Билеты по матану, семестр 3

1 февраля 2018 г.

Содержание

1 Определения и формулировки

1.1 Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

$a_n, b_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E, если:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на E.
2. Последовательность $b_n(x)$ равномерно ограничена на E и монотонна для всех $x \in E$.

1.2 Равномерная сходимость функционального ряда

Функциональный ряд $\sum f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится к $f(x)$.

1.3 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости

Ряд $\sum f_n(x)$ равномерно сходится на E тогда и только тогда, когда

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N : \forall m \geq n \geq N, x \in E \; |\sum_{k=n}^{m} f_k(x)| < \epsilon$$

1.4 Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ — степенной ряд.
2. $R \in [0; +\infty]$: при $|x - x_0| < R$ ряд сходится, при $|x - x_0| > R$ ряд расходится — радиус сходимости степенного ряда.
3. Формула Адамара:
$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

1.5 Экспонента как функция комплексного аргумента

$$exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

1.6 Метод суммирования средними арифметическими

$\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ — ряд. $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.
Сумма ряда по методу средних арифметических:

$$S = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$$

1.7 Метод суммирования Абеля–Пуассона

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — ряд. Его сумма по Абелю-Пуассону:

$$S = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

1.8 Частная производная второго порядка, k-го порядка

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $U(a) \in E$.
$\exists f'_{x_i}$ в $U(a)$ — частная производная f по переменной x_i.
Если в a $\exists (f'_{x_i})'_{x_k}$, то она называется частной производной второго порядка по x_i и x_k в точке a ($f''_{x_i x_k}(a)$).
Аналогично — частные производные высших порядков.

1.9 Классы $C^r(E)$

$E \in \mathbb{R}^m$ — открыто.
Класс функций $C^r(E)$, $r \in \mathbb{N}$ — класс функций на E, у которых существуют все частные производные порядка r и они непрерывны.
$C^0(E) = C(E)$ — непрерывные на E функции.
$C^\infty(E) = C^0(E) \cap C^1(E) \cap C^2(E) \cap \dots$

1.10 Мультииндекс и обозначения с ним

$i = (i_1, \dots, i_m)$, $i_k \in \mathbb{Z}_+$ — мультииндекс.

1. $|i| = i_1 + \dots + i_m$ — высота мультииндекса.
2. $i! = i_1! \dots i_m!$
3. $x^i = x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$
4. $f^{(i)} = \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i} = \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}$

1.11 Формула Тейлора (различные виды записи)

$E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^{r+1}(E)$, $x \in E$, $(x+h) \in U(x) \subset E$, $\theta \in (0;1)$

$$f(x+h) = \sum_{|k| \le r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \sum_{|k| = r+1} \frac{f^{(k)}(x+\theta h)}{k!} h^k$$

$$f(x+h) = \sum_{|k| \le r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(|h|^r)$$

$$f(x+h) = \sum_{s=0}^{r} \frac{d^s(a,h)}{s!} + \frac{d^{r+1}(a, \theta h)}{(r+1)!}$$

1.12 n-й дифференциал

$$d^n f(x,h) = \sum_{|k|=n} \frac{n!}{k!} f^{(k)}(x) h^k$$

1.13 Норма линейного оператора

$L \in \mathscr{L}_{m,n}$
$||L|| = \sup_{|x|=1} |Lx|$

1.14 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

$Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. $Q(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$ — квадратичная форма.

1. $Q(x)$ — положительно определённая форма, если $\forall x \neq 0 \; Q(x) > 0$.
2. $Q(x)$ — отрицательно определённая форма, если $\forall x \neq 0 \; Q(x) < 0$.
3. $Q(x)$ — незнакоопределённая форма, если $\exists x : Q(x) > 0$ и $\exists x : Q(x) < 0$.
4. $Q(x)$ — положительно определённая вырожденная форма, если $\forall x \neq 0 \; Q(x) \geq 0$, $\exists x \neq 0 : Q(x) = 0$.
5. $Q(x)$ — отрицательно определённая вырожденная форма, если $\forall x \neq 0 \; Q(x) \leq 0$, $\exists x \neq 0 : Q(x) = 0$.

1.15 Локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

1. $x_0 \in E$ — точка локального максимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \; f(x) \leq f(x_0)$.
2. $x_0 \in E$ — точка локального минимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \; f(x) \geq f(x_0)$.
3. $x_0 \in E$ — точка строгого локального максимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap e \setminus \{x_0\} \; f(x) < f(x_0)$.
4. $x_0 \in E$ — точка строгого локального минимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap e \setminus \{x_0\} \; f(x) > f(x_0)$.
5. $x_0 \in E$ — точка (строгого) локального экстремума, если она является точкой (строгого) локального максимума или минимума.

1.16 Диффеоморфизм

$F : E \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, если F обратимо, F и F^{-1} дифференцируемы.

1.17 Формулировка теоремы о локальной обратимости

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, E открыто, $F \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in E$, $detF'(x_0) \neq 0$.
Тогда $\exists U(x_0) \subset E$, такое что F, суженное на $U(x_0)$ — диффеоморфизм.

1.18 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = y_1 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$$
$f_i \in C^1$. $\exists x^0$ — решение, $det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)) \neq 0$.
Тогда $\exists U(x^0), V(y_0) : \forall y \in V(y_0) \; \exists!$ решение $x \in U(x^0)$ и $x_i(y)$ — гладкие.

1.19 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

$F : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n, F = (f_1, \dots, f_n), f_i \in C^1(E)$
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$
$(a, b) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ — решение. $det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}) \neq 0$.
Тогда $\exists U(a) \in \mathbb{R}^m, U(b) \in \mathbb{R}^n : \forall (x_1, \dots, x_m) \in U(a)$ решение системы от $(y_1, \dots, y_n)$ в $U(b)$ единственно.

1.20 Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, если $\exists$ область $E \subset \mathbb{R}^k$, $\Phi : E \to \mathbb{R}^m : \Phi(E) = M$, Φ — гомеоморфизм (непрерывное, обратимое, обратное непрерывно).
M — гладкое k-мерное многообразие класса C^r, если $\Phi \in C^r$.

1.21 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$
$\Phi : E \to \mathbb{R}^n$
$M_\Phi = x \in E : \Phi(x) = 0$
$x_0 \in M_\Phi$ — точка относительного локального максимума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x) \cap M_\Phi \ f(x) \le f(x_0)$.
Аналогчино: минимум, экстремум, строгий экстремум.

1.22 Формулировка достаточного условия относительного экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $\Phi : E \subset \mathbb{R}^n$, $f, \Phi \in C^1$.
$a \in E$ — подозрительная на экстремум точка: $\Phi(a) = 0$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n : G'(a) = f'(a) - \lambda\Phi'(a) = 0$.
Пусть $rank\ \Phi'(a) = k$ реализуется на последних k столбцах.
$h = (h_1, \dots, h_{m+n})$ — такой вектор, что $\Phi'(a)h = 0$. $h = (h_x, h_y)$, $h_y = \Psi(h_x)$ — линейно.
$G(x) = f(x) - \lambda\Phi(x)$. Квадратичная форма: $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \Psi(h_x)))$.

1. Q положительно определённая $\Rightarrow a$ — точка относительного локального минимума.

2. Q отрицательно определённая $\Rightarrow a$ — точка относительного локального максимума.

3. Q незнакоопределённая $\Rightarrow a$ — не экстремум.

1.23 Касательное пространство к k-мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

$M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное многообразие, $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация.
$x_0 \in M$, $u_0 = \Phi^{-1}(x_0)$.
Касательное пространство к M в точке x_0 — это множество $\{\Phi'(u_0)h : h \in \mathbb{R}^k\}$

1.24 Независимый набор функций

$f_1, \dots, f_n : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. $F = (f_1, \dots, f_n)$.
Функции $f_1, \dots, f_n$ независимы в окрестности $U(x_0) \subset E$, если $(y_0 = F(x_0))$:
$\exists V(y_0) : \forall G : V(y_0) \to \mathbb{R}$ — непрерывна, выполнение тождества $G(F(x)) \equiv 0$ при $x \in U(x_0)$ возможно только при $G \equiv 0$.

1.25 Кусочно-гладкий путь

Путь $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, такой что $\exists$ дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$: γ гладкий на каждом отрезке дробления.

1.26 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$E \subset \mathbb{R}$ — открытое. γ — кусочно-гладкий путь в E, V — векторное поле в E.
Интеграл V по γ:

$$I(V, \gamma) = \int_a^b V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t))d\gamma_i(t)$$

Обозначение: $\int_a^b V d\gamma$.

1.27 Потенциал, потенциальное векторное поле

E — область в $\mathbb{R}^m$. $V : E \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное векторное поле.
V потенциально в E, если $\exists f : E \to \mathbb{R} \in C^1(E) : \forall x \in E\ V(x) = grad\ f$.

1.28 Локально потенциальное векторное поле

E — область в $\mathbb{R}^m$. $V : E \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное векторное поле.
V — локально потенциальное в E, если $\forall x \in E\ \exists U(x)$: V потенциально в U.

1.29 Похожие пути

Пути $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to E$ (E — область), если у них есть общая «гусеница»:
$\exists$ шары $B_1, \ldots, B_n$, дробление $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b : \forall\ \gamma_i([t_{j-1}, t_j]) \subset B_j$.
Замечания:

1. Можно требовать, что радиусы $< \delta$.

2. Можно требовать, чтобы в шарах некоторое внкторное поле было потенциальным.

3. Любой путь похож на ломаную.

1.30 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

Интеграл локально-потенциального векторного поля V в E по произвольному пути γ — это его интеграл по похожему на него кусочно-гладкому пути.

1.31 Гомотопия путей свзанная и петельная

$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to E$ — пути.
$\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to E$ — непрерывно.
$\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$.
Γ — гомотопия.
Если $\forall s \in [0, 1]\ \Gamma(a, s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\Gamma(b, s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, то это связанная гомотопия.
Если $\forall s \in [0, 1]\ \Gamma(a, s) = \Gamma(b, s)$, то это петельная гомотопия.

1.32 Односвязная область

Область E односвязная, если $\forall \gamma$ — замкнутый путь в E $\exists$ петельная гоотопия γ в постоянный путь (точку).

1.33 Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

Семейство подмножеств $\mathbb{P}$ множества X — полукольцо, если:

1. $\emptyset \in \mathbb{P}$.

2. Если $A, B \in \mathbb{P}$, то $A \cap B \in \mathbb{P}$.

3. Если $A, B \in \mathbb{P}$, то $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, где $C_k \in \mathbb{P}$, дизъюнктны.

Семейство подмножеств $\mathbb{A}$ множества X — алгебра, если:

1. $\emptyset \in \mathbb{A}$.

2. Если $A \in \mathbb{A}$, то $X \setminus A \in \mathbb{A}$.

3. Если $A, B \in \mathbb{A}$, то $A \cup B \in \mathbb{A}$.

