

Теоремы по матану, семестр 4

14 мая 2018 г.

Содержание

1	Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия	5
2	Измеримость монотонной функции	6
3	Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере	6
4	Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде	8
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	8
5.1	Для определения (5)	8
5.2	Для окончательного определения	9
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	12
7	Теорема Леви	14
8	Линейность интеграла Лебега	15
9	Теорема об интегрировании положительных рядов	16
10	Теорема о произведении мер	16

11 Абсолютная непрерывность интеграла	18
11.1 Следствие	18
12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.	19
13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.	21
14 Теорема Фату. Следствия.	22
14.1 Следствие 1	22
14.2 Следствие 2	22
15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры	23
15.1 Лемма	23
15.2 Следствие	23
15.3 Теорема	23
16 Критерий плотности	24
17 Лемма о единственности плотности	25
18 Лемма о множестве положительности	26
19 Теорема Радона—Никодима	27
20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости	28
21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»	29
22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме	31
23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега	31

24 Теорема (принцип Кавальери)	32
25 Теорема Тонелли	33
26 Формула для Бета-функции	35
27 Объем шара в \mathbb{R}^m	36
28 Теорема о вложении пространств L^p	36
29 Теорема о сходимости в L_p и по мере	37
30 Полнота L^p	38
31 Лемма Урысона	39
32 Плотность в L^p непрерывных финитных функций	39
33 Теорема о непрерывности сдвига	39
34 Теорема об интеграле с функцией распределения	40
35 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве	40
36 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе	41
37 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя	42
38 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля	43
39 Теорема о характеристике базиса	44
39.1 $1 \Rightarrow 2$	44
39.2 $2 \Rightarrow 3$	44
39.3 $3 \Rightarrow 4$	45

39.4	$4 \Rightarrow 1$	45
39.5	$4 \Rightarrow 5$	45
39.6	$5 \Rightarrow 4$	45
40	Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда	45
41	Теорема Римана–Лебега	46
42	Формула Грина	47
43	Формула Стокса	48
44	Формула Гаусса–Остроградского	49

1 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых (формулировка). Следствия

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

f — измеримая функция на X , $\forall x \ f(x) \geq 0$. Тогда \exists ступенчатые функции f_n , такие что:

1. $\forall x \ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$.
2. $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$.

Следствие 1:

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измеримая. Тогда \exists ступенчатая $f_n : \forall x : \lim f_n(x) = f(x)$ и $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f = f^+ - f^-$. $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$. Срезки измеримы: $E(f^+ < a) = E(f < a) \cap E(0 < a)$, при этом f и $g \equiv 0$ измеримы (f^- измерима аналогично).
2. Срезки измеримы и неотрицательны, тогда по теореме существуют ступенчатые функции $f_n^+ \rightarrow f^+$, $f_n^- \rightarrow f^-$. Тогда и $f_n^+ - f_n^-$ это ступенчатая функция, при этом по свойству пределов: $f_n^+ - f_n^- \rightarrow f^+ - f^- = f$. Неравенство с модулем верно при правильных эpsilon-неравенствах.

Следствие 2:

f, g — измеримые функции. Тогда fg — измеримая функция. При этом считаем, что $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $f_n \rightarrow f : |f_n| \leq |f|$, $g_n \rightarrow g : |g_n| \leq |g|$ из первого следствия. Тогда $f_n g_n \rightarrow fg$ и fg измерима по теореме об измеримости пределов и супремумов (произведение ступенчатых функций — ступенчатая функция, значит, измеримая)

Следствие 3:

f, g — измеримые функции. Тогда $f + g$ — измеримая функция. При этом считаем, что $\forall x$ не может быть, что $f(x) = \pm\infty, g(x) = \mp\infty$

Доказательство:

Доказывается как следствие 2.

2 Измеримость монотонной функции

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое по Лебегу, $E' \subset E, \lambda_m(E \setminus E') = 0, f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть сужение $f : E' \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда f измерима на E .

Доказательство:

1. $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a), e := E \setminus E', \lambda_m(e) = 0$.
2. $E'(f < a)$ открыто в E' , так как f непрерывна. Поэтому $E' = G \cap E' \Rightarrow$, где G — открытое в E множество. Значит, $E'(f < a)$ — измеримо по Лебегу, так как оно является борелевским.
3. Но и $e(f < a)$ измеримо, так $\lambda_m(e) = 0$, следовательно $E(f < a)$ измеримо как объединение измеримых множеств

Следствие:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна. Тогда f измерима.

Доказательство:

Множество разрывов монотонной функции НБЧС множество, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой.

3 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

(X, a, μ) — пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — п.в. конечны, измеримы

$f_n \rightarrow f$ (поточечно, п.в.)

Доказательство:

1. подменим значения f_n и f на некотором множестве меры 0 так, чтобы сходимость $f_n \rightarrow f$ была всюду. (Так можно сделать. Действительно, $f_n \rightarrow f$ на $X \setminus e$, $\mu e = 0$

f_n - конечно на $X \setminus e_n$,

f - конечно на $X \setminus e_0$.

Тогда на $(X \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n)$ функции конечны и есть сходимость $f_n \rightarrow f$. По

свойствам меры $\mu \bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n = 0$. Тогда определим на $\bigcup_{n=0}^{+\infty} e_n$ $f_n = f = 0$.

Это очевидно даст нам необходимую конечность и поточечную сходимость.)

2. (частный случай) $f_n \rightarrow f \equiv 0$. Тогда пусть $\forall x f_n(x)$ - монотонно (по n). $|f_n(x)|$ - убывает с ростом n и $X(|f_n| \geq \epsilon) \supset X(|f_{n+1}| \geq \epsilon)$. А также $\bigcap_{n=0}^{+\infty} X(|f_n| \geq \epsilon) = \emptyset$.

$$\begin{cases} \mu X < +\infty \\ \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu E_n \rightarrow \mu \bigcup E_n$ - Th о непрерывности меры сверху.

$\Rightarrow \mu X(|f_n| \geq \epsilon) \rightarrow \mu \emptyset = 0$

3. (общий случай) $f_n \rightarrow f$. Рассмотрим $\phi_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$. Заметим свойства ϕ :

$$\begin{cases} \phi_n(x) \rightarrow 0 \\ \phi_n \downarrow_n \end{cases}$$

$X(|f_n - f| \geq \epsilon) \subset X(|\phi_n| \geq \epsilon) \Rightarrow$ по монотонности меры имеем $\mu X(|f_n - f| \geq \epsilon) \leq \mu X(\phi_n \geq \epsilon) \xrightarrow{part.case} 0$, ч.т.д.

4 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

(X, a, μ) - пространство с мерой

$f_n, f : X \rightarrow R$ - п.в. конечны, измеримы

$f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Тогда $\exists n_k \uparrow : f_{n_k} \rightarrow f$ п.в.

Доказательство: $\forall k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Тогда $\exists n_k : \forall n \geq n_k \mu X(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2k}$ (можно считать $n_1 < n_2 < \dots$)

Проверим $f_{n_k} \rightarrow f$ п.в. : $E_k := \bigcap_{j=k}^{\infty} X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j})$

$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$

$E_0 := \bigcap_{k \in N} E_k$.

$\mu E_k \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}) \geq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$ - конечно $\Rightarrow \mu E_k \rightarrow$

$\mu E_0 \Rightarrow \mu E_0 = 0$ (т.к. $\mu E_k \rightarrow 0$).

Рассмотрим $X \notin E_0$, т.е. если $X \notin E_0$, то $\exists k : X \notin E_k$, тогда $\forall j \geq k |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$ при $n \geq n_j$, т.е. $f_{n_k} \rightarrow f$, ч.т.д. Следствие: $f_n \Rightarrow f$

$|f_n| \leq g$ п.в. Док-во: Рассмотрим последовательность f_{n_k} где $f_{n_k} \rightarrow f$ п.в. и вдоль нее применим Th о двух городских.

$$\begin{cases} f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X \setminus e_1 \\ |f_n(x)| \leq g(x) \forall x \in X \setminus e_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow |f| \leq g$ на $(X \setminus e_1) \setminus e_2$

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

5.1 Для определения (5)

1. $\int_X f$ не зависит от представления f как ступенчатой функции, то

есть если f реализуется как $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ и как $f = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$,

интегралы по этим функциям равны

Доказательство:

Выпишем общее разбиение для этих двух разбиений

Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}) = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l}) = \sum_{i,j} (\lambda_i (= \alpha_j) \cdot \chi_{F_{i,j}})$

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_i (\lambda_i \cdot \sum_j (\mu F_{i,j})) = \sum_i (\lambda_i \cdot \mu E_i) = \int f$ для первого разбиения

Аналогично для второго разбиения получаем

$\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) = \sum_j (\alpha_j \cdot \sum_i (\mu F_{i,j})) = \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int f$ для второго разбиения, что и требовалось доказать

2. f, g -измеримые ступенчатые функции, $f \leq g$, тогда $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

