

Теоремы по матану, семестр 4

25 марта 2018 г.

Содержание

1	Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия	3
2	Измеримость монотонной функции	3
3	Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере	4
4	Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде	4
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	5
5.1	Для определения (5)	5
5.2	Для окончательного определения	6
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	8
7	Теорема Леви	9
8	Линейность интеграла Лебега	9
9	Теорема об интегрировании положительных рядов	10
10	Теорема о произведении мер	11
11	Абсолютная непрерывность интеграла	12
11.1	Следствие	12
12	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.	12
13	Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.	14
14	Теорема Фату. Следствия.	14
14.1	Следствие 1	15
14.2	Следствие 2	15

15	Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры	15
15.1	Лемма	15
15.2	Следствие	16
15.3	Теорема	16
16	Критерий плотности	16
17	Лемма о единственности плотности	17
18	Лемма о множестве положительности	17
19	Теорема Радона—Никодима	18
20	Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости	19
21	Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»	20
22	Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме	21
23	Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега	21
24	Теорема (принцип Кавальери)	21
25	Теорема Тонелли	22
26	Формула для Бета-функции	23
27	Объем шара в \mathbb{R}^m	24
28	Теорема о вложении пространств L^p	24
29	Теорема о сходимости в L_p и по мере	25
30	Полнота L^p	25

1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

f — измеримая функция на X , $\forall x \ f(x) \geq 0$. Тогда \exists ступенчатые функции f_n , такие что:

1. $\forall x \ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$.
2. $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$.

Следствие 1:

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измеримая. Тогда \exists ступенчатая $f_n : \forall x : \lim f_n(x) = f(x)$ и $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f = f^+ - f^-$. $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Срезки измеримы: $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$, при этом f и $g \equiv 0$ измеримы (f^- измерима аналогично).
2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции $f_n^+ \rightarrow f^+$, $f_n^- \rightarrow f^-$. Тогда и $f_n^+ - f_n^-$ это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов: $f_n^+ - f_n^- \rightarrow f^+ - f^- = f$. Неравенство с модулем верно при правильных эpsilon-неравенствах.

Следствие 2:

f, g — измеримые функции. Тогда fg — измеримая функция. При этом считаем, что $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f_n \rightarrow f : |f_n| \leq |f|$, $g_n \rightarrow g : |g_n| \leq |g|$ из первого следствия. Тогда $f_n g_n \rightarrow fg$ и fg измерима по теореме об измеримости пределов и супремумов (произведение ступенчатых функций — ступенчатая функция, значит, измеримая)

Следствие 3:

f, g — измеримые функции. Тогда $f + g$ — измеримая функция. При этом считаем, что $\forall x$ не может быть, что $f(x) = \pm\infty, g(x) = \mp\infty$

Доказательство:

Доказывается как следствие 2.

2 Измеримость монотонной функции

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое по Лебегу, $E' \subset E, \lambda_m(E \setminus E') = 0, f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть сужение $f : E' \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда f измерима на E .

Доказательство:

1. $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a), e := E \setminus E', \lambda_m(e) = 0$.
2. $E'(f < a)$ открыто в E' , так как f непрерывна. Поэтому $E' = G \cap E' \Rightarrow$, где G — открытое в E множество. Значит, $E'(f < a)$ — измеримо по Лебегу, так как оно является борелевским.
3. Но и $e(f < a)$ измеримо, так $\lambda_m(e) = 0$, следовательно $E(f < a)$ измеримо как объединение измеримых множеств

Следствие:

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ монотонна. Тогда f измерима.

Доказательство:

Множество разрывов монотонной функции НБЧС множество, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

(X, a, μ) - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны, измеримы

$f_n \rightarrow f$ (поточечно, п.в.)

Доказательство:

1. подменим значения f_n и f на некотором множестве меры 0 так, чтобы сходимость $f_n \rightarrow f$ была всюду. (Так можно сделать. Действительно, $f_n \rightarrow f$ на $X \setminus e$, $\mu e = 0$

f_n - конечно на $X \setminus e_n$,

f - конечно на $X \setminus e_0$.

Тогда на $(X \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n)$ функции конечны и есть сходимость $f_n \rightarrow f$. По свойствам меры $\mu \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n = 0$.

0. Тогда определим на $\bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n$ $f_n = f = 0$. Это очевидно даст нам необходимую конечность и поточечную сходимость.)

2. (частный случай) $f_n \rightarrow f \equiv 0$. Тогда пусть $\forall x f_n(x)$ - монотонно (по n). $|f_n(x)|$ - убывает с ростом n и $X(|f_n| \geq \epsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \epsilon)$. А также $\bigcap_{n=0}^{+\infty} X(|f_n| \geq \epsilon) = \emptyset$.

$$\begin{cases} \mu X < +\infty \\ \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu E_n \rightarrow \mu \bigcup E_n$ - Th о непрерывности меры сверху.

$\Rightarrow \mu X(|f_n| \geq \epsilon) \rightarrow \mu \emptyset = 0$

3. (общий случай) $f_n \rightarrow f$. Рассмотрим $\phi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$. Заметим свойства ϕ :

$$\begin{cases} \phi_n(x) \rightarrow 0 \\ \phi_n \downarrow_n \end{cases}$$

$X(|f_n - f| \geq \epsilon) \subset X(|\phi_n| \geq \epsilon) \Rightarrow$ по монотонности меры имеем $\mu X(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu X(|\phi_n| \geq \epsilon) \xrightarrow{\text{part.case}} 0$, ч.т.д.

4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

(X, a, μ) - пространство с мерой

$f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - п.в. конечны, измеримы

$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Тогда $\exists n_k \uparrow : f_{n_k} \rightarrow f$ п.в.

