Определения по матану, семестр 4

8 июня 2018 г.

Содержание

1 Свойство, выполняющееся почти везде

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой, и $\omega(x)$ – утверждение, зависящее от точки x.
$E := \{x : \omega(x)$ — ложно$\}$ и $\mu E = 0$. Тогда говорят, что $\omega(x)$ верно при почти всех (п.в.) x.

2 Сходимость почти везде

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой, и $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
Говорим, что $f_n \to f(x)$ почти везде, если $\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}$ измеримо и имеет меру 0.

3 Сходимость по мере

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны, измеримы
Говорят, что f_n сходится к f по мере μ (при $n \to +\infty$) (обозначается $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$) если $\forall \epsilon > 0$ $\mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$

4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой, $\mu(X) < +\infty$
$f_n, f : X \to \mathbb{R}$ - п.в. конечны, измеримы
$f_n \to f$ почти всюду.
Тогда $\forall \epsilon > 0$ $\exists X_\epsilon \subset X, \mu(X \setminus X_\epsilon) < \epsilon$, f_n равномерно сходится к f на X_ϵ

5 Интеграл ступенчатой функции

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой.

$f = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ - ступенчатая функция, E_k - измеримые дизъюнктные множества, $f \geqslant 0$.
Интегралом ступенчатой функции f на множестве X назовём

$$\int\limits_X f d\mu := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что $[0 \cdot \infty = 0]$.

6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой.
f - измеримо, $f \geqslant 0$, её интегралом на множестве X назовём

$$\int\limits_X f d\mu := sup(\int\limits_X g d\mu)$$

по всем g: $0 \leqslant g \leqslant f, g-$ступенчатая.

7 Суммируемая функция

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой.
$f-$измерима, $\int\limits_X f^+$ или $\int\limits_X f^-$ конечен (хотя бы один из них).
Тогда интегралом f на X назовём

$$\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X f^+ - \int\limits_X f^-$$

Если конечен $\int\limits_X f$ (то есть конечны интегралы по обеим срезкам), то f называют суммируемой.

8 Интеграл суммируемой функции

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой.
$f-$ измерима, $E \in \mathbb{A}$.
Тогда интегралом f на множестве E назовём

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f d\mu := \int\limits_{X} f \cdot \chi(E) d\mu$$

f суммируемая на E, если $\int\limits_X f^+\chi(E)$ и $\int\limits_X f^-\chi(E)$ конечны.

9 Произведение мер

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $< Y, \mathbb{B}, \nu >$ - пространства с мерой.
μ, ν - σ-конечные меры.
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$
$m_0 : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}$
$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$
m - называется произведением мер μ и ν, если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ на некоторую σ-алгебру $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$.
$m = \mu \times \nu$ - обозначение.
$< X \times Y, \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}, \mu \times \nu >$ - произведение пространств с мерой.

10 Теорема Фубини

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $< Y, \mathbb{B}, \nu >$ - пространства с мерой,
μ, ν — σ-конечные и полные,
$m = \mu \times \nu$,
f — суммируемая на $X \times Y$ по m.
Тогда:

- при почти всех x функция $f_x \in L(Y, \nu)$, то есть суммируема на Y по ν

при почти всех y функция $f^y \in L(X,\mu)$

- $$x \mapsto \phi(x) \mid \phi(x) = \int\limits_Y f_x d\nu \in L(X,\mu)$$

$$y \mapsto \psi(y) \mid \psi(y) = \int\limits_X f^y d\mu \in L(Y,\nu)$$

Эти функции суммируемы (по μ в X и по ν в Y соответствено).

- $$\int\limits_{X\times Y} f dm = \int\limits_X \phi(x) d\mu = \int\limits_X (\int\limits_Y f d\nu) d\mu$$

$$\int\limits_{X\times Y} f dm = \int\limits_Y \psi(y) d\nu = \int\limits_Y (\int\limits_X f d\mu) d\nu$$

11 Образ меры при отображении

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой, $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.
ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ.

12 Взвешенный образ меры

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой, $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).

$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} \omega \; d\mu$.
ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ.
При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

13 Плотность одной меры по отношению к другой

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ — пространство с мерой.
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
$\nu(E) = \int_E \omega(x) \; d\mu$. ν — мера на X.
ω называется плотностью ν относительно μ.

14 Заряд, множество положительности

14.1 Заряд

$< X, \mathbb{A}, \_ >$ — пространство с σ-алгеброй.
$\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).
ϕ счётно аддитивна.
Тогда ϕ — заряд.

14.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, B измеримо: $\phi(B) \geq 0$.