Семейство подмножеств $\mathbb{A}$ множества X — σ-алгебра, если:

1. $\emptyset \in \mathbb{A}$.
2. Если $A \in \mathbb{A}$, то $X \setminus A \in \mathbb{A}$.
3. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$, то $\bigcup A_k \in \mathbb{A}$.

1.34 Объем

1.34.1 Конечная аддитивность

$\mu : \mathbb{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{P}$ — полукольцо) — конечно аддитивна, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $+\infty$ и $-\infty$ не могут оба включаться в область значений μ.
3. Если $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{P}$, дизъюнктны, $\bigcup A_i \in \mathbb{P}$, то $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

1.34.2 Объем

$\mu : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{P}$ — полукольцо) — объём, если:

1. $\forall A\ \mu(a) \geq 0$.
2. μ конечно аддитивна.

1.35 Ячейка

$a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$ ($\forall k\ a_k < b_k$).
Ячейка — параллелепипед $[a, b) = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$.
$\emptyset$ — тоже ячейка.
Множество всех ячеек — $\mathbb{P}_n$

1.36 Классический объем в $\mathbb{R}^m$

$v : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}_+$. $v[a, b) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$, $v(\emptyset) = 0$.

1.37 Мера, пространство с мерой

$\mu : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{P}$ — полукольцо) — мера, если:

1. μ — объём.
2. Счётная аддитивность: $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{P}$, дизъюнктны, $\bigcup A_i \in \mathbb{P}$, тогда $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

Пространство с мерой — тройка $(X, \mathbb{A}, \mu)$: X — множество, $\mathbb{A}$ — σ-алгебра подмножеств X, μ — мера на $\mathbb{A}$.

1.38 Дискретная мера

$x_1, x_2, \dots \in X$, $h_1, h_2, \dots \in [0, +\infty]$.
$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} h_i$.

1.39 Формулировка теоремы о непрерывности сверху

$\mathbb{A}$ — алгебра подмножеств X, μ — конечный объём на $\mathbb{A}$. Тогда эквивалентно:

1. μ — мера.
2. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$, $\forall k\ A_k \supset A_{k+1}$, $A = \bigcap A_k \in \mathbb{A}$, то $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

1.40 Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

$\mathbb{P}_0$ — полукольцо подмножеств X, μ_0 — σ-конечная мера на $\mathbb{P}_0$.
Тогда $\exists$ σ-алгебра $\mathbb{A}$ и мера μ на $\mathbb{A}$, что:

1. $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{A}$ и μ — продолжение μ_0.
2. μ — полная мера.
3. μ — минимальная: если найдётся σ-алгебра $\mathbb{A}_1$ и мера μ_1 на ней, удовлетворяющие (1) и (2), то $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}_1$ и μ_1 — продолжение μ.
4. Если $\mathbb{P}$ — полукольцо, $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{A}$, $\overline{\mu}$ — мера на $\mathbb{P}$, являющаяся продолжением μ_0, то $\overline{\mu}$ – сужение μ.
5. $\forall A \in \mathbb{A}$ $\mu(A) = \inf_{(P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_0,\ A \subset \bigcup P_i)} \sum \mu(P_i)$.

1.41 Полная мера

Мера, заданная на полукольце $\mathbb{P}$, называется полной, если любое подмножество множества меры 0 также принадлежит $\mathbb{P}$.

1.42 Сигма-конечная мера

μ — мера на полукольце $\mathbb{P}$ над X. Если $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, где $X_k \in \mathbb{P}$ и $\mu(X_k) < +\infty$, то мера μ σ-конечная.

1.43 Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

$\mathbb{P}_n$ — полукольцо ячеек в $\mathbb{R}^n$, μ — классический объём.
Мера Лебега — это лебеговское продолжение меры μ из теоремы о лебеговском продолжении меры на σ-алгебру $\mathfrak{M}^n$.
Элементы $\mathfrak{M}^n$ — измеримые по Лебегу множества.

1.44 Борелевская сигма-алгебра

Борелевская σ-алгебра над метрическим пространством X — это минимальная по включению σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества X.

1.45 Формулировка теоремы о мерах, инвариантных относительно сдвигов

μ — мера в $\mathbb{R}^m$ на $\mathfrak{M}^m$.

1. $\forall A \in \mathfrak{M}^m, V \in \mathbb{R}^m$ $\mu(A) = \mu(A + V)$.
2. Если $A \in \mathfrak{M}^m$ ограничено, то $\mu(A) < +\infty$.

Тогда $\exists k \geq 0$, что $\mu = k\lambda_m$ (λ_m — мера Лебега).

1.46 Ступенчатая функция

Функция $f : x \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если $\exists$ конечное разбиение $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$, что f константна на каждом X_i.

1.47 Разбиение, допустимое для ступенчатеой функции

Разбиение $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ — допустимое для ступенчатой функции f, если f константна на каждом X_i.

1.48 Измеримая функция

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
Функция $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(E \in \mathbb{A})$ — измеримая на E, если для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in E : f(x) < a\}$ измеримо.

2 Теоремы

2.1 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

$a_n, b_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E, если:

1. Частичные суммы $\sum a_n(x)$ равномерно ограничены на E.
2. $\forall x$ $b_n(x)$ монотонно, $b_n(x)$ равномерно сходится к 0.

Доказательство:

1. Доказываем по критерию Коши: $\forall \epsilon > 0$ $\exists K : \forall M > N > K, \forall x$ $|\sum_{k=N}^{M} a_n(x) b_n(x)| < \epsilon$.
2. Преобразование Абеля: $\sum_{k=N}^{M} a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_K$.
3. $|A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_K| \le C_A(|b_M| + |b_N| + \sum_{k=N}^{M-1} |b_k - b_{k+1}|) \le C_A(|b_M| + 2|b_N|)$.
   Это $< \epsilon$ НСНМ.

2.2 Непрерывная дифференцируемость гамма функции

$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ — непрерывно дифференцируема.

Доказательство:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{k}) e^{-\frac{z}{k}}$$

$$-ln\Gamma(z) = lnz + \gamma z + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(ln(1 + \frac{z}{k}) - \frac{z}{k})}_{u_k(z)}$$

$$u_k'(z) = \frac{-z}{k(z+k)}$$

Ряд $\sum u_k'(z)$ равномерно сходится в окрестности любой точки, значит, $\sum u_k(z)$ непрерывно дифференцируем. Всё остальное в $ln\Gamma(z)$ тоже диифференцируемо.

2.3 Теорема о круге сходимости степенного ряда

$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ — степенной ряд.
Возможны три случая:

1. A сходится только в z_0.
2. A сходится на $\mathbb{C}$.
3. $\exists R \in (0; \infty)$: A сходится при $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$.

Доказательство:

1. Признак Коши для ряда $\sum b_n$: если $\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$, ряд сходится, если > 1, расходится.
2. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = (\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|})|z - z_0|$.
3. Дальше просто.

2.4 Теорема о непрерывности степенного ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд. $R > 0$ — радиус сходимости.

1. $\forall 0 < r < R$ ряд сходится равномерно в круге $B(z_0, r)$.
2. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ непрерывна на $B(z_0, R)$.

Доказательство:

1. (a) Признак Вейрштрасса. $z \in B(z_0, r)$. $|a_n(z-z_0)^n| \le |a_n| r^n$.
   (b) $\sum |a_n| r^n$ сходится, так как $\sum |a_n|(z-z_0)^n$ сходится при $z = z_0 + r$.
2. Непрерывность следует из равномерной сходимости.

2.5 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример.

$(A) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд. $R > 0$ — радиус сходимости.
$(A') : \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$.
Тогда:

1. Радиус сходимости A' равен R.
2. $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$.

Следствие:
$('A) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_n(z-z_0)^{n+1}$.
Тогда:

1. Радиус сходимости $'A$ равен R.
2. $\int_{z_0}^{z} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_n(z-z_0)^{n+1}$.

Доказательство:

1. $R' = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{(n+1)a_{n+1}}} = R$ (несложно).
2. Ряд из производных равномерно сходится, значит, исходный ряд дифференцируем и имеет такие производные.
3. Про интеграл изи.

2.6 Свойства экспоненты

1. $exp(0) = 1$
2. $exp \in C^{\infty}(\mathbb{C})$, $exp' = exp$
3. $exp(z_1 + z_2) = exp(z_1) \cdot exp(z_2)$
4. $exp(\overline{z}) = \overline{exp(z)}$
5. $\forall z \; exp(z) \neq 0$

Пусть $exp(ix) = Cosx + iSinx$, $exp(ix) = T$ $(x \in \mathbb{R})$.

6. $Cosx = \frac{exp(ix)+exp(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
7. $Sinx = \frac{exp(ix)-exp(-ix)}{2i} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

8. $T(x+y) = T(x) \cdot T(y)$

9. $Cos(x+y) = Cosx \cdot Cosy - Sinx \cdot Siny$

10. $Sin(x+y) = Sinx \cdot Cosy + Cosx \cdot Siny$

11. $|T(x)| = 1$

12. $T'(x) = iT(x)$

Доказательство:

1. Очевидно.

2. Взять и продифференцировать.

3. $exp(z_1 + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = exp(z_1) \cdot exp(z_2)$.

4. Очевидно.

5. Если $exp(z_0) = 0$, то $exp(0) = exp(-z+z) = exp(-z) \cdot 0 = 0$, а это не так.

6. Взять и посчитать.

7. Взять и посчитать.

8. Из пункта 3.

9. Взять и посчитать.

10. Взять и посчитать.

11. Взять и посчитать.

12. Взять и продифференцировать.

2.7 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ — сходится.
Тогда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ корректно задана на $(-1; 1)$ и $\lim_{x \to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Доказательство:

1. $\sum a_n x^n$ сходится при $x = 1$, значит, $R \geq 1$. Доказать: $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$.

2. $\sum a_n x^n$ равномерно сходится на $[0, 1]$, потому что $\sum a_n$ равномерно сходится относительно x, x^n монотонна и ограничена (прихнак Абеля).

2.8 Единственность разложения функции в ряд

Если функция f раскладывается в степенной ряд в $U(x_0)$, то разложение единственно.

Доказательство:
Коэффициенты однозначно определяются производными всех порядков f в точке x_0.

2.9 Разложение бинома в ряд Тейлора

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n x^n, |x| < 1$$

$$C_a^n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

Доказательство:

1. Рассмотрим ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n x^n$.
2. По правилу Даламбера, $R = \lim |\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \lim |\frac{n+1}{a-n}| = 1$.
3. Продифференцируем его: $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}x^n$.
4. Домножаем на $(1+x)$: $(1+x)f'(x) = a + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n-1)!})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} = af(x)$.
5. Пусть $g(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^a}$. $g'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^a - a(1+x)^{a-1}f(x)}{(1+x)^{2a}} = \frac{f'(x)(1+x) - af(x)}{(1+x)^{a+1}} = 0$.
6. Производная g равна нулю, поэтому $g \equiv const = g(0) = 1$. Поэтому $f(x) = (1+x)^a$.

