

Теоремы по матану, семестр 4

14 июня 2018 г.

Содержание

1	Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия	6
2	Измеримость монотонной функции	7
3	Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере	8
4	Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде	9
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	10
5.1	Для определения (5), ступенчатые функции	10
5.2	Для окончательного определения	11
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	13
7	Теорема Леви	15
8	Линейность интеграла Лебега	16
9	Теорема об интегрировании положительных рядов	17
10	Теорема о произведении мер	18

11 Абсолютная непрерывность интеграла	19
11.1 Следствие	20
12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.	20
13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.	22
14 Теорема Фату. Следствия.	23
14.1 Следствие 1	24
14.2 Следствие 2	24
15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры	25
15.1 Лемма	25
15.2 Следствие	25
15.3 Теорема	25
16 Критерий плотности	26
17 Лемма о единственности плотности	27
18 Лемма о множестве положительности	28
19 Теорема Радона-Никодима	28
20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости	30
21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»	31
22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме	33
23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега	33

24 Теорема (принцип Кавальери)	33
25 Теорема Тонелли	35
26 Формула для Бета-функции	37
27 Объем шара в \mathbb{R}^m	37
28 Теорема о вложении пространств L^p	38
29 Теорема о сходимости в L_p и по мере	39
30 Полнота L^p	40
31 Лемма Урысона	41
32 Плотность в L^p непрерывных финитных функций	41
33 Теорема о непрерывности сдвига	42
34 Теорема об интеграле с функцией распределения	42
35 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве	43
36 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе	44
37 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя	44
38 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля	45
39 Теорема о характеристике базиса	46
39.1 $1 \Rightarrow 2$	47
39.2 $2 \Rightarrow 3$	47
39.3 $3 \Rightarrow 4$	47

39.4	$4 \Rightarrow 1$	47
39.5	$4 \Rightarrow 5$	47
39.6	$5 \Rightarrow 4$	47
40	Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда	48
41	Теорема Римана–Лебега	48
42	Принцип локализации Римана. TODO	49
43	Признак Дини. Следствия. TODO.	49
44	Корректность свертки	49
45	Свойства свертки функции из L^p с функцией из L^q	50
46	Формула Грина	51
47	Формула Стокса	52
48	Формула Гаусса–Остроградского	53
49	Соленоидальность бездивергентного векторного поля. TODO.	54
50	Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости или L_{loc}	54
50.1	При равномерной сходимости	54
50.2	При L_{loc}	55
51	Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру	56
52	Теорема о свойствах аппроксимативной единицы	57
53	Теорема Фейера. TODO	58

54 Свойства преобразования Фурье: непрерывность, ограниченность, сдвиг. TODO	58
55 Преобразование Фурье свертки. TODO	58
56 Преобразование Фурье и дифференцирование. TODO	58
57 Лемма об оценке интеграла ядра Дирихле	58
58 Теорема об интегрировании ряда Фурье	59
59 Лемма о сходимости сумм Фурье в смысле обобщенных функций	60
60 Следствие о преобразовании Фурье финитных функций	61
61 Лемма "о ядре Дирихле". Следствие. TODO	62
62 Теорема о равносходимости ряда Фурье и интеграла Фурье	62

1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

f — измеримая функция на X , $\forall x \ f(x) \geq 0$. Тогда \exists ступенчатые функции f_n , такие что:

1. $\forall x \ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$.
2. $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$.

Следствие 1:

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измеримая. Тогда \exists ступенчатая $f_n : \forall x : \lim f_n(x) = f(x)$ и $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f = f^+ - f^-$. $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Срезки измеримы: $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$, при этом f и $g \equiv 0$ измеримы (f^- измерима аналогично).
2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции $f_n^+ \rightarrow f^+$, $f_n^- \rightarrow f^-$. Тогда и $f_n^+ - f_n^-$ это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов: $f_n^+ - f_n^- \rightarrow f^+ - f^- = f$. $|f_n| = |f_n^-| + |f_n^+|$, $|f| = |f^-| + |f^+|$ (так как одновременно только одна срезка может быть неотрицательно), поэтому $|f_n| \leq |f|$

Следствие 2:

f, g — измеримые функции. Тогда fg — измеримая функция. При этом считаем, что $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f_n \rightarrow f : |f_n| \leq |f|$, $g_n \rightarrow g : |g_n| \leq |g|$ из первого следствия. Тогда $f_n g_n \rightarrow fg$ и fg измерима по теореме об измеримости пределов и супремумов (произведение ступенчатых функций — ступенчатая функция, значит, измеримая)

Следствие 3:

f, g — измеримые функции. Тогда $f + g$ — измеримая функция. При этом считаем, что $\forall x$ не может быть, что $f(x) = \pm\infty, g(x) = \mp\infty$

Доказательство:

Доказывается как следствие 2.

2 Измеримость монотонной функции

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое по Лебегу, $E' \subset E, \lambda_m(E \setminus E') = 0, f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть сужение $f : E' \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда f измерима на E .

Доказательство:

1. $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a), e := E \setminus E', \lambda_m(e) = 0$.
2. $E'(f < a)$ открыто в E' , так как f непрерывна (прообраз открытого множества открыт). $E'(f < a) = E' \cap F$, где F открыто в \mathbb{R}^m (теорема об открытых множествах в пространстве и подпространстве). F измеримо, поскольку открытые множества измеримы. E' измеримо. Поэтому $E'(f < a)$ измеримо как пересечение измеримых.
3. $e(f < a)$ — подмножество e , а $\lambda_m(e) = 0$, поэтому $\lambda_m(e(f < a)) = 0 \Rightarrow e(f < a)$ измеримо
4. Следовательно $E(f < a)$ измеримо как объединение измеримых множеств, следовательно, f измерима на E .

Следствие:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна. Тогда f измерима.

Доказательство:

Множество разрывов монотонной функции не более чем счётно, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны, измеримы

$f_n \rightarrow f$ (поточечно, п.в.)

Тогда $f_n \xrightarrow{\mu} f$

Доказательство:

1. подменим значения f_n и f на некотором множестве меры 0 так, чтобы сходимость $f_n \rightarrow f$ была всюду. (Так можно сделать. Действительно, $f_n \rightarrow f$ на $X \setminus e$, $\mu e = 0$

f_n - конечно на $X \setminus e_n$,

f - конечно на $X \setminus e_0$.

Тогда на $(X \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n)$ функции конечны и есть сходимость $f_n \rightarrow f$. По

свойствам меры $\mu \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n = 0$. Тогда определим на $\bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n$ $f_n = f = 0$.

Это очевидно даст нам необходимую конечность и поточечную сходимость.)

2. (частный случай) $f_n \rightarrow f \equiv 0$. Тогда пусть $\forall x f_n(x)$ - монотонно (по n). $|f_n(x)|$ - убывает с ростом n и $X(|f_n| \geq \epsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \epsilon)$. А также $\bigcap_{n=0}^{+\infty} X(|f_n| \geq \epsilon) = \emptyset$.

$$\begin{cases} \mu X < +\infty \\ \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu E_n \rightarrow \mu \cap E_n$ - Th о непрерывности меры сверху.

$\Rightarrow \mu X(|f_n| \geq \epsilon) \rightarrow \mu \emptyset = 0$

3. (общий случай) $f_n \rightarrow f$. Рассмотрим $\phi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$. Заметим свойства ϕ :

$$\begin{cases} \phi_n(x) \rightarrow 0 \\ \phi_n \downarrow_n \end{cases}$$

$X(|f_n - f| \geq \epsilon) \subset X(\phi_n \geq \epsilon) \Rightarrow$ по монотонности меры имеем
 $\mu X(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu X(\phi_n \geq \epsilon) \xrightarrow{part.case} 0$, ч.т.д.

4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны, измеримы

$f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Тогда $\exists n_k \uparrow : f_{n_k} \rightarrow f$ п.в.

Доказательство: $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда $\exists n_k : \forall n \geq n_k : \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$ (можно считать $n_1 < n_2 < \dots$)

Проверим $f_{n_k} \rightarrow f$ п.в. :

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j})$$

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$$

$$E_0 := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

$\mu E_k \leq \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \leq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^k} = 2^{1-k}$ - конечно, убывает
 $\Rightarrow \mu E_k \rightarrow \mu E_0 \Rightarrow \mu E_0 = 0$ (т.к. $\mu E_k \rightarrow 0$).

Рассмотрим $x \notin E_0$, т.е. $\exists k : x \notin E_k$. Тогда $\forall j \geq k |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$
при $n \geq n_j$, т.е. $f_{n_k} \rightarrow f$, ч.т.д.

Следствие: Если $f_n \Rightarrow f$ и $|f_n| \leq g$ п.в., то $|f| \leq g$ п.в.

Доказательство: Рассмотрим последовательность f_{n_k} где $f_{n_k} \rightarrow f$ п.в. и вдоль нее применим Th о двух городских.

$$\begin{cases} f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X \setminus e_1 \\ |f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X \setminus e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f| \leq g \text{ на } (X \setminus e_1) \setminus e_2$$

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

5.1 Для определения (5), ступенчатые функции

1. $\int_{\mathbb{X}} f$ не зависит от представления f как ступенчатой функции, то есть если f реализуется как $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ и как $f = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$, то интегралы по этим функциям равны

Доказательство:

Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_i (\lambda_i \cdot \sum_j (\mu F_{i,j})) = \sum_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f$ для первого разбиения

Аналогично для второго разбиения получаем

$\int f = \sum_{i,j} (\alpha_j \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_j (\alpha_j \cdot \sum_i (\mu F_{i,j})) = \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int f$ для второго разбиения, что и требовалось доказать

2. f, g -измеримые ступенчатые функции, $f \leq g$, тогда $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

Пусть $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$, $g = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда $\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leq \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int g$, что и требовалось доказать

5.2 Для окончательного определения

1. Монотонность $f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

(a) $f, g \geq 0$, тогда доказательство тривиально (по свойствам супремума)

(b) $\int_{\mathbb{X}} f = \int_{\mathbb{X}} f^+ - \int_{\mathbb{X}} f^-$

$$\int_{\mathbb{X}} g = \int_{\mathbb{X}} g^+ - \int_{\mathbb{X}} g^-$$

Из того, что $\int_{\mathbb{X}} f^+ \leq \int_{\mathbb{X}} g^+$, а $\int_{\mathbb{X}} f^- \geq \int_{\mathbb{X}} g^-$ следует, что $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

