

Определения по матану, семестр 4

8 апреля 2018 г.

Содержание

| | | |
|----|---|---|
| 1 | Свойство, выполняющееся почти везде | 4 |
| 2 | Сходимость почти везде | 4 |
| 3 | Сходимость по мере | 4 |
| 4 | Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости | 4 |
| 5 | Интеграл ступенчатой функции | 4 |
| 6 | Интеграл неотрицательной измеримой функции | 5 |
| 7 | Суммируемая функция | 5 |
| 8 | Интеграл суммируемой функции | 6 |
| 9 | Произведение мер | 6 |
| 10 | Теорема Фубини | 6 |
| 11 | Образ меры при отображении | 7 |
| 12 | Взвешенный образ меры | 8 |

| | | |
|------|--|----|
| 13 | Плотность одной меры по отношению к другой | 8 |
| 14 | Заряд, множество положительности | 8 |
| 14.1 | Заряд | 8 |
| 14.2 | Множество положительности | 8 |
| 15 | Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы | 9 |
| 16 | Интегральные неравенства Гельдера и Минковского | 9 |
| 16.1 | Неравенство Гельдера | 9 |
| 16.2 | Неравенство Минковского | 10 |
| 17 | Интеграл комплекснозначных функций | 10 |
| 18 | Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$ | 10 |
| 19 | Пространство $L_\infty(E, \mu)$ | 11 |
| 20 | Существенный супремум | 11 |
| 21 | Фундаментальная последовательность, полное пространство | 12 |
| 22 | Плотное множество | 12 |
| 23 | Финитная функция | 12 |
| 24 | Мера Лебега-Стилтьеса | 12 |
| 25 | Функция распределения | 12 |
| 26 | Измеримое множество на простой двумерной поверхности в R^3 | 12 |
| 27 | Мера Лебега на простой двумерной поверхности в R^3 | 12 |
| 28 | Поверхностный интеграл первого рода | 12 |

| | | |
|----|--|----|
| 29 | Кусочно-гладкая поверхность в R^3 | 12 |
| 30 | Гильбертово пространство | 12 |
| 31 | Ортогональный ряд | 13 |
| 32 | Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве | 13 |
| 33 | Ортогональное семейство векторов | 13 |
| 34 | Ортонормированное семейство векторов | 13 |
| 35 | Коэффициенты Фурье | 13 |

1 Свойство, выполняющееся почти везде

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой, и $\omega(x)$ – утверждение, зависящее от точки x .

$E := \{x : \omega(x) \text{ — ложно}\}$ и $\mu E = 0$. Тогда говорят, что $\omega(x)$ верно при почти всех (п.в.) x .

2 Сходимость почти везде

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой, и $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Говорим, что $f_n \rightarrow f(x)$ почти везде, если $\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ измеримо и имеет меру 0.

3 Сходимость по мере

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$

$f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - п.в. конечны

Говорят, что f_n сходится к f по мере μ (при $n \rightarrow +\infty$) (обозначается $f_n \xrightarrow{\mu} f$) если $\forall \epsilon > 0 \mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

(X, \mathbb{A}, μ) - пространство с мерой

$f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ - п.в. конечны, измеримы

$f_n \rightarrow f$.

Тогда эта сходимость “почти равномерная”

5 Интеграл ступенчатой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

$f = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ - ступенчатая функция, E_k - измеримые дизъюнктные множества, $f \geq 0$

Интегралом ступенчатой функции f на множестве X назовём

$$\int_X f d\mu := \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что $[0 \cdot \infty = 0]$

6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

f - измеримо, $f \geq 0$, её интегралом на множестве X назовём

$$\int_X f d\mu := \sup \left(\int_X g \right)$$

, где $0 \leq g \leq f$, g - ступенчатая

7 Суммируемая функция

$\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

f - измерима, $\int_X f^+$ или $\int_X f^-$ конечен (хотя бы один из них).

Тогда интегралом f на X назовём

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ - \int_X f^-$$

Тогда если конечен $\int_X f$, (то есть конечны интегралы по обеим срезкам), то f называют суммируемой

8 Интеграл суммируемой функции

$\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ - пространство с мерой

f — измерима, $E \in \mathcal{A}$

Тогда интегралом f на множестве E назовём

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi(E) d\mu$$

f суммируемая на E , если $\int_X f^+ \chi(E)$ и $\int_X f^- \chi(E)$ конечны

9 Произведение мер

$\langle X, \alpha, \mu \rangle, \langle Y, \beta, \nu \rangle$ - пространства с мерой

μ, ν - σ -конечные меры

$$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \alpha, B \in \beta\}$$

$$m_0 : \alpha \times \beta \rightarrow \bar{R}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

m - называется произведением мер μ и ν , если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\alpha \times \beta$ на некоторую σ -алгебру $\alpha \otimes \beta$.

$m = \mu \times \nu$ - обозначение

$\langle X \times Y, \alpha \otimes \beta, \mu \times \nu \rangle$ - произведение пространств с мерой

10 Теорема Фубини

$\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle, \langle Y, \mathcal{B}, \nu \rangle$ - пространство с мерой,

μ, ν — σ -конечные и полные,

$$m = \mu \times \nu,$$

f — суммируемая на $X \times Y$ по m .

