

# Определения по матану, семестр 4

8 апреля 2018 г.

## Содержание

1	Свойство, выполняющееся почти везде	4
2	Сходимость почти везде	4
3	Сходимость по мере	4
4	Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости	4
5	Интеграл ступенчатой функции	4
6	Интеграл неотрицательной измеримой функции	5
7	Суммируемая функция	5
8	Интеграл суммируемой функции	6
9	Произведение мер	6
10	Теорема Фубини	6
11	Образ меры при отображении	7
12	Взвешенный образ меры	8

13	Плотность одной меры по отношению к другой	8
14	Заряд, множество положительности	8
14.1	Заряд . . . . .	8
14.2	Множество положительности . . . . .	8
15	Сферические координаты в $R^3$ и в $R^m$ , их Якобианы	9
16	Интегральные неравенства Гельдера и Минковского	9
16.1	Неравенство Гельдера . . . . .	9
16.2	Неравенство Минковского . . . . .	10
17	Интеграл комплекснозначных функций	10
18	Пространство $L_p(E, \mu)$ , $1 \leq p < +\infty$	10
19	Пространство $L_\infty(E, \mu)$	11
20	Существенный супремум	11
21	Фундаментальная последовательность, полное пространство	12
22	Плотное множество	12
23	Финитная функция	12
24	Мера Лебега-Стилтьеса	12
25	Функция распределения	12
26	Измеримое множество на простой двумерной поверхности в $R^3$	12
27	Мера Лебега на простой двумерной поверхности в $R^3$	12
28	Поверхностный интеграл первого рода	12

29	Кусочно-гладкая поверхность в $R^3$	12
30	Гильбертово пространство	12
31	Ортогональный ряд	13

# 1 Свойство, выполняющееся почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  - пространство с мерой, и  $\omega(x)$  – утверждение, зависящее от точки  $x$ .

$E := \{x : \omega(x) \text{ — ложно}\}$  и  $\mu E = 0$ . Тогда говорят, что  $\omega(x)$  верно при почти всех (п.в.)  $x$ .

# 2 Сходимость почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  - пространство с мерой, и  $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

Говорим, что  $f_n \rightarrow f(x)$  почти везде, если  $\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$  измеримо и имеет меру 0.

# 3 Сходимость по мере

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  - пространство с мерой,  $\mu \cdot X < +\infty$

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  - п.в. конечны

Говорят, что  $f_n$  сходится к  $f$  по мере  $\mu$  (при  $n \rightarrow +\infty$ ) (обозначается  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ) если  $\forall \epsilon > 0 \mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

# 4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  - пространство с мерой

$f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$  - п.в. конечны, измеримы

$f_n \rightarrow f$ .

Тогда эта сходимость “почти равномерная”

# 5 Интеграл ступенчатой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$  - ступенчатая функция,  $E_k$  - измеримые дизъюнктные множества,  $f \geq 0$

Интегралом ступенчатой функции  $f$  на множестве  $X$  назовём

$$\int_X f d\mu := \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что  $[0 \cdot \infty = 0]$

## 6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f$  - измеримо,  $f \geq 0$ , её интегралом на множестве  $X$  назовём

$$\int_X f d\mu := \sup \left( \int_X g \right)$$

, где  $0 \leq g \leq f$ ,  $g$  - ступенчатая

## 7 Суммируемая функция

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f$  - измерима,  $\int_X f^+$  или  $\int_X f^-$  конечен (хотя бы один из них).

Тогда интегралом  $f$  на  $X$  назовём

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ - \int_X f^-$$

Тогда если конечен  $\int_X f$ , (то есть конечны интегралы по обеим срезкам), то  $f$  называют суммируемой

## 8 Интеграл суммируемой функции

$\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$  - пространство с мерой

$f$  — измерима,  $E \in \mathcal{A}$

Тогда интегралом  $f$  на множестве  $E$  назовём

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi(E) d\mu$$

$f$  суммируемая на  $E$ , если  $\int_X f^+ \chi(E)$  и  $\int_X f^- \chi(E)$  конечны

## 9 Произведение мер

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$  - пространства с мерой

$\mu, \nu$  -  $\sigma$ -конечные меры

$$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \alpha, B \in \beta\}$$

$$m_0 : \alpha \times \beta \rightarrow \bar{R}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

$m$  - называется произведением мер  $\mu$  и  $\nu$ , если  $m$  - мера, которая является Лебеговским продолжением  $m_0$  с полукольца  $\alpha \times \beta$  на некоторую  $\sigma$ -алгебру  $\alpha \otimes \beta$ .

$m = \mu \times \nu$  - обозначение

$\langle X \times Y, \alpha \otimes \beta, \mu \times \nu \rangle$  - произведение пространств с мерой

## 10 Теорема Фубини

$\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle, \langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$  - пространство с мерой,

$\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные,

$$m = \mu \times \nu,$$

$f$  — суммируемая на  $X \times Y$  по  $m$ .

Тогда:

- при «почти всех»  $x$  функция  $f_x \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$ , то есть суммируема на  $\mathbb{Y}$  по  $\nu$

при «почти всех»  $y$  функция  $f^y \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$

•

$$x \mapsto \phi(x) \mid \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$$

$$y \mapsto \psi(y) \mid \psi(y) = \int_{\mathbb{X}} f^y d\mu \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$$

Это есть эти функции суммируемы в некотором контексте ( $\mathbb{X}, \mu$  и  $\mathbb{Y}, \nu$  соответственно)

•

$$\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm = \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left( \int_{\mathbb{Y}} f d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm = \int_{\mathbb{Y}} \psi(y) d\nu = \int_{\mathbb{Y}} \left( \int_{\mathbb{X}} f d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

## 11 Образ меры при отображении

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $(Y, \mathbb{B}, \_)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.  $\Phi : X \rightarrow Y$ ,  $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$  (прообраз любого множества из  $\mathbb{B}$  лежит в  $\mathbb{A}$ ).

