Домашнее задание №1

Лев Довжик, M3439

Вариант №62

Начальные условия

Проверочная матрица $H = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&1&0&0&1&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&0&1&1&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$

№1 Скорость кода

Матрица H имеет $n = 10$ столбцов и $r = n - k = 4$ строк, а значит $n = 10, k = 6, r = 4$, и скорость кода $R = \frac{k}{n} = \frac{3}{5} = 0.6\ \frac{bit}{symbol}$

№2 Минимальное расстояние кода

Заметим, что любые два столбца проверочной матрицы независимы (т.к. все столбцы различны). При этом первый, четвёртый и десятый столбец в сумме дают нулевой вектор: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Откуда по теореме 2.4 получаем, что минимальное расстояние $d = 3$.

№3 Расстрояние кода

TODO

№4 Порождающая матрица

Приведём проверочную матрицу к систематическому виду.

Исходная матрица: $\begin{pmatrix} 1&1&1&0&1&0&0&1&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&0&1&1&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$

Меняем 2 и 4 строки местами: $\begin{pmatrix} 1&1&1&0&1&0&0&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0&1&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$

Прибавим 2 строку к 1 и 3: $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$

Прибавим к 4 строке первые три: $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$

Переупорядочим стоки, приведя к систематическому виду: $\begin{pmatrix} 1&0&1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

Значит $P^T = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1&0&1&1 \\ 0&1&1&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$, а $G = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$

В конце проверяем, что $G \cdot P^T = O_{k \times n}$

```
import numpy as np

G = np.array([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1],
              [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0],
              [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0],
              [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0],
              [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1],
              [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1]])

H = np.array([[1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1],
              [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1],
              [1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0],
              [0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]])

H_t = H.transpose()
res = np.matmul(G, H_t) % 2
print(res)
# [[0 0 0 0]
#  [0 0 0 0]
#  [0 0 0 0]
#  [0 0 0 0]
#  [0 0 0 0]
```

```
#   [0  0  0  0]]
```

№5 Кодировка сообщения

Пусть $m = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$, тогда $c = m \cdot G = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}$.

То есть $c = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)$

№6 Информационная совокупность

Заметим, что при «систематизации» матрицы H мы нигде не перестовляли столбцы, значит нам не нужна перенумеровка стобцов в G. При этом первый $k = 6$ столбцов матрицы G образают единичную подматрицу, а следовательно линейно назависимы. Из всего вышесказанного получаем, что информационная совокупность равна $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

№11 Синдромное декодирование

Всего у нас существует $2^r = 2^4 = 16$ синдромов. Нулевому синдрому, очевидно, соотвествует нулевой вектор ошибок. А так же, в силу того что строки H^T различны, каждому вектору ошибок веса 1 будет соотвествовать свой уникальный синдром. Итого мы построили таблицу для 11 синдромов из 16:

$$H^T = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$$

s	e
0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1	?
0 0 1 0	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0 1	?
0 1 1 0	0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 1 1 1	?
1 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
1 0 0 1	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
1 0 1 0	?
1 0 1 1	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 1	?
1 1 1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0

Оставшиеся синдромы будут иметь соотвествующие им вектора ошибок веса хотя бы 2. Заметим, что синдром (0 0 0 1) получается складыванием 1 и 8 строк, (0 1 0 1) — 6 и 7, (0 1 1 1) — 5 и 8, (1 0 1 0) — 1 и 9, (1 0 1 1) — 8 и 9. Вес меньше двух они иметь не могут, а значит мы нашли минимальные вектора для данных синдромов. Итоговая таблица синдромного декодирования:

s	e
0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1	1 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0 1	0 0 0 0 0 1 1 0 0 0
0 1 1 0	0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 1 1 1	0 0 0 0 1 0 0 1 0 0
1 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
1 0 0 1	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
1 0 1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 1 0
1 0 1 1	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 1	0 0 0 0 0 0 0 1 1 0
1 1 1 0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0