2. $\int_{\mathbb{E}} 1 \cdot d\mu = \mu E$

$$\int_{\mathbb{E}} 0 \cdot d\mu = 0$$

Очевидно из определения интеграла ступенчатой функции

3. $\mu E = 0$, f -измерима, тогда $\int_{\mathbb{E}} f = 0$, даже если $f = \infty$ на \mathbb{E}

Доказательство:

(a) f -ступенчатая \Rightarrow ограниченная

$$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}), \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sum \lambda_k \cdot \mu(E \cap E_k)$$

Но $\mu(E \cap E_k) = 0$ (так как $\mu E = 0$), тогда $\int_{\mathbb{E}} f = 0$

(b) f - измеримая, $f \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{E}} f = \sup \left(\int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq f, g - \text{ ступенчатая}$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sup(0) = 0$$

(c) f - произвольная измеримая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- = 0 - 0 = 0$$

$$4. (a) \int_{\mathbb{E}} -f = - \int_{\mathbb{E}} f$$

$$(b) \forall c \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

Доказательство:

$$(a) (-f)^+ = f^-$$

$$(-f)^- = f^+$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} -f = \int_{\mathbb{E}} (-f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (-f)^- = \int_{\mathbb{E}} f^- - \int_{\mathbb{E}} f^+ = - \int_{\mathbb{E}} f$$

(b) Пусть $c > 0$. Если $c < 0$, то по предыдущему случаю можем рассматривать для $-c < 0$. Если $c = 0$, то по пункту 2 $\int_{\mathbb{E}} (0 \cdot f) =$

$$\int_{\mathbb{E}} 0 = 0 = 0 \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

i. Пусть $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup \left(\int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq c \cdot f, g - \text{ ступенчатая}$$

$$\text{Пусть } g = c \cdot \tilde{g}, \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup \left(\int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right), \text{ где } 0 \leq c \cdot \tilde{g} \leq c \cdot f,$$

\tilde{g} - ступенчатая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup \left(\int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right) = \sup \left(c \cdot \int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \sup \left(\int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

ii. Если f - произвольная:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) &= \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^- = \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^+ - \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^- = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^+ - \\ &c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^- = c \cdot \left(\int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f \end{aligned}$$

5. Если существует $\int_{\mathbb{E}} f d\mu$, то $\left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$

Доказательство:

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\int_{\mathbb{E}} -|f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$- \int_{\mathbb{E}} |f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$\text{Тогда } \left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

6. f - измеримая на \mathbb{E} , $\mu\mathbb{E} < \infty$

$$a \leq f \leq b, \text{ тогда } a \cdot \mu E \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu E$$

Доказательство:

$$a \leq f \leq b \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} a \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} b$$

$$a \cdot \int_{\mathbb{E}} 1 \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \int_{\mathbb{E}} 1$$

$$a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Следствие:

Если f - Измеримая и ограниченная на \mathbb{E} , $\mu\mathbb{E} < \infty$, тогда f - суммируемая на \mathbb{E}

7. f - суммируемая на $\mathbb{E} \Rightarrow f$ почти везде конечная на \mathbb{E} (то есть $f \in \alpha^0(\mathbb{E})$)

Доказательство:

(a) Пусть $f \geq 0$

Пусть $f = +\infty$ на A и пусть $\mu A > 0$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : f \geq n \cdot \chi_A$

$$\text{Тогда } \forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{E}} f \geq n \cdot \int_{\mathbb{E}} \chi_A = n \cdot \mu A \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} f = +\infty$$

(b) f любого знака

Распишем $f = f^+ - f^-$, по предыдущему пункту f^+, f^- конечны почти везде $\Rightarrow f$ тоже конечно почти везде

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — измеримы. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — изм., $f \geq 0$

Тогда:
$$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$$

Доказательство:

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

$$\int_A f d\mu = \sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum_k (\lambda_k \cdot (\sum_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i \left(\int_{A_i} f \right)$$

2. Докажем, что $\int_A f \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) Рассмотрим $0 \leq g \leq f$ — ступенчатая. $\int_A g = \sum_i \int_{A_i} g \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(b) Переходя к *sup* получаем желаемое

3. Теперь докажем, что $\int_A f \geq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) $A = A_1 \sqcup A_2$

i. Рассмотрим g_1, g_2 — ступенчатые такие, что $0 \leq g_i \leq f \cdot \chi_{A_i}$

ii. Рассмотрим их общее разбиение E_k : $g_i = \sum_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

iii. $g_1 + g_2$ — ступенчатая и $0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$

iv. $\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \stackrel{lemma}{=} \int_A (g_1 + g_2) \stackrel{iii}{\leq} \int_A f$

v. Поочерёдно переходя к *sup* по g_1 и g_2 получаем: $\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq$

$$\int_A f$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, что $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ будем последовательно отщеплять последнее множество по (a)

$$(c) A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

i. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$

$$ii. A = \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) \sqcup B, \text{ где } B = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$$

$$iii. \int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \text{ (равенство, поскольку мы рассматриваем } A \text{ как конечное объединение } A_1, \dots, A_n \text{ и } B).$$

iv. Переходим к \lim по n

$$\text{Следствие 1: } 0 \leq f \leq g - \text{измеримы и } A \subset B - \text{измеримы} \Rightarrow \int_A f \leq \int_B g$$

$$\int_B g \geq \int_B f = \int_A f + \int_{B \setminus A} f \geq \int_A f$$

$$\text{Следствие 2: } f - \text{суммируема на } A \Rightarrow \int_A f = \sum_i \int_{A_i} f$$

Достаточно рассмотреть срезки f^+ и f^-

$$\text{Следствие 3: } f \geq 0 - \text{изм. } \delta : \mathbb{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (A \mapsto \int_A f d\mu) \Rightarrow \delta - \text{мера}$$

7 Теорема Леви

$(X, \mathbb{A}, \mu), f_n \geq 0$ - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$ при почти всех x

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ при почти всех x (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

$$\text{Тогда: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$$

Доказательство:

$$N.B. \int_X f_n \leq \int_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$$

f - измерима как предел последовательности измеримых функций

1. \leq

Очевидно: $f_n \leq f$ при п.в $x \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f$. Делаем предельный переход по n .

2. \geq

(a) Логичная редукция: хочется доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq \int_X g$, где $0 \leq g \leq f$, g ступенчатая.

(b) Наглая редукция: докажем, что $\forall c \in (0, 1) : \lim \int_X f_n(x) \geq c \cdot \int_X g$

i. $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq c \cdot g\}$. Очевидно $E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$

ii. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ т.к. $c < 1$

iii. $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} c \cdot g$ (по определению E_n)
 $\Rightarrow \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g$

iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем непрерывность меры снизу

v. Устремляем c к 1.

8 Линейность интеграла Лебега

$f, g \geq 0$, измеримые

Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$

Доказательство:

1. Пусть f, g - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

$$f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$g = \sum_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \sum_k (\lambda_k + \alpha_k) \cdot \mu E_k = \sum_k \lambda_k \cdot \mu E_k + \sum_k \alpha_k \cdot \mu E_k = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g,$$

что и требовалось доказать

2. $f, g \geq 0$, измеримые

Тогда $\exists h_n : 0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$, h_n ступенчатые

$\exists \widetilde{h_n} : 0 \leq \widetilde{h_n} \leq \widetilde{h_{n+1}} \leq g$, $\widetilde{h_n}$ ступенчатые

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = f$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widetilde{h_n} = g$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h_n}) = \int_{\mathbb{E}} h_n + \int_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n}$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h_n}) \rightarrow \int_{\mathbb{E}} (f + g)$$

$$\int_{\mathbb{E}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} f$$

$$\int_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n} \rightarrow \int_{\mathbb{E}} g$$

Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

3. Если f, g - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$ почти всюду на \mathbb{E} , тогда $\int_{\mathbb{E}} (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

Доказательство:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x); S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$$1. S_N - \text{возрастает к } S \text{ при почти всех } x \xrightarrow{\text{Т. Леви}} \int_{\mathbb{E}} S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{E}} S = \int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$$2. \text{ С другой стороны } \int_{\mathbb{E}} S_N = \int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu$$

3. Найденные пределы совпадают в силу единственности предела последовательности, что и требовалось доказать.

10 Теорема о произведении мер

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle, \langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ - пространства с мерой

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

Тогда:

1. m_0 - мера на полукольце $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$
2. μ, ν - σ -конечны $\Rightarrow m_0$ - σ -конечна

Доказательство:

1. Неотрицательность m_0 очевидна. Необходимо доказать счетную аддитивность

Пусть $P = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} P_k$, где $P \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$

$$P = A \times B; \quad P_k = A_k \times B_k$$

Заметим, что:

- $\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y)$, в силу дизъюнктности P_k ((x, y) входит максимум в одно множество из всех P_k)

- $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, так как $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$ и $y \in B$

Воспользовавшись вышесказанным получим:

$$\chi_P(x, y) = \chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$$

$$\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y)$$

Имеем следующее равенство:

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y)$$

Проинтегрируем его по мере μ по x , затем по мере ν по y , получим:

$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$, то есть $m_0(P) = \sum m_0(P_k)$, что и требовалось доказать.

$$2. \mu, \nu - \sigma\text{-конечны} \Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \text{ где } \mu A_k < +\infty; Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \text{ где } \nu B_k < +\infty$$

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_j)$$

$$m_0(A_i \times B_j) = \mu A_i \cdot \nu B_j < +\infty, \text{ так как } \mu A_i < +\infty \text{ и } \nu B_j < +\infty$$

все $(A_i \times B_j) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$ по определению

Что и требовалось доказать.

11 Абсолютная непрерывность интеграла

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - суммируема

Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E - \text{измеримое } \mu E < \delta \mid \int_E f d\mu \mid < \epsilon$

Доказательство:

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$$

$\mu(\cap X_n) = 0$, т.к. f — суммируема и потому почти везде конечна.

