

# Теоремы по матану, семестр 4

3 июня 2018 г.

## Содержание

1	Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия	5
2	Измеримость монотонной функции	6
3	Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере	6
4	Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде	8
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	8
5.1	Для определения (5)	8
5.2	Для окончательного определения	9
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	12
7	Теорема Леви	14
8	Линейность интеграла Лебега	15
9	Теорема об интегрировании положительных рядов	16
10	Теорема о произведении мер	16

<b>11 Абсолютная непрерывность интеграла</b>	<b>18</b>
11.1 Следствие . . . . .	18
<b>12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.</b>	<b>19</b>
<b>13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.</b>	<b>21</b>
<b>14 Теорема Фату. Следствия.</b>	<b>22</b>
14.1 Следствие 1 . . . . .	22
14.2 Следствие 2 . . . . .	22
<b>15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры</b>	<b>23</b>
15.1 Лемма . . . . .	23
15.2 Следствие . . . . .	23
15.3 Теорема . . . . .	23
<b>16 Критерий плотности</b>	<b>24</b>
<b>17 Лемма о единственности плотности</b>	<b>25</b>
<b>18 Лемма о множестве положительности</b>	<b>26</b>
<b>19 Теорема Радона—Никодима</b>	<b>27</b>
<b>20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости</b>	<b>28</b>
<b>21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»</b>	<b>29</b>
<b>22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме</b>	<b>31</b>
<b>23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега</b>	<b>31</b>

24 Теорема (принцип Кавальери)	32
25 Теорема Тонелли	33
26 Формула для Бета-функции	35
27 Объем шара в $\mathbb{R}^m$	36
28 Теорема о вложении пространств $L^p$	36
29 Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере	37
30 Полнота $L^p$	38
31 Лемма Урысона	39
32 Плотность в $L^p$ непрерывных финитных функций	39
33 Теорема о непрерывности сдвига	39
34 Теорема об интеграле с функцией распределения	40
35 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве	40
36 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе	41
37 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя	42
38 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля	43
39 Теорема о характеристике базиса	44
39.1 $1 \Rightarrow 2$ . . . . .	44
39.2 $2 \Rightarrow 3$ . . . . .	44
39.3 $3 \Rightarrow 4$ . . . . .	45

39.4	$4 \Rightarrow 1$	45
39.5	$4 \Rightarrow 5$	45
39.6	$5 \Rightarrow 4$	45
40	Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда	45
41	Теорема Римана–Лебега	46
42	Формула Грина	47
43	Формула Стокса	48
44	Формула Гаусса–Остроградского	49
45	Лемма об оценке интеграла ядра Дирихле	50
46	Теорема об интегрировании ряда Фурье	51

# 1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой.

$f$  — измеримая функция на  $X$ ,  $\forall x \ f(x) \geq 0$ . Тогда  $\exists$  ступенчатые функции  $f_n$ , такие что:

1.  $\forall x \ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ .
2.  $f_n(x)$  поточечно сходится к  $f(x)$ .

Следствие 1:

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  измеримая. Тогда  $\exists$  ступенчатая  $f_n : \forall x : \lim f_n(x) = f(x)$  и  $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ .

Доказательство:

1. Рассмотрим  $f = f^+ - f^-$ .  $f^+ = \max(f, 0)$ ,  $f^- = \max(-f, 0)$ . Срезки измеримы:  $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$ , при этом  $f$  и  $g \equiv 0$  измеримы ( $f^-$  измерима аналогично).
2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции  $f_n^+ \rightarrow f^+$ ,  $f_n^- \rightarrow f^-$ . Тогда и  $f_n^+ - f_n^-$  это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов:  $f_n^+ - f_n^- \rightarrow f^+ - f^- = f$ . Неравенство с модулем верно при правильных эpsilon-неравенствах. **Схрена ли**

Следствие 2:

$f, g$  — измеримые функции. Тогда  $fg$  — измеримая функция. При этом считаем, что  $0 \cdot \infty = 0$ .

Доказательство:

1. Рассмотрим  $f_n \rightarrow f : |f_n| \leq |f|$ ,  $g_n \rightarrow g : |g_n| \leq |g|$  из первого следствия. Тогда  $f_n g_n \rightarrow fg$  и  $fg$  измерима по теореме об измеримости пределов и супремумов (произведение ступенчатых функций — ступенчатая функция, значит, измеримая)

Следствие 3:

$f, g$  — измеримые функции. Тогда  $f + g$  — измеримая функция. При этом считаем, что  $\forall x$  не может быть, что  $f(x) = \pm\infty, g(x) = \mp\infty$

Доказательство:

Доказывается как следствие 2.

## 2 Измеримость монотонной функции

Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$  — измеримое по Лебегу,  $E' \subset E, \lambda_m(E \setminus E') = 0, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть сужение  $f : E' \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно. Тогда  $f$  измерима на  $E$ .

Доказательство:

1.  $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a), e := E \setminus E', \lambda_m(e) = 0$ .
2.  $E'(f < a)$  открыто в  $E'$ , так как  $f$  непрерывна. Поэтому  $E' = G \cap F'$  где  $G$  — открытое в  $\mathbb{R}^m$  множество (по теореме об открытости в пространстве и подпространстве). Значит,  $E'(f < a)$  — измеримо по Лебегу, так как оно является борелевским.
3.  $e(f < a)$  — подмножество  $e$ , а  $\lambda_m(e) = 0$ , поэтому  $\lambda_m(e(f < a)) = 0 \Rightarrow e(f < a)$  измеримо
4. Следовательно  $E(f < a)$  измеримо как объединение измеримых множеств, следовательно,  $f$  измерима на  $E$ .

Следствие:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна. Тогда  $f$  измерима.

Доказательство:

Множество разрывов монотонной функции НБЧС множество, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

## 3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

$(X, a, \mu)$  — пространство с мерой,  $\mu \cdot X < +\infty$

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — п.в. конечны, измеримы

$f_n \rightarrow f$  (поточечно, п.в.)

Тогда  $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Доказательство:

1. подменим значения  $f_n$  и  $f$  на некотором множестве меры 0 так, чтобы сходимость  $f_n \rightarrow f$  была всюду. (Так можно сделать. Действительно,  $f_n \rightarrow f$  на  $X \setminus e$ ,  $\mu e = 0$

$f_n$  - конечно на  $X \setminus e_n$ ,

$f$  - конечно на  $X \setminus e_0$ .

Тогда на  $(X \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n)$  функции конечны и есть сходимость  $f_n \rightarrow f$ . По

свойствам меры  $\mu \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n = 0$ . Тогда определим на  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n$   $f_n = f = 0$ .

Это очевидно даст нам необходимую конечность и поточечную сходимость. )

2. (частный случай)  $f_n \rightarrow f \equiv 0$ . Тогда пусть  $\forall x f_n(x)$  - монотонно (по  $n$ ).  $|f_n(x)|$  - убывает с ростом  $n$  и  $X(|f_n| \geq \epsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \epsilon)$ . А также  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} X(|f_n| \geq \epsilon) = \emptyset$ .

$$\begin{cases} \mu X < +\infty \\ \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu E_n \rightarrow \mu \cup E_n$  - Th о непрерывности меры сверху.

$\Rightarrow \mu X(|f_n| \geq \epsilon) \rightarrow \mu \emptyset = 0$

3. (общий случай)  $f_n \rightarrow f$ . Рассмотрим  $\phi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$ . Заметим свойства  $\phi$ :

$$\begin{cases} \phi_n(x) \rightarrow 0 \\ \phi_n \downarrow_n \end{cases}$$

$X(|f_n - f| \geq \epsilon) \subset X(|\phi_n| \geq \epsilon) \Rightarrow$  по монотонности меры имеем  $\mu X(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu X(\phi_n \geq \epsilon) \xrightarrow{part.case} 0$ , ч.т.д.

## 4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

$(X, a, \mu)$  - пространство с мерой

$f_n, f : X \rightarrow R$  - п.в. конечны, измеримы

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ .

Тогда  $\exists n_k \uparrow : f_{n_k} \rightarrow f$  п.в.

Доказательство:  $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда  $\exists n_k : \forall n \geq n_k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$  (можно считать  $n_1 < n_2 < \dots$ )

Проверим  $f_{n_k} \rightarrow f$  п.в. :  $E_k := \bigcap_{j=k}^{\infty} X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j})$

$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$

$E_0 := \bigcap_{k \in N} E_k$ .

$\mu E_k \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$  - конечно  $\Rightarrow \mu E_k \rightarrow$

$\mu E_0 \Rightarrow \mu E_0 = 0$  (т.к.  $\mu E_k \rightarrow 0$ ).

