EMINES - School of Industrial Management
Mohamed IV Polytechnic University

Année 2022/2023

Mécanique des milieux continus

Ahmed ROUABHI
Centre de Géosciences, MINES ParisTech
ahmed.rouabhi@mines-paristech.fr

Table des matières

Chapitre 0 : Introduction et présentation du cours **1**

Chapitre 1 : Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles **8**

Exercices du chapitre 1 55

Chapitre 2 : Cinématique du milieu continu **62**

Exercices du chapitre 2 80

Chapitre 3 : Lois de bilan **84**

Exercices du chapitre 3 107

Chapitre 4 : Lois de comportement **115**

Exercices du chapitre 4 124

Chapitre 5 : Thermoélasticité linéarisée **125**

Exercices du chapitre 5 135

Annexe - Opérateurs différentiels en coordonnées usuels **141**

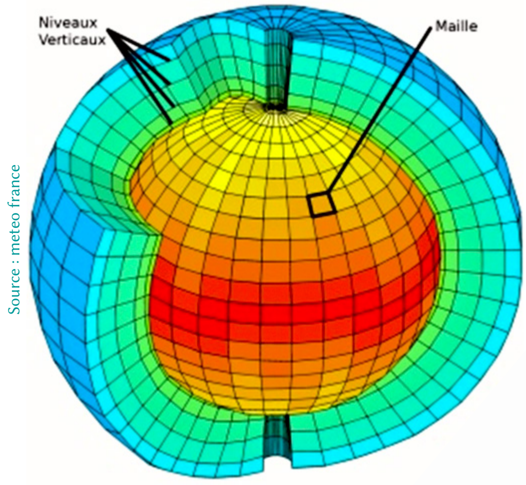
Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

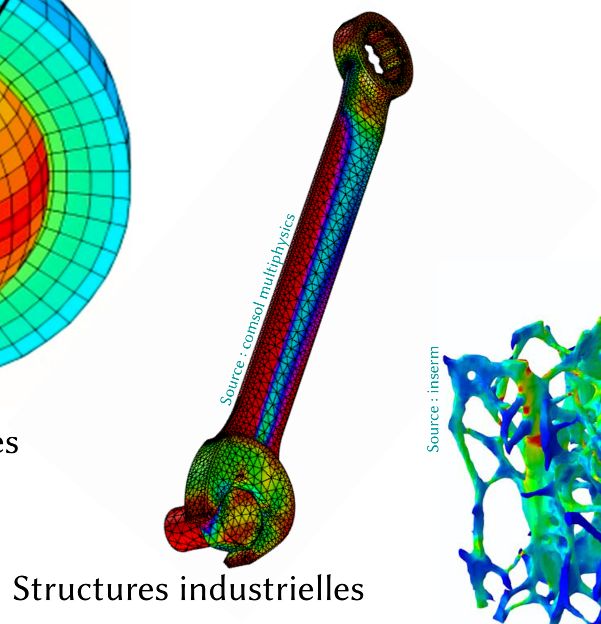
Plan du chapitre

1 La mécanique est partout 3
2 La mécanique des milieux continus 4
3 Hypothèse de la continuité du milieu 5
4 VER : l’exemple des géomatériaux 6
5 Évolution d’une structure 8
5.1 Système de références 9
5.2 Domaine 10
5.3 Grandeurs physiques 11
6 Objectifs du cours 12
7 Plan du cours 13
8 Organisation du cours 14

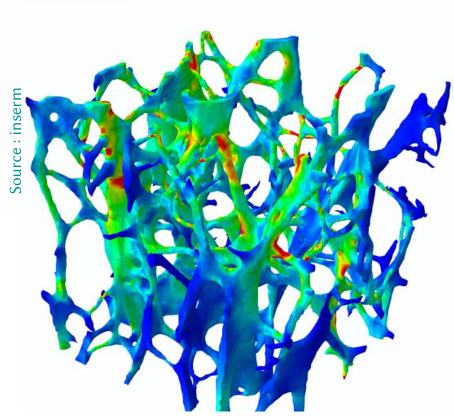
1. La mécanique est partout



Structures géologiques



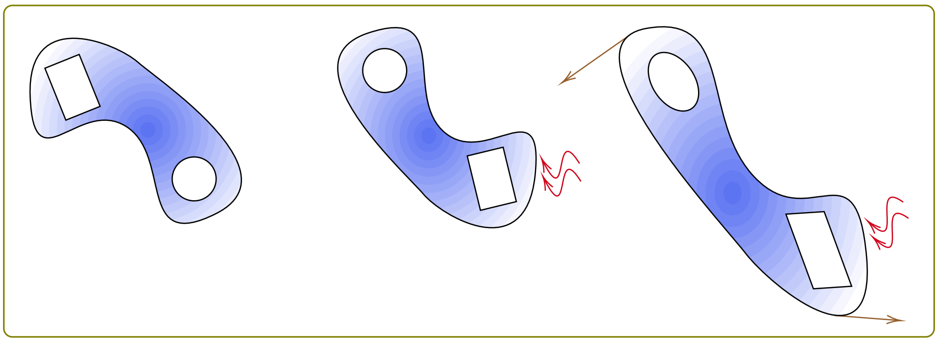
Structures industrielles



Structures osseuses

2. La mécanique des milieux continus

Approche de **modélisation** continue (dans l'espace et dans le temps) permettant d'étudier l'évolution d'une structure soumise à des sollicitations externes.



Qu'est-ce qu'une modélisation ?

Une représentation conceptuelle de la réalité dans un cadre qui permet le raisonnement. Cela exige :

- des hypothèses simplificatrices ;
- limitation aux phénomènes les plus prépondérants.

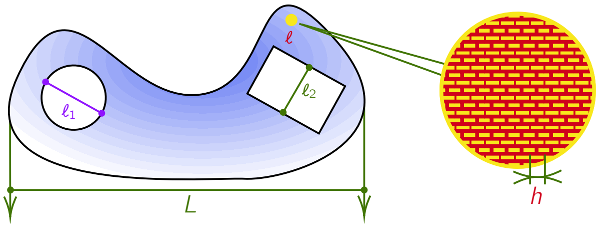
3. Hypothèse de la continuité du milieu

La MMC se place à une **échelle** dite **macroscopique**, qui évite toute hypothèse sur la constitution intime (souvent hétérogène et discontinue) du milieu.

Conséquences

- Prise en compte des phénomènes physiques qui s'opèrent uniquement à cette échelle.
- Existence d'une **longueur caractéristique** de sorte que deux parties quelconques du milieu, de tailles supérieures ou égales à cette longueur, se comportent, sous la même sollicitation, d'une manière identique.

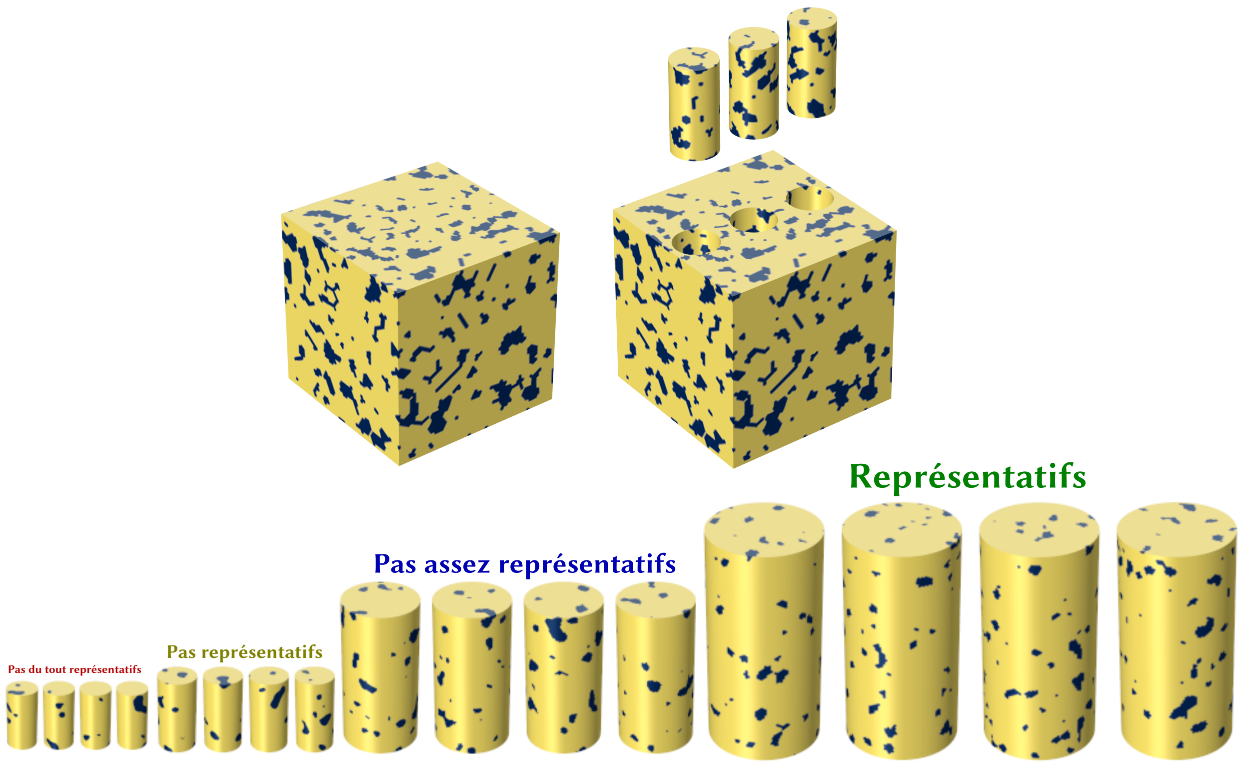
Longueur caractéristique



$h \ll \ell \ll \min(\ell_1,\ \ell_2,\ L)$, h : longueur caractéristique des hétérogénéités

ℓ est la taille du **Volume Élémentaire Représentatif (VER)**.

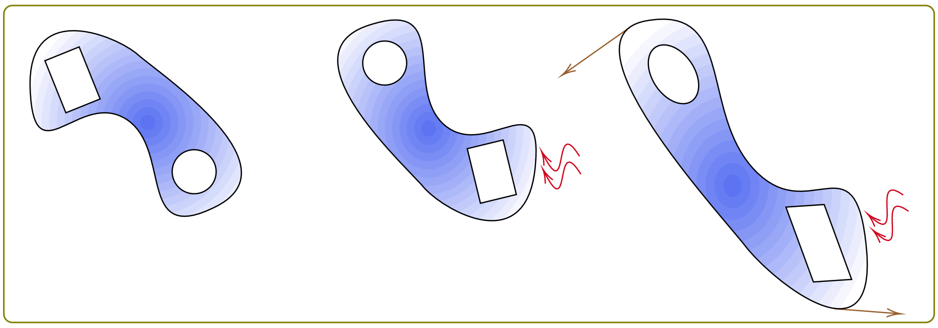
4. VER : l'exemple des géomatériaux



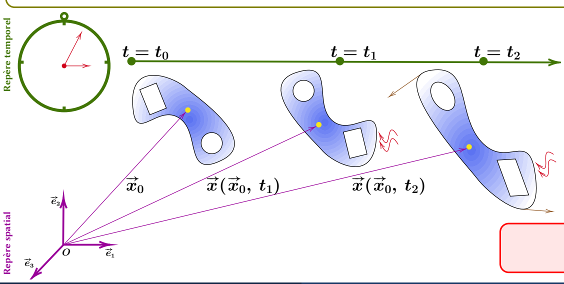
4. VER : l'exemple des géomatériaux

5. Évolution d'une structure

Approche de modélisation permettant d'étudier l'**évolution** d'une structure soumise à des sollicitations externes.



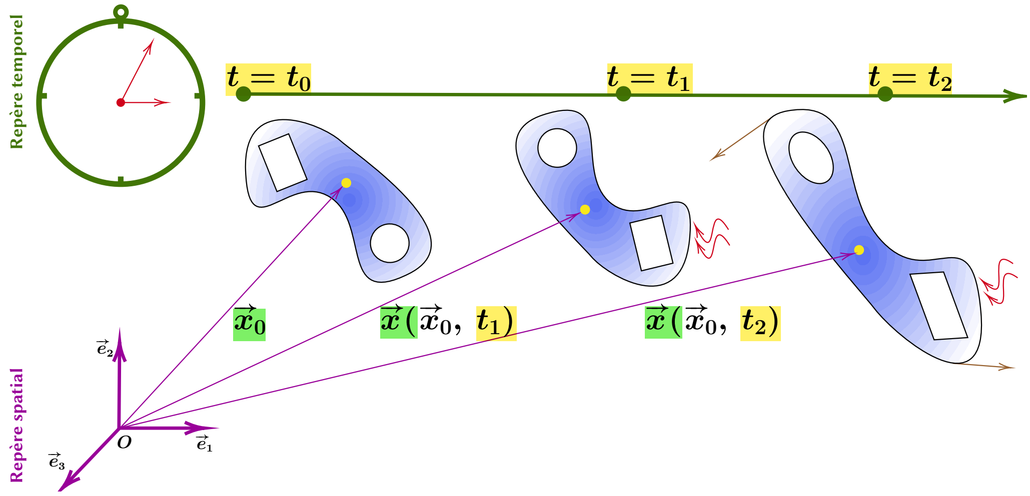
L'**évolution** ne peut être définie que par rapport à un **système de références** (référentiel), combinant un **repère spatial** et un **repère temporel**.



Temps et espace sont indépendants.

5. Évolution d'une structure

5.1. Système de références



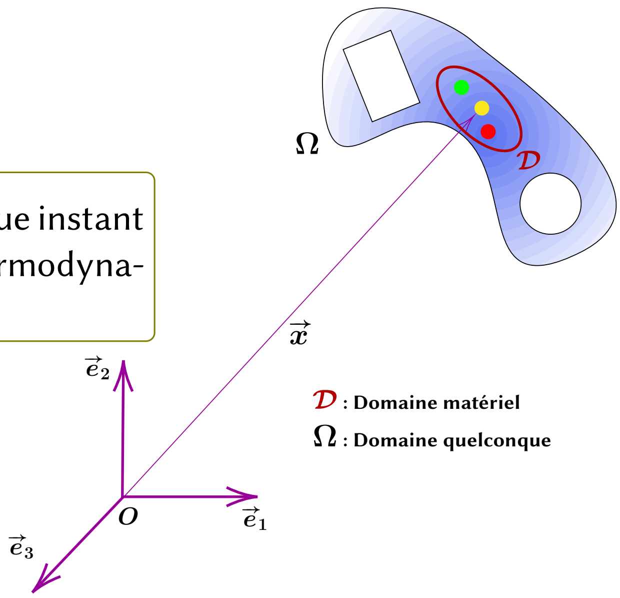
- Chaque **instant** est représenté par une variable réelle t.
- Chaque **point** de la structure occupe à l'instant t la position $\vec{x}$.
- Autour de chaque point $\vec{x}$ de l'espace, on définit un volume élémentaire représentatif (VER) de volume infinitésimal $\delta\mathcal{V}$.
- La matière contenue dans $\delta\mathcal{V}$ est appelée **point matériel** ou **particule**.

5. Évolution d'une structure

5.2. Domaine

Domaine matériel

$\mathcal{D}$: domaine matériel constitué à chaque instant par les mêmes particules (système thermodynamique fermé).



Domaine quelconque

Ω : domaine quelconque animé par un mouvement propre indépendamment du mouvement des particules.

5. Évolution d'une structure

5.3. Grandeurs physiques

Point matériel	**Domaine matériel**
Volume $\delta\mathcal{V}$	Volume $\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\mathcal{V}$
Masse $\delta\mathcal{M}$	Masse $\mathcal{M} = \int_{\mathcal{D}} \rho(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}$
Vitesse $\vec{v}(\vec{x},t)$	Quantité de mvt $\vec{\mathcal{Q}} = \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{v}\mathrm{d}\mathcal{V}$
Énergie interne massique $u(\vec{x},t)$	Énergie interne $\mathcal{U} = \int_{\mathcal{D}} \rho u(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}$
Entropie massique $s(\vec{x},t)$	Entropie $\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \rho s(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}\ldots$
Température $T(\vec{x},t)$	
Gradient thermique $\vec{\nabla}T(\vec{x},t)$	$\mathrm{d}\mathcal{V}$: élément de volume infinitésimal
Déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{x},t)$	
Contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x},t)$	

$\rho(\vec{x},t)$, $T(\vec{x},t)$, $u(\vec{x},t)$ et $s(\vec{x},t)$ sont des **champs de scalaires**. $\vec{v}(\vec{x},t)$ et $\vec{\nabla}T(\vec{x},t)$ sont des **champs de vecteurs**. $\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{x},t)$ et $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x},t)$ sont des **champs de tenseurs**.

6. Objectifs du cours

- Découvrir la base scientifique derrière l'**hypothèse du milieu continu déformable**.
- Introduire et traiter les lois et les notions fondamentales de la discipline.
- Préparer la base pour des sujets plus spécialisés comme :
  - la mécanique des matériaux solides (rupture, plasticité...) ;
  - la mécanique des fluides ;
  - le transfert thermique ;
  - les méthodes numériques en calculs des structures ;
  - ...

7. Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

(1) Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

(2) Cinématique du milieu continu

(3) Lois de bilan

(4) Lois de comportement

(5) Thermoélasticité linéarisée

8. Organisation du cours

Les exercices et les supports des présentations orales seront disponibles à l'adresse :
https://cloud.minesparis.psl.eu/index.php/s/aCihKtzJxhVNN5L/authenticate

Cours + TD :

08 septembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
14 septembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
21 septembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
28 septembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
05 octobre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
12 octobre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
19 octobre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
02 novembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
09 novembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
16 novembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**

Examen écrit : (01 décembre)

Note finale :
Note examen écrit +
Note restitution mini-projet +
Note assiduité et participation

Mini-projets (par groupe de 3-4 élèves) :
Lois de comportement des matériaux

Restitution des mini-projets : (02 décembre)
10 minutes pour chaque groupe (3-4 minutes par élève)

Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

(1) Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

(2) Cinématique du milieu continu

(3) Lois de bilan

(4) Lois de comportement

(5) Thermoélasticité linéarisée

Plan du chapitre

Partie I : Algèbre tensorielle

1 Vecteurs 6
1.1 Produit scalaire, norme euclidienne 8
1.2 Produit vectoriel 9
1.3 Produit mixte 11
1.4 Système de coordonnées 13
1.5 Bases vectorielles 14
1.6 Composantes dans une base 15
1.7 Bases orthonormées 18
1.8 Multiplication tensorielle 19
1.9 Produit tensoriel de deux vecteurs 22
1.10 Produit tensoriel de plusieurs vecteurs 25

2 Tenseurs 27
2.1 Tenseur d'ordre 1 28
2.2 Tenseur d'ordre p 29

3 Tenseurs d'ordre 2 31
3.1 Définition à retenir 32
3.2 Produit contracté de deux tenseurs 33
3.3 Produit doublement contracté de deux tenseurs 34
3.4 Base de l'espace produit tensoriel 35
3.5 Déterminant - trace 36
3.6 Inverse 38
3.7 Tenseur orthogonal 39

Plan du chapitre

3.8 Tenseur symétrique, tenseur antisymétrique 40
3.9 Vecteur axial associé à un tenseur antisymétrique 42
4 Tenseurs d'ordre 3 **43**
5 Tenseurs d'ordre 4 **46**
5.1 Définitions 46
5.2 Symétries 47
5.3 Produits tensoriels 48

Partie II : Analyse tensorielle

1 Objectif et notations **50**
2 Différentielle d'un tenseur **51**
3 Champs de tenseurs **53**
4 Différentielle du vecteur position d'un point **54**
4.1 Différentielle en coordonnées cartésiennes 56
4.2 Différentielle en coordonnées cylindriques 57
4.3 Différentielle en coordonnées sphériques 58
5 Opérateur nabla **59**
6 Gradient **60**
7 Divergence **61**
8 Laplacien **62**
9 Rotationnel **63**
10 Éléments différentiels pour les intégrales **64**
11 Théorème de la divergence (ou d'Ostrogradski) **65**

Plan du chapitre

12 Théorème de l'intégrale nulle **66**

Partie III : Compléments d'analyse et d'algèbre tensorielles

1 Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants **68**
1.1 Base principale 68
1.2 Bases sphérique-déviatorique 70
1.3 Dérivées partielles des invariants 75
2 Fonctions isotropes **77**
3 Théorèmes de représentation **78**
4 Tenseurs définis positifs **79**
5 Exponentielle d'un tenseur d'ordre 2 **81**
6 Décomposition polaire **82**
7 Tenseur orthogonal de rotation **83**
7.1 Représentation avec axe et angle 83
7.2 Représentation avec vecteur rotation 86
7.3 Représentation exponentielle 87
7.4 Valeurs propres 88
7.5 Rotation infinitésimale 89
8 Changement de base **90**
8.1 Transformation des composantes d'un vecteur 93
8.2 Transformation des composantes d'un tenseur 94

Partie I

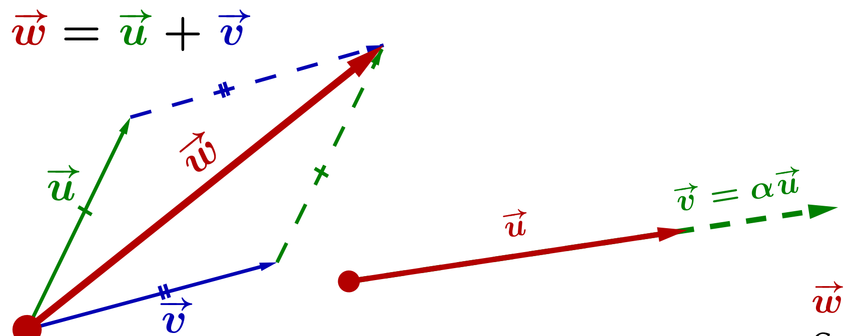
Algèbre tensorielle

1. Vecteurs

Un **vecteur** est un outil mathématique qui sert à représenter des objets de la géométrie (couple de points), de l'algèbre (un n-uplet de $\mathbb{R}^n$) ou de la physique (force, vitesse, accélération...). C'est un élément d'un ensemble d'objets que l'on peut :

- additionner entre eux ;
- multiplier par des nombres,

avec toutes les propriétés naturelles de cette addition et de cette multiplication (associativité, distributivité, élément neutre...)