Пусть для  $\forall E \in \mathbb{B}$   $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$ .

$\nu$  является мерой на  $Y$  и называется образом меры  $\mu$  при отображении  $\Phi$ .

## 12 Взвешенный образ меры

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $(Y, \mathbb{B}, \_)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.  
 $\Phi : X \rightarrow Y$ ,  $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$  (прообраз любого множества из  $\mathbb{B}$  лежит в  $\mathbb{A}$ ).

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$  — измеримая.

Пусть для  $E \in \mathbb{B}$   $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$ .

$\nu$  является мерой на  $Y$  и называется взвешенным образом меры  $\mu$ .

При  $\omega \equiv 1$  взвешенный образ меры является обычным образом меры.

## 13 Плотность одной меры по отношению к другой

$(X, \mathbb{A}, \mu)$  — пространство с мерой.

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$  — измеримая.

$\nu(E) = \int_E \omega(x) d\mu$ .  $\nu$  — мера на  $X$ .

$\omega$  называется плотностью  $\nu$  относительно  $\mu$ .

## 14 Заряд, множество положительности

### 14.1 Заряд

$(X, \mathbb{A}, \_)$  — пространство с  $\sigma$ -алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  (конечная, не обязательно неотрицательная).

$\phi$  счётно аддитивна.

Тогда  $\phi$  — заряд.

### 14.2 Множество положительности

$A \subset X$  — множество положительности, если  $\forall B \subset A$ ,  $B$  измеримо:  
 $\phi(B) \geq 0$ .



## 15 Сферические координаты в $R^3$ и в $R^m$ , их Якобианы

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \cdot \cos \phi_1 & 1 \leq i \leq m-2 : \phi_i &\in [0, \pi] \\
 x_2 &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2 & i = m-1 : \phi_i &\in [0, 2\pi] \\
 x_3 &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_{m-2} &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-3} \cdot \cos \phi_{n-2} \\
 x_{m-1} &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \cos \phi_{n-1} \\
 x_m &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \sin \phi_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{J} = r^{n-1} \cdot (\sin \phi_1)^{n-2} \cdot (\sin \phi_2)^{n-3} \cdots (\sin \phi_{n-2})^1 \cdot (\sin \phi_{n-1})^0$$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш  $m$ -мерный вектор на нормаль к  $(m-1)$ -мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру пока не дойдём до нашего любимого  $\mathbb{R}^2$ . Уже в нём рассматриваем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

## 16 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

### 16.1 Неравенство Гельдера

$(X, \mathbb{A}, \mu)$   $f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{C}$  ( $E$  - изм.) — заданы п.в., измеримы

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогда: } \int_E |fg| d\mu \leq \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

## 16.2 Неравенство Минковского

$(X, \mathbb{A}, \mu)$   $f, g$  — заданы п.в, измеримы

$$1 \leq p < +\infty. \text{ Тогда: } \left( \int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

## 17 Интеграл комплекснозначных функции

TODO: Лев и Вадим

## 18 Пространство $L_p(E, \mu)$ , $1 \leq p < +\infty$

$(X, \mathbb{A}, \mu)$   $E \subset \mathbb{A}$

$$L'_p(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ изм., } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \}$$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект - если определить норму как  $\|f\| =$

$$\left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функ-}$$

ции, которые п.в. равны 0 будут давать норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$ , если  $f = g$  п.в.

$$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu) / \sim - \text{ лин. норм. пр-во с нормой } \|f\| = \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать  $\|f\|_p$  за норму  $f$  в пространстве  $L_p$ .

## 19 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$$L_\infty(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \operatorname{ess\,sup}_E |f| < +\infty \}$$

NB1:  $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_E |f|$ .

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера :  $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$  (причем можно брать  $p = +\infty, q = 1$  или наоборот).

## 20 Существенный супремум

$(X, \mathbb{A}, \mu), E \subset X$  — изм.,  $f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

Тогда:  $\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf \{ A \in R : f(x) \leq A \text{ п.в. } x \}$ .

В этом определении  $A$  — существенная верхняя граница.

Свойства:

1.  $\operatorname{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2.  $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_E f$  при п.в.  $x \in E$ .
3.  $\int_E |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f| d\mu$ .

- 21 Фундаментальная последовательность, полное пространство
- 22 Плотное множество
- 23 Финитная функция
- 24 Мера Лебега-Стилтьеса
- 25 Функция распределения
- 26 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в  $R^3$
- 27 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в  $R^3$
- 28 Поверхностный интеграл первого рода
- 29 Кусочно-гладкая поверхность в  $R^3$
- 30 Гильбертово пространство

$H$  - линейное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствующей нормы, называется Гильбертовым.

## 31 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}$ ,  $\sum x_k$  называется ортогональным рядом, если  $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$

## 32 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

## 33 Ортогональное семейство векторов

$e_k \in \mathbb{H}$  - ортогональное семейство векторов, если  $\forall k \neq l : e_k \perp e_l, e_k \neq 0, e_l \neq 0$