Рассмотрим  $X \notin E_0$ , т.е. если  $X \notin E_0$ , то  $\exists k : X \notin E_k$ , тогда  $\forall j \geq k |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$  при  $n \geq n_j$ , т.е.  $f_{n_k} \rightarrow f$ , ч.т.д. Следствие:  $f_n \Rightarrow f$

$|f_n| \leq g$  п.в. Док-во: Рассмотрим последовательность  $f_{n_k}$  где  $f_{n_k} \rightarrow f$  п.в. и вдоль нее применим Th о двух городских.

$$\begin{cases} f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X \setminus e_1 \\ |f_n(x)| \leq g(x) \forall x \in X \setminus e_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow |f| \leq g$  на  $(X \setminus e_1) \setminus e_2$

## 5 Простейшие свойства интеграла Лебега

### 5.1 Для определения (5)

1.  $\int_X f$  не зависит от представления  $f$  как ступенчатой функции, то

есть если  $f$  реализуется как  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$  и как  $f = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$ ,

интегралы по этим функциям равны

Доказательство:



Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

Пусть  $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_i (\lambda_i \cdot \sum_j (\mu F_{i,j})) = \sum_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f$  для первого разбиения

Аналогично для второго разбиения получаем

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_j (\alpha_j \cdot \sum_i (\mu F_{i,j})) = \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int f$  для второго разбиения, что и требовалось доказать

2.  $f, g$  -измеримые ступенчатые функции,  $f \leq g$ , тогда  $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

Пусть  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ ,  $g = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

Пусть  $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда  $\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leq \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int g$ , что и требовалось доказать

## 5.2 Для окончательного определения

1. Монотонность  $f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

(a)  $f, g \geq 0$ , тогда доказательство тривиально (по свойствам супремума)

(b)  $\int_{\mathbb{X}} f = \int_{\mathbb{X}} f^+ - \int_{\mathbb{X}} f^-$   
 $\int_{\mathbb{X}} g = \int_{\mathbb{X}} g^+ - \int_{\mathbb{X}} g^-$

Из того, что  $\int_{\mathbb{X}} f^+ \leq \int_{\mathbb{X}} g^+$ , а  $\int_{\mathbb{X}} f^- \geq \int_{\mathbb{X}} g^-$  следует, что  $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

$$2. \int_{\mathbb{E}} 1 \cdot d\mu = \mu E$$

$$\int_{\mathbb{E}} 0 \cdot d\mu = 0$$

Очевидно из определения интеграла ступенчатой функции

$$3. \mu E = 0, f\text{-измерима, тогда } \int_{\mathbb{E}} f = 0, \text{ даже если } f = \infty \text{ на } \mathbb{E}$$

Доказательство:

(a)  $f$ -ступенчатая  $\Rightarrow$  ограниченная

$$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}), \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sum \lambda_k \cdot \mu(E \cap E_k)$$

$$\text{Но } \mu(E \cap E_k) = 0 \text{ (так как } \mu E = 0), \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} f = 0$$

(b)  $f$  - измеримая,  $f \geq 0$ .

$$\int_{\mathbb{E}} f = \sup \left( \int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq f, g \text{ - ступенчатая}$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sup(0) = 0$$

(c)  $f$  - произвольная измеримая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- = 0 - 0 = 0$$

$$4. (a) \int_{\mathbb{E}} -f = - \int_{\mathbb{E}} f$$

$$(b) \forall c \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

Доказательство:

$$(a) (-f)^+ = f^-$$

$$(-f)^- = f^+$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} -f = \int_{\mathbb{E}} (-f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (-f)^- = \int_{\mathbb{E}} f^- - \int_{\mathbb{E}} f^+ = - \int_{\mathbb{E}} f$$

(b) Пусть  $c > 0$ . Если  $c < 0$ , то по предыдущему случаю можем рассматривать для  $-c < 0$ . Если  $c = 0$ , то по предыдущей теореме

$$\int_{\mathbb{E}} (0 \cdot f) = \int_{\mathbb{E}} 0 = 0 = 0 \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

i. Пусть  $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq c \cdot f, \text{ } g \text{ - ступенчатая}$$

$$\text{Пусть } g = c \cdot \tilde{g}, \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right), \text{ где } 0 \leq c \cdot \tilde{g} \leq c \cdot f,$$

$\tilde{g}$  - ступенчатая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right) = \sup_{\mathbb{E}} \left( c \cdot \int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \sup_{\mathbb{E}} \left( \int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

ii. Если  $f$  - произвольная:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) &= \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^- = \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^+ - \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^- = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^+ - \\ &c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^- = c \cdot \left( \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f \end{aligned}$$

5. Если существует  $\int_{\mathbb{E}} f d\mu$ , то  $\left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$

Доказательство:

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\int_{\mathbb{E}} -|f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$-\int_{\mathbb{E}} |f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$\text{Тогда } \left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

6.  $f$  - измеримая на  $\mathbb{E}$ ,  $\mu\mathbb{E} < \infty$

$$a \leq f \leq b, \text{ тогда } a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Доказательство:

$$a \leq f \leq b \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} a \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} b$$

$$a \cdot \int_{\mathbb{E}} 1 \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \int_{\mathbb{E}} 1$$

$$a \cdot \mu \mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu \mathbb{E}$$

Следствие:

Если  $f$  - Измеримая и ограниченная на  $\mathbb{E}$ ,  $\mu \mathbb{E} < \infty$ , тогда  $f$  - суммируемая на  $\mathbb{E}$

7.  $f$  - суммируемая на  $\mathbb{E} \Rightarrow f$  почти везде конечная на  $\mathbb{E}$  (то есть  $f \in \alpha^0(\mathbb{E})$ )

Доказательство:

(a) Пусть  $f \geq 0$

Пусть  $f = +\infty$  на  $A$  и пусть  $\mu A > 0$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : f \geq n \cdot \chi_A$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{E}} f \geq n \cdot \int_{\mathbb{E}} \chi_A = n \cdot \mu A \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} f = +\infty$

(b)  $f$  любого знака

Распишем  $f = f^+ - f^-$ , по предыдущему пункту  $f^+, f^-$  конечны почти везде  $\Rightarrow f$  тоже конечно почти везде

## 6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$  — измеримы.  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — изм.,  $f \geq 0$

Тогда:  $\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$

Доказательство:

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть  $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

$$\int_A f d\mu = \sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum_k (\lambda_k \cdot (\sum_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i \left( \int_{A_i} f \right)$$

2. Докажем, что  $\int_A f \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) Рассмотрим  $0 \leq g \leq f$  – ступенчатая.  $\int_A g = \sum_i \int_{A_i} g \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(b) Переходя к *sup* получаем желаемое

3. Теперь докажем, что  $\int_A f \geq \sum_i \int_{A_i} f$

(a)  $A = A_1 \sqcup A_2$

i. Рассмотрим  $g_1, g_2$  – ступенчатые такие, что  $0 \leq g_i \leq f \cdot \chi_{A_i}$

ii. Рассмотрим их общее разбиение  $E_k$ :  $g_i = \sum_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

iii.  $g_1 + g_2$  – ступенчатая и  $0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$

iv.  $\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \stackrel{lemma}{=} \int_A (g_1 + g_2) \stackrel{iii}{\leq} \int_A f$

v. Поочерёдно переходя к *sup* по  $g_1$  и  $g_2$  получаем:  $\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$

$$\int_A f$$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , что  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$  будем последовательно отщеплять последнее множество по (a)

(c)  $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$

i. Фиксируем  $n \in \mathbb{N}$

ii.  $A = (\bigsqcup_{i=1}^n A_i) \sqcup B$ , где  $B = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$

iii.  $\int_A f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$

iv. Переходим к  $\lim$  по  $n$

Следствие 1:  $0 \leq f \leq g$  - измеримы и  $A \subset B$  - измеримы  $\Rightarrow \int_A f \leq \int_B g$

$$\int_B g \geq \int_B f = \int_A f + \int_{B \setminus A} f \geq \int_A f$$

Следствие 2:  $f$  - суммируема на  $A \Rightarrow \int_A f = \sum_i \int_{A_i} f$

Достаточно рассмотреть срезки  $f^+$  и  $f^-$

Следствие 3:  $f \geq 0$  - изм.  $\delta : \mathbb{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (A \mapsto \int_A f d\mu) \Rightarrow \delta$  - мера

## 7 Теорема Леви

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ ,  $f_n \geq 0$  - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$  при почти всех  $x$

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$  (считаем, что при остальных  $x : f \equiv 0$ )

Тогда:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

Доказательство:

N.B.  $\int_X f_n \leq \int_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$

$f$  - измерима как предел последовательности измеримых функций

1.  $\leq$

Очевидно  $f_n \leq f$  при п.в  $x \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f$ . Делаем предельный переход по  $n$

2.  $\geq$

(a) Логичная редукция:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq \int_x g$ , где  $0 \leq g \leq f$  - ступенчатая

(b) Наглая редукция:  $\forall c \in (0, 1) : \lim \int_X f_n(x) \geq c \cdot \int_X g$

- i.  $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq c \cdot g\}$ . Очевидно  $E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$
- ii.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$  т.к.  $c < 1$
- iii.  $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} g \Rightarrow \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g$
- iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем непрерывность меры снизу

## 8 Линейность интеграла Лебега

$f, g \geq 0$ , измеримые

Тогда  $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$

Доказательство:

1. Пусть  $f, g$  - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

$$f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$g = \sum_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \sum_k (\lambda_k + \alpha_k) \cdot \mu E_k = \sum_k \lambda_k \cdot \mu E_k + \sum_k \alpha_k \cdot \mu E_k = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g,$$

что и требовалось доказать

2.  $f, g \geq 0$ , измеримые

Тогда  $\exists h_n : 0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$ ,  $h_n$  ступенчатые

$\exists \widetilde{h_n} : 0 \leq \widetilde{h_n} \leq \widetilde{h_{n+1}} \leq g$ ,  $\widetilde{h_n}$  ступенчатые

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = f$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widetilde{h_n} = g$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h_n}) = \int_{\mathbb{E}} h_n + \int_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n}$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h_n}) \rightarrow \int_{\mathbb{E}} (f + g)$$

$$\int_{\mathbb{E}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} f$$

$$\int_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n} \rightarrow \int_{\mathbb{E}} g$$

Тогда  $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$ , что и требовалось доказать

3. Если  $f, g$  - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

## 9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$  почти всюду на  $\mathbb{E}$ , тогда  $\int_{\mathbb{E}} (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

Доказательство:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x); S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$$1. S_N - \text{возрастает к } S \text{ при почти всех } x \xrightarrow{\text{Т. Леви}} \int_{\mathbb{E}} S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{E}} S =$$

$$\int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$$2. \text{ С другой стороны } \int_{\mathbb{E}} S_N = \int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu$$

3. Найденные пределы совпадают в силу единственности предела последовательности, что и требовалось доказать.

