

# Теоремы по матану, семестр 4

18 февраля 2018 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Измеримость монотонной функции</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Простейшие свойства интеграла Лебега</b>	<b>3</b>
5.1	Для определения (5) . . . . .	3
5.2	Для окончательного определения . . . . .	4
<b>6</b>	<b>Счетная аддитивность интеграла (по множеству)</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>Теорема Леви</b>	<b>7</b>
<b>8</b>	<b>Линейность интеграла Лебега</b>	<b>7</b>

# 1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой.

$f$  — измеримая функция на  $X$ ,  $\forall x \ f(x) \geq 0$ . Тогда  $\exists$  ступенчатые функции  $f_n$ , такие что:

1.  $\forall x \ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ .
2.  $f_n(x)$  поточечно сходится к  $f(x)$ .

Следствие 1:

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измеримая. Тогда  $\exists$  ступенчатая  $f_n : \forall x : \lim f_n(x) = f(x)$  и  $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ .

Доказательство:

1. Рассмотрим  $f = f^+ - f^-$ .  $f^+ = \max(f, 0)$ ,  $f^- = \max(-f, 0)$ . Срезки измеримы:  $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$ , при этом  $f$  и  $g \equiv 0$  измеримы ( $f^-$  измерима аналогично).
2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции  $f_n^+ \rightarrow f^+$ ,  $f_n^- \rightarrow f^-$ . Тогда и  $f_n^+ - f_n^-$  это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов:  
 $f_n^+ - f_n^- \rightarrow f^+ - f^- = f$   
(почему верно с модулем — непонятно, если в лоб, то неверно. Спрошу 19.02)

Следствие 2:

$f, g$  — измеримые функции. Тогда  $fg$  — измеримая функция. При этом считаем, что  $0 \cdot \infty = 0$ .

Доказательство:

1. Рассмотрим  $f_n \rightarrow f : |f_n| \leq |f|$ ,  $g_n \rightarrow g : |g_n| \leq |g|$  из первого следствия. Тогда  $f_n g_n \rightarrow fg$   
(и что с того? У нас же другое определение измеримых функций. Спрошу 19.02)

Следствие 3:

$f, g$  — измеримые функции. Тогда  $f + g$  — измеримая функция. При этом считаем, что  $\forall x$  не может быть, что  $f(x) = \pm\infty$ ,  $g(x) = \mp\infty$

Доказательство:

Доказывается как следствие 2.

## 2 Измеримость монотонной функции

Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$  — измеримое по Лебегу,  $E' \subset E$ ,  $\lambda_m(E \setminus E') = 0$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть сужение  $f : E' \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно. Тогда  $f$  измерима на  $E$ .

Доказательство:

1.  $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$ ,  $e := E \setminus E'$ ,  $\lambda_m(e) = 0$ .
2.  $E'(f < a)$  открыто в  $E'$ , так как  $f$  непрерывна. Поэтому  $E' = G \cap E' \Rightarrow$ , где  $G$  — открытое в  $E$  множество. Значит,  $E'(f < a)$  — измеримо по Лебегу, так как оно является борелевским.
3. Но и  $e(f < a)$  измеримо, так  $\lambda_m(e) = 0$ , следовательно  $E(f < a)$  измеримо как объединение измеримых множеств

Следствие:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна. Тогда  $f$  измерима.

Доказательство:

Множество разрывов монотонной функции НБЧС множество, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

### 3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

### 4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

## 5 Простейшие свойства интеграла Лебега

#### 5.1 Для определения (5)

1.  $\int_{\mathbb{X}} f$  не зависит от представления  $f$  как ступенчатой функции, то есть если  $f$  реализуется как  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$  и как  $f = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$ , интегралы по этим функциям равны

Доказательство:

Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

Пусть  $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_i (\lambda_i \cdot \sum_j (\mu F_{i,j})) = \sum_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f$  для первого разбиения

Аналогично для второго разбиения получаем

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_j (\alpha_j \cdot \sum_i (\mu F_{i,j})) = \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int f$  для второго разбиения, что и требовалось доказать