Пусть $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$, $g = \sum_l (\alpha_l \cdot \chi_{G_l})$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, строим общее ступенчатое разбиение

Пусть $F_{ij} = E_i \cap G_j$

Тогда $\int f = \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu F_{i,j}) \leq \sum_j (\alpha_j \cdot \mu G_j) = \int g$, что и требовалось доказать

5.2 Для окончательного определения

1. Монотонность $f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

Доказательство:

(а) $f, g \geq 0$, тогда доказательство тривиально (по свойствам супремума)

(b) $\int_{\mathbb{X}} f = \int_{\mathbb{X}} f^+ - \int_{\mathbb{X}} f^-$
 $\int_{\mathbb{X}} g = \int_{\mathbb{X}} g^+ - \int_{\mathbb{X}} g^-$

Из того, что $\int_{\mathbb{X}} f^+ \leq \int_{\mathbb{X}} g^+$, а $\int_{\mathbb{X}} f^- \geq \int_{\mathbb{X}} g^-$ следует, что $\int_{\mathbb{X}} f \leq \int_{\mathbb{X}} g$

$$2. \int_{\mathbb{E}} 1 \cdot d\mu = \mu E$$

$$\int_{\mathbb{E}} 0 \cdot d\mu = 0$$

Очевидно из определения интеграла ступенчатой функции

$$3. \mu E = 0, f\text{-измерима, тогда } \int_{\mathbb{E}} f = 0, \text{ даже если } f = \infty \text{ на } \mathbb{E}$$

Доказательство:

(a) f -ступенчатая \Rightarrow ограниченная

$$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k}), \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sum \lambda_k \cdot \mu(E \cap E_k)$$

$$\text{Но } \mu(E \cap E_k) = 0 \text{ (так как } \mu E = 0), \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} f = 0$$

(b) f - измеримая, $f \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{E}} f = \sup \left(\int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq f, g \text{ - ступенчатая}$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \sup(0) = 0$$

(c) f - произвольная измеримая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} f = \int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- = 0 - 0 = 0$$

$$4. (a) \int_{\mathbb{E}} -f = - \int_{\mathbb{E}} f$$

$$(b) \forall c \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

Доказательство:

$$(a) (-f)^+ = f^-$$

$$(-f)^- = f^+$$

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} -f = \int_{\mathbb{E}} (-f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (-f)^- = \int_{\mathbb{E}} f^- - \int_{\mathbb{E}} f^+ = - \int_{\mathbb{E}} f$$

(b) Пусть $c > 0$. Если $c < 0$, то по предыдущему случаю можем рассматривать для $-c < 0$. Если $c = 0$, то по предыдущей теореме

$$\int_{\mathbb{E}} (0 \cdot f) = \int_{\mathbb{E}} 0 = 0 = 0 \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

i. Пусть $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} g \right), \text{ где } 0 \leq g \leq c \cdot f, \text{ } g - \text{ ступенчатая}$$

$$\text{Пусть } g = c \cdot \tilde{g}, \text{ тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right), \text{ где } 0 \leq c \cdot \tilde{g} \leq c \cdot f,$$

\tilde{g} - ступенчатая

$$\text{Тогда } \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) = \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} (c \cdot \tilde{g}) \right) = \sup_{\mathbb{E}} \left(c \cdot \int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \sup_{\mathbb{E}} \left(\int_{\mathbb{E}} \tilde{g} \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f$$

ii. Если f - произвольная:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f) &= \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^+ - \int_{\mathbb{E}} (c \cdot f)^- = \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^+ - \int_{\mathbb{E}} c \cdot f^- = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^+ - \\ &c \cdot \int_{\mathbb{E}} f^- = c \cdot \left(\int_{\mathbb{E}} f^+ - \int_{\mathbb{E}} f^- \right) = c \cdot \int_{\mathbb{E}} f \end{aligned}$$

5. Если существует $\int_{\mathbb{E}} f d\mu$, то $\left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$

Доказательство:

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\int_{\mathbb{E}} -|f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$-\int_{\mathbb{E}} |f| \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

$$\text{Тогда } \left| \int_{\mathbb{E}} f \right| \leq \int_{\mathbb{E}} |f|$$

6. f - измеримая на \mathbb{E} , $\mu\mathbb{E} < \infty$

$$a \leq f \leq b, \text{ тогда } a \cdot \mu\mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu\mathbb{E}$$

Доказательство:

$$a \leq f \leq b \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} a \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq \int_{\mathbb{E}} b$$

$$a \cdot \int_{\mathbb{E}} 1 \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \int_{\mathbb{E}} 1$$

$$a \cdot \mu \mathbb{E} \leq \int_{\mathbb{E}} f \leq b \cdot \mu \mathbb{E}$$

Следствие:

Если f - Измеримая и ограниченная на \mathbb{E} , $\mu \mathbb{E} < \infty$, тогда f - суммируемая на \mathbb{E}

7. f - суммируемая на $\mathbb{E} \Rightarrow f$ почти везде конечная на \mathbb{E} (то есть $f \in \alpha^0(\mathbb{E})$)

Доказательство:

(a) Пусть $f \geq 0$

Пусть $f = +\infty$ на A и пусть $\mu A > 0$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : f \geq n \cdot \chi_A$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{E}} f \geq n \cdot \int_{\mathbb{E}} \chi_A = n \cdot \mu A \Rightarrow \int_{\mathbb{E}} f = +\infty$

(b) f любого знака

Распишем $f = f^+ - f^-$, по предыдущему пункту f^+, f^- конечны почти везде $\Rightarrow f$ тоже конечно почти везде

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — измеримы. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — изм., $f \geq 0$

Тогда: $\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f$

Доказательство:

1. Для начала докажем это для ступенчатых функций. Пусть $f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$

$$\int_A f d\mu = \sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A)) = \sum_k (\lambda_k \cdot (\sum_i \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i (\sum_k (\lambda_k \cdot \mu(E_k \cap A_i))) = \sum_i \left(\int_{A_i} f \right)$$

2. Докажем, что $\int_A f \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) Рассмотрим $0 \leq g \leq f$ – ступенчатая. $\int_A g = \sum_i \int_{A_i} g \leq \sum_i \int_{A_i} f$

(b) Переходя к *sup* получаем желаемое

3. Теперь докажем, что $\int_A f \geq \sum_i \int_{A_i} f$

(a) $A = A_1 \sqcup A_2$

i. Рассмотрим g_1, g_2 – ступенчатые такие, что $0 \leq g_i \leq f \cdot \chi_{A_i}$

ii. Рассмотрим их общее разбиение E_k : $g_i = \sum_k (\lambda_k^i \cdot \chi_{E_k})$

iii. $g_1 + g_2$ – ступенчатая и $0 \leq g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$

iv. $\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \stackrel{lemma}{=} \int_A (g_1 + g_2) \stackrel{iii}{\leq} \int_A f$

v. Поочерёдно переходя к *sup* по g_1 и g_2 получаем: $\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$

$$\int_A f$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, что $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ будем последовательно отщеплять последнее множество по (a)

(c) $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$

i. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$

ii. $A = (\bigsqcup_{i=1}^n A_i) \sqcup B$, где $B = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$

iii. $\int_A f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f$

iv. Переходим к \lim по n

Следствие 1: $0 \leq f \leq g$ - измеримы и $A \subset B$ - измеримы $\Rightarrow \int_A f \leq \int_B g$

$$\int_B g \geq \int_B f = \int_A f + \int_{B \setminus A} f \geq \int_A f$$

Следствие 2: f - суммируема на $A \Rightarrow \int_A f = \sum_i \int_{A_i} f$

Достаточно рассмотреть срезки f^+ и f^-

Следствие 3: $f \geq 0$ - изм. $\delta : \mathbb{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (A \mapsto \int_A f d\mu) \Rightarrow \delta$ - мера

7 Теорема Леви

(X, \mathbb{A}, μ) , $f_n \geq 0$ - изм.