## 10 Теорема о произведении мер

$\langle \mathbb{X}, \alpha, \mu \rangle, \langle \mathbb{Y}, \beta, \nu \rangle$  - пространства с мерой

$$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : A \in \alpha, B \in \beta\}$$



$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

Тогда:

1.  $m_0$  - мера на полукольце  $\alpha \times \beta$
2.  $\mu, \nu$  -  $\sigma$ -конечны  $\Rightarrow m_0$  -  $\sigma$ -конечна

Доказательство:

1. Неотрицательность  $m_0$  очевидна. Необходимо доказать счетную аддитивность

Пусть  $P = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} P_k$ , где  $P \in \alpha \times \beta$   
 $P = A \times B$ ;  $P_k = A_k \times B_k$

Заметим, что:

- $\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y)$ , в силу дизъюнктности  $P_k$  (( $x, y$ ) входит максимум в одно множество из всех  $P_k$ )
- $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$ , так как  $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$  И  $y \in B$

Воспользовавшись вышесказанным получим:

$$\begin{aligned} \chi_P(x, y) &= \chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) \\ \chi_P(x, y) &= \sum \chi_{P_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y) \end{aligned}$$

Имеем следующее равенство:

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y)$$

Проинтегрируем его по мере  $\mu$  по  $x$ , затем по мере  $\nu$  по  $y$ , получим:

$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$ , то есть  $m_0(P) = \sum m_0(P_k)$ , что и требовалось доказать.

2.  $\mu, \nu$  -  $\sigma$ -конечны  $\Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , где  $\mu A_k < +\infty$ ;  $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ , где  $\nu B_k < +\infty$

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_j)$$

$m_0(A_i \times B_j) = \mu A_i \cdot \nu B_j < +\infty$ , так как  $\mu A_i < +\infty$  и  $\nu B_j < +\infty$   
все  $(A_i \times B_j) \in \alpha \times \beta$  по определению

Что и требовалось доказать.

## 11 Абсолютная непрерывность интеграла

$\langle X, \alpha, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  - суммируема

Тогда  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E - \text{измеримое } \mu E < \delta \mid \int_E f d\mu < \epsilon$

Доказательство:

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \subset X_{n+1} \subset \dots$$

$\mu(\cap X_n) = 0$ , т.к.  $f$  - суммируема

1. Мера :  $(A \mapsto \int_A |f|)$  непрерывна сверху, т.е.  $\forall \epsilon \exists n_\epsilon \int_{X_{n_\epsilon}} |f| < \epsilon/2$

2. Зафиксируем  $\epsilon$  в доказываемом утверждении, возьмем  $\delta := \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon}$

$$3. \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\epsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\epsilon}^c} |f| \stackrel{*}{\leq} \int_{X_{n_\epsilon}} |f| + n_\epsilon \cdot \mu(E \cap X_{n_\epsilon}^c) \stackrel{**}{<} \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$$

$$\epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$$

\* - В первом слагаемом увеличили множество, во втором посмотрели на определение  $X_n$ , взяли дополнение, воспользовались 6-м простейшим свойством интеграла

\*\* - Воспользовались непрерывностью сверху

### 11.1 Следствие

$f$  - суммируема

$e_n$  - измеримые множества

$$\mu e_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{e_n} f \rightarrow 0$$

## 12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой,

$f_n, f$  – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$  (сходится по мере),

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  такая, что:

- $\forall n$ , для «почти всех»  $x$   $|f_n(x)| \leq g(x)$  ( $g$  – называется мажорантой)
- $g$  – суммируемая

Тогда:

- $f_n, f$  – суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$  («уж тем более»)

Доказательство:

1.  $f_n$  – суммируема, так как существует мажоранта  $g$
2.  $f$  – суммируема по теореме Рисса ( $f_{nk} \rightarrow f$  почти везде,  $|f_{nk}| \leq g$ , тогда  $|f| \leq g$  почти везде)
3. «уж тем более»:

$$\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \int_X |f_n - f|$$

Допустим, что  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$  уже доказано.

Тогда «уж тем более» очевидно.

4. Докажем основное утверждение:

Разберем два случая:

(a)  $\mu\mathbb{X} < \infty$  Фиксируем  $\epsilon \geq 0$   $X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$

$\mu X \rightarrow 0$  (так как  $f_n \Rightarrow f$ )

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int_{X_n} |f_n - f| + \int_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon\mu\mathbb{X}$$

(прим.  $\int_{X_n} 2g \rightarrow 0$  по след. к т. об абс. сходимости )

(b)  $\mu\mathbb{X} = \infty$

Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для  $g$ :

$$\forall \epsilon \exists A \subset \mathbb{X} \mid \mu A - \text{конеч.} \quad \int_{X \setminus A} g < \epsilon$$

*доказательство:*

$$\int_{\mathbb{X}} = \sup \left( \int_{\mathbb{X}} g_k \mid 0 \leq g_k \leq g \right) (g_k - \text{ступен.})$$

$$\exists g_n \quad \int_{\mathbb{X}} g - \int_{\mathbb{X}} g_n < \epsilon$$

$$A := \text{supp } g_n \quad (\text{supp } f := \text{замыкание } \{x \mid f(x) \neq 0\})$$

$$A = \bigcup_{k \mid \alpha_k \neq 0} E_k$$

$$g = \sum_{kon} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k} \quad (X = \bigsqcup E_k)$$

$$\int_{\mathbb{X}} g_n = \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty \quad (\mu A - \text{конеч.})$$

$$\int_{\mathbb{X} \setminus A} g = \int_{\mathbb{X} \setminus A} g - g_n \leq \int_{\mathbb{X}} g - g_n < \epsilon$$

Теперь докажем основное утверждение:

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| + \int_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon$$

$$\left( \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| \rightarrow 0 \text{ по п. (a)} \right)$$

# 13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой,

$f_n, f$  – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$  почти везде,

$\exists g : \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  такая, что:

- $\forall n$ , для «почти всех»  $x$   $|f_n(x)| \leq g(x)$  ( $g$  – называется мажорантой)
- $g$  – суммируемая

Тогда:

- $f_n, f$  – суммируемы
- $\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_{\mathbb{X}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{X}} f$  («уж тем более»)

Доказательство:

1. «уж тем более» см. пред. теорему.

2. Докажем основное утверждение:

$$h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

Заметим, что при фикс.  $x$  выпол.  $0 \leq h_n \leq 2g$  почти везде

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| = 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \uparrow$ ,  $2g - h_n \rightarrow 2g$  почти везде

$$\int_{\mathbb{X}} (2g - h_n) d\mu \rightarrow \int_{\mathbb{X}} 2g \text{ (по т. Леви)}$$

$$\int_{\mathbb{X}} 2g - \int_{\mathbb{X}} h \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

## 14 Теорема Фату. Следствия.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$  – пространство с мерой

$f_n, f$  – измеримы,

$$f_n \geq 0$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ «почти везде»,}$$

$$\exists C > 0 \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \leq C$$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$$

$$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) = \text{почти везде} = \lim f_n = f \quad (g_n \rightarrow f \text{ почти везде})$$

$$\int_{\mathbb{X}} g_n \leq \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$$

$$\int_{\mathbb{X}} f = \text{по т. Леви} = \lim \int_{\mathbb{X}} g_n \leq C$$

### 14.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$  – измер.

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

$$\exists C \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$$\exists f_{n_k} \rightarrow f \text{ почти везде}$$

### 14.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$  – измер.

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} \underline{\lim}(f_n) \geq \underline{\lim}(\int_{\mathbb{X}} f_n)$$

Доказательство:

$$\exists n_k \mid \int_{\mathbb{X}} f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n$$

Рассмотрим  $g_{n_k}$  такое, что  $g_{n_k} \uparrow$  и  $g_{n_k} \rightarrow \underline{\lim} f$

Применяем теорему Леви к нер-ву  $\int_{\mathbb{X}} g_{n_k} \leq \int_{\mathbb{X}} f_{n_k}$

$$\int_{\mathbb{X}} \underline{\lim} f \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n$$

## 15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

### 15.1 Лемма

Пусть у нас есть  $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  и  $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$  и  $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть  $\Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A}$  (Кохась сказал, что это легко, и вроде это следует из предыдущих теорем)

Для  $\forall E \subset B$  и  $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$

Тогда:

$$\nu - \text{мера на } B, \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu$$

Доказательство:

Докажем по определению меры:

$$\nu(\bigsqcup E_i) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E_i)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_i)) = \sum \mu \Phi^{-1}(E_i) = \sum \nu E_i$$

### 15.2 Следствие

Из этого следует что  $f$  - измерима относительно  $B \Rightarrow f \circ \Phi$  — измерима относительно  $\Gamma$

### 15.3 Теорема

Есть пространства  $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  и  $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ .

$\Phi : X \rightarrow Y; w \geq 0$  — измеримо

$\nu$  - взвешенный образ  $\mu$

Тогда:

Для  $\forall f \geq 0$  - измеримо на  $Y$ ,  $f \odot \Phi$  - измерима (относительно  $\mu$ )

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$$

Замечание: Тоже верно для  $f$  - сумм.

Доказательство:

- $f \odot \Phi$  - измерима (из леммы)
- Возьмем в качестве  $f = \chi_E, E \in \mathcal{B}$   
 $(f \odot \Phi)(x) = \chi_{\Phi^{-1}(E)}$  - определение взвешенного образа меры  
 $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$  - доказали первый пункт
- —  $f$  - ступенчатая  $\Rightarrow f = \sum \alpha_k * \chi_{E_k}$   
—  $\int_Y \sum \alpha_k * \chi_{E_k} d\mu = \sum \alpha_k \chi_{E_k} d\nu = /*firstcase*/ = \sum \alpha_k \int_X \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) dx = \int_X \sum \alpha_k \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x) = \int f \odot \Phi * \omega d\mu$

## 16 Критерий плотности

Есть пространство  $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$

$\nu$  - еще одна мера

$\omega \geq 0$  - измерима на  $X$

Тогда:

$\omega$  - плотность  $\nu$  относительно  $\mu \iff$  Для любого  $A \in \mathbb{A} : \mu A * \inf(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A * \sup_A(\omega)$

Доказательство:

- $\Rightarrow$  - очевидно из стандартного свойства интеграла
- $\Leftarrow$ 
  - Достаточно доказать, что  $\omega > 0$  (когда  $\omega = 0$ , откуда следует что интеграл = 0 из оценок, что  $\nu(E) = 0$ )



- Давайте брать такие  $A \subset X(\omega > 0)$ , тогда  $\nu A = \int_A \omega(x) d\mu$
- Тогда для любого  $A \in \mathbb{A}$   $A = A_1 \sqcup A_2$ , где  $A_1 \subset A(\omega > 0)$  и  $A_2 \subset A(\omega = 0)$
- Получаем, что  $\nu A = \nu A_1 + \nu A_2 = \int_{A_1} \omega + 0 = \int_{A_1} \omega + \int_{A_2} \omega = \int_A \omega$
- Пусть  $q \in (0, 1)$  и  $A_j := A(q^j \leq \omega(x) < q^{j-1})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Получается, что  $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$
- Рассмотрим  $q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} * \mu A_j$  и  $\nu A_j = \int_{A_j} \omega d\mu$
- $q * \int_A \omega d\mu = q * \sum \int_{A_j} \omega \leq \sum q^j * \mu A_j \leq \sum q^{j-1} * \mu A_j = \nu(A) \leq 1/q * \sum q^j * \mu A_j \leq 1/q * \sum \int_{A_j} \omega = 1/q * \int_A \omega$
- $q * \int_A \omega d\mu \leq \nu(A) \leq 1/q * \int_A \omega d\mu$
- Устремим  $q$  к 1 и мы победили

## 17 Лемма о единственности плотности

$f, g \in L(x)$ .

Пусть  $\forall A$  - измерима и  $\int_A f = \int_A g$ .

Тогда:

$f = g$  почти везде

Следствие:

Плотность  $\nu$  относительно  $\mu$  определена однозначно с точностью до  $\mu$  почти везде.

Доказательство:

- Вместо двух функций давайте рассмотрим одну  $h = f - g$  и  $\forall \int_A h = 0$ . Пусть  $A_+ = X(h \geq 0)$  и  $A_- = X(h < 0)$
- $\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$

$$\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0$$

- Пусть  $X = A_+ \sqcup A_-$ . Тогда  $\int_X |h| = \int_{A_+} |h| + \int_{A_-} |h| = 0 \Rightarrow h = 0$  почти везде.

## 18 Лемма о множестве положительности

Пусть пространство  $\langle X, \mathbb{A} \rangle$  и  $\phi$  - заряд

Тогда:

$\forall A \in \mathbb{A} \exists B \subset A : \phi(B) \leq \phi(A)$ , где  $B$  - множество положительности

Доказательство:

- Пусть  $(\phi(A) \geq 0) \&\& (B = \emptyset) \rightarrow \phi(A) \geq 0$
- $E$  - множество  $\epsilon$  - положительности (Меп), если  $\forall C \subset E$  - измеримого  $\phi(C) \geq -\epsilon$
- **Утверждение:** Пусть  $E$  - Меп. Тогда для любого измеримого  $C \subset E$  выполнено  $\phi(C) \geq \phi(A)$ 
  1. Если  $A$  - Меп  $\Rightarrow C = A$
  2. Пусть  $A$  - не Меп. Тогда существует  $C_1 \subset A : \phi(C_1) < -\epsilon$  и  $\phi(A) = \phi(A_1) + \phi(C)$   
Тогда  $A_1 = A - C_1$  и  $\phi(A_1) > \phi(A)$
  3.  $A_1$  - Меп  $\Rightarrow$  хорошо
  4. Иначе повторяем тоже самое с  $C_2$  и так далее пока не будет хорошо
  5. Процесс конечен так как все  $C_i$  дизъюнкты и  $\phi(\bigsqcup C_i) \neq -\infty$ .
- Построим  $B$ :  $C_1$  - множество 1 положительности.  $C_2 - 1/2$ . Тогда  $B = \cap C_i$  - Меп
- $\phi(B) = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(C_i) \geq \phi(A)$

# 19 Теорема Радона—Никодима

Пусть есть пространство  $(X, \mathbb{A}, \mu)$

$\nu$  - мера из  $\mathbb{A}$

Обе меры конечные и  $\nu \prec \mu$ .

Тогда:

$\exists! f : X \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  (с точн до почти везде), которая является плотностью  $\nu$  относительно  $\mu$  и при этом  $(f - \mu)$  суммируема

Доказательство:

- единственность - из леммы

- строим кандидата на роль  $f$ .  $P = \{p(x) \geq 0, |\forall E : \int_E p * d\mu \leq \nu(E)\}$

1.  $P \neq \emptyset$  и  $0 \in P$

2.  $p_1, p_2 \in P \Rightarrow h = \max(p_1, p_2) \in P$

$$\forall E \int_E h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} h d\mu + \int_{E(p_1 < p_2)} h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} p_1 + \int_{E(p_1 < p_2)} p_2 \leq \nu(E(p_1 \geq p_2)) + \nu(E(p_1 < p_2)) = \nu E$$

По индукции  $\max(p_1 \dots p_n) \in P$

3.  $I = \sup \left\{ \int_X p d\mu \mid p \in P \right\}$

$\exists$  последовательность  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \in P : \int_X f_n \rightarrow I$

4. Рассмотрим  $p_1, p_2 \dots : \int_X p_n \rightarrow I$ , а также  $f_n = \max(p_1 \dots p_n) \in P$

5. Из предыдущих двух получаем, что  $f = \lim f_n$  и  $\int = / * thLevi *$

$$/ = \lim \int_E f_n \leq \nu E, \text{ а следовательно } \int_X f = \lim \int_X f_n = I \leq \nu(X)$$

6. Отлично, проверим, что  $f$  - плотность  $\nu$  относительно  $\mu$ .

– Докажем, что это не так:  $\exists E_0 : \nu E_0 > \int_{E_0} f d\mu$

–  $\mu E_0 > 0$  (иначе интеграл равен нулю и мера равна нулю из абстрактной непрерывности)

- Тогда  $\mu E_0$  - конечна. Возьмем  $a > 0 : \nu E_0 - \int_{E_0} f d\mu > a * \mu E_0$
- Тут недостаточно термина мер, поэтому рассмотрим заряд  $\phi(E) = \nu E - \int_E f d\mu - a * \mu E$
- Пусть  $\phi(E_0) > 0$ . Возьмем МП  $B \subset E_0 : \phi(B) \geq \phi(E_0) > 0$ . Тогда  $\nu(B) = \phi(B) + \int_B f * d\mu + a * \mu B \geq \phi(B) > 0$
- Проверим, что  $f + a * \chi_B \in P$ . Тогда по определению  $\int_E (f + a * \chi_B) d\mu = \int_{E \setminus B} f * d\mu + \int_{E \cap B} f * d\mu + a * \mu(B \cap E) = / * E \leftrightarrow E \cap B * / = \int_{E \setminus B} f + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) \leq / * def\_class\_P\_and\_f \in P * / \leq \nu(E \setminus B) + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) = \nu E - \phi(E \cap B) \leq / * \phi \geq 0 * / \leq \nu E$
- Проверим, что  $\int_X f + a * \chi_B = I + a * \mu B > I$ , что противоречит определению I

## 20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in O, \Phi \in C^1(O)$

Возьмём  $c > |\Phi'(a)| \neq 0$

тогда  $\exists \delta > 0 : \forall$  кубической ячейки  $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$  выполняется  $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Доказательство

$\Phi(Q)$  измеримо, так как образ измеримого множества при гладком отображении измерим

$L := \Phi'(a), L$  обратимо, так как  $|L| \neq 0$ .