Доказательство: $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда $\exists n_k : \forall n \geq n_k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$ (можно считать $n_1 < n_2 < \dots$)

Проверим $f_{n_k} \rightarrow f$ п.в. : $E_k := \bigcap_{j=k}^{+\infty} X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j})$

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$$

$$E_0 := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

$$\mu E_k \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{(k-1)}} - \text{конечно} \Rightarrow \mu E_k \rightarrow \mu E_0 \Rightarrow \mu E_0 = 0 \text{ (т.к. } \mu E_k \rightarrow 0 \text{)}.$$

Рассмотрим $X \notin E_0$, т.е. если $X \notin E_0$, то $\exists k : X \notin E_k$, тогда $\forall j \geq k |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$ при $n \geq n_j$, т.е. $f_{n_k} \rightarrow f$, ч.т.д. Следствие: $f_n \Rightarrow f$ $|f_n| \leq g$ п.в. Док-во: Рассмотрим последовательность f_{n_k} где $f_{n_k} \rightarrow f$ п.в. и вдоль нее применим Th о двух городских.

$$\begin{cases} f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X \setminus e_1 \\ |f_n(x)| \leq g(x) \forall x \in X \setminus e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f| \leq g \text{ на } (X \setminus e_1) \setminus e_2$$

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

5.1 Для определения (5)

1. $\int_{\mathbb{X}} f$ не зависит от представления f как ступенчатой функции, то есть если f реализуется как $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ и как $f = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$, интегралы по этим функциям равны

Доказательство:

Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

$$\text{Пусть } F_{ij} = E_i \cap G_j$$

$$\text{Тогда } f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$$

$$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_i (\lambda_i \cdot \sum_j (\mu F_{i,j})) = \sum_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f \text{ для первого разбиения}$$

Аналогично для второго разбиения получаем

$$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_j (\alpha_j \cdot \sum_i (\mu F_{i,j})) = \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int f \text{ для второго разбиения, что и требовалось доказать}$$

2. f, g -измеримые ступенчатые функции, $f \leq g$, тогда $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

$$\text{Пусть } f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}), g = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

$$\text{Пусть } F_{ij} = E_i \cap G_j$$

Тогда $\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leq \sum_j (\alpha_j \cdot \mu F_{i,j}) = \int g$, что и требовалось доказать

5.2 Для окончательного определения

1. Монотонность $f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

(a) $f, g \geq 0$, тогда доказательство тривиально (по свойствам супремума)

(b) $\int_{\mathbb{X}} f = \int_{\mathbb{X}} f^+ - \int_{\mathbb{X}} f^-$

$\int_{\mathbb{X}} g = \int_{\mathbb{X}} g^+ - \int_{\mathbb{X}} g^-$

Из того, что $\int_{\mathbb{X}} f^+ \leq \int_{\mathbb{X}} g^+$, а $\int_{\mathbb{X}} f^- \geq \int_{\mathbb{X}} g^-$ следует, что $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

2. $\int_{\mathbb{E}} 1 \cdot d\mu = \mu E$

$\int_{\mathbb{E}} 0 \cdot d\mu = 0$

Очевидно из определения интеграла ступенчатой функции

3. $\mu E = 0$, f -измерима, тогда $\int_{\mathbb{E}} f = 0$, даже если $f = \infty$ на \mathbb{E}

Доказательство:

(a) f -ступенчатая \Rightarrow ограниченная

$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$, тогда $\int_{\mathbb{E}} f = \sum \lambda_k \cdot \mu(E \cap E_k)$

Но $\mu(E \cap E_k) = 0$ (так как $\mu E = 0$), тогда $\int_{\mathbb{E}} f = 0$

(b) f - измеримая, $f \geq 0$.

$\int_{\mathbb{E}} f = \sup \left(\int_{\mathbb{E}} g \right)$, где $0 \leq g \leq f$, g - ступенчатая

Тогда $\int_{\mathbb{E}} f = \sup(0) = 0$

(c) f - произвольная измеримая

Тогда $\int_{\mathbb{E}} f = \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- = 0 - 0 = 0$

4. (a) $\int_{\mathbb{E}} -f = - \int_{\mathbb{E}} f$

(b) $\forall c \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$

Доказательство:

(a) $(-f)^+ = f^-$

$(-f)^- = f^+$

Тогда $\int_{\mathbb{E}} -f = \int_{\mathbb{E}} (-f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (-f)^- = \int_{\mathbb{E}} f^- - \int_{\mathbb{E}} f^+ = - \int_{\mathbb{E}} f$

(b) Пусть $c > 0$. Если $c < 0$, то по предыдущему случаю можем рассматривать для $-c < 0$.

Если $c = 0$, то по предыдущей теореме $\int_{\mathbb{E}} (0 \cdot f) = \int_{\mathbb{E}} 0 = 0 = 0 \cdot \int_{\mathbb{E}} f$

i. Пусть $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq c \cdot f, g - \text{ ступенчатая}$$

Пусть $g = c \cdot \tilde{g}$, тогда $\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right)$, где $0 \leq c \cdot \tilde{g} \leq c \cdot f$, \tilde{g} - ступенчатая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right) = \sup_{\mathbb{E}} \left(c \cdot \int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

ii. Если f - произвольная:

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^- = \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^+ - \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^- = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^+ - c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^- = c \cdot \left(\int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

5. Если существует $\int_{\mathbb{E}} f d\mu$, то $\left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$

Доказательство:

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\int_{\mathbb{E}} -|f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$-\int_{\mathbb{E}} |f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$\text{Тогда } \left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

6. f - измеримая на \mathbb{E} , $\mu\mathbb{E} < \infty$

$$a \leq f \leq b, \text{ тогда } a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Доказательство:

$$a \leq f \leq b \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} a \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} b$$

$$a \cdot \int_{\mathbb{E}} 1 \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \int_{\mathbb{E}} 1$$

$$a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Следствие:

Если f - Измеримая и ограниченная на \mathbb{E} , $\mu\mathbb{E} < \infty$, тогда f - суммируемая на \mathbb{E}

7. f - суммируемая на $\mathbb{E} \Rightarrow f$ почти везде конечная на \mathbb{E} (то есть $f \in \alpha^0(\mathbb{E})$)

Доказательство:

(a) Пусть $f \geq 0$

Пусть $f = +\infty$ на A и пусть $\mu A > 0$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : f \geq n \cdot \chi_A$

$$\text{Тогда } \forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{E}} f \geq n \cdot \int_{\mathbb{E}} \chi_A = n \cdot \mu A \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} f = +\infty$$

(b) f любого знака

Распишем $f = f^+ - f^-$, по предыдущему пункту f^+, f^- конечны почти везде $\Rightarrow f$ тоже конечно почти везде

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — измеримы. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — изм., $f \geq 0$

Тогда:
$$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$$

Доказательство:

