TD 3 - Calcul Intégral

08 Novembre 2022

Exercice 1

Soit $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que f est bien définie pour tout $x \geq 0$ et qu'elle est continue.
2. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'(x)$.
4. On note $g(x) = f(x^2)$. Que valent $g(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$?
5. Montrer que :
$$g'(x) = Ke^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du\ ,$$
Où K est une constante que l'on identifiera.
6. Montrer que
$$\frac{d}{dx}\left\{\left(\int_0^x e^{-u^2}\,du\right)^2\right\} = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du.$$
7. En déduire que
$$g(x) + \left(\int_0^x e^{-u^2}\,du\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$
8. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. La transformée de fourier de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{F}(f)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{itx}\,dx.$$

A l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégral, calculer la transformée de fourier de

$$f\colon x \mapsto e^{-\alpha x^2},$$

pour $\alpha > 0$.

Exercice 3

Soit Γ la fonction de Gamma définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx, \quad t > 0.$$

1. Montrer que Γ est bien définie.
2. Montrer que Γ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n+1) = n!$.
4. Montrer que, pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t+1) = \sqrt{t} t^t e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t} y}\, dy.$$

.

5. Montrer que, pour tout $y \geq 0$, la fonction $t \mapsto t \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $y \in]-\sqrt{t}, 0[,\ t \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \leq -\dfrac{1}{2} y^2$.
6. En déduire la formule de Sterling généralisée :

$$\Gamma(t+1) \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t}.$$