$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$

Можем писать о малое, так как растяжение произошло не более чем в  $|L^{-1}|$  раз, а  $|L| \neq 0$

Пусть  $\Psi(x) := a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))$

$\forall \epsilon > 0 \exists B(a, \delta)$ , такой, что при  $x \in B(a, \delta)$   $|\Psi(x) - x| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$  (так

как  $\Psi(x)$  это почти  $x$ , только плюс  $o(a - x)$ )

$a \in Q \subset B(a, \delta)$ , где  $Q$  - куб со стороной  $h$

$x \in Q$ , тогда  $|a - x| < \sqrt{m} \cdot h$  (так как диагональ  $m$ -мерного куба со стороной  $h$  равна  $\sqrt{m} \cdot h$ )

Тогда  $|\Psi(x) - x| < \epsilon h$

При  $x, y \in Q, i \in \{1 \dots m\}$

$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |\Psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + |\Psi(y) - y| + h < (1 + 2\epsilon)h$

$\Psi(Q) \subset$  кубу со стороной  $(1 + 2\epsilon)h$

$\lambda(\Psi(Q)) < (1 + 2\epsilon)^m \lambda Q$

$\Phi$  выражается через  $\Psi$  через сдвиги и линейные преобразования. Тогда

$\lambda(\Phi(Q)) = |\det L| \cdot \lambda \Psi(Q) \leq |\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m \cdot \lambda Q$

Возьмём  $\epsilon$  так, чтобы  $|\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m$  было меньше  $c$ . Тогда при таком  $\epsilon$

$\lambda(\Phi(Q)) < c \cdot \lambda Q$

## 21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$A \subset O$ ,  $A$  - открыто.

$A \subset Q$  (кубическая ячейка)  $\subset \overline{Q} \subset O$ , то есть граница  $A$  не лежит на границе  $O$ .

Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G - \text{open set}} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство

Докажем, что левая часть  $\geq$  и  $\leq$  правой

$\geq$  очевидно, так как правая часть - нижняя граница для всего, встречающегося под  $\inf$

Докажем  $\leq$

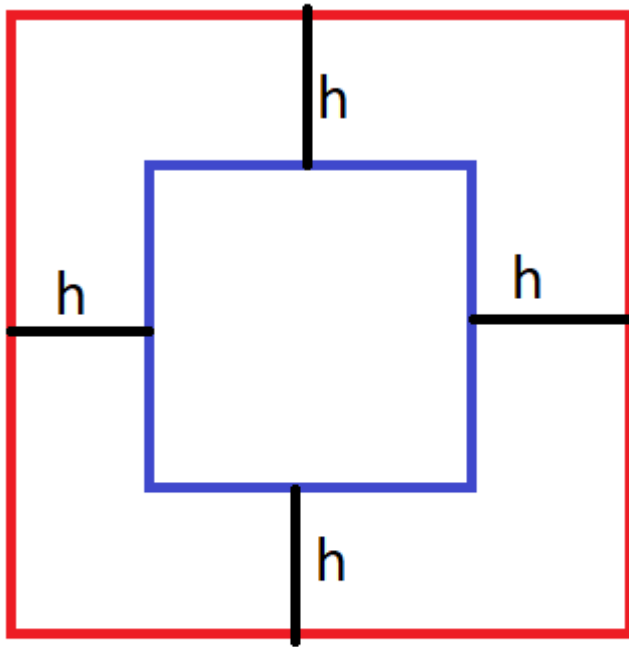
1.  $\lambda A = 0$ . Тогда правая часть  $= 0$ .

$$A \subset \overline{Q} \Rightarrow \sup f < +\infty$$

$\overline{Q}$  - компакт,  $\alpha := \text{dist}(\overline{Q}, \partial O) > 0$

Для множества  $G : A \subset G \subset \frac{\alpha}{2}$ -окрестности ячейки  $Q$

Назовём  $Q_1$  кубическую ячейку, которая больше  $Q$  и у которой каждая сторона отстоит на  $\frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$  от соответствующей стороны  $Q$ .



$$h = \frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$$

$$A \subset G \subset \text{Int}(Q_1)$$

$$\sup_G f \leq \sup_{\overline{Q_1}} f < +\infty$$

При этом  $\lambda G$  может быть выбрана сколь угодно близко к  $\lambda A = 0$  по регулярности меры Лебега.

2.  $\lambda A > 0, \sup_A f < c$

Возьмём  $c_1$ :

$$\sup_A f < c_1 < c$$

Выберем  $\epsilon$  так чтобы

$$\epsilon \cdot c_1 < \lambda A \cdot (c - c_1) \quad (*)$$

$G_\epsilon$  - такое множество, что  $A \subset G_\epsilon$ ,  $G_\epsilon$  - открытое,  $\lambda(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$

$G_1 := f^{-1}((-\infty; c_1)) \cap G_\epsilon$  - открытое

$$\lambda(G_1 \setminus A) < \epsilon$$

$$\lambda G_1 \cdot \sup_{G_1} f \leq (\lambda A + \epsilon) \cdot c_1 < \lambda A \cdot c \quad (\text{из } (*))$$

(так как  $G \subset f^{-1}(-\infty; c_1)$ , то есть  $f$  на  $G_1$  не больше  $c_1$ )

$$\inf(\lambda G \cdot_G f) < \lambda A \cdot c$$

Переходя к  $\inf$  по  $c$ , получаем что требовалось

## 22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - Диффеоморфизм,  $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

TODO: Илья

## 23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - диффеоморфизм

$O' = \Phi(O)$  - открытое

$f$  задана на  $O'$ ,  $f \geq 0$ , Измерима по Лебегу, тогда

$$\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$$

Доказательство:

Из

$$\nu(A) = \lambda\Phi(A), \nu \text{ имеет плотность } J\Phi \text{ по отношению к } \lambda$$

Применить теорему об интеграле по взвешенному образу меры

## 24 Теорема (принцип Кавальери)

$(X, \alpha, \mu)$  и  $(Y, \beta, \nu)$  - пространства с мерами, причем  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные

$m = \mu \times \nu$ ,  $C \in \alpha \times \beta$ , тогда:

1. При п.в.  $x$   $C_x$  - измеримо ( $\nu$ -измеримо), т.е.  $C_x \in \beta$
2. Функция  $x \rightarrow \nu C_x$  — измеримая (в широком смысле) на  $X$

NB:  $\phi$  — измерима в широком смысле, если она задана при п.в.  $x$ , и  $\exists f : X \rightarrow R'$  - измеримая и  $\phi = f$  п.в. При этом  $\int_X \phi = \int_X f$  (по опр.)

$$3. mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$$

Доказательство: Рассмотрим  $D$  — совокупность все множеств, для которых утв. теоремы верно.

$\rho = \alpha \otimes \beta$  — п/к изм. пр-ков.

1.  $\rho \subset D$

$C = A \times B$ . то есть  $\forall x C_x = \emptyset$  if  $x \notin A$ ,  $B$  if  $x \in A$

$(\mu A < +\infty, \nu B < +\infty)$

$x \rightarrow \nu(C_x)$ , функция  $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$  — изм.

$$\int_X \nu(C_x) d\mu = \nu B \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \nu B \cdot \mu A = mC$$

2.  $E_i \in D, E_i - dis \Rightarrow E := \sqcup E_i \in D$

при п.в.  $x$   $(E_i)_x$  — измеримы

при п.в.  $x$  все  $(E_i)_x$  — измеримы,  $E_x = \sqcup (E_i)_x$  — изм.

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$  ( $\nu(E_i)_x$  — изм. как функция от  $x$ )  $\Rightarrow$  функция

$x \rightarrow \nu E_x$  — измерима

$$\int_X \nu E_x d\mu(x) = \sum_i \int \nu(E_i)_x d\mu(x) = \sum_i mE_i = mE$$

3.  $E_i \in D, E_1 \supset E_2 \supset \dots; mE_i < +\infty$ . Тогда  $E := \cap E_i \in D$

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty (*)$$



функция  $x \rightarrow \nu(E_i)_x$  — суммируема  $\Rightarrow$  п.в. конечна.

при всех  $x$   $(E_i)_x \downarrow E_x$ , т.е.  $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots$  и  $\bigcap (E_i)_x = E_x$

при п.в.  $x$   $\nu(E_i)_x$  — конечны (для таких  $x$ ).

Тогда  $E_x$  — измерима и  $\lim \nu(E_i)_x = \nu E_x$  по непр-ти меры  $\nu$  сверху.

(Th. Лебега)  $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$  — сумм.  $\Rightarrow$  функция  $x \rightarrow \nu E_x$  — изм.

$\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim m E_i = m E$  (непр. сверху меры  $m$ ).

Этот предельный переход корректен как раз по теореме Лебега ( $f_n \rightarrow f$  п.в.  $g : |f_n| \leq g$  — сумм. Тогда  $\int f_n \rightarrow \int f$ ).

NB: мы доказали про пересечения и про объединения (пусть пересечения убывающие, а объединения — дизъюнктивные, но это лечится).

Поэтому  $\bigcap_j (\bigcup_i A_{i,j}) \in D$ , если  $A_{i,j} \in \rho$  ( $\rho \subset D$ ).

#### 4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$

$\exists H \in D$ ,  $H$  имеет вид  $\bigcap (\bigcup A_{i,j})$ , где все  $A_{i,j} \in \rho$

$E \subset H$ ,  $mH = 0$  из п.5 т. о продолжении (ЧТО?! поясните плез)

$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu(x) \Rightarrow \nu H_x = 0$  (= 0 при п.в.  $x$ ).