Addition de vecteurs (règle du parallélogramme)

Multiplication par un scalaire

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Combinaison linéaire de vecteurs

1. Vecteurs

C'est un élément d'un **espace vectoriel** $\vec{\mathscr{E}}$, le triplet constitué d'un ensemble non vide d'éléments quelconques $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \ldots)$, d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $\times$.

Un espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$ est souvent associé à un **espace affine** ou **ponctuel** $\mathscr{E}$ constitué de points de sorte qu'à tout couple (A, B) de **points** de $\mathscr{E}$ on fasse correspondre un vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, de $\vec{\mathscr{E}}$ tel que :

(1) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

(2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (relation de chasles)

(3) $\forall O \in \mathscr{E}, \forall \vec{x} \in \vec{\mathscr{E}}, \exists! P \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{x}$

Notre espace physique ambiant est modélisé par un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $n = 3$ auquel on associe un espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$ (ou $\vec{\mathscr{E}}_n$).

1. Vecteurs

1.1. Produit scalaire, norme euclidienne

Produit scalaire : $\left\{ \cdot : \begin{array}{ccc} \vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{E}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u},\ \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u}\cdot\vec{v} \end{array} \right.$

telle que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in \vec{\mathscr{E}}^3$:

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0,\ \vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

$\vec{\mathscr{E}}$ muni de ce produit scalaire devient un **espace euclidien**.

Norme euclidienne induite par le produit scalaire : $\left\{ \| \ \| : \begin{array}{ccc} \vec{\mathscr{E}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \vec{u} & \longmapsto & \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \end{array} \right.$

telle que $\forall (\vec{u},\ \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$:

- $\|\vec{u}\cdot\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

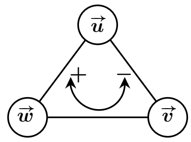
1. Vecteurs

1.2. Produit vectoriel

Pas d'extension immédiate à un espace de dimension quelconque.

$$\begin{cases} \wedge: & \vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{E}} \longrightarrow \vec{\mathscr{E}} \\ & (\vec{u},\ \vec{v}) \longmapsto \vec{u}\wedge\vec{v} \end{cases}$$

telle que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in \vec{\mathscr{E}}^3$:



- $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$
- $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v} = \alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) + \vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{u}) + \vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{0}$ (identité de Jacobi)

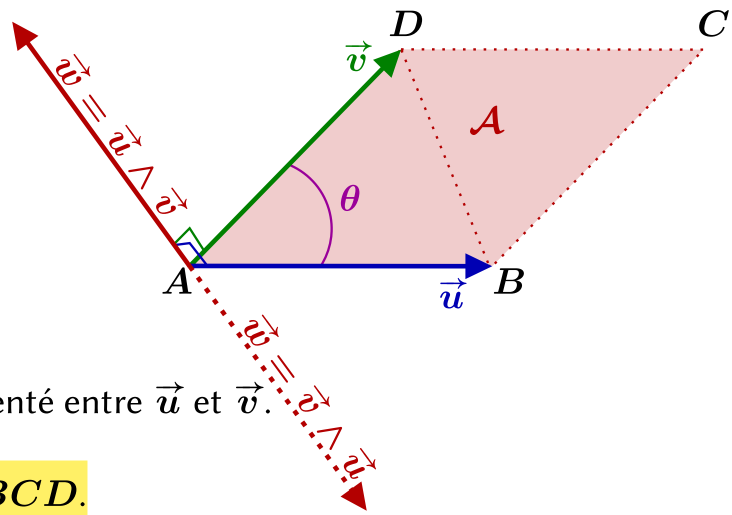
Dans une base orthonormée directe $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$, on utilise les déterminants d'ordre deux :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{, d'où : } \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} = (u_2v_3-u_3v_2)\vec{e}_1 - (u_1v_3-u_3v_1)\vec{e}_2 + (u_1v_2-u_2v_1)\vec{e}_3$$

1. Vecteurs

1.2. Produit vectoriel



$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\theta)|$$

$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$

$\theta = (\widehat{\vec{u},\ \vec{v}})$ est l'angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\mathcal{A}$: aire du parallélogramme $ABCD$.

$\frac{1}{2}\mathcal{A}$: aire du triangle ABD.

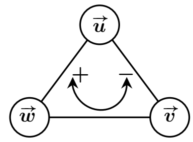
1.3. Produit mixte

Pas d'extension immédiate à un espace de dimension quelconque.

$$\begin{cases} [\,,\,,\,] : & \vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{E}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \longmapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \end{cases}$$

telle que $\forall (\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in \vec{\mathscr{E}}^3$:

- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$



Dans une base orthonormée directe $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

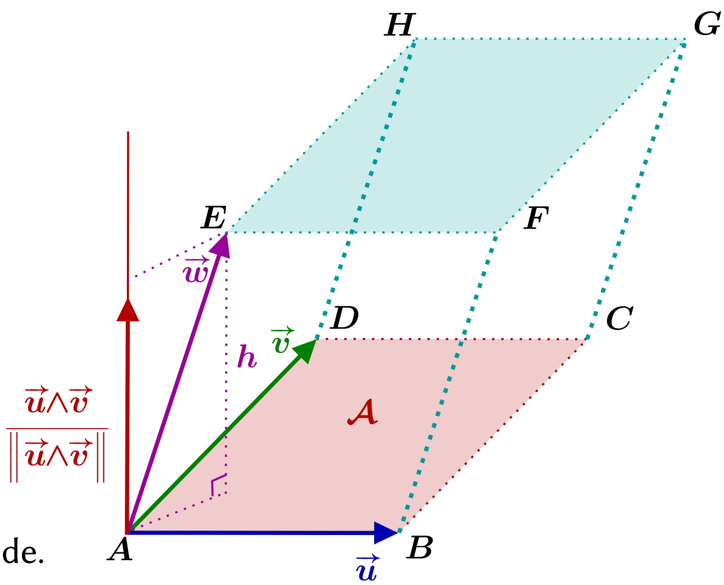
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

1.3. Produit mixte

$$\mathcal{A} = \left\| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\|$$

$$h = \vec{w} \cdot \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\left\| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\|}$$

$$\mathcal{V} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$



$\mathcal{A}$: aire de la base du parallélépipède.

h : hauteur du parallélépipède.

$\mathcal{V}$: volume du parallélépipède.

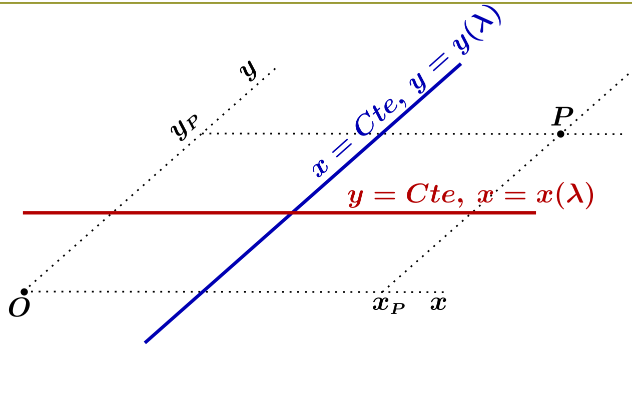
1. Vecteurs

1.4. Système de coordonnées

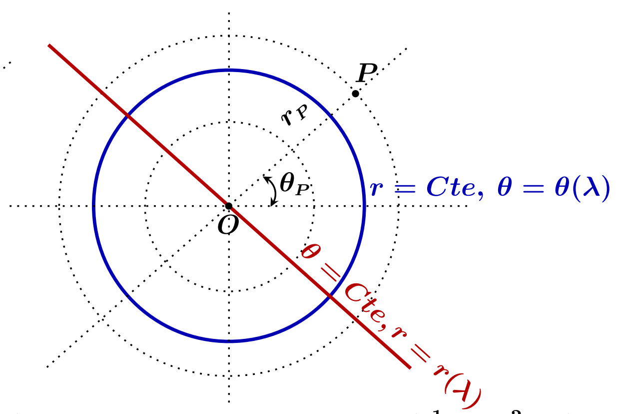
Un point de l'espace $\mathscr{E}$ est repéré par ses **coordonnées** dans un **système de coordonnées**.

Un système de coordonnées peut être **rectiligne (cartésien)** ou **curviligne**, et **orthogonal** ou non **orthogonal**.

Un système de coordonnées quelconque sera noté par $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ ou simplement ξ^i. On note par x^i un système de coordonnées cartésien.



Système de coordonnées rectilignes obliques ($x^1 = x, x^2 = y$)



Système de coordonnées polaires ($\xi^1 = r, \xi^2 = \theta$)

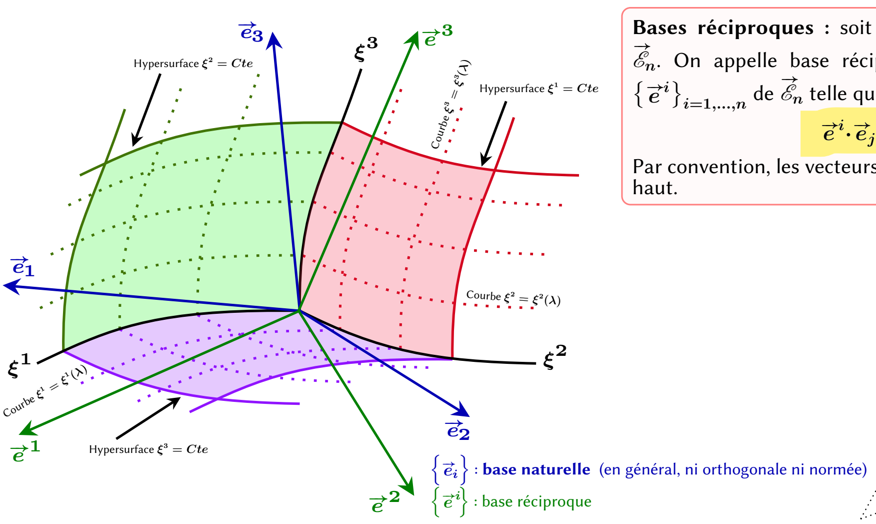
1. Vecteurs

1.5. Bases vectorielles

On peut associer à chaque système de coordonnées deux bases vectorielles :

- en formant les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées ;
- en formant les vecteurs perpendiculaires aux hypersurfaces de coordonnées.

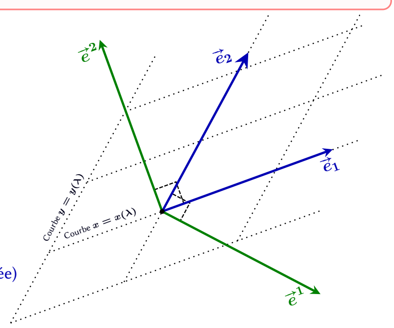
Ces deux bases sont dites **réciproques**. Par convention, c'est la deuxième qui est généralement qualifiée de "base réciproque".



Bases réciproques : soit $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ une base quelconque de $\vec{\mathscr{E}}_n$. On appelle base réciproque de $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ l'unique base $\{\vec{e}^i\}_{i=1,\ldots,n}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n$ telle que :

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Par convention, les vecteurs de la base réciproque ont leur indice en haut.

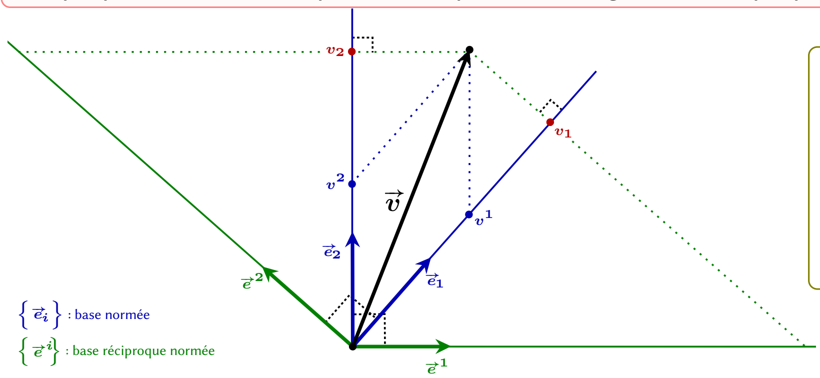


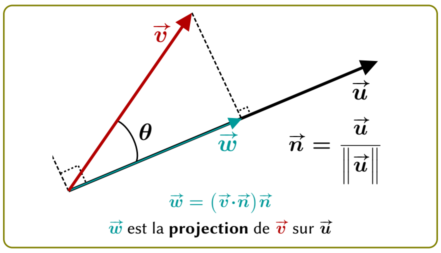
1.6. Composantes dans une base

On peut avoir les coordonnées d'un vecteur dans une base quelconque en le projetant de deux façons :

- parallèlement aux vecteurs de base : **composantes contravariantes** ;
- perpendiculairement aux vecteurs de base : **composantes covariantes**.

Composantes contravariantes et covariantes : soit $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\dots,n}$ une base quelconque de $\vec{\mathscr{E}}_n$. On appelle composantes contravariantes d'un vecteur $\vec{v}$ dans cette base, les n scalaires v^i tels que : $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i$. Si $\vec{\mathscr{E}}_n$ est muni d'un produit scalaire ($\vec{\mathscr{E}}$ est un espace euclidien), on appelle composantes covariantes du vecteur $\vec{v}$, les n scalaires $v_i = \vec{v}\cdot\vec{e}_i$ tels que : $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}^{\,i}$, où $\left\{\vec{e}^{\,i}\right\}_{i=1,\dots,n}$ est la base réciproque de $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\dots,n}$. De la définition $v_i = \vec{v}\cdot\vec{e}_i$, on remarque que si le vecteur de base est multiplié par un nombre, la composante correspondante sera également multiplié par ce nombre, d'où le sens de **co**variant.





1.6. Composantes dans une base

Convention de l'indice muet

Lorsqu'un indice apparaît deux fois dans la même expression, on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice (**convention de sommation d'Einstein**). Cet indice est dit **muet**.

Avec cette convention, le vecteur $\vec{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}^{\,i}$ s'écrit simplement :

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_j \vec{e}^{\,j}$$

Symbole de Kronecker

On introduit le symbole de Kronecker définit par :

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta^i_{\ j} = \delta_i^{\ j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Si les coefficients δ_{ij} sont rangés dans une matrice $n \times n$, on obtient la matrice unité.

1.6. Composantes dans une base

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^i \quad \text{avec} \quad \vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i_{\ j} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v^i = \vec{v} \cdot \vec{e}^i \\ v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i \end{cases}$$

Posons :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$$

$\vec{v} = v_j \vec{e}^j = \left(\vec{v} \cdot \vec{e}_j\right) \vec{e}^j$. Pour $\vec{v} = \vec{e}_i = \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right) \vec{e}^j$, il vient : $\vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j$.
$\vec{v} = v^j \vec{e}_j = \left(\vec{v} \cdot \vec{e}^j\right) \vec{e}_j$. Pour $\vec{v} = \vec{e}^i = \left(\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j\right) \vec{e}_j$, il vient : $\vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j$.

D'où : $\quad \vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j \ , \quad \vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j \quad \text{et} \quad g^{ik} g_{kj} = \delta^i_{\ j} \ , \quad g_{ik} g^{kj} = \delta_i^{\ j}$

Le passage des composantes contravariantes aux composantes covariantes ou inversement, se fait donc selon les relations suivantes :

$$v^i = g^{ij} v_j \ , \quad v_i = g_{ij} v^j$$

Remarques :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u^i v_i = u_i v^i = g_{ij} u^i v^j = g^{ij} u_i v_j$
- $\left\| \vec{v} \right\| = \sqrt{v_i v^i} = \sqrt{g_{ij} v^i v^j} = \sqrt{g^{ij} v_i v_j}$

1.7. Bases orthonormées

Une base $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\dots,n}$ est orthonormée ssi ses vecteurs sont normées et deux à deux orthogonaux :

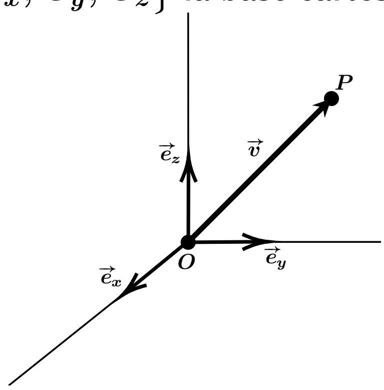
$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$$

Dans ce cas, les deux bases $\left\{\vec{e}_i\right\}$ et $\left\{\vec{e}^i\right\}$ sont confondues. De même pour les composantes contravariantes et covariantes des vecteurs.

Par la suite, et sauf contexte particulier, **nous nous limitons aux bases orthonormées** et on notera par $\vec{\mathcal{B}} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} = \left\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right\}$ la base cartésienne orthonormée de l'espace euclidien de dimension 3.

Repère

Le choix d'un point O de l'espace affine $\mathscr{E}$ comme origine et d'une base $\vec{\mathcal{B}}$ de $\vec{\mathscr{E}}$ constitue un repère $(O, \vec{\mathcal{B}})$.



1.8. Multiplication tensorielle

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_2$ dans la base $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2}$.

Construisons un nouveau vecteur $\vec{A}$ de la façon suivante : $\vec{A} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ u_2 v_1 \\ u_2 v_2 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\vec{A}$, un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_4$, n'est pas un vecteur quelconque de $\vec{\mathscr{E}}_4$: il est formé à partir du couple de vecteur $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}_2 \times \vec{\mathscr{E}}_2$.

Pour rappeler cette correspondance, on le note :

$$\vec{A} = \vec{u} \otimes \vec{v}$$

Le symbole $\otimes$ est utilisé pour définir la manière avec laquelle les quantités $u_i v_j$ ont été formées.

1. Vecteurs

1.8. Multiplication tensorielle

Il vient :

$$\begin{aligned} \vec{A} = \vec{u} \otimes \vec{v} &= (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) \otimes (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) \\ &= u_1 v_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + u_1 v_2 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \\ &\quad u_2 v_1 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + u_2 v_2 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \\ &= u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \end{aligned}$$

avec

$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ constitue une base de $\vec{\mathscr{E}}_4$. Si on numérote les quantités $u_i v_j$ selon la place qu'elles occupent dans l'expression de $\vec{u} \otimes \vec{v}$, on obtient :

$$\vec{A} = A_k \vec{E}_k, \text{ avec } \begin{cases} A_k = u_i v_j \\ \vec{E}_k = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \end{cases} \quad i, j = 1, 2 \; ; \; k = j + 2(i-1)$$

1. Vecteurs

1.8. Multiplication tensorielle

La loi de composition $\otimes$ fait correspondre à tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux espaces vectoriels $\vec{\mathscr{E}}_n$, $\vec{\mathscr{F}}_m$, de dimensions respectives n et m, un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_{nm}$ noté $\vec{u} \otimes \vec{v}$. Elle possède les propriétés suivantes :

- elle est associative par rapport à la multiplication par un réel :
  $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}_n \times \vec{\mathscr{F}}_m, \forall \alpha \in \mathbb{R}\,, \alpha(\vec{u} \otimes \vec{v}) = \alpha\vec{u} \otimes \vec{v} = \vec{u} \otimes \alpha\vec{v}$
- elle est distributive par rapport à l'addition des vecteurs :
  $\forall(\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathscr{E}}_n^{\,3}, \forall(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathscr{F}}_m^{\,3},$
  $\vec{u} \otimes (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \otimes \vec{v}_1 + \vec{u} \otimes \vec{v}_2$
  $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \otimes \vec{v} = \vec{u}_1 \otimes \vec{v} + \vec{u}_2 \otimes \vec{v}$
- elle n'est pas commutative : $\vec{u} \otimes \vec{v} \neq \vec{v} \otimes \vec{u}$
- si $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\ldots,n}$ et $\left\{\vec{f}_j\right\}_{j=1,\ldots,m}$ sont respectivement des bases de $\vec{\mathscr{E}}_n$ et $\vec{\mathscr{F}}_m$, les nm éléments $\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$ de $\vec{\mathscr{E}}_{nm}$ forment une base de $\vec{\mathscr{E}}_{nm}$.

Cette loi de composition est appelée **multiplication tensorielle**.

1. Vecteurs

1.9. Produit tensoriel de deux vecteurs

Soient $\vec{\mathscr{E}}_n$ et $\vec{\mathscr{F}}_m$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de dimensions respectives n et m. Au couple de vecteur $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}_n \times \vec{\mathscr{F}}_m$, on fait correspondre le vecteur $\vec{u} \otimes \vec{v}$ de l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}_{nm}$ tel que :

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$$

où les vecteurs $\vec{e}_i$ et $\vec{f}_j$ constituent respectivement des bases de $\vec{\mathscr{E}}_n$ et $\vec{\mathscr{F}}_m$.

- La dyade $\vec{u} \otimes \vec{v}$ est appelé **produit tensoriel** ou **produit dyadique** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- L'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}_{nm}$ est doté d'une structure plus précise que celle d'un simple espace vectoriel de dimension nm, il se distingue par le fait qu'il est muni d'une base formée par les produits tensoriels $\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$: on dit que $\vec{\mathscr{E}}_{nm}$ est doté d'une **structure de produit tensoriel**. Pour rappeler cette structure, on note cet espace sous la forme $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{F}}_m$, et on l'appelle **espace produit tensoriel des espaces vectoriels** $\vec{\mathscr{E}}_n$ et $\vec{\mathscr{F}}_m$.

1. Vecteurs

1.9. Produit tensoriel de deux vecteurs

Remarques

- Tous les éléments de l'espace $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{F}}_m$ ne sont pas des produits tensoriels de deux vecteurs. Pour $\vec{A} \in \vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{F}}_m$ tel que $\vec{A} = A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$, il n'est pas possible de toujours trouver un vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}_n$ et un vecteur $\vec{v} \in \vec{\mathscr{F}}_m$ tel que $A_{ij} = u_i v_j$: il y a $(n+m)$ inconnues u_i et v_j pour nm équations $A_{ij} = u_i v_j$.

- Tous les vecteurs de l'espace $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{F}}_m$ peuvent s'écrire sous la forme :
$$\vec{A} = A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j, \quad i = 1, n \;;\; j = 1, m$$
En introduisant les m vecteurs $\vec{u}_j \in \vec{\mathscr{E}}_n$ tels que $\vec{u}_j = A_{ij} \vec{e}_i$, il vient :
$$\vec{A} = \vec{u}_j \otimes \vec{f}_j$$
Par conséquent, tous les éléments de de l'espace $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{F}}_m$ peuvent s'écrire sous la forme d'une somme d'au plus m produits tensoriels.

