# Теоремы по матану, семестр 4

4 марта 2018 г.

## Содержание

# 1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
$f$ — измеримая функция на $X$, $\forall x\ f(x) \geq 0$. Тогда $\exists$ ступенчатые функции $f_n$, такие что:

1. $\forall x\ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$.

2. $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$.

Следствие 1:
$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримая. Тогда $\exists$ ступенчатая $f_n : \forall x : lim f_n(x) = f(x)$ и $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.
Доказательство:

1. Рассмотрим $f = f^+ - f^-. f^+ = max(f, 0), f^- = max(-f, 0)$. Срезки измеримы: $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$, при этом $f$ и $g \equiv 0$ измеримы ($f^-$ измерима аналогично).

2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции $f_n^+ \to f^+, f_n^- \to f^-$. Тогда и $f_n^+ - f_n^-$ это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов: $f_n^+ - f_n^- \to f^+ - f^- = f$. Неравенство с модулем верно при правильных эпсилон-неравенствах.

Следствие 2:
$f, g$ — измеримые функции. Тогда $fg$ – измеримая функция. При этом считаем, что $0 \cdot \infty = 0$.
Доказательство:

1. Рассмотрим $f_n \to f : |f_n| \leq |f|, g_n \to g : |g_n| \leq |g|$ из первого следствия. Тогда $f_n g_n \to fg$ и $fg$ измерима по теореме об измеримости пределов и супремумов (произведение ступенчатых функций – ступенчатая функция, значит, измеримая)

Следствие 3:
$f, g$ — измеримые функции. Тогда $f + g$ – измеримая функция. При этом считаем, что $\forall x$ не может быть, что $f(x) = \pm\infty, g(x) = \mp\infty$
Доказательство:
Доказывается как следствие 2.

# 2 Измеримость монотонной функции

Пусть $E \subset R^m$ — измеримое по Лебегу, $E' \subset E, \lambda_m(E \setminus E') = 0, f : E \to \mathbb{R}$. Пусть сужение $f : E' \to R$ непрерывно. Тогда $f$ измерима на $E$.
Доказательство:

1. $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a), e := E \setminus E', \lambda_m(e) = 0$.

2. $E'(f < a)$ открыто в $E'$, так как f непрерывна. Поэтому $E' = G \cap E' \Rightarrow$, где $G$ — открытое в $E$ множество. Значит, $E'(f < a)$ — измеримо по Лебегу, так как оно является борелевским.

3. Но и $e(f < a)$ измеримо, так $\lambda_m(e) = 0$, следовательно $E(f < a)$ измеримо как объединение измеримых множеств

Следствие:
$f :< a, b >\to \mathbb{R}$ монотонна. Тогда $f$ измерима.
Доказательство:
Множество разрывов монотонной функции НБЧС множество, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

# 3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

$(X, a, \mu)$ - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$
$f_n, f : X \to \overline{R}$ - п.в. конечны, измеримы
$f_n \to f$ (поточечно, п.в.)
Доказательство:

1. подменим значения $f_n$ и $f$ на некотором множестве меры 0 так, чтобы сходимость $f_n \to f$ была всюду. (Так можно сделать. Действительно, $f_n \to f$ на $X \setminus e$, $\mu e = 0$
$f_n$ - конечно на $X \setminus e_n$,
$f$ - конечно на $X \setminus e_0$.
Тогда на $(X \setminus \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} e_n)$ функции конечны и есть сходимость $f_n \to f$. По свойствам меры $\mu \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} e_n = 0$. Тогда определим на $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} e_n$ $f_n = f = 0$. Это очевидно даст нам необходимую конечность и поточечную сходимость. )

