# Определения по матану, семестр 4

24 марта 2018 г.

# Содержание

**1 Свойство, выполняющееся почти везде** **3**

**2 Сходимость почти везде** **3**

**3 Сходимость по мере** **3**

**4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости** **3**

**5 Интеграл ступенчатой функции** **3**

**6 Интеграл неотрицательной измеримой функции** **4**

**7 Суммируемая функция** **4**

**8 Интеграл суммируемой функции** **4**

**9 Произведение мер** **5**

**10 Теорема Фубини** **5**

**11 Образ меры при отображении** **6**

**12 Взвешенный образ меры** **6**

**13 Плотность одной меры по отношению к другой** **6**

**14 Заряд, множество положительности** **6**

14.1 Заряд . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

14.2 Множество положительности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**15 Сферические координаты в $R^3$ и в $R^m$, их Якобианы** **7**

**16 Интегральные неравества Гельдера и Минковского** **7**

16.1 Нераветсво Гельдера . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

16.2 Нераверство Минковского . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

**17 Интеграл комплекснозначныйх функции** **8**

**18 Пространство $L_p(E, \mu),\ 1 \leq p < +\infty$** **8**

**19 Пространство $L_\infty(E, \mu)$** **8**

**20 Существенный супремум** **9**

# 1 Свойство, выполняющееся почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой, и $\omega(x)$ – утверждение, зависящее от точки $x$.
$E := \{x : \omega(x)$ — ложно$\}$ и $\mu E = 0$. Тогда говорят, что $\omega(x)$ верно при почти всех (п.в.) $x$.

# 2 Сходимость почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой, и $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
Говорим, что $f_n \to f(x)$ почти везде, если $\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}$ измеримо и имеет меру 0.

# 3 Сходимость по мере

$(X, a, \mu)$ - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$
$f_n, f : X \to \overline{R}$ - п.в. конечны
Говорят, что $f_n$ сходится к $f$ по мере $\mu$ (при $n \to +\infty$) (обозначается $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$) если $\forall \epsilon > 0$ $\mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$

# 4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

$(X, a, \mu)$ - пространство с мерой
$f_n, f : X \to R$ - п.в. конечны, измеримы
$f_n \to f$.
Тогда эта сходимость “почти равномерная”

# 5 Интеграл ступенчатой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ - ступенчатая функция, $E_k$ - измеримые дизъюнктные множества, $f \geqslant 0$
Интегралом ступенчатой функции $f$ на множестве $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что $[0 \cdot \infty = 0]$

## 6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f$ - измеримо, $f \geqslant 0$, её интегралом на множестве $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := sup(\int\limits_{\mathbb{X}} g)$$

, где $0 \leqslant g \leqslant f, g-$ступенчатая

## 7 Суммируемая функция

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f-$измерима, $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+$ или $\int\limits_{\mathbb{X}} f^-$ конечен (хотя бы один из них).
Тогда интегралом $f$ на $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := \int\limits_{\mathbb{X}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{X}} f^+$$

Тогда если конечен $\int\limits_{\mathbb{X}} f$, (то есть конечны интегралы по обеим срезкам), то $f$ называют суммируемой

## 8 Интеграл суммируемой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f-$ измерима, $E \in \mathbb{A}$
Тогда интегралом $f$ на множестве $E$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f d\mu := \int\limits_{\mathbb{X}} f \cdot \chi(E) d\mu$$

$f$ суммируемая на $E$, если $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+ \chi(E)$ и $\int\limits_{\mathbb{X}} f^- \chi(E)$ конечны

# 9 Произведение мер

$<\mathbb{X}, \alpha, \mu>$, $<\mathbb{Y}, \beta, \nu>$ - пространства с мерой
$\mu$, $\nu$ - $\sigma$-конечные меры
$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : A \in \alpha, B \in \beta\}$
$m_0 : \alpha \times \beta \to \overline{R}$
$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

$m$ - называется произведением мер $\mu$ и $\nu$, если $m$ - мера, которая ялвяется Лебеговским продолжением $m_0$ с полукольца $\alpha \times \beta$ на некоторую $\sigma$-алгебру $\alpha \otimes \beta$.
$m = \mu \times \nu$ - обозначение
$<\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \alpha \otimes \beta, \mu \times \nu>$ - произведение пространств с мерой

# 10 Теорема Фубини

$<\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu>$, $<\mathbb{Y}, \mathbb{B}, \nu>$ - пространство с мерой,
$\mu$, $\nu$ — $\sigma$-конечные и полные,
$m = \mu \times \nu$,
$f$ — суммируемая на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ по $m$.
**Тогда:**

- при «почти всех» $x$ функция $f_x \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$, то есть суммируема на $\mathbb{Y}$ по $\nu$

