Теоремы по матану, семестр 4

15 февраля 2018 г.

Содержание

1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

2 Измеримость монотонной функции

3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

5.1 Для определения (5)

1. $\int\limits_{\mathbb{X}} f$ не зависит от представления f как ступенчатой функции, то есть если f реализуется как $f = \sum\limits_{k}(\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ и как $f = \sum\limits_{l}(\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$, интегралы по этим функциям равны

   Доказательство:

   Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

   Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

   Тогда $f = \sum\limits_{k}(\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum\limits_{l}(\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum\limits_{i,j}(\lambda_i(=\alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$

   $\int f = \sum\limits_{i,j}(\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum\limits_{i}(\lambda_i \cdot \sum\limits_{j}(\mu F_{i,j})) = \sum\limits_{i}(\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f$ для первого разбиения

   Аналогично для второго разбиения получаем

   $\int f = \sum\limits_{i,j}(\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum\limits_{j}(\alpha_i \cdot \sum\limits_{i}(\mu F_{i,j})) = \sum\limits_{j}(\lambda_j \cdot \mu G_i) = \int f$ для второго разбиения, что и требовалось доказать

2. f, g -измеримые ступенчатые функции, $f \leqslant g$, тогда $\int\limits_{\mathbb{X}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g$

   Доказательство:

   Пусть $f = \sum\limits_{k}(\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$, $g = \sum\limits_{l}(\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда $\int f = \sum\limits_{i,j}(\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leqslant \sum\limits_{j}(\alpha_j \cdot \mu F_{i,j}) = \int g$, что и требовалось доказать

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

Тут будет вторая теорема

7 Теорема Леви

8 Линейность интеграла Лебега