

При фиксированном параметре r характеристики дуального кода Хэмминга: $n = 2^r - 1, k = r, d = 2^{r-1}$

Для двоичного кода граница Хэмминга имеет вид $2^k \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^t C_n^i}$, где $t = floor(\frac{d-1}{2})$, что можно преобразовать в $\sum_{i=0}^t C_n^i \leq 2^{n-k}$

Граница Варшамова-Гильберта же для двоичного кода имеет вид: $\sum_{i=0}^{d-2} C_{n-1}^i < 2^{n-k}$

Так как аналитически эти неравенства решать слишком трудоёмко, то будем решать их численным перебором для разумных (n, k)

```
In [1]: import scipy.special as sc
import matplotlib.pyplot as plt
from tqdm import tqdm_notebook as tqdm
```

```
In [2]: def get_dual_params(r):
n = (2 ** r) - 1
k = r
d = 2 ** (r - 1)
return n, k, d
```

```
In [3]: def comb(n, k):
return sc.comb(n, k, exact=True)

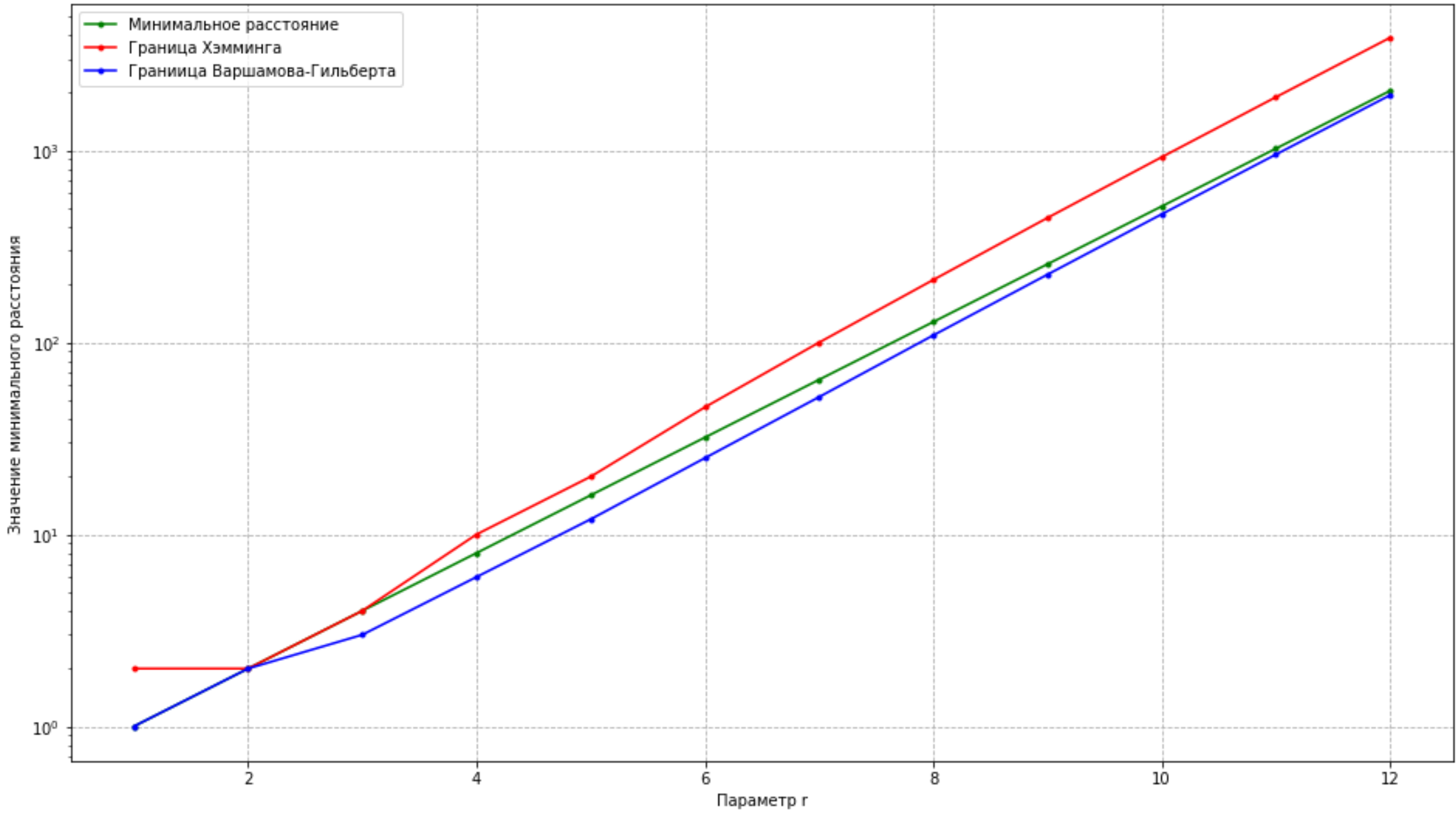
def get_hamming_border(n, k):
t = 0
cur_sum = comb(n, t)
while cur_sum + comb(n, t + 1) <= 2 ** (n - k):
cur_sum += comb(n, t + 1)
t += 1
return t * 2 + 2

def get_hilbert_border(n, k):
if (n == k):
return 1
prev_prev_d = 0
cur_sum = comb(n - 1, prev_prev_d)
while cur_sum + comb(n - 1, prev_prev_d + 1) < 2 ** (n - k):
cur_sum += comb(n - 1, prev_prev_d + 1)
prev_prev_d += 1
return prev_prev_d + 2
```

```
In [7]: rs = list(range(1, 13))
hammings = []
hilberts = []
ds = []
```

```
In [8]: for r in tqdm(rs):
n, k, d = get_dual_params(r)
hamming = get_hamming_border(n, k)
hilbert = get_hilbert_border(n, k)
ds.append(d)
hammings.append(hamming)
hilberts.append(hilbert)
```

```
In [9]: plt.figure(figsize=(16,9))
plt.grid(linestyle='--')
plt.semilogy(rs, ds, linestyle='-',marker='.',color='g', label='Минимальное расстояние')
plt.semilogy(rs, hammings, linestyle='-',marker='.',color='r', label='Граница Хэмминга')
plt.semilogy(rs, hilberts, linestyle='-',marker='.',color='b', label='Граница Варшамова-Гильберта')
plt.xlabel('Параметр r')
plt.ylabel('Значение минимального расстояния')
plt.legend()
plt.show()
```



Из графиков видно, что с увеличением r (что эквивалентно увеличению длины) минимальное расстояние удаляется от границы Хэмминга и приближается к границе Варшамова-Гильберта

```
In [ ]:
```