

Определения по матану, семестр 4

25 марта 2018 г.

Содержание

1	Свойство, выполняющееся почти везде	3
2	Сходимость почти везде	3
3	Сходимость по мере	3
4	Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости	3
5	Интеграл ступенчатой функции	3
6	Интеграл неотрицательной измеримой функции	4
7	Суммируемая функция	4
8	Интеграл суммируемой функции	4
9	Произведение мер	5
10	Теорема Фубини	5
11	Образ меры при отображении	6
12	Взвешенный образ меры	6
13	Плотность одной меры по отношению к другой	6
14	Заряд, множество положительности	6
14.1	Заряд	6
14.2	Множество положительности	6

15 Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы	7
16 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского	7
16.1 Неравенство Гельдера	7
16.2 Неравенство Минковского	7
17 Интеграл комплекснозначных функций	8
18 Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$	8
19 Пространство $L_\infty(E, \mu)$	8
20 Существенный супремум	9

1 Свойство, выполняющееся почти везде

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой, и $\omega(x)$ — утверждение, зависящее от точки x .
 $E := \{x : \omega(x) \text{ — ложно}\}$ и $\mu E = 0$. Тогда говорят, что $\omega(x)$ верно при почти всех (п.в.) x .

2 Сходимость почти везде

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой, и $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.
Говорим, что $f_n \rightarrow f(x)$ почти везде, если $\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ измеримо и имеет меру 0.

3 Сходимость по мере

(X, a, μ) - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$
 $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны
Говорят, что f_n сходится к f по мере μ (при $n \rightarrow +\infty$) (обозначается $f_n \xrightarrow{\mu} f$) если
 $\forall \epsilon > 0 \mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

(X, a, μ) - пространство с мерой
 $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - п.в. конечны, измеримы
 $f_n \rightarrow f$.
Тогда эта сходимость “почти равномерная”

5 Интеграл ступенчатой функции

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой
 $f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ - ступенчатая функция, E_k - измеримые дизъюнктные множества,
 $f \geq 0$
Интегралом ступенчатой функции f на множестве \mathbb{X} назовём

$$\int_{\mathbb{X}} f d\mu := \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что $[0 \cdot \infty = 0]$

6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

f - измеримо, $f \geq 0$, её интегралом на множестве X назовём

$$\int_X f d\mu := \sup \left(\int_X g \right)$$

, где $0 \leq g \leq f$, g — ступенчатая

7 Суммируемая функция

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

f — измерима, $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ конечен (хотя бы один из них).

Тогда интегралом f на X назовём

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ - \int_X f^-$$

Тогда если конечен $\int_X f$, (то есть конечны интегралы по обоим срезкам), то f называют суммируемой

8 Интеграл суммируемой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

f — измерима, $E \in \mathbb{A}$

Тогда интегралом f на множестве E назовём

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi(E) d\mu$$

f суммируемая на E , если $\int_X f^+ \chi(E)$ и $\int_X f^- \chi(E)$ конечны

9 Произведение мер

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$ - пространства с мерой

μ, ν - σ -конечные меры

$$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \alpha, B \in \beta\}$$

$$m_0 : \alpha \times \beta \rightarrow \overline{R}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

m - называется произведением мер μ и ν , если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\alpha \times \beta$ на некоторую σ -алгебру $\alpha \otimes \beta$.

$m = \mu \times \nu$ - обозначение

$\langle X \times Y, \alpha \otimes \beta, \mu \times \nu \rangle$ - произведение пространств с мерой

10 Теорема Фубини

$\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle, \langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$ - пространство с мерой,

μ, ν — σ -конечные и полные,

$$m = \mu \times \nu,$$

f — суммируемая на $X \times Y$ по m .

Тогда:

- при «почти всех» x функция $f_x \in \mathbb{L}(Y, \nu)$, то есть суммируема на Y по ν
при «почти всех» y функция $f^y \in \mathbb{L}(X, \mu)$

•

$$x \mapsto \phi(x) \mid \phi(x) = \int_Y f_x d\nu \in \mathbb{L}(X, \mu)$$

$$y \mapsto \psi(y) \mid \psi(y) = \int_X f^y d\mu \in \mathbb{L}(Y, \nu)$$

Это есть эти функции суммируемы в некотором контексте (X, μ и Y, ν соответственно)

•

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi(x) d\mu = \int_X \left(\int_Y f d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_Y \psi(y) d\nu = \int_Y \left(\int_X f d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

11 Образ меры при отображении

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, _)$ — пространство с σ -алгеброй.
 $\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.

ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ .

12 Взвешенный образ меры

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, _)$ — пространство с σ -алгеброй.
 $\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$.

ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ .

При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

13 Плотность одной меры по отношению к другой

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

$\nu(E) = \int_E \omega(x) d\mu$. ν — мера на X .

ω называется плотностью ν относительно μ .

14 Заряд, множество положительности

14.1 Заряд

$(X, \mathbb{A}, _)$ — пространство с σ -алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).

ϕ счётно аддитивна.

Тогда ϕ — заряд.

14.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, B измеримо: $\phi(B) \geq 0$.

15 Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \cdot \cos \phi_1 & 1 \leq i \leq m-2 : \phi_i &\in [0, \pi] \\
 x_2 &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2 & i = m-1 : \phi_i &\in [0, 2\pi] \\
 x_3 &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_{m-2} &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-3} \cdot \cos \phi_{n-2} \\
 x_{m-1} &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \cos \phi_{n-1} \\
 x_m &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \sin \phi_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{J} = r^{n-1} \cdot (\sin \phi_1)^{n-2} \cdot (\sin \phi_2)^{n-3} \cdots (\sin \phi_{n-2})^1 \cdot (\sin \phi_{n-1})^0$$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m -мерный вектор на нормаль к $(m-1)$ -мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру пока не дойдём до нашего любимого \mathbb{R}^2 . Уже в нём рассматриваем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

16 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

16.1 Неравенство Гельдера

(X, \mathbb{A}, μ) $f, g : E \subset X \rightarrow C$ (E - изм.) — заданы п.в, измеримы

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогда: } \int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

16.2 Неравенство Минковского

(X, \mathbb{A}, μ) f, g — заданы п.в, измеримы

$$1 \leq p < +\infty. \text{ Тогда: } \left(\int_E |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

17 Интеграл комплекснозначных функции

TODO: Лев и Вадим

18 Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$

(X, \mathbb{A}, μ) $E \subset \mathbb{A}$

$$L'_p(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ изм.}, \int_E |f|^p d\mu < +\infty \}$$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект - если определить норму как $\|f\| = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$,

то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0 будут давать норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$, если $f = g$ п.в.

$$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu) / \sim - \text{лин. норм. пр-во с нормой } \|f\| = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $\|f\|_p$ за норму f в пространстве L_p .

19 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$$L_\infty(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ess sup}_E |f| < +\infty \}$$

NB1: $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_E |f|.$

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

20 Существенный супремум

$(X, \mathbb{A}, \mu), E \subset X$ — изм., $f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf \{A \in \mathbb{R} : f(x) \leq A \text{ п.в. } x\}$.

В этом определении A — существенная верхняя граница.

Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2. $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int_E |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f| d\mu$.