2. (частный случай) $f_n \to f \equiv 0$. Тогда пусть $\forall x f_n(x)$ - монотонно (по $n$). $|f_n(x)|$ - убывает с ростом $n$ и $X(|f_n| \geq \epsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \epsilon)$. А также $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} X(|f_n| \geq \epsilon) = \emptyset$.
$$\begin{cases} \mu X < +\infty \\ \ldots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots \end{cases}$$
$\Rightarrow \mu E_n \to \mu \cup E_n$ - Th о непрерывности меры сверху.
$\Rightarrow \mu X(|f_n \geq \epsilon|) \to \mu\emptyset = 0$

3. (общий случай) $f_n \to f$. Рассмотрим $\phi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$. Заметим свойства $\phi$:
$$\begin{cases} \phi_n(x) \to 0 \\ \phi_n \downarrow_n \end{cases}$$
$X(|f_n - f| \geq \epsilon) \subset X(|\phi_n \geq \epsilon|) \Rightarrow$ по монотонности меры имеем $\mu X(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu X(\phi_n \geq \epsilon) \xrightarrow{part.case} 0$, ч.т.д.

# 4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

$(X, a, \mu)$ - пространство с мерой
$f_n, f : X \to R$ - п.в. конечны, измеримы

$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$.
Тогда $\exists n_k \uparrow : f_{n_k} \to f$ п.в.
Доказательство: $\forall k \ \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$
Тогда $\exists n_k : \forall n \geq n_k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2k}$ (можно считать $n_1 < n_2 < \dots$)
Проверим $f_{n_k} \to f$ п.в. : $E_k := \bigcap j = k^{+\infty} X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j})$
$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$
$E_0 := \bigcap k \in N E_k$.
$\mu E_k \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^(k-1)}$ - конечно $\Rightarrow \mu E_k \to \mu E_0 \Rightarrow \mu E_0 = 0$ (т.к. $\mu E_k \to 0$).
Рассмотрим $X \notin E_0$, т.е. если $X \notin E_0$, то $\exists k : X \notin E_k$, тогда $\forall j \geq k |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$ при $n \geq n_j$, т.е. $f_{n_k} \to f$, ч.т.д. Следствие: $f_n \Rightarrow f$ $|f_n| \leq g$ п.в. Док-во: Рассмотрим последовательность $f_{n_k}$ где $f_{n_k} \to f$ п.в. и вдоль нее применим Th о двух городовых.

$$\begin{cases} f_{n_k}(x) \to f(x) \forall x \in X \setminus e_1 \\ |f_n(x)| \leq g(x) \forall x \in X \setminus e_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow |f| \leq g$ на $(X \setminus e_1) \setminus e_2$

# 5 Простейшие свойства интеграла Лебега

## 5.1 Для определения (5)

1. $\int\limits_{\mathbb{X}} f$ не зависит от представления $f$ как ступенчатой функции, то есть если $f$ реализуется как $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ и как $f = \sum\limits_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$, интегралы по этим функциям равны

   Доказательство:

   Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

   Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

   Тогда $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum\limits_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum\limits_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$

   $\int f = \sum\limits_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum\limits_i (\lambda_i \cdot \sum\limits_j (\mu F_{i,j})) = \sum\limits_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f$ для первого разбиения

   Аналогично для второго разбиения получаем

   $\int f = \sum\limits_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum\limits_j (\alpha_i \cdot \sum\limits_i (\mu F_{i,j})) = \sum\limits_j (\lambda_j \cdot \mu G_i) = \int f$ для второго разбиения, что и требовалось доказать

2. $f, g$ -измеримые ступенчатые функции, $f \leqslant g$, тогда $\int\limits_{\mathbb{X}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g$

   Доказательство:

   Пусть $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$, $g = \sum\limits_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$

   Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

   Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда $\int f = \sum\limits_{i,j}(\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leqslant \sum\limits_{j}(\alpha_j \cdot \mu F_{i,j}) = \int g$, что и требовалось доказать

## 5.2 Для окончательного определения

1. Монотонность $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{X}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g$

   Доказательство:

   (a) $f, g \geqslant 0$, тогда доказательство тривиально (по свойствам супремума)