$f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots$ при почти всех x

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ при почти всех x (считаем, что при остальных $x : f \equiv 0$)

Тогда: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$

Доказательство:

N.B. $\int_X f_n \leq \int_X f_{n+1} \Rightarrow \exists \lim$

f - измерима как предел последовательности измеримых функций

1. \leq

Очевидно $f_n \leq f$ при п.в $x \Rightarrow \int_X f_n \leq \int_X f$. Делаем предельный переход по n

2. \geq

(a) Логичная редукция: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \geq \int_x g$, где $0 \leq g \leq f$ - ступенчатая

(b) Наглая редукция: $\forall c \in (0, 1) : \lim \int_X f_n(x) \geq c \cdot \int_X g$

- i. $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq c \cdot g\}$. Очевидно $E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$
- ii. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ т.к. $c < 1$
- iii. $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} g \Rightarrow \lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g = c \cdot \int_X g$
- iv. Последний знак равно обусловлен тем, что интеграл неотрицательной и измеримой функции по множеству - мера (см. следствие 3 предыдущей теоремы), и мы используем непрерывность меры снизу

8 Линейность интеграла Лебега

$f, g \geq 0$, измеримые

Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$

Доказательство:

1. Пусть f, g - ступенчатые, тогда у них имеется общее разбиение

$$f = \sum_k (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$g = \sum_k (\alpha_k \cdot \chi_{E_k})$$

$$\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \sum_k (\lambda_k + \alpha_k) \cdot \mu E_k = \sum_k \lambda_k \cdot \mu E_k + \sum_k \alpha_k \cdot \mu E_k = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g,$$

что и требовалось доказать

2. $f, g \geq 0$, измеримые

Тогда $\exists h_n : 0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq f$, h_n ступенчатые

$\exists \widetilde{h}_n : 0 \leq \widetilde{h}_n \leq \widetilde{h}_{n+1} \leq g$, \widetilde{h}_n ступенчатые

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = f$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widetilde{h}_n = g$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h}_n) = \int_{\mathbb{E}} h_n + \int_{\mathbb{E}} \widetilde{h}_n$$

$$\int_{\mathbb{E}} (h_n + \widetilde{h_n}) \rightarrow \int_{\mathbb{E}} (f + g)$$

$$\int_{\mathbb{E}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{E}} f$$

$$\int_{\mathbb{E}} \widetilde{h_n} \rightarrow \int_{\mathbb{E}} g$$

Тогда $\int_{\mathbb{E}} (f + g) = \int_{\mathbb{E}} f + \int_{\mathbb{E}} g$, что и требовалось доказать

3. Если f, g - любые измеримые, распишем обе через срезки и докажем для них

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n(x) \geq 0$ почти всюду на \mathbb{E} , тогда $\int_{\mathbb{E}} (\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu(x)$

Доказательство:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x); S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

1. S_N - возрастает к S при почти всех $x \xrightarrow{\text{Т. Леви}} \int_{\mathbb{E}} S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{E}} S =$

$$\int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

2. С другой стороны $\int_{\mathbb{E}} S_N = \int_{\mathbb{E}} \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{E}} u_n(x) d\mu$

3. Найденные пределы совпадают в силу единственности предела последовательности, что и требовалось доказать.

10 Теорема о произведении мер

$\langle \mathbb{X}, \alpha, \mu \rangle, \langle \mathbb{Y}, \beta, \nu \rangle$ - пространства с мерой

$$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : A \in \alpha, B \in \beta\}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

Тогда:

1. m_0 - мера на полукольце $\alpha \times \beta$
2. μ, ν - σ -конечны $\Rightarrow m_0$ - σ -конечна

Доказательство:

1. Неотрицательность m_0 очевидна. Необходимо доказать счетную аддитивность

Пусть $P = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} P_k$, где $P \in \alpha \times \beta$
 $P = A \times B$; $P_k = A_k \times B_k$

Заметим, что:

- $\chi_P(x, y) = \sum \chi_{P_k}(x, y)$, в силу дизъюнктивности P_k ((x, y) входит максимум в одно множество из всех P_k)
- $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, так как $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$ И $y \in B$

Воспользовавшись вышесказанным получим:

$$\begin{aligned} \chi_P(x, y) &= \chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) \\ \chi_P(x, y) &= \sum \chi_{P_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y) \end{aligned}$$

Имеем следующее равенство:

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y)$$

Проинтегрируем его по мере μ по x , затем по мере ν по y , получим:

$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$, то есть $m_0(P) = \sum m_0(P_k)$, что и требовалось доказать.

2. μ, ν - σ -конечны $\Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $\mu A_k < +\infty$; $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где $\nu B_k < +\infty$

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} (A_i \times B_j)$$

$m_0(A_i \times B_j) = \mu A_i \cdot \nu B_j < +\infty$, так как $\mu A_i < +\infty$ и $\nu B_j < +\infty$
все $(A_i \times B_j) \in \alpha \times \beta$ по определению

Что и требовалось доказать.

11 Абсолютная непрерывность интеграла

$\langle X, \alpha, \mu \rangle$ - пространство с мерой

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - суммируема

Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E - \text{измеримое } \mu E < \delta \mid \int_E f d\mu < \epsilon$

Доказательство:

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \subset X_{n+1} \subset \dots$$

$\mu(\cap X_n) = 0$, т.к. f - суммируема

1. Мера : $(A \mapsto \int_A |f|)$ непрерывна сверху, т.е. $\forall \epsilon \exists n_\epsilon \int_{X_{n_\epsilon}} |f| < \epsilon/2$

2. Зафиксируем ϵ в доказываемом утверждении, возьмем $\delta := \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon}$

$$3. \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\epsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\epsilon}^c} |f| \stackrel{*}{\leq} \int_{X_{n_\epsilon}} |f| + n_\epsilon \cdot \mu(E \cap X_{n_\epsilon}^c) \stackrel{**}{<} \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$$

$$\epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \mu E < \epsilon/2 + n_\epsilon \cdot \frac{\epsilon/2}{n_\epsilon} < \epsilon$$

* - В первом слагаемом увеличили множество, во втором посмотрели на определение X_n , взяли дополнение, воспользовались 6-м простейшим свойством интеграла

** - Воспользовались непрерывностью сверху

11.1 Следствие

f - суммируема

e_n - измеримые множества

$$\mu e_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{e_n} f \rightarrow 0$$

12 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости по мере.

$\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой,

f_n, f – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ (сходится по мере),

$\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g – называется мажорантой)
- g – суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. f_n – суммируема, так как существует мажоранта g
2. f – суммируема по теореме Рисса ($f_{nk} \rightarrow f$ почти везде, $|f_{nk}| \leq g$, тогда $|f| \leq g$ почти везде)
3. «уж тем более»:

$$\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \int_X |f_n - f|$$

Допустим, что $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ уже доказано.

Тогда «уж тем более» очевидно.

4. Докажем основное утверждение:

Разберем два случая:

(a) $\mu\mathbb{X} < \infty$ Фиксируем $\epsilon \geq 0$ $X_n := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$

$\mu X \rightarrow 0$ (так как $f_n \Rightarrow f$)

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int_{X_n} |f_n - f| + \int_{X_n^c} |f_n - f| \leq \int_{X_n} 2g + \int_{X_n^c} \epsilon < \epsilon + \epsilon\mu\mathbb{X}$$

(прим. $\int_{X_n} 2g \rightarrow 0$ по след. к т. об абс. сходимости)

(b) $\mu\mathbb{X} = \infty$

Докажем «Антиабсолютную непрерывность» для g :

$$\forall \epsilon \exists A \subset \mathbb{X} \mid \mu A - \text{конеч.} \quad \int_{X \setminus A} g < \epsilon$$

доказательство:

$$\int_{\mathbb{X}} = \sup \left(\int_{\mathbb{X}} g_k \mid 0 \leq g_k \leq g \right) (g_k - \text{ступен.})$$

$$\exists g_n \quad \int_{\mathbb{X}} g - \int_{\mathbb{X}} g_n < \epsilon$$

$$A := \text{supp } g_n \quad (\text{supp } f := \text{замыкание } \{x \mid f(x) \neq 0\})$$

$$A = \bigcup_{k \mid \alpha_k \neq 0} E_k$$

$$g = \sum_{kon} \alpha_k \mathcal{X}_{E_k} \quad (X = \bigsqcup E_k)$$

$$\int_{\mathbb{X}} g_n = \sum \alpha_k \mu E_k < +\infty \quad (\mu A - \text{конеч.})$$

$$\int_{\mathbb{X} \setminus A} g = \int_{\mathbb{X} \setminus A} g - g_n \leq \int_{\mathbb{X}} g - g_n < \epsilon$$

Теперь докажем основное утверждение:

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| = \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| + \int_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{A}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{A}} |f_n - f| + 2\epsilon < 3\epsilon$$

$$\left(\int_{\mathbb{A}} |f_n - f| \rightarrow 0 \text{ по п. (a)} \right)$$

13 Теорема Лебега о мажорированной сходимости для случая сходимости почти везде.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой,

f_n, f – измеримы,

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ почти везде,

$\exists g : \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что:

- $\forall n$, для «почти всех» x $|f_n(x)| \leq g(x)$ (g – называется мажорантой)
- g – суммируемая

Тогда:

- f_n, f – суммируемы
- $\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$
- $\int_{\mathbb{X}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{X}} f$ («уж тем более»)

Доказательство:

1. «уж тем более» см. пред. теорему.

2. Докажем основное утверждение:

$$h_n(x) := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$$

Заметим, что при фикс. x выпол. $0 \leq h_n \leq 2g$ почти везде

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f_n - f| = 0 \text{ почти везде}$$

$2g - h_n \uparrow$, $2g - h_n \rightarrow 2g$ почти везде

$$\int_{\mathbb{X}} (2g - h_n) d\mu \rightarrow \int_{\mathbb{X}} 2g \text{ (по т. Леви)}$$

$$\int_{\mathbb{X}} 2g - \int_{\mathbb{X}} h_n \Rightarrow \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

$$\int_{\mathbb{X}} |f_n - f| \leq \int_{\mathbb{X}} h_n \rightarrow 0$$

14 Теорема Фату. Следствия.

