum_{k=1}^m |x_k - y_k| p(e^k) \leq \sqrt{(\sum |x_k - y_k|^2)(\sum p_k^2)} = M |x - y|.$$

Применяется неравенство Коши-Буняковского.

(б) $p(x)$ непрерывна: $c_1 = \min_{x \in S(0,1)} p(x)$, $c_2 = \max_{x \in S(0,1)} p(x)$.

2.26 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

2.26.1 Теорема Ферма

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(E)$ — точка экстремума.

f дифференцируема в x_0 . Тогда $\forall l \in \mathbb{R}^m, |l| = 1 \ \frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = 0$

Доказательство:

$$\phi(t) = f(x_0 + tl). \ \frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \phi'(0).$$

$\phi'(0)$, так как это экстремум.

2.26.2 Необходимое условие экстремума

В условиях теоремы Ферма: все частные производные f в x_0 равны 0.

Доказательство:

Из теоремы Ферма: частные производные — это производные по направлениям координатных осей.

2.26.3 Теорема Ролля

$f : K \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. K — компакт, f непрерывна на K , дифференцируема на $\text{Int}(K)$.

f постоянна на границе K . Тогда $\exists x_0 \in \text{Int}(K) : \text{grad } f(x_0) = 0$.

Доказательство:

Функция достигает минимума и максимума на компакте. В этих точках $\text{grad} = 0$.

2.27 Достаточное условие экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(E)$.

$x_0 \in \text{Int}(E)$. $\text{grad } f(x_0) = 0$. $Q(h) = d^2 f(x_0)(h)$.

Тогда:

1. Если Q положительно определённая, то x_0 — локальный минимум.

2. Если Q отрицательно определённая, то x_0 — локальный максимум.

3. Если Q не знакоопределённая, то x_0 — не экстремум.

Доказательство:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0, h) + o(|h|^2) = \frac{1}{2}Q(h) + o(|h|^2).$$

1. При $h \neq 0$ $Q(h) > 0$. $Q(h) \geq c_Q|h|^2$. $\frac{1}{2}c_Q|h|^2 + o(|h|^2) > 0$ в некоторой окрестности.

2. Аналогично.

3. $h_1, h_2 : Q(h_1) > 0, Q(h_2) < 0$. $k \rightarrow 0$. $Q(kh_1) = k^2Q(h_1)$. $\frac{1}{2}k^2Q(h_1) + o(|h|^2) > 0$ в некоторой окрестности.

Аналогично с h_2 .

2.28 Лемма о «почти локальной инъективности»

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — дифференцируемо в $x_0 \in E$.

E — открытое.

$$\det F'(x_0) \neq 0$$

Тогда $\exists c, \delta > 0 : \forall h, |h| < \delta \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c|h|$.

Доказательство:

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + o(h)| \geq |F'(x_0)h| - |o(h)| \geq c|h| + o(|h|) > \frac{c}{2} \quad (\text{в некоторой окрестности}).$$

2.29 Теорема о сохранении области

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, E открыто.

F дифференцируемо в E , $\forall x \in E \quad \det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(E)$ открыто.

Доказательство:

1. $x_0 \in E$, $y_0 = F(x_0)$. Проверим, что y_0 — внутренняя точка $F(E)$.

2. По лемме: $\exists c, \delta > 0 : \forall h : |h| \leq \delta, \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c|h|$.

$x = x_0 + h$. При $x \in S(x_0, \delta)$ $F(x) \neq F(x_0)$.

3. $r = \frac{1}{2} \text{dist}(y_0, F(S(x_0, \delta)))$. Проверить: $B(y_0, r) \subset F(E)$.

4. Фиксируем $y \in B(y_0, r)$. $g(x) = |F(x) - y|^2$, $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$. Минимум g достигается в этом шаре:

При $x \in S(x_0, \delta)$ $g(x) \geq r^2$. При $x = x_0$ $g(x_0) = |y_0 - y|^2 < r^2$.

5. $g(x) = (f_1(x) - y_1)^2 + \dots + (f_m(x) - y_m)^2$. Пусть в точке x достигается минимум, там производные равны 0:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = 2((f_1(x) - y_1) \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + (f_m(x) - y_m) \frac{\partial f_m}{\partial x_1}) \\ \vdots \\ 0 = \frac{\partial g}{\partial x_m} = 2((f_1(x) - y_1) \frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \dots + (f_m(x) - y_m) \frac{\partial f_m}{\partial x_m}) \end{cases}$$

Система от переменных $(f_i(x) - y_i)$. Матрица невырождена (это $F'(x)$). Значит, решение только при $f_i(x) - y_i = 0$ при всех i .

2.30 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

$F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $l < m$, E открыто, $F \in C^1(E)$.

$\forall x \text{ rank } F'(x) = l$.

Тогда $F(E)$ открыто.

Доказательство:

1. $x_0 \in E$, $y_0 = F(x_0)$. $\text{rank } F'(x_0) = l$. Пусть он реализуется на первых l столбцах.
2. $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1\dots l} \neq 0$ в $U(x_0)$.
3. Пусть $\tilde{F}(x) = (f_1, \dots, f_l, x_{l+1}, \dots, x_m)$ ($E \rightarrow \mathbb{R}^m$).
 $\det \tilde{F} = \det F \neq 0$. $\tilde{F}(U(x_0))$ открыто в \mathbb{R}^m , а $F(U(x_0))$ — проекция на \mathbb{R}^l .

2.31 Теорема о диффеоморфизме

$T \in C^r(E \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ($r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

T обратимо, невырождено. Тогда:

1. $T^{-1} \in C^r$
2. $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$ ($T(x_0) = y_0$)

Доказательство:

Индукция по r .

1. База: $r = 1$.
 - (a) $S = T^{-1}$. S непрерывно по теореме о сохранении области (топологическое определение непрерывности).
 - (b) $A = T'(x_0)$. По лемме, $\exists c, \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) |T(x) - T(x_0)| \geq c|x - x_0|$.
 $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)|x - x_0|$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$).
 - (c) $y - y_0 = A(S(y) - S(y_0)) + \alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|$.
 $S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|$
 - (d) При $S(y) - S(y_0) < \delta$: $A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)| \leq \|A^{-1}\| \cdot |\alpha(S(y))| \cdot \frac{1}{c}|y - y_0| = o(|y - y_0|)$.
 - (e) Значит, $S'(y_0) = A^{-1}$. Гладкость: S' непрерывна, так как $S'(y) = T'(S(y))^{-1}$.
2. (Кохась сказал, что это не нужно) Шаг: $S'(y) = T'(S(y))^{-1}$. $S \in C^{r-1}$ по индукционному предположению.
Если $T \in C^r$, то $T' \in C^{r-1}$, $T'^{-1} \in C^{r-1}$, $S \in C^r$.