   (b) $\int\limits_{\mathbb{X}} f = \int\limits_{\mathbb{X}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{X}} f^-$
   $\int\limits_{\mathbb{X}} g = \int\limits_{\mathbb{X}} g^+ - \int\limits_{\mathbb{X}} g^-$
   Из того, что $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+ \leqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g^+$, а $\int\limits_{\mathbb{X}} f^- \geqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g^-$ следует, что $\int\limits_{\mathbb{X}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g$

2. $\int\limits_{\mathbb{E}} 1 \cdot d\mu = \mu E$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} 0 \cdot d\mu = 0$

   Очевидно из определения интеграла ступенчатой функции

3. $\mu E = 0, f$-измерима, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = 0$, даже если $f = \infty$ на $\mathbb{E}$

   Доказательство:

   (a) $f$-ступенчатая $\Rightarrow$ ограниченная
   $f = \sum\limits_{k=1}^{n}(\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = \sum \lambda_k \cdot \mu(E \cap E_k)$
   Но $\mu(E \cap E_k) = 0$ (так как $\mu E = 0$), тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = 0$

   (b) $f$ - измеримая, $f \geqslant 0$.
   $\int\limits_{\mathbb{E}} f = \sup(\int\limits_{\mathbb{E}} g)$, где $0 \leqslant g \leqslant f$, $g$ - ступенчатая
   Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = \sup(0) = 0$

   (c) $f$ - произвольная измеримая
   Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = \int\limits_{\mathbb{E}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{E}} f^- = 0 - 0 = 0$

4. (a) $\int\limits_{\mathbb{E}} -f = -\int\limits_{\mathbb{E}} f$

   (b) $\forall c \in \mathbb{R} : \int\limits_{\mathbb{E}}(c \cdot f) = c \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} f$

   Доказательство:

   (a) $(-f)^+ = f^-$
   $(-f)^- = f^+$
   Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} -f = \int\limits_{\mathbb{E}}(-f)^+ - \int\limits_{\mathbb{E}}(-f)^- = \int\limits_{\mathbb{E}} f^- - \int\limits_{\mathbb{E}} f^+ = -\int\limits_{\mathbb{E}} f$

(b) Пусть $c > 0$. Если $c < 0$, то по предыдущему случаю можем рассматривать для $-c < 0$. Если $c = 0$, то по предыдущей теореме $\int\limits_{\mathbb{E}}(0 \cdot f) = \int\limits_{\mathbb{E}} 0 = 0 = 0 \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} f$

i. Пусть $f \geqslant 0$

$\int\limits_{\mathbb{E}}(c \cdot f) = \sup(\int\limits_{\mathbb{E}} g)$, где $0 \leqslant g \leqslant c \cdot f$, $g$ - ступенчатая

Пусть $g = c \cdot \widetilde{g}$, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}}(c \cdot f) = \sup(\int\limits_{\mathbb{E}}(c \cdot \widetilde{g}))$, где $0 \leqslant c \cdot \widetilde{g} \leqslant c \cdot f$, $\widetilde{g}$ - ступенчатая

Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}}(c \cdot f) = \sup(\int\limits_{\mathbb{E}}(c \cdot \widetilde{g})) = \sup(c \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{g}) = c \cdot \sup(\int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{g}) = c \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} f$

ii. Если $f$ - произвольная:

$\int\limits_{\mathbb{E}}(c{\cdot}f) = \int\limits_{\mathbb{E}}(c{\cdot}f)^+ - \int\limits_{\mathbb{E}}(c{\cdot}f)^- = \int\limits_{\mathbb{E}} c{\cdot}f^+ - \int\limits_{\mathbb{E}} c{\cdot}f^- = c{\cdot}\int\limits_{\mathbb{E}} f^+ - c{\cdot}\int\limits_{\mathbb{E}} f^- = c{\cdot}(\int\limits_{\mathbb{E}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{E}} f^-) = c{\cdot}\int\limits_{\mathbb{E}} f$

5. Если существует $\int\limits_{\mathbb{E}} f d\mu$, то $|\int\limits_{\mathbb{E}} f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} |f|$