1. Vecteurs

1.9. Produit tensoriel de deux vecteurs

Composante d'un vecteur de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{E}}_n$

Soit $\vec{A} = \vec{u} \otimes \vec{v}$ le produit tensoriel entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n$. Par définition, la composante A_{ij} dans la base $\left\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\right\}$ de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{E}}_n$ s'écrit :
$$A_{ij} = u_i v_j = \vec{A} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$$

Partant de cette définition, on obtient :
$$\begin{aligned} u_i v_j &= \vec{A} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \\ \delta_{ik} u_k \delta_{jl} v_l &= u_k v_l (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \end{aligned}$$
$$\Rightarrow (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \delta_{ik} \delta_{jl} = \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k\right)\left(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l\right)$$

Produit scalaire entre deux vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{E}}_n$

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{E}}_n$:
$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_{ij} B_{kl} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \\ &= A_{ij} B_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \\ &= A_{ij} B_{ij} \end{aligned}$$

1.10. Produit tensoriel de plusieurs vecteurs

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs appartenant respectivement aux espaces vectoriels $\vec{\mathscr{E}}_n$, $\vec{\mathscr{F}}_m$ et $\vec{\mathscr{G}}_\ell$ de bases respectives $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\ldots,n}$, $\left\{\vec{f}_j\right\}_{j=1,\ldots,m}$ et $\left\{\vec{g}_k\right\}_{k=1,\ldots,\ell}$.

- D'un côté, construisons le produit tensoriel entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis entre $\vec{u}\otimes\vec{v}$ et $\vec{w}$: cela donne un vecteur $\vec{x}$ de l'espace $\left(\vec{\mathscr{E}}_n\otimes\vec{\mathscr{F}}_m\right)\otimes\vec{\mathscr{G}}_\ell$ tel que :
$$\vec{x} = \left(\vec{u}\otimes\vec{v}\right)\otimes\vec{w} = u_i v_j w_k\left(\vec{e}_i\otimes\vec{f}_j\right)\otimes\vec{g}_k$$
- D'un autre côté, construisons le produit tensoriel entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$, puis entre $\vec{u}$ et $\vec{v}\otimes\vec{w}$: cela donne un vecteur $\vec{y}$ de l'espace $\vec{\mathscr{E}}_n\otimes\left(\vec{\mathscr{F}}_m\otimes\vec{\mathscr{G}}_\ell\right)$ tel que :
$$\vec{y} = \vec{u}\otimes\left(\vec{v}\otimes\vec{w}\right) = u_i v_j w_k \vec{e}_i\otimes\left(\vec{f}_j\otimes\vec{g}_k\right)$$

Pour avoir l'égalité $\vec{x} = \vec{y}$, il suffit d'assurer l'associativité du produit tensoriel des vecteurs de base, ce que nous imposons comme nouvelle propriété de la multiplication tensorielle : **la multiplication tensorielle des vecteurs de plusieurs espaces vectoriels est associative.**

1.10. Produit tensoriel de plusieurs vecteurs

Du fait de l'associativité du produit tensoriel, le produit tensoriel de p vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p$ appartenant à p espaces vectoriels $\vec{\mathscr{E}}_{n_1}, \vec{\mathscr{E}}_{n_2}, \ldots, \vec{\mathscr{E}}_{n_p}$ est le vecteur de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_{n_1}\otimes\vec{\mathscr{E}}_{n_2}\otimes\ldots\otimes\vec{\mathscr{E}}_{n_p}$ tel que :
$$\vec{u}_1\otimes\vec{u}_2\otimes\ldots\otimes\vec{u}_p = (u_1)_{i_1}(u_2)_{i_2}\cdots(u_p)_{i_p}\vec{e}_{i_1}\otimes\vec{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\vec{e}_{i_p}$$
avec $i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$; $i_2 = 1, 2, \ldots, n_2$; $\ldots$; $i_p = 1, 2, \ldots, n_p$

- Les vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_{n_1}\otimes\vec{\mathscr{E}}_{n_2}\otimes\ldots\otimes\vec{\mathscr{E}}_{n_p}$ sont appelés des **tenseurs d'ordre p** : une généralisation des notions de scalaires et de vecteurs.
- En pratique, les p vecteurs appartiennent généralement au même espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}_n$. Dans ce cas, on note $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)} = \underbrace{\vec{\mathscr{E}}_n\otimes\vec{\mathscr{E}}_n\otimes\ldots\otimes\vec{\mathscr{E}}_n}_{p\text{ fois}}$.
- Les vecteurs $\vec{e}_{i_1}\otimes\vec{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\vec{e}_{i_p}$ constituent une base de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$, dans laquelle un vecteur $\vec{A}$ se décompose sous la forme :
$$\vec{A} = A_{i_1 i_2\ldots i_p}\left(\vec{e}_{i_1}\otimes\vec{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\vec{e}_{i_p}\right)$$
Il y a $n_1 n_2\ldots n_p$ compostantes $A_{i_1 i_2\ldots i_p}$.

2. Tenseurs

On appelle **tenseur d'ordre p** sur $\vec{\mathscr{E}}_n$ toute forme p-linéaire de $\vec{\mathscr{E}}_n^{\,p}$ sur $\mathbb{R}$.
Par convention, **un scalaire est un tenseur d'ordre 0.**

Application linéaire

Soient $\vec{\mathscr{E}}_n$ et $\vec{\mathscr{F}}_m$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de dimensions respectives n et m, et soit $\vec{A}$ une application de $\vec{\mathscr{E}}_n$ dans $\vec{\mathscr{F}}_m$:

$$\begin{array}{rccl} \vec{A}: & \vec{\mathscr{E}}_n & \longrightarrow & \vec{\mathscr{F}}_m \\ & \vec{u} & \longmapsto & \vec{v} = \vec{A}(\vec{u}) \end{array}$$

L'application $\vec{A}$ est linéaire si : $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}_n^{\,2}$, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{A}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha\vec{A}(\vec{u}) + \beta\vec{A}(\vec{v})$. Soient $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\dots,n}$ et $\left\{\vec{f}_i\right\}_{i=1,\dots,m}$ des bases de $\vec{\mathscr{E}}_n$ et $\vec{\mathscr{F}}_m$ respectivement. Soit $\vec{u} = u_j\vec{e}_j \in \vec{\mathscr{E}}_n$, par linéarité on a : $\vec{A}(\vec{u}) = u_j\vec{A}(\vec{e}_j)$. Introduisons les composantes A_{ij} du vecteur $\vec{A}(\vec{e}_j) \in \vec{\mathscr{F}}_m$ par rapport à la base $\left\{\vec{f}_i\right\}_{i=1,\dots,m}$: $\vec{A}(\vec{e}_j) = A_{ij}\vec{f}_i$. On a alors $\vec{v} = \vec{A}(\vec{u}) = u_jA_{ij}\vec{f}_i$. Par conséquent, l'application linéaire $\vec{A}$ est représentée par la substitution linéaire :

$$v_i = A_{ij}u_j$$

Les coefficients A_{ij} constituent les composantes de la matrice représentative de l'application linéaire $\vec{A}$: c'est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $\vec{A}(\vec{e}_j)$ dans la base $\left\{\vec{f}_i\right\}_{i=1,\dots,m}$. C'est un élément de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

forme linéaire

Une forme linéaire a est une application linéaire qui à un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$ associe un nombre de $\mathbb{R}$, tel que :

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}_n^{\,2},\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ a(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha a(\vec{u}) + \beta a(\vec{v})$$

Forme multilinéaire

Une forme a est dite multilinéaire (ou $p-$linéaire) sur $\vec{\mathscr{E}}_n^{\,p}$ si elle est linéaire en chacune de ces variables, c'est-à-dire :

$$\forall(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p) \in \vec{\mathscr{E}}_n^{\,p}, \forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\vec{v}_k \in \vec{\mathscr{E}}_n$$
$$a(\vec{u}_1,\dots,\alpha\vec{u}_k+\beta\vec{v}_k,\dots,\vec{u}_p) = \alpha a(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k,\dots,\vec{u}_p) + \beta a(\vec{u}_1,\dots,\vec{v}_k,\dots,\vec{u}_p)$$

2. Tenseurs

2.1. Tenseur d'ordre 1

Suivant la définition générale, un tenseur d'ordre 1 est toute forme linéaire a de $\vec{\mathscr{E}}_n$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\vec{v} = v_i\vec{e}_i$ un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$, par linéarité on a :

$$a(\vec{v}) = a(v_i\vec{e}_i) = v_ia(\vec{e}_i) = \vec{v}\cdot\vec{e}_ia(\vec{e}_i)$$

Soit $\vec{a}$ le vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$ de composante $a_i = a(\vec{e}_i)$, il vient :

$$\forall\vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}_n,\quad a(\vec{v}) = \vec{a}\cdot\vec{v}$$

Sachant que :

- pour tout vecteur $\vec{a}$, on peut trouver une et une seule forme linéaire a vérifiant : $\forall\vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}_n,\ \vec{a}\cdot\vec{v} = a(\vec{v})$;
- pour toute forme linéaire a, il existe un et un seul vecteur $\vec{a}$ vérifiant : $\forall\vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}_n,\ a(\vec{v}) = \vec{a}\cdot\vec{v}$.

Cela conduit à confondre tenseur d'ordre 1 et vecteur : un tenseur a d'ordre 1 est remplacé par son vecteur représentatif $\vec{a}$, et un vecteur quelconque $\vec{a}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n$ est appelé tenseur d'ordre 1.

2. Tenseurs

2.2. Tenseur d'ordre p

Suivant la définition générale, un tenseur d'ordre p est toute forme p-linéaire a de $\vec{\mathscr{E}}_n^p$ sur $\mathbb{R}$. Soient $\vec{u}_i = (u_i)_j \vec{e}_j$, $i \in [\![1, p]\!]$, p vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n^p$, par linéarité on a :

$$\begin{aligned} a(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p) &= (u_1)_{i_1}(u_2)_{i_2} \cdots (u_p)_{i_p} a(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \cdots, \vec{e}_{i_p}) \\ &= (\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 \otimes \ldots \otimes \vec{u}_p) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_p}) A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \end{aligned}$$

avec $A_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \cdots, \vec{e}_{i_p})$.

Soit $\vec{A}$ le vecteur de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$ de composantes $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, il vient :

$$\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p) \in \vec{\mathscr{E}}_n^p, \quad a(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p) = \vec{A} \cdot (\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 \otimes \ldots \otimes \vec{u}_p)$$

On se retrouve avec la même définition qu'un tenseur d'ordre 1, sauf que cette fois-ci le produit scalaire est entre deux vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$.
Cela permet de confondre donc tenseur d'ordre p et vecteur de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$: un tenseur a d'ordre p est remplacé par son vecteur $\vec{A}$, et un vecteur quelques $\vec{A}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$ est appelé tenseur d'ordre p.

2. Tenseurs

Contraction des indices entre deux tenseurs

La contraction des indices entre deux tenseurs est une opération qui consiste, après avoir choisi deux indices, à les égaliser et à sommer par rapport à cet indice deux fois répété.

Exemples

- $u_i v_i = \vec{u} \cdot \vec{v}$: contraction simple
  Produit scalaire entre deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n$.
- $A_{ij} B_{ij} = \vec{A} \cdot \vec{B}$: contraction double
  Produit scalaire entre deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n^{(2)}$.

Changement des notations

Pour éviter toute confusion entre les vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n$ et ceux de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$, dans ce cours et sauf indication contraire, les tenseurs d'ordre $p \geq 2$ seront désignés par une lettre soulignée par autant de barre que l'ordre du tenseur.

Exemples : $\underline{\underline{A}}$: pour un tenseur d'ordre 2, $\underline{\underline{\underline{A}}}$: pour un tenseur d'ordre 3, etc.

3. Tenseurs d'ordre 2

Suivant la définition générale, un tenseur d'ordre 2 est toute forme bilinéaire $\boldsymbol{a}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n^2$ sur $\mathbb{R}$. Soient $\vec{u} = u_i \vec{e}_i$ et $\vec{v} = v_j \vec{e}_j$ deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n$, par linéarité on a :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = u_i v_j a(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = u_i v_j A_{ij} = u_i A_{ij} v_j = \vec{u} \cdot \underline{\underline{A}} \vec{v}$$

où nous avons associer à $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w} = \underline{\underline{A}} \vec{v}$ tel que :

$$w_i = A_{ij} v_j$$

Le vecteur $\vec{w}$ est le résultat d'une **contraction simple**. Nous dirons que $\vec{w}$ est le **produit contracté** entre le tenseur $\underline{\underline{A}}$ et le vecteur $\vec{v}$.

Nous pouvons également écrire $\vec{w} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$, mais dans ce cours, nous gardons la notation sans le point, $\vec{w} = \underline{\underline{A}} \vec{v}$, car un tenseur d'ordre 2 peut être aussi considéré comme une **application (opérateur) linéaire**. En effet, partant de l'égalité $a(\vec{u}, \vec{v}) = u_i A_{ij} v_j$, il vient : $a(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \underline{\underline{A}} \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{v})$, où $\vec{A}(\vec{v}) = \underline{\underline{A}} \vec{v}$ est l'application linéaire qui a pour matrice représentative la matrice de composantes A_{ij} dans la base $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\dots,n}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n$.

Nous pouvons donc associer à un tenseur d'ordre 2 l'application linéaire qui transforme tout vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$ en un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$ (endomorphisme).

3. Tenseurs d'ordre 2

3.1. Définition à retenir

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 est une application linéaire de $\vec{\mathscr{E}}$ dans $\vec{\mathscr{E}}$:

$$\underline{\underline{A}} : \begin{array}{rcl} \vec{\mathscr{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathscr{E}} \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{v} = \underline{\underline{A}} \vec{u} \end{array}$$

telle que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \left(\vec{u},\ \vec{v}\right) \in \vec{\mathscr{E}}^2$:

- $\left(\alpha \underline{\underline{A}}\right) \vec{v} = \alpha \left(\underline{\underline{A}} \vec{v}\right)$
- $\vec{v} \cdot \underline{\underline{A}} \vec{u} = \vec{u} \cdot \underline{\underline{A}}^T \vec{v}$, $\underline{\underline{A}}^T$ désigne le tenseur transposé de $\underline{\underline{A}}$

- $\vec{v} \cdot \underline{\underline{A}} \vec{u} = v_i A_{ij} u_j = u_j A^T_{ji} v_i = \vec{u} \cdot \underline{\underline{A}}^T \vec{v}$, $A_{ij} = A^T_{ji}$.
- Tenseur nul $\underline{\underline{0}}$: $\forall \vec{x}, \underline{\underline{0}} \vec{x} = \vec{0}$.
- Tenseur identité $\underline{\underline{1}}$: $\forall \vec{x}, \underline{\underline{1}} \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow 1_{ij} x_j = x_i \Rightarrow 1_{ij} = \delta_{ij}$.
- Produit tensoriel de deux vecteurs : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$, $\underline{\underline{A}} = \vec{u} \otimes \vec{v}$ est le tenseur d'ordre 2 tel que $\forall \vec{x} \in \vec{\mathscr{E}}$, $\underline{\underline{A}} \vec{x} = \left(\vec{u} \otimes \vec{v}\right) \vec{x} = \left(\vec{v} \cdot \vec{x}\right) \vec{u}$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.2. Produit contracté de deux tenseurs

La composition de deux tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$, appelée produit contracté de $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$, est définie par :

$$\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)\vec{v} = \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\vec{v}\right), \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}$$

Les composantes du tenseur $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, relatives à une base de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$, sont :

$$C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$$

- $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$
- $\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}\right) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$
- $\underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right) = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{C}}$
- $\underline{\underline{A}}^k = \underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}\cdots\underline{\underline{A}}}_{k \text{ fois}}, \ \forall k \in \mathbb{N}$, par convention $\underline{\underline{A}}^0 = \underline{\underline{1}}$
- Si $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$, $\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underline{\underline{A}}^{n-k}\underline{\underline{B}}^k$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3.3. Produit doublement contracté de deux tenseurs

Le produit doublement contracté entre deux tenseurs du second ordre $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$, de composantes respectives A_{ij} et B_{ij} relatives à une base de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$, est défini par :

$$\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}:\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T:\underline{\underline{B}}^T = A_{ij}B_{ij}$$

Il y a contraction double (deux indices répétés) entre $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$.

Remarque : dans la littérature, il y a aussi la définition : $\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = A_{ij}B_{ji}$, mais seule la première définition sera utilisée dans ce cours, car elle correspond au produit scalaire entre les vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$.

Norme euclidienne

La norme euclidienne induite par le produit doublement contracté est définie par :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \ & \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ & \underline{\underline{A}} \longmapsto \|\underline{\underline{A}}\| = \|\underline{\underline{A}}^T\| = \sqrt{\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{A}}} = \sqrt{A_{11}^2 + \cdots + A_{33}^2} \end{aligned}$$

telle que $\forall\left(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\right) \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \times \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$:

- $\|\underline{\underline{A}}\vec{v}\| \leq \|\underline{\underline{A}}\|\|\vec{v}\|, \forall \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}$
- $\|\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}}\| \leq \|\underline{\underline{A}}\|\|\underline{\underline{B}}\|$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.4. Base de l'espace produit tensoriel

Dans la suite on notera par $\underline{\underline{\mathcal{B}}} = \{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\}_{i,j=1,2,3}$ la base orthonormée de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$. Les 9 dyades $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ vérifient :

$$(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) : (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

Dans $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$, un tenseur $\underline{\underline{A}}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{A}} = A_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + A_{12}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \cdots + A_{33}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 = A_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

La composante A_{ij} s'obtient par projection de $\underline{\underline{A}}$ sur $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$:

$$A_{ij} = \underline{\underline{A}} : \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{A}}\,\vec{e}_j$$

On note par $[\underline{\underline{A}}]$ la matrice 3×3 formée par les composantes de $\underline{\underline{A}}$ dans $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$.

$$[\underline{\underline{A}}]_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}_{\{\vec{e}_i\}} = A_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + A_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + A_{33}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le tenseur $\underline{\underline{A}}$ peut être exprimé dans plusieurs bases. Toutefois, toutes les matrices associées à $\underline{\underline{A}}$ doivent avoir les mêmes **invariants**.

3. Tenseurs d'ordre 2

3.5. Déterminant - trace

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathscr{E}}^3$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \det \underline{\underline{A}} = [\underline{\underline{A}}\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = [\underline{\underline{A}}\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}]$$

tels que $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \times \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$:

- $\det \underline{\underline{1}} = 1$
- $\det \underline{\underline{A}}^T = \det \underline{\underline{A}}$
- $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$
- $\det(\alpha\underline{\underline{A}}) = \alpha^3 \det \underline{\underline{A}}$

- $\mathrm{tr}\underline{\underline{1}} = 3$
- $\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^T = \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$
- $\mathrm{tr}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \mathrm{tr}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})$
- $\mathrm{tr}(\alpha\underline{\underline{A}}) = \alpha\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.5. Déterminant - trace

Sachant que :

$$\text{tr}\left(\vec{u}\otimes\vec{v}\right) = \left[(\vec{u}\otimes\vec{v})\,\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\vec{e}_3\right]+\left[\vec{e}_1,\,(\vec{u}\otimes\vec{v})\,\vec{e}_2,\,\vec{e}_3\right]+\left[\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,(\vec{u}\otimes\vec{v})\,\vec{e}_3\right]$$

Il vient :

$$\text{tr}\left(\vec{u}\otimes\vec{v}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v},\ \ \forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{\mathscr{E}}^2$$

Par conséquent :

$$\text{tr}\underline{\underline{A}} = \text{tr}\left(A_{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\right) = A_{ij}\text{tr}\left(\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\right) = A_{ij}\delta_{ij} = \underline{\underline{A}}:\underline{\underline{1}} = A_{ii}$$

Ce qui permet de redéfinir le produit doublement contracté sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = \text{tr}\left(\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{B}}\right) = \text{tr}\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^T\right)$$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.6. Inverse

On note $\underline{\underline{A}}^{-1}$ le tenseur inverse du tenseur $\underline{\underline{A}}$, défini par :

$$\text{Si}\ \det\underline{\underline{A}}\neq 0,\ \exists\,\underline{\underline{A}}^{-1}/\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$$

- $\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^{-1} = \underline{\underline{A}}$
- $\left(\alpha\underline{\underline{A}}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\underline{\underline{A}}^{-1}$
- $\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$
- $\det\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det\underline{\underline{A}}}$
- $\underline{\underline{A}}^{-T} := \left(\underline{\underline{A}}^{T}\right)^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^{T}$

3.7. Tenseur orthogonal

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 est orthogonal si :

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$$

tel que $\forall\big(\underline{\underline{A}},\ \underline{\underline{B}}\big) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)} \times \overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)}$ orthogonaux, $\forall\big(\vec{u}, \vec{v}\big) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^{2}$:

- $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T$
- $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ est aussi orthogonal
- $\underline{\underline{A}}\vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{v} = \vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\underline{\underline{A}}\vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{u} = \left\|\underline{\underline{A}}\vec{u}\right\|^2 = \vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$
- $\det \underline{\underline{A}} = \pm 1$
- si $\det \underline{\underline{A}} = 1$, $\underline{\underline{A}}$ est une rotation

3.8. Tenseur symétrique, tenseur antisymétrique

Tout tenseur $\underline{\underline{A}}$ se décompose de façon unique en la somme d'un tenseur symétrique $\underline{\underline{A}}^S$ et d'un tenseur antisymétrique $\underline{\underline{A}}^A$:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^S + \underline{\underline{A}}^A$$

$$\underline{\underline{A}}^S = \big(\underline{\underline{A}}^S\big)^T := \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T\big),\ \ \underline{\underline{A}}^A = -\big(\underline{\underline{A}}^A\big)^T := \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T\big)$$

- $\underline{\underline{A}}$ symétrique $\Leftrightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T \Rightarrow \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{u} = \vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{v},\ \ \forall\big(\vec{u}, \vec{v}\big) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^{2}$
- $\underline{\underline{A}}$ antisymétrique $\Leftrightarrow \underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T \Rightarrow \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{u} = -\vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{v},\ \ \forall\big(\vec{u}, \vec{v}\big) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^{2}$
- Pour un tenseur symétrique $\underline{\underline{A}}$ et un tenseur antisymétrique $\underline{\underline{B}}$, nous avons :

$$\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = 0$$

En effet, $\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = A_{ij}B_{ij} = -A_{ji}B_{ji} = -\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}}$ car $A_{ij} = A_{ji}$ et $B_{ij} = -B_{ji}$.