  при «почти всех» $y$ функция $f^y \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$

- $$x \mapsto \phi(x) \mid \phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$$

  $$y \mapsto \psi(y) \mid \psi(y) = \int\limits_{\mathbb{X}} f^y d\mu \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$$

  Это есть эти функции суммируемы в некотором контексте ($\mathbb{X}, \mu$ и $\mathbb{Y}, \nu$ соответсвено)

- $$\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f dm = \int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} (\int\limits_{\mathbb{Y}} f d\nu(y)) d\mu(x)$$

  $$\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f dm = \int\limits_{\mathbb{Y}} \psi(x) d\nu = \int\limits_{\mathbb{Y}} (\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu(x)) d\nu(y)$$

# 11 Образ меры при отображении

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, \_)$ — пространство с $\sigma$-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.
$\nu$ является мерой на $Y$ и называется образом меры $\mu$ при отображении $\Phi$.

# 12 Взвешенный образ меры

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, \_)$ — пространство с $\sigma$-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} \omega \, d\mu$.
$\nu$ является мерой на $Y$ и называется взвешенным образом меры $\mu$.
При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

# 13 Плотность одной меры по отношению к другой

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
$\nu(E) = \int_E \omega(x) \, d\mu$. $\nu$ — мера на $X$.
$\omega$ называется плотностью $\nu$ относительно $\mu$.

# 14 Заряд, множество положительности

## 14.1 Заряд

$(X, \mathbb{A}, \_)$ — пространство с $\sigma$-алгеброй.
$\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).
$\phi$ счётно аддитивна.
Тогда $\phi$ — заряд.

## 14.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, $B$ измеримо: $\phi(B) \geq 0$.e

# 15 Сферические координаты в $R^3$ и в $R^m$, их Якобианы

$x_1 = r \cdot \cos\phi_1$ $\qquad 1 \le i \le m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$

$x_2 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2$ $\qquad i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$

$x_3 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdot \cos\phi_3$

.

.

.

$x_{m-2} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-3} \cdot \cos\phi_{n-2}$

$x_{m-1} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2} \cdot \cos\phi_{n-1}$

$x_m = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2} \cdot \sin\phi_{n-1}$

$\mathcal{J} = r^{n-1} \cdot (\sin\phi_1)^{n-2} \cdot (\sin\phi_2)^{n-3} \cdot \dots \cdot (\sin\phi_{n-2})^1 \cdot (\sin\phi_{n-1})^0$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш $m$-мерный вектор на нормаль к $(m-1)$-мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру пока не дойдём до нашего любимого $\mathbb{R}^2$. Уже в нём рассматривем обычные полярные координаты(отсюда и другие ограничения на размер угла).

# 16 Интегральные неравества Гельдера и Минковского

## 16.1 Нераветсво Гельдера

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ $f, g : E \subset X \to C$ ($E$ - изм.) — заданы п.в, измеримы

$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. <u>Тогда:</u> $\int\limits_E |fg| d\mu \le \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g|^q d\mu)\right)^{\frac{1}{q}}$

## 16.2 Нераверство Минковского

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ $f, g$ — заданы п.в, измеримы

$1 \le p < +\infty$. <u>Тогда:</u> $\left(\int\limits_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

# 17 Интеграл комплекснозначныйх функции

**TODO: Лев и Вадим**

# 18 Пространство $L_p(E, \mu),\ 1 \le p < +\infty$

$(X, \mathbb{A}, \mu)\ E \subset \mathbb{A}$

$L'_p(E, \mu) = \{$ f : п.в. $E \to \mathbb{C}$, изм., $\int\limits_E |f|^p d\mu < +\infty\}$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект - если определить норму как $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0 будут давать норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$, если $f = g$ п.в.

$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu)/_\sim$ - лин. норм. пр-во с нормой $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $||f||_p$ за норму $f$ в пространстве $L_p$.

# 19 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$L_\infty(E, \mu) = \{$ f : п.в. $E \to \mathbb{C}$, $\operatorname*{ess\,sup}\limits_E |f| < +\infty\}$

NB1: $||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $||f \cdot g||_1 \le ||f||_p \cdot ||g||_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

# 20 Существенный супремум

$(X, \mathbb{A}, \mu), E \subset X-$ изм., $f$ : п.в. $E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf\{A \in R : f(x) \le A$ п.в. $x\}$.
В этом определении $A$ - существенная верхняя граница.
Свойства:

1. $\operatorname*{ess\,sup}_{E} f \le \sup_{E} f$
2. $f(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{E} f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int\limits_E |fg| d\mu \le \operatorname*{ess\,sup}_{E} |g| \cdot \int\limits_E |f| d\mu$.