$\langle \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu \rangle$ – пространство с мерой

f_n, f – измеримы,

$$f_n \geq 0$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ «почти везде»,}$$

$$\exists C > 0 \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \leq C$$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots) \quad (g_n \leq g_{n+1} \leq \dots)$$

$$\lim g_n = \underline{\lim}(f_n) = \text{почти везде} = \lim f_n = f \quad (g_n \rightarrow f \text{ почти везде})$$

$$\int_{\mathbb{X}} g_n \leq \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$$

$$\int_{\mathbb{X}} f = \text{по т. Леви} = \lim \int_{\mathbb{X}} g_n \leq C$$

14.1 Следствие 1

$f_n, f \geq 0$ – измер.

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

$$\exists C \forall n \int_{\mathbb{X}} f_n \leq C$$

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} f \leq C$$

Доказательство:

$$\exists f_{n_k} \rightarrow f \text{ почти везде}$$

14.2 Следствие 2

$f_n \geq 0$ – измер.

Тогда:

$$\bullet \int_{\mathbb{X}} \underline{\lim}(f_n) \geq \underline{\lim}(\int_{\mathbb{X}} f_n)$$

Доказательство:

$$\exists n_k \mid \int_{\mathbb{X}} f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n$$

Рассмотрим g_{n_k} такое, что $g_{n_k} \uparrow$ и $g_{n_k} \rightarrow \underline{\lim} f$

Применяем теорему Леви к нер-ву $\int_{\mathbb{X}} g_{n_k} \leq \int_{\mathbb{X}} f_{n_k}$

$$\int_{\mathbb{X}} \underline{\lim} f \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n$$

15 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

15.1 Лемма

Пусть у нас есть $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$ и $\Phi : X \rightarrow Y$

Пусть $\Phi^{-1}(B) \in \mathbb{A}$ (Кохась сказал, что это легко, и вроде это следует из предыдущих теорем)

Для $\forall E \subset B$ и $\nu(E) := \mu(\Phi^{-1}(E))$

Тогда:

$$\nu - \text{мера на } B, \nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} d\mu$$

Доказательство:

Докажем по определению меры:

$$\nu(\bigsqcup E_i) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup E_i)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_i)) = \sum \mu \Phi^{-1}(E_i) = \sum \nu E_i$$

15.2 Следствие

Из этого следует что f - измерима относительно $B \Rightarrow f \circ \Phi$ — измерима относительно Γ

15.3 Теорема

Есть пространства $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ и $\langle Y, \mathbb{B}, \nu \rangle$.

$\Phi : X \rightarrow Y; w \geq 0$ — измеримо

ν - взвешенный образ μ

Тогда:

Для $\forall f \geq 0$ - измеримо на Y , $f \odot \Phi$ - измерима (относительно μ)

$$\int_Y f d\nu = \int_X f(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x)$$

Замечание: Тоже верно для f - сумм.

Доказательство:

- $f \odot \Phi$ - измерима (из леммы)
- Возьмем в качестве $f = \chi_E, E \in \mathcal{B}$
 $(f \odot \Phi)(x) = \chi_{\Phi^{-1}(E)}$ - определение взвешенного образа меры
 $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$ - доказали первый пункт
- — f - ступенчатая $\Rightarrow f = \sum \alpha_k * \chi_{E_k}$
— $\int_Y \sum \alpha_k * \chi_{E_k} d\mu = \sum \alpha_k \chi_{E_k} d\nu = /*firstcase*/ = \sum \alpha_k \int_X \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) dx = \int_X \sum \alpha_k \chi_{E_k}(\Phi(x)) * \omega(x) d\mu(x) = \int f \odot \Phi * \omega d\mu$

16 Критерий плотности

Есть пространство $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$

ν - еще одна мера

$\omega \geq 0$ - измерима на X

Тогда:

ω - плотность ν относительно $\mu \iff$ Для любого $A \in \mathbb{A} : \mu A * inf(\omega) \leq \nu(A) \leq \mu A * sup_A(\omega)$

Доказательство:

- \Rightarrow - очевидно из стандартного свойства интеграла
- \Leftarrow
 - Достаточно доказать, что $\omega > 0$ (когда $\omega = 0$, отсюда следует что интеграл = 0 из оценок, что $\nu(E) = 0$)

- Давайте брать такие $A \subset X(\omega > 0)$, тогда $\nu A = \int_A \omega(x) d\mu$
- Тогда для любого $A \in \mathbb{A}$ $A = A_1 \sqcup A_2$, где $A_1 \subset A(\omega > 0)$ и $A_2 \subset A(\omega = 0)$
- Получаем, что $\nu A = \nu A_1 + \nu A_2 = \int_{A_1} \omega + 0 = \int_{A_1} \omega + \int_{A_2} \omega = \int_A \omega$
- Пусть $q \in (0, 1)$ и $A_j := A(q^j \leq \omega(x) < q^{j-1})$, $j \in \mathbb{Z}$. Получается, что $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$
- Рассмотрим $q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} * \mu A_j$ и $\nu A_j = \int_{A_j} \omega d\mu$
- $q * \int_A \omega d\mu = q * \sum \int_{A_j} \omega \leq \sum q^j * \mu A_j \leq \sum q^{j-1} * \mu A_j = \nu(A) \leq 1/q * \sum q^j * \mu A_j \leq 1/q * \sum \int_{A_j} \omega = 1/q * \int_A \omega$
- $q * \int_A \omega d\mu \leq \nu(A) \leq 1/q * \int_A \omega d\mu$
- Устремим q к 1 и мы победили

17 Лемма о единственности плотности

$f, g \in L(x)$.

Пусть $\forall A$ - измерима и $\int_A f = \int_A g$.

Тогда:

$f = g$ почти везде

Следствие:

Плотность ν относительно μ определена однозначно с точностью до μ почти везде.

Доказательство:

- Вместо двух функций давайте рассмотрим одну $h = f - g$ и $\forall \int_A h = 0$. Пусть $A_+ = X(h \geq 0)$ и $A_- = X(h < 0)$
- $\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0$

$$\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0$$

- Пусть $X = A_+ \sqcup A_-$. Тогда $\int_X |h| = \int_{A_+} |h| + \int_{A_-} |h| = 0 \Rightarrow h = 0$ почти везде.

18 Лемма о множестве положительности

Пусть пространство $\langle X, \mathbb{A} \rangle$ и ϕ - заряд

Тогда:

$\forall A \in \mathbb{A} \exists B \subset A : \phi(B) \leq \phi(A)$, где B - множество положительности

Доказательство:

- Пусть $(\phi(A) \geq 0) \&\& (B = \emptyset) \rightarrow \phi(A) \geq 0$
- E - множество ϵ - положительности (Меп), если $\forall C \subset E$ - измеримого $\phi(C) \geq -\epsilon$
- **Утверждение:** Пусть E - Меп. Тогда для любого измеримого $C \subset E$ выполнено $\phi(C) \geq \phi(A)$
 1. Если A - Меп $\Rightarrow C = A$
 2. Пусть A - не Меп. Тогда существует $C_1 \subset A : \phi(C_1) < -\epsilon$ и $\phi(A) = \phi(A_1) + \phi(C)$
Тогда $A_1 = A - C_1$ и $\phi(A_1) > \phi(A)$
 3. A_1 - Меп \Rightarrow хорошо
 4. Иначе повторяем тоже самое с C_2 и так далее пока не будет хорошо
 5. Процесс конечен так как все C_i дизъюнкты и $\phi(\bigsqcup C_i) \neq -\infty$.
- Построим B : C_1 - множество 1 положительности. $C_2 - 1/2$. Тогда $B = \cap C_i$ - Меп
- $\phi(B) = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi(C_i) \geq \phi(A)$

19 Теорема Радона—Никодима

Пусть есть пространство (X, \mathbb{A}, μ)

ν - мера из \mathbb{A}

Обе меры конечные и $\nu \prec \mu$.

Тогда:

$\exists! f : X \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ (с точн до почти везде), которая является плотностью ν относительно μ и при этом $(f - \mu)$ суммируема

Доказательство:

- единственность - из леммы

- строим кандидата на роль f . $P = \{p(x) \geq 0, |\forall E : \int_E p * d\mu \leq \nu(E)\}$

1. $P \neq \emptyset$ и $0 \in P$

2. $p_1, p_2 \in P \Rightarrow h = \max(p_1, p_2) \in P$

$$\forall E \int_E h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} h d\mu + \int_{E(p_1 < p_2)} h d\mu = \int_{E(p_1 \geq p_2)} p_1 + \int_{E(p_1 < p_2)} p_2 \leq \nu(E(p_1 \geq p_2)) + \nu(E(p_1 < p_2)) = \nu E$$

По индукции $\max(p_1 \dots p_n) \in P$

3. $I = \sup \left\{ \int_X p d\mu \mid p \in P \right\}$

\exists последовательность $f_1 \leq f_2 \leq \dots \in P : \int_X f_n \rightarrow I$

4. Рассмотрим $p_1, p_2 \dots : \int_X p_n \rightarrow I$, а также $f_n = \max(p_1 \dots p_n) \in P$

5. Из предыдущих двух получаем, что $f = \lim f_n$ и $\int = / * thLevi *$

$$/ = \lim \int_E f_n \leq \nu E, \text{ а следовательно } \int_X f = \lim \int_X f_n = I \leq \nu(X)$$

6. Отлично, проверим, что f - плотность ν относительно μ .

