

Определения по матану, семестр 4

7 июня 2018 г.

Содержание

| | | |
|----|---|---|
| 1 | Свойство, выполняющееся почти везде | 5 |
| 2 | Сходимость почти везде | 5 |
| 3 | Сходимость по мере | 5 |
| 4 | Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости | 5 |
| 5 | Интеграл ступенчатой функции | 5 |
| 6 | Интеграл неотрицательной измеримой функции | 6 |
| 7 | Суммируемая функция | 6 |
| 8 | Интеграл суммируемой функции | 7 |
| 9 | Произведение мер | 7 |
| 10 | Теорема Фубини | 7 |
| 11 | Образ меры при отображении | 8 |
| 12 | Взвешенный образ меры | 8 |

| | | |
|------|---|----|
| 13 | Плотность одной меры по отношению к другой | 9 |
| 14 | Заряд, множество положительности | 9 |
| 14.1 | Заряд | 9 |
| 14.2 | Множество положительности | 9 |
| 15 | Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы | 9 |
| 16 | Интегральные неравенства Гельдера и Минковского | 10 |
| 16.1 | Неравенство Гельдера | 10 |
| 16.2 | Неравенство Минковского | 10 |
| 17 | Интеграл комплекснозначных функции | 11 |
| 18 | Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$ | 11 |
| 19 | Пространство $L_\infty(E, \mu)$ | 11 |
| 20 | Существенный супремум | 12 |
| 21 | Фундаментальная последовательность, полное пространство | 12 |
| 22 | Плотное множество | 12 |
| 23 | Финитная функция | 12 |
| 24 | Мера Лебега-Стилтьеса | 13 |
| 25 | Функция распределения | 13 |
| 26 | Измеримое множество на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 | 13 |
| 27 | Мера Лебега на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 | 13 |
| 28 | Поверхностный интеграл первого рода | 14 |

| | |
|--|----|
| 29 Кусочно-гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 | 14 |
| 30 Гильбертово пространство | 14 |
| 31 Ортогональный ряд | 14 |
| 32 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве | 14 |
| 33 Ортогональное семейство векторов | 14 |
| 34 Ортонормированное семейство векторов | 15 |
| 35 Коэффициенты Фурье | 15 |
| 36 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве | 15 |
| 37 Базис, полная, замкнутая ОС | 15 |
| 38 Сторона поверхности | 15 |
| 39 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов | 16 |
| 40 Интеграл II рода | 16 |
| 41 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности | 16 |
| 42 Тригонометрический ряд | 17 |
| 43 Коэффициенты Фурье функции | 17 |
| 44 Ядро Дирихле и Фейера | 18 |
| 44.1 Ядро Дирихле | 18 |
| 44.2 Ядро Фейера | 18 |
| 45 Ротор, дивергенция векторного поля | 18 |

| | | |
|----|---|----|
| 46 | Соленоидальное векторное поле | 18 |
| 47 | Бескоординатное определение ротора и дивергенции | 19 |
| 48 | Свертка | 19 |
| 49 | Аппроксимативная единица. TODO | 19 |
| 50 | Усиленная аппроксимативная единица. TODO | 19 |
| 51 | Метод суммирования средними арифметическими. TODO | 19 |
| 52 | Суммы Фейера. TODO | 19 |
| 53 | Преобразование Фурье. TODO | 20 |
| 54 | Свертка в $L^1(\mathbb{R}^m)$. TODO | 20 |
| 55 | Интеграл Фурье, частичный интеграл Фурье. TODO | 20 |
| 56 | Несобственный интеграл по мере Deprecated | 20 |
| 57 | L_{loc} Deprecated | 20 |

1 Свойство, выполняющееся почти везде

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой, и $\omega(x)$ – утверждение, зависящее от точки x .

$E := \{x : \omega(x) \text{ — ложно}\}$ и $\mu E = 0$. Тогда говорят, что $\omega(x)$ верно при почти всех (п.в.) x .

2 Сходимость почти везде

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой, и $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Говорим, что $f_n \rightarrow f(x)$ почти везде, если $\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ измеримо и имеет меру 0.