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

$$\int_A f d\mu = \sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum_k (\lambda_k \cdot (\sum_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\int_{A_i} f)$$

2. Докажем, что $\int_A f \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) Рассмотрим $0 \leq g \leq f$ — ступенчатая. $\int_A g = \sum_i \int_{A_i} g \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(b) Переходя к *sup* получаем желаемое

3. Теперь докажем, что $\int_A f \geq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) $A = A_1 \sqcup A_2$

i. Рассмотрим g_1, g_2 — ступенчатые такие, что $0 \leq g_i \leq f \cdot \chi_{A_i}$

ii. Рассмотрим их общее разбиение $E_k : g_i = \sum_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

iii. $g_1 + g_2$ — ступенчатая и $0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$

iv. $\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \stackrel{\text{lemma}}{=} \int_A (g_1 + g_2) \stackrel{\text{iii}}{\leq} \int_A f$

v. Поочерёдно переходя к *sup* по g_1 и g_2 получаем: $\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, что $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ будем последовательно отщеплять последнее множество по (a)

(c) $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$

i. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$

ii. $A = (\bigsqcup_{i=1}^n A_i) \sqcup B$, где $B = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$

iii. $\int_A f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$

iv. Переходим к *lim* по n

Следствие 1: $0 \leq f \leq g$ — измеримы и $A \subset B$ — измеримы $\Rightarrow \int_A f \leq \int_B g$

$$\int_B g \geq \int_B f = \int_A f + \int_{B \setminus A} f \geq \int_A f$$

Следствие 2: f - суммируема на $A \Rightarrow \int_A f = \sum_i \int_{A_i} f$

Достаточно рассмотреть срезки f^+ и f^-

Следствие 3: $f \geq 0$ - изм. $\delta : \mathbb{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (A \mapsto \int_A f d\mu) \Rightarrow \delta$ - мера

7 Теорема Леви

(X, \mathbb{A}, μ) , $f_n \geq 0$ - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$ при почти всех x

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ при почти всех x (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

Тогда: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

Доказательство:

N.B. $\int_X f_n \leq \int_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$

f - измерима как предел последовательности измеримых функций

1. \leq

Очевидно $f_n \leq f$ при п.в $x \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f$. Делаем предельный переход по n

2. \geq

(a) Логичная редукция: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq \int_x g$, где $0 \leq g \leq f$ - ступенчатая

(b) Наглая редукция: $\forall c \in (0, 1) : \lim \int_X f_n(x) \geq c \cdot \int_X g$

i. $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq c \cdot g\}$. Очевидно $E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$

ii. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ т.к. $c < 1$

iii. $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} g \Rightarrow \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g$

iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем непрерывность меры снизу

8 Линейность интеграла Лебега

$f, g \geq 0$, измеримые

Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$

Доказательство:

1. Пусть f, g - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

$$f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$g = \sum_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \sum_k (\lambda_k + \alpha_k) \cdot \mu E_k = \sum_k \lambda_k \cdot \mu E_k + \sum_k \alpha_k \cdot \mu E_k = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g, \text{ что и требовалось доказать}$$

2. $f, g \geq 0$, измеримые

Тогда $\exists h_n : 0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$, h_n ступенчатые

$\exists \tilde{h}_n : 0 \leq \tilde{h}_n \leq \widetilde{h_{n+1}} \leq g$, \tilde{h}_n ступенчатые

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = f$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}_n = g$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \tilde{h}_n) = \int_{\mathbb{E}} h_n + \int_{\mathbb{E}} \tilde{h}_n$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \tilde{h}_n) \rightarrow \int_{\mathbb{E}} (f + g)$$

$$\int_{\mathbb{E}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} f$$

$$\int_{\mathbb{E}} \tilde{h}_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} g$$

Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

3. Если f, g - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$ почти всюду на \mathbb{E} , тогда $\int_{\mathbb{E}} (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

Доказательство:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x); S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

1. S_N - возрастает к S при почти всех $x \xrightarrow{\text{Т. Леви}} \int_{\mathbb{E}} S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{E}} S = \int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

2. С другой стороны $\int_{\mathbb{E}} S_N = \int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu$

3. Найденные пределы совпадают в силу единственности предела последовательности, что и требовалось доказать.

10 Теорема о произведении мер

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$ - пространства с мерой

$$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \alpha, B \in \beta\}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

Тогда:

1. m_0 - мера на полукольце $\alpha \times \beta$
2. μ, ν - σ -конечны $\Rightarrow m_0$ - σ -конечна

Доказательство:

1. Неотрицательность m_0 очевидна. Необходимо доказать счетную аддитивность

Пусть $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_k$, где $P \in \alpha \times \beta$
 $P = A \times B; P_k = A_k \times B_k$

Заметим, что:

- $\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y)$, в силу дизъюнктивности P_k ((x, y) входит максимум в одно множество из всех P_k)
- $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, так как $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$ И $y \in B$

Воспользовавшись вышесказанным получим:

$$\chi_P(x, y) = \chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$$

$$\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y)$$

Имеем следующее равенство:

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y)$$

Проинтегрируем его по мере μ по x, затем по мере ν по y, получим:

$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k, \text{ то есть } m_0(P) = \sum m_0(P_k), \text{ что и требовалось доказать.}$$

2. μ, ν - σ -конечны $\Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $\mu A_k < +\infty$; $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где $\nu B_k < +\infty$

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_j)$$

$$m_0(A_i \times B_j) = \mu A_i \cdot \nu B_j < +\infty, \text{ так как } \mu A_i < +\infty \text{ и } \nu B_j < +\infty$$

все $(A_i \times B_j) \in \alpha \times \beta$ по определению

Что и требовалось доказать.