15 Сферические координаты в R^3 и в R^m, их Якобианы

$$x_1 = r \cdot \cos\phi_1 \qquad\qquad 1 \leq i \leq m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$$
$$x_2 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \qquad\qquad i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$$

$x_3 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdot \cos\phi_3$ $\qquad r \geq 0$

$\vdots$

$x_{m-2} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-3} \cdot \cos\phi_{n-2}$

$x_{m-1} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2} \cdot \cos\phi_{n-1}$

$x_m = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2} \cdot \sin\phi_{n-1}$

$\mathcal{J} = r^{n-1} \cdot (\sin\phi_1)^{n-2} \cdot (\sin\phi_2)^{n-3} \cdots (\sin\phi_{n-2})^1 \cdot (\sin\phi_{n-1})^0$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m-мерный вектор на нормаль к $(m-1)$-мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого $\mathbb{R}^2$. Уже в нём рассматривем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

16 Интегральные неравества Гельдера и Минковского

$< X, \mathbb{A}, \mu >$; $f, g : E \subset X \to \mathbb{C}$ (E - изм.) — заданы п.в, измеримы.

16.1 Нераветсво Гельдера

$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. <u>Тогда:</u> $\int\limits_E |fg| d\mu \leq \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g|^q d\mu)\right)^{\frac{1}{q}}$

16.2 Нераверство Минковского

$1 \leq p < +\infty$. <u>Тогда:</u> $\left(\int\limits_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

17 Интеграл комплекснозначных функции

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой. $E \in \mathbb{A}$
$f : E \to \mathbb{C}$
f измерима (суммируема), если $Im(f)$ и $Re(f)$ измеримы (суммируема)
$\int_E f = \int_E Re(f) + i \cdot \int_E Im(f)$

18 Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \le p < +\infty$

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $E \in \mathbb{A}$.
$L'_p(E, \mu) = \{f :$ п.в. $E \to \mathbb{C}$, изм., $\int\limits_E |f|^p d\mu < +\infty\}$
Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).
У этого пространства есть дефект — если определить норму как $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0, будут иметь норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:
$f \sim g$, если $f = g$ п.в.
$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu)/\sim$ - лин. норм. пр-во с нормой $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $||f||_p$ за норму f в пространстве L_p.

19 Пространство $L_\infty(E,\mu)$

$L_\infty(E,\mu) = \{f : \text{п.в. } E \to \mathbb{C},\ \operatorname*{ess\,sup}_E |f| < +\infty\}$

NB1: $||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

20 Существенный супремум

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $E \subset X$ — изм., f : п.в. $E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf\{A \in R : f(x) \leq A$ при п.в. $x\}$.
В этом определении A - существенная верхняя граница.
Свойства:

1. $\operatorname*{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2. $f(x) \leq \operatorname*{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int\limits_E |fg| d\mu \leq \operatorname*{ess\,sup}_E |g| \cdot \int\limits_E |f| d\mu$.

21 Фундаментальная последовательность, полное пространство

21.1 Фундаментальная последовательность

$\{a_n\}$ - фунд. посл. в метрическом пр-ве (X, ρ), если $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, k > N : \rho(a_n, a_k) < \epsilon$

21.2 Полное пространство

X - полное пространство, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

22 Плотное множество

Множество A плотно во множестве B, если $\forall b \in B \ \forall \epsilon > 0$ верно, что $U_\epsilon(b) \cap A \neq \emptyset$.

23 Финитная функция

$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. $\exists$ шар $B : \varphi \equiv 0$ вне B. Тогда ϕ — финитная.
Множество непрерывных финитных функций обозначаем как $C_0(\mathbb{R}^m)$.

24 Мера Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{P}^1$ – полукольцо ячеек в $\mathbb{R}$.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, монотонно возрастает.
$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ-конечная мера на $\mathbb{P}^1$.

NB1: g не обязательно непр., но должна возрастать.
Тогда $g(c \pm 0) = \lim\limits_{x \to c \pm 0} g(x)$.
$\mu[a, b) := g(b - 0) - g(a - 0)$ — тоже σ-конечная мера (если g не непр. слева, то $\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — не мера (нет непр. слева)).

Тогда мерой Лебега-Стилтьеса будем называть меру μ_g, полученную из μ по теореме о лебеговском продолжении меры.

25 Функция распределения

$< X, \mathbb{A}, \mu >$, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима, п.в. конечна.

Пусть $\forall t \in \mathbb{R} \quad \mu X(h < t) < +\infty$.
Тогда $H(t) := \mu X(h < t)$ — это функция распределения функции h по мере μ.

26 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$M \subset R^3$ – простое 2-мерное многообразие, C^1 гладкости.
$\phi : \underset{\text{откр. обл.}}{O} \subset R^2 \to R^3$, $\phi \in C^1$ – гомофорфизм, $\phi(O) = M$
$E \subset M$ – изм. по Лебегу, если $\phi^{-1}(E)$ – изм. по Лебегу в R^2

27 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$

$S(E) := \iint\limits_{\phi^{-1}(E)} |\phi'_u \times \phi'_v| dudv$ – взвеш. образ меры Лебега отн. ϕ. Значит это мера на $\mathbb{A}_M$

28 Поверхностный интеграл первого рода

M – простое, гл, 2-мерное в R^3, ϕ – параметризация
f – изм. отн. S (см. выше), $f > 0$ (или f – суммируем. по S)
Тогда: $\int_M f dS$ – называет инт. первого рода функ. f по поверхности M

29 Кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$

$M \subset \mathbb{R}^3$ называется кусочно-гладкой, если M представляет собой объединение:
* конечного числа простых гладких поверхностей
* конечного числа простых гладких дуг
* конечного числа точек

30 Гильбертово пространство

$\mathbb{H}$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствуйющей нормы, называется Гильбертовым.