1. Мера : $(A \mapsto \int |f|)$ также равна 0 на $\cap X_n$. По непрерывности сверху:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \int_{X_{n_\epsilon}}^A |f| < \epsilon/2$$

2. Зафиксируем ϵ в доказываемом утверждении, возьмем $\delta := \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon}$

$$3. \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\epsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\epsilon}^c} |f| \stackrel{*}{\leq} \int_{X_{n_\epsilon}} |f| + n_\epsilon \cdot \mu(E \cap X_{n_\epsilon}^c) \stackrel{**}{<} \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$$

* - В первом слагаемом увеличили множество, во втором посмотрели на определение X_n , взяли дополнение, воспользовались 6-м простейшим свойством интеграла

** - Воспользовались непрерывностью сверху

11.1 Следствие

f — суммируема

e_n — измеримые множества

Тогда если $\mu e_n \rightarrow 0$, то $\int_{e_n} f \rightarrow 0$

12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой,

f_n, f — измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ (сходится по мере),

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g называется мажорантой)
- g — суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. f_n – суммируема, так как существует мажоранта g :

$$(a) |f_n| \leq g, \text{ поэтому } \int_X |f_n| \leq \int_X g.$$

$$(b) g \text{ суммируема и положительна} \Rightarrow \int_X g < +\infty \Rightarrow \int_X |f_n| < +\infty \Rightarrow f_n \text{ суммируема.}$$

2. f – суммируема по теореме Рисса ($f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде, $|f_{n_k}| \leq g$, тогда $|f| \leq g$ почти везде)

3. «уж тем более»:

$$\left| \int_{\mathbb{X}} f_n - \int_{\mathbb{X}} f \right| \leq \int_{\mathbb{X}} |f_n - f|$$

Допустим, что $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ уже доказано.

Тогда «уж тем более» очевидно.

4. Докажем основное утверждение:

Разберем два случая:

$$(a) \mu X < \infty \text{ Фиксируем } \epsilon \geq 0 \quad X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\mu X_n \rightarrow 0 \text{ (так как } f_n \Rightarrow f)$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} |f_n - f| + \int_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon \mu X$$

$$\text{(прим. } \int_{X_n} 2g \rightarrow 0 \text{ по след. к т. об абс. сходимости)}$$

(b) $\mu X = \infty$

Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для g :

$$\forall \epsilon \exists A \subset X : \mu A - \text{конечно}, \int_{X \setminus A} g < \epsilon$$

доказательство:

$$\int_X g = \sup \left\{ \int_X g_k \mid 0 \leq g_k \leq g \right\} \quad (g_k - \text{ступен.})$$

$$\exists g_n : \int_X g - \int_X g_n < \epsilon$$

$$A := \text{supp } g_n \quad (\text{supp } f := \{x \mid f(x) \neq 0\})$$

$$A = \bigcup_{k \mid \alpha_k \neq 0} E_k \quad (\text{где } g_n = \sum_{\text{конечная}} \alpha_k \chi_{E_k})$$

$$\int_X g_n = \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty \quad (\mu A - \text{конеч.})$$

$$\int_{X \setminus A} g = \int_{X \setminus A} (g - g_n) \leq \int_X (g - g_n) < \epsilon$$

Теперь докажем основное утверждение:

$$\int_X |f_n - f| = \int_A |f_n - f| + \int_{X \setminus A} |f_n - f| \leq \int_A |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon$$

$$\left(\int_A |f_n - f| \rightarrow 0 \text{ по п. (a)} \right)$$

13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой,

f_n, f – измеримы,

$f_n \rightarrow f$ **почти везде**,

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g называется мажорантой)
- g – суммируемая

Тогда:

- f_n, f — суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. Суммируемость и «уж тем более» см. пред. теорему.

2. Докажем основное утверждение:

$$h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

Заметим, что при фикс. x выпол. $0 \leq h_n \leq 2g$ почти везде

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| = 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \uparrow, 2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде

$$\int_X (2g - h_n) d\mu \rightarrow \int_X 2g \text{ (по т. Леви)}$$

$$\int_X 2g - \int_X h \rightarrow \int_X 2g, \text{ значит, } \int_X h_n \rightarrow 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$$

14 Теорема Фату. Следствия.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой

f_n, f — измеримы,

$$f_n \geq 0$$

$f_n \rightarrow f$ «почти везде»

$$\exists C > 0 \forall n \int_X f_n d\mu \leq C$$

Тогда: $\int_X f \leq C$

Доказательство:

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$$

$$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) \stackrel{\text{почти везде}}{=} \lim f_n = f \quad (g_n \rightarrow f \text{ почти везде})$$

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C$$

$$\int_X f = \text{no m. Леви} = \lim \int_X g_n \leq C$$

14.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$ – измер.

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

$$\exists C \forall n \int_X f_n \leq C$$

Тогда:

$$\bullet \int_X f \leq C$$

Доказательство:

$$\exists f_{n_k} \rightarrow f \text{ почти везде}$$

14.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$ – измер.

Тогда:

$$\bullet \int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Доказательство:

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$$

$$g := \lim g_n = \underline{\lim} f_n$$

$\int_X g_n \leq \int_X f_n$ по монотонности интеграла. Перейдём к нижнему пределу по n :

$$\underline{\lim} \int_X g_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

$$\int_X g \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \lim \int_X g_n = \underline{\lim} \int_X g_n$$

15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

15.1 Лемма

Пусть у нас есть $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ и $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$

Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$

Тогда:

ν — мера на (Y, \mathbb{B}) , $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 \cdot d\mu$

Доказательство:

Докажем по определению меры:

$$\nu(\bigsqcup E_i) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E_i)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_i)) = \sum \mu(\Phi^{-1}(E_i)) = \sum \nu(E_i)$$

15.2 Следствие

Из этого следует, что если f — измеримая функция в Y (относительно ν), то $f \circ \Phi$ измерима относительно μ .

15.3 Теорема

Есть пространства $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$.

$\Phi : X \rightarrow Y$ $w \geq 0$ — измеримая, ν — взвешенный образ μ (w — плотность)

Тогда:

Для $\forall f \geq 0$ — измерима на Y , $f \circ \Phi$ — измерима (относительно μ)

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$$

Замечание: То же верно, если f суммируема.

Доказательство:

- $f \circ \Phi$ — измерима (из леммы)

- Возьмем $f = \chi_E, E \in \mathbb{B}$
 $(f \circ \Phi)(x) = \chi_{\Phi^{-1}(E)}$ — определение взвешенного образа меры
 $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$ — доказали первый пункт
- — f — ступенчатая $\Rightarrow f = \sum \alpha_k * \chi_{E_k}$

$$- \int_Y \sum \alpha_k * \chi_{E_k} d\nu = \sum_Y \int \alpha_k \chi_{E_k} d\nu \stackrel{\text{первый случай}}{=} \sum \alpha_k \int_X \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) dx = \int_X \sum \alpha_k \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x) = \int f \circ \Phi * \omega d\mu$$
- Если f — произвольная неотрицательная, то будем строить возрастающую последовательность ступенчатых, поточечно сходящихся к f . Тогда $\int_Y f_n d\nu = \int_X f_n(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$. По теореме Леви делаем переход под знаком интеграла и всё доказываем.

16 Критерий плотности

Есть пространство $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$

ν — еще одна мера.

$\omega \geq 0$ — измерима на X .

Тогда:

ω — плотность ν относительно $\mu \iff$ Для любого $A \in \mathbb{A} : \mu A \cdot \inf_A(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A(\omega)$

Доказательство:

- \Rightarrow : очевидно из стандартного свойства интеграла
- \Leftarrow

Что за бред тут вообще написан?

- Достаточно доказать, что $\omega > 0$ (когда $\omega = 0$, отсюда следует что интеграл = 0 из оценок, что $\nu(E) = 0$)
- Давайте брать такие $A \subset X(\omega > 0)$, тогда $\nu A = \int_A \omega(x) d\mu$
- Тогда для любого $A \in \mathbb{A}$ $A = A_1 \sqcup A_2$, где $A_1 \subset A(\omega > 0)$ & $A_2 \subset A(\omega = 0)$

- Получаем, что $\nu A = \nu A_1 + \nu A_2 = \int_{A_1} \omega + 0 = \int_{A_1} \omega + \int_{A_2} \omega = \int_A \omega$
- Пусть $q \in (0, 1)$ и $A_j := A(q^j \leq \omega(x) < q^{j-1})$, $j \in \mathbb{Z}$. Получается, что $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$
- Рассмотрим $q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} * \mu A_j$ и $\nu A_j = \int_{A_j} \omega d\mu$
- $q * \int_A \omega d\mu = q * \sum \int_{A_j} \leq \sum q^j * \mu A_j \leq \sum j * A_j = \nu(A) \leq 1/q * \sum q^j * \mu A_j \leq 1/q * \sum \int_{A_j} \omega = 1/q * \int_A \omega$
- $q * \int_A \omega d\mu \leq \nu(A) \leq 1/q * \int_A \omega d\mu$
- Устремим q к 1 и мы победили

17 Лемма о единственности плотности

$f, g \in L(x)$.

Пусть $\forall A$ — измеримо: $\int_A f = \int_A g$.

Тогда:

$f = g$ почти везде

Следствие:

Плотность ν относительно μ определена однозначно с точностью до μ -почти везде.

Доказательство:

- Вместо двух функций давайте рассмотрим одну $h = f - g$ и $\forall \int_A h = 0$. Пусть $A_+ = X(h \geq 0)$ и $A_- = X(h < 0)$
- $\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$
 $\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0$
- $X = A_+ \sqcup A_-$. Тогда $\int_X |h| = \int_{A_+} |h| + \int_{A_-} |h| = 0 \Rightarrow h = 0$ почти везде.

18 Лемма о множестве положительности

Пусть есть пространство $\langle X, \mathbb{A} \rangle$ и ϕ — заряд.

Тогда:

$\forall A \in \mathbb{A} \exists B \subset A : \phi(B) \geq \phi(A)$ и B — множество положительности

Доказательство:

- Если $\phi(A) \leq 0$, возьмём $B = \emptyset$. Далее $\phi(A) > 0$.
- E — множество ϵ -положительности (М ϵ П), если $\forall C \subset E, C$ измеримо: $\phi(C) \geq -\epsilon$
- **Утверждение:** $\forall \epsilon > 0$ A содержит М ϵ П C , такое что $\phi(C) \geq \phi(A)$.
 1. Если A — М ϵ П, то $C = A$
 2. Пусть A — не М ϵ П. Тогда существует $C_1 \subset A : \phi(C_1) < -\epsilon$.
Пусть $A_1 = A \setminus C_1$. $\phi(A_1) > \phi(A)$
 3. Если A_1 — М ϵ П, то это и есть искомое C . Иначе продолжим строить так A_2, A_3, \dots и C_2, \dots
 4. Процесс конечен, так как все C_i дизъюнкты, $\phi(C_i) < -\epsilon$, но $\phi(\bigsqcup C_i)$ конечно по определению заряда.
- Построим B : C_1 — множество 1-положительности в A . C_2 — множество $\frac{1}{2}$ -положительности в C_1 , и т. д. Тогда $B = \bigcap C_i$ — М ϵ П для любого ϵ , значит, это МП.
- $\phi(B) = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(C_i) \geq \phi(A)$ Это какая-то пародия на непрерывность меры, только для зарядов?

