

Определения по матану, семестр 4

6 мая 2018 г.

Содержание

1	Интегральные неравенства Гельдера и Минковского	4
1.1	Неравенство Гельдера	4
1.2	Неравенство Минковского	4
2	Интеграл комплекснозначных функции	4
3	Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$	4
4	Пространство $L_\infty(E, \mu)$	5
5	Существенный супремум	5
6	Фундаментальная последовательность, полное пространство	6
7	Плотное множество	6
8	Финитная функция	6
9	Измеримое множество на простой двумерной поверхности в R^3	6
10	Мера Лебега на простой двумерной поверхности в R^3	7

11 Поверхностный интеграл первого рода	7
12 Кусочно-гладкая поверхность в R^3	7
13 Гильбертово пространство	7
14 Ортогональный ряд	8
15 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве	8
16 Ортогональное семейство векторов	8
17 Ортонормированное семейство векторов	8
18 Коэффициенты Фурье	8
19 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве	9
20 Базис, полная, замкнутая ОС	9
21 Сторона поверхности	9
22 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов	9
23 Интеграл II рода	10
24 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности	10
25 Тригонометрический ряд	11
26 Коэффициенты Фурье функции	11
27 Ядро Дирихле	12
28 Ядро Фейера	12

29 Ротор, дивергенция векторного поля	12
30 Соленоидальное векторное поле	12
31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции	12
32 Свертка	13

1 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

1.1 Неравенство Гельдера

(X, \mathbb{A}, μ) $f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{C}$ (E - изм.) — заданы п.в, измеримы

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогда: } \int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

1.2 Неравенство Минковского

(X, \mathbb{A}, μ) f, g — заданы п.в, измеримы

$$1 \leq p < +\infty. \text{ Тогда: } \left(\int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

2 Интеграл комплекснозначных функции

$(X, \mathbb{A}, \mu), f : X \rightarrow \mathbb{C}$

Назовем f - измеримой (суммируемой), если $Re f, Im f$ — изм. (сумм.)

Тогда интегралом такой функции назовем:

$$\int_E f d\mu = \int_E Re f + i \int_E Im f$$

3 Пространство $L_p(E, \mu), 1 \leq p < +\infty$

$(X, \mathbb{A}, \mu) E \in \mathbb{A}$

$$L'_p(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ изм., } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \}$$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект - если определить норму как $\|f\| =$

$\left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0 будут давать норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$, если $f = g$ п.в.

$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu)/\sim$ - лин. норм. пр-во с нормой $\|f\| = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $\|f\|_p$ за норму f в пространстве L_p .

4 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$L_\infty(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ess sup}_E |f| < +\infty \}$

NB1: $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

5 Существенный супремум

$(X, \mathbb{A}, \mu), E \subset X$ — изм., $f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\text{ess sup}_{x \in E} f(x) = \inf \{ A \in R : f(x) \leq A \text{ п.в. } x \}$.

В этом определении A - существенная верхняя граница.

Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2. $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int_E |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f| d\mu$.

6 Фундаментальная последовательность, полное пространство

$\{a_n\}$ - фундаментальная последовательность в метрическом пространстве X , если $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, k > N : \rho(a_n, a_k) < \epsilon$

Метрическое пространство называется полным, если фундаментальность последовательности влечёт её сходимости к какому-то пределу в этом пространстве

7 Плотное множество

X — метрическое пространство.

$A \subset X$ — (всюду) плотно в X , если для любого открытого мн-ва $G \subset X$ $A \cap G \neq \emptyset$.

Или, эквивалентно, любой шар $B(x_0, r)$ содержит точки из A .

8 Финитная функция

f — финитная в \mathbb{R}^m , если она равна нулю вне некоторого шара.

9 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в R^3

$M \subset R^3$ — простое 2-мерное многообразие, C^1 гладкости.

