Определения по матану, семестр 4

24 марта 2018 г.

Содержание

1 Свойство, выполняющееся почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой, и $\omega(x)$ – утверждение, зависящее от точки x.
$E := \{x : \omega(x)$ — ложно$\}$ и $\mu E = 0$. Тогда говорят, что $\omega(x)$ верно при почти всех (п.в.) x.

2 Сходимость почти везде

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ - пространство с мерой, и $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
Говорим, что $f_n \to f(x)$ почти везде, если $\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}$ измеримо и имеет меру 0.

3 Сходимость по мере

(X, a, μ) - пространство с мерой, $\mu \cdot X < +\infty$
$f_n, f : X \to \overline{R}$ - п.в. конечны
Говорят, что f_n сходится к f по мере μ (при $n \to +\infty$) (обозначается $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$) если $\forall \epsilon > 0 \ \mu(X(|f_n - f| > \epsilon)) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$

4 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

(X, a, μ) - пространство с мерой
$f_n, f : X \to R$ - п.в. конечны, измеримы
$f_n \to f$.
Тогда эта сходимость “почти равномерная”

5 Интеграл ступенчатой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda_k \cdot \chi_{E_k})$ - ступенчатая функция, E_k - измеримые дизъюнктные множества, $f \geqslant 0$
Интегралом ступенчатой функции f на множестве $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \mu E_k$$

Будем считать, что $[0 \cdot \infty = 0]$

6 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
f - измеримо, $f \geqslant 0$, её интегралом на множестве $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := sup(\int\limits_{\mathbb{X}} g)$$

, где $0 \leqslant g \leqslant f, g-$ступенчатая

7 Суммируемая функция

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f-$измерима, $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+$ или $\int\limits_{\mathbb{X}} f^-$ конечен (хотя бы один из них).
Тогда интегралом f на $\mathbb{X}$ назовём

$$\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu := \int\limits_{\mathbb{X}} f^+ - \int\limits_{\mathbb{X}} f^+$$

Тогда если конечен $\int\limits_{\mathbb{X}} f$, (то есть конечны интегралы по обеим срезкам), то f называют суммируемой

8 Интеграл суммируемой функции

$< \mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu >$ - пространство с мерой
$f-$ измерима, $E \in \mathbb{A}$
Тогда интегралом f на множестве E назовём

$$\int\limits_{\mathbb{E}} f d\mu := \int\limits_{\mathbb{X}} f \cdot \chi(E) d\mu$$

f суммируемая на E, если $\int\limits_{\mathbb{X}} f^+\chi(E)$ и $\int\limits_{\mathbb{X}} f^-\chi(E)$ конечны

9 Произведение мер

$<\mathbb{X}, \alpha, \mu>$, $<\mathbb{Y}, \beta, \nu>$ - пространства с мерой
μ, ν - σ-конечные меры
$\alpha \times \beta = \{A \times B \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : A \in \alpha, B \in \beta\}$
$m_0 : \alpha \times \beta \to \overline{R}$
$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$

m - называется произведением мер μ и ν, если m - мера, которая является Лебеговским продолжением m_0 с полукольца $\alpha \times \beta$ на некоторую σ-алгебру $\alpha \otimes \beta$.
$m = \mu \times \nu$ - обозначение
$<\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \alpha \otimes \beta, \mu \times \nu>$ - произведение пространств с мерой

10 Теорема Фубини

$<\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mu>$, $<\mathbb{Y}, \mathbb{B}, \nu>$ - пространство с мерой,
μ, ν — σ-конечные и полные,
$m = \mu \times \nu$,
f — суммируемая на $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ по m.
Тогда:

- при «почти всех» x функция $f_x \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$, то есть суммируема на $\mathbb{Y}$ по ν
  при «почти всех» y функция $f^y \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$

- $$x \mapsto \phi(x) \mid \phi(x) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_x d\nu \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mu)$$
  $$y \mapsto \psi(y) \mid \psi(y) = \int\limits_{\mathbb{X}} f^y d\mu \in \mathbb{L}(\mathbb{Y}, \nu)$$
  Это есть эти функции суммируемы в некотором контексте ($\mathbb{X}, \mu$ и $\mathbb{Y}, \nu$ соответсвено)

- $$\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f dm = \int\limits_{\mathbb{X}} \phi(x) d\mu = \int\limits_{\mathbb{X}} (\int\limits_{\mathbb{Y}} f d\nu(y)) d\mu(x)$$
  $$\int\limits_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} f dm = \int\limits_{\mathbb{Y}} \psi(x) d\nu = \int\limits_{\mathbb{Y}} (\int\limits_{\mathbb{X}} f d\mu(x)) d\nu(y)$$

11 Образ меры при отображении

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, \_)$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
Пусть для $\forall E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \mu(\Phi^{-1}(E))$.
ν является мерой на Y и называется образом меры μ при отображении Φ.