3. Tenseurs d'ordre 2

3.8. Tenseur symétrique, tenseur antisymétrique

- $\underline{\underline{A}}$ symétrique $\Leftrightarrow$ le nombre de composantes indépendantes est de **6** au lieu de **9** :

$$A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{A}}\,\vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot \underline{\underline{A}}\,\vec{e}_i = A_{ji}$$

Dans la base $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$:

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- $\underline{\underline{A}}$ antisymétrique $\Leftrightarrow$ le nombre de composantes indépendantes est de **3** au lieu de **9** :

$$A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{A}}\,\vec{e}_j = -\vec{e}_j \cdot \underline{\underline{A}}\,\vec{e}_i \Rightarrow A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ A_{ij} = -A_{ji} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Dans la base $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$:

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.9. Vecteur axial associé à un tenseur antisymétrique

Un tenseur antisymétrique $\underline{\underline{A}}$ peut être représenté par un vecteur $\vec{A}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\underline{\underline{A}}\,\vec{v} = \vec{A} \wedge \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}$$

Le vecteur $\vec{A}$ est le **vecteur axial** associé à $\underline{\underline{A}}$. Dans les bases $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$:

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12}v_2 + A_{13}v_3 \\ -A_{12}v_1 + A_{23}v_3 \\ -A_{13}v_1 - A_{23}v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{23} \\ A_{13} \\ -A_{12} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} -A_{23} \\ A_{13} \\ -A_{12} \end{pmatrix}$$

Remarque : la i-ème composante de $\vec{A}$ s'exprime sous la forme : $(-1)^i A_{jk}$, $i \neq j \neq k$

4. Tenseurs d'ordre 3

Les tenseurs d'ordre 3 en MMC sont rares. L'exemple type de ces tenseurs est le "pseudo-tenseur" $\underline{\underline{\underline{\eta}}}$, dit d'orientation, de permutation ou encore de Levi-Civita, qui permet de définir le produit vectoriel à partir du produit doublement contracté et du produit tensoriel :

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2,\ \ \vec{u}\wedge\vec{v} = \underline{\underline{\underline{\eta}}}:(\vec{u}\otimes\vec{v})$$

Dans les base $\vec{\mathcal{B}}$:

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})_i = \eta_{ijk}u_j v_k$$

En particulier, pour $\vec{u} = \vec{e}_j$, $\vec{v} = \vec{e}_k$, on a :

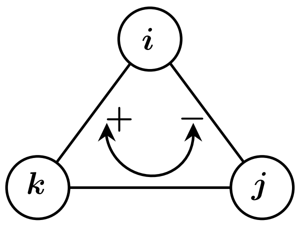
$$\vec{e}_j\wedge\vec{e}_k = \eta_{ijk}\vec{e}_i \Rightarrow \left[\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\right] = \eta_{ijk}$$

4. Tenseurs d'ordre 3

Dans la base $\left\{\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\right\}_{i,j,k=1,2,3}$, les composantes de $\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ sont données par :

$$\eta_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,\ j,\ k) \in \left\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2))\right\} \\ -1 & \text{si } (i,\ j,\ k) \in \left\{(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\right\} \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$



On peut vérifier que :

$$\eta_{ijk} = \eta_{jki} = \eta_{kij},\ \ \eta_{ijk} = -\eta_{ikj} = -\eta_{jik} = -\eta_{kji}$$

et que :

$$\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\underline{\eta}}} = \eta_{ipq}\eta_{pqj} = 2\delta_{ij} = 2\,\underline{\underline{1}}$$

4. Tenseurs d'ordre 3

Pour un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 antisymétrique, on a :

$$\underline{\underline{A}}\vec{v} = \vec{A}\wedge\vec{v} = \underline{\underline{\underline{\eta}}}:(\vec{A}\otimes\vec{v}),\ \left(\vec{A}\wedge\vec{v}\right)_i = \eta_{ijk}A_j v_k = -\eta_{ikj}A_j v_k$$

$$\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{\underline{\eta}}}\vec{A}$$

Sachant que $\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\underline{\eta}}} = 2\,\underline{\underline{1}}$, on obtient :

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{A}}$$

Pour un tenseur $\underline{\underline{S}}$ d'ordre 2 symétrique, on a :

$$\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{S}} = \vec{0}$$

En effet, $(\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{S}})_i = \eta_{ijk}S_{jk} = -\eta_{ikj}S_{kj} = -(\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{S}})_i \Rightarrow (\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{S}})_i = 0$

5. Tenseurs d'ordre 4

5.1. Définitions

Un tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} \equiv \underset{\sim}{H}$ d'ordre 4 est une application linéaire de $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$ dans $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{H} :\ \vec{\mathscr{E}}^{(2)} &\longrightarrow \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \\ \underline{\underline{A}} &\longmapsto \underline{\underline{B}} = \underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{A}} \end{aligned}$$

- Dans la base $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$: $B_{ij} = H_{ijkl}A_{kl}$.
- La composition de deux tenseurs d'ordre 4 est encore un tenseur d'ordre 4 : $\underset{\sim}{G}\left(\underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{A}}\right) = \left(\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{H}\right)\underline{\underline{A}},\ \forall\underline{\underline{A}} \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$.
  Dans la base $\left\{\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l\right\}_{i,j,k,l=1,2,3}$: $\left(\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{H}\right)_{ijkl} = G_{ijpq}H_{pqkl}$.
- Le tenseur transposé $\underset{\sim}{H}^T$ est défini par :
  $\underline{\underline{A}}:\underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}:\underset{\sim}{H}^T\underline{\underline{A}},\ \forall\left(\underline{\underline{A}},\ \underline{\underline{B}}\right) \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \times \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$.
- Le produit scalaire peut être défini par : $\underset{\sim}{H}\,\vdots\,\underset{\sim}{G} := H_{ijkl}G_{ijkl}$.

5. Tenseurs d'ordre 4

5.2. Symétries

On distingue deux symétries : **majeure** et **mineure**.

$\underset{\sim}{H}$ est dit à symétrie majeure si :

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}^T$$

En termes de composantes, $H_{ijkl} = H_{klij}$. Il y a $\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$ composantes indépendantes, soit 45 pour $n = 3$.

$\underset{\sim}{H}$ est dit à symétrie mineure si :

$$\underline{\underline{A}}:\underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^T:\underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}:\underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{B}}^T, \forall(\underline{\underline{A}},\underline{\underline{B}}) \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \times \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$$

En termes de composantes, $H_{ijkl} = H_{jikl} = H_{jilk}$. Il y a $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ composantes indépendantes, soit 36 pour $n = 3$.

- Si $\underset{\sim}{H}$ ne possède aucune symétrie, il a n^4 composantes indépendantes, soit 81 pour $n = 3$.
- Si $\underset{\sim}{H}$ possède les deux symétries mineure et majeure, il a $\dfrac{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)}{8}$ composantes indépendantes, soit 21 pour $n = 3$.

5. Tenseurs d'ordre 4

5.3. Produits tensoriels

Pour construire un tenseur $\underset{\sim}{H}$ d'ordre 4 à partir de deux tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ d'ordre 2, on peut définir les produits tensoriels suivants :

1. $\underset{\sim}{H}=\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{B}}$, $H_{ijkl}=A_{ik}B_{jl}$, $(\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{B}})\underline{\underline{X}}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{B}}^T$ $\qquad \forall\underline{\underline{X}} \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$
2. $\underset{\sim}{H}=\underline{\underline{A}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{B}}$, $H_{ijkl}=A_{il}B_{jk}$, $(\underline{\underline{A}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{X}}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}^T\underline{\underline{B}}^T$
3. $\underset{\sim}{H}=\underline{\underline{A}}\,\overline{\underline{\otimes}}\,\underline{\underline{B}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{B}})$, $(\underline{\underline{A}}\,\overline{\underline{\otimes}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{X}}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}^S\underline{\underline{B}}^T$
4. $\underset{\sim}{H}=\underline{\underline{A}}\,\overline{\ominus}\,\underline{\underline{B}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{A}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{B}})$, $(\underline{\underline{A}}\,\overline{\ominus}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{X}}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}^A\underline{\underline{B}}^T$
5. $\underset{\sim}{H}=\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{B}}$, $H_{ijkl}=A_{ij}B_{kl}$, $(\underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{B}})\underline{\underline{X}}=(\underline{\underline{X}}:\underline{\underline{B}})\underline{\underline{A}}$

En particulier pour $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{1}}$, on obtient :

- $(\underline{\underline{1}}\otimes\underline{\underline{1}})\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}$
- $(\underline{\underline{1}}\,\overline{\underline{\otimes}}\,\underline{\underline{1}})\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}^S$
- $(\underline{\underline{1}}\otimes\underline{\underline{1}})\underline{\underline{X}} = (\mathrm{tr}\underline{\underline{X}})\underline{\underline{1}}$
- $(\underline{\underline{1}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{1}})\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}^T$
- $(\underline{\underline{1}}\,\overline{\ominus}\,\underline{\underline{1}})\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}^A$

On pose $\underset{\sim}{I} := \underline{\underline{1}}\,\overline{\underline{\otimes}}\,\underline{\underline{1}}$, l'**identité symétrique d'ordre 4**, $I_{ijkl} = \dfrac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$:

$$\underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{H},\ \forall\underset{\sim}{H} \text{ avec symétrie mineure}$$

Partie II

Analyse tensorielle

1. Objectif et notations

L'analyse tensorielle consiste à définir les opérateurs différentiels permettant de calculer les variations d'une fonction à valeur tensorielle et d'arguments tensoriels.

On ne considère que des fonctions tensorielles suffisamment régulières.

Notations pour les dérivées partielles

En fonction du contexte, et en l'absence de toute confusion, plusieurs notations peuvent être utilisées pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \xi^i} := \partial_{\xi^i}\boldsymbol{U} := \boldsymbol{U}_{,i}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial {\xi^i}^2} := \partial^2_{\xi^i}\boldsymbol{U} := \boldsymbol{U}_{,ii}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial \xi^i \xi^j} := \partial^2_{\xi^i\xi^j}\boldsymbol{U} := \boldsymbol{U}_{,ij}$$

Notations des opérateurs différentiels

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} U := \overrightarrow{\mathrm{grad}} U, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}} \vec{U} := \underline{\underline{\mathrm{grad}} \vec{U}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{U} := \mathrm{div} \vec{U}, \quad \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \underline{\underline{U}} := \overrightarrow{\mathrm{div}} \underline{\underline{U}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{U} := \overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{U}$$

2. Différentielle d'un tenseur

- Un scalaire fonction d'un vecteur, $U(\vec{a})$:

$$U(\vec{a}) = U(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \mathrm{d}U = \partial_{a_i} U \mathrm{d}a_i$$

On pose $\partial_{\vec{a}} U = \partial_{a_i} U \vec{e}_i$, il vient :

$$\mathrm{d}U = \partial_{\vec{a}} U \cdot \vec{a}$$

- Un vecteur fonction d'un vecteur, $\vec{U}(\vec{a})$:

$$\vec{U}(\vec{a}) = U_i(\vec{a})\vec{e}_i = U_i(a_1, a_2, a_3)\vec{e}_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{U} &= \partial_{a_j} U_i \mathrm{d}a_j \vec{e}_i \\ &= \partial_{a_j} U_i \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \mathrm{d}\vec{a}) \end{aligned}$$

On pose $\partial_{\vec{a}} \vec{U} = \partial_{a_j} U_i \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, il vient :

$$\mathrm{d}\vec{U} = \left(\partial_{\vec{a}} \vec{U}\right) \mathrm{d}\vec{a}$$

2. Différentielle d'un tenseur

- Un scalaire fonction d'un tenseur d'ordre 2, $U(\underline{\underline{A}})$:

$$U(\underline{\underline{A}}) = U(A_{11}, \ldots, A_{33}) \Rightarrow \mathrm{d}U = \partial_{A_{ij}} U \mathrm{d}A_{ij} = \partial_{A_{ij}} U \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j : \mathrm{d}\underline{\underline{A}}$$

On pose $\partial_{\underline{\underline{A}}} U = \partial_{A_{ij}} U \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, il vient :

$$\mathrm{d}U = \partial_{\underline{\underline{A}}} U : \mathrm{d}\underline{\underline{A}}$$

- Un tenseur d'ordre 2 fonction d'un tenseur d'ordre 2, $\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{A}})$:

$$\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{A}}) = U_{ij}(\underline{\underline{A}}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = U_{ij}(A_{11}, \ldots, A_{33}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{d}\underline{\underline{U}} = \partial_{A_{kl}} U_{ij} \mathrm{d}A_{kl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j &= \partial_{A_{kl}} U_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)((\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) : \mathrm{d}\underline{\underline{A}}) \\ &= \partial_{A_{kl}} U_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \mathrm{d}\underline{\underline{A}} \end{aligned}$$

On pose $\partial_{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{U}} = \partial_{A_{kl}} U_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)$, il vient :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{U}} = \left(\partial_{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{U}}\right) \mathrm{d}\underline{\underline{A}}$$

avec $\partial_{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$, car $\partial_{A_{kl}} A_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

3. Champs de tenseurs

Considérons un ensemble Ω formé de points de l'espace affine $\mathscr{E}$. Désignons par $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ le vecteur **position** d'un point $P \in \Omega$ (vecteur joignant une origine fixe O de $\mathscr{E}$ au point P). Soient $\{\xi^i\}$ les coordonnées de P dans un système de coordonnées quelconques : $\vec{x} = \vec{x}(\xi^i)$.

Un champ de tenseurs, d'ordre 0 (champ de scalaires), d'ordre 1 (champ de vecteurs) ou d'ordre > 1 (champ de tenseurs), est une application qui à tout point $P \in \Omega$, de vecteur position $\vec{x}$, associe un tenseur $U(\vec{x}) = U(\xi^i)$. On suppose que $U(\vec{x})$ est suffisamment régulier.

Un champ U est dit **non stationnaire** s'il dépend à la fois de $\vec{x}$ et du temps t : $U = U(\vec{x}, t)$.

Un champ U est dit **homogène** sur Ω s'il prend la même valeur en tout point de Ω : $U = U(t)$.

4. Différentielle du vecteur position d'un point

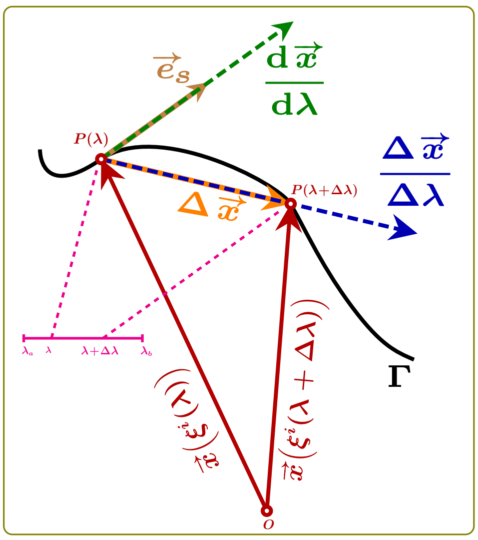
Considérons dans Ω un ensemble de points formant un arc de courbe Γ. Chaque points P de la courbe peut être mis en correspondance biunivoque avec les paramètres λ d'un intervalle $[\lambda_a, \lambda_b]$. Le vecteur position de P, joignant une origine fixe O de $\mathscr{E}$ au point P sur Γ, s'écrit : $\vec{x} = \vec{x}\big(\xi^i(\lambda)\big)$.

La dérivée de $\vec{x}$ par rapport à λ est définie par :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\lambda} &= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\vec{x}\big(\xi^i(\lambda + \Delta\lambda)\big) - \vec{x}\big(\xi^i(\lambda)\big)}{\Delta\lambda} \\ &= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\lambda} \\ &= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta\lambda} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\vec{e}_s\end{aligned}$$

avec $\Delta s = \|\Delta\vec{x}\|, \quad \vec{e}_s = \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}, \quad \|\vec{e}_s\| = 1$

où s est l'abscisse curviligne sur la courbe Γ (distance le long de Γ).



Remarque : la dérivée du vecteur position du point P est indépendante du choix de l'origine du repère. Pour un autre point fixe arbitraire Q ($\overrightarrow{OQ}$ constant), on a :

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \vec{y} \ \text{ avec } \ \vec{y} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}\lambda}$$

4. Différentielle du vecteur position d'un point

La différentielle de $\vec{x}$ est le vecteur, $\mathrm{d}\vec{x}$ défini par : $\mathrm{d}\vec{x} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda$, où $\mathrm{d}\lambda$ est la différentielle de la fonction scalaire λ.

En introduisant les différentielles $\mathrm{d}\xi^i$ des fonctions $\xi^i(\lambda)$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\xi^i}\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}\lambda}, \quad \mathrm{d}\vec{x} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\xi^i}\mathrm{d}\xi^i$$

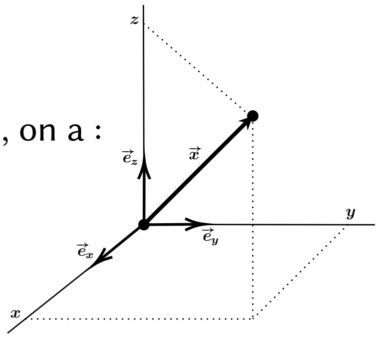
Les vecteurs $\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial\xi^i}$, tangents aux lignes de coordonnées, sont les vecteurs de la **base naturelle** $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2,3}$:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\xi^i}$$

Le repère $\left(P, \left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2,3}\right)$ constitue un repère **local mobile**.

4. Différentielle du vecteur position d'un point

4.1. Différentielle en coordonnées cartésiennes



Le système de coordonnées cartésiennes est défini par $(x^1 = \xi^1 = x,\ x^2 = \xi^2 = y,\ x^3 = \xi^3 = z)$ tel que, dans la base orthonormée $\vec{\mathcal{B}} = \left\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right\}$, on a : $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

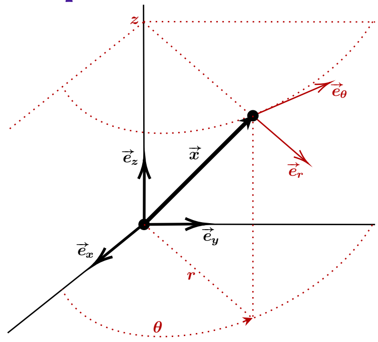
La différentielle de $\vec{x}$ s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_x\mathrm{d}x + \vec{e}_y\mathrm{d}y + \vec{e}_z\mathrm{d}z \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_x \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_y \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_z \end{cases}$$

La base naturelle $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2,3}$ est la même en tout point, confondue avec la base cartésienne orthonormée $\vec{\mathcal{B}}$.

4. Différentielle du vecteur position d'un point

4.2. Différentielle en coordonnées cylindriques



Le système de coordonnées cylindriques est défini par $(\xi^1 = r,\ \xi^2 = \theta,\ \xi^3 = z)$ tel que, dans la base orthonormée $\vec{\mathcal{B}} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, on a :

$$\begin{pmatrix} x^1(r,\theta,z) & = & r\cos\theta \\ x^2(r,\theta,z) & = & r\sin\theta \\ x^3(r,\theta,z) & = & z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$
$$= r\,\vec{e}_r(\theta) + z\,\vec{e}_z$$

avec $\vec{e}_r(\theta) = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$

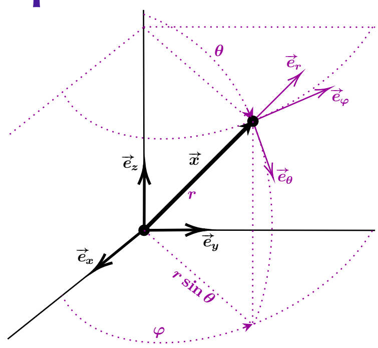
La différentielle de $\vec{x}$ s'écrit : $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_r\mathrm{d}r + r\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta + \vec{e}_z\mathrm{d}z \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_r \\ \vec{e}_2 = r\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_z \end{cases}$

On pose $\vec{e}_\theta = \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$.

La base naturelle $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ est orthogonale, mais elle est non normée et elle change avec le point. La base $\{\vec{e}_r(\theta), \vec{e}_\theta(\theta), \vec{e}_z\}$ est une base locale orthonormée colinéaire à la base naturelle.

4. Différentielle du vecteur position d'un point

4.3. Différentielle en coordonnées sphériques



Le système de coordonnées sphériques est défini par $(\xi^1 = r,\ \xi^2 = \theta,\ \xi^3 = \varphi)$ tel que, dans la base orthonormée $\vec{\mathcal{B}} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, on a :

$$\begin{pmatrix} x^1(r,\theta,\varphi) & = & r\sin\theta\cos\varphi \\ x^2(r,\theta,\varphi) & = & r\sin\theta\sin\varphi \\ x^3(r,\theta,\varphi) & = & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = r\sin\theta\big(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\big) + r\cos\theta\,\vec{e}_z$$
$$= r\,\vec{e}_r(\theta,\varphi)$$

avec $\vec{e}_r(\theta,\varphi) = \sin\theta\big(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\big) + \cos\theta\,\vec{e}_z$

La différentielle de $\vec{x}$ s'écrit : $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_r\mathrm{d}r + r\partial_\theta\vec{e}_r\mathrm{d}\theta + r\partial_\varphi\vec{e}_r\mathrm{d}\varphi \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_r \\ \vec{e}_2 = r\partial_\theta\vec{e}_r \\ \vec{e}_3 = r\partial_\varphi\vec{e}_r \end{cases}$

On pose $\begin{cases} \vec{e}_\theta = \partial_\theta\vec{e}_r = \cos\theta\big(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\big) - \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \dfrac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi\vec{e}_r = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \end{cases}$

La base naturelle $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ est orthogonale, mais elle est non normée et elle change avec le point. La base $\{\vec{e}_r(\theta,\varphi), \vec{e}_\theta(\theta,\varphi), \vec{e}_\varphi(\theta,\varphi)\}$ est une base locale orthonormée colinéaire à la base naturelle.