2.10 Пример функции, у которой ряд Тейлора расходится при $x \neq 0$

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{1+t^2x}$$

Доказательство:

1. $\frac{1}{1+t^2x} = 1 - t^2x + (t^2x)^2 + \cdots + (-t^2x)^n + \frac{(-t^2x)^{n+1}}{1+t^2x}$. Доказательство: домножить всё на $1+t^2x$.
2. Домножим на e^{-x} и проинтегрируем по x.
   $f(t) = \int_0^{\infty} e^{-x}dx + \cdots + (-1)^n t^{2n} \int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx + (-1)^{n+1}t^{2n+2}\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}x^{n+1}}{1+t^2x}$.
3. Остаток тут $o(t^{2n+1})$, поэтому это ряд Тейлора. Члены ряда тут последовательные факториалы, поэтому он расходится.

2.11 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

$f \in C^{\infty}((x_0 - h; x_0 + h))$
f разложима в ряд Тейлора в окрестности x_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists \delta, c, A > 0 : \forall n, |x - x_0| < \delta \ |f^{(n)}(x)| \leq cA^n n!$$

Доказательство:

1. $\Leftarrow$
   (a) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.
   (b) Остаток должен $\to 0$. $|\frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}| \leq c(A|x-x_0|)^{n+1} \to 0$ (в некоторой окрестности x_0).
2. $\Rightarrow$

(a) Рассмотрим точку $x_1 \neq x_0$, $f(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k$.

Ряд сходится, поэтому слагаемые ограничени по модулю: $\forall k \ |\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k| \leq c$.

(b) $b = \frac{1}{|x_1 - x_0|}$. Тогда $|f^{(k)}(x_0)| \leq ck!b^k$.

(c) Пусть $x \in B(x_0, \frac{1}{2b})$. $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-n)!}(x - x_0)^{k-n}$.

$$|f^{(n)}(x)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(x_0)|}{(k-n)!}|x - x_0|^{k-n} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{ck!b^k}{(k-n)!}|x - x_0|^{k-n} = cb^n \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)(b|x - x_0|)^{k-n} =$$

$$= cb^n \frac{n!}{(1 - b|x - x_0|)^{n+1}} \leq \frac{cb^n n!}{(\frac{1}{2})^{n+1}} = 2c(2b)^n n!$$

2.12 Теорема Таубера

$\lim_{x \to 1-0} \sum a_n x^n = A$, $a_n = o(\frac{1}{n})$.
Тогда $\sum a_n = A$.

<u>Доказательство:</u>

1. $\delta_n = max_{k \geq n}|k \cdot a_k|$ (достигается, т.к. $\to 0$). $\delta_n \to 0$.
2. $\sum_{n=1}^{N} a_n - A = (\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + (\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - A)$.
3. $|\sum_{n=1}^{N} a_n - A| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n||1 - x^n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|na_n|x^n}{n} + |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - A|$ (3).
4. Неравенство Бернулли: $1 - x^n \leq n(1 - x)$.

   (3) $\leq N\delta_1(1 - x) + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - A|$ (4).
5. $\epsilon > 0$. $N \to \infty$. x такое, что $(1 - x)N = \epsilon$.

   (a) $\delta_{N+1} < \epsilon^2$ НСНМ.

   (b) $|\sum a_n x^n - A| < \epsilon$ НСНМ.

   Тогда (4) $\leq \epsilon\delta_1 + \frac{\epsilon^2 N}{(N+1)\epsilon} + \epsilon \leq \epsilon(\delta_1 + 2)$.

2.13 Теорема Коши о перманентности метода средних арифметических

Если ряд сходится к S, то его сумма по методу средних арифметических равна S.

<u>Доказательство:</u>

1. $\forall \epsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |S_n - S| < \epsilon$.
2. $|\sigma_n - S| = |\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k - S| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |S_k - S|$ (2).
3. При $n > N$: (2) $< \frac{\sum_{k=0}^{N} |S_k - S|}{n+1} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{\epsilon}{n+1}$.

   НСНМ это $< 2\epsilon$.

2.14 Преобразование Абеля степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ — частчиные суммы, $|x| < min(1, R)$

<u>Доказательство:</u>

1. Рассмотрим произведение $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot \frac{1}{1-x}$.
2. При $|x| < min(1, R)$, $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot \frac{1}{1-x} = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$.
3. Поэтому $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$.

2.15 Теорема о связи суммируемости по Чезаро и по Абелю–Пуассону

Если сумма ряда по методу средних арифметических равна A, то и его сумма по методу Абеля равна A.

<u>Доказательство:</u>

1. $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A_k$. $\sigma_n \to A$.
2. $\sum a_k$ сходится по Чезаро, поэтому $a_k = o(k)$:
   (a) $\lim \frac{a_n}{n} = \lim \frac{A_n - A_{n-1}}{n} = \lim \frac{((n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}) - (n\sigma_{n-1} - (n-1)\sigma_{n-2})}{n} = \lim \frac{(n+1)A - 2nA + (n-1)A}{n} = 0$.
3. $f(x) = \sum a_k x^k$ имеет радиус сходимости $R \geq 1$:
   (a) $\overline{\lim}\sqrt[n]{o(n)} \leq 1$.
   (b) $R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{o(n)}} \geq 1$.
4. $\sum a_k x^k = (1-x)\sum A_k x^k = (1-x)^2 \sum (k+1)\sigma_k x^k$.
5. $(1-x)^2 \sum (k+1) x^k = 1$, значит, $(1-x)^2 \sum (k+1) A x^k = A$ ($\sigma_k \to A$).
6. $f(x) - A = (1-x)^2 \sum (k+1)(\sigma_k - A)x^k = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{N} (k+1)(\sigma_k - A)x^k + (1-x)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - A)x^k$
   (a) $N : |\sigma_k - A| < \epsilon$
   $|(1-x)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - A)x^k| \leq \epsilon$
   (b) При $1 > x > x_0$, $|(1-x)^2 \sum_{k=0}^{N} (k+1)(\sigma_k - A)x^k| < \epsilon$
   (c) Таким образом, при $x \to 1-0$ $f(x) \to A$.

2.16 Независимость частных производных от порядка дифференцирования

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(E)$
$a \in E$
Тогда $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$

Общий вид:
$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^k(E)$
$a \in E$
$i_1, \ldots, i_k$ — набор индексов, $i_r \in \{1, \ldots, m\}$
$j_1, \ldots, j_k$ — его перестановка
Тогда $\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} f(a) = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} f(a)$

<u>Доказательство:</u>

1. Пусть $\Delta^2 f(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$.

2. $\alpha(h) = \Delta^2 f(h,k)$ при фиксированном k.

   $\alpha(0) = 0$. $\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) = \alpha'(\overline{h})h$ (теорема Лагранжа по h)

   $= (f'_x(x_0+\overline{h}, y_0+k) - f'_x(x_0+\overline{h}, y_0))h = f''_{xy}(x_0+\overline{h}, y_0+\overline{k})hk$ (теорема Лагранжа по k)

3. $\beta(k) = \Delta^2 f(h,k)$ при фиксированном h. Аналогично:

   $\beta(k) = f''_{yx}(x_0+\overline{\overline{h}}, y_0+\overline{\overline{k}})hk$

4. При фиксированных h и k: $f''_{xy}(x_0+\overline{h}, y_0+\overline{k})hk = f''_{yx}(x_0+\overline{\overline{h}}, y_0+\overline{\overline{k}})hk$

   При $(h,k) \to 0$, по непрерывности $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

5. Про высшие порядки — простое следствие.

2.17 Полиномиальная формула

$$a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}_0$$
$$(a_1 + \dots + a_m)^r = \sum_{|j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$$

Доказательство: Индукция по r. Взять и посчитать.

2.18 Лемма о дифференцировании «сдвига»

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, E открыто, $f \in C^r(E)$, $h \in \mathbb{R}^m$, $a \in E$
$\forall t \in (-\epsilon; \epsilon)\ a + th \in E$, $\phi(t) = f(a+th)$
Тогда $\forall k \le r, k \in \mathbb{N}\ \phi^{(k)}(0) = \sum_{|i|=k} \frac{k!}{i!} h^i \frac{\partial^k f}{\partial x^i}(a)$

Доказательство: Индукция по k.

1. База: $k = 0$. $\phi(0) = f(a)$.

2. Шаг.

$$(\sum_{|i|=k} \frac{k!}{i!} h^i \frac{\partial^k f}{\partial x^i}(a+th))'_t = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|i|=k} \frac{k!}{i!} h^i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i \partial x_j}(a+th) h_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{|i|=k+1, i_j \ge 1} \frac{k! i_j}{i!} h^i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i}(a+th) = \sum_{|i|=k+1} \frac{(k+1)!}{i!} h^i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i}(a+th)$$

2.19 Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

$E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^{r+1}(E)$, $a \in E$, $x \in B(a) \subset E$
Тогда $\exists \theta \in (0; 1)$:
Лагранж:

$$f(x) = \sum_{|k| \le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a + \theta(x-a))}{k!}(x-a)^k$$

Пеано:

$$f(x) = \sum_{|k| \le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(|x-a|^r)$$

Доказательство:

$$x = a + h,\ \phi(t) = f(a + th)$$

$$\phi(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\phi_{(k)}(0)}{k!} + \frac{\phi^{r+1}(\theta)}{(r+1)!}$$

Применяем лемму о дифференцировании сдвига:

$$f(a+h) = \sum_{s=0}^{r} \sum_{|k|=s} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!} h^k$$

Остаток — $o(|h|^r)$.

2.20 Теорема о пространстве линейных отображений

1. В $\mathscr{L}_{m,n}$ $||L||$ — это норма.
2. $L \in \mathscr{L}_{m,n}$, $M \in \mathscr{L}_{n,p}$. Тогда $||ML|| \leq ||L|| \cdot ||M||$.

Доказательство:

1. По определению нормы
   (a) $||L|| \geq 0$, $||L|| = 0 \Leftrightarrow L = 0$ — очевидно.
   (b) $||\lambda L|| = |\lambda| \cdot ||L||$ — очевидно.
   (c) $|(L_1 + L_2)x| \leq |L_1 x| + |L_2 x| \leq (||L_1|| + ||L_2||)|x|$
   $\sup_{|x|=1} |(L_1 + L_2)x| \leq ||L_1|| + ||L_2||$
2. $|MLx| \leq ||M|| \cdot ||L|| \cdot |x|$
   $\sup_{|x|=1} |MLx| \leq ||M|| \cdot ||L||$

2.21 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

X, Y — нормированные пространства. $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. A ограничен ($||A||$ кончена)
2. A непрерывен в 0
3. A непрерывен в X
4. A равномерно непрерывен в X

Доказательство:

1. (4) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (2) — очевидно.
2. (2) $\Rightarrow$ (1). A непрерывен в 0: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta\ |Ax| < \epsilon$.
   $\epsilon = 1$. $\exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta\ |Ax| < 1$.
   Домножим x на $\frac{2}{\delta}$. $\forall x : |x| < 2\ |Ax| \leq \frac{2}{\delta}$. Норма ограничена.
3. $1 \Rightarrow 4$. Определение равномерной непрерывности:
   $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta (= \frac{\epsilon}{||A||}) > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta\ |Ax_1 - Ax_2| < \epsilon$.
   Так и есть.