Доказательство:

$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$

$\int\limits_{\mathbb{E}} -|f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} |f|$

$-\int\limits_{\mathbb{E}} |f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} |f|$

Тогда $|\int\limits_{\mathbb{E}} f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} |f|$

6. $f$ - измеримая на $\mathbb{E}$, $\mu\mathbb{E} < \infty$

$a \leqslant f \leqslant b$, тогда $a \cdot \mu E \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant b \cdot \mu E$

Доказательство:

$a \leqslant f \leqslant b \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{E}} a \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} b$

$a \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} 1 \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant b \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} 1$

$a \cdot \mu\mathbb{E} \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant b \cdot \mu\mathbb{E}$

Следствие:

Если $f$ - Измеримая и ограниченная на $\mathbb{E}, \mu\mathbb{E} < \infty$, тогда $f$ - суммируемая на $\mathbb{E}$

7. $f$ - суммируемая на $\mathbb{E} \Rightarrow f$ почти везде конечная на $\mathbb{E}$ (то есть $f \in \alpha^0(\mathbb{E})$)

Доказательство:

(a) Пусть $f \geqslant 0$

Пусть $f = +\infty$ на $A$ и пусть $\mu A > 0$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : f \geqslant n \cdot \chi_A$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : \int\limits_{\mathbb{E}} f \geqslant n \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} \chi_A = n \cdot \mu A \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{E}} f = +\infty$

(b) $f$ любого знака

Распишем $f = f^+ - f^-$, по предыдущему пункту $f^+, f^-$ конечны почти везде $\Rightarrow f$ тоже конечно почти везде

# 6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i -$ измеримы. $f : X \to \overline{\mathbb{R}} -$ изм., $f \geqslant 0$

<u>Тогда:</u> $\int\limits_A f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f$

<u>Доказательство:</u>

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

   $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot (\sum\limits_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum\limits_i (\sum\limits_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum\limits_i (\int\limits_{A_i} f)$

2. Докажем, что $\int\limits_A f \leqslant \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$

   (a) Рассмотрим $0 \leqslant g \leqslant f -$ ступенчатая. $\int\limits_A g = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} g \leqslant \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$

   (b) Переходя к $sup$ получаем желаемое

3. Теперь докажем, что $\int\limits_A f \geqslant \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$

   (a) $A = A_1 \sqcup A_2$

      i. Рассмотрим $g_1, g_2$ — ступенчатые такие, что $0 \leqslant g_i \leqslant f \cdot \chi_{A_i}$

      ii. Рассмотрим их общее разбиение $E_k :\ g_i = \sum\limits_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

      iii. $g_1 + g_2$ — ступенчатая и $0 \leqslant g_1 + g_2 \leqslant f \cdot \chi_A$

      iv. $\int\limits_{A_1} g_1 + \int\limits_{A_2} g_2 \overset{lemma}{=} \int\limits_A (g_1 + g_2) \overset{iii}{\leqslant} \int\limits_A f$

      v. Поочерёдно переходя к $sup$ по $g_1$ и $g_2$ получаем: $\int\limits_{A_1} f + \int\limits_{A_2} f \leqslant \int\limits_A f$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ будем последовательно отщеплять последнее множество по $(a)$

   (c) $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

      i. Фиксрируем $n \in \mathbb{N}$

      ii. $A = (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \sqcup B$, где $B = \bigsqcup\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i$

      iii. $\int\limits_A f \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f + \int\limits_B f \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f$

      iv. Переходим к $lim$ по $n$

<u>Следсвие 1:</u> $0 \leqslant f \leqslant g$ - измеримы и $A \subset B$ - измеримы $\Rightarrow \int\limits_A f \leqslant \int\limits_B g$

$\int\limits_B g \geqslant \int\limits_B f = \int\limits_A f + \int\limits_{B\setminus A} f \geqslant \int\limits_A f$

Следствие 2: $f$ - суммируема на $A \Rightarrow \int\limits_A f = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$