11 Абсолютная непрерывность интеграла

$\langle X, \alpha, \mu \rangle$ - пространство с мерой

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - суммируема

Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E - \text{измеримое } \mu E < \delta \mid \left| \int_E f d\mu \right| < \epsilon$

Доказательство:

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \subset X_{n+1} \subset \dots$$

$$\mu(\cap X_n) = 0, \text{ т.к. } f - \text{суммируема}$$

$$1. \text{ Мера : } (A \mapsto \int_A |f|) \text{ непрерывна сверху, т.е. } \forall \epsilon \exists n_\epsilon \int_{X_{n_\epsilon}} |f| < \epsilon/2$$

$$2. \text{ Зафиксируем } \epsilon \text{ в доказываемом утверждении, возьмем } \delta := \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon}$$

$$3. \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\epsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\epsilon}^c} |f| \stackrel{*}{\leq} \int_{X_{n_\epsilon}} |f| + n_\epsilon \cdot \mu(E \cap X_{n_\epsilon}^c) \stackrel{**}{<} \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$$

* - В первом слагаемом увеличили множество, во втором посмотрели на определение X_n , взяли дополнение, воспользовались 6-м простейшим свойством интеграла

** - Воспользовались непрерывностью сверху

11.1 Следствие

f - суммируема

e_n - измеримые множества

$$\mu e_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{e_n} f \rightarrow 0$$

12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой,

f_n, f - измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ (сходится по мере),

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» $x \quad |f_n(x)| \leq g(x)$ (g - называется мажорантой)
- g - суммируемая

Тогда:

- f_n, f - суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{X}} f \text{ («уж тем более»)}$$

Доказательство:

1. f_n – суммируема, так как существует мажоранта g
2. f – суммируема по теореме Рисса ($f_{nk} \rightarrow f$ почти везде, $|f_{nk}| \leq g$, тогда $|f| \leq g$ почти везде)
3. «уж тем более»:

$$\left| \int_{\mathbb{X}} f_n - \int_{\mathbb{X}} f \right| \leq \int_{\mathbb{X}} |f_n - f|$$

Допустим, что $\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ уже доказано.

Тогда «уж тем более» очевидно.

4. Докажем основное утверждение:

Разберем два случая:

$$(a) \mu\mathbb{X} < \infty \text{ Фиксируем } \epsilon \geq 0 \quad X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\mu X \rightarrow 0 \text{ (так как } f_n \Rightarrow f)$$

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int_{X_n} |f_n - f| + \int_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon \mu\mathbb{X} \text{ (прим. } \int_{X_n} 2g \rightarrow 0 \text{ по след. к т. об абс. сходимости)}$$

$$(b) \mu\mathbb{X} = \infty$$

Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для g :

$$\forall \epsilon \exists A \subset \mathbb{X} \mid \mu A - \text{конеч.} \quad \int_{X \setminus A} g < \epsilon$$

доказательство:

$$\int_{\mathbb{X}} = \sup \left(\int_{\mathbb{X}} g_k \mid 0 \leq g_k \leq g \right) \text{ (} g_k \text{ – ступен.)}$$

$$\exists g_n \int_{\mathbb{X}} g - \int_{\mathbb{X}} g_n < \epsilon$$

$$A := \text{supp } g_n \text{ (} \text{supp } f := \text{замыкание } \{x \mid f(x) \neq 0\} \text{)}$$

$$A = \bigcup_{k \mid \alpha_k \neq 0} E_k$$

$$g = \sum_{kon} \alpha_k \chi_{E_k} \text{ (} X = \bigsqcup E_k \text{)}$$

$$\int_{\mathbb{X}} g_n = \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty \text{ (} \mu A - \text{конеч.)}$$

$$\int_{\mathbb{X} \setminus A} g = \int_{\mathbb{X} \setminus A} g - g_n \leq \int_{\mathbb{X}} g - g_n < \epsilon$$

Теперь докажем основное утверждение:

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| + \int_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon \text{ (} \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| \rightarrow 0 \text{ по п. (a))}$$

13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой,

f_n, f – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ **почти везде**,

$\exists g : \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g – называется мажорантой)
- g – суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_{\mathbb{X}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{X}} f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. «уж тем более» см. пред. теорему.

2. Докажем основное утверждение:

$$h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

Заметим, что при фикс. x выпол. $0 \leq h_n \leq 2g$ почти везде

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| = 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \uparrow$, $2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде

$$\int_{\mathbb{X}} (2g - h_n) d\mu \rightarrow \int_{\mathbb{X}} 2g \text{ (по т. Леви)}$$

$$\int_{\mathbb{X}} 2g - \int_{\mathbb{X}} h_n \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

14 Теорема Фату. Следствия.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой

f_n, f – измеримы,

$$f_n \geq 0$$

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ «почти везде»,

$$\exists C > 0 \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \leq C$$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$$

$$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) = \text{почти везде} = \lim f_n = f \quad (g_n \rightarrow f \text{ почти везде})$$

$$\int_{\mathbb{X}} g_n \leq \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$$

$$\int_{\mathbb{X}} f = \text{по т. Леви} = \lim \int_{\mathbb{X}} g_n \leq C$$

14.1 Следствие 1

$$f_n, f \geq 0 - \text{измер.}$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

$$\exists C \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$$\exists f_{n_k} \rightarrow f \text{ почти везде}$$

14.2 Следствие 2

$$f_n \geq 0 - \text{измер.}$$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} \underline{\lim}(f_n) \geq \underline{\lim} \left(\int_{\mathbb{X}} f_n \right)$$

Доказательство:

$$\exists n_k \mid \int_{\mathbb{X}} f_{n_k} k \rightarrow +\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{\lim} \int_{\mathbb{X}} f_n$$

Рассмотрим g_{n_k} такое, что $g_{n_k} \uparrow$ и $g_{n_k} \rightarrow \underline{\lim} f$

$$\text{Применяем теорему Леви к нер-ву } \int_{\mathbb{X}} g_{n_k} \leq \int_{\mathbb{X}} f_{n_k}$$

$$\int_{\mathbb{X}} \underline{\lim} f \leq \underline{\lim} \int_{\mathbb{X}} f_n$$

15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

15.1 Лемма

Пусть у нас есть $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ и $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть $\Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A}$ (Кохась сказал, что это легко, и вроде это следует из предыдущих теорем)

Для $\forall E \subset B$ и $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$

Тогда:

ν - мера на B , $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\nu$

Доказательство:

Докажем по определению меры:

$$\nu(\bigsqcup E_i) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E_i)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_i)) = \sum \mu \Phi^{-1}(E_i) = \sum \nu E_i$$

15.2 Следствие

Из этого следует что f - измерима относительно $B \Rightarrow f \odot \Phi$ — измерима относительно Γ

15.3 Теорема

Есть пространства $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$.