2.22 Теорема Лагранжа для отображений

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, E открыто, F дифференцируема на E.
$[a; b] \subset E$ ($[a; b] = \{a + (b - a)t | t \in [0; 1]\}$). Тогда $\exists c \in [a; b] : |F(b) - F(a)| \leq ||F'(c)|| \cdot |b - a|$.

Доказательство:
$\phi(t) = F(a + (b - a)t)$, $t \in [0, 1]$. $\phi'(t) = F'(a + (b - a)t) \cdot (b - a)$.
Теорема Лагранжа: $\exists t \in [0, 1] : \phi(1) - \phi(0) = \phi'(t)$.
$\exists c \in [a, b] : F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a)$.
$|F(b) - F(a)| \leq ||F'(c)|| \cdot |b - a|$.

2.23 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

$L \in \Omega_m$ (обратимый линейный оператор $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$).
$M \in \mathscr{L}_{m,m}$, $||L - M|| < \frac{1}{||L^{-1}||}$
Тогда:

1. M обратим
2. $||M^{-1}|| \leq \frac{1}{||L^{-1}||^{-1} - ||L-M||}$
3. $||L^{-1} - M^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}|| \cdot ||L-M||}{||L^{-1}||^{-1} - ||L-M||}$

Доказательство:

1. (a) $A \in \mathscr{L}_{m,m}$. Если $\exists c > 0 : \forall x \ |Ax| \geq c|x|$, то A обратим, и $||A^{-1}|| \leq \frac{1}{c}$.
      i. Обратим, потому что $Ker\ A = \{0\}$.
      ii. Ограничение на норму несложно выводится.
   (b) $|L^{-1}Lx| = |x| \Rightarrow ||L^{-1}|| \cdot |Lx| \geq |x| \Rightarrow |Lx| \geq ||L^{-1}||^{-1}|x|$.
   (c) $Mx = Lx + (M - L)x$.
   $|Mx| \geq |Lx| - |(M-L)x| \geq |Lx| - ||M-L|| \cdot |x| \geq ||L^{-1}||^{-1} \cdot |x| - ||M-L|| \cdot |x| = (||L^{-1}||^{-1} - ||M-L||)|x| = c|x|$, $c > 0$.
   Значит, M обратим.
2. $|Mx| \geq (||L^{-1}||^{-1} - ||M - L||) \cdot |x|$.
   $||M^{-1}|| \leq (||L^{-1}||^{-1} - ||M - L||)^{-1}$.
3. $||L^{-1} - M^{-1}|| = ||L^{-1}(M - L)M^{-1}|| \leq ||L^{-1}|| \cdot ||M - L|| \cdot ||M^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}|| \cdot ||M-L||}{||L^{-1}||^{-1} - ||M-L||}$.

2.24 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $F' : E \to \mathscr{L}_{m,l}$
Следующие утверждения эквивалентны:

1. $F \in C^1(E)$ (все частные производные непрерывны).
2. F' непрерывно.

Доказательство:

1. $(1) \Rightarrow (2)$
   (a) Фиксируем $a \in E$. $||F'(a) - F'(b)|| \leq \sqrt{\sum(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b))^2}$
   (b) Доказать: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall b : |a - b| < \delta\ ||F'(a) - F'(b)|| < \epsilon$.
   $\delta : \forall b \in B(a, \delta), i, j\ |\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{ml}}$ — существует по непрерывности частных производных.

2. (2) $\Rightarrow$ (1)
$|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b)| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{l}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b))^2} = |(F'(a) - F'(b)) \cdot (0 \ldots 1 \ldots 0)| \leq ||F'(a) - F'(b)||$

2.25 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

1. Q — положительно определённая квадратичная форма в $\mathbb{R}^m$.
   Тогда $\exists c_Q > 0 : \forall h \ |Qh| \geq c_Q|h|^2$

2. $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — норма.
   Тогда $\exists c_1, c_2 > 0 : \forall x \ c_1|x| \leq p(x) \leq c_2|x|$

Доказательство:

1. $S(0,1)$ — единичная сфера, компакт. Q достигает минимума на S. c_Q — этот минимум.

2. (a) Докажем непрерывность $p(x)$ (e^k — базисные векторы):
   $p(x-y) = p(\sum_{k=1}^{m}(x_k - y_k)e^k) \leq \sum_{k=1}^{m}|x_k - y_k|p(e^k) \leq \sqrt{(\sum|x_k - y_k|^2)(\sum p_k^2)} = M|x-y|$.
   Применяется неравенство Коши-Буняковского.

   (b) $p(x)$ непрерывна: $c_1 = min_{x \in S(0,1)}p(x)$, $c_2 = max_{x \in S(0,1)}p(x)$.

2.26 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

2.26.1 Теорема Ферма

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x_o \in Int(E)$ — точка экстремума.
f диффференцируема в x_0. Тогда $\forall l \in \mathbb{R}^m, |l| = 1 \ \frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = 0$

Доказательство:
$\phi(t) = f(x_0 + tl)$. $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \phi'(0)$.
$\phi'(0)$, так как это экстремум.

2.26.2 Необходимое условие экстремума

В условиях теоремы Ферма: все частные производные f в x_0 равны 0.

Доказательство:
Из теоремы Ферма: частные производные — это производные по направлениям координатных осей.

2.26.3 Теорема Ролля

$f : K \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. K — компакт, f непрерывна на K, дивверенцируема на $Int(K)$.
f постоянна на границе K. Тогда $\exists x_0 \in Int(K) : grad \ f(x_0) = 0$.

Доказательство:
Функция достинает минимума и максимума на компакте. В этих точках $grad = 0$.

2.27 Достаточное условие экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(E)$.
$x_0 \in Int(E)$. $grad \ f(x_0) = 0$. $Q(h) = d^2f(x_0)(h)$.
Тогда:

1. Если Q положительно определённая, то x_0 — локальный минимум.

2. Если Q отрицательно определённая, то x_0 — локальный максимум.

3. Если Q незнакоопределённая, то x_0 — не экстремум.

Доказательство:
$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0, h) + o(|h|^2) = \frac{1}{2}Q(h) + o(|h|^2)$.

1. При $h \neq 0$ $Q(h) > 0$. $Q(h) \geq c_Q|h|^2$. $\frac{1}{2}c_Q|h|^2 + o(|h|^2) > 0$ в некоторой окрестности.

2. Аналогично.

3. $h_1, h_2 : Q(h_1) > 0, Q(h_2) < 0$. $k \to 0$. $Q(kh_1) = k^2Q(h_1)$. $\frac{1}{2}k^2Q(h_1) + o(|h|^2) > 0$ в некоторой окрестности.

   Аналогично с h_2.

2.28 Лемма о «почти локальной инъективности»

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемо в $x_0 \in E$.
E — открытое.
$det\ F'(x_0) \neq 0$
Тогда $\exists c, \delta > 0 : \forall h, |h| < \delta\ |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c|h|$.

Доказательство:
$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + o(h)| \geq |F'(x_0)h| - |o(h)| \geq c|h| + o(|h|) > \frac{c}{2}$ (в некоторой окрестности).

2.29 Теорема о сохранении области

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, E открыто.
F дифференцируемо в E, $\forall x \in E\ det\ F'(x) \neq 0$
Тогда $F(E)$ открыто.

Доказательство:

1. $x_0 \in E$, $y_0 = F(x_0)$. Проверим, что y_0 — внутренняя точка $F(E)$.

2. По лемме: $\exists c, \delta > 0 : \forall h : |h| \leq \delta,\ |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c|h|$.

   $x = x_0 + h$. При $x \in S(x_0, \delta)$ $F(x) \neq F(x_0)$.

3. $r = \frac{1}{2}dist(y_0, F(S(x_0, \delta)))$. Проверить: $B(y_0, r) \subset F(E)$.

4. Фиксируем $y \in B(y_0, r)$. $g(x) = |F(x) - y|^2$, $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$. Минимум g достигается в этом шаре:

   При $x \in S(x_0, \delta)$ $g(x) \geq r^2$. При $x = x_0$ $g(x_0) = |y_0 - y|^2 < r^2$.

5. $g(x) = (f_1(x) - y_1)^2 + \dots + (f_m(x) - y_m)^2$. Пусть в точке x достигается минимум, там производные равны 0:
   $$\begin{cases} 0 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = 2((f_1(x) - y_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + (f_m(x) - y_m)\frac{\partial f_m}{\partial x_1}) \\ \vdots \\ 0 = \frac{\partial g}{\partial x_m} = 2((f_1(x) - y_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \dots + (f_m(x) - y_m)\frac{\partial f_m}{\partial x_m}) \end{cases}$$
   Система от переменных $(f_i(x) - y_i)$. Матрица невырождена (это $F'(x)$). Значит, решение только при $f_i(x) - y_i = 0$ при всех i.

2.30 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

$F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $l < m$, E открыто, $F \in C^1(E)$.
$\forall x \; rank \; F'(x) = l$.
Тогда $F(E)$ открыто.

Доказательство:

1. $x_0 \in E$, $y_0 = F(x_0)$. $rank \; F'(x_0) = l$. Пусть он реализуется на первых l столбцах.
2. $det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1 \ldots l} \neq 0$ в $U(x_0)$.
3. Пусть $\widetilde{F}(x) = (f_1, \ldots, f_l, x_{l+1}, \ldots, x_m)$ $(E \to \mathbb{R}^m)$.
   $det \; \widetilde{F} = det \; F \neq 0$. $\widetilde{F}(U(x_0))$ открыто в $\mathbb{R}^m$, а $F(U(x_0))$ — проекция на $\mathbb{R}^l$.

2.31 Теорема о диффеоморфизме

$T \in C^r(E \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ $(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$.
T обратимо, невырождено. Тогда:

1. $T^{-1} \in C^r$
2. $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$ $(T(x_0) = y_0)$

Доказательство:
Индукция по r.

1. База: $r = 1$.
   (a) $S = T^{-1}$. S непрерывно по теореме о сохранении области (топологическое определение непрерывности).
   (b) $A = T'(x_0)$. По лемме, $\exists c, \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \; |T(x) - T(x_0)| \geq c|x - x_0|$.
   $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)|x - x_0|$ $(lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0)$.
   (c) $y - y_0 = A(S(y) - S(y_0)) + \alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|$.
   $S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|$
   (d) При $S(y) - S(y_0) < \delta$: $A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)| \leq ||A^{-1}|| \cdot |\alpha(S(y))| \cdot \frac{1}{c}|y - y_0| = o(|y - y_0|)$.
   (e) Значит, $S'(y_0) = A^{-1}$. Гладкость: S' непрерывна, так как $S'(y) = T'(S(y))^{-1}$.
2. (Кохась сказал, что это не нужно) Шаг: $S'(y) = T'(S(y))^{-1}$. $S \in C^{r-1}$ по индукционному предположению. Если $T \in C^r$, то $T' \in C^{r-1}$, $T'^{-1} \in C^{r-1}$, $S \in C^r$.