5. Opérateur nabla

Soit Ω un ensemble de points de l'espace affine $\mathscr{E}$. Un champ de scalaires est une application qui à tout point $P \in \Omega$, de vecteur position $\vec{x}(\xi^i)$, associe le scalaire $U(\vec{x}) = U(\xi^i)$. La différentielle de U, s'écrit : $\mathrm{d}U = \partial_{\xi^i} U \mathrm{d}\xi^i$. En introduisant la base réciproque $\left\{\vec{e}^{\,i}\right\}_{i=1,2,3}$ de la base naturelle $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2,3}$, il vient :

$$\mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_j \mathrm{d}\xi^j \Rightarrow \vec{e}^{\,i} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}_j \mathrm{d}\xi^j = \delta^i_{\ j} \mathrm{d}\xi^j = \mathrm{d}\xi^i$$

D'où :

$$\mathrm{d}U = \partial_{\xi^i} U \, \vec{e}^{\,i} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

Opérateur nabla

On introduit l'opérateur différentiel vectoriel $\vec{\nabla}$, appelé **nabla**, tel que :

$$\vec{\nabla} := \frac{\partial}{\partial \xi^i} \vec{e}^{\,i}$$

- Sachant que $\vec{e}^{\,i} = g^{ij} \vec{e}_j$, on a : $\vec{\nabla} = g^{ij} \dfrac{\partial}{\partial \xi^i} \vec{e}_j$.
- En coordonnées cartésiennes, il s'écrit dans la base $\vec{\mathcal{B}}$ sous la forme :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

6. Gradient

1. Soit $U(\vec{x})$ un champ de scalaires. Le gradient de U est le champ de vecteurs $\vec{\nabla} U$ défini par :

$$\mathrm{d}U = \vec{\nabla} U \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

Remarque : en écrivant $\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}s \vec{e}_s$, il vient $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \vec{\nabla} U \cdot \vec{e}_s$. La projection de $\vec{\nabla} U$ sur la direction définie par $\vec{e}_s$, exprime le taux de variation de U suivant cette direction.

2. Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. Le gradient de $\vec{U}$ est le champ de tenseurs $\underline{\underline{\nabla}} \vec{U}$ d'ordre 2 défini par :

$$\mathrm{d}\vec{U} = \left(\underline{\underline{\nabla}} \vec{U}\right) \mathrm{d}\vec{x}$$

3. Soit $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. Le gradient de $\underline{\underline{U}}$ est le champ de tenseurs $\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}}$ d'ordre 3 défini par :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{U}} = \left(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}}\right) \mathrm{d}\vec{x}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} U = \partial_{x_i} U \, \vec{e}_i \ , \quad \underline{\underline{\nabla}} \vec{U} = \partial_{x_j} U_i \, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \ , \quad \underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}} = \partial_{x_k} U_{ij} \, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$$

7. Divergence

1. Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. La divergence de $\vec{U}$ est le champ de scalaires $\vec{\nabla}\cdot\vec{U}$ défini par :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = (\underline{\underline{\nabla\vec{U}}}):\underline{\underline{1}}$$

2. Soit $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. La divergence de $\underline{\underline{U}}$ est le champ de vecteurs $\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{U}}$ défini par :

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{U}} = (\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}}):\underline{\underline{1}}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \partial_{x_i}U_i\ , \quad \vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{U}} = \partial_{x_j}U_{ij}\,\vec{e}_i$$

8. Laplacien

1. Soit $U(\vec{x})$ un champ de scalaires. Le laplacien de U est le champ de scalaires ΔU défini par :

$$\Delta U = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}U)$$

2. Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. Le laplacien de $\vec{U}$ est le champ de vecteurs $\vec{\Delta}\vec{U}$ défini par :

$$\vec{\Delta}\vec{U} = \vec{\nabla}\cdot(\underline{\underline{\nabla\vec{U}}})$$

3. Soit $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. Le laplacien de $\underline{\underline{U}}$ est le champ de tenseurs $\underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{U}}$ d'ordre 2 défini par :

$$\underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{U}} = \vec{\nabla}\cdot(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}})$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta U = \partial_{x_i}(\partial_{x_i}U) = \sum_{i=1}^{3}\partial^2_{x_i}U\ , \quad \vec{\Delta}\vec{U} = \Delta U_i\,\vec{e}_i\ , \quad \underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{U}} = \Delta U_{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$$

9. Rotationnel

❶ Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. Soit $\vec{W}$ le vecteur axial associé à la partie antisymétrique de $\underline{\underline{\nabla}}\vec{U}$. Le rotationnel de $\vec{U}$ est le champ de vecteurs $\vec{\nabla}\wedge\vec{U}$ défini par :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{U} = -\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} = 2\vec{W}$$

❷ Soit $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. Le rotationnel de $\underline{\underline{U}}$ est le champ de tenseurs $\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{U}}$ d'ordre 2 défini par :

$$\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{U}} = -\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\underline{U}}\right):\underline{\underline{\underline{\eta}}}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{U} = -\eta_{ijk}\partial_{x_k}U_j\vec{e}_i\,,\quad \vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{U}} = -\partial_{x_q}U_{ip}\eta_{pqj}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$$

10. Éléments différentiels pour les intégrales

Élément de longueur

Soit une courbe $\mathcal{C}$ dont les points ont pour vecteur position $\vec{x}(\xi)$:

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi) \Rightarrow \mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}\,\mathrm{d}\xi,\quad \vec{e} = \partial_\xi\vec{x}$$

L'élément de longueur de $\mathcal{C}$ est défini par : $\mathrm{d}\ell = \left\|\vec{e}\right\|\mathrm{d}\xi$

Élément de surface

Soit une surface $\mathcal{A}$ dont les points ont pour vecteur position $\vec{x}(\xi^1,\xi^2)$:

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi^1,\xi^2) \Rightarrow \mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_1\mathrm{d}\xi^1 + \vec{e}_2\mathrm{d}\xi^2,\quad \vec{e}_i = \partial_{\xi^i}\vec{x}$$

L'élément de surface de $\mathcal{A}$ est défini par : $\mathrm{d}\mathcal{A} = \left\|\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\right\|\mathrm{d}\xi^1\mathrm{d}\xi^2$

Élément de volume

Soit un volume $\mathcal{V}$ dont les points ont pour vecteur position $\vec{x}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$:

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi^1,\xi^2,\xi^3) \Rightarrow \mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_1\mathrm{d}\xi^1 + \vec{e}_2\mathrm{d}\xi^2 + \vec{e}_3\mathrm{d}\xi^3,\quad \vec{e}_i = \partial_{\xi^i}\vec{x}$$

L'élément de volume de $\mathcal{V}$ est défini par : $\mathrm{d}\mathcal{V} = \left|\left[\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\vec{e}_3\right]\right|\mathrm{d}\xi^1\mathrm{d}\xi^2\mathrm{d}\xi^3$

11. Théorème de la divergence (ou d'Ostrogradski)

Soit $\Omega \subset \vec{\mathscr{E}}$ un domaine volumique fermé. On note par $\partial\Omega$ sa surface frontière sur laquelle peut être défini le vecteur unitaire $\vec{n}$ de la normale sortante en tout point. Si le gradient et la divergence sont définies en tout point de Ω et de sa frontière $\partial\Omega$, on a :

1. Pour un champ de scalaires $U(\vec{x})$:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} U \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega} U \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{A}$$

2. Pour un champ de vecteurs $\vec{U}(\vec{x})$:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega} \vec{U} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{A}$$

3. Pour un champ de tenseurs $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{U}} \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{U}} \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{A}$$

12. Théorème de l'intégrale nulle

Soit $U(\vec{x})$ un champ (de scalaires, de vecteurs ou de tenseurs) défini et **continu** sur un domaine Ω. Si quelque soit le sous domaine $\omega \subset \Omega$, l'intégrale de U sur le domaine ω est nulle, alors le champ est identiquement nul sur tout le domaine Ω et réciproquement :

$$\int_{\omega} U(\vec{x}) \mathrm{d}\mathcal{V} = 0, \ \forall \omega \subset \Omega \ \Leftrightarrow \ U(\vec{x}) = 0, \ \forall \vec{x} \in \Omega$$

Ce théorème est aussi appelé Lemme fondamental de la mécanique des milieux continus ou encore théorème de localisation.

Partie III

Compléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.1. Base principale

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ symétrique d'ordre 2 possède trois valeurs propres réelles a_i et trois vecteurs propres $\vec{n}_i$ deux à deux orthogonaux. La base $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$, dite **propre** ou **principale**, forme une base orthonormée de $\vec{\mathscr{E}}$:

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}_{\{\vec{n}_i\}}, \quad \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{\underline{n}}_i, \quad \underline{\underline{n}}_i = \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i$$

Une valeur propre a du tenseur $\underline{\underline{A}}$ vérifie $\underline{\underline{A}}\vec{x} = a\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Pour que cette équation ait une solution, il suffit que $\det\left(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}}\right) = 0$.

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}}\right) = \mathrm{p}(a) = -a^3 + I_1(\underline{\underline{A}})a^2 - I_2(\underline{\underline{A}})a + I_3(\underline{\underline{A}})$$

Le polynôme $\mathrm{p}(a)$ est appelé polynôme caractéristique de $\underline{\underline{A}}$. Tout tenseur $\underline{\underline{A}}$ satisfait son propre polynôme caractéristique (**théorème de Cayley-Hamilton**) :

$$-\underline{\underline{A}}^3 + I_1(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}^2 - I_2(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}} + I_3(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}$$

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.1. Base principale

Les coefficients $I_i(\underline{\underline{A}})$ sont les **invariants principaux** de $\underline{\underline{A}}$:

$$I_1(\underline{\underline{A}}) = \frac{[\underline{\underline{A}}\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]} := \text{tr}\underline{\underline{A}}$$

$$I_2(\underline{\underline{A}}) = \frac{[\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}] + [\underline{\underline{A}}\vec{u}, \vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}] + [\underline{\underline{A}}\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

$$I_3(\underline{\underline{A}}) := \det \underline{\underline{A}}$$

Ils s'exprimeent en fonction de $(\text{tr}\underline{\underline{A}}, \text{tr}\underline{\underline{A}}^2, \text{tr}\underline{\underline{A}}^3)$ ou de (a_1, a_2, a_3) :

$$I_1(\underline{\underline{A}}) := \text{tr}\underline{\underline{A}} = a_1 + a_2 + a_3$$

$$I_2(\underline{\underline{A}}) = \det \underline{\underline{A}}\text{tr}\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{2}\left((\text{tr}\underline{\underline{A}})^2 - \text{tr}\underline{\underline{A}}^2\right) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$$

$$I_3(\underline{\underline{A}}) := \det \underline{\underline{A}} = \frac{1}{6}\left((\text{tr}\underline{\underline{A}})^3 - 3\,\text{tr}\underline{\underline{A}}\,\text{tr}\underline{\underline{A}}^2 + 2\,\text{tr}\underline{\underline{A}}^3\right) = a_1a_2a_3$$

Les triplets $(I_1(\underline{\underline{A}}), I_2(\underline{\underline{A}}), I_3(\underline{\underline{A}}))$, $(\text{tr}\underline{\underline{A}}, \text{tr}\underline{\underline{A}}^2, \text{tr}\underline{\underline{A}}^3)$, (a_1, a_2, a_3) forment des ensembles équivalents d'**invariants** de $\underline{\underline{A}}$, indépendants de la base choisie. Le choix d'un triplet est souvent guidé par la physique.

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.2. Bases sphérique-déviatorique

De la **décomposition** (**représentation**) **spectrale** $\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{\underline{n}}_i$, il vient pour $a_1 = a_2 = a_3 = a$, $\underline{\underline{A}} = a\underline{\underline{1}}$: tenseur **sphérique**.

D'où l'idée de décomposer $\underline{\underline{A}}$ en partie sphérique et partie $\underline{\underline{A}}'$ dite **déviatorique** :

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\text{tr}\underline{\underline{A}}}{3}\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}}', \quad \underline{\underline{A}}' : \textbf{déviateur} \text{ tel que } \underline{\underline{A}}' : \underline{\underline{1}} = 0$$

Sachant que $\underset{\sim}{I}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$ et que $\left(\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}\right)\underline{\underline{A}} = \left(\text{tr}\underline{\underline{A}}\right)\underline{\underline{1}}$, ces deux parties peuvent être redéfinies en introduisant les tenseurs $\underset{\sim}{J}$ et $\underset{\sim}{K}$:

$$\underset{\sim}{K} = \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}, \quad \underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{K}$$

avec $\underset{\sim}{J}\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{J}$, $\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K}$, $\underset{\sim}{J}\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{0}$ et $\begin{cases} \underset{\sim}{K}\underline{\underline{A}} = \dfrac{\text{tr}\underline{\underline{A}}}{3}\underline{\underline{1}} \\ \underset{\sim}{J}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}' \end{cases}$

1.2. Bases sphérique-déviatorique

Dans la base $\{\vec{n}_i\}$, $\underline{\underline{A}}$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ tel que :

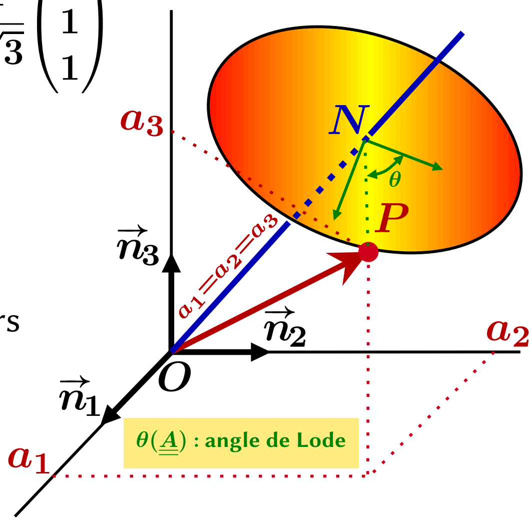
$$\overrightarrow{OP} = \left\|\overrightarrow{ON}\right\| \vec{i} + \overrightarrow{NP}, \text{ avec } \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vient $\left\|\overrightarrow{ON}\right\| = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$, d'où :

$$\overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}, \quad \left\|\overrightarrow{NP}\right\| = \left\|\underline{\underline{A}}'\right\|$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{NP}$ sont les valeurs propres du tenseur $\underline{\underline{A}}'$, racines du polynôme caractéristique :

$$\mathrm{p}(a) = -a'^3 - I_2(\underline{\underline{A}}')a' + I_3(\underline{\underline{A}}') = 0$$



Pour trouver ces racines, on effectue un changement de variable de la forme $a' = u\cos(\theta)$.

1.2. Bases sphérique-déviatorique

Pour $u = \sqrt{2/3}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\|$, le problème se transforme en la recherche de θ tel que :

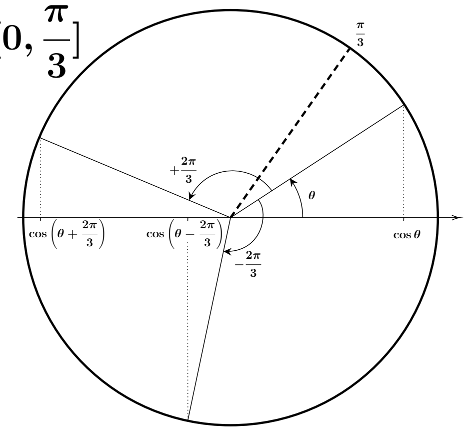
$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos(3\theta) = 3\sqrt{6}\frac{\det \underline{\underline{A}}'}{\left\|\underline{\underline{A}}'\right\|}$$

qui admet trois solutions réelles : $\theta_i = \theta - \frac{2\pi}{3}(i-1), \quad i = 1, 2, 3$, avec

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(3\sqrt{6}\frac{\det \underline{\underline{A}}'}{\left\|\underline{\underline{A}}'\right\|}\right) \in [0, \frac{\pi}{3}]$$

D'où :

$$\begin{cases} a'_1 = a_1 - \frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \cos(\theta) \\ a'_2 = a_2 - \frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ a'_3 = a_3 - \frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$



$a_1 \geq a_2 \geq a_3$

1.2. Bases sphérique-déviatorique

Partons de la décomposition spectrale : $\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{\underline{n}}_i$, et remplaçons les a_i par leurs expressions en fonction du triplet $(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \left\|\underline{\underline{A}}'\right\|, \theta)$, qui définit un triplet d'invariants équivalents aux autres triplets, on obtient :

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{\sqrt{3}}\underline{\underline{I}} + \left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \left(\cos\theta \underline{\underline{J}}_1 + \sin\theta \underline{\underline{J}}_2\right)$$

avec

$$\underline{\underline{I}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\underline{1}},\ \underline{\underline{J}}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(3\underline{\underline{n}}_1 - \underline{\underline{1}}),\ \ \underline{\underline{J}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\underline{n}}_2 - \underline{\underline{n}}_3)$$

La base $(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{J}}_1, \underline{\underline{J}}_2)$ est une base orthonormée pour les tenseurs symétriques ayant $\{\vec{n}_i\}$ comme base propre.

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.2. Bases sphérique-déviatorique

Posons $\underline{\underline{J}} = \dfrac{\underline{\underline{A}}'}{\left\|\underline{\underline{A}}'\right\|} = \cos\theta \underline{\underline{J}}_1 + \sin\theta \underline{\underline{J}}_2$, d'où : $\underline{\underline{A}} = \dfrac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{\sqrt{3}}\underline{\underline{I}} + \left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \underline{\underline{J}}$.

Et cherchons une nouvelle base orthonormée $(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{J}}, \underline{\underline{K}})$.

En décomposant $\underline{\underline{K}}$ dans la base $(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{J}}_1, \underline{\underline{J}}_2)$ sous la forme $\underline{\underline{K}} = a\underline{\underline{I}} + b\underline{\underline{J}}_1 + c\underline{\underline{J}}_2$, et sachant qu'il doit vérifier : $\underline{\underline{K}}:\underline{\underline{I}}=0$, $\underline{\underline{K}}:\underline{\underline{J}}=0$, $\left\|\underline{\underline{K}}\right\|=1$, on obtient :

$$\underline{\underline{K}} = -\sin\theta \underline{\underline{J}}_1 + \cos\theta \underline{\underline{J}}_2$$

En calculant $\underline{\underline{J}}^2$, le tenseur $\underline{\underline{K}}$ peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$\underline{\underline{K}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos(3\theta)}}\left(\sqrt{2}\underline{\underline{I}} - \sqrt{6}\underline{\underline{J}}^2 + \cos(3\theta)\underline{\underline{J}}\right)$$

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.3. Dérivées partielles des invariants

Triplets $(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3)$ **et** $\left(I_1(\underline{\underline{A}}), I_2(\underline{\underline{A}}), I_3(\underline{\underline{A}})\right)$

$$\begin{cases} \partial_{\underline{\underline{A}}}\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}} \\ \partial_{\underline{\underline{A}}}\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2 = 2\underline{\underline{A}}^T \\ \partial_{\underline{\underline{A}}}\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3 = 3\left(\underline{\underline{A}}^2\right)^T \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_{\underline{\underline{A}}}I_1(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{1}} \\ \partial_{\underline{\underline{A}}}I_2(\underline{\underline{A}}) = \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{A}}^T \\ \partial_{\underline{\underline{A}}}I_3(\underline{\underline{A}}) = I_3(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}^{-T} \end{cases}$$

Triplet (a_1, a_2, a_3)

De la décomposition $\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{\underline{n}}_i$, il vient : $\mathrm{d}\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3} \left(\mathrm{d}a_i \underline{\underline{n}}_i + a_i \mathrm{d}\underline{\underline{n}}_i\right)$

Sachant que : $\mathrm{d}\underline{\underline{n}}_i : \underline{\underline{n}}_j = \left(\mathrm{d}\vec{n}_i \otimes \vec{n}_i + \vec{n}_i \otimes \mathrm{d}\vec{n}_i\right) : \vec{n}_j \otimes \vec{n}_j = 0$ et $\underline{\underline{n}}_i : \underline{\underline{n}}_j = \delta_{ij}$ (car $\|\vec{n}_i\| = 1$), on obtient :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{n}}_i = \mathrm{d}a_i \Rightarrow \partial_{\underline{\underline{A}}} a_i = \underline{\underline{n}}_i$$

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.3. Dérivées partielles des invariants

Triplet $(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \left\|\underline{\underline{A}}'\right\|, \theta)$

De la décomposition $\underline{\underline{A}} = \dfrac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{\sqrt{3}}\underline{\underline{I}} + \left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \underline{\underline{J}}$, il vient :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{A}} = \frac{\mathrm{dtr}\underline{\underline{A}}}{\sqrt{3}}\underline{\underline{I}} + \mathrm{d}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \underline{\underline{J}} + \left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \mathrm{d}\underline{\underline{J}}$$

avec

$$\mathrm{d}\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{K}}\mathrm{d}\theta + \cos\theta \mathrm{d}\underline{\underline{J}}_1 + \sin\theta \mathrm{d}\underline{\underline{J}}_2$$

Les deux tenseurs $\underline{\underline{J}}_1$ et $\underline{\underline{J}}_2$ ont des valeurs propres constantes, d'où : $\mathrm{d}\underline{\underline{J}}_1 : \underline{\underline{I}} = 0$, $\mathrm{d}\underline{\underline{J}}_1 : \underline{\underline{J}} = 0$ et $\mathrm{d}\underline{\underline{J}}_1 : \underline{\underline{K}} = 0$ (car $\mathrm{d}\underline{\underline{n}}_i : \underline{\underline{n}}_j = 0$). De même pour $\underline{\underline{J}}_2$. Il vient :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{J}} : \underline{\underline{I}} = 0,\ \mathrm{d}\underline{\underline{J}} : \underline{\underline{J}} = 0,\ \mathrm{d}\underline{\underline{J}} : \underline{\underline{K}} = \mathrm{d}\theta$$

Par conséquent :

$$\partial_{\underline{\underline{A}}}\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = \sqrt{3}\underline{\underline{I}},\ \partial_{\underline{\underline{A}}}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\| = \underline{\underline{J}},\ \left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \partial_{\underline{\underline{A}}}\theta = \underline{\underline{K}}$$

2. Fonctions isotropes

Pourquoi les coefficients du polynôme caractéristiques $I_i(\underline{\underline{A}})$ sont appelés **invariants** de $\underline{\underline{A}}$? Car ce sont des **fonctions isotropes** du tenseur $\underline{\underline{A}}$, qui vérifient : $I_i(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T) = I_i(\underline{\underline{A}}),\ \forall \underline{\underline{Q}} \ / \ \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{1}}$

En effet : $\det\left(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T - a\underline{\underline{1}}\right) = \det\left(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T - a\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T\right)$

$$= \det\left(\underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}})\underline{\underline{Q}}^T\right) = (\det \underline{\underline{Q}})^2 \det\left(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}}\right)$$

$$= \det\left(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}}\right)$$

Une fonction scalaire Φ, vectorielle $\vec{\Phi}$ ou tensorielle d'ordre 2 $\underline{\underline{\Phi}}$, dont les variables peuvent être des scalaires u, des vecteurs $\vec{v}$ ou des tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{A}}$, est dite **isotrope** si on a, $\forall \underline{\underline{Q}}$ orthogonal :

$$\Phi(u, \underline{\underline{Q}}\vec{v}, \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T) = \Phi(u, \vec{v}, \underline{\underline{A}})$$

$$\vec{\Phi}(u, \underline{\underline{Q}}\vec{v}, \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T) = \underline{\underline{Q}}\vec{\Phi}(u, \vec{v}, \underline{\underline{A}})$$

$$\underline{\underline{\Phi}}(u, \underline{\underline{Q}}\vec{v}, \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T) = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{\Phi}}(u, \vec{v}, \underline{\underline{A}})\underline{\underline{Q}}^T$$

3. Théorèmes de représentation

Soient $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ deux tenseurs d'ordre 2 symétriques.

