

Определения по матану, семестр 4

6 мая 2018 г.

Содержание

1	Теорема о вложении пространств L^p	3
2	Теорема о сходимости в L_p и по мере	3
3	Полнота L_p	3
4	Лемма Урысона	3
5	Плотность в L_p непрерывных финитных функций	4
6	Теорема о непрерывности сдвига	4
7	Теорема об интеграле с функцией распределения	4
8	Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве	4
9	Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе	5
10	Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя	5

11 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля	6
12 Теорема о характеристике базиса	6
13 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда	7
14 Теорема Римана–Лебега	7
15 Принцип локализации Римана	7
16 Признак Дини. Следствия	7
17 Корректность определения свертки	8
18 Свойства свертки функции из L^p с функцией из L^q	8
19 Формула Грина	8
20 Формула Стокса	8
21 Формула Гаусса–Остроградского	9
22 Соленоидальность бездивергентного векторного поля	9

1 Теорема о вложении пространств L^p

$$\mu E < +\infty, \quad 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1. $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2. $\forall f$ — измеримы $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

2 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$$1 \leq p < +\infty, \quad f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

Тогда:

1.
 - $f \in L_p$
 - $f_n \rightarrow f$ в L_p

Тогда: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (по мере)

2.
 - $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (либо если $f_n \rightarrow f$ почти везде)
 - $|f_n| \leq g$ почти при всех n , $g \in L_p$

Тогда: $f_n \rightarrow f$ в L_p

3 Полнота L_p

$L_p(E, \mu) \quad 1 \leq p < \infty$ — полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходится по норме $\|f\|_p$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, k \quad \|f_n - f_k\| < \varepsilon \Rightarrow \exists f \mid \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

4 Лемма Урысона

F_0, F_1 — два непересекающихся замкнутых множества из \mathbb{R}^m

Тогда $\exists f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (непрерывная): $f|_{F_0} = 0, f|_{F_1} = 1$

5 Плотность в L_p непрерывных финитных функций

$\forall p : 1 \leq p < +\infty \quad C_0$ всюду плотно в $L^p(\mathbb{R}^m)$

6 Теорема о непрерывности сдвига

$$f_n(x) = f(x + h)$$

* f - равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|f_n - f\|_\infty = 0$

* $1 \leq p < +\infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|f_n - f\|_p = 0$

* $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|f_n - f\|_\infty = 0$

* $1 \leq p < +\infty \quad f \in L^p[0, T] \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|f_n - f\|_p = 0$

7 Теорема об интеграле с функцией распределения

$$(\mathbb{R}, B, X)$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$, изм. по Борелю, п.в. конечн.

$h : X \rightarrow \mathbb{R}$ с функцией распределения $H(t)$

μ_H - мера Бореля-Стилтьеса (мера Лебега-Стилтьеса на B)

$$\text{Тогда: } \int_X f(h(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t)$$

8 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

$$1. x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

$$2. \sum x_k \text{ сходится, тогда } \forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$$

3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - с.х. $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

9 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$, $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.

$$2. c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

Иными словами $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

10 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$, $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \quad \mathcal{L} = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots) \subset \mathbb{H}$$

Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во \mathcal{L} . Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$

2. S_n — наилучшее приближение x в \mathcal{L} ($\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$)

$$3. \|S_n\| \leq \|x\|$$

11 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ – орт. сист. в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$ сх-ся в \mathbb{H}
2. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$
3. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

12 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ – орт. сист. в \mathbb{H}

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_k\}$ – базис
2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)
3. $\{e_k\}$ - замкн.
4. $\{e_k\}$ - полн.
5. $Lin(e_1, e_2, \dots)$ - плотна в \mathbb{H}

13 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \rightarrow f$ в $L_1[-\pi, \pi]$

Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

14 Теорема Римана–Лебега

$E \subset \mathbb{R}$ — измеримо, $f \in L^1(E)$

Тогда $\int_E f(x) \cdot e^{ikx} \, dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ (То же самое можно и с $\cos x$ и $\sin x$ вместо e^{ikx})

15 Принцип локализации Римана

$f, g \in L^1[-\pi, \pi] \quad x_0 \in [-\pi, \pi] \quad \exists \delta > 0$

$f(x) = g(x)$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Тогда $S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

16 Признак Дини. Следствия

$f \in L^1[-\pi, \pi] \quad x_0 \in [-\pi, \pi] \quad S \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C})$

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x_0+t) - 2S + f(x_0-t)|}{t} dt < +\infty$$

Тогда: $S_n(f, x_0) \rightarrow S$

Следствие: $f \in L^1[-\pi, \pi]$ $x_0 \in [-\pi, \pi]$

Существуют 4 конечный предела $\alpha_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$

Тогда: ряд Фурье сходится в x_0 к $S = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Следствие: $f \in L^1[-\pi, \pi]$ - непр. в x_0

Существует конечн. $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ и $\lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$

Тогда: $S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$

17 Корректность определения свертки

18 Свойства свертки функции из L^p с функцией из L^q

$$f \in L^p \quad k \in L^q[-\pi, \pi] \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right) \quad 1 \leq p < +\infty$$

Тогда $f * k$ - непрерывна на $[-\pi, \pi]$

$$\|f * k\|_1 \leq \|f\|_p * \|k\|_q$$

19 Формула Грина

\mathbb{R}^2 — ориент. с помощью нумерации координат.

$D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное, с C^2 -гладкой границей.

(P, Q) — гладкое векторное поле.

Пусть граница $D(\partial D)$ ориентирована согласованно с ориентацией плоскости.

$$\text{Тогда } \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

20 Формула Стокса

$D \subset \mathbb{R}^3$ — простая гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 , ∂D — C^2 -гладкая кривая,

n_0 — сторона поверхности; ориентированы согласованно с ∂D

(P, Q, R) — гладкое векторное поле на D . Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_D (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy \end{aligned}$$

21 Формула Гаусса–Остроградского

$D \subset \mathbb{R}^3$ ∂D — ориент. полем внешних нормалей

(P, Q, R) — гл. век. поле в D . Тогда

$$\iint_{\partial D} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_D (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz$$

22 Соленоидальность бездивергентного векторного поля