2.32 Теорема о неявном отображении

$F : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, E открыто, $F \in C^r$.

$(a, b) \in E$ ($a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$), $F(a, b) = 0$, $\det F'_b(a, b) \neq 0$.

Тогда

$$\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m, V(b) \subset \mathbb{R}^n : \exists ! \phi : U \rightarrow V \in C^r : \forall x \in U F(x, \phi(x)) = 0$$

При этом

$$\phi' = -(F'_y(x, \phi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \phi(x))$$

Доказательство:

1. $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$. $\Phi(x, y) = (x, F(x, y))$.

$$\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}. \det \Phi = \det F'_y. \det \Phi'(a, b) \neq 0$$

2. По теореме о локальной обратимости, $\exists U(a, b) (= P(a) \times Q(b)) : \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ — диффеоморфизм. $V = \Phi(U)$ — открытое.

3. $\Psi : V \rightarrow U = \Phi^{-1}$. $\Phi(x, y) = (x, F(x, y))$. $\Psi(u, v) = (u, H(u, v))$ ($H : V \rightarrow Q$).

4. $\phi(x) = H(x, 0_n)$. $F(x, \phi(x)) = F(x, H(x, 0_n))$. $\Phi(x, H(x, 0_n)) = (x, 0) \Rightarrow F(x, \phi(x)) = 0$.

5. Единственность. $(x, y) \in U$. $F(x, y) = 0$. $(x, y) = \Psi(\Phi(x, y)) = \Psi(x, F(x, y)) = \Psi(x, 0) = (x, \phi(x))$.

6. Формула. $F(x, \phi(x)) = 0$.

$$F'_x + F'_y \phi'(x) = 0.$$

$$\phi' = -(F'_y)^{-1} F'_x.$$

2.33 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

$M \subset \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $1 \leq k \leq m$.

$\forall p \in M$ эквивалентно:

1. $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$: $M \cap U(p)$ — простое k -мерное C^r гладкое многообразие.
2. $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$, $f_1, \dots, f_{m-k} : U \rightarrow \mathbb{R} \in C^r : \forall x \in U(p) \cap M \Leftrightarrow \forall i f_i(x) = 0$

Доказательство:

1. (1) \Rightarrow (2)

(a) Параметризация: $\Phi : E \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^r$, $\Phi(t^0) = p$, $\text{rank } \Phi'(t) = k$ ($t \in E$).

(b) Пусть $\det(\frac{\partial \Phi_j}{\partial t_i})_{i,j=1\dots k} \neq 0$ при $t = t^0$.

$L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ — проекция ($L(x, y) = x$). $L \circ \Phi(t)$ — невырожденное.

(c) $\exists W(t_0)$ такое, что $L \circ \Phi : W(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^k$ — обратимо.

$\Psi : V \rightarrow W = (L \circ \Phi)^{-1}$. $V = (L \circ \Phi)(W)$.

(d) $\Phi : W \rightarrow M$ — гомеоморфизм. $\Phi(W)$ — открыто в M . Тогда $\exists U \subset (V \times \mathbb{R}^{m-k})$ — открытое, $U \cap M = \Phi(W)$.

(e) $L : \Phi(W) \rightarrow V$ — биекция. Поэтому $\exists H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$, $\forall x \in V$ $(x, H(x)) \in M$. $(x, H(x)) = \Phi(\Psi(x)) \in C^r$.

(f) Построим f_1, \dots, f_{m-k} :

$$f_i(x_1, \dots, x_m) = h_i(x_1, \dots, x_k) - x_{k+i}.$$

(g) $\text{rank } F' = k$, потому что $F' = (H' \quad -E)$.

2. (2) \Rightarrow (1)

Это просто теорема о неявном отображении.

2.34 Следствие о двух параметризациях

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k -мерное C^r — гладкое многообразие.

$p \in M$, $U(p)$ — окрестность p в \mathbb{R}^m .

$\Phi_1 : E_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M$, $\Phi_2 : E_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p) \cap M$ — две C^r — параметризации M .

Тогда $\exists \Psi : E_1 \rightarrow E_2$ — диффеоморфизм, $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

Доказательство:

1. $\Psi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ — обратимое отображение. Осталось доказать дифференцируемость и невырожденность.
2. Докажем это в точке $t_2 \in E_2$. Как и в доказательстве теоремы о задании гладкого многообразия системой уравнений, $\exists W_2(t_2)$ — окрестность t_2 , L — проекция $\Phi_2(W_2)$ на $V \subset \mathbb{R}^k$.
3. $W_1 = \Psi^{-1}(W_2)$ — окрестность $t_1 = \Psi^{-1}(t_2)$. $(L \circ \Phi_i) : E_i \rightarrow V$ — непрерывные биекции.
4. $\Psi = \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1}}_{\text{диффеоморфизм}} \circ \underbrace{(L \circ \Phi_1)}_{\text{дифференцируемо}}.$
5. Ψ дифференцируемо, докажем невырожденность. $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$. $\Phi'_1 = \Phi'_2 \Psi'$. $\text{rank } \Phi'_1 = \text{rank } \Phi'_2 = k$, поэтому и $\text{rank } \Psi' = k$.

2.35 Необходимое условие относительного локального экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f, \Phi \in C^1$.

$a \in E$, $\Phi(a) = 0$ — точка относительного локального экстремума f .

$\text{rank } \Phi'(a) = n$.

Тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n : f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0$

Доказательство:

1. $\text{rank } \Phi'(a) = n$ — пусть реализуется на последних n столбцах.
2. $a = (x, y)$. $\exists P(x) \subset \mathbb{R}^m, Q(y) \subset \mathbb{R}^n, \phi : P \rightarrow Q : \Phi(x, \phi(x)) = 0$ — параметризация многообразия.
3. $g : P \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x, \phi(x))$.
4. $(x, \phi(x)) = a$. Тогда, поскольку это экстремум, $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = f(x, \phi(x))'_x = f'_x + f'_y \phi' = 0$$
5. $\Phi(x, \phi(x)) = 0$

$$\Phi'_x + \Phi'_y \phi' = 0.$$
 Возьмём $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

$$f'_x - \lambda \Phi'_x + (f'_y - \lambda \Phi'_y) \phi' = 0$$
6. Подберём такое λ , что второе слагаемое равно 0 (это можно сделать, так как Φ'_y невырожденное).

$$f'_x - \lambda \Phi'_x = 0, \text{ всё получается.}$$

2.36 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

$A \in \mathcal{L}_{m,n}$. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — собственные числа $A^T A$.

Тогда $\|A\| = \max \sqrt{\lambda_i}$.

Доказательство:

1. $|Ax|^2 = \sum_{k=1}^n (\sum_{i=1}^m a_{ki} x_i)^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ki} a_{kj} x_i x_j = \sum_{i=1}^m (\sum_{k=1}^n a_{ki} (\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j)) x_i = \langle A^T A x, x \rangle.$
2. $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x|=1} \sqrt{\langle A^T A x, x \rangle}.$
3. $B_{[n \times n]} = A^T A$ — симметричная. Все собственные числа вещественны.
4. $\sup_{|x|=1} \langle Bx, x \rangle$. Метод множителей Лагранжа:

$$G(x) = \langle Bx, x \rangle - \lambda(x^2 - 1) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} x_i x_k - \lambda(x^2 - 1). \lambda \in \mathbb{R}. G'(x) = 0.$$

$$\begin{cases} 2(\sum_{i=1}^n b_{1i}x_i - \lambda x_1) = 0 \\ \vdots \\ 2(\sum_{i=1}^n b_{ni}x_i - \lambda x_n) = 0 \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Bx - \lambda x = 0 \\ x \in S(0, 1) \end{cases}$$

5. Таким образом, максимум может достигаться только если x — собственный вектор, максимум равен собственному числу.

6. $\|A\| = \sqrt{\langle A^T A x, x \rangle} = \max \sqrt{\lambda_i}.$

2.37 Лемма о корректности определения касательного пространства

M — k -мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^m , $p \in M$. Касательное пространство к M в точке p не зависит от выбора параметризации.

Доказательство:

Пусть Φ_1, Φ_2 — параметризации. По теореме о двух параметризациях, $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$.

$$\Phi_1(t_1) = \Phi_2(t_2) = p. \quad \Phi'_1 = \Phi'_2 \Psi'.$$

$$\Phi'_1(\mathbb{R}^k) = (\Phi'_2 \Psi')(\mathbb{R}^k) = \Phi'_2(\mathbb{R}^k).$$

Таким образом, касательные пространства, порождённые двумя параметризациями, совпадают.

2.38 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

M — k -мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^m , $p \in M$, $v \in \mathbb{R}^m$.

$v \in T_p(M)$ тогда и только тогда, когда \exists путь $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M$ такой, что $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = v$.

Доказательство:

$\Phi : E \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ — параметризация. $\Phi(t_0) = p$.

1. \Leftarrow

(a) Пусть $\phi(t) = \Phi^{-1}(\gamma(t))$ — соответствующий путь в E .

(b) Путь гладкий, так как, в терминах доказательства теоремы о задании многообразия системой уравнений, $\Phi^{-1} = \Psi \circ L$ — гладкое отображение.

(c) $\gamma'(t) = \Phi(\phi(t))' = \Phi'(\phi(t)) \cdot \phi'(t).$
 $\gamma'(0) \in T_p(M).$

2. \Rightarrow

(a) $v \in T_p(M) \Rightarrow \exists w \in \mathbb{R}^k : \Phi'(t_0)w = v.$

(b) Рассмотрим путь $\gamma(t) = \Phi(t_0 + wt).$
 $\gamma'(0) = \Phi'(t_0)w$, что и требовалось.

2.39 Теорема о функциональной зависимости

$f_1, \dots, f_n : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$, $F = (f_1, \dots, f_n).$

$\text{rank } F'(x) \leq k$ при $x \in E$, $\text{rank } F'(x_0) = k$, реализуется на $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1\dots k}.$

$y_0 = F(x_0).$

Тогда $\exists U(x_0), V(y_0), g_{k+1}, \dots, g_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $\forall i \in \{k+1, \dots, n\}, x \in U(x_0) \quad f_i(x) = g_i(f_1(x), \dots, f_k(x)).$

Доказательство:

1. Обозначение: $x = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = (\bar{x}, \bar{\bar{x}})$.
2. $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^m$. $\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_m)$.
 $\det \Phi'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists U(x_0): \Phi$ на $U(x_0)$ — диффеоморфизм (теорема о локальной обратимости).
3. $\tilde{F} = F \circ \Phi^{-1}$. $\tilde{F}(w) = (\bar{w}, \Theta(w))$.
 $\text{rank } \tilde{F}' = \text{rank } (F'(\Phi^{-1})') = \text{rank } F' \leq k$ (потому что Φ^{-1} невырождено).
4. $w_0 = \Phi(x_0)$. $\tilde{F}'(w_0) = \begin{pmatrix} E_{[k \times k]} & 0 \\ \Theta'_{\bar{w}}(w_0) & \Theta'_{\bar{\bar{w}}}(w_0) \end{pmatrix}$.
5. Ранг $\tilde{F}'(w_0)$ не больше k , и он достигается на $E_{[k \times k]}$. Значит, $\Theta'_{\bar{w}}(w_0) = 0$, и Θ — функция только от \bar{w} .
 $\tilde{F}(w) = (\bar{w}, \Theta(\bar{w}))$ — тоже функция только от \bar{w} .
6. $F = \bar{F} \circ \Phi$. $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), \Theta(f_1(x), \dots, f_k(x)))$. Тогда $g_{k+i} = \Theta_i$.

2.40 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

V — векторное поле на E , $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ — путь.

