Теоремы по матану, семестр 4

14 июня 2018 г.

Содержание

1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
f — измеримая функция на X, $\forall x\ f(x) \geq 0$. Тогда $\exists$ ступенчатые функции f_n, такие что:

1. $\forall x\ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$.

2. $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$.

Следствие 1:
$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримая. Тогда $\exists$ ступенчатая $f_n : \forall x : lim f_n(x) = f(x)$ и $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.
Доказательство:

1. Рассмотрим $f = f^+ - f^-. f^+ = max(f, 0), f^- = max(-f, 0)$. Срезки измеримы: $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$, при этом f и $g \equiv 0$ измеримы (f^- измерима аналогично).

2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции $f_n^+ \to f^+, f_n^- \to f^-$. Тогда и $f_n^+ - f_n^-$ это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов: $f_n^+ - f_n^- \to f^+ - f^- = f$. $|f_n| = |f_n^-| + |f_n^+|, |f| = |f^-| + |f^+|$ (так как одновременно только одна срезка может быть неотрицательно), поэтому $|f_n| \leqslant |f|$

Следствие 2:
f, g — измеримые функции. Тогда fg – измеримая функция. При этом считаем, что $0 \cdot \infty = 0$.
Доказательство:

1. Рассмотрим $f_n \to f : |f_n| \leq |f|, g_n \to g : |g_n| \leq |g|$ из первого следствия. Тогда $f_n g_n \to fg$ и fg измерима по теореме об измеримости пределов и супремумов (произведение ступенчатых функций – ступенчатая функция, значит, измеримая)

Следствие 3:
f, g — измеримые функции. Тогда $f + g$ – измеримая функция. При этом считаем, что $\forall x$ не может быть, что $f(x) = \pm\infty, g(x) = \mp\infty$
Доказательство:
Доказывается как следствие 2.

2 Измеримость монотонной функции

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое по Лебегу, $E' \subset E, \lambda_m(E \setminus E') = 0, f : E \to \mathbb{R}$. Пусть сужение $f : E' \to \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда f измерима на E.
Доказательство:

1. $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a), e := E \setminus E', \lambda_m(e) = 0.$
2. $E'(f < a)$ открыто в E', так как f непрерывна (прообраз открытого множества открыт). $E'(f < a) = E' \cap F$, где F открыто в $\mathbb{R}^m$ (теорема об открытых множествах в пространстве и подпространстве). F измеримо, поскольку открытые множества измеримы. E' измеримо. Поэтому $E'(f < a)$ измеримо как пересечение измеримых.
3. $e(f < a)$ - подмножество e, а $\lambda_m(e) = 0$, поэтому $\lambda_m(e(f < a)) = 0 \Rightarrow e(f < a)$ измеримо
4. Следовательно $E(f < a)$ измеримо как объединение измеримых множеств, следовательно, f измерима на E.

Следствие:
$f :< a, b > \to \mathbb{R}$ монотонна. Тогда f измерима.
Доказательство:
Множество разрывов монотонной функции не более чем счётно, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$
$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны, измеримы
$f_n \to f$ (поточечно, п.в.)
Тогда $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
<u>Доказательство:</u>

1. подменим значения f_n и f на некотором множестве меры 0 так, чтобы сходимость $f_n \to f$ была всюду. (Так можно сделать. Действительно, $f_n \to f$ на $X \setminus e$, $\mu e = 0$
   f_n - конечно на $X \setminus e_n$,
   f - конечно на $X \setminus e_0$.
   Тогда на $(X \setminus \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} e_n)$ функции конечны и есть сходимость $f_n \to f$. По свойствам меры $\mu \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} e_n = 0$. Тогда определим на $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} e_n$ $f_n = f = 0$. Это очевидно даст нам необходимую конечность и поточечную сходимость.)

2. (частный случай) $f_n \to f \equiv 0$. Тогда пусть $\forall x f_n(x)$ - монотонно (по n). $|f_n(x)|$ - убывает с ростом n и $X(|f_n| \geq \epsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \epsilon)$. А также $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} X(|f_n| \geq \epsilon) = \emptyset$.
   $$\begin{cases} \mu X < +\infty \\ \ldots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots \end{cases}$$
   $\Rightarrow \mu E_n \to \mu \cap E_n$ - Th о непрерывности меры сверху.
   $\Rightarrow \mu X(|f_n \geq \epsilon|) \to \mu \emptyset = 0$

3. (общий случай) $f_n \to f$. Рассмотрим $\phi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$. Заметим свойства ϕ:

$$\begin{cases} \phi_n(x) \to 0 \\ \phi_n \downarrow_n \end{cases}$$

$X(|f_n - f| \geq \epsilon) \subset X(\phi_n \geq \epsilon) \Rightarrow$ по монотонности меры имеем $\mu X(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu X(\phi_n \geq \epsilon) \overset{part.case}{\longrightarrow} 0$, ч.т.д.

4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой
$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны, измеримы
$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$.
Тогда $\exists n_k \uparrow : f_{n_k} \to f$ п.в.
<u>Доказательство:</u> $\forall k\ \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$
Тогда $\exists n_k : \forall n \geq n_k : \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$ (можно считать $n_1 < n_2 < \ldots$)
Проверим $f_{n_k} \to f$ п.в. :
$E_k := \bigcup\limits_{j=k}^{+\infty} X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j})$
$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$
$E_0 := \bigcap\limits_{k \in N} E_k$.
$\mu E_k \leq \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \leq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^k} = 2^{1-k}$ - конечно, убывает $\Rightarrow \mu E_k \to \mu E_0 \Rightarrow \mu E_0 = 0$ (т.к. $\mu E_k \to 0$).
Рассмотрим $x \notin E_0$, т.е. $\exists k : x \notin E_k$. Тогда $\forall j \geq k\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$ при $n \geq n_j$, т.е. $f_{n_k} \to f$, ч.т.д.

<u>Следствие:</u> Если $f_n \Rightarrow f$ и $|f_n| \leq g$ п.в., то $|f| \leq g$ п.в.
<u>Доказательство:</u> Рассмотрим последовательность f_{n_k} где $f_{n_k} \to f$ п.в. и вдоль нее применим Th о двух городовых.

$$\begin{cases} f_{n_k}(x) \to f(x)\ \forall x \in X \setminus e_1 \\ |f_n(x)| \leq g(x)\ \forall x \in X \setminus e_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow |f| \leq g$ на $(X \setminus e_1) \setminus e_2$

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

5.1 Для определения (5), ступенчатые функции

1. $\int\limits_{\mathbb{X}} f$ не зависит от представления f как ступенчатой функции, то есть если f реализуется как $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ и как $f = \sum\limits_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$, то интегралы по этим функциям равны

   <u>Доказательство:</u>

   Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

   Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

   Тогда $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum\limits_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum\limits_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$

   $\int f = \sum\limits_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum\limits_i (\lambda_i \cdot \sum\limits_j (\mu F_{i,j})) = \sum\limits_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f$ для первого разбиения

   Аналогично для второго разбиения получаем

   $\int f = \sum\limits_{i,j} (\alpha_j \cdot \mu F_{i,j}) = \sum\limits_j (\alpha_j \cdot \sum\limits_i (\mu F_{i,j})) = \sum\limits_j (\lambda_j \cdot \mu G_j) = \int f$ для второго разбиения, что и требовалось доказать

2. f, g -измеримые ступенчатые функции, $f \leqslant g$, тогда $\int\limits_{\mathbb{X}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g$

   <u>Доказательство:</u>

   Пусть $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$, $g = \sum\limits_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$

   Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

   Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

   Тогда $\int f = \sum\limits_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leqslant \sum\limits_j (\alpha_j \cdot \mu F_{i,j}) = \int g$, что и требовалось доказать

5.2 Для окончательного определения

1. Монотонность $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{X}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g$

   Доказательство:

   (a) $f, g \geqslant 0$, тогда доказательство тривиально (по свойствам супремума)

   (b) $\int\limits_{\mathbb{X}} f = \int\limits_{\mathbb{X}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{X}} f^-$
   $\int\limits_{\mathbb{X}} g = \int\limits_{\mathbb{X}} g^+ - \int\limits_{\mathbb{X}} g^-$
   Из того, что $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+ \leqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g^+$, а $\int\limits_{\mathbb{X}} f^- \geqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g^-$ следует, что $\int\limits_{\mathbb{X}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{X}} g$

2. $\int\limits_{\mathbb{E}} 1 \cdot d\mu = \mu E$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} 0 \cdot d\mu = 0$

   Очевидно из определения интеграла ступенчатой функции

3. $\mu E = 0, f$-измерима, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = 0$, даже если $f = \infty$ на $\mathbb{E}$

   Доказательство:

   (a) f-ступенчатая $\Rightarrow$ ограниченная
   $f = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = \sum \lambda_k \cdot \mu(E \cap E_k)$
   Но $\mu(E \cap E_k) = 0$ (так как $\mu E = 0$), тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = 0$

   (b) f - измеримая, $f \geqslant 0$.
   $\int\limits_{\mathbb{E}} f = \sup(\int\limits_{\mathbb{E}} g)$, где $0 \leqslant g \leqslant f$, g - ступенчатая
   Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = \sup(0) = 0$

   (c) f - произвольная измеримая
   Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} f = \int\limits_{\mathbb{E}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{E}} f^- = 0 - 0 = 0$

4. (a) $\int\limits_{\mathbb{E}} -f = -\int\limits_{\mathbb{E}} f$

(b) $\forall c \in \mathbb{R} : \int\limits_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = c \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} f$

Доказательство:

(a) $(-f)^+ = f^-$

$(-f)^- = f^+$

Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} -f = \int\limits_{\mathbb{E}} (-f)^+ - \int\limits_{\mathbb{E}} (-f)^- = \int\limits_{\mathbb{E}} f^- - \int\limits_{\mathbb{E}} f^+ = -\int\limits_{\mathbb{E}} f$

(b) Пусть $c > 0$. Если $c < 0$, то по предыдущему случаю можем рассматривать для $-c < 0$. Если $c = 0$, то по пункту 2 $\int\limits_{\mathbb{E}} (0 \cdot f) = \int\limits_{\mathbb{E}} 0 = 0 = 0 \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} f$

i. Пусть $f \geqslant 0$

$\int\limits_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup(\int\limits_{\mathbb{E}} g)$, где $0 \leqslant g \leqslant c \cdot f$, g - ступенчатая

Пусть $g = c \cdot \widetilde{g}$, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup(\int\limits_{\mathbb{E}} (c \cdot \widetilde{g}))$, где $0 \leqslant c \cdot \widetilde{g} \leqslant c \cdot f$, $\widetilde{g}$ - ступенчатая

Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup(\int\limits_{\mathbb{E}} (c \cdot \widetilde{g})) = \sup(c \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{g}) = c \cdot \sup(\int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{g}) = c \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} f$

ii. Если f - произвольная:

$\int\limits_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \int\limits_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^+ - \int\limits_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^- = \int\limits_{\mathbb{E}} c \cdot f^+ - \int\limits_{\mathbb{E}} c \cdot f^- = c \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} f^+ - c \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} f^- = c \cdot (\int\limits_{\mathbb{E}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{E}} f^-) = c \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} f$

5. Если существует $\int\limits_{\mathbb{E}} f d\mu$, то $|\int\limits_{\mathbb{E}} f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} |f|$

Доказательство:

$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$

$\int\limits_{\mathbb{E}} -|f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} |f|$

$-\int\limits_{\mathbb{E}} |f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} |f|$

Тогда $|\int\limits_{\mathbb{E}} f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} |f|$

6. f - измеримая на $\mathbb{E}$, $\mu\mathbb{E} < \infty$

   $a \leqslant f \leqslant b$, тогда $a \cdot \mu E \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant b \cdot \mu E$