– Докажем, что это не так: $\exists E_0 : \nu E_0 > \int_{E_0} f d\mu$

– $\mu E_0 > 0$ (иначе интеграл равен нулю и мера равна нулю из абстрактной непрерывности)

- Тогда μE_0 - конечна. Возьмем $a > 0 : \nu E_0 - \int_{E_0} f d\mu > a * \mu E_0$
- Тут недостаточно термина мер, поэтому рассмотрим заряд $\phi(E) = \nu E - \int_E f d\mu - a * \mu E$
- Пусть $\phi(E_0) > 0$. Возьмем МП $B \subset E_0 : \phi(B) \geq \phi(E_0) > 0$. Тогда $\nu(B) = \phi(B) + \int_B f * d\mu + a * \mu B \geq \phi(B) > 0$
- Проверим, что $f + a * \chi_B \in P$. Тогда по определению $\int_E (f + a * \chi_B) d\mu = \int_{E \setminus B} f * d\mu + \int_{E \cap B} f * d\mu + a * \mu(B \cap E) = / * E \leftrightarrow E \cap B *$
 $/ = \int_{E \setminus B} f + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) \leq / * def_class_P_and_f \in$
 $P * / \leq \nu(E \setminus B) + \nu(E \cap B) - \phi(E \cap B) = \nu E - \phi(E \cap B) \leq$
 $/ * \phi \geq 0 * / \leq \nu E$
- Проверим, что $\int_X f + a * \chi_B = I + a * \mu B > I$, что противоречит определению I

20 Лемма об оценке мер образов кубов из окрестности точки дифференцируемости

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in O, \Phi \in C^1(O)$

Возьмём $c > |\Phi'(a)| \neq 0$

тогда $\exists \delta > 0 : \forall$ кубической ячейки $Q, Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется $\lambda \Phi(Q) < c \cdot \lambda Q$

Доказательство

$\Phi(Q)$ измеримо, так как образ измеримого множества при гладком отображении измерим

$L := \Phi'(a), L$ обратимо, так как $|L| \neq 0$.

$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$

Можем писать о малое, так как растяжение произошло не более чем в $|L^{-1}|$ раз, а $|L| \neq 0$

Пусть $\Psi(x) := a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))$

$\forall \epsilon > 0 \exists B(a, \delta)$, такой, что при $x \in B(a, \delta)$ $|\Psi(x) - x| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$ (так

как $\Psi(x)$ это почти x , только плюс $o(a - x)$)

$a \in Q \subset B(a, \delta)$, где Q - куб со стороной h

$x \in Q$, тогда $|a - x| < \sqrt{m} \cdot h$ (так как диагональ m -мерного куба со стороной h равна $\sqrt{m} \cdot h$)

Тогда $|\Psi(x) - x| < \epsilon h$

При $x, y \in Q, i \in \{1 \dots m\}$

$|\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| \leq |\Psi(x)_i - x_i| + |\Psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leq |\Psi(x) - x| + |\Psi(y) - y| + h < (1 + 2\epsilon)h$

$\Psi(Q) \subset$ кубу со стороной $(1 + 2\epsilon)h$

$\lambda(\Psi(Q)) < (1 + 2\epsilon)^m \lambda Q$

Φ выражается через Ψ через сдвиги и линейные преобразования. Тогда

$\lambda(\Phi(Q)) = |\det L| \cdot \lambda \Psi(Q) \leq |\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m \cdot \lambda Q$

Возьмём ϵ так, чтобы $|\det L| \cdot (1 + 2\epsilon)^m$ было меньше c . Тогда при таком ϵ

$\lambda(\Phi(Q)) < c \cdot \lambda Q$

21 Лемма «Вариации на тему регулярности меры Лебега»

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$A \subset O$, A - открыто.

$A \subset Q$ (кубическая ячейка) $\subset \overline{Q} \subset O$, то есть граница A не лежит на границе O .

Тогда

$$\inf_{A \subset G \subset O, G - \text{open set}} (\lambda G \cdot \sup_G(f)) = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство

Докажем, что левая часть \geq и \leq правой

\geq очевидно, так как правая часть - нижняя граница для всего, встречающегося под \inf

Докажем \leq

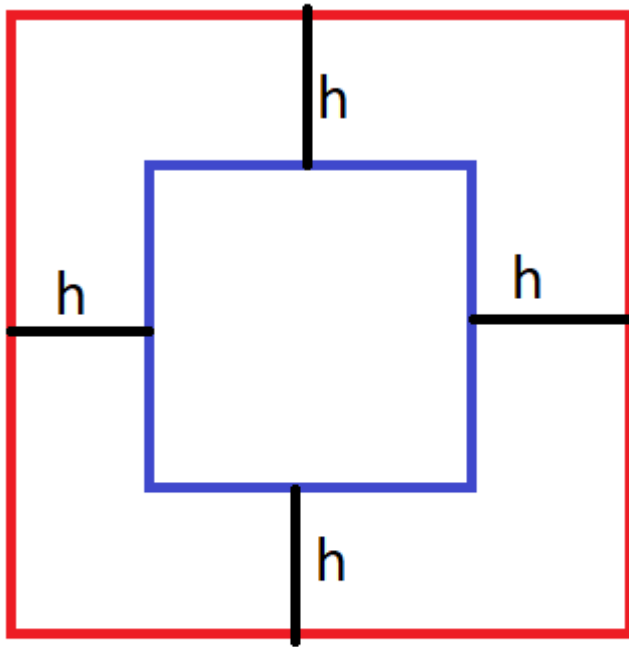
1. $\lambda A = 0$. Тогда правая часть $= 0$.

$$A \subset \overline{Q} \Rightarrow \sup f < +\infty$$

\overline{Q} - компакт, $\alpha := \text{dist}(\overline{Q}, \partial O) > 0$

Для множества $G : A \subset G \subset \frac{\alpha}{2}$ -окрестности ячейки Q

Назовём Q_1 кубическую ячейку, которая больше Q и у которой каждая сторона отстоит на $\frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$ от соответствующей стороны Q .



$$h = \frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$$

$$A \subset G \subset \text{Int}(Q_1)$$

$$\sup_G f \leq \sup_{\overline{Q_1}} f < +\infty$$

При этом λG может быть выбрана сколь угодно близко к $\lambda A = 0$ по регулярности меры Лебега.

2. $\lambda A > 0, \sup_A f < c$

Возьмём c_1 :

$$\sup_A f < c_1 < c$$

Выберем ϵ так чтобы

$$\epsilon \cdot c_1 < \lambda A \cdot (c - c_1) \quad (*)$$

G_ϵ - такое множество, что $A \subset G_\epsilon$, G_ϵ - открытое, $\lambda(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon$

$G_1 := f^{-1}((-\infty; c_1)) \cap G_\epsilon$ - открытое

$$\lambda(G_1 \setminus A) < \epsilon$$

$$\lambda G_1 \cdot \sup_{G_1} f \leq (\lambda A + \epsilon) \cdot c_1 < \lambda A \cdot c \quad (\text{из } (*))$$

(так как $G \subset f^{-1}((-\infty; c_1))$, то есть f на G_1 не больше c_1)

$$\inf(\lambda G \cdot_G f) < \lambda A \cdot c$$

Переходя к \inf по c , получаем что требовалось

22 Теорема о преобразовании меры при диффеоморфизме

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - Диффеоморфизм, $\forall A \in \mathbb{M}^m, A \subset O$

$$\lambda(\Phi(A)) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

TODO: Илья

23 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - диффеоморфизм

$O' = \Phi(O)$ - открытое

f задана на O' , $f \geq 0$, Измерима по Лебегу, тогда

$$\int_{O'} f(y) \cdot d\lambda(y) = \int_O f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot d\lambda(x)$$

Доказательство:

Из

$$\nu(A) = \lambda\Phi(A), \nu \text{ имеет плотность } J\Phi \text{ по отношению к } \lambda$$

Применить теорему об интеграле по взвешенному образу меры

24 Теорема (принцип Кавальери)

(X, α, μ) и (Y, β, ν) - пространства с мерами, причем μ, ν — σ -конечные и полные

$m = \mu \times \nu$, $C \in \alpha \times \beta$, тогда:

1. При п.в. x C_x - измеримо (ν -измеримо), т.е. $C_x \in \beta$
2. Функция $x \rightarrow \nu C_x$ — измеримая (в широком смысле) на X

NB: ϕ — измерима в широком смысле, если она задана при п.в. x , и $\exists f : X \rightarrow R'$ - измеримая и $\phi = f$ п.в. При этом $\int_X \phi = \int_X f$ (по опр.)

$$3. mC = \int_X \nu(C_x) \cdot d\mu(x)$$

Доказательство: Рассмотрим D — совокупность все множеств, для которых утв. теоремы верно.

