Определения по матану, семестр 4

19 февраля 2018 г.

Содержание

1 Свойство, выполняющееся почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой, и $\omega(x)$ – утверждение, зависящее от точки x.
$E := \{x : \omega(x)$ — ложно$\}$ и $\mu E = 0$. Тогда говорят, что $\omega(x)$ верно при почти всех (п.в.) x.

2 Сходимость почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой, и $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
Говорим, что $f_n \to f(x)$ почти везде, если $\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}$ измеримо и имеет меру 0.

3 Сходимость по мере

(X, a, μ) - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$
$f_n, f : X \to \overline{R}$ - п.в. конечны
Говорят, что f_n сходится к f по мере μ (при $n \to +\infty$) (обозначается $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$) если $\forall \epsilon > 0\ \mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$

4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

(X, a, μ) - пространство с мерой
$f_n, f : X \to R$ - п.в. конечны, измеримы
$f_n \to f$.
Тогда эта сходимость “почти равномерная”

5 Интеграл ступенчатой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ - ступенчатая функция, E_k - измеримые дизъюнктные множества, $f \geqslant 0$
Интегралом ступенчатой функции f на множестве $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что $[0 \cdot \infty = 0]$

6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
f - измеримо, $f \geqslant 0$, её интегралом на множестве $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := sup(\int\limits_{\mathbb{X}} g)$$

, где $0 \leqslant g \leqslant f, g-$ступенчатая

7 Суммируемая функция

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f-$измерима, $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+$ или $\int\limits_{\mathbb{X}} f^-$ конечен (хотя бы один из них).
Тогда интегралом f на $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := \int\limits_{\mathbb{X}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{X}} f^+$$

Тогда если конечен $\int\limits_{\mathbb{X}} f$, (то есть конечны интегралы по обеим срезкам), то f называют суммируемой

8 Интеграл суммируемой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f-$ измерима, $E \in \mathbb{A}$
Тогда интегралом f на множестве E назовём

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f d\mu := \int\limits_{\mathbb{X}} f \cdot \chi(E) d\mu$$

f суммируемая на E, если $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+\chi(E)$ и $\int\limits_{\mathbb{X}} f^-\chi(E)$ конечны