   Доказательство:

   $a \leqslant f \leqslant b \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{E}} a \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} b$

   $a \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} 1 \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant b \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} 1$

   $a \cdot \mu\mathbb{E} \leqslant \int\limits_{\mathbb{E}} f \leqslant b \cdot \mu\mathbb{E}$

   Следствие:

   Если f - Измеримая и ограниченная на $\mathbb{E}, \mu\mathbb{E} < \infty$, тогда f - суммируемая на $\mathbb{E}$

7. f - суммируемая на $\mathbb{E} \Rightarrow f$ почти везде конечная на $\mathbb{E}$ (то есть $f \in \alpha^0(\mathbb{E})$)

   Доказательство:

   (a) Пусть $f \geqslant 0$

      Пусть $f = +\infty$ на A и пусть $\mu A > 0$

      Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : f \geqslant n \cdot \chi_A$

      Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : \int\limits_{\mathbb{E}} f \geqslant n \cdot \int\limits_{\mathbb{E}} \chi_A = n \cdot \mu A \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{E}} f = +\infty$

   (b) f любого знака

      Распишем $f = f^+ - f^-$, по предыдущему пункту f^+, f^- конечны почти везде $\Rightarrow f$ тоже конечно почти везде

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$— измеримы. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$— изм., $f \geqslant 0$

Тогда: $\int\limits_A f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f$

Доказательство:

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$
   $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot (\sum\limits_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum\limits_i (\sum\limits_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum\limits_i (\int\limits_{A_i} f)$

2. Докажем, что $\int\limits_A f \leqslant \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$

   (a) Рассмотрим $0 \leqslant g \leqslant f-$ ступенчатая. $\int\limits_A g = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} g \leqslant \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$

   (b) Переходя к sup получаем желаемое

3. Теперь докажем, что $\int\limits_A f \geqslant \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$

   (a) $A = A_1 \sqcup A_2$

      i. Рассмотрим g_1, g_2 − ступенчатые такие, что $0 \leqslant g_i \leqslant f \cdot \chi_{A_i}$

      ii. Рассмотрим их общее разбиение $E_k: \ g_i = \sum\limits_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

      iii. $g_1 + g_2$ − ступенчатая и $0 \leqslant g_1 + g_2 \leqslant f \cdot \chi_A$

      iv. $\int\limits_{A_1} g_1 + \int\limits_{A_2} g_2 \overset{lemma}{=} \int\limits_A (g_1 + g_2) \overset{iii}{\leqslant} \int\limits_A f$

      v. Поочерёдно переходя к sup по g_1 и g_2 получаем: $\int\limits_{A_1} f + \int\limits_{A_2} f \leqslant \int\limits_A f$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ будем последовательно отщеплять последнее множество по (a)

(c) $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

i. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$

ii. $A = (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \sqcup B$, где $B = \bigsqcup\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i$

iii. $\int\limits_A f = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f + \int\limits_B f \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f$ (равенство, поскольку мы рассматриваем A как конечное объединение $A_1, \dots, A_n$ и B).

iv. Переходим к lim по n

Следсвие 1: $0 \leqslant f \leqslant g$ - измеримы и $A \subset B$ - измеримы $\Rightarrow \int\limits_A f \leqslant \int\limits_B g$

$\int\limits_B g \geqslant \int\limits_B f = \int\limits_A f + \int\limits_{B \setminus A} f \geqslant \int\limits_A f$

Следствие 2: f - суммируема на $A \Rightarrow \int\limits_A f = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$

Достаточно рассмотреть срезки f^+ и f^-

Следствие 3: $f \geqslant 0$ - изм. $\delta : \mathbb{A} \to \overline{\mathbb{R}} (A \longmapsto \int\limits_A f d\mu) \Rightarrow \delta$ - мера

7 Теорема Леви

$(X, \mathbb{A}, \mu)$, $f_n \geqslant 0$ - изм.
$f_1(x) \leqslant ... \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant ...$ при почти всех x
$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ при почти всех x (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

Тогда: $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu$

Доказательство:
$N.B. \int\limits_X f_n \leqslant \int\limits_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$
f - измерима как предел последовательности измеримых функций

1. $\leqslant$

   Очевидно: $f_n \leqslant f$ при п.в $x \Rightarrow \int\limits_X f_n \leqslant \int\limits_X f$. Делаем предельный переход по n.

2. $\geqslant$

   (a) Логичная редукция: хочется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) \geqslant \int\limits_X g$, где $0 \leqslant g \leqslant f$, g ступенчатая.

   (b) Наглая редукция: докажем, что $\forall c \in (0,1) : \lim \int\limits_X f_n(x) \geqslant c \cdot \int\limits_X g$

      i. $E_n = \{x \mid f_n(x) \geqslant c \cdot g\}$. Очевидно $E_1 \subset ... \subset E_n \subset E_{n+1} \subset ...$

      ii. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = X$ т.к. $c < 1$

      iii. $\int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_{E_n} f_n \geqslant \int\limits_{E_n} c \cdot g$ (по определению E_n)
      $\Rightarrow \lim \int\limits_X f_n \geqslant c \cdot \lim \int\limits_{E_n} g = c \cdot \int\limits_X g$

      iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем непрерывность меры снизу

      v. Устремляем c к 1.

8 Линейность интеграла Лебега

$f, g \geqslant 0$, измеримые
Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}} (f+g) = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$
<u>Доказательство:</u>

1. Пусть f, g - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

   $f = \sum\limits_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

   $g = \sum\limits_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$

$\int\limits_{\mathbb{E}}(f+g) = \sum\limits_k(\lambda_k+\alpha_k)\cdot\mu E_k = \sum\limits_k \lambda_k\cdot\mu E_k + \sum\limits_k \alpha_k\cdot\mu E_k = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

2. $f, g \geqslant 0$, измеримые

   Тогда $\exists h_n : 0 \leqslant h_n \leqslant h_{n+1} \leqslant f$, h_n ступенчатые

   $\exists\widetilde{h_n} : 0 \leqslant \widetilde{h_n} \leqslant \widetilde{h_{n+1}} \leqslant g$, $\widetilde{h_n}$ ступенчатые

   $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = f$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \widetilde{h_n} = g$

   $\int\limits_{\mathbb{E}}(h_n+\widetilde{h_n}) = \int\limits_{\mathbb{E}} h_n + \int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n}$

   $\int\limits_{\mathbb{E}}(h_n+\widetilde{h_n}) \to \int\limits_{\mathbb{E}}(f+g)$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} h_n \to \int\limits_{\mathbb{E}} f$

   $\int\limits_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n} \to \int\limits_{\mathbb{E}} g$

   Тогда $\int\limits_{\mathbb{E}}(f+g) = \int\limits_{\mathbb{E}} f + \int\limits_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

3. Если f, g - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$ *почти всюду* на $\mathbb{E}$, тогда $\int\limits_{\mathbb{E}}(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x))d\mu(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x)d\mu(x)$

<u>Доказательство:</u>

$S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x)$; $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

1. S_N - возрастает к S при почти всех x $\xRightarrow{\text{Т. Леви}} \int\limits_{\mathbb{E}} S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int\limits_{\mathbb{E}} S = \int\limits_{\mathbb{E}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

2. С другой стороны $\int\limits_{\mathbb{E}} S_N = \int\limits_{\mathbb{E}} \sum\limits_{n=1}^{N} u_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu$

3. Найденные пределы совпадают в силу единственности предела последовательности, что и требовалось доказать.

10 Теорема о произведении мер

$< X, \mathbb{A}, \mu >, < Y, \mathbb{B}, \nu >$ - пространства с мерой
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$
$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

Тогда:

1. m_0 - мера на полукольце $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$

2. μ, ν - σ-конечны $\Rightarrow m_0$ - σ-конечна

Доказательство:

1. Неотрицательность m_0 очевидна. Необходимо доказать счетную аддитивность
   Пусть $P = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} P_k$, где $P \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$
   $P = A \times B; \; P_k = A_k \times B_k$
   Заметим, что:

   - $\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y)$, в силу дизъюнктности P_k ((x, y) входит максимум в одно множество из всех P_k)

- $\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\cdot\chi_B(y)$, так как (x, y) $\in A\times B \Leftrightarrow x\in A$ И $y\in B$

Воспользовавшись вышесказанным получим:
$\chi_P(x,y) = \chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\cdot\chi_B(y)$
$\chi_P(x,y) = \sum\chi_{P_k}(x,y) = \sum\chi_{A_k\times B_k}(x,y) = \sum\chi_{A_k}(x)\cdot\chi B_k(y)$
Имеем следующее равенство:
$\chi_A(x)\cdot\chi_B(y) = \sum\chi_{A_k}(x)\cdot\chi B_k(y)$
Проинтегрируем его по мере μ по x, затем по мере ν по y, получим:
$\mu A\cdot\nu B = \sum\mu A_k\cdot\nu B_k$, то есть $m_0(P) = \sum m_0(P_k)$, что и требовалось доказать.

2. μ, ν - σ-конечны $\Rightarrow X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где $\mu A_k < +\infty$; $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, где $\nu B_k < +\infty$
$X\times Y = \bigcup\limits_{i,j}(A_i\times B_j)$
$m_0(A_i\times B_j) = \mu A_i\cdot\nu B_j < +\infty$, так как $\mu A_i < +\infty$ и $\nu B_j < +\infty$
все $(A_i\times B_j)\in\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ по определению
Что и требовалось доказать.

11 Абсолютная непрерывность интеграла

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ - суммируема

Тогда $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall E -$ измеримое $\mu E < \delta\ |\int\limits_E f d\mu| < \epsilon$

<u>Доказательство:</u>
$X_n := X(|f|\geq n)$
$X_n\supset X_{n+1}\supset ...$
$\mu(\cap X_n) = 0$, т.к. f — суммируема и потому почти везде конечна.

1. Мера : $(A \mapsto \int\limits_A |f|)$ также равна 0 на $\cap X_n$. По непрерывности сверху: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_\epsilon \int\limits_{X_{n_\epsilon}} |f| < \epsilon/2$

2. Зафиксируем ϵ в доказываемом утверждении, возьмем $\delta := \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon}$

3. $|\int\limits_E f d\mu| \le \int\limits_E |f| = \int\limits_{E \cap X_{n_\epsilon}} |f| \; + \int\limits_{E \cap X_{n_\epsilon}^c} |f| \overset{*}{\le} \int\limits_{X_{n_\epsilon}} |f| \; + \; n_\epsilon \cdot \mu(E \cap X_{n_\epsilon}^c) \overset{**}{<} \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$

   * - В первом слагаемом увеличили множество, во втором посмотрели на определние X_n, взяли дополнение, воспользовались 6-м простейшим свойством интеграла

   ** - Воспользовались непрерывностью сверху

11.1 Следствие

f — суммируема
e_n— измеримые множества

Тогда если $\mu e_n \to 0$, то $\int\limits_{e_n} f \to 0$

12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой,
f_n, f – измеримы,
$f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (сходится по мере),
$\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» $x \quad |f_n(x)| \le g(x)$ (g называется мажорантой)

- g - суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$
- $\int\limits_X f_n \to \int\limits_X f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. f_n – суммируема, так как существует мажоранта g:
   (a) $|f_n| \leq g$, поэтому $\int\limits_X |f_n| \leq \int\limits_X g$.
   (b) g суммируема и положительна $\Rightarrow \int\limits_X g < +\infty \Rightarrow \int\limits_X |f_n| < +\infty \Rightarrow$ f_n суммируема.
2. f – суммируема по теореме Рисса ($f_{n_k} \to f$ почти везде, $|f_{n_k}| \leq g$, тогда $|f| \leq g$ почти везде)
3. «уж тем более»:
   $|\int\limits_{\mathbb{X}} f_n - \int\limits_{\mathbb{X}} f| \leq \int\limits_{\mathbb{X}} |f_n - f|$
   Допустим, что $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$ уже доказано.
   Тогда «уж тем более» очевидно.
4. Докажем основное утверждение:
   Разберем два случая:
   (a) $\mu X < \infty$ Фиксируем $\epsilon \geq 0 \quad X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$
   $\mu X_n \to 0$ (так как $f_n \rightrightarrows f$)
   $\int\limits_X |f_n - f| = \int\limits_{X_n} |f_n - f| + \int\limits_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int\limits_{X_n} 2g + \int\limits_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon\mu X$
   (прим. $\int\limits_{X_n} 2g \to 0$ по след. к т. об абс. сходимости)

(b) $\mu X = \infty$

Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для g:

$\forall \epsilon \ \exists A \subset X : \mu A$ — конечно, $\int\limits_{X \setminus A} g < \epsilon$

доказательство:

$\int\limits_X g = \sup\{\int\limits_X g_k \mid 0 \le g_k \le g\}$ (g_k – ступен.)

