

# Определения по матану, семестр 4

5 марта 2018 г.

## Содержание

1	Свойство, выполняющееся почти везде	2
2	Сходимость почти везде	2
3	Сходимость по мере	2
4	Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости	2
5	Интеграл ступенчатой функции	2
6	Интеграл неотрицательной измеримой функции	3
7	Суммируемая функция	3
8	Интеграл суммируемой функции	3
9	Произведение мер	4
10	Теорема Фубини	4
11	Образ меры при отображении	5
12	Взвешенный образ меры	5
13	Плотность одной меры по отношению к другой	5
14	Заряд, множество положительности	5
14.1	Заряд . . . . .	5
14.2	Множество положительности . . . . .	5

# 1 Свойство, выполняющееся почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  - пространство с мерой, и  $\omega(x)$  - утверждение, зависящее от точки  $x$ .  
 $E := \{x : \omega(x) \text{ — ложно}\}$  и  $\mu E = 0$ . Тогда говорят, что  $\omega(x)$  верно при почти всех (п.в.)  $x$ .

# 2 Сходимость почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  - пространство с мерой, и  $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .  
Говорим, что  $f_n \rightarrow f(x)$  почти везде, если  $\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$  измеримо и имеет меру 0.

# 3 Сходимость по мере

$(X, a, \mu)$  - пространство с мерой,  $\mu \cdot X < +\infty$   
 $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  - п.в. конечны  
Говорят, что  $f_n$  сходится к  $f$  по мере  $\mu$  (при  $n \rightarrow +\infty$ ) (обозначается  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ) если  
 $\forall \epsilon > 0 \mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

# 4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

$(X, a, \mu)$  - пространство с мерой  
 $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$  - п.в. конечны, измеримы  
 $f_n \rightarrow f$ .  
Тогда эта сходимость “почти равномерная”

# 5 Интеграл ступенчатой функции

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$  - пространство с мерой  
 $f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$  - ступенчатая функция,  $E_k$  - измеримые дизъюнктные множества,  
 $f \geq 0$   
Интегралом ступенчатой функции  $f$  на множестве  $\mathbb{X}$  назовём

$$\int_{\mathbb{X}} f d\mu := \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что  $[0 \cdot \infty = 0]$

## 6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f$  - измеримо,  $f \geq 0$ , её интегралом на множестве  $X$  назовём

$$\int_X f d\mu := \sup \left( \int_X g \right)$$

, где  $0 \leq g \leq f$ ,  $g$ -ступенчатая

## 7 Суммируемая функция

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f$ -измерима,  $\int_X f^+$  или  $\int_X f^-$  конечен (хотя бы один из них).

Тогда интегралом  $f$  на  $X$  назовём

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ - \int_X f^-$$

Тогда если конечен  $\int_X f$ , (то есть конечны интегралы по обоим срезкам), то  $f$  называют суммируемой

## 8 Интеграл суммируемой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f$ -измерима,  $E \in \mathbb{A}$

Тогда интегралом  $f$  на множестве  $E$  назовём

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi(E) d\mu$$

$f$  суммируемая на  $E$ , если  $\int_X f^+ \chi(E)$  и  $\int_X f^- \chi(E)$  конечны

## 9 Произведение мер

$\langle \mathbb{X}, \alpha, \mu \rangle, \langle \mathbb{Y}, \beta, \nu \rangle$  - пространства с мерой

$\mu, \nu$  -  $\sigma$ -конечные меры

$$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : A \in \alpha, B \in \beta\}$$

$$m_0 : \alpha \times \beta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

$m$  - называется произведением мер  $\mu$  и  $\nu$ , если  $m$  - мера, которая является Лебеговским продолжением  $m_0$  с полукольца  $\alpha \times \beta$  на некоторую  $\sigma$ -алгебру  $\alpha \otimes \beta$ .

$m = \mu \times \nu$  - обозначение

$\langle \mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \alpha \otimes \beta, \mu \times \nu \rangle$  - произведение пространств с мерой

## 10 Теорема Фубини

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle, \langle \mathbb{Y}, \mathbb{B}, \nu \rangle$  - пространство с мерой,

$\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные,

$$m = \mu \times \nu,$$

$f$  — суммируемая на  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  по  $m$ .

Тогда:

- при «почти всех»  $x$  функция  $f_x \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$ , то есть суммируема на  $\mathbb{Y}$  по  $\nu$   
при «почти всех»  $y$  функция  $f^y \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$

•

$$x \mapsto \phi(x) \mid \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$$

$$x \mapsto \psi(x) \mid \psi(x) = \int_{\mathbb{X}} f^y d\mu \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$$

Это есть эти функции суммируемы в некотором контексте ( $\mathbb{X}, \mu$  и  $\mathbb{Y}, \nu$  соответственно)

•

$$\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm = \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left( \int_{\mathbb{Y}} f d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm = \int_{\mathbb{Y}} \psi(y) d\nu = \int_{\mathbb{Y}} \left( \int_{\mathbb{X}} f d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

## 11 Образ меры при отображении

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $(Y, \mathbb{B}, \_)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.  
 $\Phi : X \rightarrow Y$ ,  $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$  (прообраз любого множества из  $\mathbb{B}$  лежит в  $\mathbb{A}$ ).

Пусть для  $E \in \mathbb{B}$   $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$ .

$\nu$  является мерой на  $Y$  и называется образом меры  $\mu$  при отображении  $\Phi$ .

## 12 Взвешенный образ меры

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $(Y, \mathbb{B}, \_)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.  
 $\Phi : X \rightarrow Y$ ,  $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$  (прообраз любого множества из  $\mathbb{B}$  лежит в  $\mathbb{A}$ ).

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$  — измеримая.

Пусть для  $E \in \mathbb{B}$   $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$ .

$\nu$  является мерой на  $Y$  и называется взвешенным образом меры  $\mu$ .

При  $\omega \equiv 1$  взвешенный образ меры является обычным образом меры.

## 13 Плотность одной меры по отношению к другой

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой.

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$  — измеримая.

$\nu(E) = \int_E \omega(x) d\mu$ .  $\nu$  — мера на  $X$ .

$\omega$  называется плотностью  $\nu$  относительно  $\mu$ .

## 14 Заряд, множество положительности

### 14.1 Заряд

$(X, \mathbb{A}, \_)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  (конечная, не обязательно неотрицательная).

$\phi$  счётно аддитивна.

Тогда  $\phi$  — заряд.

### 14.2 Множество положительности

$A \subset X$  — множество положительности, если  $\forall B \subset A$ ,  $B$  измеримо:  $\phi(B) \geq 0$ .