

Теоремы по матану, семестр 4

18 февраля 2018 г.

Содержание

1	Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия	2
2	Измеримость монотонной функции	2
3	Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере	3
4	Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде	3
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	3
5.1	Для определения (5)	3
5.2	Для определения (6)	4
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	4
7	Теорема Леви	5
8	Линейность интеграла Лебега	5

1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

f — измеримая функция на X , $\forall x \ f(x) \geq 0$. Тогда \exists ступенчатые функции f_n , такие что:

1. $\forall x \ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$.
2. $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$.

Следствие 1:

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измеримая. Тогда \exists ступенчатая $f_n : \forall x : \lim f_n(x) = f(x)$ и $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f = f^+ - f^-$. $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Срезки измеримы: $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$, при этом f и $g \equiv 0$ измеримы (f^- измерима аналогично).
2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции $f_n^+ \rightarrow f^+$, $f_n^- \rightarrow f^-$. Тогда и $f_n^+ - f_n^-$ это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов:
 $f_n^+ - f_n^- \rightarrow f^+ - f^- = f$
(почему верно с модулем — непонятно, если в лоб, то неверно. Спрошу 19.02)

Следствие 2:

f, g — измеримые функции. Тогда fg — измеримая функция. При этом считаем, что $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f_n \rightarrow f : |f_n| \leq |f|$, $g_n \rightarrow g : |g_n| \leq |g|$ из первого следствия. Тогда $f_n g_n \rightarrow fg$
(и что с того? У нас же другое определение измеримых функций. Спрошу 19.02)

Следствие 3:

f, g — измеримые функции. Тогда $f + g$ — измеримая функция. При этом считаем, что $\forall x$ не может быть, что $f(x) = \pm\infty$, $g(x) = \mp\infty$

Доказательство:

Доказывается как следствие 2.

2 Измеримость монотонной функции

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое по Лебегу, $E' \subset E$, $\lambda_m(E \setminus E') = 0$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть сужение $f : E' \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда f измерима на E .

Доказательство:

1. $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, $e := E \setminus E'$, $\lambda_m(e) = 0$.
2. $E'(f < a)$ открыто в E' , так как f непрерывна. Поэтому $E' = G \cap E' \Rightarrow$, где G — открытое в E множество. Значит, $E'(f < a)$ — измеримо по Лебегу, так как оно является борелевским.
3. Но и $e(f < a)$ измеримо, так $\lambda_m(e) = 0$, следовательно $E(f < a)$ измеримо как объединение измеримых множеств

Следствие:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна. Тогда f измерима.

Доказательство:

Множество разрывов монотонной функции НБЧС множество, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

5.1 Для определения (5)

1. $\int_{\mathbb{X}} f$ не зависит от представления f как ступенчатой функции, то есть если f реализуется как $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ и как $f = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$, интегралы по этим функциям равны

Доказательство:

Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_i (\lambda_i \cdot \sum_j (\mu F_{i,j})) = \sum_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f$ для первого разбиения

Аналогично для второго разбиения получаем

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_j (\alpha_j \cdot \sum_i (\mu F_{i,j})) = \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int f$ для второго разбиения, что и требовалось доказать

2. f, g -измеримые ступенчатые функции, $f \leq g$, тогда $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

Пусть $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$, $g = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда $\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leq \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int g$, что и требовалось доказать

5.2 Для определения (6)

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — измеримы. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — изм., $f \geq 0$

Тогда:
$$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$$

Доказательство:

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

$$\int_A f d\mu = \sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum_k (\lambda_k \cdot (\sum_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\int_{A_i} f)$$

2. Докажем, что $\int_A f \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) Рассмотрим $0 \leq g \leq f$ — ступенчатая. $\int_A g = \sum_i \int_{A_i} g \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(b) Переходя к *sup* получаем желаемое

3. Теперь докажем, что $\int_A f \geq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) $A = A_1 \sqcup A_2$

i. Рассмотрим g_1, g_2 — ступенчатые такие, что $0 \leq g_i \leq f \cdot \chi_{A_i}$

ii. Рассмотрим их общее разбиение E_k : $g_i = \sum_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

iii. $g_1 + g_2$ — ступенчатая и $0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$

iv. $\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \stackrel{lemma}{=} \int_A (g_1 + g_2) \stackrel{iii}{\leq} \int_A f$

v. Поочерёдно переходя к *sup* по g_1 и g_2 получаем: $\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, что $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ будем последовательно отщеплять последнее множество по (a)

(c) $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$

i. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$

ii. $A = (\bigsqcup_{i=1}^n A_i) \sqcup B$, где $B = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$

iii. $\int_A f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$

iv. Переходим к *lim* по n

Следствие 1: $0 \leq f \leq g$ - измеримы и $A \subset B$ - измеримы $\Rightarrow \int_A f \leq \int_B g$

$$\int_B g \geq \int_B f = \int_A f + \int_{B \setminus A} f \geq \int_A f$$

Следствие 2: f - суммируема на $A \Rightarrow \int_A f = \sum_i \int_{A_i} f$

Достаточно рассмотреть срезки f^+ и f^-

Следствие 3: $f \geq 0$ - изм. $\delta : \mathbb{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (A \mapsto \int_A f d\mu) \Rightarrow \delta$ - мера

7 Теорема Леви

8 Линейность интеграла Лебега