1. Линейность по V .
2. Аддитивность при дроблении промежутка.
3. $\phi : [p, q] \rightarrow [a, b]$, $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$, $\phi(p) = a$, $\phi(q) = b$. Тогда интегралы по γ и γ_1 равны.
4. Интеграл по обратному пути равен минус интегралу по прямому.
5. $|I(V, \gamma)| \leq \max_{t \in [a, b]} |V(\gamma(t))| \cdot \text{len}(\gamma)$.

Доказательство:

1. Очевидно.
2. Очевидно.
3. $\int_p^q \langle V(\gamma(\phi(t))), \gamma(\phi(t))' \rangle dt = \int_p^q \langle V(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\psi(t)) \rangle \psi'(t) dt = \int_a^b \langle V(\gamma(t_1)), \gamma'(t_1) \rangle dt_1$.
4. $\int_a^b \langle V(\gamma(a+b-t)), \gamma(a+b-t)' \rangle dt = \int_a^b \langle V(\gamma(a+b-t)), \gamma'(a+b-t) \rangle \cdot (-1) dt = - \int_a^b \langle V(\gamma(t_1)), \gamma'(t_1) \rangle dt_1$
5. $|\int_a^b \langle V, \gamma' \rangle dt| \leq \int_a^b |\langle V, \gamma' \rangle| dt \leq \int_a^b |V| \cdot |\gamma'| dt \leq \max_{t \in [a, b]} |V(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'| dt = \max_{t \in [a, b]} |V(\gamma(t))| \cdot \text{len}(\gamma)$.

2.41 Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

$V : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — потенциальное векторное поле. f — потенциал.

$\gamma : [a, b] \rightarrow E$ — кусочно-гладкий путь. Тогда $I(V, \gamma) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Доказательство:

Пусть γ гладкий (иначе — по кусочкам).

$$\int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m f'_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt = \int_a^b f_i(\gamma(t))'_t dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

2.42 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

$V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Эквивалентно:

1. V — потенциальное.
2. $\forall a, b \in E$ интеграл по пути из a в b не зависит от пути.
3. Интеграл по любой кусочно-гладкой петле равен 0.

Доказательство:

1. (1) \Rightarrow (2): по обобщённой формуле Ньютона-Лейбница.
2. (2) \Rightarrow (3): интеграл по любой петле из точки a равен интегралу по постоянному пути в точке a , а он равен 0.
3. (3) \Rightarrow (2):
 - (a) $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow E$, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.
 - (b) Рассмотрим петлю: сначала γ_1 , потом обратный к γ_2 .

$$I(V, \gamma_1) + I(V, rev(\gamma_2)) = 0 \Rightarrow I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2).$$
4. (2) \Rightarrow (1):
 - (a) $x_0 \in E$. $f(x) = I(V, \gamma)$, где γ — любой путь из x_0 в x . Докажем, что f — потенциал.
 - (b) $f'_1(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+e_1 h) - f(x)}{h}$.
 - (c) $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$. $\gamma(t) = x + e_1 h t$.

$$f(x + e_1 h) - f(x) = I(V, \gamma) = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = h \int_0^1 V_1(x + t e_1) dt = h V_1(x + c e_1) \quad (c \in [0, 1] \text{ — теорема о среднем значении}).$$
 - (d) При $h \rightarrow 0$ $ch \rightarrow 0$, $\frac{f(x+e_1 h) - f(x)}{h} = V_1(x + c e_1) \rightarrow V_1(x)$.
 - (e) То же самое для всех остальных координат.

2.43 Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

2.43.1 Необходимое условие потенциальности гладкого поля

$V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое векторное поле, потенциальное.

Тогда $\forall x \in E$ матрица $V'(x)$ симметрична:

$$\forall i, k \in \{1, \dots, m\} \quad \frac{\partial V_i}{\partial V_k} = \frac{\partial V_k}{\partial V_i} \quad (*).$$

Доказательство:

$$f \text{ — потенциал. } V_i = f'_i. (V_i)'_k = (f'_i)'_k = f''_{ik} = (V_k)'_i.$$

2.43.2 Лемма Пуанкаре

$V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, E — выпуклая область. V — гладкое, удовлетворяет условию (*) из необходимого условия потенциальности.

Тогда V потенциально.

Доказательство:

1. $a \in E$. Пусть $f(x) = I(V, \gamma_x)$, где $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow E$, $\gamma(t) = a + t(x - a)$ — прямой путь из a в x . Докажем, что f — потенциал.
2. $\gamma' = x - a$

$$3. f(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(a + t(x-a))(x_k - a_k) dt.$$

4.

$$f'_{x_j} = \int_0^1 V_j(a+t(x-a)) dt + \int_0^1 \sum_{k=1}^m \underbrace{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}}_{\frac{\partial V_j}{\partial x_k}}(a+t(x-a)) \cdot t \cdot (x_k - a_k) dt = \int_0^1 (t V_j(a+t(x-a)))'_t dt = 1 \cdot V_j(x) - 0 \cdot V_j(a) = V_j(x)$$

2.44 Лемма о гусенице

$\gamma : [a, b] \rightarrow E \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывный путь в области.

\exists дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и шары $B_1, \dots, B_n \subset E$, такие что $\forall i \ \gamma[t_{i-1}, t_i] \subset B_i$.

На шары B_i можно накладывать ограничения: чтобы заданное локально потенциальное поле V было потенциальным в них.

Доказательство:

1. Для каждого $t \in [a, b]$ возьмём подходящий шар $B_t = B(\gamma(t), r_t)$.

2. $\alpha_t = \inf\{s \in [a, t] : \gamma([s, t]) \subset B_t\}$.

$\beta_t = \sup\{s \in [t, b] : \gamma([t, s]) \subset B_t\}$.

Пусть $\alpha_t < \tilde{\alpha}_t < t < \tilde{\beta}_t < \beta_t$. Тогда $\gamma((\tilde{\alpha}_t, \tilde{\beta}_t)) \in B_t$.

В $t = a$: $[a, \tilde{\beta}_a]$. В $t = b$: $(\tilde{\alpha}_b, b]$.

3. $[a, b]$ покрыт такими интервалами. Поскольку $[a, b]$ — компакт, существует конечное подпокрытие. Уберём вложенные интервалы. Получили покрытие интервалами $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1), \dots, (\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)$ и соответствующее покрытие шарами.