- Une fonction scalaire $\Phi(\underline{\underline{A}})$ est isotrope ssi :

$$\Phi(\underline{\underline{A}}) = \Phi\left(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3\right)$$

- Une fonction scalaire $\Phi(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}})$ est isotrope ssi :

$$\Phi(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) = \Phi\big(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3, \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}^3, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}^2\big)$$

- Une fonction tensorielle $\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{A}})$ est isotrope ssi :

$$\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{A}}) = \varphi_0\underline{\underline{1}} + \varphi_1\underline{\underline{A}} + \varphi_2\underline{\underline{A}}^2$$

où les $\varphi_i(\underline{\underline{A}})$ sont des fonctions scalaires isotropes.

- Une fonction tensorielle $\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}})$ est isotrope ssi :

$$\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) = \varphi_0\underline{\underline{1}} + \varphi_1\underline{\underline{A}} + \varphi_2\underline{\underline{A}}^2 + \varphi_3\underline{\underline{B}} + \varphi_4\underline{\underline{B}}^2 + \varphi_5(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}) + \varphi_6(\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2) + \varphi_7(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^2 + \underline{\underline{B}}^2\underline{\underline{A}}) + \varphi_8(\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}^2 + \underline{\underline{B}}^2\underline{\underline{A}}^2)$$

où les $\varphi_i(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}})$ sont des fonctions scalaires isotropes.

4. Tenseurs définis positifs

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 est **définí positif** si

$$\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{v} > 0, \ \ \forall\vec{v} \neq \vec{0}$$

Sachant que $\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{v} = \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^S\vec{v} + \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^A\vec{v}$ et que $\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^A\vec{v} = 0$, il vient :

$$\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{v} = \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^S\vec{v}$$

Par conséquent, la définie positivité de $\underline{\underline{A}}$ est décidée par celle de sa partie symétrique :

$$\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^S\vec{v} > 0, \ \ \forall\vec{v} \neq \vec{0}$$

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 est **semi-défini positif** si

$$\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{v} \geq 0, \ \ \forall\vec{v} \neq \vec{0}$$

Un tenseur $\underset{\sim}{H}$ d'ordre 4 est défini positif si

$$\underline{\underline{A}}:\underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{A}} > 0, \ \forall\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{0}}$$

4. Tenseurs définis positifs

Un tenseur $\underline{\underline{S}}$ symétrique défini positif, de base propre $\left\{\vec{n}_i\otimes\vec{n}_i\right\}$, possède les propriétés suivantes :

- ses valeurs propres sont strictement positives
  $\vec{v}\cdot\underline{\underline{S}}\,\vec{v} = s\left\|\vec{v}\right\|^2 > 0 \Rightarrow s > 0$

- ses invariants principaux sont strictement positives
  $I_1(\underline{\underline{S}}) = s_1 + s_2 + s_3 > 0, \ I_2(\underline{\underline{S}}) = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 > 0, \ I_3(\underline{\underline{S}}) = s_1 s_2 s_3 > 0$

- sa racine n-ième est définie par :

$$\sqrt[n]{\underline{\underline{S}}} = \underline{\underline{S}}^{\frac{1}{n}} = \sum_{i=1}^{3}\sqrt[n]{s_i}\,\vec{n}_i\otimes\vec{n}_i, \ n \in \mathbb{N}$$

- son logarithme népérien est défini par :

$$\ln\underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^{3}\ln s_i\,\vec{n}_i\otimes\vec{n}_i$$

5. Exponentielle d'un tenseur d'ordre 2

L'exponentielle d'un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 défini par :

$$\exp(\underline{\underline{A}}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{A}}^k}{k!}$$

telle que $\forall(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \times \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$:

- $\det\left(\exp(\underline{\underline{A}})\right) = \exp(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}) > 0$
- si $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$, $\exp(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}) = \exp(\underline{\underline{A}})\exp(\underline{\underline{B}}) = \exp(\underline{\underline{B}})\exp(\underline{\underline{A}})$
- $\exp(n\underline{\underline{A}}) = \left(\exp(\underline{\underline{A}})\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\exp(-\underline{\underline{A}}) = \left(\exp(\underline{\underline{A}})\right)^{-1}$
- pour $\underline{\underline{B}}$ inversible, $\exp(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^{-1}) = \underline{\underline{B}}\exp(-\underline{\underline{A}})\underline{\underline{B}}^{-1}$
- pour $\underline{\underline{A}}$ antisymétrique, $\exp(\underline{\underline{A}})$ est une rotation

6. Décomposition polaire

Pour tout tenseur $\underline{\underline{A}}$ inversible ($\det \underline{\underline{A}} \neq 0$), il existe deux tenseurs uniques $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ symétriques définis positifs et un tenseur unique $\underline{\underline{R}}$ orthogonal tels que :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{R}}$$

$\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}}$ est appelée décomposition polaire à droite.

$\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{R}}$ est appelée décomposition polaire à gauche.

- Si $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\underline{\underline{R}}$ est une rotation ($\det \underline{\underline{R}} = 1$) car $\det \underline{\underline{U}} > 0$
- $\underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}$
- $\underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T$

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.1. Représentation avec axe et angle

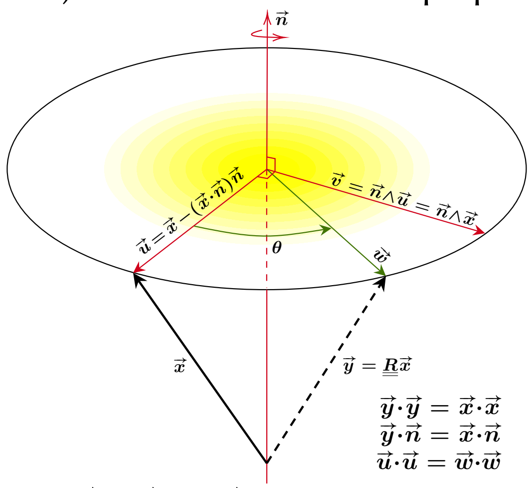
Si $\underline{\underline{R}} \neq \underline{\underline{1}}$ est une rotation, $+1$ est toujours une valeur propre de $\underline{\underline{R}}$.

En effet : $\det\left(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}\right) = \det\left(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}}\right) = \det\underline{\underline{R}}\det\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{R}}^T\right) = \det\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{R}}^T\right)^T$

$$= \det\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{R}}\right) = -\det\left(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}\right) \Rightarrow \det\left(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}\right) = 0$$

Le vecteur propre $\vec{n}$ (que l'on peut choisir unitaire) associé à cette valeur propre est **l'axe** de la rotation :

$$\underline{\underline{R}}\vec{n} = \vec{n}$$



Considérons les deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tels que $\vec{y} = \underline{\underline{R}}\vec{x}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{y} - (\vec{y}\cdot\vec{n})\vec{n}\\ &= \underline{\underline{R}}\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n}\\ &= \left(\underline{\underline{R}} - \vec{n}\otimes\vec{n}\right)\vec{x}\end{aligned}$$

Or $\vec{w} = \cos(\theta)\vec{u} + \sin\theta\,\vec{n}\wedge\vec{u}$, d'où :

$$\underline{\underline{R}}\vec{x} = \left(\vec{n}\otimes\vec{n}\right)\vec{x} + \cos\theta\left(\underline{\underline{1}} - \vec{n}\otimes\vec{n}\right)\vec{x} + \sin\theta\,\vec{n}\wedge\vec{x},\ \forall\vec{x}$$

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.1. Représentation avec axe et angle

Soit le tenseur antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$ de vecteur axial $\vec{n}$, il vient :

$$\underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) = \vec{n}\otimes\vec{n} + \cos\theta\left(\underline{\underline{1}} - \vec{n}\otimes\vec{n}\right) + \sin\theta\,\underline{\underline{\Omega}}$$

Sachant que $\underline{\underline{\Omega}}^2\vec{x} = \underline{\underline{\Omega}}\left(\underline{\underline{\Omega}}\vec{x}\right) = \vec{n}\wedge\vec{n}\wedge\vec{x} = (\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n} - \vec{x}$, d'où :

$$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \vec{n}\otimes\vec{n} - \underline{\underline{1}}$$

Par conséquent :

$$\underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) = \underline{\underline{1}} + \sin\theta\,\underline{\underline{\Omega}} + (1-\cos\theta)\underline{\underline{\Omega}}^2$$

Le vecteur $\vec{n}$, axe de la rotation, est calculé en cherchant le vecteur propre associé à 1, quant à l'angle θ on l'obtient en calculant la trace de $\underline{\underline{R}}$:

$$\mathrm{tr}\underline{\underline{R}} = 2\cos\theta + 1 \Rightarrow \theta = \pm\arccos\left(\tfrac{1}{2}(\mathrm{tr}\underline{\underline{R}} - 1)\right) + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Sachant que $\underline{\underline{R}}(\vec{n}, 2\pi-\theta) = \underline{\underline{R}}(-\vec{n},\theta)$, on se limite à $\theta\in[0,\pi]$.

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.1. Représentation avec axe et angle

Dans la base $\vec{\mathcal{B}}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

$$\left[\underline{\underline{R}}\right] = \begin{bmatrix} 1 + (1-c)(n_1^2 - 1) & -su_3 + (1-c)n_1 n_2 & sn_2 + (1-c)n_1 n_3 \\ sn_3 + (1-c)n_1 n_2 & 1 + (1-c)(n_2^2 - 1) & -sn_1 + (1-c)n_2 n_3 \\ -sn_2 + (1-c)n_1 n_3 & sn_1 + (1-c)n_2 n_3 & 1 + (1-c)(n_3^2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$c = \cos\theta, \;\; s = \sin\theta$$

$$\left[\underline{\underline{R}}\right]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}, \;\; \left[\underline{\underline{R}}\right]_2 = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix}, \;\; \left[\underline{\underline{R}}\right]_3 = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.2. Représentation avec vecteur rotation

Au lieu d'utiliser quatre paramètres (θ, n_1, n_2, n_3) avec la contrainte $\|\vec{n}\| = 1$, on peut utiliser le **vecteur rotation** $\vec{a} = \theta\vec{n}$:

$$\underline{\underline{R}}\vec{a} = \vec{a}, \;\; \|\vec{a}\| = \theta$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) = \underline{\underline{R}}(\vec{a}) &= \underline{\underline{1}} + \frac{\sin\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}\underline{\underline{\Omega}} + \frac{1-\cos\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|^2}\underline{\underline{\Omega}}^2 \\ &= \underline{\underline{1}} + \frac{\sin\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}\underline{\underline{\Omega}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\|\vec{a}\|/2\right)}{\|\vec{a}\|/2}\right]^2 \underline{\underline{\Omega}}^2 \end{aligned}$$

où $\underline{\underline{\Omega}} = \theta\underline{\underline{\bar{\Omega}}}$ est le tenseur antisymétrique de vecteur axial $\vec{a}$.

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.3. Représentation exponentielle

Le développement en série de Taylor de $\sin\theta$ et de $1-\cos\theta$, donne :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots,\ 1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) =& \underline{\underline{1}} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)\overline{\underline{\underline{\Omega}}} + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right)\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 \\
=& \underline{\underline{1}} + \theta\overline{\underline{\underline{\Omega}}} + \frac{\theta^2}{2!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 - \frac{\theta^3}{3!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}} - \frac{\theta^4}{4!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 + \frac{\theta^5}{5!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}} + \frac{\theta^6}{6!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 + \cdots \\
=& \underline{\underline{1}} + \frac{\theta}{1!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}} + \frac{\theta^2}{2!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 + \frac{\theta^3}{3!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^3 + \frac{\theta^4}{4!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^4 + \frac{\theta^5}{5!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^5 + \frac{\theta^6}{6!}\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^6 + \cdots
\end{aligned}$$

Car $\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^{k+2} = -\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^k$ pour $k \geq 1$.

En effet : $\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 = \vec{n}\otimes\vec{n} - \underline{\underline{1}},\ \overline{\underline{\underline{\Omega}}}^3 = \overline{\underline{\underline{\Omega}}}\left(\vec{n}\otimes\vec{n} - \underline{\underline{1}}\right) = -\overline{\underline{\underline{\Omega}}}$

$\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^4 = \overline{\underline{\underline{\Omega}}}^3\overline{\underline{\underline{\Omega}}} = -\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^2,\ \overline{\underline{\underline{\Omega}}}^5 = \overline{\underline{\underline{\Omega}}}^4\overline{\underline{\underline{\Omega}}} = -\overline{\underline{\underline{\Omega}}}^3 = \overline{\underline{\underline{\Omega}}},\ \overline{\underline{\underline{\Omega}}}^6 = \overline{\underline{\underline{\Omega}}}^5\overline{\underline{\underline{\Omega}}} = \overline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 \ldots$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta\overline{\underline{\underline{\Omega}}})^k}{k!} := \exp\left(\theta\overline{\underline{\underline{\Omega}}}\right),\ \text{ou encore } \underline{\underline{R}}(\vec{a}) = \exp\left(\underline{\underline{\Omega}}\right)$$

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.4. Valeurs propres

$$\det\left(\underline{\underline{R}} - r\underline{\underline{1}}\right) = -r^3 + I_1(\underline{\underline{R}})r^2 - I_2(\underline{\underline{R}})r + I_3(\underline{\underline{R}})$$

$$I_3(\underline{\underline{R}}) = \det\underline{\underline{R}} = 1,\ I_1(\underline{\underline{R}}) = \mathrm{tr}\underline{\underline{R}}$$

$$I_2(\underline{\underline{R}}) = \det\underline{\underline{R}}\,\mathrm{tr}\underline{\underline{R}}^{-1} = \mathrm{tr}\underline{\underline{R}}$$

$$\mathrm{p}(r) = -(r-1)\left(r^2 + (1-\mathrm{tr}\underline{\underline{R}})r + 1\right) = 0$$

avec

$$\Delta = (1-\mathrm{tr}\underline{\underline{R}})^2 - 4$$

En introduisant l'angle θ, on obtient :

$$\Delta = -4\sin^2\theta \leq 0$$

En plus de $r = 1$, les deux autres racines sont complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$ ($\theta \in [0,\ \pi]$) :

$$r_\pm = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.5. Rotation infinitésimale

Pour un angle θ infinitésimale, il vient :

$$\underline{\underline{R}} \simeq \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Omega}}$$

$\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T = \big(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Omega}}\big)\big(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}\big) = \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}^2 \neq \underline{\underline{1}} \Rightarrow \underline{\underline{R}}$ n'est pas orthogonal. Pour avoir un tenseur orthogonal, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{R}} = \exp\big(\underline{\underline{\Omega}}\big) &= \exp\big(\tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}} + \tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\big) = \Big(\exp\big(-\tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\big)\Big)^{-1}\exp\big(\tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\big)\\ &\simeq \Big(\underline{\underline{1}} - \tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\Big)^{-1}\Big(\underline{\underline{1}} + \tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\Big)\end{aligned}$$

d'où :

$$\underline{\underline{R}} \simeq 4\Big(2\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}\Big)^{-1} - \underline{\underline{1}}$$

Le tenseur $2\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}$ est défini positif : $\vec{v}\cdot\big(2\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}\big)\vec{v} = 2\,\|\vec{v}\|^2 > 0$.

Grâce à l'identité $\underline{\underline{A}}^{-1} + \underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\big(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\big)\underline{\underline{B}}^{-1}$, on peut vérifier que $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{1}}$.

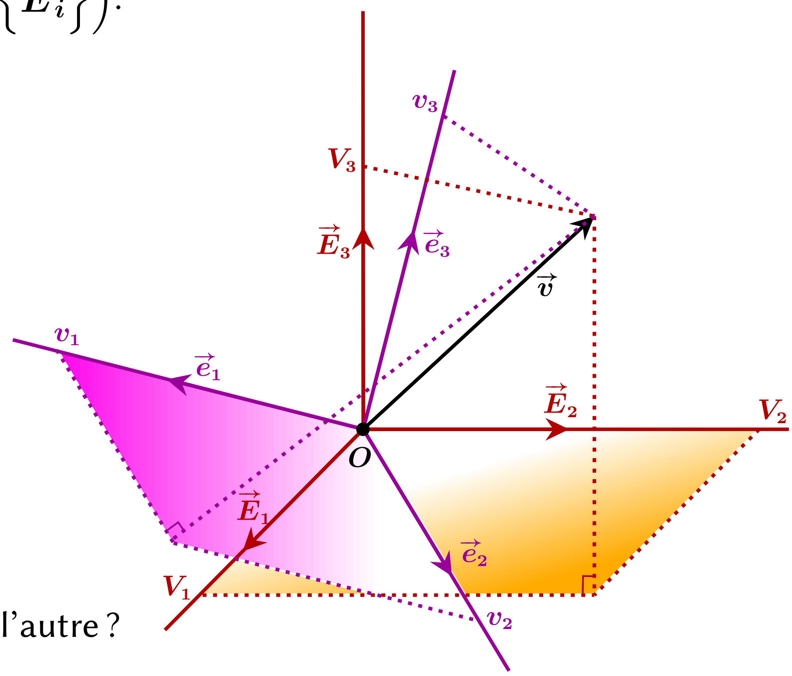
8. Changement de base

Considérons deux repères ayant le même origine O mais deux bases orthonormées différentes : $\Big(O, \{\vec{e}_i\}\Big)$, $\Big(O, \Big\{\vec{E}_i\Big\}\Big)$.

Le **même** vecteur $\vec{v}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= V_1\vec{E}_1 + V_2\vec{E}_2 + V_3\vec{E}_3\\ &= \big(\vec{v}\cdot\vec{E}_i\big)\vec{E}_i\\ &= \big(\vec{E}_i\otimes\vec{E}_i\big)\vec{v} = \underline{\underline{1}}\,\vec{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3\\ &= \big(\vec{v}\cdot\vec{e}_i\big)\vec{e}_i\\ &= \big(\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i\big)\vec{v} = \underline{\underline{1}}\,\vec{v}\end{aligned}$$



Comment passer d'une base à l'autre ?

8. Changement de base

$$\vec{E}_i = \underline{\underline{1}}\,\vec{E}_i = \left(\vec{e}_j\otimes\vec{e}_j\right)\vec{E}_i = \left(\vec{E}_i\cdot\vec{e}_j\right)\vec{e}_j$$

Posons $Q_{ij} = \vec{E}_i\cdot\vec{e}_j$, il vient : $\vec{E}_i = Q_{ij}\,\vec{e}_j$.

Soit le tenseur $\underline{\underline{Q}}$ de composantes Q_{ij}. Par définition, les composantes de $\underline{\underline{Q}}$ dans la base $\left\{\vec{E}_i\right\}$ sont $Q_{ij} = \vec{E}_i\cdot\underline{\underline{Q}}\vec{E}_j$, d'où : $\vec{e}_i = \underline{\underline{Q}}\vec{E}_i$.

En effet : $Q_{ij} = \vec{E}_i\cdot\underline{\underline{Q}}\vec{E}_j = \vec{E}_i\cdot\vec{e}_j \Rightarrow \vec{E}_i\cdot\left(\vec{e}_j - \underline{\underline{Q}}\vec{E}_j\right) = 0 \Rightarrow \vec{e}_j - \underline{\underline{Q}}\vec{E}_j = \alpha\vec{E}_k + \beta\vec{E}_l,\ i\neq k\neq l$

$\underbrace{\vec{E}_k\cdot\vec{e}_j}_{Q_{kj}} - \underbrace{\vec{E}_k\cdot\underline{\underline{Q}}\vec{E}_j}_{Q_{kj}} = \alpha \Rightarrow \alpha = 0$. De même $\beta = 0$.

$$\vec{E}_i = Q_{ij}\,\vec{e}_j \quad \text{et} \quad \vec{e}_i = \underline{\underline{Q}}\vec{E}_i$$

Le même raisonnement avec $\vec{e}_i$ et la base $\left\{\vec{e}_i\right\}$ conduit à :

$$\vec{e}_i = Q_{ji}\vec{E}_j \quad \text{et} \quad \vec{E}_i = \underline{\underline{Q}}^T\vec{e}_i$$

Les deux bases étant orthonormées ($\left\|\vec{E}_i\right\| = 1,\ \left\|\vec{e}_i\right\| = 1$), d'où :

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right] = \left[\underline{\underline{Q}}\vec{E}_1, \underline{\underline{Q}}\vec{E}_2, \underline{\underline{Q}}\vec{E}_3\right] = \det\underline{\underline{Q}}\left[\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\right]$$

8. Changement de base

Si les deux bases ont les mêmes orientations ($\det\underline{\underline{Q}} = 1$), le passage d'une base à une autre se fait alors par une **rotation** $\underline{\underline{Q}}$ telle que :

$$\vec{e}_i = \underline{\underline{Q}}\vec{E}_i = Q_{ji}\vec{E}_j$$
$$\vec{E}_i = \underline{\underline{Q}}^T\vec{e}_i = Q_{ij}\vec{e}_j$$

Le tenseur $\underline{\underline{Q}}$ a les mêmes composantes dans les deux bases :

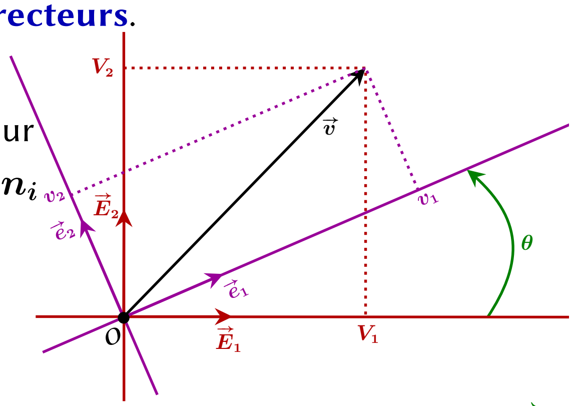
$$Q_{ij} = \vec{E}_i\cdot\underline{\underline{Q}}\vec{E}_j = \vec{e}_i\cdot\underline{\underline{Q}}\vec{e}_j = \vec{E}_i\cdot\vec{e}_j = \left\|\vec{E}_i\right\|\,\left\|\vec{e}_j\right\|\cos\theta\left(\vec{E}_i, \vec{e}_j\right) = \cos\theta\left(\vec{E}_i, \vec{e}_j\right)$$

Ces 9 composantes sont appelées **cosinus directeurs**.