19 Теорема Радона-Никодима

Пусть есть пространство (X, \mathbb{A}, μ) .

ν — мера на \mathbb{A} .

Обе меры конечные и $\nu \prec \mu$ (абсолютная непрерывность меры: если

$\mu E = 0$, то $\nu E = 0$).

Тогда:

$\exists! f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (с точностью до почти везде), которая является плотностью ν относительно μ и при этом f суммируема по μ .

Доказательство:

• единственность — из леммы

• строим кандидата на роль f . $P = \{p(x) | p \geq 0, \text{ изм., } \forall E \in \mathbb{A} : \int_E p \cdot d\mu \leq \nu(E)\}$

1. $P \neq \emptyset$ и $0 \in P$

2. $p_1, p_2 \in P \Rightarrow h = \max(p_1, p_2) \in P$

$$\forall E \int h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} h d\mu + \int_{E(p_1 < p_2)} h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} p_1 + \int_{E(p_1 < p_2)} p_2 \leq \nu(E(p_1 \geq p_2)) + \nu(E(p_1 < p_2)) = \nu E$$

По индукции $\max(p_1 \dots p_n) \in P$

3. $I = \sup_{p \in P} \int p d\mu$

\exists последовательность $f_1 \leq f_2 \leq \dots \in P : \int_X f_n d\mu \rightarrow I$ докажем, что она существует

4. Рассмотрим $p_1, p_2, \dots : \int_X p_n \rightarrow I$ (потому что супремум), а также

$$f_n = \max(p_1 \dots p_n) \in P$$

5. $f := \lim f_n$. Тогда $\int_E f d\mu \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \lim_E \int f_n d\mu \leq \nu E$, а следовательно

$$\int_X f = \lim_X \int f_n = I \leq \nu(X)$$

6. Отлично, проверим, что f — плотность ν относительно μ .

(а) Предположим, что это не так: $\exists E_0 : \nu E_0 > \int_{E_0} f d\mu$

(b) $\mu E_0 > 0$ (иначе интеграл равно нулю и мера ν равна нулю из абсолютной непрерывности)

(с) Возьмем $a > 0 : \nu E_0 - \int_{E_0} f d\mu > a \cdot \mu E_0$

- (d) Рассмотрим заряд $\phi(E) = \nu E - \int_E f d\mu - a \cdot \mu E$ (это законно, потому что меры конечные)
- (e) $\phi(E_0) > 0$ (пункт с). Возьмем МП $B \subset E_0 : \phi(B) \geq \phi(E_0) > 0$. Тогда $\nu(B) = \phi(B) + \int_B f \cdot d\mu + a \cdot \mu B \geq \phi(B) > 0$
- (f) Проверим, что $f + a \cdot \chi_B \in P$. По определению: $\int_E (f + a \cdot \chi_B) d\mu = \int_{E \setminus B} f \cdot d\mu + \int_{E \cap B} f \cdot d\mu + a \cdot \mu(B \cap E) = \int_{E \setminus B} f + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) \stackrel{f \in P}{\leq} \nu(E \setminus B) + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) = \nu E - \phi(E \cap B) \stackrel{\phi \geq 0}{\leq} \nu E$
- (g) $\int_X f + a \cdot \chi_B = I + a \cdot \mu B > I$, что противоречит определению I .

20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in O, \Phi \in C^1(O)$

Возьмём $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

тогда $\exists \delta > 0 : \forall$ кубической ячейки $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Доказательство

$\Phi(Q)$ измеримо, так как образ измеримого множества при гладком отображении измерим

$L := \Phi'(a), L$ обратимо, так как $|\det L| \neq 0$.

$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$

Можем писать о малое, так как растяжение произошло не более чем в $|\det L^{-1}|$ раз, а $|\det L| \neq 0$

Пусть $\Psi(x) := a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))$

$\forall \epsilon > 0 \exists B(a, \delta)$, такой, что при $x \in B(a, \delta)$ $|\Psi(x) - x| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$ (так как $\Psi(x)$ это почти x , только плюс $o(x - a)$)

$a \in Q \subset B(a, \delta)$, где Q — куб со стороной h

$x \in Q$, тогда $|a - x| < \sqrt{m} \cdot h$ (так как диагональ m -мерного куба со стороной h равна $\sqrt{m} \cdot h$)

Тогда $|\Psi(x) - x| < \epsilon h$

При $x, y \in Q, i \in \{1 \dots m\}$

$$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |\Psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + |\Psi(y) - y| + h < (1 + 2\epsilon)h$$

$\Psi(Q) \subset$ кубу со стороной $(1 + 2\epsilon)h$

$$\lambda(\Psi(Q)) < (1 + 2\epsilon)^m \lambda Q$$

Φ выражается через Ψ через сдвиги и линейные преобразования. Тогда

$$\lambda(\Phi(Q)) = |\det L| \cdot \lambda \Psi(Q) \leq |\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Возьмём ϵ так, чтобы $|\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m$ было меньше c . Тогда при таком ϵ

$$\lambda(\Phi(Q)) < c \cdot \lambda Q$$

21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»

$$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$A \subset O$, A - открыто.

$A \subset Q$ (кубическая ячейка) $\subset \overline{Q} \subset O$, то есть граница A не лежит на границе O .

Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G \text{ — open set}} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство

Докажем, что левая часть \geq и \leq правой

\geq очевидно, так как правая часть - нижняя граница для всего, встречающегося под \inf

Докажем \leq Почему это не очевидно? Может, с формулировкой что-то не так?

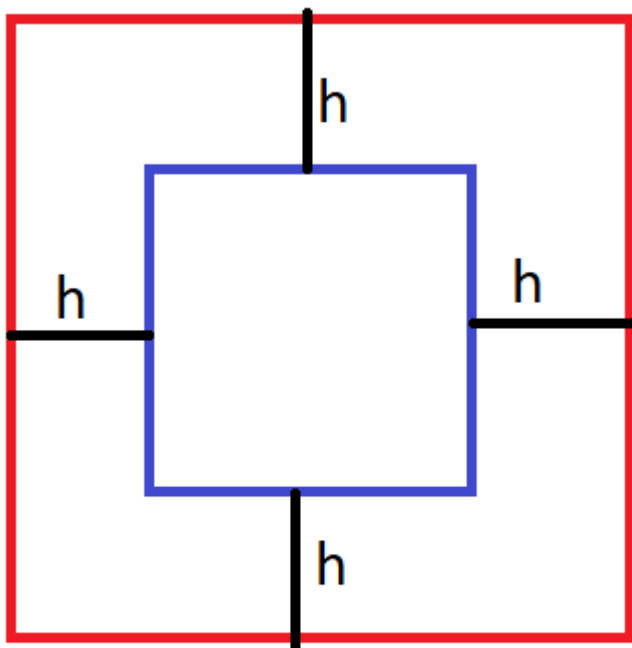
1. $\lambda A = 0$. Тогда правая часть $= 0$.

$$A \subset \overline{Q} \Rightarrow \sup f < +\infty$$

\overline{Q} - компакт, $\alpha := \text{dist}(\overline{Q}, \partial O) > 0$

Для множества $G : A \subset G \subset \frac{\alpha}{2}$ -окрестности ячейки Q

Назовём Q_1 кубическую ячейку, которая больше Q и у которой каждая сторона отстоит на $\frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$ от соответствующей стороны Q .



$$h = \frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$$

$$A \subset G \subset \text{Int}(Q_1)$$

$$\sup_G f \leq \sup_{\overline{Q_1}} f < +\infty$$

При этом λG может быть выбрана сколь угодно близко к $\lambda A = 0$ по регулярности меры Лебега.

$$2. \lambda A > 0, \sup_A f < c$$

Возьмём c_1 :

$$\sup_A f < c_1 < c$$

Выберем ϵ так чтобы

$$\epsilon \cdot c_1 < \lambda A \cdot (c - c_1) \quad (*)$$

G_ϵ - такое множество, что $A \subset G_\epsilon$, G_ϵ — открытое, $\lambda(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$

$G_1 := f^{-1}((-\infty; c_1)) \cap G_\epsilon$ — открытое

$$\lambda(G_1 \setminus A) < \epsilon$$

$$\lambda G_1 \cdot \sup_{G_1} f \leq (\lambda A + \epsilon) \cdot c_1 < \lambda A \cdot c \text{ (из (*))}$$

(так как $G \subset f^{-1}((-\infty; c_1))$, то есть f на G_1 не больше c_1)

$$\inf(\lambda G \cdot \sup_G f) < \lambda A \cdot c$$

Переходя к \inf по c , получаем что требовалось

22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - Диффеоморфизм, $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

TODO: Илья

23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм

$O' = \Phi(O)$ — открытое

f задана на O' , $f \geq 0$, измерима по Лебегу, тогда

$$\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$$

Доказательство:

Изи.

$\nu(A) = \lambda\Phi(A)$, ν имеет плотность $J\Phi$ относительно λ .

Применить теорему об интеграле по взвешенному образу меры.

24 Теорема (принцип Кавальери)

(X, α, μ) и (Y, β, ν) — пространства с мерами, причем μ, ν — σ -конечные и полные

$m = \mu \times \nu$, $C \in \alpha \otimes \beta$, тогда:

1. При п.в. x C_x измеримо (ν -измеримо), т.е. $C_x \in \beta$
2. Функция $x \rightarrow \nu C_x$ — измеримая (в широком смысле) на X

NB: ϕ — измерима в широком смысле, если она задана при п.в. x , и $\exists f : X \rightarrow R'$ — измеримая и $\phi = f$ п.в. При этом $\int_X \phi = \int_X f$ (по опр.)

$$3. mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$$

Доказательство: Рассмотрим D — совокупность все множеств C , для которых утверждение теоремы верно.