4. $t_0 = a, t_n = b, i \in 1, \dots, n-1, t_i \in (\tilde{\alpha}_{i-1}, \tilde{\beta}_{i-1}) \cap (\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i)$.

2.45 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

V — локально потенциальное векторное поле на E .

$\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow E$ — пути с совпадающими концами, V -похожие, кусочно-гладкие.

Тогда интегралы по ним равны.

Доказательство:

1. Рассмотрим общую V -гусеницу. В шаре B_i определён потенциал ϕ_i . Пусть они определены так, что на пересечении шаров B_i и B_{i-1} потенциалы ϕ_i и ϕ_{i-1} совпадают.

2. Рассмотрим дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, такое что $\forall i \in 1, \dots, n-1 \ \gamma_1(t_i) \in B_i \cap B_{i+1}$.

3. $I(V, \gamma_1) = \sum_{i=1}^n I(V, \gamma_1|_{[t_{i-1}, t_i]}) = \sum_{i=1}^n (\phi_i(\gamma_1(t_i)) - \phi_i(\gamma_1(t_{i-1}))) = \phi_n(\gamma_1(b)) - \phi_1(\gamma_1(a))$.

4. То же самое для γ_2 . Значит, они равны.

2.46 Лемма о похожести путей, близких к данному

$\gamma : [a, b] \rightarrow E$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall \gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow E$, такие что $\forall t \in [a, b] \ |\gamma_i(t) - \gamma(t)| < \delta$ γ_1 и γ_2 похожи.

Доказательство:

Нужно взять такое δ , что δ -окрестность γ на $[t_{i-1}, t_i]$ помещается в B_i для всех i .

2.47 Равенство интегралов по гомотопным путям

V — локально потенциальное векторное поле на E .

$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow E$ — связанным гомотопные пути в E .

Тогда интегралы по ним равны.

Доказательство:

1. $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow E$ — гомотопия. $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$.
2. $\Phi(s) = I(V, \gamma_s)$.
3. Γ непрерывна, $[a, b] \times [0, 1]$ — компакт, поэтому Γ равномерно непрерывна.
4. Рассмотрим γ_s . По лемме, $\exists \delta_s > 0$ такая, что любой путь $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow E$, $\forall t |\bar{\gamma}(t) - \gamma_s(t)| < \delta_s$ — похож на γ_s .
 Γ равномерно непрерывно: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall s_1, s_2, |s_1 - s_2| < \delta |\Gamma(t, s_1) - \Gamma(t, s_2)| < \epsilon$.
 Подставим $\epsilon = \delta_s$: $\exists \delta > 0 : \forall s_1, |s_1 - s| < \delta |\Gamma(t, s_1) - \Gamma(t, s)| < \delta_s$.
5. $\forall s_1 \in (s - \delta, s + \delta) \cap [0, 1]$ γ_{s_1} похож на γ_s , поэтому Φ постоянна в окрестности s .
6. $\forall s \in [0, 1]$ Φ постоянна в окрестности s . Поэтому Φ — константа, и $\Phi(0) = \Phi(1)$.

2.48 Теорема о резиночке

Область $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ не является односвязной.

Доказательство:

1. Рассмотрим векторное поле $V(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.
 $(V_1)'_y = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
 $(V_2)'_x = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
 $(V_1)'_y = (V_2)'_x$, поэтому V локально потенциальное.
2. Рассмотрим замкнутый путь $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow E$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
 $I(V, \gamma) = \int_0^{2\pi} (\frac{-\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}(-\sin(t)) + \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\cos(t))dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))dt = 2\pi \neq 0$.
3. Интеграл по замкнутому пути не равен 0, поэтому поле не потенциально. При этом поле локально потенциально, поэтому по теореме Пуанкаре для односвязной области E не односвязна.

2.49 Теорема Пуанкаре для односвязной области

E — односвязная область в \mathbb{R}^m , V — локально потенциальное векторное поле в E .

Тогда V потенциально.

Доказательство:

1. γ — петля в E . Область односвязна, поэтому она гомеоморфна точке, поэтому интеграл по ней 0.
2. Интеграл по любой петле 0, поэтому поле потенциально.

2.50 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

$v : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда:

1. Усиленная монотонность. $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{P}$, дизъюнкты, $\bigcup A_i \subset B \in \mathbb{P}$. Тогда $\sum v(A_i) \leq v(B)$.
2. Конечная полуаддитивность. $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{P}$, $A \subset \bigcup A_i$, $A \in \mathbb{P}$. Тогда $v(A) \leq \sum v(A_i)$.
3. $A, B, A \setminus B \in \mathbb{P}$, $v(B) < +\infty$. Тогда $v(A \setminus B) \geq v(A) - v(B)$

Доказательство:

1. (a) Докажем для конечного набора. $B \setminus \bigcup A_k = \bigcup_{i=1}^N C_i$ ($C_i \in \mathbb{P}$, дизъюнкты). Это нетрудно выводится из определения полукольца.
 (b) $B = (\bigcup A_i) \cup (\bigcup C_i)$. По аддитивности, $v(B) \geq \sum v(A_i)$.
 (c) Устремляем n к ∞ : $\forall k \ v(B) \geq \sum_{i=1}^k v(A_i) \Rightarrow v(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} v(A_i)$.
2. (a) Пусть $B_i = A_i \cap A$.
 (b) $C_1 = B_1$, $C_{i+1} = B_{i+1} \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_i)$, $\forall i \ C_i = \bigsqcup_{j=1}^{N_i} D_{ij} \in \mathbb{P}$, $C_i \subset A_i$.
 (c) $A = \bigsqcup_{i,j} D_{ij} \Rightarrow v(A) = \sum v(D_{ij}) = \sum_{i=1}^n v(C_i) \leq \sum_{i=1}^n v(A_i)$.
3. $v(A \setminus B) = v(A) - v(A \cap B) \geq v(A) - v(B)$.

2.51 Теорема об эквивалентности счётной аддитивности и счётной полуаддитивности

$v : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны:

1. v — мера.
2. v удовлетворяет свойству счётной полуаддитивности: $A, A_1, A_2, \dots \in \mathbb{P}$, $A \subset \bigcup A_i$. Тогда $v(A) \leq \sum v(A_i)$.