$\exists g_n : \int\limits_X g - \int\limits_X g_n < \epsilon$

$A := supp\ g_n$ ($supp\ f := \{x \mid f(x) \ne 0\}$)

$A = \bigcup\limits_{k \mid \alpha_k \ne 0} E_k$ (где $g_n = \sum\limits_{\text{конечная}} \alpha_k \chi_{E_k}$)

$\int\limits_X g_n = \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty$ (μA - конеч.)

$\int\limits_{X \setminus A} g = \int\limits_{X \setminus A} (g - g_n) \le \int\limits_X (g - g_n) < \epsilon$

Теперь докажем основное утверждение:

$\int\limits_X |f_n - f| = \int\limits_A |f_n - f| + \int\limits_{X \setminus A} |f_n - f| \le \int\limits_A |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon$

($\int\limits_A |f_n - f| \to 0$ по п. (a))

13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой,
f_n, f – измеримы,
$f_n \to f$ **почти везде**,
$\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \le g(x)$ (g называется мажорантой)
- g - суммируемая

Тогда:

- f_n, f — суммируемы
- $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$
- $\int\limits_X f_n \to \int\limits_X f$ («уж тем более»)

<u>Доказательство:</u>

1. Суммируемость и «уж тем более» см. пред. теорему.
2. Докажем основное утверждение:

   $h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$

   Заметим, что при фикс. x выпол. $0 \le h_n \le 2g$ почти везде

   $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |f_n - f| = 0$ почти везде

   $2g - h_n \uparrow,\ 2g - h_n \to 2g$ почти везде

   $\int\limits_X (2g - h_n) d\mu \to \int\limits_X 2g$ (по т. Леви)

   $\int\limits_X 2g - \int\limits_X h \to \int\limits_X 2g$, значит, $\int\limits_X h_n \to 0$

   $\int\limits_X |f_n - f| \le \int\limits_X h_n \to 0$

14 Теорема Фату. Следствия.

$< X, \mathbb{A}, \mu >$ – пространство с мерой
f_n, f – измеримы,
$f_n \ge 0$
$f_n \to f$ «почти везде»
$\exists C > 0\ \forall n\ \int\limits_X f_n d\mu \le C$
<u>**Тогда:**</u> $\int\limits_X f \le C$
<u>Доказательство:</u>
$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \le g_{n+1} \le \dots)$
$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) \overset{\text{почти везде}}{=} \lim f_n = f$ ($g_n \to f$ почти везде)

$\int\limits_X g_n \leq \int\limits_{\mathbb{X}} f_n \leq C$
$\int\limits_X f = \textit{по т. Леви} = \lim \int\limits_X g_n \leq C$

14.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$ – измер.
$f_n \overset{\mu}{\rightrightarrows} f$
$\exists C\ \forall n \int\limits_X f_n \leq C$
Тогда:

- $\int\limits_X f \leq C$

Доказательство:
$\exists f_{n_k} \to f$ почти везде

14.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$ – измер.
Тогда:

- $\int\limits_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int\limits_X f_n$

Доказательство:
$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$
$g := \lim g_n = \underline{\lim} f_n$
$\int\limits_X g_n \leq \int\limits_X f_n$ по монотонности интеграла. Перейдём к нижнему пределу по n:
$\underline{\lim} \int\limits_X g_n \leq \underline{\lim} \int\limits_X f_n$
$\int\limits_X g \overset{\text{т. Леви}}{=} \lim \int\limits_X g_n = \underline{\lim} \int\limits_X g_n$

15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

15.1 Лемма

Пусть у нас есть $< X, \mathbb{A}, \mu >$ и $< Y, \mathbb{B}, \_ >$ и $\Phi : X \to Y$
Пусть $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$
Тогда:
ν — мера на $(Y, \mathbb{B})$, $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} 1 \cdot d\mu$
Доказательство:
Докажем по определению меры:

$$\nu(\bigsqcup E_i) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E_i)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_i) = \sum \mu\Phi^{-1}(E_i) = \sum \nu E_i$$

15.2 Следствие

Из этого следует, что если f — измеримая функция в Y (относительно ν), то $f \circ \Phi$ измерима относительно μ.

15.3 Теорема

Есть пространства $< X, \mathbb{A}, \mu >$ и $< Y, \mathbb{B}, \nu >$.
$\Phi : X \to Y$ $w \geq 0$ — измеримая, ν — взвешенный образ μ (w — плотность)
Тогда:
Для $\forall f \geq 0$ — измерима на Y, $f \circ \Phi$ - измерима (относительно μ)
$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$
Замечание: То же верно, если f суммируема.
Доказательство:

- $f \circ \Phi$ - измерима (из леммы)

- Возьмем $f = \chi_E, E \in \mathbb{B}$
  $(f \circ \Phi)(x) = \chi_{\Phi^{-1}(E)}$ — определение взвешенного образа меры
  $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$ — доказали первый пункт

- – f — ступенчатая $\Rightarrow f = \sum \alpha_k * \chi_{E_k}$
  – $\int\limits_Y \sum \alpha_k * \chi_{E_k} d\nu = \sum \int\limits_Y \alpha_k \chi_{E_k} d\nu \overset{\textit{первый случай}}{=} \sum \alpha_k \int\limits_X \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x)dx = \int\limits_X \sum \alpha_k \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x) = \int f \circ \Phi * \omega d\mu$

- Если f - произвольная неотрицательная, то будем строить возрастающую последовательность ступенчатых, поточечно сходящихся к f. Тогда $\int_Y f_n d\nu = \int_X f_n(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$. По теореме Леви делаем переход под знаком интеграла и всё доказываем.

16 Критерий плотности

Есть пространство $< X, \mathbb{A}, \mu >$
ν — еще одна мера.
$\omega \geq 0$ — измерима на X.
Тогда:
ω — плотность ν относительно $\mu \Longleftrightarrow$ Для любого $A \in \mathbb{A} : \mu A \cdot \inf_A(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A \cdot \sup_A(\omega)$
Доказательство:

- $\Rightarrow$: очевидно из стандартного свойства интеграла

- $\Leftarrow$

  Что за бред тут вообще написан?

  – Достаточно доказать, что $\omega > 0$ (когда $\omega = 0$, отсюда следуется что интеграл $= 0$ из оценок, что $\nu(E) = 0$)
  – Давайте брать такие $A \subset X(\omega > 0)$, тогда $\nu A = \int\limits_A \omega(x) d\mu$
  – Тогда для любого $A \in \mathbb{A}$ $A = A_1 \sqcup A_2$, где $A_1 \subset A(\omega > 0) \& A_2 \subset A(\omega = 0)$

- Получаем, что $\nu A = \nu A_1 + \nu A_2 = \int\limits_{A_1} \omega + 0 = \int\limits_{A_1} \omega + \int\limits_{A_2} \omega = \int\limits_{A} \omega$
- Пусть $q \in (0,1)$ и $A_j := A(q^j \le \omega(x) < q^{j-1}), j \in Z$. Получается, что $A = \bigsqcup_{j \in Z} A_j$
- Рассмотрим $q^j \mu A_j <= \nu A_j <= q^{j-1} * \mu A_j$ и $\nu A_j = \int\limits_{A_j} \omega d\mu$
- $q * \int\limits_{A} \omega d\mu = q * \sum \int\limits_{A_j} \le \sum q^j * \mu A_j \le \sum j * A_j = \nu(A) \le 1/q * \sum q^j * \mu A_j \le 1/q * \sum \int\limits_{A_j} \omega = 1/q * \int\limits_{A} \omega$
- $q * \int\limits_{A} \omega d\mu \le \nu(A) \le 1/q * \int\limits_{A} \omega d\mu$
- Устремим q к 1 и мы победили

17 Лемма о единственности плотности

$f, g \in L(x)$.
Пусть $\forall A$ — измеримо: $\int\limits_{A} f = \int\limits_{A} g$.

Тогда:

$f = g$ почти везде

Следствие:

Плостность ν относительно μ определена однозначно с точностью до μ-почти везде.

Доказательство:

- Вместо двух функций давайте рассмотрим одну $h = f - g$ и $\forall \int\limits_{A} h = 0$. Пусть $A_+ = X(h \ge 0)$ и $A_- = X(h < 0)$
- $\int\limits_{A_+} |h| = \int\limits_{A_+} h = 0$

  $\int\limits_{A_-} |h| = -\int\limits_{A_-} h = 0$

- $X = A_+ \sqcup A_-$. Тогда $\int\limits_X |h| = \int\limits_{A_+} |h| + \int\limits_{A_-} |h| = 0 \Rightarrow h = 0$ почти везде.

  Почему? Ну потому что $\forall \epsilon > 0 : h > 0$ на X_ϵ меры 0 (иначе интеграл не 0)

  То есть $|h| > \frac{1}{k}$ на X_k меры 0. Используем непрерывность сверху $(X_1 \supset X_2 \supset \ldots)$, поэтому $|h| > 0$ на X_0 меры 0, поэтому $h = 0$ пв

18 Лемма о множестве положительности

Пусть есть пространство $< X, \mathbb{A} >$ и ϕ — заряд.
Тогда:
$\forall A \in \mathbb{A}\ \exists B \subset A : \phi(B) \geq \phi(A)$ и B — множество положительности
Доказательство:

- Если $\phi(A) \leq 0$, возьмём $B = \emptyset$. Далее $\phi(A) > 0$.

- E — множество ϵ-положительности (МϵП), если $\forall C \subset E$, C измеримо: $\phi(C) \geq -\epsilon$

- **Утверждение:** $\forall \epsilon > 0$ A содержит МϵП C, такое что $\phi(C) \geq \phi(A)$.

  1. Если А — МϵП, то $C = A$
  2. Пусть А — не МϵП. Тогда существеут $C_1 \subset A : \phi(C_1) < -\epsilon$.
     Пусть $A_1 = A \setminus C$. $\phi(A_1) > \phi(A)$
  3. Если A_1 — МϵП, то это и есть искомое C. Иначе продолжим строить так $A_2, A_3, \ldots$ и $C_2, \ldots$.
  4. Процесс конечен, так как все C_i дизьюнктны, $\phi(C_i) < -\epsilon$, но $\phi(\bigsqcup C_i)$ конечно по определению заряда.

- Построим B: C_1 - множество 1-положительности в A. C_2 — множество $\frac{1}{2}$-положительности в C_1, и т. д. Тогда $B = \bigcap C_i$ — МϵП для любого ϵ, значит, это МП.