$\phi : \underset{\text{откр. обл.}}{O} \subset R^2 \rightarrow R^3, \phi \in C^1$ — гомеоморфизм, $\phi(O) = M$

$E \subset M$ – изм. по Лебегу, если $\phi^{-1}(E)$ – изм. по Лебегу в R^2

10 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в R^3

$S(E) := \iint_{\phi^{-1}(E)} |\phi'_u \times \phi'_v| du dv$ – взвеш. образ меры Лебега отн. ϕ . Значит это мера на \mathbb{A}_M

11 Поверхностный интеграл первого рода

M – простое, гл, 2-мерное в R^3 , ϕ – параметризация

f – изм. отн. S (см. выше), $f > 0$ (или f – суммируем. по S)

Тогда: $\int_M f dS$ – называет инт. первого рода функ. f по поверхности M

12 Кусочно-гладкая поверхность в R^3

$M \subset \mathbb{R}^3$ называется кусочно-гладкой, если M представляет собой объединение:

- * конечного числа простых гладких поверхностей
- * конечного числа простых гладких дуг
- * конечного числа точек

13 Гильбертово пространство

H – линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} , в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствующей нормы, называется Гильбертовым.

14 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}$, $\sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$

15 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$
 $\sum x_n$ сходится к x , если
 $S_n := \sum_{k=1}^n x_k, S_n \rightarrow x$ (то есть $|S_n - x| \rightarrow 0$ - сходимости по мере)

16 Ортогональное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l : e_k \perp e_l, e_k \neq 0, e_l \neq 0$.

17 Ортонормированное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если e_k - ортогональное семейство векторов, и $\forall k : |e_k| = 1$

18 Коэффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортонормированная система в $\mathbb{H}, x \in \mathbb{H}$.
 $c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$

19 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$

20 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H}

1. $\{e_k\}$ — **базис**, если $\forall x \in \mathbb{H} : \exists c_k$, что $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

2. $\{e_k\}$ — **полная** О.С., если $\forall k : z \perp e_k \Rightarrow z = 0$

3. $\{e_k\}$ — **замкнутая** О.С., если $\forall x \in \mathbb{H} : \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

21 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

22 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

F_1, F_2 — два касательных векторных поля к M

$\forall p \in M \quad F_1(p), F_2(p)$ — Л.Н.З. касательные векторы

Тогда поле нормалей стороны определяется, как $n := F_1 \times F_2$

Репер — пара векторов из $F_1 \times F_2$.

23 Интеграл II рода

M – простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в \mathbb{R}^3

n_0 – фиксированная сторона (одна из двух)

$F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ – векторное поле

Тогда интегралом II рода назовем $\int_M \langle F, n_0 \rangle ds$

Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака
2. Не зависит от параметризации
3. $F = (P, Q, R)$

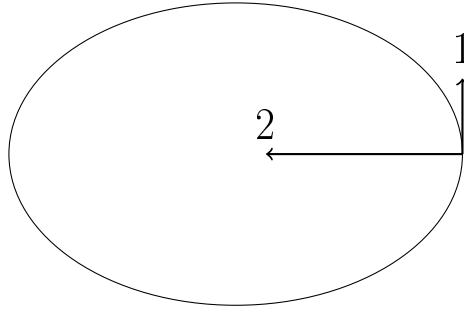
Тогда интеграл имеет вид $\iint P dydz + Q dzdx + R dx dy$

NB: $Q dx dz = -Q dz dx$

24 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый – снаружи от контура (задает направление ”движения” по петле), второй – внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали поверхности.



25 Тригонометрический ряд

•

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

(где a_i, b_i – коэффициенты ряда)

• Другая форма:

$$\sum_{k=\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

Тогда $S_n := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$

26 Коэффициенты Фурье функции

•

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

•

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

•

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

27 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right)$$

28 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

29 Ротор, дивергенция векторного поля

Пусть $V = (P, Q, R)$ — гладкое векторное поле в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^3$. Тогда:

$$\operatorname{rot} V = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$$

//TODO: Дивергенция

30 Соленоидальное векторное поле

$v = (P, Q, R)$ — соленоидальное, если существует векторный потенциал B , т.е. $v = \operatorname{rot} B$.

31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

$$\forall a \forall n_0 : \operatorname{rot}(F, a, n_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi r^2} \int_{\delta B(a, r)} F_l dl \right)$$

где F_l - проекция F на касательное направление

$$\forall a \forall n_0 : \operatorname{div}(F, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\lambda_3(B(a, r))} \iint_{\delta B(a, r)} \langle F, n_o \rangle dS \right)$$

32 Свертка

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) K(t) dt$$

где $f, K \in L_1([-\pi, \pi])$