# Определения по матану, семестр 4

6 мая 2018 г.

## Содержание

# 1 Интегральные неравества Гельдера и Минковского

## 1.1 Нераветсво Гельдера

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ $f, g : E \subset X \to C$ ($E$ - изм.) — заданы п.в, измеримы

$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда: $\int\limits_E |fg| d\mu \leq \left( \int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int\limits_E |g|^q d\mu) \right)^{\frac{1}{q}}$

## 1.2 Нераверство Минковского

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ $f, g$ — заданы п.в, измеримы

$1 \leq p < +\infty$. Тогда: $\left( \int\limits_E |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int\limits_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int\limits_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$

# 2 Интеграл комплекснозначных функции

$(X, \mathbb{A}, \mu)$, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$
Назовем $f$ - измеримой(суммирируемой), если $Ref,\ Imf$ – изм.(сумм.)
Тогда интегралом такой функции назовем:

$$\int_E f d\mu = \int_E Ref + i \int_E Imf$$

# 3 Пространство $L_p(E, \mu),\ 1 \leq p < +\infty$

$(X, \mathbb{A}, \mu)\, E \in \mathbb{A}$
$L'_p(E, \mu) = \{$ f : п.в. $E \to \mathbb{C}$, изм., $\int\limits_E |f|^p d\mu < +\infty\}$
Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).
У этого пространства есть дефект - если определить норму как $||f|| =$

$\left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0 будут давать норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:
$f \sim g$, если $f = g$ п.в.

$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu)/_\sim$ - лин. норм. пр-во с нормой $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $||f||_p$ за норму $f$ в пространстве $L_p$.

# 4 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$L_\infty(E, \mu) = \{$ f : п.в. $E \to \mathbb{C}, \ \operatorname*{ess\,sup}_E |f| < +\infty\}$
NB1: $||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

# 5 Существенный супремум

$(X, \mathbb{A}, \mu), E \subset X-$ изм., $f$ : п.в. $E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf\{A \in R : f(x) \leq A$ п.в. $x\}$.
В этом определении $A$ - существенная верхняя граница.
Свойства:

1. $\operatorname*{ess\,sup}_E f \le \sup_E f$

2. $f(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.

3. $\int\limits_E |fg| d\mu \le \operatorname*{ess\,sup}_E |g| \cdot \int\limits_E |f| d\mu$.

# 6 Фундаментальная последовательность, полное пространство

$\{a_n\}$ - фундаментальная последовательность в метрическом пространстве $X$, если $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, k > N : \rho(a_n, a_k) < \epsilon$
Метрическое пространство называется полным, если фундаментальность последовательсти влечёт её сходимость к какому-то пределу в этом пространстве

# 7 Плотное множество

$X$ — метрическое пространство.
$A \subset X$ — (всюду) плотно в $X$, если для любого открытого мн-ва $G \subset X \quad A \cap G \neq \varnothing$.
Или, эквивалентно, любой шар $B(x_0, r)$ содержит точки из $A$.

# 8 Финитная функция

$f$ — финитная в $\mathbb{R}^m$, если она равна нулю вне некоторого шара.

# 9 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в $R^3$

$M \subset R^3$ – простое 2-мерное многообразие, $C^1$ гладкости.
$\phi : \underset{\text{откр. обл.}}{O} \subset R^2 \to R^3$, $\phi \in C^1$ – гомофорфизм, $\phi(O) = M$

$E \subset M$ – изм. по Лебегу, если $\phi^{-1}(E)$ – изм. по Лебегу в $R^2$

# 10 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в $R^3$

$S(E) := \iint\limits_{\phi^{-1}(E)} |\phi'_u \times \phi'_v| dudv$ – взвеш. образ меры Лебега отн. $\phi$. Значит это мера на $\mathbb{A}_M$

# 11 Поверхностный интеграл первого рода

$M$ – простое, гл, 2-мерное в $R^3$, $\phi$ – параметризация
$f$ – изм. отн. $S$ (см. выше), $f > 0$ (или $f$ – суммируем. по $S$)
Тогда: $\int_M f dS$ – называет инт. первого рода функ. $f$ по поверхности $M$

# 12 Кусочно-гладкая поверхность в $R^3$

$M \subset \mathbb{R}^3$ называется кусочно-гладкой, если $M$ представляет собой объединение:
* конечного числа простых гладких поверхностей
* конечного числа простых гладких дуг
* конечного числа точек

# 13 Гильбертово пространство

$\mathbb{H}$ - линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствуйющей нормы, называется Гильбертовым.