Remarque : les cosinus directeurs d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base $\left\{\vec{e}_i\right\}$ sont les composantes n_i du vecteur unitaire $\vec{n} = \vec{v}/\left\|\vec{v}\right\|$:

$n_i = \cos\theta\left(\vec{v}, \vec{e}_i\right) = \vec{v}\cdot\vec{e}_i/\left\|\vec{v}\right\|$, avec

$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$



Rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{E}_3$

8. Changement de base

8.1. Transformation des composantes d'un vecteur

$$V_i = \vec{v}\cdot\vec{E}_i = Q_{ij}\vec{v}\cdot\vec{e}_j = Q_{ij}v_j \quad \Big| \quad v_i = \vec{v}\cdot\vec{e}_i = Q_{ji}\vec{v}\cdot\vec{E}_j = Q_{ji}V_j$$

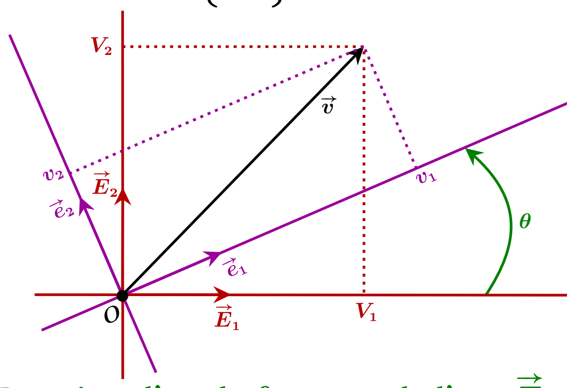
En notation matricielle :

$$\left[\vec{v}\right]_{\{\vec{E}_i\}} = \left[\underline{\underline{Q}}\right]\left[\vec{v}\right]_{\{\vec{e}_i\}} \quad \text{et} \quad \left[\vec{v}\right]_{\{\vec{e}_i\}} = \left[\underline{\underline{Q}}\right]^T\left[\vec{v}\right]_{\{\vec{E}_i\}}$$

$\left[\underline{\underline{Q}}\right]$ est la **matrice de passage** de la base $\left\{\vec{e}_i\right\}$ à la base $\left\{\vec{E}_i\right\}$.

Attention

Les deux équations matricielles ne sont pas équivalentes, respectivement, à $\vec{V} = \underline{\underline{Q}}\vec{v}$ et $\vec{v} = \underline{\underline{Q}}^T\vec{V}$, relations entre deux vecteurs différents $\vec{V}$ et $\vec{v}$.



Rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{E}_3$

8. Changement de base

8.2. Transformation des composantes d'un tenseur

$$\underline{\underline{A}} = A_{ij}\vec{E}_i\otimes\vec{E}_j = a_{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$$

$$A_{ij} = \vec{E}_i\cdot\underline{\underline{A}}\vec{E}_j = Q_{ik}Q_{jl}\vec{e}_k\cdot\underline{\underline{A}}\vec{e}_l = Q_{ik}a_{kl}Q_{jl}$$

$$a_{ij} = \vec{e}_i\cdot\underline{\underline{A}}\vec{e}_j = Q_{ki}Q_{lj}\vec{E}_k\cdot\underline{\underline{A}}\vec{E}_l = Q_{ki}A_{kl}Q_{lj}$$

En notation matricielle :

$$\left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{E}_i\}} = \left[\underline{\underline{Q}}\right]\left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{e}_i\}}\left[\underline{\underline{Q}}\right]^T \quad \text{et} \quad \left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{e}_i\}} = \left[\underline{\underline{Q}}\right]^T\left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{E}_i\}}\left[\underline{\underline{Q}}\right]$$

Attention

Les deux équations matricielles ne sont pas équivalentes, respectivement, à $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{Q}}^T$ et $\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}$, relations entre deux tenseurs différents $\underline{\underline{a}}$ et $\underline{\underline{A}}$.

MMC - (1) - Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

Exercices

$\overrightarrow{\mathscr{E}}$ désigne l'espace vectoriel euclidien de dimension 3.
$\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ désigne le tenseur d'orientation d'ordre 3.

Exercice 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Montrer que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Exercice 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Montrer que :

$$\vec{u} \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{u} = \vec{a} \otimes \vec{a} - \vec{b} \otimes \vec{b}$$

avec

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}+\vec{v}),\ \ \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}-\vec{v}),\ \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,\ \ \|\vec{a}\| = 1,\ \ \left\|\vec{b}\right\| = 1$$

Exercice 3

1) Calculer les expressions $\delta_{ii}\delta_{jj}$, $\delta_{i1}\delta_{ij}\delta_{j1}$.
2) Simplifier l'expression $\delta_{1i}\delta_{1j} + \delta_{2i}\delta_{2j} + \delta_{3i}\delta_{3j}$.

Exercice 4

1) Calculer l'expression $\eta_{ijk}\delta_{1i}\,\delta_{2j}\,\delta_{3k}$.
2) Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2 de composantes A_{ij}. Développer les expressions :
   a) $\eta_{1jk}A_{jm}A_{kn},\ \ \eta_{1jk}A_{mj}A_{nk}$
   b) $\eta_{2jk}A_{jm}A_{kn},\ \ \eta_{2jk}A_{mj}A_{nk}$
   c) $\eta_{3jk}A_{jm}A_{kn},\ \ \eta_{3jk}A_{mj}A_{nk}$
3) En déduire l'expression du déterminant de $\underline{\underline{A}}$ sous la forme :

$$\det \underline{\underline{A}} = \eta_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} = \eta_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$$

Exercice 5

Le produit contracté $\underline{\underline{\underline{\eta}}}\,\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ est un tenseur d'ordre 4 de composantes $\eta_{ijk}\eta_{kmn}$. Le produit doublement contracté $\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ est un tenseur d'ordre 2 de composantes $\eta_{ijk}\eta_{jkn}$.

1) Exprimer η_{ijk} en fonction de η_{lmn}.
2) Montrer que η_{ijk} est le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{bmatrix}$$

3) Montrer que le produit $\eta_{ijk}\eta_{lmn}$ est le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix}$$

4) En déduire les composantes du tenseur $\underline{\underline{\underline{\eta}}}\,\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ sous la forme :

$$\eta_{ijk}\eta_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

En notation tensorielle, on écrit : $\underline{\underline{\underline{\eta}}}\,\underline{\underline{\underline{\eta}}} = \underline{\underline{1}} \underline{\otimes} \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{1}} \overline{\otimes} \underline{\underline{1}}$.

5) En déduire l'identité tensorielle :

$$\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\underline{\eta}}} = 2\,\underline{\underline{1}}$$

Exercice 6

Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2 de composantes A_{ij}. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$ tels que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

1) En utilisant les résultats de l'exercice 5 montrer que :

$$\eta_{lmn} \det \underline{\underline{A}} = \eta_{ijk} A_{li} A_{mj} A_{nk} = \eta_{ijk} A_{il} A_{jm} A_{kn}$$

2) En déduire l'expression du déterminant de $\underline{\underline{A}}$ sous la forme :

$$\det \underline{\underline{A}} = \frac{[\underline{\underline{A}}\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

3) Montrer que :

$$\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = \frac{[\underline{\underline{A}}\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

Exercice 7 : identité de Lagrange

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ quatre vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$. Montrer que :

$$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right) = \left(\vec{u}\cdot\vec{x}\right)\left(\vec{v}\cdot\vec{y}\right) - \left(\vec{u}\cdot\vec{y}\right)\left(\vec{v}\cdot\vec{x}\right)$$

En déduire que :

$$\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2\left\|\vec{v}\right\|^2 - \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2$$

Exercice 8

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$. Montrer que :

1) $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right) = \left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\vec{w} = \left(\vec{v}\otimes\vec{w} - \vec{w}\otimes\vec{v}\right)\vec{u}$
2) $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right) = \Big(\left(\vec{u}\cdot\vec{u}\right)\underline{\underline{1}} - \vec{u}\otimes\vec{u}\Big)\vec{v}$

Exercice 9

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$. Soit $\vec{w}$ de $\vec{\mathscr{E}}$ le vecteur axial associé à la partie antisymétrique du tenseur $\vec{u}\otimes\vec{v}$. Montrer que :

$$\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{u}\wedge\vec{v}$$

Exercice 10

Soient $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ trois tenseurs d'ordre 2. Montrer que :

$$\underline{\underline{A}}:\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right) = \left(\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}\right):\underline{\underline{C}} = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}^T\right):\underline{\underline{B}}$$

Exercice 11

Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2 d'invariants principaux $I_1(\underline{\underline{A}}) = \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$, $I_2(\underline{\underline{A}})$ et $I_3(\underline{\underline{A}}) = \det\underline{\underline{A}}$, et de valeurs propres a_1, a_2 et a_3. Monter que :

1) $I_1(\underline{\underline{A}}) = a_1 + a_2 + a_3$
2) $I_2(\underline{\underline{A}}) = \det\underline{\underline{A}}\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\underline{\underline{A}})^2 - \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2\right) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$
3) $I_3(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{6}\left((\mathrm{tr}\underline{\underline{A}})^3 - 3\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2 + 2\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3\right) = a_1a_2a_3$

Exercice 12 : valeurs propres d'un tenseur antisymétrique d'ordre 2

Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur antisymétrique d'ordre 2 et de vecteur axial $\vec{A}$.

1) Montrer que : $\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = 0$, $\det\underline{\underline{A}} = 0$, $I_2(\underline{\underline{A}}) = (1/2)\,\|\underline{\underline{A}}\|$, $\|\underline{\underline{A}}\| = 2\left\|\vec{A}\right\|$.
2) En déduire que les valeurs propres de $\underline{\underline{A}}$ sont $(0, i\left\|\vec{A}\right\|, -i\left\|\vec{A}\right\|)$.

Exercice 13 : identités de Rivlin

Soient $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ deux tenseurs d'ordre 2. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton respectivement à $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{B}}$, montrer que :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2 = \ & \big(\text{tr}\underline{\underline{A}}\big)\big(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\big)+\big(\text{tr}\underline{\underline{B}}\big)\underline{\underline{A}}^2\\ & +\big(\text{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}-\text{tr}\underline{\underline{A}}\text{tr}\underline{\underline{B}}\big)\underline{\underline{A}}-\tfrac{1}{2}\big((\text{tr}\underline{\underline{A}})^2-\text{tr}\underline{\underline{A}}^2\big)\underline{\underline{B}}\\ & +\Big(\text{tr}\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}-\text{tr}\underline{\underline{A}}\text{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\tfrac{1}{2}\text{tr}\underline{\underline{B}}\big((\text{tr}\underline{\underline{A}})^2-\text{tr}\underline{\underline{A}}^2\big)\Big)\underline{\underline{1}}\end{aligned}$$

Pour $\underline{\underline{A}}$ symétrique et $\underline{\underline{B}}$ antisymétrique, en déduire que :

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2=\big(\text{tr}\underline{\underline{A}}\big)\big(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\big)-\tfrac{1}{2}\big((\text{tr}\underline{\underline{A}})^2-\text{tr}\underline{\underline{A}}^2\big)\underline{\underline{B}}$$

Exercice 14

Soient $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ deux tenseurs d'ordre 2. Montrer que :

1) $\big(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\big)^{-1}\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{1}}-\big(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\big)^{-1}\underline{\underline{A}}$

2) $\underline{\underline{A}}^{-1}+\underline{\underline{B}}^{-1}=\underline{\underline{A}}^{-1}\big(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\big)\underline{\underline{B}}^{-1}=\underline{\underline{B}}^{-1}\big(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\big)\underline{\underline{A}}^{-1}$

Exercice 15 : mouvement de corps rigide

Soit un domaine matériel occupant la configuration $\mathcal{D}_0$ à l'instant initial et la configuration $\mathcal{D}$ à l'instant t. Soit $\vec{\chi}$ la transformation entre les deux configurations qui associe à chaque point matériel occupant initialement la position $\vec{x}_0$ dans $\mathcal{D}_0$ la position $\vec{x}$ dans $\mathcal{D}$: $\vec{x}=\vec{\chi}(\vec{x}_0,t)$.

Pour une transformation de la forme $\vec{\chi}(\vec{x}_0,t)=\underline{\underline{R}}(t)\vec{x}_0+\vec{c}(t)$, trouver les conditions sur le tenseur $\underline{\underline{R}}$ permettant de conserver les distances, les angles et l'orientation.

Exercice 16

Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs de gradient $\underline{\nabla}\vec{U}$. Soit $\vec{W}$ le vecteur axial associé à la partie antisymétrique de $\underline{\nabla}\vec{U}$. Montrer que :

$$\vec{W}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{U}$$

Exercice 17

Soient $T(\vec{x})$ un champ de scalaires et $\vec{\psi}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. Montrer que :

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\psi}}{T}\right)=\frac{1}{T}\vec{\nabla}\cdot\vec{\psi}-\frac{1}{T^2}\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T$$

Exercice 18

Soient $\vec{U}(\vec{x})$ et $\vec{V}(\vec{x})$ deux champs de vecteurs et $\underline{\underline{A}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. Montrer que :

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{A}}\vec{U}\right) = \vec{U}\cdot\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{\nabla}}\vec{U}$$

$$(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})\vec{U} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{U}\cdot\vec{U}) + (\vec{\nabla}\wedge\vec{U})\wedge\vec{U}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{U}\wedge\vec{V}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\vec{U} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{U})\vec{V} + (\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})\vec{V} - (\underline{\underline{\nabla}}\vec{V})\vec{U} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{U}\otimes\vec{V} - \vec{V}\otimes\vec{U}\right)$$

Exercice 19 : formules de Green

Soient $f(\vec{x})$ et $g(\vec{x})$ deux champs de scalaires définis en tout point d'un domaine Ω. Soit $\vec{n}$ le champ des normales sortantes de la frontière $\partial\Omega$ de Ω. Montrer que :

$$\int_\Omega \vec{\nabla}\cdot(f\vec{\nabla}g)\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega} f(\vec{\nabla}g)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}$$

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega} (f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}$$

Exercice 20 : conditions de compatibilité

Soit $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs symétriques d'ordre 2. On se propose de trouver le champ vectoriel $\vec{U}(\vec{x})$ dont dérive $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ au sens suivant :

$$\underline{\underline{S}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} + (\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})^T\right)$$

Ce problème n'a de solution que si et seulement si le champ $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ satisfait la condition suivante :

$$\vec{\nabla}\wedge\left[\left(\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{S}}\right)^T\right] = \underline{\underline{0}} \qquad (\star)$$

1) Commençons par vérifier les identités suivantes :

$$\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} = \underline{\underline{0}}, \quad \underline{\underline{1}}:\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{S}} = 0$$

2) La condition $(\star)$ est nécessaire. Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ vectoriel et soit $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ la partie symétrique de son gradient. Montrer que :

$$\left(\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{S}}\right)^T = \frac{1}{2}\underline{\underline{\nabla}}(\vec{\nabla}\wedge\vec{U}) \qquad (\star\star)$$

En déduire la condition annoncée sur $\underline{\underline{S}}$.

3) La condition $(\star)$ est suffisante. Soit maintenant un champ de tenseurs symétriques $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ vérifiant la condition $(\star)$. Cherchons le champ $\vec{U}(\vec{x})$ tel que : $\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U}+(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})^T\right) = \underline{\underline{S}}(\vec{x})$. La démonstration repose sur le théorème suivant. *Dans un domaine simplement connexe Ω, le problème :*

$$\begin{cases} \textit{trouver } \vec{U}(\vec{x}) \textit{ tel que} \\ \underline{\underline{\nabla}}\vec{U}(\vec{x}) = \underline{\underline{T}}(\vec{x}) \; \forall \vec{x} \in \Omega \end{cases}$$

admet une solution $\vec{U}$ si et seulement si $\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{0}}$.

   a) En vertu de ce théorème, si le champ $\underline{\underline{S}}$ satisfait la condition $(\star)$, alors l'équation $(\star\star)$ admet une solution. Montrer que l'inconnue de l'équation $(\star\star)$ est le vecteur axial $\vec{A}$ du tenseur antisymétrique $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\nabla}}\vec{U} - \underline{\underline{S}}$:

$$\underline{\underline{\nabla}}\vec{A} = \left(\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{S}}\right)^T$$

   La solution de cette équation différentielle, d'inconnue $\vec{A}$, admet une solution grâce à la condition $(\star)$.

   b) Le champ recherché $\vec{U}(\vec{x})$ est alors solution de l'équation différentielle :

$$\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} = \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{\underline{\eta}}}\vec{A}$$

   Montrer que cette équation n'a de solution que si :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

   Vérifier que cette condition est satisfaite grâce à la symétrie de $\underline{\underline{S}}$.

En conclusion, le champ $\vec{U}(\vec{x})$ duquel dérive $\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U}+(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})^T\right) = \underline{\underline{S}}(\vec{x})$ existe à condition que $\underline{\underline{S}}$ satisfait $(\star)$. Ce champ n'est toutefois pas unique, puisqu'il est défini, comme $\vec{A}$, à un champ vectoriel uniforme près. Les 6 équations formées par la condition $(\star)$, ne faisant intervenir que les dérivées secondes des composantes de $\underline{\underline{S}}$, sont appelées **conditions de compatibilité**.

Exercice 21

Soit une rotation $\underline{\underline{R}}$ d'axe le vecteur unitaire $\vec{n}$ et d'angle θ. Montrer que :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}(q_0, \vec{q}) &= \underline{\underline{1}} + 2q_0\underline{\underline{W}}(\vec{q}) + 2\underline{\underline{W}}^2(\vec{q}) \\ &= 2(q_0^2 - \frac{1}{2})\underline{\underline{1}} + 2q_0\underline{\underline{W}}(\vec{q}) + 2\vec{q}\otimes\vec{q} \end{aligned}$$

$$q_0 = \cos\frac{\theta}{2}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} a_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \sin\frac{\theta}{2}\vec{n} \;\; \text{et} \;\; q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

où $\underline{\underline{W}}(\vec{q})$ est le tenseur antisymétrique de vecteur axial $\vec{q}$. Dans $\mathbb{R}^4$, la rotation $\underline{\underline{R}}$ est donc représentée par (q_0, q_1, q_2, q_3) (coordonnées du **quaternion** $q_0 + \vec{q}$ tel que $q_0^2 + \|\vec{q}\|^2 = 1$).

Exercice 22 : tenseur d'élasticité pour un matériau isotrope

Le comportement élastique linéaire d'un matériau peut être décrit par une relation de la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$, exprimant le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction du tenseur symétrique des déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$. En utilisant les théorèmes de représentation, monter que cette relation peut s'écrire sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\varepsilon}}$, avec :

$$\underset{\sim}{H} = c_1 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + c_2 \underline{\underline{1}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\underline{1}}$$

où les c_i sont des constantes.

Exercice 23 : tenseur d'élasticité pour un matériau isotrope transverse

Un matériau isotrope transverse d'axe $\vec{e}$ est un matériau isotrope uniquement dans le plan perpendiculaire à $\vec{e}$. Son comportement élastique linéaire peut être décrit par une relation de la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{e}})$, exprimant le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction du tenseur symétrique des déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et du tenseur $\underline{\underline{e}} = \vec{e} \otimes \vec{e}$. En utilisant les théorèmes de représentation, monter que cette relation peut s'écrire sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\varepsilon}}$, avec :

$$\underset{\sim}{H} = c_1 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + c_2 \underline{\underline{1}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\underline{1}} + c_3 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{e}} + c_4 \underline{\underline{e}} \otimes \underline{\underline{1}} + c_5 \underline{\underline{e}} \otimes \underline{\underline{e}} + c_6 \left(\underline{\underline{e}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{1}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\underline{e}} \right)$$

où les c_i sont des constantes. Pour que $\underset{\sim}{H}$ possède sa symétrie majeure, montrer qu'il suffit d'assurer la condition $c_3 = c_4$.

