

# Определения по матану, семестр 4

7 мая 2018 г.

## Содержание

1	Теорема о вложении пространств $L^p$	2
2	Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере	2
3	Полнота $L_p$	2
4	Лемма Урысона	2
5	Плотность в $L_p$ непрерывных финитных функций	3
6	Теорема о непрерывности сдвига	3
7	Теорема об интеграле с функцией распределения	3
8	Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве	3
9	Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе	4
10	Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя	4

11 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля	5
12 Теорема о характеристике базиса	5
13 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда	6
14 Теорема Римана–Лебега	6
15 Принцип локализации Римана	6
16 Признак Дини. Следствия	6
17 Корректность определения свертки	7
18 Свойства свертки функции из $L^p$ с функцией из $L^q$	7
19 Формула Грина	7
20 Формула Стокса	7
21 Формула Гаусса–Остроградского	8
22 Соленоидальность бездивергентного векторного поля	8

# 1 Теорема о вложении пространств $L^p$

$$\mu E < +\infty, \quad 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1.  $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2.  $\forall f$  — измеримы  $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

# 2 Теорема о сходимости в $L_p$ и по мере

$$1 \leq p < +\infty, \quad f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

Тогда:

1.
  - $f \in L_p$
  - $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$

Тогда:  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (по мере)

2.
  - $f_n \xrightarrow{\mu} f$  (либо если  $f_n \rightarrow f$  почти везде)
  - $|f_n| \leq g$  почти при всех  $n$ ,  $g \in L_p$

Тогда:  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p$

# 3 Полнота $L_p$

$L_p(E, \mu) \quad 1 \leq p < \infty$  — полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходится по норме  $\|f\|_p$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, k \quad \|f_n - f_k\| < \varepsilon \Rightarrow \exists f \mid \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

# 4 Лемма Урысона

$F_0, F_1$  — два непересекающихся замкнутых множества из  $\mathbb{R}^m$

Тогда  $\exists f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  (непрерывная):  $f|_{F_0} = 0, f|_{F_1} = 1$

## 5 Плотность в $L_p$ непрерывных финитных функций

$\forall p : 1 \leq p < +\infty \quad C_0$  всюду плотно в  $L^p(\mathbb{R}^m)$

## 6 Теорема о непрерывности сдвига

$$f_n(x) = f(x + h)$$

\*  $f$  - равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|f_n - f\|_\infty = 0$

\*  $1 \leq p < +\infty \quad f \in L^p(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|f_n - f\|_p = 0$

\*  $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|f_n - f\|_\infty = 0$

\*  $1 \leq p < +\infty \quad f \in L^p[0, T] \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|f_n - f\|_p = 0$

## 7 Теорема об интеграле с функцией распределения

$$(\mathbb{R}, B, X)$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$ , изм. по Борелю, п.в. конечн.

$h : X \rightarrow \mathbb{R}$  с функцией распределения  $H(t)$

$\mu_H$  - мера Бореля-Стилтьеса (мера Лебега-Стилтьеса на  $B$ )

$$\underline{\text{Тогда:}} \int_X f(h(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t)$$

## 8 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

$$1. x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

$$2. \sum x_k \text{ сходится, тогда } \forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$$

3.  $\sum x_k$  - ортогональный ряд, тогда  $\sum x_k$  - с.х.  $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$  сходится, при этом  $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

## 9 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}$ ,  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1.  $\{e_k\}$  — Л.Н.З.

$$2. c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

3.  $c_k \cdot e_k$  — проекция  $x$  на прямую  $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

Иными словами  $x = c_k \cdot e_k + z$ , где  $z \perp e_k$

## 10 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$  — ортогональная система в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \quad \mathcal{L} = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots) \subset \mathbb{H}$$

Тогда:

1.  $S_n$  — орт. проекция  $x$  на пр-во  $\mathcal{L}$ . Иными словами  $x = S_n + z$ ,  $z \perp \mathcal{L}$

2.  $S_n$  — наилучшее приближение  $x$  в  $\mathcal{L}$  ( $\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$ )

$$3. \|S_n\| \leq \|x\|$$

## 11 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$  – орт. сист. в  $\mathbb{H}$ ,  $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

1. Ряд Фурье  $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k$  сх-ся в  $\mathbb{H}$
2.  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$
3.  $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

## 12 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$  – орт. сист. в  $\mathbb{H}$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $\{e_k\}$  – базис
2.  $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$  (обобщенное уравнение замкнутости)
3.  $\{e_k\}$  - замкн.
4.  $\{e_k\}$  - полн.
5.  $Lin(e_1, e_2, \dots)$  - плотна в  $\mathbb{H}$

## 13 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть  $S_n \rightarrow f$  в  $L_1[-\pi, \pi]$

Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## 14 Теорема Римана–Лебега

$E \subset \mathbb{R}$  — измеримо,  $f \in L^1(E)$

Тогда  $\int_E f(x) \cdot e^{ikx} \, dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  (То же самое можно и с  $\cos x$  и  $\sin x$  вместо  $e^{ikx}$ )

## 15 Принцип локализации Римана

$f, g \in L^1[-\pi, \pi] \quad x_0 \in [-\pi, \pi] \quad \exists \delta > 0$

$f(x) = g(x)$  при  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Тогда  $S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

## 16 Признак Дини. Следствия

$f \in L^1[-\pi, \pi] \quad x_0 \in [-\pi, \pi] \quad S \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C})$

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x_0+t) - 2S + f(x_0-t)|}{t} dt < +\infty$$

Тогда:  $S_n(f, x_0) \rightarrow S$

Следствие:  $f \in L^1[-\pi, \pi]$   $x_0 \in [-\pi, \pi]$

Существуют 4 конечных предела  $\alpha_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$

Тогда: ряд Фурье сходится в  $x_0$  к  $S = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Следствие:  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  - непр. в  $x_0$

Существует конечн.  $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$  и  $\lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$

Тогда:  $S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$

## 17 Корректность определения свертки

## 18 Свойства свертки функции из $L^p$ с функцией из $L^q$

$$f \in L^p \quad k \in L^q[-\pi, \pi] \quad \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right) \quad 1 \leq p < +\infty$$

Тогда  $f * k$  - непрерывна на  $[-\pi, \pi]$

$$\|f * k\|_1 \leq \|f\|_p * \|k\|_q$$

## 19 Формула Грина

$\mathbb{R}^2$  — ориент. с помощью нумерации координат.

$D \subset \mathbb{R}^2$  — компактное, связное, односвязное, с  $C^2$ -гладкой границей.

$(P, Q)$  — гладкое векторное поле.

Пусть граница  $D(\partial D)$  ориентирована согласованно с ориентацией плоскости.

$$\text{Тогда } \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

## 20 Формула Стокса

$D \subset \mathbb{R}^3$  — простая гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial D$  —  $C^2$ -гладкая кривая,

$n_0$  — сторона поверхности; ориентированы согласованно с  $\partial D$

$(P, Q, R)$  — гладкое векторное поле на  $D$ . Тогда:



$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_D (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy \end{aligned}$$

## 21    Формула Гаусса–Остроградского

$D \subset \mathbb{R}^3$      $\partial D$  — ориент. полем внешних нормалей

$(P, Q, R)$  — гл. век. поле в  $D$ . Тогда

$$\iint_{\partial D} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_D (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz$$

## 22    Соленоидальность бездивергентного векторного поля

$A \in C^1$

$A$  - соленоидально  $\Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$