# 14 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}, \sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$

# 15 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$
$\sum x_n$ сходится к $x$, если
$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, S_n \to x$ (то есть $|S_n - x| \to 0$ - сходимость по мере)

# 16 Ортогональное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l : e_k \perp e_l, e_k \neq 0, e_l \neq 0$.

# 17 Ортонормированное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если $e_k$ - ортогональное семейство векторов, и $\forall k : |e_k| = 1$

# 18 Коффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортонормированная система в $\mathbb{H}, x \in \mathbb{H}$.
$c_k(x) = \dfrac{< x, e_k >}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора $x$ по ортогональной системе $\{e_k\}$

# 19 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора $x$ по ортогональной системе $\{e_k\}$

# 20 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$

1. $\{e_k\}$ — **базис**, если $\forall x \in \mathbb{H}: \ \exists c_k$, что $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$
2. $\{e_k\}$ — **полная** О.С., если $\forall k : z \perp e_k \Rightarrow z = 0$
3. $\{e_k\}$ — **замкнутая** О.С., если $\forall x \in \mathbb{H} : \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 = ||x||^2$

# 21 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

# 22 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

$F_1, F_2$ – два касательных векторных поля к $M$
$\forall p \in M \quad F_1(p), F_2(p)$ – Л.Н.З. касательные векторы
Тогда поле нормалей стороны определяется, как $n := F_1 \times F_2$

Репéр - пара векторов из $F_1 \times F_2$.

# 23 Интеграл II рода

$M$ – простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$
$n_0$ – фиксированная сторона (одна из двух)
$F : M \to \mathbb{R}^3$ – векторное поле

Тогда интегралом II рода назовем $\int\limits_M \langle F, n_0\rangle ds$

Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака

2. Не зависит от параметризации

3. $F = (P, Q, R)$

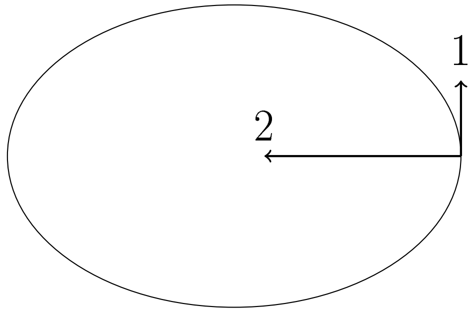
   Тогда интеграл имеет вид $\iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

   NB: $Qdxdz = -Qdzdx$

# 24 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый - снаружи от контура (задает направление "движения" по петле), второй - внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали поверхности.




## 25 Тригонометрический ряд

- $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

  (где $a_i, b_i$ – коэффициенты ряда)

- Другая форма:

  $$\sum_{k=\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

  Тогда $S_n := \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$

## 26 Коэффициенты Фурье функции

- $$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\ dx$$

- $$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(kx)\ dx$$

- $$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx$$

# 27 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(kt))$$

# 28 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

# 29 Ротор, дивергенция векторного поля

Пусть $V = (P, Q, R)$ — гладкое векторное поле в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^3$. Тогда:
$\operatorname{rot} V = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)$
//TODO: Дивергенция

# 30 Соленоидальное векторное поле

$v = (P, Q, R)$ — соленоидальное, если существует векторный потенциал $B$, т.е. $v = \operatorname{rot} B$.

# 31 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

$$\forall a \forall n_0 : rot(F, a, n_0) = \lim_{r \to 0} \left( \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\delta B(a,r)} F_l dl \right)$$

где $F_l$ - проекция F на касательное направление

$$\forall a \forall n_0 : div(F, a) = \lim_{r \to 0} \left( \frac{1}{\lambda_3(B(a, r))} \iint\limits_{\delta B(a,r)} < F, n_o > dS \right)$$

# 32 Свертка

$$(f * K)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x - t)K(t)dt$$

где $f, K \in L_1([-\pi, \pi])$