

Теоремы по матану, семестр 4

4 марта 2018 г.

Содержание

1	Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия	2
2	Измеримость монотонной функции	2
3	Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере	3
4	Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде	3
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	4
5.1	Для определения (5)	4
5.2	Для окончательного определения	5
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	7
7	Теорема Леви	8
8	Линейность интеграла Лебега	8
9	Теорема об интегрировании положительных рядов.	9
10	Теорема о произведении мер.	9
11	Абсолютная непрерывность интеграла.	9
12	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.	9
13	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.	11
14	Теорема Фату. Следствия.	12
14.1	Следствие 1	12
14.2	Следствие 2	12

1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

f — измеримая функция на X , $\forall x \ f(x) \geq 0$. Тогда \exists ступенчатые функции f_n , такие что:

1. $\forall x \ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$.
2. $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$.

Следствие 1:

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измеримая. Тогда \exists ступенчатая $f_n : \forall x : \lim f_n(x) = f(x)$ и $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f = f^+ - f^-$. $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Срезки измеримы: $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$, при этом f и $g \equiv 0$ измеримы (f^- измерима аналогично).
2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции $f_n^+ \rightarrow f^+$, $f_n^- \rightarrow f^-$. Тогда и $f_n^+ - f_n^-$ это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов: $f_n^+ - f_n^- \rightarrow f^+ - f^- = f$. Неравенство с модулем верно при правильных эпсилон-неравенствах.

Следствие 2:

f, g — измеримые функции. Тогда fg — измеримая функция. При этом считаем, что $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f_n \rightarrow f : |f_n| \leq |f|$, $g_n \rightarrow g : |g_n| \leq |g|$ из первого следствия. Тогда $f_n g_n \rightarrow fg$ и fg измерима по теореме об измеримости пределов и супремумов (произведение ступенчатых функций — ступенчатая функция, значит, измеримая)

Следствие 3:

f, g — измеримые функции. Тогда $f + g$ — измеримая функция. При этом считаем, что $\forall x$ не может быть, что $f(x) = \pm\infty, g(x) = \mp\infty$

Доказательство:

Доказывается как следствие 2.

2 Измеримость монотонной функции

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое по Лебегу, $E' \subset E, \lambda_m(E \setminus E') = 0, f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть сужение $f : E' \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда f измерима на E .

Доказательство:

1. $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a), e := E \setminus E', \lambda_m(e) = 0$.
2. $E'(f < a)$ открыто в E' , так как f непрерывна. Поэтому $E' = G \cap E' \Rightarrow$, где G — открытое в E множество. Значит, $E'(f < a)$ — измеримо по Лебегу, так как оно является борелевским.
3. Но и $e(f < a)$ измеримо, так $\lambda_m(e) = 0$, следовательно $E(f < a)$ измеримо как объединение измеримых множеств

Следствие:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна. Тогда f измерима.

Доказательство:

Множество разрывов монотонной функции НБЧС множество, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

(X, a, μ) - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны, измеримы

$f_n \rightarrow f$ (поточечно, п.в.)

Доказательство:

1. подменим значения f_n и f на некотором множестве меры 0 так, чтобы сходимость $f_n \rightarrow f$ была всюду. (Так можно сделать. Действительно, $f_n \rightarrow f$ на $X \setminus e$, $\mu e = 0$

f_n - конечно на $X \setminus e_n$,

f - конечно на $X \setminus e_0$.

Тогда на $(X \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n)$ функции конечны и есть сходимость $f_n \rightarrow f$. По свойствам меры $\mu \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n =$

0. Тогда определим на $\bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n$ $f_n = f = 0$. Это очевидно даст нам необходимую конечность и поточечную сходимость.)

2. (частный случай) $f_n \rightarrow f \equiv 0$. Тогда пусть $\forall x f_n(x)$ - монотонно (по n). $|f_n(x)|$ - убывает с ростом n и $X(|f_n| \geq \epsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \epsilon)$. А также $\bigcap_{n=0}^{+\infty} X(|f_n| \geq \epsilon) = \emptyset$.

$$\begin{cases} \mu X < +\infty \\ \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu E_n \rightarrow \mu \bigcup E_n$ - Th о непрерывности меры сверху.