- $\phi(B) = \lim\limits_{i \to \infty} \phi(C_i) \geq \phi(A)$ Это какая-то пародия на непрерывность меры, только для зарядов?

19 Теорема Радона-Никодима

Пусть есть пространство $(X, \mathbb{A}, \mu)$.
ν — мера на $\mathbb{A}$.
Обе меры конечные и $\nu \prec \mu$ (абсолютная непрерывность меры: если $\mu E = 0$, то $\nu E = 0$).
Тогда:
$\exists! f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (с точностью до почти везде), которая является плотностью ν относительно μ и при этом f суммируема по μ.
Доказательство:

- единственность — из леммы
- строим кандидата на роль f. $P = \{p(x) | p \geq 0, \text{изм.}, \ \forall E \in \mathbb{A} : \int\limits_E p \cdot d\mu \leq \nu(E)\}$

1. $P \neq \emptyset$ и $0 \in P$
2. $p_1, p_2 \in P \Rightarrow h = max(p_1, p_2) \in P$
   $\forall E \int\limits_E h d\mu = \int\limits_{E(p_1 \geq p_2)} h d\mu + \int\limits_{E(p_1 < p_2)} h d\mu = \int\limits_{E(p_1 \geq p_2)} p_1 + \int\limits_{E(p_1 < p_2)} p_2 \leq \nu(E(p_1 \geq p_2)) + \nu(E(p_1 < p_2)) = \nu E$
   По индукции $max(p_1 ... p_n) \in P$
3. $I = \sup\limits_{p \in P} \int\limits_X p d\mu$
   $\exists$ последовательность $f_1 \leq f_2 \leq \dots \in P : \int\limits_X f_n d\mu \to I$ докажем, что она существует
4. Рассмотрим $p_1, p_2, \dots : \int\limits_X p_n \to I$ (потому что супремум), а также $f_n = max(p_1 \dots p_n) \in P$
5. $f := \lim f_n$. Тогда $\int\limits_E f d\mu \overset{\text{т. Леви}}{=} \lim \int\limits_E f_n d\mu \leq \nu E$, а следовательно $\int\limits_X f = lim \int\limits_X f_n = I \leq \nu(X)$ Почему вообще $\int\limits_X f_n d\mu \to I$?
6. Отлично, проверим, что f — плотность ν относительно μ.

(a) Предположим, что это не так: $\exists E_0 : \nu E_0 > \int\limits_{E_0} f d\mu$

(b) $\mu E_0 > 0$ (иначе интеграл равено нулю и мера ν равна нулю из абсолютной непрерывности)

(c) Возьмем $a > 0 : \nu E_0 - \int\limits_{E_0} f d\mu > a \cdot \mu E_0$

(d) Рассмотрим заряд $\phi(E) = \nu E - \int\limits_{E} f d\mu - a \cdot \mu E$ (это законно, потому что меры конечные)

(e) $\phi(E_0) > 0$ (пункт **c**). Возьмем МП $B \subset E_0 : \phi(B) \geq \phi(E_0) > 0$. Тогда $\nu(B) = \phi(B) + \int\limits_{B} f \cdot d\mu + a \cdot \mu B \geq \phi(B) > 0$

(f) Проверим, что $f + a \cdot \chi_B \in P$. По определению: $\int\limits_{E} (f + a \cdot \chi_B) d\mu =$ $\int\limits_{E \setminus B} f \cdot d\mu + \int\limits_{E \cap B} f \cdot d\mu + a \cdot \mu(B \cap E) = \int\limits_{E \setminus B} f + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) \overset{f \in P}{\leq}$ $\nu(E \setminus B) + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) = \nu E - \phi(E \cap B) \overset{\phi \geq 0}{\leq} \nu E$

(g) $\int_X f + a \cdot \chi_B = I + a \cdot \mu B > I$, что противоречит определению I.

20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$a \in O, \Phi \in C^1(O)$
Возьмём $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$
тогда $\exists \delta > 0 : \forall$ кубической ячейки $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

<u>Доказательство</u>

$\Phi(Q)$ измеримо, так как образ измеримого множества при гладком отображении измерим
$L := \Phi'(a), L$ обратимо, так как $|\det L| \neq 0$.
$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$
$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$

Можем писать о малое, так как растяжение произошло не более чем в $|\det L^{-1}|$ раз, а $|\det L| \neq 0$
Пусть $\Psi(x) := a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))$
$\forall \epsilon > 0\ \exists B(a, \delta)$, такой, что при $x \in B(a, \delta)$ $|\Psi(x) - x| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$ (так как $\Psi(x)$ это почти x, только плюс $o(x - a)$)
$a \in Q \subset B(a, \delta)$, где Q — куб со стороной h
$x \in Q$, тогда $|a - x| < \sqrt{m} \cdot h$ (так как диагональ m-мерного куба со стороной h равна $\sqrt{m} \cdot h$)
Тогда $|\Psi(x) - x| < \epsilon h$
При $x, y \in Q$, $i \in \{1...m\}$
$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leqslant |\Psi(x)_i - x_i| + |\Psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leqslant |\Psi(x) - x| + |\Psi(y) - y| + h < (1 + 2\epsilon)h$
$\Psi(Q) \subset$ кубу со стороной $(1 + 2\epsilon)h$
$\lambda(\Psi(Q)) < (1 + 2\epsilon)^m \lambda Q$
Φ выражается через Ψ через сдвиги и линейные преобразования. Тогда
$\lambda(\Phi(Q)) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \leqslant |\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m \cdot \lambda Q$
Возьмём ϵ так, чтобы $|\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m$ было меньше c. Тогда при таком ϵ
$\lambda(\Phi(Q)) < c \cdot \lambda Q$

21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»

$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$A \subset O$, A - открыто.
$A \subset Q$(кубическая ячейка) $\subset \overline{Q} \subset O$, то есть граница A не лежит на границе O.
Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G - open\ set} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство
Докажем, что левая часть $\geqslant$ и $\leqslant$ правой

$\geqslant$ очевидно, так как правая часть - нижняя граница для всего, встречающегося под inf

Докажем $\leqslant$ Почему это не очевидно? Может, с формулировкой что-то не так?

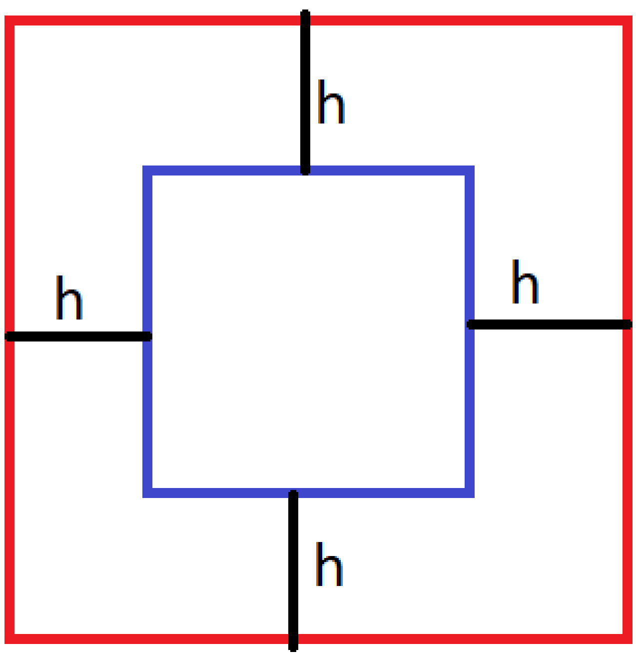
1. $\lambda A = 0$. Тогда правая часть $= 0$.

   $A \subset \overline{Q} \Rightarrow \sup f < +\infty$

   $\overline{Q}$ - компакт, $\alpha := dist(\overline{Q}, \partial O) > 0$

   Для множества $G : A \subset G \subset \dfrac{\alpha}{2}$—окрестности ячейки Q

   Назовём Q_1 кубическую ячейку, которая больше Q и у которой каждая сторона отстоит на $\dfrac{\alpha}{2\sqrt{m}}$ от соответствующей стороны Q.

   $$h = \frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$$

   $A \subset G \subset Int(Q_1)$

   $\sup_G f \leqslant \sup_{\overline{Q_1}} f < +\infty$

   При этом λG может быть выбрана сколь угодно близко к $\lambda A = 0$ по регулярности меры Лебега.

2. $\lambda A > 0, \sup_A f < c$

   Возьмём c_1:

   $\sup_A f < c_1 < c$

   Выберем ϵ так чтобы

   $\epsilon \cdot c_1 < \lambda A \cdot (c - c_1) \quad$ **(*)**

   G_ϵ - такое множество, что $A \subset G_\epsilon, G_\epsilon -$открытое, $\lambda(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$

   $G_1 := f^{-1}((-\infty; c_1)) \cap G_\epsilon -$ открытое

   $\lambda(G_1 \setminus A) < \epsilon$

   $\lambda G_1 \cdot \sup_{G_1} f \leqslant (\lambda A + \epsilon) \cdot c_1 < \lambda A \cdot c$ (из **(*)**)

   (так как $G \subset f^{-1}(-\infty; c_1)$, то есть f на G_1 не больше c_1)

   $\inf(\lambda G \cdot \sup_G f) < \lambda A \cdot c$

   Переходя к inf по c, получаем что требовалось

22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - Диффеоморфизм, $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$
$\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$
<u>Доказательство:</u>
Пусть $\nu A = \lambda(\Phi(A))$, проверим, что $|\det \Phi'(x)|$ - плотность ν относительно λ.
Обозначим $J(x) = |\det \Phi'(x)|$
Проверим $\forall A : \inf_{x \in A} J(x) \cdot \lambda A \leqslant \nu A \leqslant \sup_{x \in A} J(x) \cdot \lambda A$
Достаточно проверить только правую, так как левая эквивалентна $\lambda A \leqslant (\inf_{x \in A} J_\Phi(x))^{-1} \nu A$, а $(\inf_{x \in A} J_\Phi(x))^{-1} = \sup_{x \in A} (J_\Phi(x))^{-1} = \sup_{y \in A'} J_{\Phi^{-1}}(y)$ (где $A' = \Phi(A), A = \Phi^{-1}(A')$)
Тогда $\lambda(\Phi^{-1}(A')) \leqslant \sup_{y \in A'} J_{\Phi^{-1}}(y) \cdot \lambda A'$ экваивалентно правому неравенству, но для Φ^{-1}
Докажем правую часть

1. A - кубическая ячейка, $A \subset \overline{A} \subset O$

   Пусть это неверно, тогда $\exists Q : \sup_{x \in Q} J(x) \cdot \lambda Q < \nu Q$. Возьмём $c : \sup_{x \in Q} J(x) < c$, тогда $c \cdot \lambda Q < \nu Q$. Разобьём Q на 2^m кубических ячеек, сторона каждой из которых в 2 раза меньше стороны исходной, тогда $\exists Q_1 : c \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Аналогично делим Q_1, по индукции строим вложенную последовательность таких ячеек. $\forall n : c \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n (*)$

   Рассмотрим $a = \bigcap Q_n$, при этом $J(a) = |def \Phi'(a)| < c$. Тогда по лемме $\exists B(a, \delta)$: при $Q_n \subset B(a, \delta) : \lambda \Phi(Q_n) < c \cdot \lambda Q_n$ - противоречие с (*).