12 Взвешенный образ меры

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathbb{B}, \_)$ — пространство с σ-алгеброй.
$\Phi : X \to Y$, $\Phi^{-1}(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$ (прообраз любого множества из $\mathbb{B}$ лежит в $\mathbb{A}$).
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
Пусть для $E \in \mathbb{B}$ $\nu(E) = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} \omega \, d\mu$.
ν является мерой на Y и называется взвешенным образом меры μ.
При $\omega \equiv 1$ взвешенный образ меры является обычным образом меры.

13 Плотность одной меры по отношению к другой

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая.
$\nu(E) = \int_E \omega(x) \, d\mu$. ν — мера на X.
ω называется плотностью ν относительно μ.

14 Заряд, множество положительности

14.1 Заряд

$(X, \mathbb{A}, \_)$ — пространство с σ-алгеброй.
$\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ (конечная, не обязательно неотрицательная).
ϕ счётно аддитивна.
Тогда ϕ — заряд.

14.2 Множество положительности

$A \subset X$ — множество положительности, если $\forall B \subset A$, B измеримо: $\phi(B) \geq 0$.e

15 Сферические координаты в R^3 и в R^m, их Якобианы

$x_1 = r \cdot \cos\phi_1$ $\qquad$ $1 \le i \le m-2 : \phi_i \in [0, \pi]$
$x_2 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2$ $\qquad$ $i = m-1 : \phi_i \in [0, 2\pi]$
$x_3 = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdot \cos\phi_3$
.
.
.
$x_{m-2} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-3} \cdot \cos\phi_{n-2}$
$x_{m-1} = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2} \cdot \cos\phi_{n-1}$
$x_m = r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{n-2} \cdot \sin\phi_{n-1}$

$\mathcal{J} = r^{n-1} \cdot (\sin\phi_1)^{n-2} \cdot (\sin\phi_2)^{n-3} \cdots (\sin\phi_{n-2})^1 \cdot (\sin\phi_{n-1})^0$
Что тут происходит идейно. Сначала мы проецируем наш m-мерный вектор на нормаль к $(m-1)$-мерной гиперплоскости. Потом рассматриваем проекцию на эту гиперплоскость и в ней рекурсивно повторяем процедуру пока не дойдём до нашего любимого $\mathbb{R}^2$. Уже в нём рассматривем обычные полярные координаты(отсюда и другие ограничения на размер угла).

16 Интегральные неравества Гельдера и Минковского

16.1 Нераветсво Гельдера

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ $f, g : E \subset X \to C$ (E - изм.) — заданы п.в, измеримы

$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда: $\int\limits_E |fg| d\mu \le \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g|^q d\mu)\right)^{\frac{1}{q}}$

16.2 Нераверство Минковского

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ f, g — заданы п.в, измеримы

$1 \le p < +\infty$. Тогда: $\left(\int\limits_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

17 Интеграл комплекснозначныйх функции

TODO: Лев и Вадим

18 Пространство $L_p(E, \mu),\ 1 \leq p < +\infty$

$(X, \mathbb{A}, \mu)$ $E \subset \mathbb{A}$
$L'_p(E, \mu) = \{$ f : п.в. $E \to \mathbb{C}$, изм., $\int\limits_E |f|^p d\mu < +\infty\}$
Это линейное пространство (по нер-ву Минковского и линейности пространства измеримых функций).

У этого пространства есть дефект - если определить норму как $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, то будет сразу много нулей пространства (ненулевые функции, которые п.в. равны 0 будут давать норму 0). Поэтому перейдем к фактор-множеству функций по отношению эквивалентности:
$f \sim g$, если $f = g$ п.в.

$L_p(E, \mu) := L'_p(E, \mu)/_\sim$ - лин. норм. пр-во с нормой $||f|| = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

NB1: Его элементы — классы эквивалентности обычных функций. Будем называть их тоже функциями. Они не умеют вычислять значение в точке (т.к. можно всегда подменить значение на любое другое и получить представителя все того же класса эквивалентности), но зато их можно интегрировать!

NB2: также иногда будем обозначать $||f||_p$ за норму f в пространстве L_p.

19 Пространство $L_\infty(E, \mu)$

$L_\infty(E, \mu) = \{$ f : п.в. $E \to \mathbb{C}$, $\operatorname*{ess\,sup}_E |f| < +\infty\}$
NB1: $||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|$.

NB2: Новый вид нер-ва Гельдера : $||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$ (причем можно брать $p = +\infty, q = 1$ или наоборот).

20 Существенный супремум

$(X, \mathbb{A}, \mu), E \subset X-$ изм., f : п.в. $E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда: $\operatorname{ess\,sup}\limits_{x \in E} f(x) = \inf\{A \in R : f(x) \leq A \text{ п.в. } x\}$.
В этом определении A - существенная верхняя граница.
Свойства:

1. $\operatorname{ess\,sup}\limits_{E} f \leq \sup\limits_{E} f$
2. $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup}\limits_{E} f$ при п.в. $x \in E$.
3. $\int\limits_{E} |fg| d\mu \leq \operatorname{ess\,sup}\limits_{E} |g| \cdot \int\limits_{E} |f| d\mu$.