Тогда:

- при «почти всех» x функция $f_x \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$, то есть суммируема на \mathbb{Y} по ν

при «почти всех» y функция $f^y \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$

-

$$x \mapsto \phi(x) \mid \phi(x) = \int_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$$

$$y \mapsto \psi(y) \mid \psi(y) = \int_{\mathbb{X}} f^y d\mu \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$$

Это есть эти функции суммируемы в некотором контексте (\mathbb{X}, μ и \mathbb{Y}, ν соответственно)

-

$$\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm = \int_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} f d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$\int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} f dm = \int_{\mathbb{Y}} \psi(y) d\nu = \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} f d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

11 Образ меры при отображении

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, (Y, \mathbb{B}, ν) — пространство с σ -алгеброй. $\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.

ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ .

12 Взвешенный образ меры

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, _)$ — пространство с σ -алгеброй.
 $\Phi : X \rightarrow Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из \mathbb{B} лежит в \mathbb{A}).

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega d\mu$.

ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ .

При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

13 Плотность одной меры по отношению к другой

(X, \mathbb{A}, μ) — пространство с мерой.

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.

$\nu(E) = \int_E \omega(x) d\mu$. ν — мера на X .

ω называется плотностью ν относительно μ .

14 Заряд, множество положительности

14.1 Заряд

$(X, \mathbb{A}, _)$ — пространство с σ -алгеброй.

$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).

ϕ счётно аддитивна.

Тогда ϕ — заряд.

14.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, B измеримо:
 $\phi(B) \geq 0$.

15 Сферические координаты в R^3 и в R^m , их Якобианы

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \cdot \cos \phi_1 & 1 \leq i \leq m-2 : \phi_i &\in [0, \pi] \\
 x_2 &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2 & i = m-1 : \phi_i &\in [0, 2\pi] \\
 x_3 &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_{m-2} &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-3} \cdot \cos \phi_{n-2} \\
 x_{m-1} &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \cos \phi_{n-1} \\
 x_m &= r \cdot \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \sin \phi_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{J} = r^{n-1} \cdot (\sin \phi_1)^{n-2} \cdot (\sin \phi_2)^{n-3} \cdots (\sin \phi_{n-2})^1 \cdot (\sin \phi_{n-1})^0$$

Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m -мерный вектор на нормаль к $(m-1)$ -мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру пока не дойдём до нашего любимого \mathbb{R}^2 . Уже в нём рассматриваем обычные полярные координаты (отсюда и другие ограничения на размер угла).

16 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

16.1 Неравенство Гельдера

(X, \mathbb{A}, μ) $f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{C}$ (E - изм.) — заданы п.в., измеримы

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогда: } \int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

16.2 Неравенство Минковского

(X, \mathbb{A}, μ) f, g — заданы п.в, измеримы

$$1 \leq p < +\infty. \text{ Тогда: } \left(\int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

17 Интеграл комплекснозначных функции

TODO: Лев и Вадим

18 Пространство $L_p(E, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$

(X, \mathbb{A}, μ) $E \subset \mathbb{A}$

$$L'_p(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \text{ изм., } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \}$$

Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект - если определить норму как $\|f\| =$

$$\left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функ-}$$

ции, которые п.в. равны 0 будут давать норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:

$f \sim g$, если $f = g$ п.в.

$$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu) / \sim - \text{ лин. норм. пр-во с нормой } \|f\| = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $\|f\|_p$ за норму f в пространстве L_p .

19 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$$L_\infty(E, \mu) = \{ f : \text{п.в. } E \rightarrow \mathbb{C}, \operatorname{ess\,sup}_E |f| < +\infty \}$$

NB1: $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

20 Существенный супремум

$(X, \mathbb{A}, \mu), E \subset X$ — изм., $f : \text{п.в. } E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f(x) = \inf \{ A \in R : f(x) \leq A \text{ п.в. } x \}$.

В этом определении A — существенная верхняя граница.

Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup}_E f \leq \sup_E f$
2. $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_E f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int_E |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}_E |g| \cdot \int_E |f| d\mu$.

- 21 Фундаментальная последовательность, полное пространство
- 22 Плотное множество
- 23 Финитная функция
- 24 Мера Лебега-Стилтьеса
- 25 Функция распределения
- 26 Измеримое множество на простой двумерной поверхности в R^3
- 27 Мера Лебега на простой двумерной поверхности в R^3
- 28 Поверхностный интеграл первого рода
- 29 Кусочно-гладкая поверхность в R^3
- 30 Гильбертово пространство

H - линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} , в котором задано скалярное произведение, и полное относительно соответствующей нормы, называется Гильбертовым.

31 Ортогональный ряд

$x_k \in \mathbb{H}$, $\sum x_k$ называется ортогональным рядом, если $\forall k, l : k \neq l : x_k \perp x_l$

32 Сходящийся ряд в Гильбертовом пространстве

33 Ортогональное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортогональное семейство векторов, если $\forall k \neq l : e_k \perp e_l, e_k \neq 0, e_l \neq 0$.

34 Ортонормированное семейство векторов

$\{e_k\} \in \mathbb{H}$ - ортонормированное семейство векторов, если e_k - ортогональное семейство векторов, и $\forall k : |e_k| = 1$

35 Коэффициенты Фурье

$\{e_k\}$ - ортонормированная система в \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$.

$c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{|e_k|^2}$ называются коэффициентами Фурье вектора x по ортогональной системе \mathbb{H}

36 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$