Доказательство:

1. (1) \Rightarrow (2): совпадает с доказательством конечной полуаддитивности объёма.
 (a) Пусть $B_i = A_i \cap A$.
 (b) $C_1 = B_1$, $C_{i+1} = B_{i+1} \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_i)$, $\forall i \ C_i = \bigsqcup_{j=1}^{N_i} D_{ij} \in \mathbb{P}$, $C_i \subset A_i$.
 (c) $A = \bigsqcup_{i,j} D_{ij} \Rightarrow v(A) = \sum v(D_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} v(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(A_i)$.
2. (2) \Rightarrow (1).
 (a) Докажем счётную аддитивность: $A, A_1, A_2, \dots \in \mathbb{P}$, $A = \bigsqcup A_i$.
 (b) $v(A) \leq \sum v(A_i)$ по счётной полуаддитивности.
 (c) $v(A) \geq \sum v(A_i)$ по усиленной монотонности объёма.

2.52 Теорема о непрерывности снизу

\mathbb{A} — алгебра подмножеств X , μ — объём на \mathbb{A} . Тогда эквивалентно:

1. μ — мера.
2. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$, $\forall k \ A_k \subset A_{k+1}$, $A = \bigcup A_k \in \mathbb{A}$, то $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Доказательство:

1. (1) \Rightarrow (2):
 (a) $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_i = A_i \setminus A_{i-1}, \dots$. Все $B_i \in \mathbb{A}$.

$$(b) \ A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

$$(c) \ \mu(A_k) = \sum_{i=1}^k \mu(B_i) - \text{частичные суммы, поэтому } \mu(A_k) \rightarrow \mu(A).$$

2. (2) \Rightarrow (1):

$$(a) \ C, C_1, C_2, \dots \in \mathbb{A}, C = \bigsqcup C_i. \text{ Доказать: } \mu(C) = \sum \mu(C_i).$$

$$(b) \ \text{Пусть } D_1 = C_1, D_2 = C_1 \sqcup C_2, \dots, D_i = \bigsqcup_{j=1}^i C_j. D_i \in \mathbb{A}, \mu(D_i) = \sum_{j=1}^i \mu(C_j).$$

$$(c) \ D_i \subset D_{i+1}, \bigcup D_i = C. \text{ По непрерывности снизу: } \mu(D_n) \rightarrow \mu(C).$$

$$\sum_{i=1}^n \mu(C_i) \rightarrow \mu(C).$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = \mu(C).$$

2.53 Счетная аддитивность классического объема

Если $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots \in \mathbb{P}_n$ (ячейки), Δ_i дизъюнкты, $\Delta = \bigcup \Delta_i$, то $v(\Delta) = \sum v(\Delta_i)$.

Доказательство:

$$1. \ \Delta = [a, b], \Delta_i = [a_i, b_i].$$

$$2. \ [a, \tilde{b}] \subset [a, b], \text{ vol}[a, \tilde{b}] \geq \mu[a, b] - \epsilon.$$

$$3. \ \text{Пусть для каждого } \Delta_i: (\tilde{a}_i, b_i) \supset [a_i, b_i], \text{ vol}(\tilde{a}_i, b_i) \leq \mu[a_i, b_i] + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

$$4. \ [a, \tilde{b}] - \text{компакт, покрытый открытыми множествами } (\tilde{a}_i, b_i). \text{ Существует конечное подпокрытие } [a, \tilde{b}] \subset \bigcup_{k=1}^n (\tilde{a}_{i_k}, b_{i_k}).$$

$$5. \ [a, \tilde{b}] \subset \bigcup_{k=1}^n [\tilde{a}_{i_k}, b_{i_k}]. \text{ По конечной полуаддитивности объёма, } \underbrace{\mu[a, \tilde{b}]}_{\geq \mu[a, b] - \epsilon} \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{\mu[\tilde{a}_{i_k}, b_{i_k}]}_{\leq \mu[a_{i_k}, b_{i_k}] + \frac{\epsilon}{2^{i_k}}}.$$

$$6. \ \mu[a, b] - \epsilon \leq \sum_{k=1}^n \mu[a_{i_k}, b_{i_k}] + \frac{\epsilon}{2^{i_k}} < \sum_{k=1}^n \mu[a_{i_k}, b_{i_k}] + \epsilon.$$

$$7. \ \mu[a, b] - 2\epsilon \leq \sum_{k=1}^n \mu[a_{i_k}, b_{i_k}] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu[a_i, b_i].$$

8. Устремляем ϵ к 0, получаем счётную полуаддитивность.

9. Из счётной полуаддитивности объёма следует счётная аддитивность по теореме об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности.

2.54 Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

Рациональный куб — такая ячейка $[a, b]$, что все a_k и b_k рациональны и все $b_k - a_k$ равны.

1. $E \subset \mathbb{R}^m$ — открытое. Тогда E представимо в виде $E = \bigsqcup Q_i$ — не более чем счётное количество рациональных кубов, замыкание каждого из которых содержится в E .

2. $E \in \mathfrak{M}^m, \lambda_m(E) = 0$. Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists Q_1, Q_2, \dots$ — рациональные кубы, $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) < \epsilon$.

Доказательство:

1. (a) Для каждого x из E выберем \tilde{Q}_x — подходящий под условие рациональный куб, содержащий x .

(b) Всего рациональных кубов счётное число, поэтому E покрывается $\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{Q}_i$.

(c) Сделаем объединение дизъюнктым. $Q_{1,1} = \tilde{Q}_1$,

$$\text{далее } \tilde{Q}_i \setminus (\tilde{Q}_1 \cup \dots \cup \tilde{Q}_{i-1}) = \bigsqcup_{k=1}^{N_i} Q_{i,k}:$$

i. $\tilde{Q}_i \setminus (\tilde{Q}_1 \cup \dots \cup \tilde{Q}_{i-1})$ разбивается на ячейки, причём они рациональны.

ii. Рациональную ячейку можно разбить на рациональные кубы: рассмотрим t — общий знаменатель всех a_k, b_k , разобьём на кубы со стороной $\frac{1}{t}$.

iii. Разбиение конечно.

(d) $E = \bigsqcup Q_{i,k}$.