$\Rightarrow \mu X(|f_n| \geq \epsilon) \rightarrow \mu \emptyset = 0$

3. (общий случай) $f_n \rightarrow f$. Рассмотрим $\phi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$. Заметим свойства ϕ :

$$\begin{cases} \phi_n(x) \rightarrow 0 \\ \phi_n \downarrow_n \end{cases}$$

$X(|f_n - f| \geq \epsilon) \subset X(|\phi_n| \geq \epsilon) \Rightarrow$ по монотонности меры имеем $\mu X(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu X(|\phi_n| \geq \epsilon) \xrightarrow{\text{part.case}} 0$, ч.т.д.

4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

(X, a, μ) - пространство с мерой

$f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - п.в. конечны, измеримы

$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Тогда $\exists n_k \uparrow : f_{n_k} \rightarrow f$ п.в.

Доказательство: $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда $\exists n_k : \forall n \geq n_k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$ (можно считать $n_1 < n_2 < \dots$)

Проверим $f_{n_k} \rightarrow f$ п.в. : $E_k := \bigcap_{j=k}^{+\infty} X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j})$

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$$

$$E_0 := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

$$\mu E_k \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{(k-1)}} - \text{конечно} \Rightarrow \mu E_k \rightarrow \mu E_0 \Rightarrow \mu E_0 = 0 \text{ (т.к. } \mu E_k \rightarrow 0).$$

Рассмотрим $X \notin E_0$, т.е. если $X \notin E_0$, то $\exists k : X \notin E_k$, тогда $\forall j \geq k |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$ при $n \geq n_j$, т.е. $f_{n_k} \rightarrow f$, ч.т.д. Следствие: $f_n \Rightarrow f$ $|f_n| \leq g$ п.в. Док-во: Рассмотрим последовательность f_{n_k} где $f_{n_k} \rightarrow f$ п.в. и вдоль нее применим Th о двух городских.

$$\begin{cases} f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X \setminus e_1 \\ |f_n(x)| \leq g(x) \forall x \in X \setminus e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f| \leq g \text{ на } (X \setminus e_1) \setminus e_2$$

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

5.1 Для определения (5)

1. $\int_{\mathbb{X}} f$ не зависит от представления f как ступенчатой функции, то есть если f реализуется как $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ и как $f = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$, интегралы по этим функциям равны

Доказательство:

Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

$$\text{Пусть } F_{ij} = E_i \cap G_j$$

$$\text{Тогда } f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$$

$$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_i (\lambda_i \cdot \sum_j (\mu F_{i,j})) = \sum_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f \text{ для первого разбиения}$$

Аналогично для второго разбиения получаем

$$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_j (\alpha_j \cdot \sum_i (\mu F_{i,j})) = \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int f \text{ для второго разбиения, что и требовалось доказать}$$

2. f, g -измеримые ступенчатые функции, $f \leq g$, тогда $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

$$\text{Пусть } f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}), g = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

$$\text{Пусть } F_{ij} = E_i \cap G_j$$

Тогда $\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leq \sum_j (\alpha_j \cdot \mu F_{i,j}) = \int g$, что и требовалось доказать

5.2 Для окончательного определения

1. Монотонность $f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

(a) $f, g \geq 0$, тогда доказательство тривиально (по свойствам супремума)

$$(b) \int_{\mathbb{X}} f = \int_{\mathbb{X}} f^+ - \int_{\mathbb{X}} f^-$$

$$\int_{\mathbb{X}} g = \int_{\mathbb{X}} g^+ - \int_{\mathbb{X}} g^-$$

Из того, что $\int_{\mathbb{X}} f^+ \leq \int_{\mathbb{X}} g^+$, а $\int_{\mathbb{X}} f^- \geq \int_{\mathbb{X}} g^-$ следует, что $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