$\rho = \alpha \otimes \beta$ — п/к изм. пр-ков.

$$1. \rho \subset D$$

$C = A \times B$. то есть $\forall x C_x = \emptyset$ if $x \notin A$, B if $x \in A$

$(\mu A < +\infty, \nu B < +\infty)$

$x \rightarrow \nu(C_x)$, функция $\nu(B) \cdot \chi_A(x)$ — изм.

$$\int_X \nu(C_x) d\mu = \nu B \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \nu B \cdot \mu A = mC$$

$$2. E_i \in D, E_i - dis \Rightarrow E := \sqcup E_i \in D$$

при п.в. x $(E_i)_x$ — измеримы

при п.в. x все $(E_i)_x$ — измеримы, $E_x = \sqcup (E_i)_x$ — изм.

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$ ($\nu(E_i)_x$ — изм. как функция от x) \Rightarrow функция

$x \rightarrow \nu E_x$ — измерима

$$\int_X \nu E_x d\mu(x) = \sum_i \int \nu(E_i)_x d\mu(x) = \sum_i mE_i = mE$$

$$3. E_i \in D, E_1 \supset E_2 \supset \dots; mE_i < +\infty. \text{ Тогда } E := \cap E_i \in D$$

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty (*)$$

функция $x \rightarrow \nu(E_i)_x$ — суммируема \Rightarrow п.в. конечна.

при всех x $(E_i)_x \downarrow E_x$, т.е. $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \dots$ и $\bigcap (E_i)_x = E_x$

при п.в. x $\nu(E_i)_x$ — конечны (для таких x).

Тогда E_x — измерима и $\lim \nu(E_i)_x = \nu E_x$ по непр-ти меры ν сверху.

(Th. Лебега) $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — сумм. \Rightarrow функция $x \rightarrow \nu E_x$ — изм.

$\int_X \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim m E_i = m E$ (непр. сверху меры m).

Этот предельный переход корректен как раз по теореме Лебега ($f_n \rightarrow f$ п.в. $g : |f_n| \leq g$ — сумм. Тогда $\int f_n \rightarrow \int f$).

NB: мы доказали про пересечения и про объединения (пусть пересечения убывающие, а объединения — дизъюнктивные, но это лечится).

Поэтому $\bigcap_j (\bigcup_i A_{i,j}) \in D$, если $A_{i,j} \in \rho$ ($\rho \subset D$).

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$

$\exists H \in D$, H имеет вид $\bigcap (\bigcup A_{i,j})$, где все $A_{i,j} \in \rho$

$E \subset H$, $mH = 0$ из п.5 т. о продолжении (ЧТО?! поясните плез)

$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu(x) \Rightarrow \nu H_x = 0$ (= 0 при п.в. x).

$E_x \subset H_x \Rightarrow E_x$ — ν -изм. (из полноты ν) и $\nu E_x = 0$ п.в. x

$\int_X \nu E_x d\mu = 0 = mE$

5. C — неизм., $mC < +\infty$. Тогда $C \in D$.

$C = H \setminus e$, где $me = 0$, H — вида $\bigcap (\bigcup A_{i,j})$.

$C_x = H_x \setminus e_x$ — изм. при п.в. x

$\nu e_x = 0$ п.в. x (проверено в п.4)

$\nu C_x = \nu H_x = \nu e_x$ — изм. п.в. x

$\int_X \nu C_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = \int \nu H_x = mH = mC$.

6. C — m -изм. произвольное

$X = \sqcup X_k, Y = \sqcup Y_n$ (μX_k — кон., νY_n — кон.).

$C = \sqcup_{k,n} (\subset \cap (X_k \times Y_n)) \in D$ (по п.2) (т.к. $\subset \cap (X_k \times Y_n) \in D$ по п.5)

25 Теорема Тонелли

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$ — пространства с мерой

μ, ν — σ -конечны, полные

$m = \mu \times \nu$

$f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$, f - измерима относительно m

Тогда:

1. при *почти всех* $x \in X$ f_x - измерима на \mathbb{Y} ,
 где $f_x : \mathbb{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f_x(y) = f(x, y)$
 (симметричное утверждение верно для y)
2. Функция $x \mapsto \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \int_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y)$ - измерима^{*} на \mathbb{X}
 (симметричное утверждение верно для y)
3. $\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f(x, y) dm = \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство:

Докажем в 3 пункта, постепенно ослабляя ограничения на функцию f

1. Пусть $C \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ - измеримо относительно m , $f = \chi_C$
 - (a) $f_x(y) = \chi_{C_x}(y)$, где C_x - сечение по x
 C_x - измеримо при *почти всех* x , так как это одномерное сечение, таким образом f_x - измеримо, при *почти всех* x .
 - (b) $\phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu = \nu C_x$ - по принципу Кавальери это измеримая^{*} функция.
 - (c) $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \nu C_x d\mu \stackrel{\text{Кавальери}}{=} m C \stackrel{\text{опр. инт}}{=} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} \chi_C dm = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f(x, y) dm$
2. Пусть f - ступенчатая, $f \geq 0$, $f = \sum_{\text{кон}} a_k \chi_{C_k}$

- (a) $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}$ - измерима при почти всех x
- (b) $\phi(x) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ - измерима^{*} как конечная сумма измеримых
- (c) $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \sum_{\text{кон}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} \int_{\mathbb{X}} a_k \nu(C_k)_x d\mu = \sum_{\text{кон}} a_k m C_k = \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm$

3. Пусть f - измеримая, $f \geq 0$

$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$, где $g_n \geq 0$ - ступенчатая, g_n - монотонно возрастает к f
(из Теоремы об аппроксимации измеримой функции ступенчатыми)

(a) $f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$ - измерима при *почти всех* x .

(b) $\phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \lim_{\mathbb{Y}} \int (g_n)_x d\nu$

$\phi_n(x) := \int_{\mathbb{Y}} (g_n)_x d\nu$ - измерима по пункту 1

$0 \leq (g_n)_x$ - возрастает, тогда $\phi(x)$ - измерима, $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq \dots$ и $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$

(c) $\int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \phi_n(x) d\mu \stackrel{\text{п.2}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} g_n dm \stackrel{\text{т.Леви}}{=} \int f dm$

26 Формула для Бета-функции

$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1}$, где s и $t > 0$ - Бета-функция

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, где $s > 0$, тогда $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \left[\begin{array}{c} y \rightarrow u \\ y = u - x \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \left(\int_x^{+\infty} (u-x)^{t-1} e^{-u} du \right) dx = \\ &= \int_{\substack{x \geq 0 \\ u \geq x}} \dots = \text{меняем порядок интегрирования} \\ &= \int_0^{+\infty} du \int_0^u dx (x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u}) = \left[\begin{array}{c} x \rightarrow v \\ x = uv \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\int_0^1 u^{s-1} v^{s-t} u^{t-1} (1-v)^{t-1} u dv \right) du = \\ &= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1} e^{-u} \left(\int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv \right) du = B(s, t) \Gamma(s+t), \text{ чтд.} \end{aligned}$$

27 Объем шара в \mathbb{R}^m

$$B(0, R) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} \lambda_m(B(0, R)) &= \int_{B(0, R)} 1 d\lambda_m = \int \mathcal{J} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi_1 \dots \int_0^\pi d\phi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\phi_{m-1} r^{m-1} (\sin\phi_1)^{m-2} \dots (\sin\phi_{m-2}) \\ &= \int_0^\pi (\sin\phi_k)^{m-2-(k+1)} d\phi_k = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2}+\frac{1}{2})} \\ &\rightarrow = \frac{R^m}{m} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m-2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} \dots \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} 2\pi = \\ &= \frac{\pi R^m}{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{m-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} R^m \end{aligned}$$

28 Теорема о вложении пространств L^p

$$\mu E < +\infty \quad 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда:

1. $L_r(E, \mu) \subset L_s(E, \mu)$
2. $\forall f$ — измеримы $\|f\|_s \leq \mu E^{1/s-1/r} \|f\|_r$

Доказательство:

- $2 \Rightarrow 1$ (Это очевидно: достаточно рассмотреть неравенство из пункта 2. Из него следует, что $\|f\|_s < \|f\|_r$. см. опред. L_p)
- Рассмотрим два случая:

1. $r = +\infty$ (очев.)

$$\|f\|_s \leq \left(\int |f|^s * 1 \right)^{1/s} \leq ((esssup|f|)^s \int 1 d\mu)^{1/s} = \|f\|_\infty * \mu E^{1/s}$$