$E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$  —  $\nu$ -изм. (из полноты  $\nu$ ) и  $\nu E_x = 0$  п.в.  $x$

$\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$

#### 5. $C$ — неизм., $mC < +\infty$ . Тогда $C \in D$ .

$C = H \setminus e$ , где  $me = 0$ ,  $H$  — вида  $\bigcap (\bigcup A_{i,j})$ .

$C_x = H_x \setminus e_x$  — изм. при п.в.  $x$

$\nu e_x = 0$  п.в.  $x$  (проверено в п.4)

$\nu C_x = \nu H_x = \nu e_x$  — изм. п.в.  $x$

$\int_X \nu C_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = \int \nu H_x = mH = mC$ .

#### 6. $C$ — $m$ -изм. произвольное

$X = \sqcup X_k, Y = \sqcup Y_n$  ( $\mu X_k$  — кон.,  $\nu Y_n$  — кон.).

$C = \sqcup_{k,n} (\subset \cap (X_k \times Y_n)) \in D$  (по п.2) (т.к.  $\subset \cap (X_k \times Y_n) \in D$  по п.5)

## 25 Теорема Тонелли

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$  — пространства с мерой

$\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечны, полные

$m = \mu \times \nu$

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ ,  $f$  - измерима относительно  $m$

Тогда:

1. при *почти всех*  $x \in X$   $f_x$  - измерима на  $\mathbb{Y}$ ,  
 где  $f_x : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f_x(y) = f(x, y)$   
 (симметричное утверждение верно для  $y$ )
2. Функция  $x \mapsto \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \int_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)$  - измерима<sup>\*</sup> на  $\mathbb{X}$   
 (симметричное утверждение верно для  $y$ )
3.  $\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f(x, y) dm = \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left( \int_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{Y}} \left( \int_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство:

Докажем в 3 пункта, постепенно ослабляя ограничения на функцию  $f$

1. Пусть  $C \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  - измеримо относительно  $m$ ,  $f = \chi_C$ 
  - (a)  $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$ , где  $C_x$  - сечение по  $x$   
 $C_x$  - измеримо при *почти всех*  $x$ , так как это одномерное сечение, таким образом  $f_x$  - измеримо, при *почти всех*  $x$ .
  - (b)  $\phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \nu C_x$  - по принципу Кавальери это измеримая<sup>\*</sup> функция.
  - (c)  $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \nu C_x d\mu \stackrel{\text{Кавальери}}{=} m C \stackrel{\text{опр. инт}}{=} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} \chi_C dm = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f(x, y) dm$
2. Пусть  $f$  - ступенчатая,  $f \geq 0$ ,  $f = \sum_{\text{кон}} a_k \chi_{C_k}$ 
  - (a)  $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}$  - измерима при почти всех  $x$
  - (b)  $\phi(x) = \sum a_k \nu(C_k)_x$  - измерима<sup>\*</sup> как конечная сумма измеримых
  - (c)  $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \sum_{\text{кон}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} \int_{\mathbb{X}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} a_k m C_k = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm$

3. Пусть  $f$  - измеримая,  $f \geq 0$

$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$ , где  $g_n \geq 0$  - ступенчатая,  $g_n$  - монотонно возрастает к  $f$   
(из Теоремы об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми)

(a)  $f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$  - измерима при *почти всех*  $x$ .

(b)  $\phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \lim_{\mathbb{Y}} \int (g_n)_x d\nu$

$\phi_n(x) := \int_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu$  - измерима по пункту 1

$0 \leq (g_n)_x$  - возрастает, тогда  $\phi(x)$  - измерима,  $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq \dots$  и  $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$

(c)  $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \phi_n(x) d\mu \stackrel{\text{п.2}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} g_n dm \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \int f dm$

## 26 Формула для Бета-функции

$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1}$ , где  $s$  и  $t > 0$  - Бета-функция

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ , где  $s > 0$ , тогда  $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left( \int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \left[ \begin{array}{c} y \rightarrow u \\ y = u - x \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \left( \int_x^{+\infty} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx = \\ &= \int_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq x}} \dots = \text{меняем порядок интегрирования} \\ &= \int_0^{+\infty} du \int_0^u dx (x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u}) = \left[ \begin{array}{c} x \rightarrow v \\ x = uv \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left( \int_0^1 u^{s-1} v^{s-t} u^{t-1} (1-v)^{t-1} u dv \right) du = \\ &= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left( \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du = B(s, t) \Gamma(s+t), \text{ чтд.} \end{aligned}$$

## 27 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$$B(0, R) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} \lambda_m(B(0, R)) &= \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi_1 \dots \int_0^\pi d\phi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{m-1} r^{m-1} (\sin\phi_1)^{m-2} \dots (\sin\phi_{m-2}) \\ &= \int_0^\pi (\sin\phi_k)^{m-2-(k+1)} d\phi_k = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2}+\frac{1}{2})} \\ &\rightarrow = \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \dots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi = \\ &= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} R^m \end{aligned}$$

## 28 Теорема о вложении пространств $L^p$

$$\mu E < +\infty \quad 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1.  $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2.  $\forall f$  — измеримы  $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

Доказательство:

- $2 \Rightarrow 1$  (Это очевидно: достаточно рассмотреть неравенство из пункта 2. Из него следует, что  $\|f\|_s < \|f\|_r$ . см. опред.  $L_p$ )
- Рассмотрим два случая:

1.  $r = +\infty$  (очев.)

$$\|f\|_s \leq \left( \int |f|^s * 1 \right)^{1/s} \leq ((esssup|f|)^s \int 1 d\mu)^{1/s} = \|f\|_\infty * \mu E^{1/s}$$

(последнее по опред.  $esssup$ )

2.  $r < +\infty$

$$(\|f\|_s)^s = \int |f|^s * 1 d\mu \leq \left( \int |f|^r \right)^{\frac{s}{r}} * \left( \int 1^{\frac{r}{r-s}} \right)^{\frac{(r-s)}{r}} = (\|f\|_r)^s * \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$

(существенный шаг: применить неравенство Гельдера)

## 29 Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере

$$1 \leq p < +\infty$$
$$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

Тогда:

1. •  $f \in L_p$   
•  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$

Тогда:  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (по мере)

2. •  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (либо если  $f_n \rightarrow f$  почти везде)  
•  $|f_n| \leq g$  почти при всех  $n$ ,  $g \in L_p$

Тогда:  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$

Доказательство:

1.

$$X_n(\epsilon) := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\mu X_n(\epsilon) = \int_{X_n} \left(\frac{|f_n - f|}{\epsilon}\right)^p = \frac{1}{\epsilon^p} \int_{X_n} |f_n - f|^p \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_X |f_n - f|^p = \frac{1}{\epsilon^p} (\|f_n - f\|_p)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2.  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  Тогда  $\exists n_k \mid f_{n_k} \rightarrow f$  почти везде.

Тогда  $|f| \leq g$  п. в.

$$|f_n - f|^p \leq (2g)^p - \text{сумм. функции т. к. } g \in L_p$$

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (по теореме Лебега)}$$

## 30 Полнота $L^p$

$L_p(E, \mu)$   $1 \leq p < \infty$  – полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходится по норме  $\|f\|_p$ .

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, k \|f_n - f_k\| < \epsilon \Rightarrow \exists f \mid \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

### Доказательство:

1. Построим  $f$ .

Рассмотрим фундаментальную последовательность  $f_n$ .

$$\exists N_1 \text{ при } n = n_1 \ k > N_1 \ \|f_{n_1} - f_k\| < \frac{1}{2}$$

$$\exists N_2 \text{ при } n = n_2 \ k > N_2, N_1 \ \|f_{n_2} - f_k\| < \frac{1}{4}$$

...

$$\text{Тогда: } \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1$$

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

Докажем, это функция  $f$  корректно задана:

$$\begin{aligned} \bullet S_N(x) &:= \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \\ \|S_N\|_p &\leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1 \\ \text{Тогда по Теореме Фату: } \|S\|_p &\leq 1 \end{aligned}$$

Тогда  $|S|^p$  – суммируема

Тогда  $S(x)$  конечна при п. в.  $x$  и ряд  $\sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$  абс. сход., а значит и просто сходиться при п. в.  $x$

$$f := f_{n_1} + \sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \text{ т. е. } f = \text{п. в. } \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

2. Проверим, что  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$

$$\begin{aligned} \text{Т. к. } f_n - \text{фунд.}, \text{ то } \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n_k > N \quad \|f_n - f_{n_k}\| < \epsilon \Rightarrow \\ \|f_n - f_{n_k}\|^p &= \int_E |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \epsilon^p \end{aligned}$$

$$\text{Тогда по теореме Фату: } \int_E |f - f_n|^p \leq \epsilon^p$$

$$\text{Тогда } \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \ \|f - f_n\|_p < \epsilon$$

Замечание:  $L_\infty$  – полное (упражнение)

## 31 Лемма Урысона

## 32 Плотность в $L^p$ непрерывных финитных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathbb{A}, \lambda_m)$

$E \subset \mathbb{R}^m$  – изм. Тогда множество финитных непрерывных функций плотно в  $L_p(E, \lambda_m), p \in [1; +\infty]$

Доказательство:

1. Раскроем определение плотности:  $\forall f \in L_p(E, \mu) \forall \epsilon > 0 \exists \varphi \in C_0(\mathbb{R}^m) : \|f - \varphi|_E\|_p < \epsilon$ . Таким образом достаточно научиться приближать  $f$  и  $\varphi$  ступенчатыми функциями  $f_n$ :  $\|f - f_n\|_p < \epsilon/2$  и  $\|\varphi - f_n\|_p < \epsilon/2$
2. TODO!