2. $\int_{\mathbb{E}} 1 \cdot d\mu = \mu E$

$$\int_{\mathbb{E}} 0 \cdot d\mu = 0$$

Очевидно из определения интеграла ступенчатой функции

3. $\mu E = 0$, f -измерима, тогда $\int_{\mathbb{E}} f = 0$, даже если $f = \infty$ на \mathbb{E}

Доказательство:

(a) f -ступенчатая \Rightarrow ограниченная

$$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}), \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sum \lambda_k \cdot \mu(E \cap E_k)$$

Но $\mu(E \cap E_k) = 0$ (так как $\mu E = 0$), тогда $\int_{\mathbb{E}} f = 0$

(b) f - измеримая, $f \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{E}} f = \sup \left(\int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq f, g - \text{ ступенчатая}$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sup(0) = 0$$

(c) f - произвольная измеримая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- = 0 - 0 = 0$$

4. (a) $\int_{\mathbb{E}} -f = - \int_{\mathbb{E}} f$

$$(b) \forall c \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

Доказательство:

$$(a) (-f)^+ = f^-$$

$$(-f)^- = f^+$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} -f = \int_{\mathbb{E}} (-f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (-f)^- = \int_{\mathbb{E}} f^- - \int_{\mathbb{E}} f^+ = - \int_{\mathbb{E}} f$$

(b) Пусть $c > 0$. Если $c < 0$, то по предыдущему случаю можем рассматривать для $-c < 0$.

Если $c = 0$, то по предыдущей теореме $\int_{\mathbb{E}} (0 \cdot f) = \int_{\mathbb{E}} 0 = 0 = 0 \cdot \int_{\mathbb{E}} f$

i. Пусть $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq c \cdot f, g - \text{ ступенчатая}$$

Пусть $g = c \cdot \tilde{g}$, тогда $\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right)$, где $0 \leq c \cdot \tilde{g} \leq c \cdot f$, \tilde{g} - ступенчатая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right) = \sup_{\mathbb{E}} \left(c \cdot \int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

ii. Если f - произвольная:

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^- = \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^+ - \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^- = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^+ - c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^- = c \cdot \left(\int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

5. Если существует $\int_{\mathbb{E}} f d\mu$, то $\left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$

Доказательство:

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\int_{\mathbb{E}} -|f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$-\int_{\mathbb{E}} |f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$\text{Тогда } \left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

6. f - измеримая на \mathbb{E} , $\mu\mathbb{E} < \infty$

$$a \leq f \leq b, \text{ тогда } a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Доказательство:

$$a \leq f \leq b \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} a \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} b$$

$$a \cdot \int_{\mathbb{E}} 1 \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \int_{\mathbb{E}} 1$$

$$a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Следствие:

Если f - Измеримая и ограниченная на \mathbb{E} , $\mu\mathbb{E} < \infty$, тогда f - суммируемая на \mathbb{E}

7. f - суммируемая на $\mathbb{E} \Rightarrow f$ почти везде конечная на \mathbb{E} (то есть $f \in \alpha^0(\mathbb{E})$)

Доказательство:

(a) Пусть $f \geq 0$

Пусть $f = +\infty$ на A и пусть $\mu A > 0$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : f \geq n \cdot \chi_A$

$$\text{Тогда } \forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{E}} f \geq n \cdot \int_{\mathbb{E}} \chi_A = n \cdot \mu A \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} f = +\infty$$

(b) f любого знака

Распишем $f = f^+ - f^-$, по предыдущему пункту f^+, f^- конечны почти везде $\Rightarrow f$ тоже конечно почти везде

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — измеримы. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — изм., $f \geq 0$

Тогда:
$$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$$

Доказательство:

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

$$\int_A f d\mu = \sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum_k (\lambda_k \cdot (\sum_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\int_{A_i} f)$$

2. Докажем, что $\int_A f \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) Рассмотрим $0 \leq g \leq f$ — ступенчатая. $\int_A g = \sum_i \int_{A_i} g \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(b) Переходя к *sup* получаем желаемое