2. A - открытое множество. Тогда $A = \bigsqcup A_i$. (кубические ячейки). Способ разбиения был в прошлом семе.

   Тогда $\nu A = \sum \nu A_i \leqslant \sum \sup_{A_i} J \cdot \lambda A_i \leqslant \sum \sup_A J \cdot \lambda A_i = \sup_A J \cdot \sum \lambda A_i = \sup_A J \cdot \lambda A$

3. A - произвольное измеримое.

   $\nu A \leqslant \nu G$ ($A \subset G, G$ - открытое), тогда $\nu A \leqslant \sup_G J \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A \leqslant \inf_{A \subset G - openset} (\sup_G J \cdot \lambda G) \Rightarrow \nu A \leqslant \sup_A J \cdot \lambda A$ (из леммы)

23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм
$O' = \Phi(O)$ — открытое
f задана на $O', f \geqslant 0$, измерима по Лебегу, тогда
$\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$
<u>Доказательство:</u>
Изи.
$\nu(A) = \lambda \Phi(A), \nu$ имеет плотность $J\Phi$ относительно λ.
Применить теорему об интеграле по взвешенному образу меры.

24 Теорема (принцип Кавальери)

(X, α, μ) и (Y, β, ν) — пространства с мерами, причем μ, ν — σ-конечные и полные
$m = \mu \times \nu$, $C \in \alpha \otimes \beta$, тогда:

1. При п.в. x C_x измеримо (ν-измеримо), т.е. $C_x \in \beta$
2. Функция $x \to \nu C_x$ — измеримая (в широком смысле) на X

   NB: ϕ — измерима в широком смысле, если она задана при п.в. x, и $\exists f : X \to R'$ — измеримая и $\phi = f$ п.в. При этом $\int_X \phi = \int_X f$ (по опр.)
3. $mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$

Доказательство: Рассмотрим D — совокупность все множеств C, для которых утверждение теоремы верно.
$\rho = \alpha \times \beta$ — полукольцо измеримых «прямоугольников».

1. $\rho \subset D$
   $C = A \times B$. то есть $\forall x$ $C_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin A; \\ B, x \in A \end{cases}$
   $x \to \nu(C_x)$, функция $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$ — изм.
   $\int_X \nu(C_x) d\mu = \nu B \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \nu B \cdot \mu A = mC$
2. $E_i \in D$, E_i дизъюнктны $\Rightarrow E := \bigsqcup E_i \in D$
   при п.в. x $(E_i)_x$ — измеримы
   при п.в. x все $(E_i)_x$ — измеримы, $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримо.
   $\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$ ($\nu(E_i)_x$ — изм. как функция от x) $\Rightarrow$ функция $x \to \nu E_x$ — измерима
   $\int_X \nu E_x d\mu(x) = \sum_i \int \nu(E_i)_x d\mu(x) = \sum_i mE_i = mE$
3. $E_i \in D$, $E_1 \supset E_2 \supset \dots; mE_i < +\infty$. Тогда $E := \bigcap E_i \in D$
   $\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty$ $(*)$

функция $x \to \nu(E_i)_x$ — суммируема $\Rightarrow$ п.в. конечна.
при всех x $(E_i)_x \downarrow E_x$, т.е. $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \ldots$ и $\bigcap (E_i)_x = E_x$
при п.в. x $\nu(E_i)_X$ — конечны (для таких x).
Тогда E_x — измерима и $\lim \nu(E_i)_x = \nu E_x$ по непр-ти меры ν сверху.
(Th. Лебега) $|\nu(E_i)_x| \le \nu(E_1)_x$ — сумм. $\Rightarrow$ функция $x \to \nu E_x$ — изм.
$\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ (нерп. сверху меры m). Этот предельный переход корректен как раз по теореме Лебега ($f_n \to f$ п.в. $g : |f_n| \le g$ — сумм. Тогда $\int f_n \to \int f$).
NB: мы доказали про пересечения и про объединения (пусть пересечения убывающие, а объединения — дизъюнктные, но это лечится).
Поэтому $\cap_j(\cup_i A_{i,j}) \in D$, если $A_{i,j} \in \rho$ ($\rho \subset D$).

Я точно не уверен, но вроде, дальше написан бред

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$
$\exists H \in D, H$ имеет вид $\cap(\cup A_{i,j})$, где все $A_{i,j} \in \rho$
$E \subset H, mH = 0$ из п.5 т. о продолжении ЧТО?! поясните плез
$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu(x) \Rightarrow \nu H_x$ 0 ($= 0$ при п.в. x).
$E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$ — ν-изм. (из полноты ν) и $\nu E_x = 0$ п.в. x
$\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$

5. Неизмерима, но мера меньше ∞? ШТА? C — неизм, $mC < +\infty$.
Тогда $C \in D$.
$C = H \setminus e$, где $me = 0$, H — вида $\cap(\cup A_{i,j})$.
$C_x = H_x \setminus e_x$ — изм. при п.в. x
$\nu e_x = 0$ п.в.x (проверено в п.4)
$\nu C_x = \nu H_x = \nu e_x$ — изм. п.в.x
$\int_X \nu C_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = \int \nu H_x = mH = mC$.

6. Что тут вообще написано? Что такое $\subset \cap(X_k \times Y_n)$ C — m-изм. произвольное
$X = \sqcup X_k, Y = \sqcup Y_n$ (μX_k — кон, νY_n — кон.).
$C = \sqcup_{k,n}(\subset \cap(X_k \times Y_n)) \in D$ (по п.2) (т.к. $\subset \cap(X_k \times Y_n) \in D$ по п.5)

25 Теорема Тонелли

$< \mathbb{X}, \alpha, \mu >, < \mathbb{Y}, \beta, \nu >$ - пространства с мерой
μ, ν - σ-конечны, полные
$m = \mu \times \nu$
$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{R}$, $f \geq 0$, f - измерима относительно m
Тогда:

1. при *почти всех* $x \in X$ f_x - измерима на $\mathbb{Y}$,
   где $f_x : \mathbb{Y} \to \overline{R}$, $f_x(y) = f(x, y)$
   (симметричное утверждение верно для y)

2. Функция $x \mapsto \phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \int\limits_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)$ - измерима* на $\mathbb{X}$
   (симметричное утверждение верно для y)

3. $\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x, y) dm = \int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} (\int\limits_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} (\int\limits_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x)) d\nu$

Доказательство:
Докажем в 3 пункта, постепенно ослабляя ограничения на функцию f

1. Пусть $C \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ - измеримо относительно m, $f = \chi_C$

   (a) $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$, где C_x - сечение по x
   C_x - измеримо при *почти всех* x, так как это одномерное сечение, таким образом f_x - измеримо, при *почти всех* x.

   (b) $\phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \nu C_x$ - по принципу Кавальери это измеримая* функция.

   (c) $\int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} \nu C_x d\mu \overset{\text{Кавальери}}{=} mc \overset{\text{опр.инт}}{=} \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} \chi_C dm = \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f(x, y) dm$

2. Пусть f - ступенчатая, $f \geq 0$, $f = \sum\limits_{\text{кон}} a_k \chi_{C_k}$

   (a) $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}$ - измерима при почти всех x

(b) $\phi(x) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ - измерима* как конечная сумма измеримых

(c) $\int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) = \int\limits_{\mathbb{X}} \sum\limits_{\text{кон}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum\limits_{\text{кон}} \int\limits_{\mathbb{X}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k m C_k = \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f dm$

3. Пусть f - измеримая, $f \geq 0$
$f = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n$, где $g_n \geq 0$ - ступенчатая, g_n - монотонно возрастает к f
(из Теоремы об апроксимации измеримой функции ступенчатыми)

(a) $f_x = \lim\limits_{n\to+\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$ - измерима при *почти всех* x.

(b) $\phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \overset{\text{т.Леви}}{=} \lim \int\limits_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu$
$\phi_n(x) := \int\limits_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu$ - измерима по пункту 1
$0 \leq (g_n)_x -$ возрастает, тогда $\phi(x)$ - измерима, $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq$ ... и $\phi_n(x) \to \phi(x)$

(c) $\int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu \overset{\text{т.Леви}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \int \phi_n(x) d\mu \overset{\text{п.2}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} g_n dm \overset{\text{т.Леви}}{=} \int f dm$

26 Формула для Бета-функции

$B(s,t) = \int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}$, где s и t > 0 - Бета-функция

$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, где s > 0, тогда $B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

Доказательство:

$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} (\int\limits_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy) dx = \begin{bmatrix} y \to u \\ y = u - x \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} (\int\limits_x^{+\infty} (u-x)^{t-1} e^{-u} du) dx =$

$= \int\limits_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq x}} ... =$ меняем порядок интегрирования

$= \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^u dx (x^{s-1}(u-x)^{t-1} e^{-u}) = \begin{bmatrix} x \to v \\ x = uv \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u} (\int\limits_0^1 u^{s-1} v^{s-t} u^{t-1} (1-$

$v)^{t-1}udv)du =$

$= \int\limits_0^{+\infty} u^{s+t-1}e^{-u}(\int\limits_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}dv)du = B(s,t)\Gamma(s+t)$, чтд.

27 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$B(0,R) \subset \mathbb{R}^m$

$\lambda_m(B(0,R)) = \int\limits_{B(0,R)} 1 d\lambda_m = \int \mathscr{J} =$

$= \int\limits_0^R dr \int\limits_0^\pi d\phi_1 \cdots \int\limits_0^\pi d\phi_{m-2} \int\limits_0^{2\pi} d\phi_{m-1} \cdot r^{m-1}(\sin\phi_1)^{m-2}\dots(\sin\phi_{m-2}) =\longrightarrow$

$\int\limits_0^\pi (\sin\phi_k)^{m-2-(k+1)} = B(\frac{m-k}{2};\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2}+\frac{1}{2})}$почему так? надо бы поподробней расписать

$\to = \frac{R^m}{m}\frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})}\cdots\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}2\pi =$

$= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}R^m$

28 Теорема о вложении пространств L^p

$\mu E < +\infty$, $1 \le s < r \le +\infty$

Тогда:

1. $L_r(E,\mu) \subset Ł_s(E,\mu)$
2. $\forall f$ — измеримая : $||f||_s \le \mu E^{1/s-1/r}||f||_r$

Доказательство:

- $2 \Rightarrow 1$ (Это очевидно: достаточно рассмотреть неравенство из пункта 2. Из него следует, что $||f||_s \le const \cdot ||f||_r$. см. опред. L_p)
- Рассмотрим два случая:

1. $r = +\infty$ (очев.)

$$||f||_s = (\int |f|^s \cdot 1)^{1/s} \leq ((esssup|f|)^s \int 1 d\mu)^{1/s} = ||f||_\infty \cdot \mu E^{1/s}$$

(последнее по определению $esssup$)

2. $r < +\infty$

$$(||f||_s)^s = \int |f|^s \cdot 1 d\mu \leq (\int |f|^r)^{\frac{s}{r}} \cdot (\int 1^{\frac{r}{r-s}})^{\frac{r-s}{r}} = (||f||_r)^s \cdot \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$

(существенный шаг: применить неравевство Гельдера)

29 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$1 \leq p < +\infty$
$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$

1. • $f \in L_p$
   • $f_n \to f$ в L_p

   Тогда: $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (по мере)

2. • $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ (либо если $f_n \to f$ почти везде)
   • $|f_n| \leq g$ почти везде при всех n; $g \in L_p$

   Тогда: $f_n \to f$ в L_p

Доказательство:

1.

$$X_n(\epsilon) := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\mu X_n(\epsilon) \overset{\text{т.к. } \frac{|f_n - f|}{\epsilon} \geq 1}{\leqslant} \int\limits_{X_n} (\frac{|f_n - f|}{\epsilon})^p = \frac{1}{\epsilon^p} \int\limits_{X_n} |f_n - f|^p \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int\limits_X |f_n - f|^p =$$

$$= \frac{1}{\epsilon^p} (||f_n - f||_p)^p \overset{n \to \infty}{\to} 0$$

2. $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ Тогда $\exists n_k \mid f_{n_k} \to f$ почти везде.

   Тогда $|f| \leq g$ п. в.

