Определения по матану, семестр 4

4 марта 2018 г.

Содержание

1 Свойство, выполняющееся почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой, и $\omega(x)$ – утверждение, зависящее от точки x.
$E := \{x : \omega(x)$ — ложно$\}$ и $\mu E = 0$. Тогда говорят, что $\omega(x)$ верно при почти всех (п.в.) x.

2 Сходимость почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой, и $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
Говорим, что $f_n \to f(x)$ почти везде, если $\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}$ измеримо и имеет меру 0.

3 Сходимость по мере

(X, a, μ) - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$
$f_n, f : X \to \overline{R}$ - п.в. конечны
Говорят, что f_n сходится к f по мере μ (при $n \to +\infty$) (обозначается $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$) если $\forall \epsilon > 0\ \mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$

4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

(X, a, μ) - пространство с мерой
$f_n, f : X \to R$ - п.в. конечны, измеримы
$f_n \to f$.
Тогда эта сходимость “почти равномерная”

5 Интеграл ступенчатой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ - ступенчатая функция, E_k - измеримые дизъюнктные множества, $f \geqslant 0$
Интегралом ступенчатой функции f на множестве $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что $[0 \cdot \infty = 0]$

6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
f - измеримо, $f \geqslant 0$, её интегралом на множестве $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := sup(\int\limits_{\mathbb{X}} g)$$

, где $0 \leqslant g \leqslant f, g-$ступенчатая

7 Суммируемая функция

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f-$измерима, $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+$ или $\int\limits_{\mathbb{X}} f^-$ конечен (хотя бы один из них).
Тогда интегралом f на $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := \int\limits_{\mathbb{X}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{X}} f^+$$

Тогда если конечен $\int\limits_{\mathbb{X}} f$, (то есть конечны интегралы по обеим срезкам), то f называют суммируемой

8 Интеграл суммируемой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f-$ измерима, $E \in \mathbb{A}$
Тогда интегралом f на множестве E назовём

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f d\mu := \int\limits_{\mathbb{X}} f \cdot \chi(E) d\mu$$

f суммируемая на E, если $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+\chi(E)$ и $\int\limits_{\mathbb{X}} f^-\chi(E)$ конечны

9 Произведение мер

$< \mathbb{X}, \alpha, \mu >$, $< \mathbb{Y}, \beta, \nu >$ - пространства с мерой
μ, ν - σ-конечные меры
$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : A \in \alpha, B \in \beta\}$
$m_0 : \alpha \times \beta \to \overline{R}$
$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

m - называется произведением мер μ и ν, если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\alpha \times \beta$ на некоторую σ-алгебру $\alpha \otimes \beta$.
$m = \mu \times \nu$ - обозначение
$< \mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \alpha \otimes \beta, \mu \times \nu >$ - произведение пространств с мерой

10 Теорема Фубини

$(X, \mathbb{A}, \mu)$, $(Y, \mathbb{B}, \nu)$ — пространства с мерой. μ, ν — σ-конечные полные меры.
$m = \mu \times \nu$ (произведение мер).
f — суммируемая функция на $X \times Y$ (по мере m). Обозначим: $f_x(y) = f(x, y)$, $f^y(x) = f(x, y)$.
Тогда:

1. При почти всех x f_x суммируема.
   При почти всех y f^y суммируема.

2. $\phi(x) = \int_Y f_x \, d\nu$ суммируема.
   $\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu$ суммируема.

3. $$\int_{X \times Y} f \, dm = \int_X \phi(x) \, d\mu = \int_X (\int_Y f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x)$$

11 Образ меры при отображении

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, \_)$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1})$.
ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ.

12 Взвешенный образ меры

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, \_)$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega \, d\mu$.
ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ.
При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

13 Плотность одной меры по отношению к другой

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
$\nu(E) = \int_E \omega(x) \, d\mu$. ν — мера на X.
ω называется плотностью ν относительно μ.

14 Заряд, множество положительности

14.1 Заряд

$(X, \mathbb{A}, \_)$ — пространство с σ-алгеброй.
$\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).
ϕ счётно аддитивна.
Тогда ϕ — заряд.

14.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, B измеримо: $\phi(B) \geq 0$.