$\rho = \alpha \times \beta$ — полукольцо измеримых «прямоугольников».

$$1. \rho \subset D$$

$$C = A \times B. \text{ то есть } \forall x \ C_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin A; \\ B, x \in A \end{cases}$$

$x \rightarrow \nu(C_x)$, функция $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$ — изм.

$$\int_X \nu(C_x) d\mu = \nu B \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \nu B \cdot \mu A = mC$$

$$2. E_i \in D, E_i \text{ дизъюнкты} \Rightarrow E := \bigsqcup E_i \in D$$

при п.в. x $(E_i)_x$ — измеримы

при п.в. x все $(E_i)_x$ — измеримы, $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримо.

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$ ($\nu(E_i)_x$ — изм. как функция от x) \Rightarrow функция $x \rightarrow \nu E_x$ — измерима

$$\int_X \nu E_x d\mu(x) = \sum_i \int \nu(E_i)_x d\mu(x) = \sum_i mE_i = mE$$

$$3. E_i \in D, E_1 \supset E_2 \supset \dots; mE_i < +\infty. \text{ Тогда } E := \bigcap E_i \in D$$

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \ (*)$$

функция $x \rightarrow \nu(E_i)_x$ — суммируема \Rightarrow п.в. конечна.

при всех x $(E_i)_x \downarrow E_x$, т.е. $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots$ и $\bigcap (E_i)_x = E_x$

при п.в. x $\nu(E_i)_x$ — конечны (для таких x).

Тогда E_x — измерима и $\lim \nu(E_i)_x = \nu E_x$ по непр-ти меры ν сверху.

(Th. Лебега) $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — сумм. \Rightarrow функция $x \rightarrow \nu E_x$ — изм.
 $\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ (нерп. сверху меры m).
Этот предельный переход корректен как раз по теореме Лебега ($f_n \rightarrow f$ п.в. $g : |f_n| \leq g$ — сумм. Тогда $\int f_n \rightarrow \int f$).

NB: мы доказали про пересечения и про объединения (пусть пересечения убывающие, а объединения — дизъюнктные, но это лечится).
Поэтому $\cap_j (\cup_i A_{i,j}) \in D$, если $A_{i,j} \in \rho$ ($\rho \subset D$).

Я точно не уверен, но вроде, дальше написан бред

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$

$\exists H \in D$, H имеет вид $\cap(\cup A_{i,j})$, где все $A_{i,j} \in \rho$

$E \subset H$, $mH = 0$ из п.5 т. о продолжении **ЧТО?! поясните плз**

$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu(x) \Rightarrow \nu H_x = 0$ ($= 0$ при п.в. x).

$E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$ — ν -изм. (из полноты ν) и $\nu E_x = 0$ п.в. x

$\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$

5. **Неизмерима, но мера меньше ∞ ? ШТА?** C — неизм, $mC < +\infty$.

Тогда $C \in D$.

$C = H \setminus e$, где $me = 0$, H — вида $\cap(\cup A_{i,j})$.

$C_x = H_x \setminus e_x$ — изм. при п.в. x

$\nu e_x = 0$ п.в. x (проверено в п.4)

$\nu C_x = \nu H_x = \nu e_x$ — изм. п.в. x

$\int_X \nu C_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = \int_X \nu H_x = mH = mC$.

6. C — m -изм. произвольное

$X = \sqcup X_k, Y = \sqcup Y_n$ (μX_k — кон, νY_n — кон.).

$C = \sqcup_{k,n} (C \cap (X_k \times Y_n)) \in D$ (по п.2) (т.к. $C \cap (X_k \times Y_n) \in D$ по п.5)

25 Теорема Тонелли

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$ — пространства с мерой

μ, ν — σ -конечны, полные

$m = \mu \times \nu$

$f : X \times Y \rightarrow \bar{R}, f \geq 0$, f — измерима относительно m

Тогда:

1. при *почти всех* $x \in X$ f_x - измерима на Y ,
где $f_x : Y \rightarrow \overline{R}$, $f_x(y) = f(x, y)$
(симметричное утверждение верно для y)
2. Функция $x \mapsto \phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ - измерима* на X
(симметричное утверждение верно для y)
3. $\int_{X \times Y} f(x, y) dm = \int_X \phi(x) d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство:

Докажем в 3 пункта, постепенно ослабляя ограничения на функцию f

1. Пусть $C \subset X \times Y$ - измеримо относительно m , $f = \chi_C$
 - (a) $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$, где C_x - сечение по x
 C_x - измеримо при *почти всех* x , так как это одномерное сечение, таким образом f_x - измеримо, при *почти всех* x .
 - (b) $\phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$ - по принципу Кавальери это измеримая* функция.
 - (c) $\int_X \phi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \stackrel{\text{Кавальери}}{=} m C \stackrel{\text{опр. инт}}{=} \int_{X \times Y} \chi_C dm = \int_{X \times Y} f(x, y) dm$
2. Пусть f - ступенчатая, $f \geq 0$, $f = \sum_{\text{кон}} a_k \chi_{C_k}$
 - (a) $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}$ - измерима при почти всех x
 - (b) $\phi(x) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ - измерима* как конечная сумма измеримых
 - (c) $\int_X \phi(x) d\mu = \int_X \sum_{\text{кон}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} \int_X a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} a_k m C_k = \int_{X \times Y} f dm$
3. Пусть f - измеримая, $f \geq 0$
 $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$, где $g_n \geq 0$ - ступенчатая, g_n - монотонно возрастает к f
(из Теоремы об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми)

(a) $f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$ - измерима при *почти всех* x .

$$(b) \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \lim_{\mathbb{Y}} \int (g_n)_x d\nu$$

$\phi_n(x) := \int_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu$ - измерима по пункту 1

$0 \leq (g_n)_x$ — возрастает, тогда $\phi(x)$ - измерима, $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq \dots$ и $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$

$$(c) \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \phi_n(x) d\mu \stackrel{\text{п.2}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} g_n dm \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \int f dm$$

26 Формула для Бета-функции

$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx$, где s и $t > 0$ - Бета-функция

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \text{ где } s > 0, \text{ тогда } B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

Доказательство:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \left[\begin{array}{c} y \rightarrow u \\ y = u - x \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \left(\int_x^{+\infty} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx =$$

$$= \int_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq x}} \dots = \text{меняем порядок интегрирования}$$

$$= \int_0^{+\infty} du \int_0^u dx (x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u}) = \left[\begin{array}{c} x \rightarrow v \\ x = uv \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\int_0^1 u^{s-1} v^{s-t} u^{t-1} (1-v)^{t-1} u dv \right) du =$$

$$= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left(\int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du = B(s, t) \Gamma(s+t), \text{ что и требовалось доказать.}$$

27 Объем шара в \mathbb{R}^m

$$B(0, R) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\lambda_m(B(0, R)) = \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi_1 \cdots \int_0^\pi d\phi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{m-1} \cdot r^{m-1} (\sin \phi_1)^{m-2} \dots (\sin \phi_{m-2}) \Rightarrow \\
&\int_0^\pi (\sin \phi_k)^{m-2-(k+1)} = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2}+\frac{1}{2})} \text{почему так? надо бы попо-} \\
&\text{дробней расписать} \\
&\rightarrow = \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \dots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi = \\
&= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} R^m
\end{aligned}$$

28 Теорема о вложении пространств L^p

$$\mu E < +\infty, 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1. $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2. $\forall f$ — измеримая : $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

Доказательство:

- $2 \Rightarrow 1$ (Это очевидно: достаточно рассмотреть неравенство из пункта 2. Из него следует, что $\|f\|_s \leq \text{const} \cdot \|f\|_r$. см. опред. L_p)
- Рассмотрим два случая:

1. $r = +\infty$ (очев.)

$$\|f\|_s = \left(\int |f|^s \cdot 1 \right)^{1/s} \leq ((\text{esssup}|f|)^s \int 1 d\mu)^{1/s} = \|f\|_\infty \cdot \mu E^{1/s}$$

(последнее по определению esssup)

2. $r < +\infty$

$$(\|f\|_s)^s = \int |f|^s \cdot 1 d\mu \leq \left(\int |f|^r \right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int 1^{\frac{r}{r-s}} \right)^{\frac{r-s}{r}} = (\|f\|_r)^s \cdot \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$

(существенный шаг: применить неравенство Гельдера)

29 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$$1 \leq p < +\infty$$

$$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

1. • $f \in L_p$
• $f_n \rightarrow f$ в L_p

Тогда: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (по мере)

2. • $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (либо если $f_n \rightarrow f$ почти везде)
• $|f_n| \leq g$ почти везде при всех n ; $g \in L_p$

Тогда: $f_n \rightarrow f$ в L_p

Доказательство:

1.

$$X_n(\epsilon) := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\begin{aligned} \mu X_n(\epsilon) &\stackrel{\text{т.к.}}{\leq} \int_{X_n} \left(\frac{|f_n - f|}{\epsilon} \right)^p = \frac{1}{\epsilon^p} \int_{X_n} |f_n - f|^p \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_X |f_n - f|^p = \\ &= \frac{1}{\epsilon^p} (\|f_n - f\|_p)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

2. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ Тогда $\exists n_k \mid f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

Тогда $|f| \leq g$ п. в.

$|f_n - f|^p \leq (2g)^p$ — сумм. функции т. к. $g \in L_p$

$(\|f_n - f\|_p)^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (по теореме Лебега)

30 Полнота L^p

$L_p(E, \mu)$ $1 \leq p < \infty$ – полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходится по норме $\|f\|_p$.

$$(\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, k \|f_n - f_k\|_p < \epsilon) \Rightarrow (\exists f : \|f_n - f\|_p \rightarrow 0)$$

Доказательство:

1. Построим f .