$\Phi : X \rightarrow Y; w \geq 0$ — измеримо

ν - взвешенный образ μ

Тогда:

Для $\forall f \geq 0$ - измеримо на Y , $f \odot \Phi$ - измерима (относительно μ)

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$$

Замечание: Тоже верно для f - сумм.

Доказательство:

- $f \odot \Phi$ - измерима (из леммы)
- Возьмем в качестве $f = \chi_E, E \in B$
 $(f \odot \Phi)(x) = \chi_{\Phi^{-1}(E)}$ - определение взвешенного образа меры
 $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$ - доказали первый пункт
- — f - ступенчатая $\Rightarrow f = \sum \alpha_k * \chi_{E_k}$

$$- \int_Y \sum \alpha_k * \chi_{E_k} d\mu = \sum \alpha_k \chi_{E_k} d\nu = /*firstcase*/ = \sum \alpha_k \int_X \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) dx = \int_X \sum \alpha_k \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x) = \int f \odot \Phi * \omega d\mu$$

16 Критерий плотности

Есть пространство $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$

ν - еще одна мера

$\omega \geq 0$ - измерима на X

Тогда:

ω - плотность ν относительно $\mu \iff$ Для любого $A \in \mathbb{A} : \mu A * \inf(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A * \sup_A(\omega)$

Доказательство:

- \Rightarrow - очевидно из стандартного свойства интеграла
- \Leftarrow

- Достаточно доказать, что $\omega > 0$ (когда $\omega = 0$, отсюда следует что интеграл $= 0$ из оценок, что $\nu(E) = 0$)
- Давайте брать такие $A \subset X(\omega > 0)$, тогда $\nu A = \int_A \omega(x) d\mu$
- Тогда для любого $A \in \mathbb{A}$ $A = A_1 \sqcup A_2$, где $A_1 \subset A(\omega > 0)$ & $A_2 \subset A(\omega = 0)$
- Получаем, что $\nu A = \nu A_1 + \nu A_2 = \int_{A_1} \omega + 0 = \int_{A_1} \omega + \int_{A_2} \omega = \int_A \omega$
- Пусть $q \in (0, 1)$ и $A_j := A(q^j \leq \omega(x) < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$. Получается, что $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$
- Рассмотрим $q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} \mu A_j$ и $\nu A_j = \int_{A_j} \omega d\mu$
- $q * \int_A \omega d\mu = q * \sum_{A_j} \int_{A_j} \omega \leq \sum_{A_j} q^j * \mu A_j \leq \sum_{A_j} j * A_j = \nu(A) \leq 1/q * \sum_{A_j} q^j * \mu A_j \leq 1/q * \sum_{A_j} \int_{A_j} \omega = 1/q * \int_A \omega$
- $q * \int_A \omega d\mu \leq \nu(A) \leq 1/q * \int_A \omega d\mu$
- Устремим q к 1 и мы победили

17 Лемма о единственности плотности

$f, g \in L(x)$.

Пусть $\forall A$ - измерима и $\int_A f = \int_A g$.

Тогда:

$f = g$ почти везде

Следствие:

Плотность ν относительно μ определена однозначно с точностью до μ почти везде.

Доказательство:

- Вместо двух функций давайте рассмотрим одну $h = f - g$ и $\forall \int_A h = 0$. Пусть $A_+ = X(h \geq 0)$ и $A_- = X(h < 0)$
- $\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$
 $\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0$
- Пусть $X = A_+ \sqcup A_-$. Тогда $\int_X |h| = \int_{A_+} |h| + \int_{A_-} |h| = 0 \Rightarrow h = 0$ почти везде.

18 Лемма о множестве положительности

Пусть пространство $\langle X, \mathbb{A} \rangle$ и ϕ - заряд

Тогда:

$\forall A \in \mathbb{A} \exists B \subset A : \phi(B) \leq \phi(A)$, где B - множество положительности

Доказательство:

- Пусть $(\phi(A) \geq 0) \&\& (B = \emptyset) \rightarrow \phi(A) \geq 0$
- E - множество ϵ - положительности (Меп), если $\forall C \subset E$ - измеримого $\phi(C) \geq -\epsilon$
- **Утверждение:** Пусть E - Меп. Тогда для любого измеримого $C \subset E$ выполнено $\phi(C) \geq \phi(A)$
 1. Если A - Меп $\Rightarrow C = A$
 2. Пусть A - не Меп. Тогда существует $C_1 \subset A : \phi(C_1) < -\epsilon$ и $\phi(A) = \phi(A_1) + \phi(C)$
Тогда $A_1 = A - C_1$ и $\phi(A_1) > \phi(A)$
 3. A_1 - Меп \Rightarrow хорошо
 4. Иначе повторяем тоже самое с C_2 и так далее пока не будет хорошо
 5. Процесс конечен так как все C_i дизъюнкты и $\phi(\bigsqcup C_i) \neq -\infty$.
- Построим B : C_1 - множество 1 положительности. $C_2 - 1/2$. Тогда $B = \cap C_i$ - Меп
- $\phi(B) = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(C_i) \geq \phi(A)$

19 Теорема Радона—Никодима

Пусть есть пространство (X, \mathbb{A}, μ)

ν - мера из \mathbb{A}

Обе меры конечные и $\nu \prec \mu$.

Тогда:

$\exists! f : X \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ (с точн до почти везде), которая является плотностью ν относительно μ и при этом $(f - \mu)$ суммируема

Доказательство:

- единственность - из леммы
- строим кандидата на роль f . $P = \{p(x) \geq 0, |\forall E : \int_E p * d\mu \leq \nu(E)\}$
 1. $P \neq \emptyset$ и $0 \in P$
 2. $p_1, p_2 \in P \Rightarrow h = \max(p_1, p_2) \in P$

$$\forall E \int_E h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} h d\mu + \int_{E(p_1 < p_2)} h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} p_1 + \int_{E(p_1 < p_2)} p_2 \leq \nu(E(p_1 \geq p_2)) + \nu(E(p_1 < p_2)) = \nu E$$
 По индукции $\max(p_1 \dots p_n) \in P$
 3. $I = \sup \left\{ \int_X p d\mu \mid p \in P \right\}$
 \exists последовательность $f_1 \leq f_2 \leq \dots \in P : \int_X f_n \rightarrow I$
 4. Рассмотрим $p_1, p_2, \dots : \int_X p_n \rightarrow I$, а также $f_n = \max(p_1 \dots p_n) \in P$
 5. Из предыдущих двух получаем, что $f = \lim f_n$ и $\int_E = / * thLevi * / = \lim \int_E f_n \leq \nu E$, а следовательно $\int_X f = \lim \int_X f_n = I \leq \nu(X)$

6. Отлично, проверим, что f - плотность ν относительно μ .