## 33 Теорема о непрерывности сдвига

Обозначения:

$$f_h := f(x + h)$$

$[0, T] \subset \mathbb{R}$ . Будем считать, что  $L_p[0, T]$  – состоит из  $T$ -периодических функций  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Отсюда  $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$ .

$$\tilde{C}[0, T] = \{f \in C[0, T] : f(0) = f(T)\}. \|f\| = \max_{x \in [0, T]} |f(x)|$$

NB:  $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow f$  – рвнм. непрерывна (по т. Кантора)

Формулировка:

1.  $f$  – рвнм. непр. на  $\mathbb{R}^m$ . Тогда  $\|f - f_h\|_\infty \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .
2.  $1 \leq p < +\infty$   $f \in L_p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$ . Тогда  $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$ .

3.  $f \in \tilde{C}[0, T]$ . Тогда  $\|f - f_h\|_{+\infty} \rightarrow 0$ .

4.  $1 \leq p < +\infty$   $f \in L_p[0; T]$ . Тогда  $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$ .

Доказательство:

1. 1 и 3 свойства следуют из определения рвнм. непр-ти:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}^m \forall h : |h| < \delta$  верно, что  $|f(x) - f(x + h)| < \epsilon$ , то есть  $\|f - f_h\|_{+\infty} < \epsilon$  (это для св-ва 1, во втором случае  $x$  из  $[0, T]$ ).

2. TODO!

## 34 Теорема об интеграле с функцией распределения

$(\mathbb{R}, B, X)$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$ , изм. по Борелю, п.в. конечн.

$h : X \rightarrow \mathbb{R}$  с функцией распределения  $H(t)$

$\mu_H$  – мера Бореля-Стилтьеса (мера Лебега-Стилтьеса на  $B$ )

Тогда  $\int_X f(h(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t)$

Доказательство: Следует из теоремы о вычислении интеграла по взвешенному образу меры.

## 35 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1.  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

2.  $\sum x_k$  сходится, тогда  $\forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$

3.  $\sum x_k$  - ортогональный ряд, тогда  $\sum x_k$  - сх  $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$  сходится, при этом  $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$



## Доказательство

$$1. \quad | \langle x_k, y_k \rangle - \langle x, y \rangle | = | \langle x_k, y_k \rangle - \langle x_k, y \rangle + \langle x_k, y \rangle - \langle x, y \rangle | \leq | \langle x_k, y_k - y \rangle | + | \langle x_k - x, y \rangle | \leq |x_k| \cdot |y_k - y| + |x_k - x| \cdot |y| \rightarrow 0 \quad (\text{так как } \text{огр} \cdot \text{б.м.} + \text{б.м.} \cdot \text{огр} \rightarrow 0)$$

$$2. \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$
$$\langle \sum_{k=1}^n x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, y \rangle$$

Устремляя  $n$  к  $\infty$  получаем требуемое равенство

$$3. \quad \text{Обозначим } C_n := \sum_{k=1}^n |x_k|^2$$
$$|S_n|^2 = \langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{j=1}^n x_j \rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_k \rangle \quad (\text{так как}$$
$$k \neq j \Rightarrow \langle x_k, x_j \rangle = 0) = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = C_n$$

Аналогично,  $|S_n - S_m|^2 = |C_n - C_m|$

Тогда  $C_n, S_n$  фундаментальны одновременно  $\Rightarrow$  сходятся одновременно при устремлении  $n$  к  $\infty$

## 36 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}, x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1.  $\{e_k\}$  — Л.Н.З.

$$2. \quad c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

3.  $c_k \cdot e_k$  — проекция  $x$  на прямую  $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

Иными словами  $x = c_k \cdot e_k + z$ , где  $z \perp e_k$

Доказательство:

1. Пусть  $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$ . Умножим скалярно на  $e_m$  ( $1 \leq m \leq N$ )

Получим:  $\alpha_m \|e_m\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \Rightarrow$  комб. тривиальная  $\Rightarrow$  Л.Н.З.

2.  $\langle x, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k e_k, e_m \rangle = c_m \cdot \|e_m\|^2$  (верно в силу сходимости ряда)

3.  $x = c_k \cdot e_k + z$  ?  $z \perp e_k$  Докажем это:

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - c_k e_k, e_k \rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2 - c_k \cdot \|e_k\|^2 = 0$$

## 37 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \quad \mathcal{L} = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots) \subset \mathbb{H}$$

Тогда:

1.  $S_n$  — орт. проекция  $x$  на пр-во  $\mathcal{L}$ . Иными словами  $x = S_n + z$ ,  $z \perp \mathcal{L}$

2.  $S_n$  — наилучшее приближение  $x$  в  $\mathcal{L}$  ( $\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$ )

$$3. \|S_n\| \leq \|x\|$$

Доказательство:

$$1. (a) z = x - S_n$$

$$(b) z \perp \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n : z \perp e_k$$

$$(c) \langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = c_k \|e_k\|^2 - c_k \|e_k\|^2 = 0$$

$$2. \|x - y\|^2 = \|S_n + z - y\|^2 = \|(S_n - y) + z\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

$$3. \|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$$

Следствие: Неравенство Бесселя

$$\forall \{e_k\} - \text{O.C.} : \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

## 38 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$  – орт. сист. в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

$$1. \text{Ряд Фурье } \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \text{ сх-ся в } \mathbb{H}$$

$$2. x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$$

$$3. x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

Доказательство:

$$1. \text{Ряд Фурье – ортогональный ряд} \\ \text{его сходимость} \Leftrightarrow \text{сходимости } \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2 \text{ по неравенству Бесселя}$$

$$2. \langle z, e_k \rangle = \langle x - \sum c_i e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{+\infty} \langle c_i(x) e_i, e_k \rangle = 0$$

3.  $\Rightarrow$  - утв. 3 теоремы о св-вах сх-ти в гильбертовом пр-ве

$\Leftarrow$  Из п. 2 ряд ортог.

$$\|x\|^2 = \|\sum c_k e_k\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$$

## 39 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$  – орт. сист. в  $\mathbb{H}$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $e_1$  – базис

2.  $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$  (обобщенное уравнение замкнутости)

3.  $\{e_k\}$  – замкн.

4.  $\{e_k\}$  – полн.

5.  $Lin(e_1, e_2, \dots)$  – плотна в  $\mathbb{H}$

Доказательство:

### 39.1 $1 \Rightarrow 2$

$x = \sum c_k(x) e_k$  – единственно (из геом. соображений:  $c_k e_k$  – проекция)

$$\langle e_k, y \rangle = \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \langle e_k, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

### 39.2 $2 \Rightarrow 3$

$$y := x$$

$$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \quad (\text{см. п. 3 из опр.})$$

### 39.3 $3 \Rightarrow 4$

Пусть  $\forall k \quad x_0 \perp e_k$

$$c_k(x_0) = \frac{\langle x_0, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = 0$$

$$\|x_0\|^2 = \sum |c_k(x_0)|^2 \|e_k\|^2 = 0 \quad (\text{см. п. 2 из опр.})$$

### 39.4 $4 \Rightarrow 1$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow (\text{т. Рисса-Фишера (2)}) \quad \forall k \quad z \perp e_k \Rightarrow (\text{из полноты}) \quad z = 0$$

(см. п. 1 из опр.)

### 39.5 $4 \Rightarrow 5$

Пусть  $ClLin(e_1, e_2, \dots) \neq \mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H} \setminus ClLin(e_1, e_2, \dots)$

$$\text{из т. Рисса-Фишера (2): } x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \quad z \perp e_k \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Rightarrow$$

$$x \in ClLin(e_1, e_2, \dots)$$

Противоречие.

### 39.6 $5 \Rightarrow 4$

$$\forall k \quad x_0 \perp e_k \Rightarrow x_0 \perp Lin(e_1, e_2, \dots) \Rightarrow x_0 \perp ClLin(e_1, e_2, \dots) (= \mathbb{H}) \Rightarrow x_0 \perp x_0 \Rightarrow \|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

## 40 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть  $S_n \rightarrow f$  в  $L_1(-\pi, \pi]$

Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство:

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n a_j \cos jx + b_j \sin jx \quad (- \text{ это } T_n)$$

При  $n \geq k$  :

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx \, dx = \pi a_k$$

$$2. \left| \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \pi |S_n(x) - f(x)| \cdot |\cos kx| \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| \, dx \rightarrow 0$$

Из 1 и 2 следует равенство для  $a_k$ . Аналогично доказывается и для других.

