Теория Вероятности и Математическая Статистика

Довжик Лев M3339

Май 2019

Метод Монте-Карло
Вариант №8

1 Оценка объёма

1.1 Задание

Методом Монте-Карло оценить объем части тела $\{F(\tilde{x}) \leq c\}$, заключенной в k-мерном кубе с ребром $[0, 1]$. Функция имеет вид $F(\tilde{x}) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k)$. Для выбранной надежности $\gamma \geq 0.95$ указать асимптотическую точность оценки и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения объёма.
Используя объём выборки $n = 10^4$ и $n = 10^6$, оценить скорость сходимости и показать, что доверительные интервалы пересекаются.

1.2 Входные данные

- Функция имеет вид $f(x) = \ln(9x + 1)$
- Куб размерностью $k = 6$
- Параметр $c = 8.61$

1.3 Исходный код программы

```
pkg load statistics;

function [res] = f(x)
  a = 9;
  res = log(a * x + 1);
endfunction

function calc_volume(n)
  c = 8.61;
  y = 0.95;
  k = 6;
  T = norminv((y + 1) / 2);
  X = rand(k, n);
  F_x = sum(arrayfun(@f, X));
  V = mean(F_x <= c);
  d = T * sqrt(V * (1 - V) / n);
  printf("N = %d\n", n);
  printf("Volume is %g (from %g to %g)\n", V, V - d, V + d);
  printf("Delta is %g\n\n", d);
endfunction

calc_volume(10000);
calc_volume(1000000);
```

1.4 Выходные данные

```
N = 10000
Volume is 0.2985 (from 0.289531 to 0.307469)
Delta is 0.00896879

N = 1000000
Volume is 0.292849 (from 0.291957 to 0.293741)
Delta is 0.00089192
```

1.5 Вывод

Доверительный интервал при $n = 10^6$ содержится в интервале при $n = 10^4$.
При увеличении числа итераций в 100 раз ширина доверительного интервала уменьшилось в 10 раз.

2 Оценка Интеграла

2.1 Задание

Построить оценку интегралов (представить интеграл как математическое ожидание функции, зависящей от случайной величины с известной плотностью) и для выбранной надежности $\gamma \geq 0.95$ указать асимптотическую точность оценки и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения интеграла.

2.2 Интеграл 1

2.2.1 Входные данные

- Интеграл имеет вид $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-2)^3 \, exp\left(\frac{-(x-1)^2}{3}\right) dx$

2.2.2 Исходный код программы

```
pkg load statistics;

function res = g(x)
  res = (x - 2) ^ 3;
endfunction

function res = g1(x)
  res = g(x) * sqrt(2 * pi * 1.5);
endfunction

function res = f(x)
  res = g(x) * exp(-((x - 1) ^ 2) / 3);
endfunction

function calc_value(n)
  mu = 1;
  sigma = sqrt(1.5);
  y = 0.95;
  T = norminv((y + 1) / 2);
  X = normrnd(mu, sigma, 1, n);
  F_x = arrayfun(@g1, X);
  V = mean(F_x);
  d = (std(F_x) * T) / sqrt(n);
  printf("N = %d\n", n);
  printf("Value is %g (from %g to %g)\n", V, V - d, V + d);
  printf("Delta is %g\n\n", d);
endfunction

printf("Sample answer = %g\n\n", quad(@f, -inf, inf));
calc_value(10000);
calc_value(1000000);
```

2.2.3 Выходные данные

```
Sample answer = -16.8849

N = 10000
Value is -16.7469 (from -17.4549 to -16.0389)
Delta is 0.708002

N = 1000000
Value is -16.8777 (from -16.9501 to -16.8053)
Delta is 0.0724172
```

2.2.4 Вывод

Истинное значение интеграла содержится в доверительном интервале при $n = 10^4$ и $n = 10^6$. Значение, полученное методом Монте-Карло отличается от значения, полученного методом *quad*, на $7.2 \cdot 10^{-3}$.
При увеличении числа итераций в 100 раз, ширина доверительного интервала уменьшилось в 10 раз.

2.3 Интеграл 2

2.3.1 Входные данные

- Интеграл имеет вид $\int\limits_{-1}^{2} \sqrt{1+x}\cos x dx$

2.3.2 Исходный код программы

```
pkg load statistics;

function res = f(x)
  res = sqrt(1 + x) * cos(x);
endfunction

function calc_value(n)
  a = -1;
  b = 2;
  y = 0.95;
  T = norminv((y + 1) / 2);
  X = unifrnd(a, b, 1, n);
  F_x = arrayfun(@f, X) * (b - a);
  V = mean(F_x);
  d = (std(F_x) * T) / sqrt(n);
  printf("N = %d\n", n);
  printf("Value is %g (from %g to %g)\n", V, V - d, V + d);
  printf("Delta is %g\n\n", d);
endfunction

printf("Sample answer = %g\n\n", quad(@f, -1, 2));
calc_value(10000);
calc_value(1000000);
```

2.3.3 Выходные данные

```
Sample answer = 1.68469

N = 10000
Value is 1.6934 (from 1.66495 to 1.72185)
Delta is 0.028447

N = 1000000
Value is 1.68441 (from 1.68155 to 1.68726)
Delta is 0.00285445
```

2.3.4 Вывод

Истинное значение интеграла содержится в доверительном интервале при $n = 10^4$ и $n = 10^6$. Значение, полученное методом Монте-Карло отличается от значения, полученного методом *quad*, на $2.8 \cdot 10^{-4}$.
При увеличении числа итераций в 100 раз, ширина доверительного интервала уменьшилось в 10 раз.