- Докажем, что это не так: $\exists E_0 : \nu E_0 > \int_{E_0} f d\mu$
- $\mu E_0 > 0$ (иначе интеграл равно нулю и мера равна нулю из абстрактной непрерывности)
- Тогда μE_0 - конечна. Возьмем $a > 0 : \nu E_0 - \int_{E_0} f d\mu > a * \mu E_0$
- Тут недостаточно термина мер, поэтому рассмотрим заряд $\phi(E) = \nu E - \int_E f d\mu - a * \mu E$
- Пусть $\phi(E_0) > 0$. Возьмем МП $B \subset E_0 : \phi(B) \geq \phi(E_0) > 0$. Тогда $\nu(B) = \phi(B) + \int_B f * d\mu + a * \mu B \geq \phi(B) > 0$
- Проверим, что $f + a * \chi_B \in P$. Тогда по определению $\int_E (f + a * \chi_B) d\mu = \int_E f * d\mu + \int_{E \setminus B} F * d\mu + \int_{E \cap B} f * d\mu + a * \mu(B \cap E) = \int_E f + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) \leq \int_E f + \nu(E \setminus B) + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) = \nu E - \phi(E \cap B) \leq \int_E f + \phi \leq \nu E$
- Проверим, что $\int_X f + a * \chi_B = I + a * \mu B > I$, что противоречит определению I

20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in O, \Phi \in C^1(O)$

Возьмём $c > |\Phi'(a)| \neq 0$

тогда $\exists \delta > 0 : \forall$ кубической ячейки $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется

$\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Доказательство

$\Phi(Q)$ измеримо, так как образ измеримого множества при гладком отображении измерим

$L := \Phi'(a), L$ обратимо, так как $|L| \neq 0$.

$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$

Можем писать о малое, так как растяжение произошло не более чем в $|L^{-1}|$ раз, а $|L| \neq 0$

Пусть $\Psi(x) := a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))$

$\forall \epsilon > 0 \exists B(a, \delta)$, такой, что при $x \in B(a, \delta) |\Psi(x) - x| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} |x - a|$ (так как $\Psi(x)$ это почти x , только плюс $o(a - x)$)

$a \in Q \subset B(a, \delta)$, где Q - куб со стороной h

$x \in Q$, тогда $|a - x| < \sqrt{m} \cdot h$ (так как диагональ m -мерного куба со стороной h равна $\sqrt{m} \cdot h$)

Тогда $|\Psi(x) - x| < \epsilon h$

При $x, y \in Q, i \in \{1 \dots m\}$

$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |\Psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + |\Psi(y) - y| + h < (1 + 2\epsilon)h$

$\Psi(Q) \subset$ кубу со стороной $(1 + 2\epsilon)h$

$\lambda(\Psi(Q)) < (1 + 2\epsilon)^m \lambda Q$

Φ выражается через Ψ через сдвиги и линейные преобразования. Тогда
 $\lambda(\Phi(Q)) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leq |\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m \cdot \lambda Q$
 Возьмём ϵ так, чтобы $|\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m$ было меньше c . Тогда при таком ϵ
 $\lambda(\Phi(Q)) < c \cdot \lambda Q$

21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$A \subset O$, A - открыто.

$A \subset Q$ (кубическая ячейка) $\subset \overline{Q} \subset O$, то есть граница A не лежит на границе O .

Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G \text{ - open set}} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство

Докажем, что левая часть \geq и \leq правой

\geq очевидно, так как правая часть - нижняя граница для всего, встречающегося под \inf

Докажем \leq

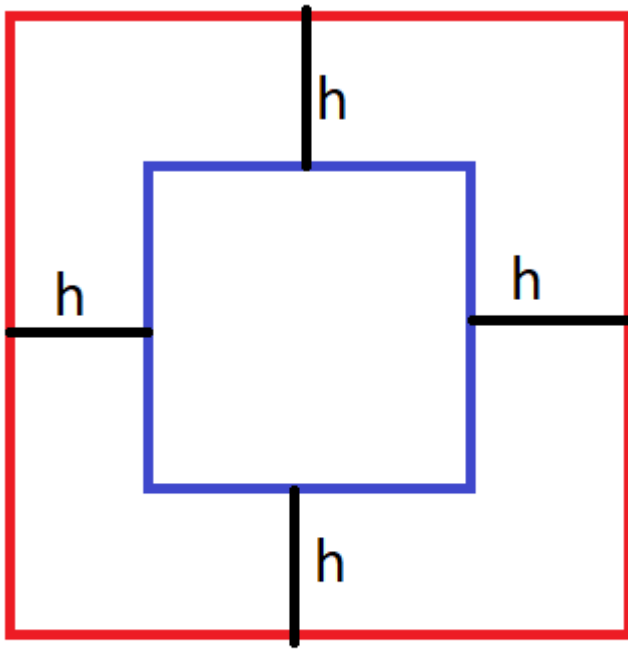
1. $\lambda A = 0$. Тогда правая часть $= 0$.

$$A \subset \overline{Q} \Rightarrow \sup f < +\infty$$

$$\overline{Q} \text{ - компакт, } \alpha := \text{dist}(\overline{Q}, \partial O) > 0$$

Для множества $G : A \subset G \subset \frac{\alpha}{2}$ -окрестности ячейки Q

Назовём Q_1 кубическую ячейку, которая больше Q и у которой каждая сторона отстоит на $\frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$ от соответствующей стороны Q .



$$h = \frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$$

$$A \subset G \subset \text{Int}(Q_1)$$

$$\sup_G f \leq \sup_{\overline{Q_1}} f < +\infty$$

При этом λG может быть выбрана сколь угодно близко к $\lambda A = 0$ по регулярности меры Лебега.