Достаточно рассмотреть срезки $f^+$ и $f^-$

Следствие 3: $f \geqslant 0$ - изм. $\delta : \mathbb{A} \to \overline{\mathbb{R}}(A \longmapsto \int\limits_A f d\mu) \Rightarrow \delta$ - мера

# 7 Теорема Леви

$(X, \mathbb{A}, \mu)$, $f_n \geqslant 0$ - изм.
$f_1(x) \leqslant ... \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant ...$ при почти всех $x$
$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ при почти всех $x$ (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

Тогда: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu$

Доказательство:
$N.B. \int\limits_X f_n \leqslant \int\limits_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$
$f$ - измерима как предел последовательности измеримых функций

1. $\leqslant$

   Очевидно $f_n \leqslant f$ при п.в $x \Rightarrow \int\limits_X f_n \leqslant \int\limits_X f$. Делаем предельный переход по $n$

2. $\geqslant$

   (a) Логичная редукция: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) \geqslant \int\limits_x g$, где $0 \leqslant g \leqslant f$ - ступенчатая

   (b) Наглая редукция: $\forall c \in (0, 1) : \lim \int\limits_X f_n(x) \geqslant c \cdot \int\limits_X g$

      i. $E_n = \{x \mid f_n(x) \geqslant c \cdot g\}$. Очевидно $E_1 \subset ... \subset E_n \subset E_{n+1} \subset ...$

      ii. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = X$ т.к. $c < 1$

      iii. $\int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_{E_n} f_n \geqslant \int\limits_{E_n} g \Rightarrow \lim \int\limits_X f_n \geqslant c \cdot \lim \int\limits_{E_n} g = c \cdot \int\limits_X g$

      iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем неперрывность меры снизу

# 8 Линейность интеграла Лебега

$f, g \geqslant 0$, измеримые
Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} (f+g) = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$
Доказательство:

1. Пусть $f, g$ - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

   $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

   $g = \sum\limits_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} (f+g) = \sum\limits_k (\lambda_k + \alpha_k) \cdot \mu E_k = \sum\limits_k \lambda_k \cdot \mu E_k + \sum\limits_k \alpha_k \cdot \mu E_k = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

2. $f, g \geqslant 0$, измеримые

   Тогда $\exists h_n : 0 \leqslant h_n \leqslant h_{n+1} \leqslant f$, $h_n$ ступенчатые

   $\exists \widetilde{h_n} : 0 \leqslant \widetilde{h_n} \leqslant \widetilde{h_{n+1}} \leqslant g$, $\widetilde{h_n}$ ступенчатые

   $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = f$

   $\lim\limits_{n \to +\infty} \widetilde{h_n} = g$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h_n}) = \int\limits_{\mathbb{E}} h_n + \int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n}$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h_n}) \to \int\limits_{\mathbb{E}} (f+g)$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} h_n \to \int\limits_{\mathbb{E}} f$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n} \to \int\limits_{\mathbb{E}} g$

   Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} (f+g) = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

3. Если $f, g$ - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

# 9 Теорема об интегрировании пложительных рядов

$u_n(x) \geq 0$ *почти всюду* на $\mathbb{E}$, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} (\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

<u>Доказательство:</u>

$S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x)$; $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

1. $S_N$ - возрастает к $S$ при почти всех x $\xRightarrow{\text{Т. Леви}} \int\limits_{\mathbb{E}} S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int\limits_{\mathbb{E}} S = \int\limits_{\mathbb{E}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

2. С другой стороны $\int\limits_{\mathbb{E}} S_N = \int\limits_{\mathbb{E}} \sum\limits_{n=1}^{N} u_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu$

3. Найденные пределы совпадают в силу единственности предела последовательности, что и требовалось доказать.