   $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$ – сумм. функции т. к. $g \in L_p$

   $(||f_n - f||_p)^p = \int\limits_X |f_n - f|^p d\mu \overset{n \to \infty}{\to} 0$ (по теореме Лебега)

30 Полнота L^p

$L_p(E, \mu)$ $1 \leq p < \infty$ – полное
То есть любая фундаментальная последовательность сходиться по норме $||f||_p$.

$$(\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n, k\ ||f_n - f_k||_p < \epsilon) \Rightarrow (\exists f : ||f_n - f||_p \to 0)$$

Доказательство:

1. Построим f.

   Рассмотрим фундаментальную последовательность f_n.

   $\exists N_1$ при $n_1, k > N_1$ $||f_{n_1} - f_k|| < \frac{1}{2}$

   $\exists N_2$ при $n_2, k > N_2, N_1$ $||f_{n_2} - f_k|| < \frac{1}{4}$

   $\ldots$

   Тогда: $\sum_{k=1}^{\infty} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < 1$

   $f = \lim\limits_{k \to \infty} f_{n_k}$

   Докажем, это функция f корректно задана:

   - $S_N(x) := \sum_{k=1}^{N} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$
     $||S_N||_p \leq \sum_{k=1}^{N} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| < 1$
     Тогда по Теореме Фату: $||S||_p \leq 1$
     Тогда $|S|^p$ – суммируема
     Тогда $S(x)$ конечна при п. в. x и ряд $\sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ абс. сходитс, а значит и просто сходится при п. в. x
     $f := f_{n_1} + \sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ т. е. $f =$ п. в. $\lim\limits_{k \to \infty} f_{n_k}$

2. Проверим, что $f_n \to f$ в L_p

   Т. к. f_n – фунд., то $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n, n_k > N \quad ||f_n - f_{n_k}|| < \epsilon \Rightarrow ||f_n - f_{n_k}||^p = \int\limits_E |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \epsilon^p$

   Тогда по теореме Фату: $\int\limits_E |f - f_n|^p \le \epsilon^p$

   Тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ ||f - f_n||_p < \epsilon$

Замечание: L_∞ – полное (упражнение)

31 Лемма Урысона

X — нормальное топологическое пространство, то есть:

1. Все одноточечные множества замкнуты.

2. Любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы окрестностями:
   A, B — замкнуты, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists A_1, B_1$ — открыты, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A \subset A_1$, $B \subset B_1$.

F_0, F_1 — замкнуты, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.
Тогда: $\exists f : X \to [0, 1]$, непрерывная (в смысле топологического определения непрерывности), равная 0 на F_0 и равная 1 на F_1.

Доказательство: TODO!

32 Плотность в L^p непрерывных финитных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathbb{A}, \lambda_m)$

$E \subset \mathbb{R}^m$ – изм. Тогда множество финитных непрерывных функций плотно в $L_p(E, \lambda_m), p \in [1; +\infty]$

Доказательство:

1. Раскроем определение плотности: $\forall f \in L_p(E, \mu)\, \forall \epsilon > 0\, \exists \varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$: $||f - \varphi|_E||_p < \epsilon$. Таким образом достаточно научиться приближать f и φ ступенчатыми функциями f_n: $||f - f_n||_p < \epsilon/2$ и $||\varphi - f_n||_p < \epsilon/2$

2. TODO!

33 Теорема о непрерывности сдвига

Обозначения:
$f_h := f(x + h)$
$[0, T] \subset \mathbb{R}$. Будем считать, что $L_p[0, T]$ состоит из T-периодических функций $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Отсюда $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.
$\widetilde{C}[0, T] = f \in C[0, T] : f(0) = f(T).||f|| = max_{x \in [0,T]}|f(x)|$
NB: $f \in \widetilde{C}[0, T] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна (по т. Кантора).
Формулировка:

1. $f-$ рвнм. непр. на $\mathbb{R}^m$. Тогда $||f - f_h||_\infty \to 0$ при $h \to 0$.

2. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$. Тогда $||f - f_h||_p \to 0$.

3. $f \in \widetilde{C}[0, T]$. Тогда $||f - f_h||_\infty \to 0$.

4. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p[0; T]$. Тогда $||f - f_h||_p \to 0$.

Доказательство:

1. 1 и 3 свойства следуют из определения рвнм. непр-ти: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^m\ \forall h : |h| < \delta$ верно, что $|f(x) - f(x + h)| < \epsilon$, то есть $||f - f_h||_\infty < \epsilon$ (это для св-ва 1, во втором случае x из $[0, T]$).

2. TODO!

34 Теорема об интеграле с функцией распределения

Проверить формулировку, тут, вроде, какая-то херня написана
чё за измеримость по Борелю???
$(\mathbb{R}, B, X)$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \geq 0$, изм. по Борелю, п.в. конечн.
$h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ с функцией распределения $H(t)$

μ_H – мера Бореля-Стилтьеса (мера Лебега-Стилтьеса на B)

Тогда $\int\limits_X f(h(x))d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)d\mu_H(t)$
Доказательство: Следует из теоремы о вычислении интеграла по взвешенному образу меры, положив $< Y, C, \nu > = < \mathbb{R}, B(\mathbb{R}), h(\mu) >, \Phi = h, \omega = 1$

35 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$
2. $\sum x_k$ сходится, тогда $\forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$
3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

Доказательство

1. $|\langle x_k, y_k \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_k, y_k \rangle - \langle x_k, y \rangle + \langle x_k, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leqslant |\langle x_k, y_k - y \rangle| + |\langle x_k - x, y \rangle| \leqslant |x_k| \cdot |y_k - y| + |x_k - x| \cdot |y| \to 0$ (так как огр $\cdot$ б.м. + б.м. $\cdot$ огр $\to 0$)
2. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

$\langle \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_k, y\rangle$

Устремляя n к ∞, получаем требуемое равенство

3. Обозначим $C_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$

   $|S_n|^2 = \langle \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\rangle = \sum\limits_{k,j}^{n} \langle x_k, x_j\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_k, x_k\rangle$ (так как $k \neq j \Rightarrow \langle x_k, x_j\rangle = 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2 = C_n$

   Аналогично, $||S_n|^2 - |S_m|^2| = |C_n - C_m|$

   Тогда $C_n, |S_n|^2$ фунадментальны одновременно $\Rightarrow$ сходятся одновременно при устремлении n к ∞

36 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.

2. $c_k = \dfrac{\langle x, e_k\rangle}{||e_k||^2}$

3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k \mid t \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)$\}$
   Иными словами, $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

Доказательство:

1. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k = 0$. Умножим скалярно на e_m $(1 \leqslant m \leqslant N)$

   Получим: $\alpha_m ||e_m||^2 = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \Rightarrow$ комб. тривиальная $\Rightarrow$ Л.Н.З.

2. $\langle x, e_m \rangle = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \langle c_k e_k, e_m \rangle = c_m \cdot ||e_m||^2$ (верно в силу сходимости ряда)

3. $x = c_k \cdot e_k + z$. Доказать: $z \perp e_k$.
$\langle z, e_k \rangle = \langle x - c_k e_k, e_k \rangle = c_k \cdot ||e_k||^2 - c_k \cdot ||e_k||^2 = 0$

37 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} = Lin(e_1, e_2, \dots e_n) \subset \mathbb{H}$
Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во $\mathcal{L}$. Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$
2. S_n — наилучшее приближение x в $\mathcal{L}$ ($||x - S_n|| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}} ||x - y||$)
3. $||S_n|| \leqslant ||x||$

Доказательство:

1. (a) $z = x - S_n$
   (b) $z \perp \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall k = 1, 2 ... n : z \perp e_k$
   (c) $\langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = c_k ||e_k||^2 - c_k ||e_k||^2 = 0$
2. $||x - y||^2 = ||S_n + z - y||^2 = ||(S_n - y) + z||^2 = ||S_n - y||^2 + ||z||^2 \geqslant$
   $\geqslant ||z||^2 = ||x - S_n||^2$
3. $||x||^2 = ||S_n||^2 + ||z||^2$ (теорема о сумме орт. ряда) $\geqslant ||S_n||^2$

Следствие: Неравенство Бесселя

$\forall \{e_k\}$ – О.С. : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot ||e_k||^2 \leqslant ||x||^2$

38 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ – орт. сист. в $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$ сходится в $\mathbb{H}$

2. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$

3. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

Доказательство:

1. Ряд Фурье – ортогональный ряд
   его сходимость $\Leftrightarrow$ сходимости $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$
   $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2$ по неравенству Бесселя

2. $\langle z, e_k \rangle = \langle x - \sum c_i e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \langle c_i(x) e_i, e_k \rangle = 0$

3. $\Rightarrow$ - утв. 3 теоремы о св-вах сх-ти в гильбертовом пр-ве
   $\Leftarrow$ Из п. 2 ряд ортог.
   $\|x\|^2 = \|\sum c_k e_k\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$

39 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathbb{H}$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_1\}$ — базис.

2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y\rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)

3. $\{e_k\}$ — замкнутая система.

4. $\{e_k\}$ — полная система.

5. $Lin(e_1, e_2, \ldots)$ — плотна в $\mathbb{H}$

Доказательство:

39.1 $1 \Rightarrow 2$

$x = \sum c_k(x)e_k$ – единственно (из геом. соображений: $c_k e_k$ – проекция)
$\langle e_k, y\rangle = \overline{\langle y, e_k\rangle} = \overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$
$\langle x, y\rangle = \sum c_k(x)\langle e_k, y\rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$

39.2 $2 \Rightarrow 3$

$y := x$
$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2\|e_k\|^2$ (см. п. 3 из опр.)

39.3 $3 \Rightarrow 4$

Пусть $\forall k \quad x_0 \perp e_k$
$c_k(x_0) = \frac{\langle x_0, e_k\rangle}{\|e_k\|^2} = 0$
$\|x_0\|^2 = \sum |c_k(x_0)|^2\|e_k\|^2 = 0$ (см. п. 2 из опр.)

39.4 $4 \Rightarrow 1$

$x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow$ (т. Рисса-Фишера (2)) $\forall k\ z \perp e_k \Rightarrow$ (из полноты) $z = 0$ (см. п. 1 из опр.)

39.5 $4 \Rightarrow 5$

Пусть $ClLin(e_1, e_2, \dots) \neq \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H} \setminus ClLin(e_1, e_2, \dots)$
из т. Рисса-Фишера (2): $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k \Rightarrow x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Rightarrow$
$x \in ClLin(e_1, e_2, \dots)$
Противоречие.

39.6 $5 \Rightarrow 4$

$\forall k \, x_0 \perp e_k \Rightarrow x_0 \perp Lin(e_1, e_2, \dots) \Rightarrow x_0 \perp ClLin(e_1, e_2, \dots)(= \mathbb{H}) \Rightarrow x_0 \perp x_0 \Rightarrow$
$\|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

40 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \to f$ в $L_1(-\pi, \pi]$

Тогда:
$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \ dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$
$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \ dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$
$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \ dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$
Доказательство:
Почему нельзя сказать, что коэффициенты — это коэффициенты ряда Фурье, а потому вычисляются как скалярные произведения???
$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \cos jx + b_j \sin jx$ (– это T_n)
При $n \geq k$:

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx dx = \pi a_k$ (в силу ортогональности триг системы)

2. $|\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\cos kxdx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(X)| \cdot |\cos kx| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| \to 0$

Из 1 и 2 следует равенство для a_k. Аналогично доказывается и для других.