2.32 Теорема о неявном отображении

$F : E \in \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, E открыто, $F \in C^r$.
$(a, b) \in E$ $(a \in \mathbb{R}^m, \; b \in \mathbb{R}^n)$, $F(a, b) = 0$, $det \; F'_b(a, b) \neq 0$.
Тогда

$$\exists U(a) \subset \mathbb{R}^m, V(b) \subset \mathbb{R}^n : \exists! \phi : U \to V \in C^r : \forall x \in U \; F(x, \phi(x)) = 0$$

При этом

$$\phi' = -(F'_y(x, \phi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \phi(x))$$

Доказательство:

1. $\Phi : E \to \mathbb{R}^{m+n}$. $\Phi(x,y) = (x, F(x,y))$.

   $\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$. $det\ \Phi = det\ F'_y$. $det\ \Phi'(a,b) \neq 0$

2. По теореме о локальной обратимости, $\exists U(a,b)(= P(a) \times Q(b)) : \Phi : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ — диффеоморфизм. $V = \Phi(U)$ — открытое.

3. $\Psi : V \to U = \Phi^{-1}$. $\Phi(x,y) = (x, F(x,y))$. $\Psi(u,v) = (u, H(u,v))$ $(H : V \to Q)$.

4. $\phi(x) = H(x, 0_n)$. $F(x, \phi(x)) = F(x, H(x, 0_n))$. $\Phi(x, H(x, 0_n)) = (x, 0) \Rightarrow F(x, \phi(x)) = 0$.

5. Единственность. $(x,y) \in U$. $F(x,y) = 0$. $(x,y) = \Psi(\Phi(x,y)) = \Psi(x, F(x,y)) = \Psi(x, 0) = (x, \phi(x))$.

6. Формула. $F(x, \phi(x)) = 0$.

   $F'_x + F'_y \phi'(x) = 0$.

   $\phi' = -(F'_y)^{-1} F'_x$.

2.33 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

$M \in \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $1 \leq k \leq m$.
$\forall p \in M$ эквивалентно:

1. $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$: $M \cap U(p)$ — простое k-мерное C^rгладкое многообразие.

2. $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m, f_1, \ldots, f_{m-k} : U \to \mathbb{R} \in C^r : \forall x\ x \in U(p) \cap M \Leftrightarrow \forall i\ f_i(x) = 0$

Доказательство:

1. $(1) \Rightarrow (2)$

   (a) Параметризация: $\Phi : E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^r$, $\Phi(t^0) = p$, $rank\ \Phi'(t) = k$ $(t \in E)$.

   (b) Пусть $det(\frac{\partial \Phi_j}{\partial t_j})_{i,j=1\ldots k} \neq 0$ при $t = t^0$.
   $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекция $(L(x,y) = x)$. $L \circ \Phi(t)$ — невырожденное.

   (c) $\exists W(t_0)$ такое, что $L \circ \Phi : W(t_0) \to \mathbb{R}^k$ — обратимо.
   $\Psi : V \to W = (L \circ \Phi)^{-1}$. $V = (L \circ \Phi)(W)$.

   (d) $\Phi : W \to M$ — гомеоморфизм. $\Phi(W)$ — открыто в M. Тогда $\exists U \subset (V \times \mathbb{R}^{m-k})$ — открытое, $U \cap M = \Phi(W)$.

   (e) $L : \Phi(W) \to V$ — биекция. Поэтому $\exists H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$, $\forall x \in V$ $(x, H(x)) \in M$. $(x, H(x)) = \Phi(\Psi(x)) \in C^r$.

   (f) Построим $f_1, \ldots, f_{m-k}$:
   $f_i(x_1, \ldots, x_m) = h_i(x_1, \ldots, x_k) - x_{k+i}$.

   (g) $rankF' = k$, потому что $F' = (H' \quad -E)$.

2. $(2) \Rightarrow (1)$

   Это просто теорема о неявном отображении.

2.34 Следствие о двух параметризациях

$M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное C^r — гладкое многообразие.
$p \in M$, $U(p)$ — окрестность p в $\mathbb{R}^m$.
$\Phi_1 : E_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M$, $\Phi_2 : E_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M$ — две C^r — параметризации M.
Тогда $\exists \Psi : E_1 \to E_2$ — диффеоморфизм, $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

Доказательство:

1. $\Psi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ — обратимое отображение. Осталось доказать дифференцируемость и невырожденность.

2. Докажем это в точке $t_2 \in E_2$. Как и в доказательстве теоремы о задании гладкого многообразия системой уравнений, $\exists W_2(t_2)$ — окрестность t_2, L — проекция $\Phi_2(W_2)$ на $V \subset \mathbb{R}^k$.

3. $W_1 = \Psi^{-1}(W_2)$ — окрестность $t_1 = \Psi^{-1}(t_2)$. $(L \circ \Phi_i) : E_i \to V$ — непрерывние биекции.

4. $\Psi = \underbrace{(L \circ \Phi_2)^{-1}}_{\text{диффеоморфизм}} \circ \underbrace{(L \circ \Phi_1)}_{\text{дифференцируемо}}$.

5. Ψ дифференцируемо, докажем невырожденность. $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$. $\Phi_1' = \Phi_2' \Psi'$. $rank\ \Phi_1' = rank\ \Phi_2' = k$, поэтому и $rank\ \Psi' = k$.

2.35 Необходимое условие относительного локального экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $f, \Phi \in C^1$.
$a \in E, \Phi(a) = 0$ — точка относительного локального экстремума f.
$rank\ \Phi'(a) = n$.
Тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n : f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0$

Доказательство:

1. $rank\ \Phi'(a) = n$ — пусть реализуется на последних n столбцах.

2. $a = (x, y)$. $\exists P(x) \subset \mathbb{R}^m, Q(y) \subset \mathbb{R}^n, \phi : P \to Q$: $\Phi(x, \phi(x)) = 0$ — параметризация многообразия.

3. $g : P \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, \phi(x))$.

4. $(x, \phi(x)) = a$. Тогда, поскольку это экстремум, $g'(x) = 0$.

   $g'(x) = f(x, \phi(x))'_x = f'_x + f'_y \phi' = 0$

5. $\Phi(x, \phi(x)) = 0$

   $\Phi'_x + \Phi'_y \phi' = 0$. Возьмём $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

   $f'_x - \lambda \Phi'_x + (f'_y - \lambda \Phi'_y)\phi' = 0$

6. Подберём такое λ, что второе слагаемое равно 0 (это можно сделать, так как Φ'_y невырожденное).

   $f'_x - \lambda \Phi'_x = 0$, всё получается.

2.36 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

$A \in \mathscr{L}_{m,n}$. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные числа $A^T A$.
Тогда $||A|| = max\sqrt{\lambda_i}$.

Доказательство:

1. $|Ax|^2 = \sum_{k=1}^n (\sum_{i=1}^m a_{ki} x_i)^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ki} a_{kj} x_i x_j = \sum_{i=1}^m (\sum_{k=1}^m a_{ki} (\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j)) x_i = \langle A^T A x, x \rangle$.

2. $||A|| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x|=1} \sqrt{\langle A^T A x, x \rangle}$.

3. $B_{[n \times n]} = A^T A$ — симметричная. Все собственные числа вещественны.

4. $\sup_{|x|=1} \langle Bx, x \rangle$. Метод множителей Лагранжа:

   $G(x) = \langle Bx, x \rangle - \lambda(x^2 - 1) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} x_i x_k - \lambda(x^2 - 1)$. $\lambda \in \mathbb{R}$. $G'(x) = 0$.

$$\begin{cases} 2(\sum_{i=1}^n b_{1i}x_i - \lambda x_1) = 0 \\ \vdots \\ 2(\sum_{i=1}^n b_{ni}x_i - \lambda x_n) = 0 \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Bx - \lambda x = 0 \\ x \in S(0,1) \end{cases}$$

5. Таким образом, максимум может достигаться только если x — собственный вектор, максимум равен собственному числу.

6. $||A|| = \sqrt{\langle A^T Ax, x\rangle} = max\sqrt{\lambda_i}$.

2.37 Лемма о корректности определения касательного пространства

M — k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$, $p \in M$. Касательное пространство к M в точке p не зависит от выбора параметризации.

Доказательство:
Пусть Φ_1, Φ_2 — параметризации. По теореме о двух параметризациях, $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$.
$\Phi_1(t_1) = \Phi_2(t_2) = p$. $\Phi_1' = \Phi_2'\Psi'$.
$\Phi_1'(\mathbb{R}^k) = (\Phi_2'\Psi')(\mathbb{R}^k) = \Phi_2'(\mathbb{R}^k)$.
Такио образом, касательные пространства, порождённые двумя параметризациями, совпадают.

2.38 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

M — k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$, $p \in M$, $v \in \mathbb{R}^m$.
$v \in T_p(M)$ тогда и только тогда, когда $\exists$ путь $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to M$ такой, что $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = v$.

Доказательство:
$\Phi : E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация. $\Phi(t_0) = p$.

1. $\Leftarrow$
   (a) Пусть $\phi(t) = \Phi^{-1}(\gamma(t))$ — соответствующий путь в E.
   (b) Путь гладкий, так как, в терминах доказательства теоремы о задании многообзация системой уравнений, $\Phi^{-1} = \Psi \circ L$ — гладкое отображение.
   (c) $\gamma'(t) = \Phi(\phi(t))' = \Phi'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$.
   $\gamma'(0) \in T_p(M)$.
2. $\Rightarrow$
   (a) $v \in T_p(M) \Rightarrow \exists w \in \mathbb{R}^k : \Phi'(t_0)w = v$.
   (b) Рассмотрим путь $\gamma(t) = \Phi(t_0 + wt)$.
   $\gamma'(0) = \Phi'(t_0)w$, что и требовалось.

2.39 Теорема о функциональной зависимости

$f_1, \dots, f_n : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \in C^1$, $F = (f_1, \dots, f_n)$.
$rank\ F'(x) \le k$ при $x \in E$, $rank\ F'(x_0) = k$, реализуется на $det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j=1\dots k}$.
$y_0 = F(x_0)$.
Тогда $\exists U(x_0), V(y_0), g_{k+1}, \dots, g_n : V \to \mathbb{R}$ такие, что $\forall i \in \{k+1, \dots, n\}, x \in U(x_0)\ f_i(x) = g_i(f_1(x), \dots, f_k(x))$.
Доказательство:

1. Обозначение: $x = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = (\overline{x}, \overline{\overline{x}})$.