## 41 Теорема Римана–Лебега

$E \subset \mathbb{R}^1$  – измеримо

$f \in L_1(E, \lambda)$ ,  $\lambda$ - мера Лебега

Тогда:

$$\int_E f(x) e^{ikx} \, dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

и

$$\int_E f(x) \cos(kx) \, dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Доказательство:

Пусть  $f \equiv 0$  вне  $E$ , тогда можно считать, что  $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ikt} \stackrel{t=\tau+\frac{\pi}{k}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{k}\right) e^{ik\tau+i\pi} \, d\tau = - \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{k}\right) e^{ik\tau} \, d\tau$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ikt} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ikt} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{k})e^{ik\tau} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t + \frac{\pi}{k}))$$

$$|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ikt}| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t + \frac{\pi}{k})| dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

по непрерывности сдвига, то есть:

$$\|f - f_{\tau}\|_1 \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$$

Сходимость второго интеграла очевидна из  $\cos(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}$

## 42 Формула Грина

$D \subset \mathbb{R}^2$  – компакт, связное, односвязное, ориентировано

$\delta D$  –  $C^2$ -гладкая кривая, тоже ориентировано

$D$  и  $\delta D$  ориентированы согласовано

$P, Q$  – функции, гладкие в открытой области  $O \supset D$

Тогда:

$$\iint_D (\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}) dx dy = \int_{\delta D} (P(x, y) dx + Q(x, y)) dy$$

Доказательство:

Докажем для областей вида "криволинейный четырехугольник", т.е.

$x \in [a; b]$

$y \in [\phi_1(x); \phi_2(x)]$ , где  $\phi_2(x) > \phi_1(x)$

Представляется в аналогичном виде, относительно  $y$

Ориентируем обход нашего четырехугольника против часовой стрелки.

Назовем пути по сторонам  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  начиная с нижней против часовой стрелки соответственно.

Из линейности интеграла по векторному полю следует, что для доказательства достаточно проверить:

$$-\iint_D \frac{\delta P}{\delta y} dx dy = \int_{\delta D} P dx$$

1. Преобразуем левую часть:

$$-\iint_D \frac{\delta P}{\delta y} dx dy = - \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P'_y dy = - \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} dx =$$

$$\int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx$$

2. Преобразуем правую часть:

$$\int_{\delta D} (P dx + 0 dy) = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$$= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx + 0 + \int_b^a P(x, \phi_2(x)) dx + 0 =$$

$$\int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx$$

Левая и правая части равны.

Если область более сложная - порежем на простые. Зафиксируем направление обхода, посчитаем на каждой.

При фиксированном направлении обхода пути на границах разрезов учитываются дважды с противоположными знаками, то есть в итоге имеем обход границы всей фигуры.

Из компактности и гладкости области следует, что допускается счетное количество разрезов.

## 43 Формула Стокса

$\Omega$  – эллиптическая, гладкая, двусторонняя поверхность,  $C^2$ –гладкое;

$n_0$  – сторона

$\delta\Omega$  - ориентирована согласовано с  $n_0$

$(P, Q, R)$  – векторное поле на  $\Omega$ , заданное в  $O$  - откp. :  $\Omega \subset O \subset \mathbb{R}^3$

Тогда:

$$\int_{\delta\Omega} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_{\Omega} ((R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy)$$



Доказательство:

Из соображений линейности интеграла по векторному полю достаточно проверить:

$$\int_{\delta\Omega} P dx = \iint_{\Omega} (P'_z dz dx - P'_y dx dy)$$

Параметризуем область:  $\Omega \leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{matrix} \right\rangle$

Пусть  $G$  – наша область в координатах  $(u, v)$ ,  $L$  – граница  $\Omega$  в новых координатах, тогда:

$$\begin{aligned} \int_{\delta\Omega} P dx &= \int_L P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))(x'_u du + x'_v dv) = \int_L P x'_u du + P x'_v dv \stackrel{\Gamma_{\text{рин}}}{=} \\ &= \iint_G ((P(x, y, z)x'_v)'_u - (P(x, y, z)x'_u)'_v) dudv = \\ &= \iint_G (P'_z(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - P'_y(y'_v x'_u - y'_u x'_v)) dudv = \\ &= \iint_G P'_z \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} dudv - P'_y \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv = \\ &= \iint_{\Omega} (P'_z dz dx - P'_y dx dy) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать

## 44 Формула Гаусса–Остроградского

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\partial G$  – гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$ ,  $F \in "C'(G)"$  (кавычки означают "включая границу, то есть с более широкой гладкой областью"),  $\partial V$  – внешняя сторона,  $R : O(V) \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V} R dx dy$$

Доказательство:

$\partial V = \Omega_F \cup \Omega_{cil} \cup \Omega_f$  (границы графика  $F$ ,  $f$  и цилиндра между ними)

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\
&= \iint_G (R(x, y, F(x, y)) - R(x, y, f(x, y))) dx dy = (\text{см. пример после опр.} \\
&\text{инт. 2 рода}) \\
&= \iint_{\Omega_F} R dx dy - \left( - \iint_{\Omega_f} R dx dy \right) + 0 = (\text{так как проекция } \Omega_{cil} \text{ лежит в } \partial G) \\
&= \iint_{\Omega_F} R dx dy + \iint_{\Omega_f} R dx dy + \iint_{\Omega_{cil}} R dx dy = \\
&= \iint_{\partial V} R dx dy
\end{aligned}$$

## 45 Лемма об оценке интеграла ядра Дири- хле

1.  $D_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi}(\cos nt + h(t) \sin nt)$ , где  $h(t)$  не зависит от  $n$  и  $|h(t)| \leq 1$  на  $[-\pi; \pi]$ .
2.  $\forall x, |x| < 2\pi \quad \left| \int_0^x D_n(t) dt \right| < 2$

Доказательство:

$$1. (a) \quad D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin nt \cos \frac{t}{2} + \cos nt \sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin nt}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} + \cos nt \right)$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad &\text{Добавим и вычтем } \frac{\sin nt}{\pi t}: \\
&\frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi} \left( \cos nt + \underbrace{\left( \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right)}_{h(t)} \sin nt \right)
\end{aligned}$$

(c) Докажем, что  $|h(t)| \leq 1$ . Найдём знак производной на  $[0; \pi]$ :

$$h'(t) = -\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}} + \frac{2}{t^2} = \frac{4\sin^2 \frac{t}{2} - t^2}{2t^2 \sin^2 \frac{t}{2}}. \text{ Знаменатель неотрицателен.}$$

$4\sin^2 \frac{t}{2} - t^2 = (2\sin \frac{t}{2} - t)(2\sin \frac{t}{2} + t)$ . Вторая скобка  $\geq 0$ . Первая скобка  $\leq 0$ , так как  $\sin x \leq x$  при  $x \geq 0$ .

(d) Знак производной  $h(x)$  на  $[0; \pi]$  постоянен, значит,  $h$  монотонна.  $h(0) = 0$  (в пределе),  $h(\pi) = \frac{2}{\pi} < 1$ .  
Значит,  $|h(x)| < 1$ . Аналогично для  $[-\pi; 0]$ .

2. (a)  $D_n$  — чётная. Считаем, что  $x > 0$ .

(b) Пусть  $x \in [0; \pi]$ .

$$(c) \left| \int_0^x D_n(t) dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{\pi t} dt \right| = \left| \int_0^x \frac{1}{2\pi} (\cos nt + h(t) \sin nt) dt \right| \quad (\text{пункт 1}) \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^x 2 dt = \frac{x}{\pi} \leq 1$$

$$(d) \int_0^x \frac{\sin nt}{\pi t} dt = \int_0^{nx} \frac{\sin v}{\pi v} dv \quad (v = nt). \\ 0 \leq \int_0^{nx} \frac{\sin v}{\pi v} dv \leq \int_0^\pi \frac{\sin v}{\pi v} dv. \text{ Доказательство методом пристально-} \\ \text{го взгляда на график подынтегральной функции.}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin v}{\pi v} dv \leq \pi \frac{1}{\pi} = 1$$

$$(e) \left| \int_0^x D_n(t) dt - I \right| \leq 1, \quad 0 \leq I \leq 1, \text{ значит, } \int_0^x D_n(t) dt \in [-1; 2].$$

$$(f) \text{ Пусть } x \in [\pi; 2\pi]. \int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 1.$$

$$\int_0^x = \int_0^{2\pi} - \int_x^{2\pi} = 1 - \int_{x-2\pi}^0 = 1 - \int_0^{2\pi-x} \in [-2; 1]$$

## 46 Теорема об интегрировании ряда Фурье

$$f \in L_1[-\pi; \pi].$$

Тогда  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx} dx$$

Сумма по  $k \in \mathbb{Z}$  понимается в смысле главного значения  $(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n)$ .

Замечание: Ряд Фурье  $f$  может всюду расходиться, но ряд интеграла всегда сходится.

Доказательство:

1. Пусть  $-\pi \leq a < b \leq \pi$ . Если это не так всегда можно разбить интеграл на такие отрезки в силу периодичности функции.

2. Пусть  $\chi(x) = \chi[a; b]$  (характеристическая функция отрезка  $[a; b]$ ).

3. Рассмотрим частичную сумму ряда интегралов:

$$\sum_{k=-N}^N c_k(f) \underbrace{\int_a^b e^{ikx} dx}_{2\pi c_{-k}(\chi)} = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) 2\pi c_{-k}(\chi).$$

Сумма конечная, поэтому это равно  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_N(\chi, t) dt$ .

4.  $S_N(\chi) \rightarrow \chi$  везде, кроме  $a$  и  $b$  (не шарю почему, помогите)

5.  $|S_N(\chi, t)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \chi(x) D_N(t-x) dx \right| = \left| \int_a^b D_N(t-x) dx \right| = \left| \int_0^{t-a} D_N - \int_0^{t-b} D_N \right| \leq 4$  (по лемме об оценке интеграла  $D_N$ ).

6.  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_N(\chi, t) dt \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \chi(t) dt$  по теореме Лебега о мажорированной сходимости.