(последнее по опред. $esssup$)

2. $r < +\infty$

$$(\|f\|_s)^s = \int |f|^s * 1 d\mu \leq \left(\int |f|^r \right)^{\frac{s}{r}} * \left(\int 1^{\frac{r}{r-s}} \right)^{\frac{(r-s)}{r}} = (\|f\|_r)^s * \mu E^{1-\frac{s}{r}}$$

(существенный шаг: применить неравенство Гельдера)

29 Теорема о сходимости в L_p и по мере

$$1 \leq p < +\infty$$
$$f_n \in L_p(\mathbb{X}, \mu)$$

Тогда:

1. • $f \in L_p$
• $f_n \rightarrow f$ в L_p

Тогда: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (по мере)

2. • $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (либо если $f_n \rightarrow f$ почти везде)
• $|f_n| \leq g$ почти при всех n , $g \in L_p$

Тогда: $f_n \rightarrow f$ в L_p

Доказательство:

1.

$$X_n(\epsilon) := X(|f_n - f| \geq \epsilon)$$

$$\mu X_n(\epsilon) = \int_{X_n} \left(\frac{|f_n - f|}{\epsilon}\right)^p = \frac{1}{\epsilon^p} \int_{X_n} |f_n - f|^p \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_X |f_n - f|^p = \frac{1}{\epsilon^p} (\|f_n - f\|_p)^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ Тогда $\exists n_k$ | $f_{n_k} \rightarrow f$ почти везде.

Тогда $|f| \leq g$ п. в.

$$|f_n - f|^p \leq (2g)^p - \text{сумм. функции т. к. } g \in L_p$$

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ (по теореме Лебега)}$$

30 Полнота L^p

$L_p(E, \mu)$ $1 \leq p < \infty$ – полное

То есть любая фундаментальная последовательность сходится по норме $\|f\|_p$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, k \quad \|f_n - f_k\| < \epsilon \Rightarrow \exists f \mid \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

Доказательство:

1. Построим f .

Рассмотрим фундаментальную последовательность f_n .

$$\exists N_1 \text{ при } n = n_1 \quad k > N_1 \quad \|f_{n_1} - f_k\| < \frac{1}{2}$$

$$\exists N_2 \text{ при } n = n_2 \quad k > N_2, N_1 \quad \|f_{n_2} - f_k\| < \frac{1}{4}$$

...

$$\text{Тогда: } \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1$$

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

Докажем, это функция f корректно задана:

$$\begin{aligned} \bullet S_N(x) &:= \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \\ \|S_N\|_p &\leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1 \\ \text{Тогда по Теореме Фату: } \|S\|_p &\leq 1 \end{aligned}$$

Тогда $|S|^p$ – суммируема

Тогда $S(x)$ конечна при п. в. x и ряд $\sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ абс. сход., а значит и просто сходиться при п. в. x

$$f := f_{n_1} + \sum f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \text{ т. е. } f = \text{п. в. } \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

2. Проверим, что $f_n \rightarrow f$ в L_p

$$\begin{aligned} \text{Т. к. } f_n - \text{фунд.}, \text{ то } \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n, n_k > N \quad \|f_n - f_{n_k}\| < \epsilon \Rightarrow \\ \|f_n - f_{n_k}\|^p &= \int_E |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \epsilon^p \end{aligned}$$

$$\text{Тогда по теореме Фату: } \int_E |f - f_n|^p \leq \epsilon^p$$

$$\text{Тогда } \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad \|f - f_n\|_p < \epsilon$$

Замечание: L_∞ – полное (упражнение)

31 Лемма Урысона

32 Плотность в L^p непрерывных финитных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathbb{A}, \lambda_m)$

$E \subset \mathbb{R}^m$ – изм. Тогда множество финитных непрерывных функций плотно в $L_p(E, \lambda_m), p \in [1; +\infty]$

Доказательство:

1. Раскроем определение плотности: $\forall f \in L_p(E, \mu) \forall \epsilon > 0 \exists \varphi \in C_0(\mathbb{R}^m) : \|f - \varphi|_E\|_p < \epsilon$. Таким образом достаточно научиться приближать f и φ ступенчатыми функциями f_n : $\|f - f_n\|_p < \epsilon/2$ и $\|\varphi - f_n\|_p < \epsilon/2$
2. TODO!

33 Теорема о непрерывности сдвига

Обозначения:

$$f_h := f(x + h)$$

$[0, T] \subset \mathbb{R}$. Будем считать, что $L_p[0, T]$ – состоит из T -периодических функций $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Отсюда $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.

$$\tilde{C}[0, T] = \{f \in C[0, T] : f(0) = f(T)\}. \|f\| = \max_{x \in [0, T]} |f(x)|$$

NB: $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow f$ – рвнм. непрерывна (по т. Кантора)

Формулировка:

1. f – рвнм. непр. на \mathbb{R}^m . Тогда $\|f - f_h\|_\infty \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.
2. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$. Тогда $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$.

3. $f \in \tilde{C}[0, T]$. Тогда $\|f - f_h\|_{+\infty} \rightarrow 0$.

4. $1 \leq p < +\infty$ $f \in L_p[0; T]$. Тогда $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$.

Доказательство:

1. 1 и 3 свойства следуют из определения рвнм. непр-ти: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}^m \forall h : |h| < \delta$ верно, что $|f(x) - f(x + h)| < \epsilon$, то есть $\|f - f_h\|_{+\infty} < \epsilon$ (это для св-ва 1, во втором случае x из $[0, T]$).

2. TODO!

34 Теорема об интеграле с функцией распределения

(\mathbb{R}, B, X)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$, изм. по Борелю, п.в. конечн.

$h : X \rightarrow \mathbb{R}$ с функцией распределения $H(t)$

μ_H – мера Бореля-Стилтьеса (мера Лебега-Стилтьеса на B)

Тогда $\int_X f(h(x))d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu_H(t)$

Доказательство: Следует из теоремы о вычислении интеграла по взвешенному образу меры.

35 Теорема о свойствах сходимости в гильбертовом пространстве

1. $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

2. $\sum x_k$ сходится, тогда $\forall y : \sum \langle x_k, y \rangle = \langle \sum x_k, y \rangle$

3. $\sum x_k$ - ортогональный ряд, тогда $\sum x_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum |x_k|^2$ сходится, при этом $|\sum x_k|^2 = \sum |x_k|^2$

Доказательство

$$1. \quad | \langle x_k, y_k \rangle - \langle x, y \rangle | = | \langle x_k, y_k \rangle - \langle x_k, y \rangle + \langle x_k, y \rangle - \langle x, y \rangle | \leq | \langle x_k, y_k - y \rangle | + | \langle x_k - x, y \rangle | \leq |x_k| \cdot |y_k - y| + |x_k - x| \cdot |y| \rightarrow 0 \text{ (так как } \text{огр} \cdot \text{б.м.} + \text{б.м.} \cdot \text{огр} \rightarrow 0)$$

$$2. \quad S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$
$$\langle \sum_{k=1}^n x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, y \rangle$$

Устремляя n к ∞ получаем требуемое равенство

$$3. \quad \text{Обозначим } C_n := \sum_{k=1}^n |x_k|^2$$
$$|S_n|^2 = \langle \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{j=1}^n x_j \rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_k \rangle \text{ (так как}$$
$$k \neq j \Rightarrow \langle x_k, x_j \rangle = 0) = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = C_n$$

Аналогично, $|S_n - S_m|^2 = |C_n - C_m|$

Тогда C_n, S_n фундаментальны одновременно \Rightarrow сходятся одновременно при устремлении n к ∞

36 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}, x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — Л.Н.З.

$$2. \quad c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$$

3. $c_k \cdot e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$

Иными словами $x = c_k \cdot e_k + z$, где $z \perp e_k$

Доказательство:

1. Пусть $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$. Умножим скалярно на e_m ($1 \leq m \leq N$)

Получим: $\alpha_m \|e_m\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0 \Rightarrow$ комб. тривиальная \Rightarrow Л.Н.З.