Рассмотрим фундаментальную последовательность f_n .

$$\exists N_1 \text{ при } n_1, k > N_1 \|f_{n_1} - f_k\| < \frac{1}{2}$$

$$\exists N_2 \text{ при } n_2, k > N_2, N_1 \|f_{n_2} - f_k\| < \frac{1}{4}$$

...

$$\text{Тогда: } \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1$$

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

Докажем, это функция f корректно задана:

$$\begin{aligned} \bullet S_N(x) &:= \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \\ \|S_N\|_p &\leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1 \\ \text{Тогда по Теореме Фату: } \|S\|_p &\leq 1 \end{aligned}$$

Тогда $|S|^p$ – суммируема

Тогда $S(x)$ конечна при п. в. x и ряд $\sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ абс. сходится, а значит и просто сходится при п. в. x

$$f := f_{n_1} + \sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \text{ т. е. } f = \text{п. в. } \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

2. Проверим, что $f_n \rightarrow f$ в L_p

$$\begin{aligned} \text{Т. к. } f_n - \text{фунд.}, \text{ то } \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n_k > N \|f_n - f_{n_k}\| < \epsilon \Rightarrow \\ \|f_n - f_{n_k}\|^p &= \int_E |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \epsilon^p \end{aligned}$$

$$\text{Тогда по теореме Фату: } \int_E |f - f_n|^p \leq \epsilon^p$$

$$\text{Тогда } \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \|f - f_n\|_p < \epsilon$$

Замечание: L_∞ — полное (упражнение)

31 Лемма Урысона

X — нормальное топологическое пространство, то есть:

1. Все одноточечные множества замкнуты.
2. Любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы окрестностями:
 A, B — замкнуты, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists A_1, B_1$ — открыты, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$,
 $A \subset A_1, B \subset B_1$.

F_0, F_1 — замкнуты, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.

Тогда: $\exists f : X \rightarrow [0, 1]$, непрерывная (в смысле топологического определения непрерывности), равная 0 на F_0 и равная 1 на F_1 .

Доказательство: **TODO!**

32 Плотность в L^p непрерывных финитных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathbb{A}, \lambda_m)$

$E \subset \mathbb{R}^m$ — изм. Тогда множество финитных непрерывных функций плотно в $L_p(E, \lambda_m), p \in [1; +\infty]$

Доказательство:

1. Раскроем определение плотности: $\forall f \in L_p(E, \mu) \forall \epsilon > 0 \exists \varphi \in C_0(\mathbb{R}^m) : \|f - \varphi\|_p < \epsilon$. Таким образом достаточно научиться приближать f и φ ступенчатыми функциями f_n : $\|f - f_n\|_p < \epsilon/2$ и $\|\varphi - f_n\|_p < \epsilon/2$
2. **TODO!**

33 Теорема о непрерывности сдвига

Обозначения:

$$f_h := f(x + h)$$

$[0, T] \subset \mathbb{R}$. Будем считать, что $L_p[0, T]$ состоит из T -периодических функций $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Отсюда $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.

$$\tilde{C}[0, T] = \{f \in C[0, T] : f(0) = f(T)\}. \|f\| = \max_{x \in [0, T]} |f(x)|$$

NB: $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна (по т. Кантора).

Формулировка:

1. f — рвнм. непр. на \mathbb{R}^m . Тогда $\|f - f_h\|_\infty \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.
2. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$. Тогда $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$.
3. $f \in \tilde{C}[0, T]$. Тогда $\|f - f_h\|_\infty \rightarrow 0$.
4. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p[0, T]$. Тогда $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$.

Доказательство:

1. 1 и 3 свойства следуют из определения рвнм. непр-ти: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}^m \forall h : |h| < \delta$ верно, что $|f(x) - f(x + h)| < \epsilon$, то есть $\|f - f_h\|_\infty < \epsilon$ (это для св-ва 1, во втором случае x из $[0, T]$).
2. **TODO!**

34 Теорема об интеграле с функцией распределения

Проверить формулировку, тут, вроде, какая-то херня написана чё за измеримость по Борелю???

(\mathbb{R}, B, X)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$, изм. по Борелю, п.в. конечн.

$h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ с функцией распределения $H(t)$

μ_H – мера Бореля-Стилтьеса (мера Лебега-Стилтьеса на B)

$$\text{Тогда } \int_X f(h(x))d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu_H(t)$$

Доказательство: Следует из теоремы о вычислении интеграла по взвешенному образу меры, положив $\langle Y, C, \nu \rangle = \langle \mathbb{R}, B(\mathbb{R}), h(\mu) \rangle$, $\Phi = h$, $\omega = 1$

35 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$
2. $\sum x_k$ сходится, тогда $\forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$
3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

Доказательство

1. $|\langle x_k, y_k \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_k, y_k \rangle - \langle x_k, y \rangle + \langle x_k, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_k, y_k - y \rangle| + |\langle x_k - x, y \rangle| \leq |x_k| \cdot |y_k - y| + |x_k - x| \cdot |y| \rightarrow 0$ (так как $\text{огр} \cdot \text{б.м.} + \text{б.м.} \cdot \text{огр} \rightarrow 0$)

$$2. S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\langle \sum_{k=1}^n x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, y \rangle$$

Устремляя n к ∞ , получаем требуемое равенство

$$3. \text{Обозначим } C_n := \sum_{k=1}^n |x_k|^2$$

$$|S_n|^2 = \langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{j=1}^n x_j \rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_k \rangle \quad (\text{так как } k \neq j \Rightarrow \langle x_k, x_j \rangle = 0) = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = C_n$$

Аналогично, $||S_n|^2 - |S_m|^2| = |C_n - C_m|$

Тогда $C_n, |S_n|^2$ фундаментальны одновременно \Rightarrow сходятся одновременно при устремлении n к ∞

36 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}, x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.

$$2. c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k \mid t \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C})\}$

Иными словами, $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

Доказательство:

1. Пусть $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$. Умножим скалярно на e_m ($1 \leq m \leq N$)

Получим: $\alpha_m ||e_m||^2 = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \Rightarrow$ комб. тривиальная \Rightarrow Л.Н.З.

$$2. \langle x, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k e_k, e_m \rangle = c_m \cdot ||e_m||^2 \text{ (верно в силу сходимости ряда)}$$

3. $x = c_k \cdot e_k + z$. Доказать: $z \perp e_k$.

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - c_k e_k, e_k \rangle = c_k \cdot ||e_k||^2 - c_k \cdot ||e_k||^2 = 0$$

37 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \quad \mathcal{L} = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset \mathbb{H}$$

Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во \mathcal{L} . Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$
2. S_n — наилучшее приближение x в \mathcal{L} ($\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$)
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Доказательство:

1. (a) $z = x - S_n$
 (b) $z \perp \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n : z \perp e_k$
 (c) $\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = c_k \|e_k\|^2 - c_k \|e_k\|^2 = 0$
2. $\|x - y\|^2 = \|S_n + z - y\|^2 = \|(S_n - y) + z\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$
3. $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2$ (теорема о сумме орт. ряда) $\geq \|S_n\|^2$

Следствие: Неравенство Бесселя

$$\forall \{e_k\} - \text{О.С.} : \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

38 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ — орт. сист. в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$ сходится в \mathbb{H}

$$2. x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$$

$$3. x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

Доказательство:

1. Ряд Фурье – ортогональный ряд

$$\text{его сходимость} \Leftrightarrow \text{сходимости} \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2 \text{ по неравенству Бесселя}$$

$$2. \langle z, e_k \rangle = \langle x - \sum c_i e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{+\infty} \langle c_i(x) e_i, e_k \rangle = 0$$

3. \Rightarrow - утв. 3 теоремы о св-вах сх-ти в гильбертовом пр-ве

\Leftarrow Из п. 2 ряд ортог.

$$\|x\|^2 = \left\| \sum c_k e_k \right\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$$

39 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H}

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_1\}$ — базис.

2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)

3. $\{e_k\}$ — замкнутая система.

4. $\{e_k\}$ — полная система.

5. $Lin(e_1, e_2, \dots)$ — плотна в \mathbb{H}

Доказательство:

39.1 $1 \Rightarrow 2$

$x = \sum c_k(x)e_k$ – единственно (из геом. соображений: $c_k e_k$ – проекция)
 $\langle e_k, y \rangle = \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$
 $\langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \langle e_k, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$

39.2 $2 \Rightarrow 3$

$y := x$
 $\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ (см. п. 3 из опр.)

39.3 $3 \Rightarrow 4$

Пусть $\forall k \quad x_0 \perp e_k$
 $c_k(x_0) = \frac{\langle x_0, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = 0$
 $\|x_0\|^2 = \sum |c_k(x_0)|^2 \|e_k\|^2 = 0$ (см. п. 2 из опр.)

39.4 $4 \Rightarrow 1$

$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow$ (т. Рисса-Фишера (2)) $\forall k \quad z \perp e_k \Rightarrow$ (из полноты) $z = 0$
(см. п. 1 из опр.)

39.5 $4 \Rightarrow 5$

Пусть $ClLin(e_1, e_2, \dots) \neq \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H} \setminus ClLin(e_1, e_2, \dots)$
из т. Рисса-Фишера (2): $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \quad z \perp e_k \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Rightarrow$
 $x \in ClLin(e_1, e_2, \dots)$
Противоречие.

39.6 $5 \Rightarrow 4$

$\forall k \quad x_0 \perp e_k \Rightarrow x_0 \perp Lin(e_1, e_2, \dots) \Rightarrow x_0 \perp ClLin(e_1, e_2, \dots) (= \mathbb{H}) \Rightarrow x_0 \perp x_0 \Rightarrow$
 $\|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

40 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \rightarrow f$ в $L_1(-\pi, \pi]$

Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство:

Почему нельзя сказать, что коэффициенты — это коэффициенты ряда Фурье, а потому вычисляются как скалярные произведения???

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n a_j \cos jx + b_j \sin jx \quad (- \text{ это } T_n)$$

При $n \geq k$:

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx \, dx = \pi a_k \quad (\text{в силу ортогональности триг системы})$$

$$2. \left| \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| \cdot |\cos kx| \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| \, dx \rightarrow 0$$

Из 1 и 2 следует равенство для a_k . Аналогично доказывается и для других.

41 Теорема Римана–Лебега

$E \subset \mathbb{R}^1$ — измеримо

$f \in L_1(E, \lambda)$, λ - мера Лебега

Тогда:

$$\int_E f(x)e^{ikx}dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

и

$$\int_E f(x)\cos(kx)dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Доказательство:

Пусть $f \equiv 0$ вне E , тогда можно считать, что $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$

Обозначим $e(x) = \cos(x)$, или $\sin(x)$, или e^{ix} , в зависимости от ситуации. Заметим, что $e(t + \pi) = -e(t)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) dt &\stackrel{t=\tau+\frac{\pi}{k}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{k})e(k \cdot (\tau + \frac{\pi}{k})) = - \int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{k})e(k\tau) \\ \int_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{k})e(kt) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t + \frac{\pi}{k}))e(kt) \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t + \frac{\pi}{k})| dt \quad (\text{так как } |e(kt)| \leq 1) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

по непрерывности сдвига

42 Принцип локализации Римана. TODO

43 Признак Дини. Следствия. TODO.