# 10 Теорема о произведении мер

$< \mathbb{X}, \alpha, \mu >$, $< \mathbb{Y}, \beta, \nu >$ - пространства с мерой
$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : A \in \alpha, B \in \beta\}$
$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Тогда:

1. $m_0$ - мера на полукольце $\alpha \times \beta$

2. $\mu$, $\nu$ - $\sigma$-конечны $\Rightarrow$ $m_0$ - $\sigma$-конечна

<u>Доказательство:</u>

1. Неотрицательность $m_0$ очевидна. Необходимо доказать счетную аддитивность
   Пусть $P = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} P_k$, где $P \in \alpha \times \beta$
   $P = A \times B$; $P_k = A_k \times B_k$
   Заметим, что:

   - $\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y)$, в силу дизъюнктности $P_k$ ((x, y) входит максимум в одно множество из всех $P_k$)
   - $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, так как (x, y) $\in A \times B \Leftrightarrow x \in A$ И $y \in B$

   Воспользовавшись вышесказанным получим:
   $\chi_P(x, y) = \chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$
   $\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi B_k(y)$
   Имеем следующее равенство:
   $\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi B_k(y)$
   Проинтегрируем его по мере $\mu$ по x, затем по мере $\nu$ по y, получим:
   $\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$, то есть $m_0(P) = \sum m_0(P_k)$, что и требовалось доказать.

2. $\mu$, $\nu$ - $\sigma$-конечны $\Rightarrow X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где $\mu A_k < +\infty$; $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, где $\nu B_k < +\infty$
   $X \times Y = \bigcup\limits_{i,j} (A_i \times B_j)$
   $m_0(A_i \times B_j) = \mu A_i \cdot \nu B_j < +\infty$, так как $\mu A_i < +\infty$ и $\nu B_j < +\infty$
   все $(A_i \times B_j) \in \alpha \times \beta$ по определению
   Что и требовалось доказать.

# 11 Абсолютная непрерывность интеграла

## TODO

# 12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$<\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu>$ – пространство с мерой,
$f_n, f$ – измеримы,
$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (сходится по мере),
$\exists g : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» $x \quad |f_n(x)| \leq g(x)$ ($g$ – называется мажорантой)
- $g$ - суммируемая

<u>**Тогда:**</u>

- $f_n, f$ – суммируемы
- $\int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \to 0$
- $\int\limits_{\mathbb{X}} f_n \to \int\limits_{\mathbb{X}} f$ («уж тем более»)

<u>Доказательство:</u>

1. $f_n$ – суммируема, так как существует мажоранта $g$
2. $f$ – суммируема по теореме Рисса ($f_{nk} \to f$ почти везде, $|f_{nk}| \leq g$, тогда $|f| \leq g$ почти везде)
3. «уж тем более»:
   $|\int\limits_{\mathbb{X}} f_n - \int\limits_{\mathbb{X}} f| \leq \int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f|$
   Допустим, что $\int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \to 0$ уже доказано.
   Тогда «уж тем более» очевидно.
4. Докажем основное утверждение:
   Разберем два случая:
   (a) $\mu\mathbb{X} < \infty$ Фиксируем $\epsilon \geq 0 \quad X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$
   $\mu X \to 0$ (так как $f_n \Rightarrow f$)
   $\int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int\limits_{X_n} |f_n - f| + \int\limits_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int\limits_{X_n} 2g + \int\limits_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon\mu\mathbb{X}$ (прим. $\int\limits_{X_n} 2g \to 0$ по след. к т. об абс. сходимости )
   (b) $\mu\mathbb{X} = \infty$
   Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для $g$:
   $\forall \epsilon \; \exists A \subset \mathbb{X} \mid \mu A$ - конеч. $\int\limits_{X \setminus A} g < \epsilon$
   *доказательство:*

$\int\limits_{\mathbb{X}} = \sup(\int\limits_{\mathbb{X}} g_k \mid 0 \le g_k \le g)$ ($g_k$ – ступен.)