3. Теперь докажем, что $\int_A f \geq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) $A = A_1 \sqcup A_2$

i. Рассмотрим g_1, g_2 — ступенчатые такие, что $0 \leq g_i \leq f \cdot \chi_{A_i}$

ii. Рассмотрим их общее разбиение $E_k : g_i = \sum_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

iii. $g_1 + g_2$ — ступенчатая и $0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$

iv. $\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \stackrel{lemma}{=} \int_A (g_1 + g_2) \leq \int_A f$

v. Поочерёдно переходя к *sup* по g_1 и g_2 получаем: $\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, что $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \sqcup B$ будем последовательно отщеплять последнее множество по (a)

(c) $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$

i. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$

ii. $A = (\bigsqcup_{i=1}^n A_i) \sqcup B$, где $B = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$

iii. $\int_A f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$

iv. Переходим к *lim* по n

Следствие 1: $0 \leq f \leq g$ — измеримы и $A \subset B$ — измеримы $\Rightarrow \int_A f \leq \int_B g$

$$\int_B g \geq \int_B f = \int_A f + \int_{B \setminus A} f \geq \int_A f$$

Следствие 2: f - суммируема на $A \Rightarrow \int_A f = \sum_i \int_{A_i} f$

Достаточно рассмотреть срезки f^+ и f^-

Следствие 3: $f \geq 0$ - изм. $\delta : \mathbb{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (A \mapsto \int_A f d\mu) \Rightarrow \delta$ - мера

7 Теорема Леви

(X, \mathbb{A}, μ) , $f_n \geq 0$ - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$ при почти всех x

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ при почти всех x (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

Тогда: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

Доказательство:

N.B. $\int_X f_n \leq \int_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$

f - измерима как предел последовательности измеримых функций

1. \leq

Очевидно $f_n \leq f$ при п.в $x \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f$. Делаем предельный переход по n

2. \geq

(a) Логичная редукция: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq \int_X g$, где $0 \leq g \leq f$ - ступенчатая

(b) Наглая редукция: $\forall c \in (0, 1) : \lim \int_X f_n(x) \geq c \cdot \int_X g$

i. $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq c \cdot g\}$. Очевидно $E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$

ii. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ т.к. $c < 1$

iii. $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} g \Rightarrow \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g$

iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем непрерывность меры снизу

8 Линейность интеграла Лебега

$f, g \geq 0$, измеримые

Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$

Доказательство:

1. Пусть f, g - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

$$f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$g = \sum_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \sum_k (\lambda_k + \alpha_k) \cdot \mu E_k = \sum_k \lambda_k \cdot \mu E_k + \sum_k \alpha_k \cdot \mu E_k = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g, \text{ что и требовалось доказать}$$

2. $f, g \geq 0$, измеримые

Тогда $\exists h_n : 0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$, h_n ступенчатые

$\exists \tilde{h}_n : 0 \leq \tilde{h}_n \leq \widetilde{h_{n+1}} \leq g$, \tilde{h}_n ступенчатые

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = f$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}_n = g$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \tilde{h}_n) = \int_{\mathbb{E}} h_n + \int_{\mathbb{E}} \tilde{h}_n$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \tilde{h}_n) \rightarrow \int_{\mathbb{E}} (f + g)$$

$$\int_{\mathbb{E}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} f$$

$$\int_{\mathbb{E}} \tilde{h}_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} g$$

Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

3. Если f, g - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

9 Теорема об интегрировании положительных рядов.

TODO

10 Теорема о произведении мер.

TODO

11 Абсолютная непрерывность интеграла.

TODO

12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой,

f_n, f – измеримы,
 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (сходится по мере),
 $\exists g : \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g – называется мажорантой)
- g – суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_{\mathbb{X}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{X}} f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. f_n – суммируема, так как существует мажоранта g
2. f – суммируема по теореме Рисса ($f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде, $|f_{n_k}| \leq g$, тогда $|f| \leq g$ почти везде)
3. «уж тем более»:

$$\left| \int_{\mathbb{X}} f_n - \int_{\mathbb{X}} f \right| \leq \int_{\mathbb{X}} |f_n - f|$$

Допустим, что $\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ уже доказано.