2. $\Phi : E \to \mathbb{R}^m$. $\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_m)$.

   $det\ \Phi'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists U(x_0)$: Φ на $U(x_0)$ — диффеоморфизм (теорема о локальной обратимости).

3. $\widetilde{F} = F \circ \Phi^{-1}$. $\widetilde{F}(w) = (\overline{w}, \Theta(w))$.

   $rank\ \widetilde{F}' = rank\ (F'(\Phi^{-1})') = rank\ F' \leq k$ (потому что Φ^{-1} невырождено).

4. $w_0 = \Phi(x_0)$. $\widetilde{F}'(w_0) = \begin{pmatrix} E_{[k \times k]} & 0 \\ \Theta'_{\overline{w}}(w_0) & \Theta'_{\overline{\overline{w}}}(w_0) \end{pmatrix}$.

5. Ранг $\widetilde{F}'(w_0)$ не больше k, и он достигается на $E_{[k \times k]}$. Значит, $\Theta'_{\overline{\overline{w}}}(w_0) = 0$, и Θ — функция только от $\overline{w}$. $\widetilde{F}(w) = (\overline{w}, \Theta(\overline{w}))$ — тоже функция только от $\overline{w}$.

6. $F = \overline{F} \circ \Phi$. $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), \Theta(f_1(x), \dots, f_k(x)))$. Тогда $g_{k+i} = \Theta_i$.

2.40 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

V — векторное поле на E, $\gamma : [a, b] \to E$ — путь.

1. Линейность по V.

2. Аддитивность при дроблении промежутка.

3. $\phi : [p, q] \to [a, b]$, $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$, $\phi(p) = a$, $\phi(q) = b$. Тогда интегралы по γ и γ_1 равны.

4. Интеграл по обратному пути равен минус интегралу по прямому.

5. $|I(V, \gamma)| \leq max_{t \in [a,b]} |V(\gamma(t))| \cdot len(\gamma)$.

Доказательство:

1. Очевидно.

2. Очевидно.

3. $\int_p^q \langle V(\gamma(\phi(t))), \gamma(\phi(t))' \rangle dt = \int_p^q \langle V(\gamma(\phi(t))), \gamma'(\psi(t)) \rangle \psi'(t) dt = \int_a^b \langle V(\gamma(t_1), \gamma'(t_1)) \rangle dt_1$.

4. $\int_a^b \langle V(\gamma(a + b - t)), \gamma(a + b - t)' \rangle dt = \int_a^b \langle V(\gamma(a + b - t), \gamma'(a + b - t) \rangle \cdot (-1) dt = -\int_a^b \langle V(\gamma(t_1), \gamma'(t_1)) \rangle dt_1$

5. $|\int_a^b \langle V, \gamma' \rangle dt| \leq \int_a^b |\langle V, \gamma' \rangle| dt \leq \int_a^b |V| \cdot |\gamma'| dt \leq max_{t \in [a,b]} |V(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'| dt = max_{t \in [a,b]} |V(\gamma(t))| \cdot len(\gamma)$.

2.41 Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

$V : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — потенциальное воекторное поле. f — потенциал.
$\gamma : [a, b] \to E$ — кусочно-гладкий путь. Тогда $I(V, \gamma) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Доказательство:
Пусть γ гладкий (иначе — по кусочкам).

$$\int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m f_i'(\gamma(t)) \gamma_i'(t) dt = \int_a^b f_i(\gamma(t))_t' dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

2.42 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

$V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Эквивалентно:

1. V — потенциальное.
2. $\forall a, b \in E$ интеграл по пути из a в b не зависит от пути.
3. Интеграл по любой кусочно-гладкой петле равен 0.

Доказательство:

1. (1) $\Rightarrow$ (2): по обобщённой формуле Ньютона-Лейбница.
2. (2) $\Rightarrow$ (3): интеграл по любой петле из точки a равен интегралу по постоянному пути в точке a, а он равен 0.
3. (3) $\Rightarrow$ (2):
   (a) $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to E$, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.
   (b) Рассмотрим петлю: сначала γ_1, потом обратный к γ_2.
   $I(V, \gamma_1) + I(V, rev(\gamma_2)) = 0 \Rightarrow I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$.
4. (2) $\Rightarrow$ (1):
   (a) $x_0 \in E$. $f(x) = I(V, \gamma)$, где γ — любой путь из x_0 в x. Докажем, что f — потенциал.
   (b) $f'_1(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+e_1h)-f(x)}{h}$.
   (c) $\gamma : [0, 1] \to E$. $\gamma(t) = x + e_1ht$.
   $f(x + e_1h) - f(x) = I(V, \gamma) = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = h \int_0^1 V_1(x + the_1)dt = hV_1(x + che_1)$ ($c \in [0, 1]$ — теорема о среднем значении).
   (d) При $h \to 0$ $ch \to 0$, $\frac{f(x+he_1)-f(x)}{h} = V_1(x + che_1) \to V_1(x)$.
   (e) То же самое для всех остальных координат.

2.43 Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

2.43.1 Необходимое условие потенциальности гладкого поля

$V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — гладкое векторное поле, потенцильное.
Тогда $\forall x \in E$ матрица $V'(x)$ симметрична:
$\forall i, k \in \{1, \dots, m\}$ $\frac{\partial V_i}{\partial V_k} = \frac{\partial V_k}{\partial V_i}$ (*).

Доказательство:
f — потенциал. $V_i = f'_i$. $(V_i)'_k = (f'_i)'_k = f''_{ik} = (V_k)'_i$.

2.43.2 Лемма Пуанкаре

$V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, E — выпуклая область. V — гладкое, удовлетворяет условию (*) из необходимого условия потенциальности.
Тогда V потенциально.

Доказательство:

1. $a \in E$. Пусть $f(x) = I(V, \gamma_x)$, где $\gamma_x : [0, 1] \to E$, $\gamma(t) = a + t(x - a)$ — прямой путь из a в x. Докажем, что f — потенциал.
2. $\gamma' = x - a$

3. $f(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^m V_k(a+t(x-a))(x_k-a_k)dt$.

4.
$$f'_{x_j} = \int_0^1 V_j(a+t(x-a))dt + \int_0^1 \sum_{k=1}^m \underbrace{\frac{\partial V_k}{\partial x_j}}_{\frac{\partial V_j}{\partial x_k}}(a+t(x-a))\cdot t\cdot(x_k-a_k)dt = \int_0^1 (tV_j(a+t(x-a)))'_t dt = 1\cdot V_j(x) - 0\cdot V_j(a) = V_j(x)$$

2.44 Лемма о гусенице

$\gamma : [a,b] \to E \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывный путь в области.
$\exists$ дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и шары $B_1, \dots, B_n \subset E$, такие что $\forall i\ \gamma[t_{i-1}, t_i] \subset B_i$.
На шары B_i можно накладывать ограничения: чтобы заданное локально потенциальное поле V было потенциальным в них.

Доказательство:

1. Для каждого $t \in [a,b]$ возьмём подходящий шар $B_t = B(\gamma(t), r_t)$.

2. $\alpha_t = \inf\{s \in [a,t] : \gamma([s,t]) \subset B_t\}$.
   $\beta_t = \sup\{s \in [t,b] : \gamma([t,s]) \subset B_t\}$.
   Пусть $\alpha_t < \widetilde{\alpha}_t < t < \widetilde{\beta}_t < \beta_t$. Тогда $\gamma((\widetilde{\alpha}_t, \widetilde{\beta}_t)) \in B_t$.
   В $t = a$: $[a, \widetilde{\beta}_a)$. В $t = b$: $(\widetilde{\alpha}_b, b]$.

3. $[a,b]$ покрыт такими интервалами. Поскольку $[a,b]$ — компакт, существует конечное подпокрытие. Уберём вложенные интервалы. Получили покрытие интервалами $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\beta}_1), \dots, (\widetilde{\alpha}_n, \widetilde{\beta}_n)$ и соответствующее покрытие шарами.

4. $t_0 = a$, $t_n = b$. $i \in 1, \dots, n-1$, $t_i \in (\widetilde{\alpha}_{i-1}, \widetilde{\beta}_{i-1}) \cap (\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_i)$.

2.45 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

V — локально потенциальное векторное поле на E.
$\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to E$ — пути с совпадающими концами, V-похожие, кусочно-гладкие.
Тогда интегралы по ним равны.

Доказательство:

1. Рассмотрим общую V-гусеницу. В шаре B_i определён потенциал ϕ_i. Пусть они определены так, что на пересечении шаров B_i и B_{i-1} потенциалы ϕ_i и ϕ_{i-1} совпадают.

2. Рассмотрим дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, такое что $\forall i \in 1, \dots, n-1\ \gamma_1(t_i) \in B_i \cap B_{i+1}$.

3. $I(V, \gamma_1) = \sum_{i=1}^n I(V, \gamma_1|_{[t_{i-1}, t_i]}) = \sum_{i=1}^n (\phi_i(\gamma_1(t_i)) - \phi_i(\gamma_1(t_{i-1}))) = \phi_n(\gamma_1(b)) - \phi_1(\gamma_1(a))$.

4. То же самое для γ_2. Значит, они равны.

2.46 Лемма о похожести путей, близких к данному

$\gamma : [a,b] \to E$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall \gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to E$, такие что $\forall t \in [a,b]\ |\gamma_i(t) - \gamma(t)| < \delta\ \gamma_1$ и γ_2 похожи.

Доказательство:
Нужно взять такое δ, что δ-окрестность γ на $[t_{i-1}, t_i]$ помещается в B_i для всех i.

2.47 Равенство интегралов по гомотопным путям

V — локально потенциальное векторное поле на E.
$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to E$ — связанно гомотопные пути в E.
Тогда интегралы по ним равны.

Доказательство:

1. $\Gamma : [a, b] \times [0, 1]$ — гомотопия. $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$.
2. $\Phi(s) = I(V, \gamma_s)$.
3. Γ непрерывна, $[a, b] \times [0, 1]$ — компакт, поэтому Γ равномерно непрерывна.
4. Рассмотрим γ_s. По лемме, $\exists \delta_s > 0$ такая, что любой путь $\overline{\gamma} : [a, b] \to E$, $\forall t\ |\overline{\gamma}(t) - \gamma_s(t)| < \delta_s$ — похож на γ_s.

   Γ равномерно непрерывно: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall s_1, s_2, |s_1 - s_2| < \delta\ |\Gamma(t, s_1) - \Gamma(t, s_2)| < \epsilon$.

   Подставим $\epsilon = \delta_s$: $\exists \delta > 0 : \forall s_1, |s_1 - s| < \delta\ |\Gamma(t, s_1) - \Gamma(t, s)| < \delta_s$.
5. $\forall s_1 \in (s - \delta, s + \delta) \cap [0, 1]$ γ_{s_1} похож на γ_s, поэтому Φ постоянна в окрестности s.
6. $\forall s \in [0, 1]$ Φ постоянна в окрестности s. Поэтом Φ — константа, и $\Phi(0) = \Phi(1)$.