31 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}, \sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l :$ $x_k \perp x_l$.

32 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$.
$\sum x_n$ сходится к x, если
$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $S_n \to x$ (то есть, $|S_n - x| \to 0$ — сходимость по норме).

33 Ортогональное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l : e_k \perp e_l$, $\forall k : e_k \neq 0$.

34 Ортонормированное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если e_k — ортогональное семейство векторов, и $\forall k : |e_k| = 1$.

35 Коффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортонормированная система в $\mathbb{H}, x \in \mathbb{H}$.

$c_k(x) = \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

36 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

37 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$.

1. $\{e_k\}$ — **базис**, если $\forall x \in \mathbb{H}: \ \exists c_k$, что $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$
2. $\{e_k\}$ — **полная** О.С., если $(\forall k : z \perp e_k) \Rightarrow z = 0$.
3. $\{e_k\}$ — **замкнутая** О.С., если $\forall x \in \mathbb{H} : \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 = ||x||^2$.

38 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

39 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

F_1, F_2 – два касательных векторных поля к поверхности M.
$\forall p \in M \quad F_1(p), F_2(p)$ – Л.Н.З. касательные векторы.

Тогда поле нормалей стороны определяется, как $n := F_1 \times F_2$

Репе́р - пара векторов из $F_1 \times F_2$.

40 Интеграл II рода

M — простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$.
n_0 — фиксированная сторона (одна из двух).
$F : M \to \mathbb{R}^3$ – векторное поле.

Тогда интегралом II рода назовем $\int\limits_M \langle F, n_0\rangle ds$

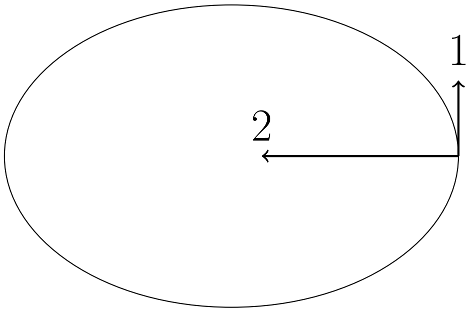
Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака.
2. Не зависит от параметризации.
3. $F = (P, Q, R)$.
   Тогда интеграл имеет вид $\iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$.
   NB: $Qdxdz = -Qdzdx$.

41 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый — снаружи от контура (задает направление «движения» по петле), второй — внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали к поверхности.



42 Тригонометрический ряд

- $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

  (где a_i, b_i – коэффициенты ряда).
- Другая форма:
  $$\sum_{k=\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

  Тогда $S_n := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$.

43 Коэффициенты Фурье функции

- $$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \ dx$$
- $$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \ dx$$
- $$_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \ dx$$

44 Ядро Дирихле и Фейера

44.1 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt)$$

44.2 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

45 Ротор, дивергенция векторного поля

$F = (P, Q, R)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$.
$(P, Q, R) \to (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$. Такое преобразование называется ротором или вихрем. Обозначается как $rot\ F$.
$div\ F = P'_x + Q'_y + R'_z$. Многомерный случай определяется аналогично.

46 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле A — соленоидальное, если $\exists$ векторное поле $B : rot\ B = A$. Тогда B называется векторным потенциалом поля A.

47 Бесскоординатное определение ротора и дивергенции

$rot\ F$ — это такое векторное поле, что $\forall a\, \forall n_0 (rotF(a))_{n_0} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r} F_l dl$

$divF(a) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iiint_{B(a,r)} divF_l\, dx\, dy\, dz =$
$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iint_{\partial B(a,r)} < F, n_0 > \ dS$

48 Свертка

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$$

где $f, K \in L_1([-\pi, \pi])$.

49 Аппроксимативная единица. TODO

TODO

50 Усиленная аппроксимативная единица. TODO

TODO

51 Метод суммирования средними арифметическими. TODO

TODO

52 Суммы Фейера. TODO

TODO

53 Преобразование Фурье. TODO

TODO

54 Свертка в $L^1(\mathbb{R}^m)$. TODO

TODO

55 Интеграл Фурье, частичный интеграл Фурье. TODO

TODO

56 Несобственный интеграл по мере Deprecated

$$\int_a^{\to b} f d\lambda_1 = \lim_{B \to b-0} \int_a^B f d\lambda_1$$

где f - локально суммируемая (т. е. $\forall [a, B] \subset [a, b)$ f — сумм. на $[a, B]$)

57 L_{loc} Deprecated

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$
$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
Y — метрическое пространство (или метризуемое).
$\forall y$ $f^y(x) = f(x, y)$ — суммируема на X.
f удовлетворяет L_{loc} ($f \in (L_{loc})$) если:

- $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема.
- $\exists U(a)$ $\forall y \in \dot{U}(a)$ при п. в. $x \in \mathbb{X}$ $|f(x, y)| \leq g(x)$