Тогда «уж тем более» очевидно.

4. Докажем основное утверждение:

Разберем два случая:

- (a) $\mu\mathbb{X} < \infty$ Фиксируем $\epsilon \geq 0$ $X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$

$\mu X \rightarrow 0$ (так как $f_n \Rightarrow f$)

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int_{X_n} |f_n - f| + \int_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon \mu\mathbb{X} \text{ (прим. } \int_{X_n} 2g \rightarrow 0 \text{ по след. к т. об абс. сходимости)}$$

- (b) $\mu\mathbb{X} = \infty$

Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для g :

$$\forall \epsilon \exists A \subset \mathbb{X} \mid \mu A \text{ - конеч. } \int_{X \setminus A} g < \epsilon$$

доказательство:

$$\int_{\mathbb{X}} = \sup \left(\int_{\mathbb{X}} g_k \mid 0 \leq g_k \leq g \right) \text{ (} g_k \text{ – ступен.)}$$

$$\exists g_n \int_{\mathbb{X}} g - \int_{\mathbb{X}} g_n < \epsilon$$

$$A := \text{supp } g_n \text{ (} \text{supp } f := \text{замыкание } \{x \mid f(x) \neq 0\} \text{)}$$

$$\begin{aligned}
A &= \bigcup_{k|\alpha_k \neq 0} E_k \\
g &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \chi_{E_k} \quad (X = \bigsqcup E_k) \\
\int_{\mathbb{X}} g_n &= \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty \quad (\mu A - \text{конеч.}) \\
\int_{\mathbb{X} \setminus A} g &= \int_{\mathbb{X} \setminus A} g - g_n \leq \int_{\mathbb{X}} g - g_n < \epsilon \\
\text{Теперь докажем основное утверждение:} \\
\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| &= \int_A |f_n - f| + \int_{\mathbb{X} \setminus A} |f_n - f| \leq \int_A |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon \quad \left(\int_A |f_n - f| \rightarrow 0 \text{ по п. (а)} \right)
\end{aligned}$$

13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой,

f_n, f – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ почти везде,

$\exists g : \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g – называется мажорантой)
- g – суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_{\mathbb{X}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{X}} f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. «уж тем более» см. пред. теорему.

2. Докажем основное утверждение:

$$h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

Заметим, что при фикс. x выпол. $0 \leq h_n \leq 2g$ почти везде

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| = 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \uparrow$, $2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде

$$\int_{\mathbb{X}} (2g - h_n) d\mu \rightarrow \int_{\mathbb{X}} 2g \quad (\text{по т. Леви})$$

$$\int_{\mathbb{X}} 2g - \int_{\mathbb{X}} h_n \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

14 Теорема Фату. Следствия.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой

f_n, f – измеримы,

$f_n \geq 0$

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ «почти везде»,

$\exists C > 0 \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \leq C$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$

$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) = \text{почти везде} = \lim f_n = f \quad (g_n \rightarrow f \text{ почти везде})$

$\int_{\mathbb{X}} g_n \leq \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$

$\int_{\mathbb{X}} f = \text{по т. Леви} = \lim \int_{\mathbb{X}} g_n \leq C$

14.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$ – измер.

$f_n \xrightarrow{\mu} f$

$\exists C \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$\exists f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде

14.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$ – измер.

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} \underline{\lim}(f_n) \geq \underline{\lim} \int_{\mathbb{X}} f_n$$

Доказательство:

$\exists n_k \mid \int_{\mathbb{X}} f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n$

Рассмотрим g_{n_k} такое, что $g_{n_k} \uparrow$ и $g_{n_k} \rightarrow \underline{\lim} f$

Применяем теорему Леви к нер-ву $\int_{\mathbb{X}} g_{n_k} \leq \int_{\mathbb{X}} f_{n_k}$

$$\int_{\mathbb{X}} \underline{\lim} f \leq \underline{\lim} \int_{\mathbb{X}} f_n$$