2.48 Теорема о резиночке

Область $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ не является односвязной.

Доказательство:

1. Рассмотрим векторное поле $V(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.
   $(V_1)'_y = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
   $(V_2)'_x = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
   $(V_1)'_y = (V_2)'x$, поэтому V локально потенциальное.
2. Рассмотрим замкнутый путь $\gamma : [0, 2\pi] \to E$, $\gamma(t) = (cos(t), sin(t))$.
   $I(V, \gamma) = \int_0^{2\pi} (\frac{-sin(t)}{cos^2(t)+sin^2(t)}(-sin(t)) + \frac{cos(t)}{cos^2(t)+sin^2(t)} cos(t))dt = \int_0^{2\pi} (sin^2(t) + cos^2(t))dt = 2\pi \neq 0.$
3. Интеграл по замкнутому пути не равен 0, поэтому поле не потенциально. При этом поле локально потенциально, поэтому по теореме Пуанкаре для односвязной области E не односвязна.

2.49 Теорема Пуанкаре для односвязной области

E — односвязная область в $\mathbb{R}^m$, V — локально потенциальное векторное поле в E.
Тогда V потенциально.

Доказательство:

1. γ — петля в E. Область односвязна, поэтому она гомеоморфна точке, поэтому интеграл по ней 0.
2. Интеграл по любой петле 0, поэтому поле потенциально.

2.50 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

$v : \mathbb{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда:

1. Усиленная монотонность. $A_1, A_2 \dots \in \mathbb{P}$, дизъюнктны, $\bigcup A_i \subset B \in \mathbb{P}$. Тогда $\sum v(A_i) \leq v(B)$.

2. Конечная полуаддитивность. $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{P}$, $A \subset \bigcup A_i$, $A \in \mathbb{P}$. Тогда $v(A) \leq \sum v(A_i)$.

3. $A, B, A \setminus B \in \mathbb{P}$, $v(B) < +\infty$. Тогда $v(A \setminus B) \geq v(A) - v(B)$

Доказательство:

1. (a) Докажем для конченого набора. $B \setminus \bigcup A_k = \bigcup_{i=1}^{N} C_i$ ($C_i \in \mathbb{P}$, дизъюнктны). Это нетрудно выводится из определения полукольца.
   (b) $B = (\bigcup A_i) \cup (\bigcup C_i)$. По аддитивности, $v(B) \geq \sum v(A_i)$.
   (c) Устремляем n к ∞: $\forall k\ v(B) \geq \sum_{i=1}^{k} A_i \Rightarrow v(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} A_i$.
2. (a) Пусть $B_i = A_i \cap A$.
   (b) $C_1 = B_1$, $C_{i+1} = B_{i+1} \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_i)$, $\forall i\ C_i = \bigsqcup_{j=1}^{N_i} D_{ij} \in \mathbb{P}$, $C_i \subset A_i$.
   (c) $A = \bigsqcup_{i,j} D_{ij} \Rightarrow v(A) = \sum v(D_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} v(C_i) \leq \sum_{i=1}^{n} v(A_i)$.
3. $v(A \setminus B) = v(A) - v(A \cap B) \geq V(A) - V(B)$.

2.51 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности

$v : \mathbb{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны:

1. v — мера.

2. v удовлетворяет свойству счётной полуаддитивности: $A, A_1, A_2, \dots \in \mathbb{P}$, $A \subset \bigcup A_i$. Тогда $v(A) \leq \sum v(A_i)$.

Доказательство:

1. (1) $\Rightarrow$ (2): совпадает с доказательством конечной полуаддитивности объёма.
   (a) Пусть $B_i = A_i \cap A$.
   (b) $C_1 = B_1$, $C_{i+1} = B_{i+1} \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_i)$, $\forall i\ C_i = \bigsqcup_{j=1}^{N_i} D_{ij} \in \mathbb{P}$, $C_i \subset A_i$.
   (c) $A = \bigsqcup_{i,j} D_{ij} \Rightarrow v(A) = \sum v(D_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} v(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(A_i)$.
2. (2) $\Rightarrow$ (1).
   (a) Докажем счётную аддитивность: $A, A_1, A_2, \dots \in \mathbb{P}$, $A = \bigsqcup A_i$.
   (b) $v(A) \leq \sum v(A_i)$ по счётной полуаддитивности.
   (c) $v(A) \geq \sum v(A_i)$ по усиленной монотонности объёма.

2.52 Теорема о непрерывности снизу

$\mathbb{A}$ — алгебра подмножеств X, μ — объём на $\mathbb{A}$. Тогда эквивиалентно:

1. μ — мера.

2. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$, $\forall k\ A_k \subset A_{k+1}$, $A = \bigcup A_k \in \mathbb{A}$, то $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

Доказательство:

1. (1) $\Rightarrow$ (2):
   (a) $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_i = A_i \setminus A_{i-1}, \dots$. Все $B_i \in \mathbb{A}$.

(b) $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$.

(c) $\mu(A_k) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i)$ — частичные суммы, поэтому $\mu(A_k) \to \mu(A)$.

2. (2) $\Rightarrow$ (1):

   (a) $C, C_1, C_2, \dots \in \mathbb{A}$, $C = \bigsqcup C_i$. Доказать: $\mu(C) = \sum \mu(C_i)$.

   (b) Пусть $D_1 = C_1,\ D_2 = C_1 \sqcup C_2, \dots, D_i = \bigsqcup_{j=1}^{i} C_j$. $D_i \in \mathbb{A}$, $\mu(D_i) = \sum_{j=1}^{i} \mu(C_j)$.

   (c) $D_i \subset D_{i+1}$, $\bigcup D_i = C$. По непрерывности снизу: $\mu(D_n) \to \mu(C)$.
   $\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \to \mu(C)$.
   $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = \mu(C)$.

2.53 Счетная аддитивность классического объема

Если $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots \in \mathbb{P}_n$ (ячейки), Δ_i дизъюнктны, $\Delta = \bigcup \Delta_i$, то $v(\Delta) = \sum v(\Delta_i)$.

Доказательство:

1. $\Delta = [a, b)$, $\Delta_i = [a_i, b_i)$.

2. $[a, \widetilde{b}] \subset [a, b)$, $vol[a, \widetilde{b}] \geq \mu[a, b) - \epsilon$.

3. Пусть для каждого Δ_i: $(\widetilde{a}_i, b_i) \supset [a_i, b_i)$, $vol(\widetilde{a}_i, b_i) \leq \mu[a_i, b_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$.

4. $[a, \widetilde{b}]$ — компакт, покрытый открытыми множествами $(\widetilde{a}_i, b_i)$. Существует конечное подпокрытие $[a, \widetilde{b}] \subset \bigcup_{k=1}^{n} (\widetilde{a}_{i_k}, b_{i_k})$.

5. $[a, \widetilde{b}) \subset \bigcup_{k=1}^{n} [\widetilde{a}_{i_k}, b_{i_k})$. По конечной полуаддитивности объёма, $\underbrace{\mu[a, \widetilde{b})}_{\geq \mu[a,b) - \epsilon} \leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mu[\widetilde{a}_{i_k}, b_{i_k})}_{\leq \mu[a_{i_k}, b_{i_k}) + \frac{\epsilon}{2^{i_k}}}$.

6. $\mu[a, b) - \epsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \mu[a_{i_k}, b_{i_k}) + \frac{\epsilon}{2^{i_k}} < \sum_{k=1}^{n} \mu[a_{i_k}, b_{i_k}) + \epsilon$.

7. $\mu[a, b) - 2\epsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \mu[a_{i_k}, b_{i_k}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu[a_i, b_i)$.

8. Устремляем ϵ к 0, получаем счётную полуаддитивность.

9. Из счётной полуаддитивности объёма следует счётная аддитивность по теореме об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности.

2.54 Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

Рациональный куб — такая ячейка $[a, b)$, что все a_k и b_k рациональны и все $b_k - a_k$ равны.

1. $E \subset \mathbb{R}^m$ — открытое. Тогда E прредставимо в виде $E = \bigsqcup Q_i$ — не более чем счётное количество рациональных кубов, замыкание каждого из которых содержится в E.

2. $E \in \mathfrak{M}^m$, $\lambda_m(E) = 0$. Тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists Q_1, Q_2 \dots$ — рациональные кубы, $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) < \epsilon$.

Доказательство:

1. (a) Для каждого x из E выберем $\widetilde{Q}_x$ — подходящий под условие рациональный куб, содержащий x.

   (b) Всего рациональных кубов счётное число, поэтому E покрывается $\bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{Q}_i$.

   (c) Сделаем объединение дизъюнктным. $Q_{1,1} = \widetilde{Q}_1$,
   далее $\widetilde{Q}_i \setminus (\widetilde{Q}_1 \cup \dots \cup \widetilde{Q}_{i-1}) = \bigsqcup_{k=1}^{N_i} Q_{i,k}$:

      i. $\widetilde{Q}_i \setminus (\widetilde{Q}_1 \cup \dots \cup \widetilde{Q}_{i-1})$ разбивается на ячейки, причём они рациональны.

      ii. Рациональную ячейку можно разбить на рациональные кубы: рассмотрим t — общий знаменатель всех a_k, b_k, разобъём на кубы со стороной $\frac{1}{t}$.

iii. Разбиение конечно.

(d) $E = \bigsqcup Q_{i,k}$.

2. (a) Дан ϵ. $\lambda_m(E) = 0 \Leftrightarrow \inf_{(P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_m,\ E \subset \bigcup P_i)} \sum \mu(P_i) = 0$.

   (b) Тогда существует такой набор $P_1, P_2, \dots$, что $\sum \mu(P_i) < \frac{\epsilon}{2}$.

   (c) $P_i = [a_i, b_i)$. Пусть $B_i = (\widetilde{a}_i, b_i)$, при этом $\mu(B_i) \le 2\mu(P_i)$.

   (d) E покрыт $\bigcup B_i$ — открытое множество меры меньше ϵ.

   (e) Это открытое множество представимо в виде объединения рациональных кубов.

2.55 Пример неизмеримого по Лебегу множества

Введём на $[0, 1]$ отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$.
Из каждого класса эквивалентности выберем по элементу (тут мы пользуемся аксииомой выбора). Полученное множество E неизмеримо по Лебегу.

Доказательство:
Рассмотрим сдвиги этого множества на все рациональные числа из $[-1, 1]$. Они дизъюнктны, покрывают $[0, 1]$ и содержатся в $[-1, 2]$.

1. Если $\mu(E) = 0$, то $\mu[0, 1] = 0$, это не так.
2. Если $\mu(E) > 0$, то $\mu[-1, 2] = \infty$, это не так.

2.56 Регулярность меры Лебега

$A \in \mathfrak{M}^m$. Тогда

$$\lambda_m(A) = \inf\{G : G \supset A, G \text{ открытое}\} = \sup\{F : F \subset A, F \text{ замкнутое}\} = \sup\{K : K \subset A, K \text{ компактное}\}$$

Доказательство:

1. Докажем, что $\forall \epsilon > 0\ \exists$ открытое $G_\epsilon \supset A$: $\lambda_m(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$.