44 Корректность свертки

$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$

Тогда: $(f * K)$ – корректно заданная функция из $L_1[-\pi, \pi]$

Доказательство:

- Докажем, что $g(x, t) = f(x - t)K(t)$ – измерима
 - $K(t)$ – измерима, как функция из L_1
 - $\phi(x, t) = f(x - t)$. Это функция принимает одинаковые значения на $t = x - C$.

Поэтому: $R^2(\phi < a) = V^{-1}(E_{a'} \times R)$, где $V(x, t) = (x - t, t)$

$E_{a'} = V(R(f < a))$ – измеримо, так как f – измеримо. **Что за бред, V действует из R^2 , а тут пытаются сделать из R**

Поэтому $R^2(\phi < a)$ – измеримо.

– Поэтому g – измерима, как произведение измеримых

- Проверим, что $g \in L_1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$

$$\iint_{[-\pi, \pi]} |g| d\lambda^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (|K(t) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t)| dx|) dt = \|f\|_1 \|K\|_1 < +\infty$$

- По теореме Фубини $\int_{-\pi}^{\pi} g(x, t) dt$ – суммируемая при в. п. в. х
- Тогда свертка лежит в $L_1[-\pi, \pi]$

45 Свойства свертки функции из L^p с функцией из L^q

$$f \in L^p; K \in L^q$$

$$1 \leq p \leq +\infty; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда:

- $f * K$ – непр. на $[-\pi, \pi]$
- $\|f * K\|_{\infty} \leq \|K\|_q \|f\|_p$

Доказательство: Это нер-во Гельдера

$$\text{п. 2 } |(f * K)(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) K(t) dt \right| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq} \|K\|_q \|f\|_p$$

$$\sup |f * K| \leq \|f\|_p \|K\|_q \Rightarrow \text{пункт 2}$$

(Причем нер-во Гельдера выполнено и для $p = \infty$)

п. 1 $-p < +\infty$

$$|(f*K)(x+h)-(f*K)(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t)-f(x-t))K(t)dt \right| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h-t)-f(x-t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q dt \right)^{1/q} = \|K\|_q \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h-t)-f(x-t)|^p dt \right)^{1/p}$$

$$= \|K\|_q \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(y+h)-f(y)|^p dy \right)^{1/p} =$$

$$= \|K\|_q \|f(y+h)-f(y)\|_p \xrightarrow{\text{по непр. сдвига}} 0$$

$-p = +\infty$

$$|(f*K)(x+h)-(f*K)(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t)-f(x-t))K(t)dt \right| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q dt \right)^{1/q} \cdot \operatorname{esssup}_{t \in [-\pi, \pi]} |f(x+h-t)-f(x-t)| =$$

$$\|K\|_q \cdot \operatorname{esssup}_{t \in [x-\pi, x+\pi]} |f(t+h)-f(t)| \xrightarrow{\text{по непр. сдвига}} 0$$

46 Формула Грина

$D \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, связное, односвязное, ориентировано

δD – C^2 -гладкая кривая, тоже ориентировано

D и δD ориентированы согласовано

P, Q – функции, гладкие в открытой области $O \supset D$

Тогда:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\delta D} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

Доказательство:

Докажем для областей вида "криволинейный четырехугольник", т.е.

$x \in [a; b]$

$y \in [\phi_1(x); \phi_2(x)]$, где $\phi_2(x) > \phi_1(x)$

Представляется в аналогичном виде, относительно y

Ориентируем обход нашего четырехугольника против часовой стрелки.

Назовем пути по сторонам $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ начиная с нижней против часовой стрелки соответственно.

Из линейности интеграла по векторному полю следует, что для доказательства достаточно проверить:

$$-\iint_D \frac{\delta P}{\delta y} dx dy = \int_{\delta D} P dx$$

1. Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\delta P}{\delta y} dx dy &= -\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P'_y dy = -\int_a^b P(x, y) \Big|_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx \end{aligned}$$

2. Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} \int_{\delta D} (P dx + 0 dy) &= \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx + 0 + \int_b^a P(x, \phi_2(x)) dx + 0 = \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx \end{aligned}$$

Левая и правая части равны.

Если область более сложная - порежем на простые. Зафиксируем направление обхода, посчитаем на каждой.

При фиксированном направлении обхода пути на границах разрезов учитываются дважды с противоположными знаками, то есть в итоге имеем обход границы всей фигуры.

Из компактности и гладкости области следует, что допускается счетное количество разрезов.

47 Формула Стокса

Ω — эллиптическая, гладкая, двусторонняя поверхность, C^2 —гладкое;
 n_0 — сторона

$\delta\Omega$ - ориентирована согласовано с n_0

(P, Q, R) – векторное поле на Ω , заданное в O - откp. : $\Omega \subset O \subset \mathbb{R}^3$

Тогда:

$$\int_{\delta\Omega} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_{\Omega} ((R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy)$$

Доказательство:

Из соображений линейности интеграла по векторному полю достаточно проверить:

$$\int_{\delta\Omega} Pdx = \iint_{\Omega} (P'_z dzdx - P'_y dxdy)$$

Параметризуем область: $\Omega \leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{matrix} \right\rangle$

Пусть G – наша область в координатах (u, v) , L – граница Ω в новых координатах, тогда:

$$\int_{\delta\Omega} Pdx = \int_L P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))(x'_u du + x'_v dv) = \int_L Px'_u du + Px'_v dv \stackrel{\Gamma_{\text{рин}}}{=}$$

$$\iint_G ((P(x, y, z)x'_v)'_u - (P(x, y, z)x'_u)'_v) dudv =$$

$$\iint_G (P'_z(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - P'_y(y'_v x'_u - y'_u x'_v)) dudv =$$

$$\iint_G P'_z \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} dudv - P'_y \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv =$$

$$\iint_{\Omega} (P'_z dzdx - P'_y dxdy)$$

что и требовалось доказать

48 Формула Гаусса–Остроградского

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}, G \subset \mathbb{R}^2, \partial G$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^2, F \in "C'(G)"$ (кавычки означают "включая границу, то есть с более широкой гладкой областью"), ∂V – внешняя сторона,

$R : O(V) \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V} R dx dy$$

Доказательство:

$\partial V = \Omega_F \cup \Omega_{cil} \cup \Omega_f$ (границы графика F , f и цилиндра между ними)

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_G (R(x, y, F(x, y)) - R(x, y, f(x, y))) dx dy = (\text{см. пример после опр.} \\ &\text{инт. 2 рода}) \\ &= \iint_{\Omega_F} R dx dy - \left(- \iint_{\Omega_f} R dx dy\right) + 0 = (\text{так как проекция } \Omega_{cil} \text{ лежит в } \partial G) \\ &= \iint_{\Omega_F} R dx dy + \iint_{\Omega_f} R dx dy + \iint_{\Omega_{cil}} R dx dy = \\ &= \iint_{\partial V} R dx dy \end{aligned}$$

49 Соленоидальность бездивергентного векторного поля. TODO.

50 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости или L_{loc}

50.1 При равномерной сходимости

$$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой

\mathbb{Y} – метр. простр. (или метризуемое)

$\forall y \ f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на \mathbb{X}

$$\mu X < +\infty; \ f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow a} \phi(x)$$

Тогда:

- ϕ – сумм.
- $\int_X f(x, y) d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow a} \int_X \phi(x) d\mu(x)$

Доказательство: По Гейне: $y_n \rightarrow a$

При больших $n \quad \forall x \quad |f(x, y_n) - \phi(x)| < 1$

$$\Rightarrow |\phi(x)| \leq |f(x, y_n)| + 1 \Rightarrow \int_X |\phi(x)| \leq \int_X |f| + \mu X$$

Из этого следует, что ϕ – суммируемо.

$$\left| \int_X f(x, y_n) d\mu(x) - \int_X \phi \right| \leq \int_X |f(x, y_n) - \phi(x)| d\mu \leq \sup_{x \in X} |f(x, y_n) - \phi(x)| \mu X$$
$$\sup_{x \in X} |f(x, y_n) - \phi(x)| \mu X \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

50.2 При L_{loc}

Определение L_{loc}

$$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – пространство с мерой

\mathbb{Y} – метрическое пространство (или метризуемое); $a \in \mathbb{Y}$

$\forall y \quad f^y(x) = f(x, y)$ – суммируемо на \mathbb{X}

f удовлетворяет L_{loc} ($f \in (L_{loc})$) если:

- $\exists g : \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – суммируемо.
- $\exists U(a) \quad \forall y \in \dot{U}(a)$ при п. в. $x \in \mathbb{X} \quad |f(x, y)| \leq g(x)$

Формулировка в контексте определения:

$$\phi := \lim_{y \rightarrow a} f(x, y) \text{ – задана при п. в. } x$$

$f(x, y)$ удовлетворяет условию L_{loc} в точке a и мажорантой g

Тогда:

- ϕ – суммируемо.

- $\int_X f(x, y) d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow a} \int_X \phi(x) d\mu(x)$

Доказательство: На самом деле это переформулировка Теоремы Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде. (см теор. № 13)

51 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой

\mathbb{Y} – метр. простр. (или метризуемое)

$\forall y \ f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на \mathbb{X}

$\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$ – промежуток

при п. в. $x \ \forall y \ \exists f'_y(x, y)$

f'_y удовлетворяет усл. L_{loc} в точке $a \in \mathbb{Y}$

Тогда:

- $I(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ – дифф. в точке a

- $I'(y) = \int_X f'_y(x, a) d\mu(x)$

Доказательство:

$$F(x, h) = \frac{f(x, a+h) - f(x, a)}{h} \rightarrow f'_y(x, a)$$

$$\frac{I(a+h) - I(a)}{h} = \int_X F(x, h) d\mu(x) \xrightarrow{?} \int_X f'_y(x, a) d\mu$$

чтобы использовать предельный переход нужно проверить $F(x, h) \in L_{loc}$ в точке $h = 0$, т. е. найти локальную мажоранту. (см. теор. о пред. переход. под интегралом)

$$|F(x, h)| \underset{\text{т. Лагранжа}}{=} |f'_y(x, a + \theta h)| \underset{f'_y \in L_{loc} \text{ in } a}{\leq} g(x)$$

52 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

1. $f \in \tilde{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow (f * K_h) \Rightarrow f (h \rightarrow h_0)$, где свертка $(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$
2. $f \in L^1[-\pi, \pi] \Rightarrow \|(f * K_h) - f\|_1 \rightarrow 0 (h \rightarrow h_0)$
3. K_h - усил. апрокс ед.

