

Домашнее задание

Лев Довжик, М3439

Вариант №62

Задача 2.1

1) $R = \frac{1}{6}$

В данном случае у нас всего 2^1 кодовых слова, так всего одно из них ненулевое, то вес второго будет определять d . Максимально возможный вектор $(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$ с весом 6.

Итого $G = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$

2) $R = \frac{2}{6}$

Здесь у нас 2^2 кодовых слова, три из которых ненулевые. Покажем порождающую матрицу, при которой $d = 4$: $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

При этом большего d быть и не может, т.к. линейная комбинация (ведь кодовые слова образуют линейное пространство) двух шестимерных векторов веса 5, может быть либо равна нулевому вектору, либо вектору веса 2, а значит d будет не более 2.

3) $R = \frac{3}{6}$

Представим проверочную матрицу кода, который будет иметь $d = 3$. В ней все столбцы попарно различны, но $(1) + (2) = (3)$.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что это максимальное расстояние в силу того, что для $d = 4$ нужно выбрать 6 двоичных векторов длины 3, так что бы как минимум любые три вектора были линейно независимы. Несложным перебором можно убедиться, что такое невозможно.

$$4) R = \frac{4}{6}$$

Т.к. невозможно найти 6 различных двоичных векторов длины 2 (столбцов проверочной матрицы), то максимальное $d = 2$ для такого кода. Представим же его проверочную матрицу:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) R = \frac{5}{6}$$

$H = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ и d так же равно 2. Больше же оно не может быть в силу границы Синглтона: $d \leq n - k + 1 = 2$

$$6) R = \frac{6}{6}$$

Множество кодовых в данном случае — это вообще все двоичные вектора длины 6. Минимальное расстояние в таком случае, очевидно, равно 1. Мы можем просто передавать исходное сообщение как есть ($G = I_6$).

Задача 2.3

Интерпритируем исходные матрицы как порождающие

$$\text{а) } H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{1}{2} \quad \text{б) } H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{1}{2}$$

$$\text{в) } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{1}{3} \quad \text{г) } H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{1}{2}$$

$$\text{д) } H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 2, R = \frac{1}{2} \quad \text{е) } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 2, R = \frac{1}{2}$$

$$\text{ж)}H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{1}{3}$$

$$\text{з)}H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{3}{7}$$

$$\text{и)}H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 4, R = \frac{1}{3}$$

$$\text{к)}H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{3}{7}$$

Интерпритируем исходные матрицы как проверочные

$$\text{а)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{1}{2}$$

$$\text{б)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{1}{2}$$

$$\text{в)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{2}{3}$$

$$\text{г)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 2, R = \frac{1}{2}$$

$$\text{д)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d = 2, R = \frac{1}{2}$$

$$\text{е)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} d = 2, R = \frac{1}{2}$$

$$\text{ж)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} d = 2, R = \frac{2}{3}$$

$$\text{з)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} d = 2, R = \frac{4}{7}$$

$$\text{и)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} d = 3, R = \frac{4}{7}$$

$$\text{к)}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} d = 2, R = \frac{4}{7}$$

Задача 2.11

Предложим код с $d = 5, k = 3, n = 10 < 5 \cdot 3 = 15$. Для этого будем порождать его из $g = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)$.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Докажем, что его минимальное расстояние равно 5. Для этого переберём все ненулевые сообщения и найдём минимальный вес соответствующих кодовых слов:

- $m = (0\ 0\ 1) \Rightarrow mG = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow w = 5$
- $m = (0\ 1\ 0) \Rightarrow mG = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0) \Rightarrow w = 5$
- $m = (0\ 1\ 1) \Rightarrow mG = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1) \Rightarrow w = 6$
- $m = (1\ 0\ 0) \Rightarrow mG = (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0) \Rightarrow w = 5$
- $m = (1\ 0\ 1) \Rightarrow mG = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1) \Rightarrow w = 6$
- $m = (1\ 1\ 0) \Rightarrow mG = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0) \Rightarrow w = 6$
- $m = (1\ 1\ 1) \Rightarrow mG = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \Rightarrow w = 7$

Как видно минимальный вес равен 5, а значит ему и равно минимальное расстояние между кодовыми словами.

Задача 2.12

а) $g = (1\ 1\ 0\ 1)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n = 10, R = \frac{2}{5}, d = 3$$

Лучший же $(10, 4)$ -код, по данным codetables.de, имеет минимальное расстояние 4.

б) $\mathbf{g} = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n = 10, R = \frac{3}{10}, d = 4$$

Лучший же $(10, 3)$ -код, по данным codetables.de, имеет минимальное расстояние 5.

в) $\mathbf{g} = (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad n = 10, R = \frac{3}{10}, d = 5$$

Минимального расстояние этого кода совпадает с таковым для лучшего $(10, 3)$ -кода, по данным codetables.de.