   (a) Пусть $\lambda_m(A) < +\infty$.

      i. $\lambda_m(A) = \inf_{(P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_m,\ A \subset \bigcup P_i)} \sum \mu(P_i)$.

      ii. Тогда есть $P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_m,\ A \subset \bigcup P_i,\ \sum \mu(P_i) < \lambda_m(A) + \frac{\epsilon}{2}$.

      iii. Для всех P_i построим $\widetilde{P}_i \supset P_i$ — открытое, $\lambda_m(\widetilde{P}_i) \le \lambda_m(P_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$.

      iv. $G_\epsilon = \bigcup \lambda_m(\widetilde{P}_i)$. $\lambda_m(G_\epsilon) \le \lambda_m(A) + \epsilon$.

   (b) Пусть $\lambda_m(A) = +\infty$.

      i. $\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i$ — единичные кубы. $A_i = A \cap Q_i$, $A = \bigsqcup A_i$, $\lambda_m(A_i) \le 1$.

      ii. Для каждого i построим открытое G_i: $A_i \subset G_i$, $\lambda_m(G_i \setminus A_i) \le \frac{\epsilon}{2^i}$.

      iii. $G_\epsilon = \bigcup G_i \supset A$. $\lambda_m(G_\epsilon) \le \lambda_m(A) + \epsilon$.

2. Докажем, что $\forall \epsilon > 0\ \exists$ замкнутое $F_\epsilon \subset A$: $\lambda_m(A \setminus F_\epsilon) < \epsilon$.

   (a) $A \setminus F_\epsilon = F_\epsilon^c \setminus A^c$, $F_\epsilon^c \supset A^c$.

   (b) $\lambda_m(A \setminus F_\epsilon) = \lambda_m(F_\epsilon^c \setminus A^c)$.

   (c) По (1), найдётся такое открытое F_ϵ^c, что это выполняется.

   (d) Дополнение к открытому замкнуто.

3. (a) $\lambda_m(A) = \sup\{F : F \subset A, F \text{ замкнутое}\}$.

   (b) Любое F представляется как объединение счётного числа компактов $K_i = F \cap \overline{B(0, i)}$.

   (c) Поэтому $\lambda_m(A) = \sup\{K : K \subset A, K \text{ компактное}\}$.

2.57 Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

$T : \mathscr{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно, $\forall E \in \mathfrak{M}^m, E \subset \mathscr{O}, \lambda_m(E) = 0$ выполнено $\lambda_m(T(E)) = 0$.
Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset \mathscr{O}$ $T(A) \in \mathfrak{M}^m$.

Доказательство:

1. A — измеримо $\Leftrightarrow A = \bigcup K_i \cup N$, где K_i — компакты, N — множество меры 0.
2. $T(A) = \bigcup T(K_i) \cup T(N)$.
   (a) Непрерывный образ компакта — компакт.
   (b) $T(N)$ имеет меру 0.
3. Поэтому $T(A)$ измеримо.

2.58 Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

1. $T : \mathscr{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \in C^1$, $\mathscr{O}$ открыто. Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset \mathscr{O}$ выполнено $T(A) \in \mathfrak{M}^m$.
2. $\forall A \in \mathfrak{M}^m, v \in \mathbb{R}^m$ выполнено $A + v \in \mathfrak{M}^m$, $\lambda_m(A + v) = \lambda_m(A)$.

Доказательство:

1. (a) E можно покрыть счётным числом компактов K_i, которые содержатся в $\mathscr{O}$. Например, можно взять замкнутые кубы, покрывающие $\mathscr{O}$.
   (b) Докажем, что для всех $A \cap K_i$ $T(A \cap K_i)$ имеет меру ноль. Из этого будет следовать, что $T(A)$ имеет меру ноль.
   (c) Далее считаем, что A покрыто одним компактом $K \subset \mathscr{O}$.
   (d) На компакте K существует глобальная константа Липшица L для T, равная $max||T'||$.
   (e) $\forall \epsilon > 0\ \exists C_1, C_2, \ldots$ — кубы $[a_i, b_i] \subset K$, $A \subset \bigcup C_i$, $\sum \lambda_m(C_i) < \epsilon$.
   (f) r_i — длины сторон кубов. $\sup_{x \in C_i} |x - a_i| = r_i\sqrt{m}$. Тогда из условия Липшица: $T(C_i) \subset \overline{B}(T(a_i), Lr_i\sqrt{m}) \Rightarrow \lambda_m(T(C_i)) \leq (2Lr_i\sqrt{m})^m = \lambda_m(C_i) \cdot const$.
   (g) Получается, что $\lambda_m(T(\bigcup C_i)) \leq \epsilon \cdot const$. Значит, мера $T(A)$ равна нулю.
   (h) T непрерывно и переводит множества меры ноль во множества меры ноль, поэтому оно сохраняет измеримость.
2. (a) Сдвиг — гладкое отображение, поэтому $A + v \in \mathfrak{M}^m$.
   (b) $\lambda_m(A) = \inf_{(P_1, P_2, \dots \in \mathbb{P}_m,\ A \subset \bigcup P_i)} \sum \mu(P_i)$. Классический объём инвариантен относительно сдвига.

2.59 Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

Если T — ортогональный линейный оператор (сохраняет скалярное произведение) и $E \in \mathfrak{M}^m$, то $T(E) \in \mathfrak{M}^m$, $\lambda_m(T(E)) = \lambda_m(E)$.

Доказательство:

1. $T(E) \in \mathfrak{M}^m$, потому что T гладкое.
2. Пусть $\mu(E) = \lambda_m(T(E))$. μ — мера на $\mathfrak{M}^m$, поскольку T — биекция.
3. μ инвариантна относительно сдвигов: $\mu(A + v) = \lambda_m(T(A + v)) = \lambda_m(T(A) + Tv) = \lambda_m(T(A)) = \mu(A)$.

4. По теореме о мерах, инвариантных относительно сдвигов, $\mu \equiv c\lambda_m$.

5. Рассмотрим шар $B = B(0,1)$. $\lambda_m(B) \neq 0$. $T(B) = B \Rightarrow \mu(B) = \lambda_m(B) \Rightarrow c = 1$.

6. $\mu \equiv \lambda_m \Rightarrow \lambda_m(T(E)) = \lambda_m(E)$.

2.60 Лемма «о структуре компактного оператора»

$V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор.
Тогда $\exists$ ортонормированные базисы $\{g_i\}$, $\{h_i\}$ в $\mathbb{R}^m$, $s_1, \ldots, s_m > 0$, такие что $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $Vx = \sum_{k=1}^{m} s_k \langle x, g_k \rangle h_k$, $|det\ V| = \prod_{k=1}^{\infty} s_k$.

Доказательство:

1. $W = V^T V$ — симметричен относительно главной диагонали, поэтому все собственные W числа вещественны, а из собственных векторов W можно составить базис $\{g_i\}$.

2. Все собственные числа $\lambda_i > 0$: $\lambda_i = \langle W g_i, g_i \rangle = \langle V^T V g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$.

   (a) Переход $\langle V^T V g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle$ описан в вычислении нормы оператора через собственные числа.

3. $s_i = \sqrt{c_i}$. $h_i = \frac{1}{s_i} V g_i$.

4. $\{h_i\}$ — ОНБ: $\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} c_i \langle g_i, g_j \rangle = \delta_i^j$.

5. $\sum_{k=1}^{m} s_k \langle x, g_k \rangle h_k = \sum_{k=1}^{m} \langle x, g_k \rangle V g_i = V \sum_{k=1}^{m} \langle x, g_i \rangle g_i = Vx$.

6. $(det\ V)^2 = det\ V^T V = det\ W = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_m$.

2.61 Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

$V \in \mathscr{L}_{m,m}$.
Тогда $\forall A \subset \mathfrak{M}^m$ $VA \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda_m(VA) = |det\ V| \lambda_m(A)$.

Доказательство:

1. Если $det\ V = 0$, то $Im(V)$ имеет размерность $< m$, VA лежит в пространстве размерности меньше m и потому имеет меру ноль.

2. Далее $det\ V \neq 0$. V — невырожденный.

3. По теореме о структуре компактного оператора, $Vx = \sum_{k=1}^{m} s_k \langle x, g_k \rangle h_k$, где $\{g_i\}$, $\{h_i\}$ — ортонормальные базисы, $s_i > 0$, $\prod_{k=1}^{m} s_i = |det\ V|$.

4. Пусть $\mu(A) = \lambda_m(VA)$. Это мера на $\mathfrak{M}^m$. μ инвариантно относительно сдвигов, поэтому $\exists k$: $\mu \equiv k\lambda_m$.

   (a) Тут μ введена так же, как в теореме об инвариантности меры Лебега относительно ортогонального преобразования.

5. Q — единичный куб со сторонами на g_i. $\lambda_m(Q) = 1$.

6. $V g_i = s_i h_i$, поэтому VQ — параллелепипед, построенный на векторах $s_i h_i$.

7. $\mu(Q) = \lambda_m(VQ) = \prod_{k=1}^{m} s_i = |det\ V| \Rightarrow k = |det\ V|$.

2.62 Теорема об измеримости пределов и супремумов

$f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы на X. Тогда:

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ — измеримы.
2. $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)$ — измеримы.
3. Если $f_n(x)$ поточечно сходится к $g(x)$, то $g(x)$ — измерима.

<u>Доказательство:</u>

1. (a) $h(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ $X(h > a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X(f_n > a)$ — измеримо.
   (b) inf аналогично.
2. (a) $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n(x)$, $y_n(x) = sup_{k\geq 0} f_{n+k}(x)$.
   (b) $\forall x y_n(x)$ монотонно убывает, поэтому $\overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n(x)$ — измеримо по пункту 1.
   (c) $\underline{\lim}$ аналогично.
3. Обычный предел, если он существует, равен верхнему и нижнему.

2.63 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
f — измеримая функция на X, $\forall x$ $f(x) \geq 0$. Тогда $\exists$ ступенчатые функции f_n, такие что:

1. $\forall x$ $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$.
2. $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$.

<u>Доказательство:</u>

1. $n \in \mathbb{N}$. Пусть $e_{n,k} = X(\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n})$ при $k \in \{0, 1, \ldots, n^2 - 1\}$, $e_{n,n^2} = X(n \leq f)$.
2. $e_{n,0}, e_{n,1}, \ldots, e_{n,n^2}$ — разбиение X. Пусть $g_n = \frac{k}{n}$ при $x \in e_{n,k}$.
3. $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x)$.
4. $f_n(x) = max(g_1(x), \ldots, g_n(x))$.

<u>Замечание:</u> я чёт не понимаю, почему тут не используется измеримость f. Возможно, требуется, чтобы f_n были измеримыми (в определении ступенчатой функции этого нет), а это действительно следует из измеримости f.