2. $\langle x, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle c_k e_k, e_m \rangle = c_m \cdot \|e_m\|^2$ (верно в силу сходимости ряда)

3. $x = c_k \cdot e_k + z$? $z \perp e_k$ Докажем это:

$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - c_k e_k, e_k \rangle = c_k \cdot \|e_k\|^2 - c_k \cdot \|e_k\|^2 = 0$$

37 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}, n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \quad \mathcal{L} = \text{Lin}(e_1, e_2, \dots) \subset \mathbb{H}$$

Тогда:

1. S_n — орт. проекция x на пр-во \mathcal{L} . Иными словами $x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$

2. S_n — наилучшее приближение x в \mathcal{L} ($\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$)

$$3. \|S_n\| \leq \|x\|$$

Доказательство:

$$1. (a) z = x - S_n$$

$$(b) z \perp \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall k = 1, 2, \dots, n : z \perp e_k$$

$$(c) \langle z, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = c_k \|e_k\|^2 - c_k \|e_k\|^2 = 0$$

$$2. \|x - y\|^2 = \|S_n + z - y\|^2 = \|(S_n - y) + z\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$$

$$3. \|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$$

Следствие: Неравенство Бесселя

$$\forall \{e_k\} - \text{O.C.} : \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2$$

38 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ – орт. сист. в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$

Тогда:

$$1. \text{Ряд Фурье } \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \text{ сх-ся в } \mathbb{H}$$

$$2. x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \ z \perp e_k$$

$$3. x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$$

Доказательство:

$$1. \text{Ряд Фурье – ортогональный ряд} \\ \text{его сходимость} \Leftrightarrow \text{сходимости } \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2 \text{ по неравенству Бесселя}$$

$$2. \langle z, e_k \rangle = \langle x - \sum c_i e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{+\infty} \langle c_i(x) e_i, e_k \rangle = 0$$

3. \Rightarrow - утв. 3 теоремы о св-вах сх-ти в гильбертовом пр-ве

\Leftarrow Из п. 2 ряд ортог.

$$\|x\|^2 = \|\sum c_k e_k\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$$

39 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ – орт. сист. в \mathbb{H}

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. e_1 – базис

2. $\forall x, y \in \mathbb{H} \quad \langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$ (обобщенное уравнение замкнутости)

3. $\{e_k\}$ – замкн.

4. $\{e_k\}$ – полн.

5. $Lin(e_1, e_2, \dots)$ – плотна в \mathbb{H}

Доказательство:

39.1 $1 \Rightarrow 2$

$x = \sum c_k(x) e_k$ – единственно (из геом. соображений: $c_k e_k$ – проекция)

$$\langle e_k, y \rangle = \overline{\langle y, e_k \rangle} = \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \langle e_k, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$$

39.2 $2 \Rightarrow 3$

$$y := x$$

$$\|x\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \quad (\text{см. п. 3 из опр.})$$

39.3 $3 \Rightarrow 4$

Пусть $\forall k \quad x_0 \perp e_k$

$$c_k(x_0) = \frac{\langle x_0, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = 0$$

$$\|x_0\|^2 = \sum |c_k(x_0)|^2 \|e_k\|^2 = 0 \quad (\text{см. п. 2 из опр.})$$

39.4 $4 \Rightarrow 1$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow (\text{т. Рисса-Фишера (2)}) \quad \forall k \quad z \perp e_k \Rightarrow (\text{из полноты}) \quad z = 0$$

(см. п. 1 из опр.)

39.5 $4 \Rightarrow 5$

Пусть $ClLin(e_1, e_2, \dots) \neq \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H} \setminus ClLin(e_1, e_2, \dots)$

$$\text{из т. Рисса-Фишера (2): } x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k + z \Rightarrow \forall k \quad z \perp e_k \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k \Rightarrow$$

$$x \in ClLin(e_1, e_2, \dots)$$

Противоречие.

39.6 $5 \Rightarrow 4$

$$\forall k \quad x_0 \perp e_k \Rightarrow x_0 \perp Lin(e_1, e_2, \dots) \Rightarrow x_0 \perp ClLin(e_1, e_2, \dots) (= \mathbb{H}) \Rightarrow x_0 \perp x_0 \Rightarrow \|x_0\|^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

40 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Пусть $S_n \rightarrow f$ в $L_1(-\pi, \pi]$

Тогда:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство:

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n a_j \cos jx + b_j \sin jx \quad (- \text{ это } T_n)$$

При $n \geq k$:

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx \, dx = \pi a_k$$

$$2. \left| \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \pi |S_n(x) - f(x)| \cdot |\cos kx| \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| \, dx \rightarrow 0$$

Из 1 и 2 следует равенство для a_k . Аналогично доказывается и для других.

41 Теорема Римана–Лебега

$E \subset \mathbb{R}^1$ – измеримо

$f \in L_1(E, \lambda)$, λ - мера Лебега

Тогда:

$$\int_E f(x) e^{ikx} \, dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

и

$$\int_E f(x) \cos(kx) \, dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

Доказательство:

Пусть $f \equiv 0$ вне E , тогда можно считать, что $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ikt} \stackrel{t=\tau+\frac{\pi}{k}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{k}\right) e^{ik\tau+i\pi} \, d\tau = - \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{k}\right) e^{ik\tau} \, d\tau$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ikt} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ikt} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(\tau + \frac{\pi}{k})e^{ik\tau} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t + \frac{\pi}{k}))$$

$$|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ikt}| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t + \frac{\pi}{k})| dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

по непрерывности сдвига, то есть:

$$\|f - f_\tau\|_1 \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$$

Сходимость второго интеграла очевидна из $\cos(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}$

42 Формула Грина

$D \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, связное, односвязное, ориентировано

δD – C^2 -гладкая кривая, тоже ориентировано

D и δD ориентированы согласовано

P, Q – функции, гладкие в открытой области $O \supset D$

Тогда:

$$\iint_D (\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}) dx dy = \int_{\delta D} (P(x, y) dx + Q(x, y)) dy$$

Доказательство:

Докажем для областей вида "криволинейный четырехугольник", т.е.

$x \in [a; b]$

$y \in [\phi_1(x); \phi_2(x)]$, где $\phi_2(x) > \phi_1(x)$

Представляется в аналогичном виде, относительно y

Ориентируем обход нашего четырехугольника против часовой стрелки.

Назовем пути по сторонам $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ начиная с нижней против часовой стрелки соответственно.

Из линейности интеграла по векторному полю следует, что для доказательства достаточно проверить:

$$-\iint_D \frac{\delta P}{\delta y} dx dy = \int_{\delta D} P dx$$

1. Преобразуем левую часть:

$$-\iint_D \frac{\delta P}{\delta y} dx dy = - \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P'_y dy = - \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} dx =$$

$$\int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx$$

2. Преобразуем правую часть:

$$\int_{\delta D} (P dx + 0 dy) = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$$= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx + 0 + \int_b^a P(x, \phi_2(x)) dx + 0 =$$

$$\int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx$$

Левая и правая части равны.

Если область более сложная - порежем на простые. Зафиксируем направление обхода, посчитаем на каждой.

При фиксированном направлении обхода пути на границах разрезов учитываются дважды с противоположными знаками, то есть в итоге имеем обход границы всей фигуры.

Из компактности и гладкости области следует, что допускается счетное количество разрезов.

43 Формула Стокса

Ω – эллиптическая, гладкая, двусторонняя поверхность, C^2 –гладкое;

n_0 – сторона

$\delta\Omega$ - ориентирована согласовано с n_0

(P, Q, R) – векторное поле на Ω , заданное в O - откp. : $\Omega \subset O \subset \mathbb{R}^3$

Тогда:

$$\int_{\delta\Omega} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_{\Omega} ((R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy)$$

Доказательство:

Из соображений линейности интеграла по векторному полю достаточно проверить:

$$\int_{\delta\Omega} P dx = \iint_{\Omega} (P'_z dz dx - P'_y dx dy)$$

Параметризуем область: $\Omega \leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{matrix} \right\rangle$

Пусть G – наша область в координатах (u, v) , L – граница Ω в новых координатах, тогда:

$$\begin{aligned} \int_{\delta\Omega} P dx &= \int_L P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))(x'_u du + x'_v dv) = \int_L P x'_u du + P x'_v dv \stackrel{\Gamma_{\text{рин}}}{=} \\ &= \iint_G ((P(x, y, z)x'_v)'_u - (P(x, y, z)x'_u)'_v) dudv = \\ &= \iint_G (P'_z(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - P'_y(y'_v x'_u - y'_u x'_v)) dudv = \\ &= \iint_G P'_z \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} dudv - P'_y \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv = \\ &= \iint_{\Omega} (P'_z dz dx - P'_y dx dy) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать

44 Формула Гаусса–Остроградского

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in G, f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$, $G \subset \mathbb{R}^2$, ∂G – гладкая кривая в \mathbb{R}^2 , $F \in "C'(G)"$ (кавычки означают "включая границу, то есть с более широкой гладкой областью"), ∂V – внешняя сторона, $R : O(V) \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V} R dx dy$$

Доказательство:

$\partial V = \Omega_F \cup \Omega_{cil} \cup \Omega_f$ (границы графика F , f и цилиндра между ними)

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\
& = \iint_G (R(x, y, F(x, y)) - R(x, y, f(x, y))) dx dy = (\text{см. пример после опр.} \\
& \text{инт. 2 рода}) \\
& = \iint_{\Omega_F} R dx dy - (- \iint_{\Omega_f} R dx dy) + 0 = (\text{так как проекция } \Omega_{cil} \text{ лежит в } \partial G) \\
& = \iint_{\Omega_F} R dx dy + \iint_{\Omega_f} R dx dy + \iint_{\Omega_{cil}} R dx dy = \\
& = \iint_{\partial V} R dx dy
\end{aligned}$$