Доказательство:

1. $(f * K)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_h(t)dt =$ (f рнепр., т.к. f непр на компакте $[-\pi, \pi] \leq \int_{-\pi}^{\pi} |(f(x-t) - f(x))K_h(t)|dt = \int_{E_\delta} + \int_{(-\delta, \delta)} = I_1 + I_2$

Заметим, что $I_1 \leq 2\|f\|_\infty \int_{E_\delta} |K_h| < \frac{\epsilon}{2}$, т.к. f - огр, и по 3 свойству а.е. интеграл стремится к 0

Заметим, что $I_2 \leq \frac{\epsilon}{2M} \int_{(-\delta, \delta)} |K_h|dt < \frac{\epsilon}{2}$, т.к. по непрерывности : $\forall \epsilon > 0 \exists \delta : |f(x) - f(x - \delta)| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{2M}$

2. $\|(f * K_h(x)) - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) - f(x) K_h(t)dt|dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)|dtdx = \|K_h\|_1 \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{K(t)}{\|K_h\|_1} dt$, где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|dx$

$\frac{|K_h|}{\|K_h\|} - \text{а.е.} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K|}{\|K_h\|} dt \rightarrow g(0) = 0 (h \rightarrow h_0)$. Замечание: последний предельный переход верен из свойства (1) выше, т.к. $K * g \Rightarrow g$, а $K * g = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)K(t)dt$ для любого x , в нашем случае в интеграле $g(-t)$, то есть взято $x = 0$

3. = TODO("not implemented")

53 Теорема Фейера. TODO

54 Свойства преобразования Фурье: непрерывность, ограниченность, сдвиг. TODO

55 Преобразование Фурье свертки. TODO

56 Преобразование Фурье и дифференцирование. TODO

57 Лемма об оценке интеграла ядра Дирихле

1. $D_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi}(\cos nt + h(t) \sin nt)$, где $h(t)$ не зависит от n и $|h(t)| \leq 1$ на $[-\pi; \pi]$.

2. $\forall x, |x| < 2\pi \quad \left| \int_0^x D_n(t) dt \right| < 2$

Доказательство:

1. (a) $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin nt \cos \frac{t}{2} + \cos nt \sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin nt}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} + \cos nt \right)$

(b) Добавим и вычтем $\frac{\sin nt}{\pi t}$:

$$\frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi} \left(\cos nt + \underbrace{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right)}_{h(t)} \sin nt \right)$$

(c) Докажем, что $|h(t)| \leq 1$. Найдём знак производной на $[0; \pi]$:

$$h'(t) = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} + \frac{2}{t^2} = \frac{4 \sin^2 \frac{t}{2} - t^2}{2t^2 \sin^2 \frac{t}{2}}. \text{ Знаменатель неотрицателен.}$$

$4 \sin^2 \frac{t}{2} - t^2 = (2 \sin \frac{t}{2} - t)(2 \sin \frac{t}{2} + t)$. Вторая скобка ≥ 0 . Первая скобка ≤ 0 , так как $\sin x \leq x$ при $x \geq 0$.

(d) Знак производной $h(x)$ на $[0; \pi]$ постоянен, значит, h монотонна.

$$h(0) = 0 \text{ (в пределе), } h(\pi) = \frac{2}{\pi} < 1.$$

Значит, $|h(x)| < 1$. Аналогично для $[-\pi; 0]$.

2. (a) D_n — чётная. Считаем, что $x > 0$.

(b) Пусть $x \in [0; \pi]$.

$$(c) \left| \int_0^x D_n(t) dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{\pi t} dt \right| = \left| \int_0^x \frac{1}{2\pi} (\cos nt + h(t) \sin nt) dt \right| \quad (\text{пункт 1}) \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^x 2 dt = \frac{x}{\pi} \leq 1$$

$$(d) \int_0^x \frac{\sin nt}{\pi t} dt = \int_0^{nx} \frac{\sin v}{\pi v} dv \quad (v = nt). \\ 0 \leq \int_0^{nx} \frac{\sin v}{\pi v} dv \leq \int_0^\pi \frac{\sin v}{\pi v} dv. \text{ Доказательство методом пристально-} \\ \text{го взгляда на график подынтегральной функции.}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin v}{\pi v} dv \leq \pi \frac{1}{\pi} = 1$$

$$(e) \left| \int_0^x D_n(t) dt - I \right| \leq 1, \quad 0 \leq I \leq 1, \text{ значит, } \int_0^x D_n(t) dt \in [-1; 2].$$

$$(f) \text{ Пусть } x \in [\pi; 2\pi]. \int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 1.$$

$$\int_0^x = \int_0^{2\pi} - \int_x^{2\pi} = 1 - \int_{x-2\pi}^0 = 1 - \int_0^{2\pi-x} \in [-2; 1]$$

58 Теорема об интегрировании ряда Фурье

$$f \in L_1[-\pi; \pi].$$

Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx} dx$$

Сумма по $k \in \mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения $(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n)$.

Замечание: Ряд Фурье f может всюду расходиться, но ряд интеграла всегда сходится.

Доказательство:

1. Пусть $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Если это не так всегда можно разбить интеграл на такие отрезки в силу периодичности функции.

2. Пусть $\chi(x) = \chi[a; b]$ (характеристическая функция отрезка $[a; b]$).

3. Рассмотрим частичную сумму ряда интегралов:

$$\sum_{k=-N}^N c_k(f) \underbrace{\int_a^b e^{ikx} dx}_{2\pi c_{-k}(\chi)} = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) 2\pi c_{-k}(\chi).$$

Сумма конечная, поэтому это равно $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_N(\chi, t) dt$.

4. $S_N(\chi) \rightarrow \chi$ везде, кроме a и b (не шарю почему, помогите)

5. $|S_N(\chi, t)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \chi(x) D_N(t-x) dx \right| = \left| \int_a^b D_N(t-x) dx \right| = \left| \int_0^{t-a} D_N - \int_0^{t-b} D_N \right| \leq 4$ (по лемме об оценке интеграла D_N).

6. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_N(\chi, t) dt \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \chi(t) dt$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

59 Лемма о сходимости сумм Фурье в смысле обобщенных функций

$f \in L_1[-\pi; \pi]$
Тогда $\forall u \in \mathbb{C}^\infty$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x) u(x) dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) u(x) dx$$

Доказательство: // TODO - нужно больше пояснений

1. $f * u$ - непр. и гладкая (т.к. $u \in L_\infty[-\pi, \pi]$)

$$((f * u)(x))' = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) u(x-t) dt \right)'_x = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) u'(x-t) dt$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_X f(x, t) d\nu(x) \right) = \int_X f'_t(x, t) d\nu(x)$$

$$L_{loc}(t_0) : \exists u(t_0) : |f'_t(x, t)| \leq g(x), g(x) - \text{сумм. при } x \in X, t \in u(t_0)$$

$$|f(t) u'(x-t)| \leq \max |u'(y)| \cdot |f(t)|, y \in [-\pi, \pi]$$

2. $\underline{u}(x) := u(-x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} u(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} u(-x) dx = 2\pi c_k(\underline{u})$$

Так как сумма конечная, $\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f, x)u(x)dx = \sum_{k=-n}^n (c_k(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x)dx) =$

$$2\pi \sum_{k=-n}^n c_k(f)c_k(\underline{u}) = \sum_{k=-n}^n (f * \underline{u})e^{ikx} \Big|_{x=0} \rightarrow (f' * \underline{u})(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underline{u}(0 -$$

$$t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)u(t)dt$$

Определение: f – обобщенная функция, если задан непрерывный функционал $\mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение: f, f_n – последовательность обобщенных функций: $f_n \rightarrow f$, если $\forall u \in \mathbb{C}^\infty \quad \int_{-\pi}^{\pi} f_n u \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f u$.

60 Следствие о преобразовании Фурье финитных функций

(Следствие из теоремы “56. Преобразование Фурье и дифференцирование“.)

1. $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ – финитная (= 0 вне некоторой окрестности).

Тогда $\widehat{f} \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$

2. $f \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$

Тогда $\forall p > 0 \quad |y|^p \widehat{f}(y) - \text{сумм.}$

Доказательство:

1. Из финитности следует $\forall p \quad |x|^p f(x) - \text{сумм.}$

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial y} = -2\pi i (\widehat{x_k f})$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial y_k \partial y_l} = -2\pi i \frac{\partial}{\partial y_l} (\widehat{x_k f}) = -2\pi i (-2\pi i) (\widehat{x_l x_k f})$$

2. из п.1 теоремы (56) следует:

$$(a) \widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} = 2\pi i y_k \widehat{f}(y)$$

(b) $\forall \alpha$ – мультииндексы:

$$\widehat{\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}\right)} = (2\pi i)^{|\alpha|} y^\alpha \widehat{f}(y)$$

$$\widehat{\left(\frac{\partial}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} = 2\pi i y_l \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(y) // \text{ TODO - тут вроде надо будет пояснить,}$$

почему левая часть ограничена

61 Лемма "о ядре Дирихле". Следствие. TODO

62 Теорема о равносходимости ряда Фурье и интеграла Фурье

Если:

1. $f \in L^1(R)$
2. $f_0 \in L^1[-\pi; \pi]$
3. $f = f_0$ в $U(x)$, где $x \in R$

Тогда в точке x : сходимость интеграла Фурье \Leftrightarrow сходимость ряда Фурье
и в случае сходимости $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f_0) e^{i\pi x}$

Доказательство:

Проверим: $I_A(f, x) - S_{[2\pi A]}(f, x) \rightarrow 0$ $A \rightarrow \infty$

1. $I_A(f, x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t) \frac{\sin(2\pi A t)}{\pi t} dt + o(1), A \rightarrow \infty$
2. $S_n(f, x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt$

$2\pi A = n$ - целое, тогда проверять и ничего $2\pi A$ - нецелое. $n = [2\pi A]$

$|I_A(f, x) - I_{\frac{n}{2\pi}}(f, x)| = \left| \int_{-A}^A - \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \right| \leq \int_{A-\frac{1}{2\pi}}^A + \int_{-A}^{-A+\frac{1}{2\pi}} \leq 2 * \frac{1}{2\pi} \max_{|y| > A-\frac{1}{2\pi}} |\widehat{f}(y)| \rightarrow 0$, как суммируемая функция.