$\exists g_n \ \int\limits_{\mathbb{X}} g - \int\limits_{\mathbb{X}} g_n < \epsilon$

$A := supp\ g_n$ ($supp\ f :=$ замыкание $\{x \mid f(x) \ne 0\ \}$)

$A = \bigcup\limits_{k|\alpha_k \ne 0} E_k$

$g = \sum\limits_{kon} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k}$ ($X = \bigsqcup E_k$)

$\int\limits_{\mathbb{X}} g_n = \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty$ ($\mu A$ - конеч.)

$\int\limits_{\mathbb{X}\setminus\mathbb{A}} g = \int\limits_{\mathbb{X}\setminus\mathbb{A}} g - g_n \le \int\limits_{\mathbb{X}} g - g_n < \epsilon$

Теперь докажем основное утверждение:

$\int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int\limits_{\mathbb{A}} |f_n - f| + \int\limits_{\mathbb{X}\setminus\mathbb{A}} |f_n - f| \le \int\limits_{\mathbb{A}} |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon$ ($\int\limits_{\mathbb{A}} |f_n - f| \to 0$ по п. (a))

# 13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой,
$f_n, f$ – измеримы,
$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ **почти везде**,
$\exists g \mid \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех»$x$ $|f_n(x)| \le g(x)$ ($g$ – называется мажорантой)
- $g$ - суммируемая

**Тогда:**

- $f_n, f$ – суммируемы
- $\int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \to 0$
- $\int\limits_{\mathbb{X}} f_n \to \int\limits_{\mathbb{X}} f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. «уж тем более» см. пред. теорему.
2. Докажем основное утверждение:

   $h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$

   Заметим, что при фикс. $x$ выпол. $0 \le h_n \le 2g$ почти везде

   $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} |f_n - f| = 0$ почти везде

   $2g - h_n \uparrow,\ 2g - h_n \to 2g$ почти везде

$\int\limits_{\mathbb{X}}(2g - h_n)d\mu \to \int\limits_{\mathbb{X}} 2g$ (по т. Леви)

$\int\limits_{\mathbb{X}} 2g - \int\limits_{\mathbb{X}} h \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{X}} h_n \to 0$

$\int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f| \leq \int\limits_{\mathbb{X}} h_n \to 0$

# 14 Теорема Фату. Следствия.

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой
$f_n, f$ – измеримы,
$f_n \geq 0$
$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ «почти везде»,
$\exists C > 0 \ \forall n \ \int\limits_{\mathbb{X}} f_n d\mu \leq C$
**Тогда:**

- $\int\limits_{\mathbb{X}} f \leq C$

Доказательство:
$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$
$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) = \textit{почти везде} = \lim f_n = f$ ($g_n \to f$ почти везде)
$\int\limits_{\mathbb{X}} g_n \leq \int\limits_{\mathbb{X}} f_n \leq C$
$\int\limits_{\mathbb{X}} f = \textit{по т. Леви} = \lim \int\limits_{\mathbb{X}} g_n \leq C$

## 14.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$ – измер.
$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
$\exists C \ \forall n \int\limits_{\mathbb{X}} f_n \leq C$
Тогда:

- $\int\limits_{\mathbb{X}} f \leq C$

Доказательство:
$\exists f_{n_k} \to f$ почти везде

## 14.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$ – измер.
Тогда:

- $\int\limits_{\mathbb{X}} \underline{lim}(f_n) \geq \underline{lim}(\int\limits_{\mathbb{X}} f_n)$

Доказательство:

$\exists n_k \mid \int\limits_{\mathbb{X}} f_{n_k} \xrightarrow{k \to +\infty} \varliminf\limits_{n \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{X}} f_n$

Рассмотрим $g_{n_k}$ такое, что $g_{n_k} \uparrow$ и $g_{n_k} \to \varliminf f$

Применяем теорему Леви к нер-ву $\int\limits_{\mathbb{X}} g_{n_k} \leq \int\limits_{\mathbb{X}} f_{n_k}$

$\int\limits_{\mathbb{X}} \varliminf f \leq \varliminf \int\limits_{\mathbb{X}} f_n$