

Определения по матану, семестр 4

11 марта 2018 г.

Содержание

1	Свойство, выполняющееся почти везде	2
2	Сходимость почти везде	2
3	Сходимость по мере	2
4	Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости	2
5	Интеграл ступенчатой функции	2
6	Интеграл неотрицательной измеримой функции	3
7	Суммируемая функция	3
8	Интеграл суммируемой функции	3
9	Произведение мер	4
10	Теорема Фубини	4
11	Образ меры при отображении	5
12	Взвешенный образ меры	5
13	Плотность одной меры по отношению к другой	5
14	Заряд, множество положительности	5
14.1	Заряд	5
14.2	Множество положительности	5

1 Свойство, выполняющееся почти везде

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой, и $\omega(x)$ - утверждение, зависящее от точки x .
 $E := \{x : \omega(x) \text{ — ложно}\}$ и $\mu E = 0$. Тогда говорят, что $\omega(x)$ верно при почти всех (п.в.) x .

2 Сходимость почти везде

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой, и $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.
Говорим, что $f_n \rightarrow f(x)$ почти везде, если $\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ измеримо и имеет меру 0.

3 Сходимость по мере

(X, a, μ) - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$
 $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны
Говорят, что f_n сходится к f по мере μ (при $n \rightarrow +\infty$) (обозначается $f_n \xrightarrow{\mu} f$) если
 $\forall \epsilon > 0 \mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

(X, a, μ) - пространство с мерой
 $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - п.в. конечны, измеримы
 $f_n \rightarrow f$.
Тогда эта сходимость “почти равномерная”

5 Интеграл ступенчатой функции

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой
 $f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ - ступенчатая функция, E_k - измеримые дизъюнктные множества,
 $f \geq 0$
Интегралом ступенчатой функции f на множестве \mathbb{X} назовём

$$\int_{\mathbb{X}} f d\mu := \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что $[0 \cdot \infty = 0]$

6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

f - измеримо, $f \geq 0$, её интегралом на множестве X назовём

$$\int_X f d\mu := \sup \left(\int_X g \right)$$

, где $0 \leq g \leq f$, g -ступенчатая

7 Суммируемая функция

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

f -измерима, $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ конечен (хотя бы один из них).

Тогда интегралом f на X назовём

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ - \int_X f^-$$

Тогда если конечен $\int_X f$, (то есть конечны интегралы по обоим срезкам), то f называют суммируемой

8 Интеграл суммируемой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

f -измерима, $E \in \mathbb{A}$

Тогда интегралом f на множестве E назовём

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi(E) d\mu$$

f суммируемая на E , если $\int_X f^+ \chi(E)$ и $\int_X f^- \chi(E)$ конечны

9 Произведение мер

$\langle \mathbb{X}, \alpha, \mu \rangle, \langle \mathbb{Y}, \beta, \nu \rangle$ - пространства с мерой

μ, ν - σ -конечные меры

$$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : A \in \alpha, B \in \beta\}$$

$$m_0 : \alpha \times \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

m - называется произведением мер μ и ν , если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\alpha \times \beta$ на некоторую σ -алгебру $\alpha \otimes \beta$.

$m = \mu \times \nu$ - обозначение

$\langle \mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \alpha \otimes \beta, \mu \times \nu \rangle$ - произведение пространств с мерой

10 Теорема Фубини

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle, \langle \mathbb{Y}, \mathbb{B}, \nu \rangle$ - пространство с мерой,

μ, ν — σ -конечные и полные,

$$m = \mu \times \nu,$$

f — суммируемая на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ по m .

Тогда:

- при «почти всех» x функция $f_x \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$, то есть суммируема на \mathbb{Y} по ν
при «почти всех» y функция $f^y \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$

•

$$x \mapsto \phi(x) \mid \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$$

$$x \mapsto \psi(x) \mid \psi(x) = \int_{\mathbb{X}} f^y d\mu \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$$

Это есть эти функции суммируемы в некотором контексте (\mathbb{X}, μ и \mathbb{Y}, ν соответственно)

•

$$\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm = \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm = \int_{\mathbb{Y}} \psi(y) d\nu = \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} f d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

11 Образ меры при отображении

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, _)$ — пространство с σ -алгеброй.
 $\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.

ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ .

12 Взвешенный образ меры

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, _)$ — пространство с σ -алгеброй.
 $\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$.

ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ .

При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

13 Плотность одной меры по отношению к другой

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

$\nu(E) = \int_E \omega(x) d\mu$. ν — мера на X .

ω называется плотностью ν относительно μ .

14 Заряд, множество положительности

14.1 Заряд

$(X, \mathbb{A}, _)$ — пространство с σ -алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).

ϕ счётно аддитивна.

Тогда ϕ — заряд.

14.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, B измеримо: $\phi(B) \geq 0$.