3 Сходимость по мере

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны, измеримы

Говорят, что f_n сходится к f по мере μ (при $n \rightarrow +\infty$) (обозначается $f_n \xrightarrow{\mu} f$) если $\forall \epsilon > 0 \mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой, $\mu(X) < +\infty$

$f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - п.в. конечны, измеримы

$f_n \rightarrow f$ почти всюду.

Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists X_\epsilon \subset X, \mu(X \setminus X_\epsilon) < \epsilon, f_n$ равномерно сходится к f на X_ϵ

5 Интеграл ступенчатой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой.

$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ - ступенчатая функция, E_k - измеримые дизъюнктные множества, $f \geq 0$.

Интегралом ступенчатой функции f на множестве X назовём

$$\int_X f d\mu := \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что $[0 \cdot \infty = 0]$.

6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой.

f - измеримо, $f \geq 0$, её интегралом на множестве X назовём

$$\int_X f d\mu := \sup \left(\int_X g d\mu \right)$$

по всем $g: 0 \leq g \leq f, g$ - ступенчатая.

7 Суммируемая функция

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой.

f - измерима, $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ конечен (хотя бы один из них).

Тогда интегралом f на X назовём

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ - \int_X f^-$$

Если конечен $\int_X f$ (то есть конечны интегралы по обеим срезкам), то f называют суммируемой.

8 Интеграл суммируемой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой.

f — измерима, $E \in \mathbb{A}$.

Тогда интегралом f на множестве E назовём

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi(E) d\mu$$

f суммируемая на E , если $\int_X f^+ \chi(E)$ и $\int_X f^- \chi(E)$ конечны.

9 Произведение мер

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle, \langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ - пространства с мерой.

μ, ν - σ -конечные меры.

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathbb{A}, B \in \mathbb{B}\}$$

$$m_0 : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

m - называется произведением мер μ и ν , если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ на некоторую σ -алгебру $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$.

$m = \mu \times \nu$ - обозначение.

$\langle X \times Y, \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}, \mu \times \nu \rangle$ - произведение пространств с мерой.

10 Теорема Фубини

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle, \langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ - пространства с мерой,

μ, ν — σ -конечные и полные,

$$m = \mu \times \nu,$$

f — суммируемая на $X \times Y$ по m .

Тогда:

- при почти всех x функция $f_x \in L(Y, \nu)$, то есть суммируема на Y по ν

при почти всех y функция $f^y \in L(X, \mu)$

•

$$x \mapsto \phi(x) \mid \phi(x) = \int_Y f_x d\nu \in L(X, \mu)$$

$$y \mapsto \psi(y) \mid \psi(y) = \int_X f^y d\mu \in L(Y, \nu)$$

Эти функции суммируемы (по μ в X и по ν в Y соответственно).

•

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi(x) d\mu = \int_X \left(\int_Y f d\nu \right) d\mu$$

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_Y \psi(y) d\nu = \int_Y \left(\int_X f d\mu \right) d\nu$$

11 Образ меры при отображении

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой, $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ — пространство с σ -алгеброй.

$\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.

ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ .

12 Взвешенный образ меры

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой, $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ — пространство с σ -алгеброй.

$\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$ — измеримая.

Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$.

ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ .

При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

13 Плотность одной меры по отношению к другой

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой.

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$ — измеримая.

$\nu(E) = \int_E \omega(x) d\mu$. ν — мера на X .

ω называется плотностью ν относительно μ .

14 Заряд, множество положительности

14.1 Заряд

$\langle X, \mathbb{A}, _ \rangle$ — пространство с σ -алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).

ϕ счётно аддитивна.

Тогда ϕ — заряд.

14.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A, B$ измеримо:
 $\phi(B) \geq 0$.

15 Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы

$$x_1 = r \cdot \cos \phi_1$$

$$x_2 = r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2$$

$$1 \leq i \leq m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$$

$$i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3 \\
&\vdots \\
x_{m-2} &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-3} \cdot \cos \phi_{n-2} \\
x_{m-1} &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \cos \phi_{n-1} \\
x_m &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \sin \phi_{n-1}
\end{aligned}$$

$$r \geq 0$$

$$\mathcal{J} = r^{n-1} \cdot (\sin \phi_1)^{n-2} \cdot (\sin \phi_2)^{n-3} \cdots (\sin \phi_{n-2})^1 \cdot (\sin \phi_{n-1})^0$$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m -мерный вектор на нормаль к $(m-1)$ -мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру, пока не дойдём до нашего любимого \mathbb{R}^2 . Уже в нём рассматриваем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

16 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$; $f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{C}$ (E - изм.) — заданы п.в, измеримы.

