Определения по матану, семестр 4

6 мая 2018 г.

Содержание

1 Теорема о вложении пространств L^p

$\mu E < +\infty,\ 1 \leq s < r \leq +\infty$
Тогда:

1. $L_r(E, \mu) \subset Ł_s(E, \mu)$
2. $\forall f -$ измеримы $||f||_s \leq \mu E^{1/s-1/r} ||f||_r$

2 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$1 \leq p < +\infty,\ \ f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$
Тогда:

1. - $f \in L_p$
   - $f_n \to f$ в L_p

   Тогда: $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (по мере)

2. - $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (либо если $f_n \to f$ почти везде)
   - $|f_n| \leq g$ почти при всех n , $g \in L_p$

   Тогда: $f_n \to f$ в L_p

3 Полнота L_p

$L_p(E, \mu)\ \ 1 \leq p < \infty$ – полное
То есть любая фундаментальная последовательность сходиться по норме $||f||_p$.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, k\ ||f_n - f_k|| < \varepsilon \Rightarrow \exists f \mid\ \ ||f_n - f|| \to 0$$

4 Лемма Урысона

5 Плотность в L_p непрерывных финитных функций

6 Теорема о непрерывности сдвига

7 Теорема об интеграле с функцией распределения

$(\mathbb{R}, B, X)$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \geq 0$, изм. по Борелю, п.в. конечн.
$h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ с функцией распределения $H(t)$

μ_H – мера Бореля-Стилтьеса (мера Лебега-Стилтьеса на B)

Тогда: $\int\limits_X f(h(x))\ d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\ d\mu_H(t)$

8 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow < x_n, y_n > \to < x, y >$
2. $\sum x_k$ сходится, тогда $\forall y : \sum < x_k, y > = < \sum x_k, y >$
3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

9 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.
2. $c_k = \dfrac{< x, e_k >}{||e_k||^2}$
3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$
   Иными словами $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

10 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} = Lin(e_1, e_2, ...) \subset \mathbb{H}$

Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во $\mathcal{L}$. Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$
2. S_n — наилучшее приближение x в $\mathcal{L}$ $(||x - S_n|| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}} ||x - y||)$
3. $||S_n|| \leqslant ||x||$

11 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ – орт. сист. в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$ сх-ся в $\mathbb{H}$

2. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$

3. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

12 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ – орт. сист. в $\mathbb{H}$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_k\}$ – базис

2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)

3. $\{e_k\}$ - замкн.

4. $\{e_k\}$ - полн.

5. $Lin(e_1, e_2, \ldots)$ - плотна в $\mathbb{H}$

13 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \to f$ в $L_1[-\pi, \pi]$

Тогда:

$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) coskx \ dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) sinkx \ dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

14 Теорема Римана–Лебега

15 Принцип локализации Римана

16 Признак Дини. Следствия

17 Корректность определения свертки

18 Свойства свертки функции из L^p с функцией из L^q

19 Формула Грина

20 Формула Стокса

21 Формула Гаусса–Остроградского

22 Соленоидальность бездивергентного векторного поля