2.  $f, g$  -измеримые ступенчатые функции,  $f \leq g$ , тогда  $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

Пусть  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ ,  $g = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

Пусть  $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда  $\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leq \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int g$ , что и требовалось доказать

## 5.2 Для окончательного определения

1. Монотонность  $f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

(a)  $f, g \geq 0$ , тогда доказательство тривиально (по свойствам супремума)

$$(b) \int_{\mathbb{X}} f = \int_{\mathbb{X}} f^+ - \int_{\mathbb{X}} f^-$$

$$\int_{\mathbb{X}} g = \int_{\mathbb{X}} g^+ - \int_{\mathbb{X}} g^-$$

Из того, что  $\int_{\mathbb{X}} f^+ \leq \int_{\mathbb{X}} g^+$ , а  $\int_{\mathbb{X}} f^- \geq \int_{\mathbb{X}} g^-$  следует, что  $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

2.  $\int_{\mathbb{E}} 1 \cdot d\mu = \mu E$

$$\int_{\mathbb{E}} 0 \cdot d\mu = 0$$

Очевидно из определения интеграла ступенчатой функции

3.  $\mu E = 0, f$ -измерима, тогда  $\int_{\mathbb{E}} f = 0$ , даже если  $f = \infty$  на  $\mathbb{E}$

Доказательство:

(a)  $f$ -ступенчатая  $\Rightarrow$  ограниченная

$$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}), \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sum \lambda_k \cdot \mu(E \cap E_k)$$

Но  $\mu(E \cap E_k) = 0$  (так как  $\mu E = 0$ ), тогда  $\int_{\mathbb{E}} f = 0$

(b)  $f$  - измеримая,  $f \geq 0$ .

$$\int_{\mathbb{E}} f = \sup \left( \int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq f, g \text{ - ступенчатая}$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sup(0) = 0$$

(c)  $f$  - произвольная измеримая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- = 0 - 0 = 0$$

4. (a)  $\int_{\mathbb{E}} -f = - \int_{\mathbb{E}} f$

$$(b) \forall c \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

Доказательство:

$$(a) (-f)^+ = f^-$$

$$(-f)^- = f^+$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} -f = \int_{\mathbb{E}} (-f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (-f)^- = \int_{\mathbb{E}} f^- - \int_{\mathbb{E}} f^+ = - \int_{\mathbb{E}} f$$

(b) Пусть  $c > 0$ . Если  $c < 0$ , то по предыдущему случаю можем рассматривать для  $-c < 0$ .

Если  $c = 0$ , то по предыдущей теореме  $\int_{\mathbb{E}} (0 \cdot f) = \int_{\mathbb{E}} 0 = 0 = 0 \cdot \int_{\mathbb{E}} f$

i. Пусть  $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq c \cdot f, g - \text{ ступенчатая}$$

Пусть  $g = c \cdot \tilde{g}$ , тогда  $\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right)$ , где  $0 \leq c \cdot \tilde{g} \leq c \cdot f$ ,  $\tilde{g}$  - ступенчатая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right) = \sup_{\mathbb{E}} \left( c \cdot \int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

ii. Если  $f$  - произвольная:

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^- = \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^+ - \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^- = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^+ - c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^- = c \cdot \left( \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

5. Если существует  $\int_{\mathbb{E}} f d\mu$ , то  $\left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$

Доказательство:

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\int_{\mathbb{E}} -|f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$-\int_{\mathbb{E}} |f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$\text{Тогда } \left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

6.  $f$  - измеримая на  $\mathbb{E}$ ,  $\mu\mathbb{E} < \infty$

$$a \leq f \leq b, \text{ тогда } a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Доказательство:

$$a \leq f \leq b \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} a \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} b$$

$$a \cdot \int_{\mathbb{E}} 1 \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \int_{\mathbb{E}} 1$$

$$a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Следствие:

Если  $f$  - Измеримая и ограниченная на  $\mathbb{E}$ ,  $\mu\mathbb{E} < \infty$ , тогда  $f$  - суммируемая на  $\mathbb{E}$

7.  $f$  - суммируемая на  $\mathbb{E} \Rightarrow f$  почти везде конечная на  $\mathbb{E}$  (то есть  $f \in \alpha^0(\mathbb{E})$ )

Доказательство:

(a) Пусть  $f \geq 0$

Пусть  $f = +\infty$  на  $A$  и пусть  $\mu A > 0$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : f \geq n \cdot \chi_A$

$$\text{Тогда } \forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{E}} f \geq n \cdot \int_{\mathbb{E}} \chi_A = n \cdot \mu A \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} f = +\infty$$

(b)  $f$  любого знака

Распишем  $f = f^+ - f^-$ , по предыдущему пункту  $f^+, f^-$  конечны почти везде  $\Rightarrow f$  тоже конечно почти везде

## 6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$  — измеримы.  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — изм.,  $f \geq 0$

Тогда: 
$$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$$

Доказательство:

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

$$\int_A f d\mu = \sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum_k (\lambda_k \cdot (\sum_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\int_{A_i} f)$$

2. Докажем, что  $\int_A f \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) Рассмотрим  $0 \leq g \leq f$  — ступенчатая.  $\int_A g = \sum_i \int_{A_i} g \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(b) Переходя к *sup* получаем желаемое

3. Теперь докажем, что  $\int_A f \geq \sum_i \int_{A_i} f$

(a)  $A = A_1 \sqcup A_2$

i. Рассмотрим  $g_1, g_2$  — ступенчатые такие, что  $0 \leq g_i \leq f \cdot \chi_{A_i}$

ii. Рассмотрим их общее разбиение  $E_k : g_i = \sum_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

iii.  $g_1 + g_2$  — ступенчатая и  $0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$

iv.  $\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \stackrel{lemma}{=} \int_A (g_1 + g_2) \stackrel{iii}{\leq} \int_A f$

v. Поочерёдно переходя к *sup* по  $g_1$  и  $g_2$  получаем:  $\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , что  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$  будем последовательно отщеплять последнее множество по (a)

(c)  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$

i. Фиксируем  $n \in \mathbb{N}$

ii.  $A = (\bigsqcup_{i=1}^n A_i) \sqcup B$ , где  $B = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$

iii.  $\int_A f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$

iv. Переходим к *lim* по  $n$

Следствие 1:  $0 \leq f \leq g$  — измеримы и  $A \subset B$  — измеримы  $\Rightarrow \int_A f \leq \int_B g$

$$\int_B g \geq \int_B f = \int_A f + \int_{B \setminus A} f \geq \int_A f$$

Следствие 2:  $f$  - суммируема на  $A \Rightarrow \int_A f = \sum_i \int_{A_i} f$

Достаточно рассмотреть срезки  $f^+$  и  $f^-$

Следствие 3:  $f \geq 0$  - изм.  $\delta : \mathbb{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (A \mapsto \int_A f d\mu) \Rightarrow \delta$  - мера

## 7 Теорема Леви

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ ,  $f_n \geq 0$  - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$  при почти всех  $x$

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$  (считаем, что при остальных  $x : f \equiv 0$ )

Тогда:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

Доказательство:

N.B.  $\int_X f_n \leq \int_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$

$f$  - измерима как предел последовательности измеримых функций

1.  $\leq$

Очевидно  $f_n \leq f$  при п.в  $x \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f$ . Делаем предельный переход по  $n$

2.  $\geq$

(a) Логичная редукция:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq \int_X g$ , где  $0 \leq g \leq f$  - ступенчатая

(b) Наглая редукция:  $\forall c \in (0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq c \cdot \int_X g$

i.  $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq c \cdot g\}$ . Очевидно  $E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$

ii.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$  т.к.  $c < 1$

iii.  $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} g \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \geq c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g$

iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем непрерывность меры снизу

## 8 Линейность интеграла Лебега