16.1 Неравенство Гельдера

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогда: } \int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

16.2 Неравенство Минковского

$$1 \leq p < +\infty. \text{ Тогда: } \left(\int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

17 Интеграл комплекснозначных функции

TODO: Лев и Вадим

18 Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$, $E \in \mathbb{A}$.

$$L'_p(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ изм.}, \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект — если определить норму как $\|f\| = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0, будут иметь норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$, если $f = g$ п.в.

$$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu) / \sim - \text{лин. норм. пр-во с нормой } \|f\| = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $\|f\|_p$ за норму f в пространстве L_p .

19 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$$L_\infty(E, \mu) = \{f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ess sup}_E |f| < +\infty\}$$

NB1: $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

20 Существенный супремум

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle, E \subset X$ — изм., $f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf \{A \in R : f(x) \leq A \text{ при п.в. } x\}$.

В этом определении A - существенная верхняя граница.

Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2. $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int_E |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f| d\mu$.

21 Фундаментальная последовательность, полное пространство

TODO

22 Плотное множество

Множество A плотно во множестве B , если $\forall b \in B \forall \epsilon > 0$ верно, что $U_\epsilon(b) \cap A \neq \emptyset$.

23 Финитная функция

$\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. \exists шар $B : \varphi \equiv 0$ вне B . Тогда φ — финитная.

Множество непрерывных финитных функций обозначаем как $C_0(\mathbb{R}^m)$.

24 Мера Лебега-Стилтьеса

\mathbb{P}^1 — полукольцо ячеек в \mathbb{R} .

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, монотонно возрастает.

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ -конечная мера на \mathbb{P}^1 .

NB1: g не обязательно непр., но должна возрастать.

Тогда $g(c \pm 0) = \lim_{x \rightarrow c \pm 0} g(x)$.

$\mu[a, b) := g(b - 0) - g(a - 0)$ — тоже σ -конечная мера (если g не непр. слева, то $\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — не мера (нет непр. слева)).

Тогда мерой Лебега-Стилтьеса будем называть меру μ_g , полученную из μ по теореме о лебеговском продолжении меры.

25 Функция распределения

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$, $h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измерима, п.в. конечна.

Пусть $\forall t \in \mathbb{R} \quad \mu X(h < t) < +\infty$.

Тогда $H(t) := \mu X(h < t)$ — это функция распределения функции h по мере μ .

26 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3

TODO

27 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в \mathbb{R}^3

TODO

28 Поверхностный интеграл первого рода

TODO

29 Кусочно-гладкая поверхность в \mathbb{R}^3

TODO

30 Гильбертово пространство

\mathbb{H} — линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} , в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствующей нормы, называется Гильбертовым.

31 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}$, $\sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$.

32 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

$x_n \in \mathbb{H}$.

$\sum x_n$ сходится к x , если

$S_n := \sum_{k=1}^n x_k$, $S_n \rightarrow x$ (то есть, $|S_n - x| \rightarrow 0$ — сходимость по норме).

33 Ортогональное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l : e_k \perp e_l$, $\forall k : e_k \neq 0$.

34 Ортонормированное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если e_k — ортогональное семейство векторов, и $\forall k : |e_k| = 1$.

35 Коэффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортонормированная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$.

$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

36 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

37 Базис, полная, замкнутая ОС

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} .

1. $\{e_k\}$ — **базис**, если $\forall x \in \mathbb{H} : \exists c_k$, что $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$
2. $\{e_k\}$ — **полная** О.С., если $(\forall k : z \perp e_k) \Rightarrow z = 0$.
3. $\{e_k\}$ — **замкнутая** О.С., если $\forall x \in \mathbb{H} : \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

38 Сторона поверхности

Сторона (простой) гладкой двумерной поверхности — непрерывное поле единичных нормалей. Поверхность, для которой существует сторона, называется двусторонней. Если же стороны не существует, она называется односторонней.

39 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

F_1, F_2 – два касательных векторных поля к поверхности M .

$\forall p \in M$ $F_1(p), F_2(p)$ – Л.Н.З. касательные векторы.