$$2. \lambda A > 0, \sup_A f < c$$

Возьмём c_1 :

$$\sup_A f < c_1 < c$$

Выберем ϵ так чтобы

$$\epsilon \cdot c_1 < \lambda A \cdot (c - c_1) \quad (*)$$

G_ϵ - такое множество, что $A \subset G_\epsilon$, G_ϵ - открытое, $\lambda(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$

$$G_1 := f^{-1}((-\infty; c_1)) \cap G_\epsilon - \text{открытое}$$

$$\lambda(G_1 \setminus A) < \epsilon$$

$$\lambda G_1 \cdot \sup_{G_1} f \leq (\lambda A + \epsilon) \cdot c_1 < \lambda A \cdot c \text{ (из } (*))$$

(так как $G \subset f^{-1}((-\infty; c_1))$, то есть f на G_1 не больше c_1)

$$\inf(\lambda G \cdot_G f) < \lambda A \cdot c$$

Переходя к \inf по c , получаем что требовалось

22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

TODO: Илья

23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

TODO: Илья

24 Теорема (принцип Кавальери)

(X, α, μ) и (Y, β, ν) - пространства с мерами, причем μ, ν — σ -конечные и полные
 $m = \mu \times \nu$, $C \in \alpha \times \beta$, тогда:

1. При п.в. x C_x - измеримо (ν -измеримо), т.е. $C_x \in \beta$
2. Функция $x \rightarrow \nu C_x$ — измеримая (в широком смысле) на X

NB: ϕ — измерима в широком смысле, если она задана при п.в. x , и $\exists f : X \rightarrow R'$ - измеримая и $\phi = f$ п.в. При этом $\int_X \phi = \int_X f$ (по опр.)

3. $mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$

Доказательство: Рассмотрим D — совокупность все множеств, для которых утв. теоремы верно.
 $\rho = \alpha \otimes \beta$ — п/к изм. пр-ков.

1. $\rho \subset D$
 $C = A \times B$. то есть $\forall x C_x = \emptyset$ if $x \notin A$, B if $x \in A$
 $(\mu A < +\infty, \nu B < +\infty)$
 $x \rightarrow \nu(C_x)$, функция $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$ — изм.
 $\int_X \nu(C_x) d\mu = \nu B \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \nu B \cdot \mu A = mC$
2. $E_i \in D, E_i - \text{dis} \Rightarrow E := \sqcup E_i \in D$
при п.в. x $(E_i)_x$ — измеримы
при п.в. x все $(E_i)_x$ — измеримы, $E_x = \sqcup (E_i)_x$ — изм.
 $\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$ ($\nu(E_i)_x$ — изм. как функция от x) \Rightarrow функция $x \rightarrow \nu E_x$ — измерима
 $\int_X \nu E_x d\mu(x) = \sum_i \int \nu(E_i)_x d\mu(x) = \sum_i mE_i = mE$
3. $E_i \in D, E_1 \supset E_2 \supset \dots; mE_i < +\infty$. Тогда $E := \cap E_i \in D$
 $\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty (*)$
функция $x \rightarrow \nu(E_i)_x$ — суммируема \Rightarrow п.в. конечна.
при всех x $(E_i)_x \downarrow E_x$, т.е. $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots$ и $\cap (E_i)_x = E_x$
при п.в. x $\nu(E_i)_x$ — конечны (для таких x).
Тогда E_x — измерима и $\lim \nu(E_i)_x = \nu E_x$ по непр-ти меры ν сверху.
(Th. Лебега) $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — сумм. \Rightarrow функция $x \rightarrow \nu E_x$ — изм.

$\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ (нерп. сверху меры m). Этот предельный переход корректен как раз по теореме Лебега ($f_n \rightarrow f$ п.в. $g : |f_n| \leq g$ — сумм. Тогда $\int f_n \rightarrow \int f$). NB: мы доказали про пересечения и про объединения (пусть пересечения убывающие, а объединения — дизъюнктные, но это лечится). Поэтому $\cap_j (\cup_i A_{i,j}) \in D$, если $A_{i,j} \in \rho$ ($\rho \subset D$).

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$

$\exists H \in D$, H имеет вид $\cap(\cup A_{i,j})$, где все $A_{i,j} \in \rho$

$E \subset H, mH = 0$ из п.5 т. о продолжении (ЧТО?! поясните плез)

$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu(x) \Rightarrow \nu H_x = 0$ (= 0 при п.в. x).

$E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$ — ν -изм. (из полноты ν) и $\nu E_x = 0$ п.в. x

$\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$

5. C — неизм, $mC < +\infty$. Тогда $C \in D$.

$C = H \setminus e$, где $me = 0$, H — вида $\cap(\cup A_{i,j})$.

$C_x = H_x \setminus e_x$ — изм. при п.в. x

$\nu e_x = 0$ п.в. x (проверено в п.4)

$\nu C_x = \nu H_x = \nu e_x$ — изм. п.в. x

$\int_X \nu C_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = \int \nu H_x = mH = mC$.

6. C — m -изм. произвольное

$X = \sqcup X_k, Y = \sqcup Y_n$ (μX_k — кон, νY_n — кон.).

$C = \sqcup_{k,n} (C \cap (X_k \times Y_n)) \in D$ (по п.2) (т.к. $C \cap (X_k \times Y_n) \in D$ по п.5)

25 Теорема Тонелли

$\langle \mathbb{X}, \alpha, \mu \rangle, \langle \mathbb{Y}, \beta, \nu \rangle$ — пространства с мерой

μ, ν — σ -конечны, полные

$m = \mu \times \nu$

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, f \geq 0$, f — измерима относительно m

Тогда:

1. при *почти всех* $x \in X$ f_x — измерима на \mathbb{Y} ,

где $f_x : \mathbb{Y} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, f_x(y) = f(x, y)$

(симметричное утверждение верно для y)

2. Функция $x \mapsto \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \int_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)$ — измерима* на \mathbb{X}

(симметричное утверждение верно для y)

3. $\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f(x, y) dm = \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство:

Докажем в 3 пункта, постепенно ослабляя ограничения на функцию f

1. Пусть $C \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ — измеримо относительно m , $f = \chi_C$

(а) $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$, где C_x — сечение по x

C_x — измеримо при *почти всех* x , так как это одномерное сечение, таким образом f_x — измеримо, при *почти всех* x .