41 Теорема Римана–Лебега

$E \subset \mathbb{R}^1$ – измеримо
$f \in L_1(E, \lambda)$, λ- мера Лебега
Тогда:

$$\int\limits_E f(x)e^{ikx}dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

и

$$\int\limits_E f(x)cos(kx)dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Доказательство:
Пусть $f \equiv 0$ вне E, тогда можно считать, что $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$
Обозначим $e(x) = cos(x)$, или $sin(x)$, или e^{ix}, в зависимости от ситуации. Заметим, что $e(t+\pi) = -e(t)$
$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) \overset{t=\tau+\frac{\pi}{k}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau+\frac{\pi}{k})e(k\cdot(\tau+\frac{\pi}{k})) = -\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau+\frac{\pi}{k})e(k\tau)$
$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e(kt) - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau+\frac{\pi}{k})e(kt) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}(f(t) - f(t+\frac{\pi}{k}))e(kt)$
$|\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e(kt)| \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t+\frac{\pi}{k})|dt$ (так как $|e(kt)| \leq 1$)$\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, по непрерывности сдвига

42 Принцип локализации Римана. TODO

43 Признак Дини. Следствия. TODO.

44 Корректность свертки

$f, K \in L_1[-\pi, \pi]$
Тогда: $(f * K)$ – корректно заданная фукнция из $L_1[-\pi, \pi]$
Доказательство:

- Докажем, что $g(x,t) = f(x-t)K(t)$ – измерима
  - $K(t)$ – измерима, как функция из L_1
  - $\phi(x,t) = f(x-t)$. Это функция принимает одинаковые значения на $t = x - C$.
    Поэтому: $R^2(\phi < a) = V^{-1}(E_{a'} \times R)$, где $V(x,t) = (x-t, t)$
    $E_{a'} = V(R(f < a))$ – измеримо, так как f – измеримо. Что за бред, V действует из R^2, а тут пытаются сделать из R
    Поэтому $R^2(\phi < a)$ – измеримо.
  - Поэтому g – измерима, как произведение измеримых
- Проверим, что $g \in L_1([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$

  $$\iint\limits_{[-\pi,\pi]} |g| d\lambda^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (|K(t) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| dx|) dt = ||f||_1 ||K||_1 < +\infty$$

- По теореме Фубини $\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x,t)dt$ – суммируемая при в п. в. х
- Тогда свертка лежит в $L_1[-\pi, \pi]$

45 Свойства свертки функции из L^p с фукнцией из L^q

$f \in L^p$; $K \in L^q$

$1 \leqslant p \leqslant +\infty$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Тогда:

- $f * K$ – непр. на $[-\pi, \pi]$
- $||f * K||_\infty \leqslant ||K||_q ||f||_p$

Доказательство: Это нер-во Гельдера

п. 2 $|(f * K)(x)| = |\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq} ||K||_q ||f||_p$

$\sup |f * K| \leq ||f||_p ||K||_q \Rightarrow$ пунк 2

(Причем нер-во Гельдера выполнено и для $p = \infty$)

п. 1 $- p < +\infty$

$$|(f*K)(x+h) - (f*K)(x)| = |\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t))K(t)dt| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq}$$
$$|(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h-t) - f(x-t)|^p dt)^{1/p} (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |K(t)|^q dt)^{1/q} = ||K||_q (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h-t) - f(x-t)|^p dt)^{1/p} = ||K||_q (\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(y+h) - f(y)|^p dy)^{1/p} =$$
$$= ||K||_q ||f(y+h) - f(y)||_p \underset{\text{по непр. сдвига}}{\rightarrow} 0$$

$- p = +\infty$

$$|(f*K)(x+h) - (f*K)(x)| = |\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t))K(t)dt| \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq}$$
$$(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |K|) \cdot \underset{t=[-\pi,\pi]}{esssup} |f(x+h-t) - f(x-t)| =$$
$$||K||_1 \cdot \underset{t=[x+\pi, x-\pi]}{esssup} |f(t+h) - f(t)| \underset{\text{по непр. сдвига}}{\rightarrow} 0$$

46 Формула Грина

$D \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, связное, одновясвязное, ориентировано
δD – C^2-гладкая кривая, тоже ориентировано
D и δD ориентированы согласовано

P, Q – функции, гладкие в открытой области $O \supset D$
Тогда:

$$\iint\limits_D (\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}) dxdy = \int\limits_{\delta D} (P(x,y)dx + Q(x,y))dy$$

Доказательство:
Докажем для областей вида "криволинейный четырехугольник" , т.е.
$x \in [a; b]$
$y \in [\phi_1(x); \phi_2(x)]$, где $\phi_2(x) > \phi_1(x)$
Представляется в аналогичном виде, относительно у

Ориентируем обход нашего четырехугольника против часовой стрелки.
Назовем пути по сторонам $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ начиная с нижней против часовой стрелки соответсвенно.
Из линейности интеграла по векторному полю следует, что для доказательства достаточно проверить:

$$-\iint\limits_D \frac{\delta P}{\delta y} dxdy = \int\limits_{\delta D} Pdx$$

1. Преобразуем левую часть:
   $-\iint\limits_D \frac{\delta P}{\delta y} dxdy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P'_y dy = -\int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} dx =$
   $\int\limits_a^b P(x, \phi_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x, \phi_2(x))$

2. Преобразуем правую часть:
   $\int\limits_{\delta D} (Pdx + 0dy) = \int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_3} + \int\limits_{\gamma_4}$
   $= \int\limits_a^b P(x, \phi_1(x))dx + 0 + \int\limits_b^a P(x, \phi_2(x))dx + 0 =$
   $\int\limits_a^b P(x, \phi_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x, \phi_2(x))$

Левая и правая части равны.

Если область более сложная - порежем на простые. Зафиксируем направление обхода, посчитаем на каждой.
При фиксированном направлении обхода пути на границах разрезов учитываются дважды с противоположными знаками, то есть в итоге имеем обход границы всей фигуры.
Из компактности и гладкости области следует, что допускается счетное количество разрезов.

47 Формула Стокса

Ω – эллиптическая, гладкая, двусторонняя поверхность, C^2-гладкое;
n_0 – сторона
$\delta\Omega$ - ориентирована согласовано с n_0
(P, Q, R) – векторное поле на Ω, заданное в O - откр. : $\Omega \subset O \subset \mathbb{R}^3$
Тогда:

$$\int\limits_{\delta\Omega}(Pdx+Qdy+Rdz) = \iint\limits_{\Omega}((R'_y-Q'{}_z)dydz+(P'_z-R'_x)dzdx+(Q'_x-P'_y)dxdy)$$

Доказательство:
Из соображений линейности интеграла по векторному полю достаточно проверить:

$$\int\limits_{\delta\Omega} Pdx = \iint\limits_{\Omega}(P'_z dzdx - P'_y dxdy)$$

Параметризуем область: $\Omega \leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{matrix} \right\rangle$

Пусть G – наша область в координатах (u, v), L – граница Ω в новых координатах, тогда:

$$\int\limits_{\delta\Omega} Pdx = \int\limits_{L} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))(x'_u du + x'_v dv) = \int\limits_{L} Px'_u du + Px'_v dv \overset{\text{Грин}}{=}$$

$\iint\limits_G ((P(x,y,z)x_v^{'})_u^{'} - (P(x,y,z)x_u^{'})_v^{'})dudv =$
$\iint\limits_G (P_z^{'}(z_u^{'}x_v^{'} - z_v^{'}x_u^{'}) - P_y^{'}(y_v^{'}x_u^{'} - y_u^{'}x_v^{'}))dudv =$
$\iint\limits_G P_z^{'}\begin{vmatrix} z_u^{'} & z_v^{'} \\ x_u^{'} & x_v^{'} \end{vmatrix} dudv - P_y^{'}\begin{vmatrix} x_u^{'} & x_v^{'} \\ y_u^{'} & y_v^{'} \end{vmatrix} dudv =$
$\iint\limits_\Omega (P_z^{'}dzdx - P_y^{'}dxdy)$
что и требовалось доказать

48 Формула Гаусса–Остроградского

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in G, f(x,y) \le z \le F(x,y)\}, G \subset \mathbb{R}^2, \partial G-$ гладкая кривая в $\mathbb{R}^2, F \in {}''C'(G)''$ (кавычки означают "включая границу, то есть с более широкой гладкой областью"), $\partial V-$ внешняя сторона, $R : O(V) \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial V} R\, dx\, dy$$

<u>Доказательство:</u>
$\partial V = \Omega_F \cup \Omega_{cil} \cup \Omega_f$ (границы графика F, f и цилиндра между ними)

$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_G \, dx\, dy \int\limits_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$
$= \iint\limits_G (R(x,y,F(x,y)) - R(x,y,f(x,y)))\, dx\, dy =$ (см. пример после опр. инт. 2 рода)
$= \iint\limits_{\Omega_F} R\, dx\, dy - (-\iint\limits_{\Omega_f} R\, dx\, dy) + 0 =$ (так как проекция Ω_{cil} лежит в ∂G)
$= \iint\limits_{\Omega_F} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\Omega_f} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\Omega_{cil}} R\, dx\, dy =$
$= \iint\limits_{\partial V} R\, dx\, dy$

49 Соленоидальность бездивергентного векторного поля. TODO.

50 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости или L_{loc}

50.1 При равномерной сходимости

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой
$\mathbb{Y}$ – метр. простр. (или метризуемое)
$\forall y\ f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на $\mathbb{X}$

$\mu X < +\infty$; $f(x, y) \underset{y \to a}{\rightrightarrows} \phi(x)$
Тогда:

- ϕ – сумм.
- $\int\limits_X f(x, y) d\mu(x) \underset{y \to a}{\longrightarrow} \int\limits_X \phi(x) d\mu(x)$

Доказательство: По Гейне: $y_n \to a$
При больших n $\forall x\ |f(x, y_n) - \phi(x)| < 1$
$\Rightarrow |\phi(x)| \le |f(x, y_n)| + 1 \Rightarrow \int\limits_X |\phi(x)| \le \int\limits_X |f| + \mu X$
Из этого следует, что ϕ – суммир.

$$|\int\limits_X f(x, y_n) d\mu(x) - \int\limits_X \phi| \le \int\limits_X |f(x, y_n) - \phi(x)| d\mu \le \sup_{x \in X} |f(x, y_n) - \phi(x)| \mu X$$

$$\sup_{x \in X} |f(x, y_n) - \phi(x)| \mu X \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

50.2 При L_{loc}

Определение L_{loc}
$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой
$\mathbb{Y}$ – метр. простр. (или метризуемое); $a \in \mathbb{Y}$
$\forall y \; f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на $\mathbb{X}$
f удовлетворяет L_{loc} ($f \in (L_{loc})$) если:

- $\exists g : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ – сумм.
- $\exists U(a) \; \forall y \in \dot{U}(a)$ при п. в. $x \in \mathbb{X} \; |f(x, y)| \le g(x)$

Формулировка в контексте определения:
$\phi := \lim\limits_{y \to a} f(x, y)$ – задана при п. в. x
$f(x, y)$ удовлетворяет условию L_{loc} в точке a и мажорантой g
Тогда:

- ϕ – сумм.
- $\int\limits_X f(x, y) d\mu(x) \xrightarrow[y \to a]{} \int\limits_X \phi(x) d\mu(x)$

Доказательство: На самом деле это переформулировка Теоремы Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде. (см теор. № 13)

51 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$
$(\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu)$ – простр. с мерой
$\mathbb{Y}$ – метр. простр. (или метризуемое)
$\forall y \; f^y(x) = f(x, y)$ – сумм. на $\mathbb{X}$

$\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$ – промежуток
при п. в. $x \;\; \forall y \; \exists f'_y(x, y)$

f'_y удовлетворяет усл. L_{loc} в точке $a \in \mathbb{Y}$
Тогда:

- $I(y) = \int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ – дифф. в точке a
- $I'(y) = \int\limits_X f'_y(x,a)d\mu(x)$

Доказательство:
$F(x,h) = \frac{f(x,a+h)-f(x,a)}{h} \to f'_y(x,a)$
$\frac{I(a+h)-I(a)}{h} = \int\limits_X F(x,h)d\mu(x) \underset{?}{\to} \int\limits_X f'_y(x,a)d\mu$
чтобы использовать предельный переход нужно проверить $F(x,h) \in L_{loc}$ в точке $h=0$, т. е. найти локальную мажоранту. (см. теор. о пред. переход. под интегралом)
$|F(x,h)| \underset{\text{т. Лагранжа}}{=} |f'_y(x,a+\theta h)| \underset{f'_y \in L_{loc}\ in\ a}{\le} g(x)$

52 Теорема о свойствах аппроксимативной единицы

1. $f \in \widetilde{C}[-\pi,\pi] \Rightarrow (f * K_h) \rightrightarrows f(h \to h_0)$, где свертка $(f*K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt$
2. $f \in L^1[-\pi,\pi] \Rightarrow ||(f*K_h) - f||_1 \to 0(h \to h_0)$
3. K_h - усил. апрокс ед.