Тогда поле нормалей стороны определяется, как $n := F_1 \times F_2$

Репер – пара векторов из $F_1 \times F_2$.

40 Интеграл II рода

M – простая гладкая двусторонняя двумерная поверхность в \mathbb{R}^3 .

n_0 – фиксированная сторона (одна из двух).

$F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ – векторное поле.

Тогда интегралом II рода назовем $\int_M \langle F, n_0 \rangle ds$

Замечания

1. Смена стороны эквивалентна смене знака.
2. Не зависит от параметризации.
3. $F = (P, Q, R)$.

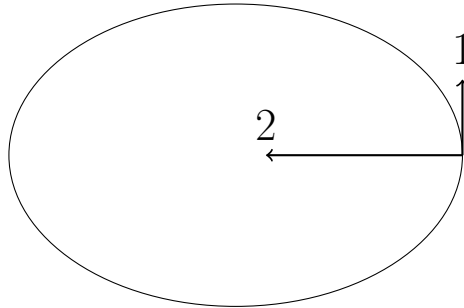
Тогда интеграл имеет вид $\iint P dydz + Q dzdx + R dx dy$.

NB: $Q dx dz = -Q dz dx$.

41 Ориентация контура, согласованная со стороной поверхности

Ориентация контура согласована со стороной поверхности, если она задает эту сторону.

Пояснение: Рассмотрим некоторый контур (замкнутую петлю) и точку на нем. Построим два касательных вектора к контуру в этой точке: первый — снаружи от контура (задает направление «движения» по петле), второй — внутри контура. Тогда будем называть такую ориентацию согласованной со стороной, если направление векторного произведения первого и второго векторов в точке совпадает с направлением нормали к поверхности.



42 Тригонометрический ряд

-

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

(где a_i, b_i — коэффициенты ряда).

- Другая форма:

$$\sum_{k=\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

Тогда $S_n := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$.

43 Коэффициенты Фурье функции

-

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

•

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

•

$$k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

44 Ядро Дирихле и Фейера

44.1 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right)$$

44.2 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

45 Ротор, дивергенция векторного поля

$F = (P, Q, R)$ — векторное поле в \mathbb{R}^3 .

$(P, Q, R) \rightarrow (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$. Такое преобразование называется ротором или вихрем. Обозначается как $rot F$.

$div F = P'_x + Q'_y + R'_z$. Многомерный случай определяется аналогично.

46 Соленоидальное векторное поле

Векторное поле A — соленоидальное, если \exists векторное поле $B : rot B = A$. Тогда B называется векторным потенциалом поля A .

47 Бескоординатное определение ротора и дивергенции

$\operatorname{rot} F$ — это такое векторное поле, что $\forall a \forall n_0 (\operatorname{rot} F(a))_{n_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r} F_l dl$

$$\operatorname{div} F(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iiint_{B(a,r)} \operatorname{div} F_l dx dy dz = \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3(B(a,r))} \iint_{\partial B(a,r)} \langle F, n_0 \rangle dS$$

48 Свертка

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K(t) dt$$

где $f, K \in L_1([-\pi, \pi])$.

49 Аппроксимативная единица. TODO

TODO

50 Усиленная аппроксимативная единица. TODO

TODO

51 Метод суммирования средними арифметическими. TODO

TODO

52 Суммы Фейера. TODO

TODO

53 Преобразование Фурье. TODO

TODO

54 Свертка в $L^1(\mathbb{R}^m)$. TODO

TODO

55 Интеграл Фурье, частичный интеграл Фурье. TODO

TODO

56 Несобственный интеграл по мере Deprecated

$$\int_a^{\rightarrow b} f d\lambda_1 = \lim_{B \rightarrow b-0} \int_a^B f d\lambda_1$$

где f - локально суммируемая (т. е. $\forall [a, B] \subset [a, b)$ f — сумм. на $[a, B]$)

57 L_{loc} Deprecated

$$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

Y — метрическое пространство (или метризуемое).

$\forall y$ $f^y(x) = f(x, y)$ — суммируема на X .

f удовлетворяет L_{loc} ($f \in (L_{loc})$) если:

- $\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема.
- $\exists U(a) \forall y \in \dot{U}(a)$ при п. в. $x \in \mathbb{X}$ $|f(x, y)| \leq g(x)$