2. (a) Дан ϵ . $\lambda_m(E) = 0 \Leftrightarrow \inf_{(P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_m, E \subset \bigcup P_i)} \sum \mu(P_i) = 0$.

(b) Тогда существует такой набор P_1, P_2, \dots , что $\sum \mu(P_i) < \frac{\epsilon}{2}$.

(c) $P_i = [a_i, b_i]$. Пусть $B_i = (\tilde{a}_i, b_i)$, при этом $\mu(B_i) \leq 2\mu(P_i)$.

(d) E покрыт $\bigcup B_i$ — открытое множество меры меньше ϵ .

(e) Это открытое множество представимо в виде объединения рациональных кубов.

2.55 Пример неизмеримого по Лебегу множества

Введём на $[0, 1]$ отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$.

Из каждого класса эквивалентности выберем по элементу (тут мы пользуемся аксиомой выбора). Полученное множество E неизмеримо по Лебегу.

Доказательство:

Рассмотрим сдвиги этого множества на все рациональные числа из $[-1, 1]$. Они дизъюнкты, покрывают $[0, 1]$ и содержатся в $[-1, 2]$.

1. Если $\mu(E) = 0$, то $\mu[0, 1] = 0$, это не так.

2. Если $\mu(E) > 0$, то $\mu[-1, 2] = \infty$, это не так.

2.56 Регулярность меры Лебега

$A \in \mathfrak{M}^m$. Тогда

$$\lambda_m(A) = \inf\{G : G \supset A, G \text{ открытое}\} = \sup\{F : F \subset A, F \text{ замкнутое}\} = \sup\{K : K \subset A, K \text{ компактное}\}$$

Доказательство:

1. Докажем, что $\forall \epsilon > 0 \exists$ открытое $G_\epsilon \supset A$: $\lambda_m(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$.

(a) Пусть $\lambda_m(A) < +\infty$.

i. $\lambda_m(A) = \inf_{(P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_m, A \subset \bigcup P_i)} \sum \mu(P_i)$.

ii. Тогда есть $P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_m$, $A \subset \bigcup P_i$, $\sum \mu(P_i) < \lambda_m(A) + \frac{\epsilon}{2}$.

iii. Для всех P_i построим $\tilde{P}_i \supset P_i$ — открытое, $\lambda_m(\tilde{P}_i) \leq \lambda_m(P_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$.

iv. $G_\epsilon = \bigcup \lambda_m(\tilde{P}_i)$. $\lambda_m(G_\epsilon) \leq \lambda_m(A) + \epsilon$.

(b) Пусть $\lambda_m(A) = +\infty$.

i. $\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i$ — единичные кубы. $A_i = A \cap Q_i$, $A = \bigsqcup A_i$, $\lambda_m(A_i) \leq 1$.

ii. Для каждого i построим открытое G_i : $A_i \subset G_i$, $\lambda_m(G_i \setminus A_i) \leq \frac{\epsilon}{2^i}$.

iii. $G_\epsilon = \bigcup G_i \supset A$. $\lambda_m(G_\epsilon) \leq \lambda_m(A) + \epsilon$.

2. Докажем, что $\forall \epsilon > 0 \exists$ замкнутое $F_\epsilon \subset A$: $\lambda_m(A \setminus F_\epsilon) < \epsilon$.

(a) $A \setminus F_\epsilon = F_\epsilon^c \setminus A^c$, $F_\epsilon^c \supset A^c$.

(b) $\lambda_m(A \setminus F_\epsilon) = \lambda_m(F_\epsilon^c \setminus A^c)$.

(c) По (1), найдётся такое открытое F_ϵ^c , что это выполняется.

(d) Дополнение к открытому замкнуто.

3. (a) $\lambda_m(A) = \sup\{F : F \subset A, F \text{ замкнутое}\}$.

(b) Любое F представляется как объединение счётного числа компактов $K_i = F \cap \overline{B(0, i)}$.

(c) Поэтому $\lambda_m(A) = \sup\{K : K \subset A, K \text{ компактное}\}$.

2.57 Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

$T : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывно, $\forall E \in \mathfrak{M}^m, E \subset \mathcal{O}, \lambda_m(E) = 0$ выполнено $\lambda_m(T(E)) = 0$.
Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset \mathcal{O} \ T(A) \in \mathfrak{M}^m$.

Доказательство:

1. A — измеримо $\Leftrightarrow A = \bigcup K_i \cup N$, где K_i — компакты, N — множество меры 0.
2. $T(A) = \bigcup T(K_i) \cup T(N)$.
 - (a) Непрерывный образ компакта — компакт.
 - (b) $T(N)$ имеет меру 0.
3. Поэтому $T(A)$ измеримо.

2.58 Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

1. $T : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^1, \mathcal{O}$ открыто. Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset \mathcal{O}$ выполнено $T(A) \in \mathfrak{M}^m$.
2. $\forall A \in \mathfrak{M}^m, v \in \mathbb{R}^m$ выполнено $A + v \in \mathfrak{M}^m, \lambda_m(A + v) = \lambda_m(A)$.

Доказательство:

1. (a) E можно покрыть счётным числом компактов K_i , которые содержатся в \mathcal{O} . Например, можно взять замкнутые кубы, покрывающие \mathcal{O} .
 (b) Докажем, что для всех $A \cap K_i$ $T(A \cap K_i)$ имеет меру ноль. Из этого будет следовать, что $T(A)$ имеет меру ноль.
 (c) Далее считаем, что A покрыто одним компактом $K \subset \mathcal{O}$.
 (d) На компакте K существует глобальная константа Липшица L для T , равная $\max \|T'\|$.
 (e) $\forall \epsilon > 0 \exists C_1, C_2, \dots$ — кубы $[a_i, b_i] \subset K, A \subset \bigcup C_i, \sum \lambda_m(C_i) < \epsilon$.
 (f) r_i — длины сторон кубов. $\sup_{x \in C_i} |x - a_i| = r_i \sqrt{m}$. Тогда из условия Липшица: $T(C_i) \subset \overline{B}(T(a_i), Lr_i \sqrt{m}) \Rightarrow \lambda_m(T(C_i)) \leq (2Lr_i \sqrt{m})^m = \lambda_m(C_i) \cdot \text{const}$.
 (g) Получается, что $\lambda_m(T(\bigcup C_i)) \leq \epsilon \cdot \text{const}$. Значит, мера $T(A)$ равна нулю.
 (h) T непрерывно и переводит множества меры ноль во множества меры ноль, поэтому оно сохраняет измеримость.
2. (a) Сдвиг — гладкое отображение, поэтому $A + v \in \mathfrak{M}^m$.
 (b) $\lambda_m(A) = \inf_{(P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_m, A \subset \bigcup P_i)} \sum \mu(P_i)$. Классический объём инвариантен относительно сдвига.

