Домашнее задание

Лев Довжик, M3439

Вариант №62

Задача 2.1

1) $R = \frac{1}{6}$

В данном случае у на всего 2^1 кодовых слова, так всего одно из них ненулевое, то вес второго будет определять d. Максимально возможный вектор (1 1 1 1 1 1) с весом 6.

Итого $G = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$

2) $R = \frac{2}{6}$

Здесь у нас 2^2 кодовых слова, три из которых ненулевые. Покажем порождающую матрицу, при которой $d = 4 : G = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{pmatrix}$

При этом большего d быть и не может, т.к. линейная комбинация(ведь кодовые слова образуют линейное пространство) двух шестимерных векторов веса 5, может быть либо равна нулевому вектору, либо вектору веса 2, а значит d будет не более 2.

3) $R = \frac{3}{6}$

Представим проверочную матрицу кода, который будет иметь $d = 3$. В ней все столбцы попарно различны, но (1) + (2) = (3).

$$H = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что это максимальное расстояние в силу того, что для $d = 4$ на нужно выбрать 6 двоичных векторов длины 3, так что бы как минимум любые три вектора были линейно независимы. Несложным перебором можно убедиться, что такое невозможно.

4) $R = \dfrac{4}{6}$

Т.к. невозможно найти 6 различных двоичных векторов длины 2(столбцов проверочной матрицы), то максимальное $d = 2$ для такого кода. Представим же его проверочную матрицу:

$$H = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{pmatrix}$$

5) $R = \dfrac{5}{6}$

$H = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$ и d так же равно 2. Больше же оно не может быть в силу границы Синглтона: $d \leq n - k + 1 = 2$

6) $R = \dfrac{6}{6}$

Множество кодовых в данном случае — это вообще все двоичные вектора длины 6. Минимальное расстояние в таком случае, очевидно, равно 1. Мы можем просто передавать исходное сообщение как есть ($G = I_6$).

Задача 2.3

Интерпритируем исходные матрицы как порождающие

а)$H = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{1}{2}$

б)$H = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{1}{2}$

в)$H = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{1}{3}$

г)$H = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{1}{2}$

д)$H = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix} d = 2, R = \dfrac{1}{2}$

е)$H = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix} d = 2, R = \dfrac{1}{2}$

ж)$H = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{1}{3}$

з)$H = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{3}{7}$

и)$H = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix} d = 4, R = \dfrac{1}{3}$

к)$H = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{3}{7}$

Итерпритируем исходные матрицы как проверочные

а)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&1&1&0 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{1}{2}$

б)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1&1 \\ 0&0&1&1&1&0 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{1}{2}$

в)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{2}{3}$

г)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix} d = 2, R = \dfrac{1}{2}$

д)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix} d = 2, R = \dfrac{1}{2}$

е)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix} d = 2, R = \dfrac{1}{2}$

ж)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix} d = 2, R = \dfrac{2}{3}$

з)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} d = 2, R = \dfrac{4}{7}$

и)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix} d = 3, R = \dfrac{4}{7}$

к)$G = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix} d = 2, R = \dfrac{4}{7}$

Задача 2.11

Предложим код с $d = 5, k = 3, n = 10 < 5 \cdot 3 = 15$. Для этого будем порождать его из $g = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)$.

$$G = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}$$

Докажем, что его минимальное расстояние равно 5. Для этого переберём все ненулевые сообщения и найдём минимальный вес соответствующих кодовых слов:

- $m = (0\ 0\ 1) \Rightarrow mG = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow w = 5$
- $m = (0\ 1\ 0) \Rightarrow mG = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0) \Rightarrow w = 5$
- $m = (0\ 1\ 1) \Rightarrow mG = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1) \Rightarrow w = 6$
- $m = (1\ 0\ 0) \Rightarrow mG = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0) \Rightarrow w = 5$
- $m = (1\ 0\ 1) \Rightarrow mG = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1) \Rightarrow w = 6$
- $m = (1\ 1\ 0) \Rightarrow mG = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0) \Rightarrow w = 6$
- $m = (1\ 1\ 1) \Rightarrow mG = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \Rightarrow w = 7$

Как видно минимальный вес равен 5, а значит ему и равно минимальное расстояние между кодовыми словами.

Задача 2.12

а) $\mathbf{g = (1\ 1\ 0\ 1)}$

$$G = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{pmatrix} n = 10, R = \frac{2}{5}, d = 3$$

Лучший же $(10, 4)$-код, по данным codetables.de, имеет минимальное расстояние 4.

б) $\mathbf{g} = (\mathbf{1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1})$

$$G = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{pmatrix} n = 10, R = \frac{3}{10}, d = 4$$

Лучший же $(10, 3)$-код, по данным codetables.de, имеет минимальное расстояние 5.

в) $\mathbf{g} = (\mathbf{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1})$

$$G = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix} n = 10, R = \frac{3}{10}, d = 5$$

Минимального расстояние этого кода совпадает с таковым для лучшего $(10, 3)$-кода, по данным codetables.de.