Доказательство:

1. $(f*K)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_h(t)dt =$ (f рнепр., т.к. f непр на компакте $[-\pi,\pi] \le \int_{-\pi}^{\pi} |(f(x-t)-f(x))K_h(t)|dt = \int_{E_\delta} + \int_{(-\delta,\delta)} = I_1 + I_2$

   Заметим, что $I_1 \le 2||f||_\infty \int_{E_\delta} |K_h| < \frac{\epsilon}{2}$, т.к. f - огр, и по 3 а.е. интеграл стремится к 0

   Заметим, что $I_2 \le \frac{\epsilon}{2M} \int_{(-\delta,\delta)} |K_h|dt < \frac{\epsilon}{2}$, т.к. по непрерывности : $\forall \epsilon > 0 \exists \delta : |f(x) - f(x-\delta)| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{2M}$

2. $||(f*K_h(x))-f||_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)-f(x)K_h(t)dt|dx \le \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-f(x)||K_h(t)|dtdx = ||K_h||_1 \int_{-\pi}^{\pi} g(-t)\frac{K(t)}{||K_h||_1}dt$, где $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|dx$

   $\frac{|K_h|}{||K_h||}$ - a.e. $\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(-t)\frac{|K|}{||K_h||}dt \to g(0) = 0 (h \to h_0)$. Замечание: последний пределльный переход верен из свойства (1) выше, т.к. $K * g \Rightarrow g$, а $K * g = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)K(t)dt$ для любого x, в нашем случае в интеграле $g(-t)$, то есть взято $x = 0$

3. = TODO("not implemented")

53 Теорема Фейера. TODO

54 Свойства преобразования Фурье: непрерывность, ограниченность, сдвиг. TODO

55 Преобразование Фурье свертки. TODO

56 Преобразование Фурье и дифференцирование. TODO

57 Лемма об оценке интеграла ядра Дирихле

1. $D_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi}(\cos nt + h(t)\sin nt)$, где $h(t)$ не зависит от n и $|h(t)| \le 1$ на $[-\pi;\pi]$.

2. $\forall x, |x| < 2\pi \ |\int_0^x D_n(t)dt| < 2$

<u>Доказательство:</u>

1. (a) $D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin nt\cos\frac{t}{2}+\cos nt\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi}(\frac{\sin nt}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + \cos nt)$

(b) Добавим и вычтем $\frac{\sin nt}{\pi t}$:
$\frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi}(\cos nt + \underbrace{(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} - \frac{1}{\frac{t}{2}})}_{h(t)} \sin nt)$

(c) Докажем, что $|h(t)| \leq 1$. Найдём знак производной на $[0;\pi]$:
$h'(t) = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} + \frac{2}{t^2} = \frac{4\sin^2\frac{t}{2} - t^2}{2t^2\sin^2\frac{t}{2}}$. Знаменатель неотрицателен.
$4\sin^2\frac{t}{2} - t^2 = (2\sin\frac{t}{2} - t)(2\sin\frac{t}{2} + t)$. Вторая скобка ≥ 0. Первая скобка ≤ 0, так как $\sin x \leq x$ при $x \geq 0$.

(d) Знак производной $h(x)$ на $[0;\pi]$ постоянен, значит, h монотонна.
$h(0) = 0$ (в пределе), $h(\pi) = \frac{2}{\pi} < 1$.
Значит, $|h(x)| < 1$. Аналогично для $[-\pi;0]$.

2. (a) D_n — чётная. Считаем, что $x > 0$.

(b) Пусть $x \in [0;\pi]$.

(c) $|\int_0^x D_n(t)dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{\pi t}dt| = |\int_0^x \frac{1}{2\pi}(\cos nt + h(t)\sin nt)|$ (пункт 1) $\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^x 2 = \frac{x}{\pi} \leq 1$

(d) $\int_0^x \frac{\sin nt}{\pi t} = \int_0^{nx} \frac{\sin v}{\pi v}dv$ $(v = nt)$.
$0 \leq \int_0^{nx} \frac{\sin v}{\pi v}dv \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{\pi v}dv$. Доказательство методом пристального взгляда на график подынтегральной функции.
$\int_0^{\pi} \frac{\sin v}{\pi v}dv \leq \pi\frac{1}{\pi} = 1$

(e) $|\int_0^x D_n(t)dt - I| \leq 1$, $0 \leq I \leq 1$, значит, $\int_0^x D_n(t)dt \in [-1;2]$.

(f) Пусть $x \in [\pi;2\pi]$. $\int_0^{2\pi} D_n(t)dt = 1$.
$\int_0^x = \int_0^{2\pi} - \int_x^{2\pi} = 1 - \int_{x-2\pi}^0 = 1 - \int_0^{2\pi - x} \in [-2;1]$

58 Теорема об интегрировании ряда Фурье

$f \in L_1[-\pi;\pi]$.
Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx}dx$$

Сумма по $k \in \mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения ($\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}$).
Замечание: Ряд Фурье f может всюду расходиться, но ряд интеграла всегда сходится.

Доказательство:

1. Пусть $-\pi \le a < b \le \pi$. Если это не так всегда можно разбить интеграл на такие отрезки в силу периодичности функции.

2. Пусть $\chi(x) = \chi[a;b]$ (характеристическая функция отрезка $[a;b]$).

3. Рассмотрим частичную сумму ряда интегралов:
   $\sum_{k=-N}^{N} c_k(f) \underbrace{\int_a^b e^{ikx}dx}_{2\pi c_{-k}(\chi)} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt)2\pi c_{-k}(\chi)$.
   Сумма конечная, поэтому это равно $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_N(\chi,t)dt$.

4. $S_N(\chi) \to \chi$ везде, кроме a и b (не шарю почему, помогите)

5. $|S_N(\chi,t)| = |\int_{-\pi}^{\pi}\chi(x)D_N(t-x)dx| = |\int_a^b D_N(t-x)dx| = |\int_0^{t-a} D_N - \int_0^{t-b} D_N| \le 4$ (по лемме об оценке интеграла D_N).

6. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_N(\chi,t)dt \to \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\chi(t)dt$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

59 Лемма о сходимости сумм Фурье в смысле обобщенных функций

$f \in L_1[-\pi;\pi]$
Тогда $\forall u \in \widetilde{\mathbb{C}}^{\infty}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x)u(x)dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)u(x)dx$$

Доказательство: // TODO - нужно больше пояснений

1. $f * u$ - непр. и гладкая (т.к. $u \in L_\infty[-\pi, \pi]$)
   $((f * u)(x))' = (\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)u(x-t)dt)'_x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)u'(x-t)dt$
   $\frac{d}{dt}(\int\limits_X f(x,t)d\nu(x)) = \int\limits_X f'_x(x,t)d\nu(x)$
   $L_{loc}(t_0): \quad \exists u(t_0) : |f'_t(x,t)| \leq g(x), g(x)$ - сумм. при $x \in X, t \in u(t_0)$
   $|f(t)u'(x-t)| \leq \max|u'(y)| \cdot |f(t)|, y \in [-\pi, \pi]$

2. $\underline{u}(x) := u(-x)$
   $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}u(-x)dx = 2\pi c_k(\underline{u})$
   Так как сумма конечная, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(f,x)u(x)dx = \sum\limits_{k=-n}^{n}(c_k(f)\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}u(x)dx) = 2\pi\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)c_k(\underline{u}) = \sum\limits_{k=-n}^{n}(f * \underline{u})e^{ikx}\Big|_{x=0} \to (f' * \underline{u})(0) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\underline{u}(0-t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)u(t)dt$

<u>Определение:</u> f – обобщенная функция, если задан непрерывный функционал $\mathbb{C}^\infty \to \mathbb{R}$.
<u>Определение:</u> f, f_n – последовательность обобщенных функций: $f_n \to f$, если $\forall u \in \mathbb{C}^\infty \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n u \to \int\limits_{-\pi}^{\pi} fu$.

60 Следствие о преоборазовании Фурье финитных функций

(Следствие из теоремы “56. Преобразование Фурье и дифференцирование“.)

1. $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ – финитная ($= 0$ вне некоторой окрестности).
   <u>Тогда</u> $\widehat{f} \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$

2. $f \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$
   <u>Тогда</u> $\forall p > 0 \quad |y|^p\widehat{f}(y)$ – сумм.

Доказательство:

1. Из финитности следует $\forall p \quad |x|^p f(x)$ – сумм.
$\dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial y} = -2\pi i \widehat{(x_k f)}$
$\dfrac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial y_k \partial y_l} = -2\pi i \dfrac{\partial}{\partial y_l}\widehat{(x_k f)} = -2\pi i(-2\pi i)\widehat{(x_l x_k f)}$
$\dots$

2. из п.1 теоремы (56) следует:

   (a) $\widehat{(\dfrac{\partial f}{\partial x_k})} = 2\pi i y_k \widehat{f}(y)$

   (b) $\forall \alpha$ – мультииндексы:
   $\widehat{(\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha})} = (2\pi i)^{|\alpha|} y^\alpha \widehat{f}(y)$

   $\widehat{(\dfrac{\partial}{\partial x_l} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_k})} = 2\pi i y_l \widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}(y)$ // TODO - тут вроде надо будет пояснить, почему левая часть ограничена

61 Лемма "о ядре Дирихле". Следствие. TODO

62 Теорема о равносходимости ряда Фурье и интеграла Фурье

Если:

1. $f \in L^1(R)$

2. $f_0 \in L^1[-\pi; \pi]$

3. $f = f_0$ в $U(x)$, где $x \in R$

Тогда в точке x: сходимость интеграла Фурье $\Leftrightarrow$ сходимость ряда Фурье и в случае сходимости $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f_0) e^{i\pi x}$

Доказательство:
Проверим: $I_A(f,x) - S_{[2\pi A]}(f,x) \to 0 A \to \infty$

1. $I_A(f,x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\frac{\sin(2\pi At)}{\pi t}dt + o(1), A \to \infty$
2. $S_n(f,x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\frac{\sin(nt)}{\pi t}dt$

$2\pi A = n$ - целое, тогда проверять и ничего $2\pi A$ - нецелое. $n = [2\pi A]$
$|I_A(f,x) - I_{\frac{n}{2\pi}}(f,x)| = |\int_{-A}^{A} - \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}| \le \int_{A-\frac{1}{2\pi}}^{A} + \int_{-A}^{-A+\frac{1}{2\pi}} \le 2 * \frac{1}{2\pi} \max_{|y|>A-\frac{1}{2\pi}|\hat{f}(y)|} \to 0$, как суммируемая функция.