Домашнее задание

Лев Довжик, M3439

Вариант №62

Задача 3.1

Коды Хэмминга

Зафиксируем конкретное r. Тогда $n = 2^r - 1, k = 2^r - r - 1, d = 3$

Для двоичного кода граница Хэмминга имеет вид: $2^k \leq \dfrac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} C_n^i}$

Немного преобразовав, получаем его в следующем виде: $\sum\limits_{i=0}^{t} C_n^i \leq 2^{n-k}$

Так как $d = 3$, то $t = \left\lfloor \dfrac{3-1}{2} \right\rfloor = 1$, то есть код исправляет любые однократные ошибки. Тогда левая часть имеет вид: $\sum\limits_{i=0}^{1} C_n^i = C_n^0 + C_n^1 = 1 + n = 1 + (2^r - 1) = 2^r$

Справа же $2^{n-k} = 2^{2^r-1-(2^r-r-1)} = 2^{2^r-1-2^r+r+1} = 2^r$

Как видно обе части неравенства равны, а значит код Хэмминга удовлетврояет границе Хэмменга с равенством.

Коды Хэмминга

$n = 23, k = 12, d = 7$

Для двоичного кода граница Хэмминга имеет вид: $2^k \leq \dfrac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} C_n^i}$

Немного преобразовав, получаем его в следующем виде: $\sum\limits_{i=0}^{t} C_n^i \leq 2^{n-k}$

Так как $d = 7$, то $t = \left\lfloor \frac{7-1}{2} \right\rfloor = 3$, то есть код исправляет любые трёхкратные ошибки. Тогда левая часть имеет вид: $\sum_{i=0}^{3} C_n^i = C_{23}^0 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + C_{23}^3 = 2048$

Справа же $2^{n-k} = 2^{23-12} = 2^{11} = 2048$

Как видно обе части неравенства равны, а значит данный код Голея удовлетврояет границе Хэмменга с равенством.