(b) $\phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \nu C_x$ - по принципу Кавальери это измеримая* функция.

$$(c) \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \nu C_x d\mu \stackrel{\text{Кавальери}}{=} m_C \stackrel{\text{опр. инт}}{=} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} \chi_C dm = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f(x, y) dm$$

2. Пусть f - ступенчатая, $f \geq 0$, $f = \sum_{\text{кон}} a_k \chi_{C_k}$

(a) $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}$ - измерима при почти всех x

(b) $\phi(x) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ - измерима* как конечная сумма измеримых

$$(c) \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \sum_{\text{кон}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} \int_{\mathbb{X}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k m C_k = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm$$

3. Пусть f - измеримая, $f \geq 0$

$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$, где $g_n \geq 0$ - ступенчатая, g_n - монотонно возрастает к f (из Теоремы об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми)

(a) $f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$ - измерима при почти всех x .

$$(b) \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \lim_{\mathbb{Y}} \int (g_n)_x d\nu$$

$$\phi_n(x) := \int_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu - \text{измерима по пункту 1}$$

$0 \leq (g_n)_x$ - возрастает, тогда $\phi(x)$ - измерима, $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq \dots$ и $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$

$$(c) \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \phi_n(x) d\mu \stackrel{\text{п.2}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} g_n dm \stackrel{\text{т. Леви}}{=} \int f dm$$

26 Формула для Бета-функции

$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1}$, где s и $t > 0$ - Бета-функция

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \text{ где } s > 0, \text{ тогда } B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \left[\begin{matrix} y \rightarrow u \\ y = u - x \end{matrix} \right] = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \left(\int_x^{+\infty} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx = \\ &= \int_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq x}} \dots = \text{меняем порядок интегрирования} \\ &= \int_0^{+\infty} du \int_0^u dx (x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u}) = \left[\begin{matrix} x \rightarrow v \\ x = uv \end{matrix} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\int_0^1 u^{s-1} v^{s-t} u^{t-1} (1-v)^{t-1} u dv \right) du = \\ &= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left(\int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du = B(s, t) \Gamma(s+t), \text{ чтд.} \end{aligned}$$

27 Объем шара в \mathbb{R}^m

$$B(0, R) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} \lambda_m(B(0, R)) &= \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi_1 \dots \int_0^\pi d\phi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{m-1} r^{m-1} (\sin\phi_1)^{m-2} \dots (\sin\phi_{m-2})^{m-2} = \\ &= \int_0^\pi (\sin\phi_k)^{m-2-(k+1)} = B\left(\frac{m-k}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2}+\frac{1}{2})} \\ &\rightarrow = \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \dots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi = \\ &= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi \frac{m}{2}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} R^m \end{aligned}$$

28 Теорема о вложении пространств L^p

$$\mu E < +\infty \quad 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1. $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2. $\forall f$ — измеримы $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

Доказательство:

- $2 \Rightarrow 1$ (Это очевидно: достаточно рассмотреть неравенство из пункта 2. Из него следует, что $\|f\|_s < \|f\|_r$. см. опред. L_p)
- Рассмотрим два случая:

1. $r = +\infty$ (очев.)

$$\|f\|_s \leq \left(\int |f|^s * 1 \right)^{1/s} \leq ((esssup|f|)^s \int 1 d\mu)^{1/s} = \|f\|_\infty * \mu E^{1/s}$$

(последнее по опред. $esssup$)

2. $r < +\infty$

$$(\|f\|_s)^s = \int |f|^s * 1 d\mu \leq \left(\int |f|^r \right)^{\frac{s}{r}} * \left(\int 1^{\frac{r}{r-s}} \right)^{\frac{(r-s)}{r}} = (\|f\|_r)^s * \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$

(существенный шаг: применить неравенство Гельдера)

29 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$$1 \leq p < +\infty$$

$$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

Тогда:

1. • $f \in L_p$

- $f_n \rightarrow f$ в L_p

Тогда: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (по мере)

2. • $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (либо если $f_n \rightarrow f$ почти везде)
• $|f_n| \leq g$ почти при всех n , $g \in L_p$

Тогда: $f_n \rightarrow f$ в L_p

Доказательство:

1.

$$X_n(\epsilon) := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\mu X_n(\epsilon) = \int_{X_n} \left(\frac{f_n - f}{\epsilon}\right)^p = \frac{1}{\epsilon^p} \int_{X_n} |f_n - f|^p \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_X |f_n - f|^p = \frac{1}{\epsilon^p} (\|f_n - f\|_p)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ Тогда $\exists n_k \mid f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

Тогда $|f| \leq g$ п. в.

$|f_n - f|^p \leq (2g)^p$ – сумм. функции т. к. $g \in L_p$

$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (по теореме Лебега)

30 Полнота L^p

$L_p(E, \mu)$ $1 \leq p < \infty$ – полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходится по норме $\|f\|_p$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, k \mid \|f_n - f_k\| < \epsilon \Rightarrow \exists f \mid \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

Доказательство:

1. Построим f .

Рассмотрим фундаментальную последовательность f_n .

$\exists N_1$ при $n = n_1 \mid k > N_1 \mid \|f_{n_1} - f_k\| < \frac{1}{2}$

$\exists N_2$ при $n = n_2 \mid k > N_2, N_1 \mid \|f_{n_2} - f_k\| < \frac{1}{4}$

...

Тогда: $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1$

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

Докажем, это функция f корректно задана:

- $S_N(x) := \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$
 $\|S_N\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1$
 Тогда по Теореме Фату: $\|S\|_p \leq 1$

Тогда $|S|^p$ – суммируема

Тогда $S(x)$ конечна при п. в. x и ряд $\sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ абс. сход., а значит и просто сходиться при п. в. x

$$f := f_{n_1} + \sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \text{ т. е. } f = \text{п. в. } \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

2. Проверим, что $f_n \rightarrow f$ в L_p

Т. к. f_n – фунд., то $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n_k > N \quad \|f_n - f_{n_k}\| < \epsilon \Rightarrow \|f_n - f_{n_k}\|^p = \int_E |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \epsilon^p$

Тогда по теореме Фату: $\int_E |f - f_n|^p \leq \epsilon^p$

Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad \|f - f_n\|_p < \epsilon$

Замечание: L_∞ – полное (упражнение)