2.59 Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

Если T — ортогональный линейный оператор (сохраняет скалярное произведение) и $E \in \mathfrak{M}^m$, то $T(E) \in \mathfrak{M}^m, \lambda_m(T(E)) = \lambda_m(E)$.

Доказательство:

1. $T(E) \in \mathfrak{M}^m$, потому что T гладкое.
2. Пусть $\mu(E) = \lambda_m(T(E))$. μ — мера на \mathfrak{M}^m , поскольку T — биекция.
3. μ инвариантна относительно сдвигов: $\mu(A + v) = \lambda_m(T(A + v)) = \lambda_m(T(A) + Tv) = \lambda_m(T(A)) = \mu(A)$.

4. По теореме о мерах, инвариантных относительно сдвигов, $\mu \equiv c\lambda_m$.
5. Рассмотрим шар $B = B(0, 1)$. $\lambda_m(B) \neq 0$. $T(B) = B \Rightarrow \mu(B) = \lambda_m(B) \Rightarrow c = 1$.
6. $\mu \equiv \lambda_m \Rightarrow \lambda_m(T(E)) = \lambda_m(E)$.

2.60 Лемма «о структуре компактного оператора»

$V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор.

Тогда \exists ортонормированные базисы $\{g_i\}, \{h_i\}$ в \mathbb{R}^m , $s_1, \dots, s_m > 0$, такие что $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad Vx = \sum_{k=1}^m s_k \langle x, g_k \rangle h_k$, $|\det V| = \prod_{k=1}^m s_k$.

Доказательство:

1. $W = V^T V$ — симметричен относительно главной диагонали, поэтому все собственные W числа вещественны, а из собственных векторов W можно составить базис $\{g_i\}$.
2. Все собственные числа $\lambda_i > 0$: $\lambda_i = \langle Wg_i, g_i \rangle = \langle V^T Vg_i, g_i \rangle = \langle Vg_i, Vg_i \rangle > 0$.
(а) Переход $\langle V^T Vg_i, g_i \rangle = \langle Vg_i, Vg_i \rangle$ описан в вычислении нормы оператора через собственные числа.
3. $s_i = \sqrt{\lambda_i}$. $h_i = \frac{1}{s_i} Vg_i$.
4. $\{h_i\}$ — ОНБ: $\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle Vg_i, Vg_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle Wg_i, g_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} c_i \langle g_i, g_j \rangle = \delta_i^j$.
5. $\sum_{k=1}^m s_k \langle x, g_k \rangle h_k = \sum_{k=1}^m \langle x, g_k \rangle Vg_i = V \sum_{k=1}^m \langle x, g_i \rangle g_i = Vx$.
6. $(\det V)^2 = \det V^T V = \det W = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m$.

2.61 Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

$V \in \mathcal{L}_{m,m}$.

Тогда $\forall A \subset \mathfrak{M}^m \quad VA \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda_m(VA) = |\det V| \lambda_m(A)$.

Доказательство:

1. Если $\det V = 0$, то $Im(V)$ имеет размерность $< m$, VA лежит в пространстве размерности меньше m и потому имеет меру ноль.
2. Далее $\det V \neq 0$. V — невырожденный.
3. По теореме о структуре компактного оператора, $Vx = \sum_{k=1}^m s_k \langle x, g_k \rangle h_k$, где $\{g_i\}, \{h_i\}$ — ортонормальные базисы, $s_i > 0$, $\prod_{k=1}^m s_i = |\det V|$.
4. Пусть $\mu(A) = \lambda_m(VA)$. Это мера на \mathfrak{M}^m . μ инвариантно относительно сдвигов, поэтому $\exists k: \mu \equiv k\lambda_m$.
(а) Тут μ введена так же, как в теореме об инвариантности меры Лебега относительно ортогонального преобразования.
5. Q — единичный куб со сторонами на g_i . $\lambda_m(Q) = 1$.
6. $Vg_i = s_i h_i$, поэтому VQ — параллелепипед, построенный на векторах $s_i h_i$.
7. $\mu(Q) = \lambda_m(VQ) = \prod_{k=1}^m s_i = |\det V| \Rightarrow k = |\det V|$.

2.62 Теорема об измеримости пределов и супремумов

$f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измеримы на X . Тогда:

1. $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ — измеримы.
2. $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ — измеримы.
3. Если $f_n(x)$ поточечно сходится к $g(x)$, то $g(x)$ — измерима.

Доказательство:

1. (a) $h(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ $X(h > a) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X(f_n > a)$ — измеримо.
(b) \inf аналогично.
2. (a) $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(x)$, $y_n(x) = \sup_{k \geq 0} f_{n+k}(x)$.
(b) $\forall x y_n(x)$ монотонно убывает, поэтому $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n(x)$ — измеримо по пункту 1.
(c) $\underline{\lim}$ аналогично.
3. Обычный предел, если он существует, равен верхнему и нижнему.

2.63 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

f — измеримая функция на X , $\forall x f(x) \geq 0$. Тогда \exists ступенчатые функции f_n , такие что:

1. $\forall x 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$.
2. $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$.

Доказательство:

1. $n \in \mathbb{N}$. Пусть $e_{n,k} = X(\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n})$ при $k \in \{0, 1, \dots, n^2 - 1\}$, $e_{n,n^2} = X(n \leq f)$.
2. $e_{n,0}, e_{n,1}, \dots, e_{n,n^2}$ — разбиение X . Пусть $g_n = \frac{k}{n}$ при $x \in e_{n,k}$.
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f(x)$.
4. $f_n(x) = \max(g_1(x), \dots, g_n(x))$.

Замечание: я чёт не понимаю, почему тут не используется измеримость f . Возможно, требуется, чтобы f_n были измеримыми (в определении ступенчатой функции этого нет), а это действительно следует из измеримости f .