Exercice 24 : gradients d'une fonction scalaire isotrope

Pour modéliser le comportement non linéaire (plastique, viscoplastique...) des matériaux solides, le gradient d'une fonction scalaire F, isotrope du tenseur symétrique des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, est souvent utilisé pour le calcul des déformations irréversibles. Calculer ce gradient pour les deux triplets d'invariants $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et $(\mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}, \|\underline{\underline{\sigma}}'\|, \theta)$, avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

(1) Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

(2) Cinématique du milieu continu

(3) Lois de bilan

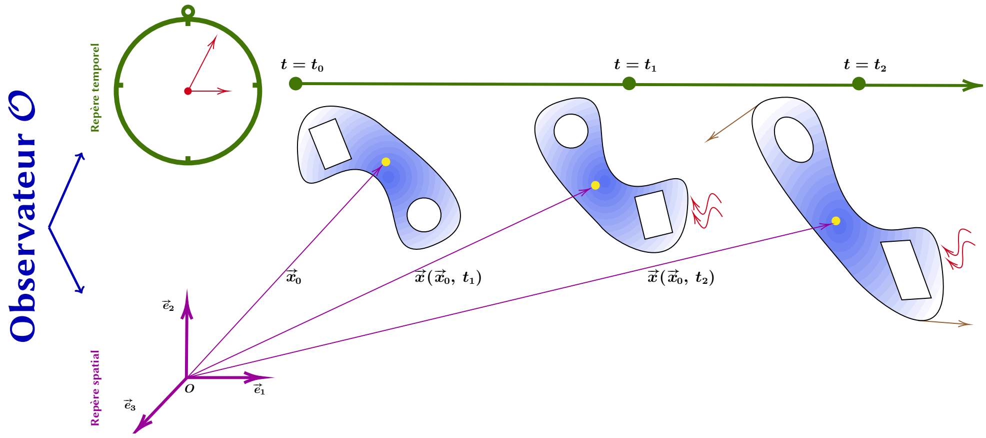
(4) Lois de comportement

(5) Thermoélasticité linéarisée

Plan du chapitre

1 Référentiels, invariance et objectivité **2**
1.1 Observateurs équivalents 3
1.2 Invariance, objectivité 5
2 Description du mouvement **8**
2.1 Description lagrangienne, eulérienne 11
2.2 Correspondance entre les deux descriptions 12
2.3 Gradient de la transformation 14
2.4 Jacobien de la transformation 16
2.5 Changement de référentiel 17
3 Déformations **18**
3.1 Tenseurs de Cauchy-Green 18
3.2 Tenseur des déformations de Green-Lagrange 20
3.3 Déformations pures et rotation 22
3.4 Changement de référentiel 25
4 Dérivée particulaire (matérielle) **27**
5 Vitesses de déformation **29**
5.1 Tenseur gradient des vitesses 29
5.2 Tenseur vitesse de rotation 31
5.3 Changement de référentiel 32
6 Mouvement d'un domaine **33**
6.1 Théorème de transport de Reynolds 34
6.2 Lien entre les taux de variation 35

1. Référentiels, invariance et objectivité



Le mouvement d'un corps ne peut être défini que par rapport à un **référentiel** ou **observateur** : **un repère spatial** + **un repère temporel (chronologie)**.

Pour un observateur $\mathcal{O}$, un événement est représenté par le couple $(\vec{x}, t)$, où $\vec{x}$ est la position et t l'instant. Le même événement, peut être décrit par un deuxième observateur $\mathcal{O}^\star$ par le couple $(\vec{x}^\star, t^\star)$.

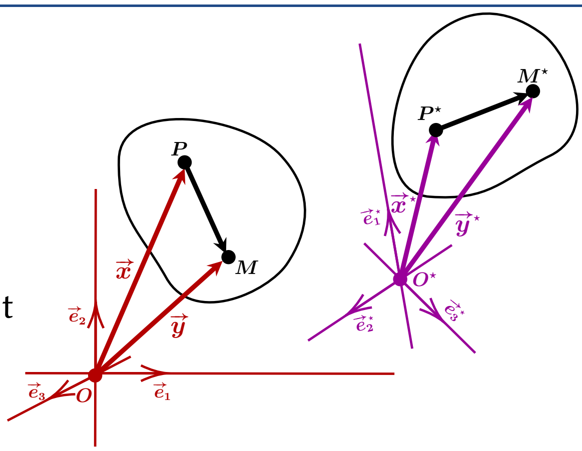
D'où la question : comment relier les observations effectuées par différents **observateurs équivalents**.

1. Référentiels, invariance et objectivité

1.1. Observateurs équivalents

Deux observateurs sont équivalents si :

- entre deux points quelconques, ils mesurent la même distance ;
- entre deux vecteurs quelconques, ils mesurent le même angle et la même orientation ;
- entre deux évènements quelconques, ils mesurent le même temps écoulé.



L'observateur $\mathcal{O}$ note $\overrightarrow{PM} = \vec{v} = \vec{x} - \vec{y}$.

L'observateur $\mathcal{O}^\star$ note $\overrightarrow{P^\star M^\star} = \vec{v}^\star = \vec{y}^\star - \vec{x}^\star$.

Ces exigences sont respectées si et seulement si nous avons :

$$\vec{v}^\star = \underline{\underline{Q}}(t)\,\vec{v}, \quad t^\star = t + \alpha$$

où $\underline{\underline{Q}}$ **est une rotation** et α **une constante** ($\alpha = 0$ dans la suite). Ce sont les formules de **changement d'observateur (ou de référentiel)**.

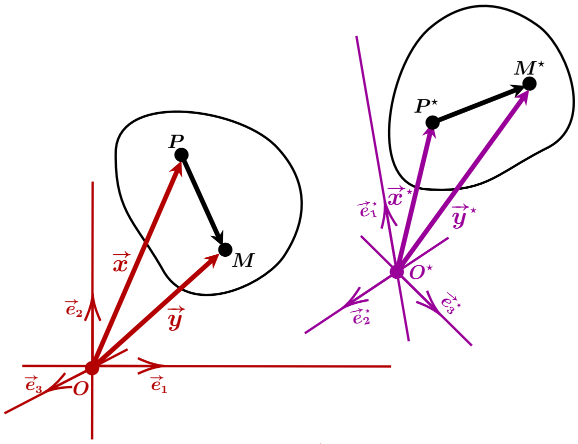
1.1. Observateurs équivalents

Il vient :

$$\vec{x}^\star = \underline{\underline{Q}}(t)\vec{x} + \vec{c}(t)$$

avec

$$\vec{c}(t) = \vec{y}^\star - \underline{\underline{Q}}(t)\vec{y}$$



Mathématiquement, c'est la même formule que lors d'un mouvement de corps rigide observé par un seul observateur, alors qu'il s'agit ici de deux observateurs regardant le même événement.

Remarque : on dit que les deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^\star$ coïncident à l'instant $t = t_0$ si :

$$\underline{\underline{Q}}(t_0) = \underline{\underline{1}}, \quad \vec{c}(t_0) = \vec{0}$$

1. Référentiels, invariance et objectivité

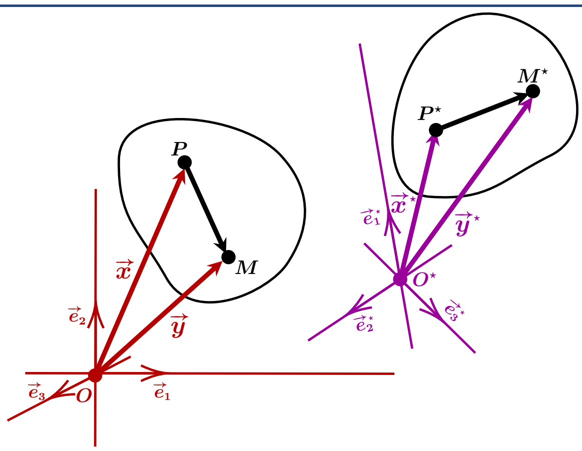
1.2. Invariance, objectivité

Dans son repère $\left(O, \ \{\vec{e}_i\}\right)$, l'observateur $\mathcal{O}$ note :

$$\overrightarrow{PM} = \vec{v} = v_i \vec{e}_i$$

Dans son repère $\left(O^\star, \ \{\vec{e}_i^\star\}\right)$, l'observateur $\mathcal{O}^\star$ note :

$$\overrightarrow{P^\star M^\star} = \vec{v}^\star = v_i^\star \vec{e}_i^\star.$$



Les scalaires notés par chacun des deux observateurs sont les mêmes si les vecteurs de base respectent eux-mêmes la formule de changement d'observateur :

$$\vec{e}_i^\star = \underline{\underline{Q}}\,\vec{e}_i$$

En effet : $v_i^\star = v_i \Leftrightarrow \vec{v}^\star \cdot \vec{e}_i^\star = \vec{v} \cdot \vec{e}_i \Leftrightarrow \underline{\underline{Q}}\,\vec{v} \cdot \vec{e}_i^\star = \vec{v} \cdot \vec{e}_i, \ \forall\, \vec{v} \Rightarrow \vec{e}_i^\star = \underline{\underline{Q}}\,\vec{e}_i$

Dans ces conditions, on dit que ces scalaires sont des grandeurs **intrinsèques**, **invariantes par changement d'observateur** ou **objectives**.

1. Référentiels, invariance et objectivité

1.2. Invariance, objectivité

Soit $u(\vec{x},t)$ un champ de scalaires, $\vec{v}(\vec{x},t)$ un champ de vecteurs et $\underline{\underline{A}}(\vec{x},t)$ un champ de tenseurs. Ils sont dits **invariants par changement d'observateur** s'ils vérifient :

$$u^\star(\vec{x}^\star,t) = u(\vec{x},t)$$

$$\vec{v}^\star(\vec{x}^\star,t) = \vec{v}(\vec{x},t)$$

$$\underline{\underline{A}}^\star(\vec{x}^\star,t) = \underline{\underline{A}}(\vec{x},t)$$

Ils sont dits **objectifs** s'ils vérifient :

$$u^\star(\vec{x}^\star,t) = u(\vec{x},t)$$

$$\vec{v}^\star(\vec{x}^\star,t) = \underline{\underline{Q}}(t)\vec{v}(\vec{x},t)$$

$$\underline{\underline{A}}^\star(\vec{x}^\star,t) = \underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{A}}(\vec{x},t)\underline{\underline{Q}}^T(t)$$

1.2. Invariance, objectivité

Remarques importantes :

- Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ objectif transforme un vecteur objectif en un autre vecteur objectif. Posons $\vec{u} = \underline{\underline{A}}\vec{v}$ et $\vec{u}^\star = \underline{\underline{A}}^\star\vec{v}^\star$, avec $\vec{v}^\star = \underline{\underline{Q}}\vec{v}$ et $\underline{\underline{A}}^\star = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T$, il vient :

$$\vec{u}^\star = \underline{\underline{A}}^\star\vec{v}^\star = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T\vec{v}^\star = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\vec{v} = \underline{\underline{Q}}\vec{u}$$

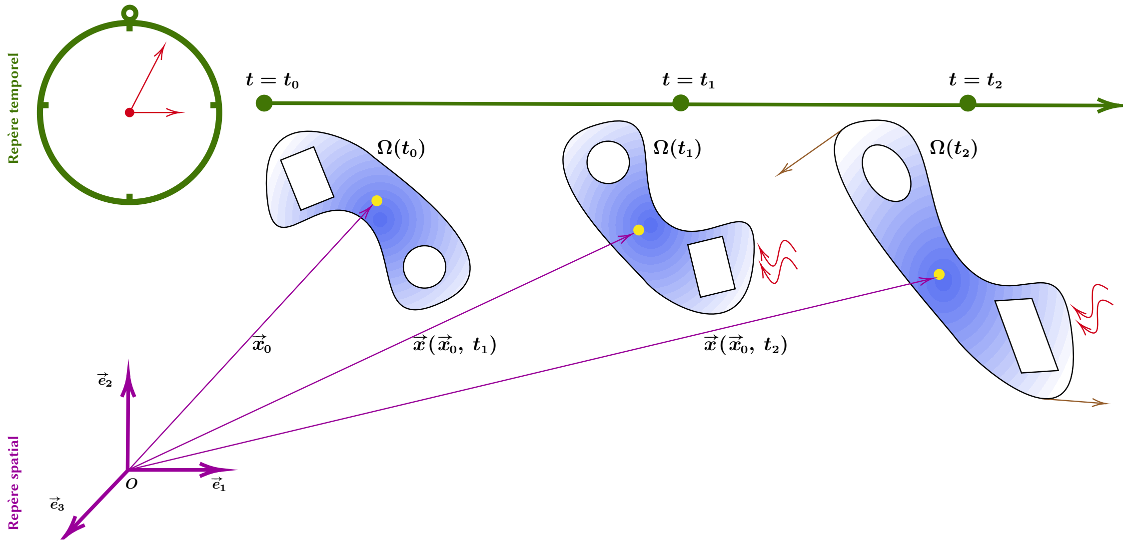
- Pour un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}^\star = \underline{\underline{Q}}\vec{v}$, on a :

$$v_i^\star = \vec{v}^\star\cdot\vec{e}_i^\star = \underline{\underline{Q}}\vec{v}\cdot\vec{e}_i^\star = \vec{v}\cdot\underline{\underline{Q}}^T\vec{e}_i^\star = \vec{v}\cdot\vec{e}_i = v_i$$

- Les matrices $\left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{e}_i\}}$ et $\left[\underline{\underline{A}}^\star\right]_{\{\vec{e}_i^\star\}}$ coïncident. En effet :

$$A_{ij}^\star = \vec{e}_i^\star\cdot\underline{\underline{A}}^\star\vec{e}_j^\star = \underline{\underline{Q}}\vec{e}_i\cdot\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}}\vec{e}_j = \vec{e}_i\cdot\underline{\underline{A}}\vec{e}_j = A_{ij}$$

2. Description du mouvement

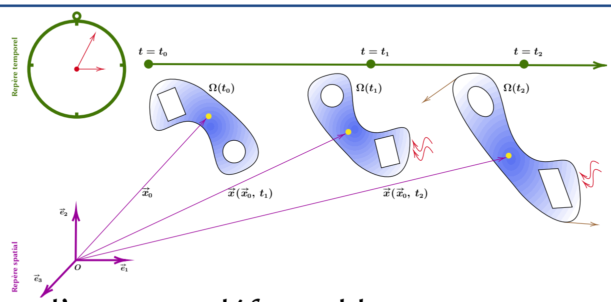


$\Omega(t)$ est la **configuration** prise par le domaine en fonction du temps.

La configuration $\Omega(t_0) \equiv \Omega_0$ s'appelle **configuration de référence**.

La configuration $\Omega(t > t_0) \equiv \Omega$ s'appelle **configuration actuelle**.

2. Description du mouvement



La fonction vectorielle $\vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$:

$$\begin{aligned} \vec{\chi} :\ & \Omega_0 \longrightarrow \Omega \\ & \vec{x}_0 \longmapsto \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t) \end{aligned}$$

caractérise la **transformation** entre les deux configurations Ω_0 et Ω.
C'est la vision **lagrangienne** du mouvement d'un corps déformable.

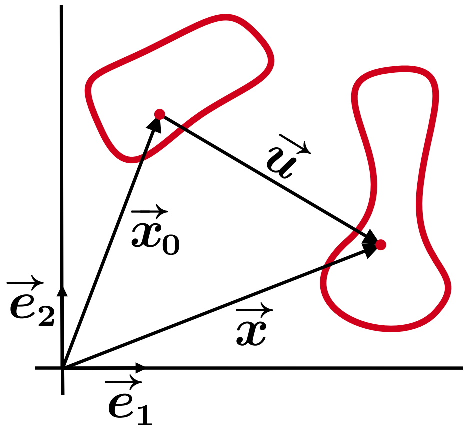
Propriétés de la transformation

- Elle vérifie à l'instant initial t_0 : $\vec{x}_0 = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t_0)$.
- Elle réalise une bijection entre Ω_0 et Ω, $\forall t$:
$$\forall \vec{x} \in \Omega,\ \exists! \vec{x}_0 \in \Omega_0 \mid \vec{x} = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$$
- Elle admet une fonction réciproque $\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$, telle que :
$$\vec{x}_0 = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$
- Elle doit être, ainsi que sa fonction réciproque, continûment différentiable par rapport à l'ensemble des variables d'espace et de temps (sauf sur certaines surfaces de discontinuité).

2. Description du mouvement

On appelle **déplacement** à l'instant t de la particule initialement située en $\vec{x}_0$, le champ de vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{u}(\vec{x}_0, t) &= \vec{\chi}(\vec{x}_0, t) - \vec{x}_0 \\ &= \vec{x} - \vec{x}_0\end{aligned}$$



On appelle **vitesse** à l'instant t de la particule initialement située en $\vec{x}_0$, le champ de vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{x}_0, t) &= \partial_t \vec{\chi}(\vec{x}_0, t) \\ &= \partial_t \vec{u}(\vec{x}_0, t)\end{aligned}$$

On appelle **accélération** à l'instant t de la particule initialement située en $\vec{x}_0$, le champ de vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{a}(\vec{x}_0, t) &= \partial_t^2 \vec{\chi}(\vec{x}_0, t) \\ &= \partial_t^2 \vec{u}(\vec{x}_0, t)\end{aligned}$$

2. Description du mouvement

2.1. Description lagrangienne, eulérienne

La description **lagrangienne** nécessite la connaissance d'une configuration de référence. Elle est bien adaptée aux problèmes de **mécanique des solides** pour lesquels le suivi des particules, depuis une configuration initiale, est indispensable pour l'étude des déformations.

- Les **variables de Lagrange** sont : $\vec{x}_0, t$.
- Les **inconnues de Lagrange** sont : $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$.

En **mécanique des fluides**, la configuration de référence ne joue généralement aucun rôle. Ce qui compte le plus c'est la vitesse des particules : c'est la vision **eulérienne** du mouvement, qui consiste à se donner la vitesse $\vec{v}$ de la particule qui passe à l'instant t par le point $\vec{x}$ de la configuration actuelle : $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$.

- Les **variables d'Euler** sont : $\vec{x}, t$.
- Les **inconnues d'Euler** sont : $\vec{v}(\vec{x}, t)$.

2. Description du mouvement

2.2. Correspondance entre les deux descriptions

Considérons une grandeur physique $\mathcal{G}$:

- $g(\vec{x}, t)$ la valeur de $\mathcal{G}$ exprimée à l'aide des variables d'Euler ;
- $G(\vec{x}_0, t)$ la valeur de $\mathcal{G}$ exprimée à l'aide des variables de Lagrange.

En écrivant $\mathcal{G} = G(\vec{x}_0, t) = g(\vec{x}, t)$, il vient :

$$\begin{aligned} G(\vec{x}_0, t) &= g(\vec{\chi}(\vec{x}_0, t), t) \\ g(\vec{x}, t) &= G(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ si on connaît la transformation $\vec{\chi}$, on peut exprimer une grandeur soit à l'aide des variables de Lagrange soit à l'aide des variables d'Euler.

Afin d'alléger les notations, on convient généralement de ne pas distinguer les notations g et G, et on écrit :

$$\mathcal{G} = g(\vec{x}_0, t) = g(\vec{x}, t)$$

2. Description du mouvement

2.2. Correspondance entre les deux descriptions

Réciproquement, peut-on à partir de la description eulérienne déterminer la description lagrangienne ?
Par définition :

$$\partial_t \vec{\chi}(\vec{x}_0, t) = \vec{v}(\vec{x}_0, t) = \vec{v}(\vec{x}, t)$$

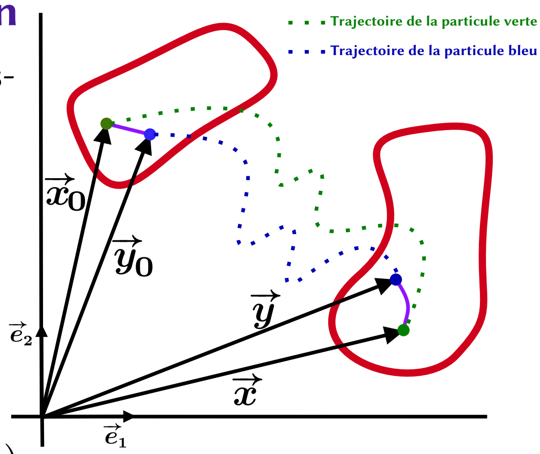
Pour une **particule donnée**, occupant initialement la position $\vec{x}_0$, sa position actuelle $\vec{x}$ est fonction uniquement du temps :

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t) = \vec{x}(t)$$

$$\Rightarrow \partial_t \vec{\chi}(\vec{x}_0, t) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}(\vec{x}, t)$$

Il s'agit d'un système différentiel dont la solution, sous réserve de conditions de régularité sur $\vec{v}$ et de la connaissance de la condition initiale $\vec{x}(t = t_0) = \vec{x}_0$, permet de retrouver la représentation lagrangienne $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$.

2.3. Gradient de la transformation



Considérons un point matériel occupant à l'instant initial la positions $\vec{x}_0$:

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$$

Effectuons un développement limité de $\vec{\chi}$ au voisinage de $\vec{x}_0$:

$$\vec{\chi}(\vec{x}_0 + \mathrm{d}\vec{x}_0, t) =$$

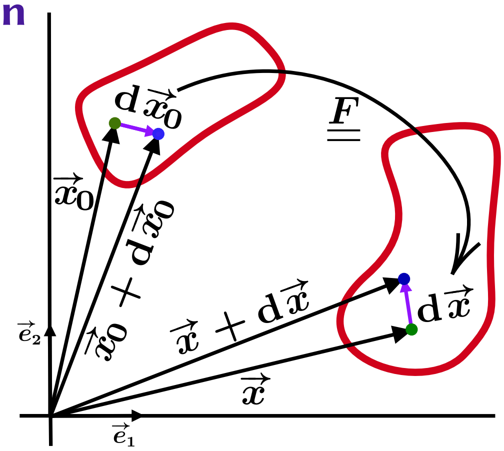
$$\vec{\chi}(\vec{x}_0, t) + \partial_{\vec{x}_0}\vec{\chi}(\vec{x}_0, t)\mathrm{d}\vec{x}_0 + o\left(\|\mathrm{d}\vec{x}_0\|\right)$$

Désignons par $\vec{y} = \vec{\chi}(\vec{y}_0, t)$ la position actuelle de la particule occupant initialement la position $\vec{y}_0 = \vec{x}_0 + \mathrm{d}\vec{x}_0$, il vient :

$$\vec{y} - \vec{x} = \partial_{\vec{x}_0}\vec{\chi}(\vec{x}_0, t)(\vec{y}_0 - \vec{x}_0) + o\left(\|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\|\right)$$

Lorsque $\|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\| \to 0$, $\vec{y} - \vec{x} = \partial_{\vec{x}_0}\vec{\chi}(\vec{x}_0, t)\mathrm{d}\vec{x}_0 = \mathrm{d}\vec{x}$.

2.3. Gradient de la transformation



Il vient :

$$\mathrm{d}\vec{x} = \underline{\underline{F}}\mathrm{d}\vec{x}_0$$

avec

$$\underline{\underline{F}}(\vec{x}_0, t) = \partial_{\vec{x}_0}\vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$$

Le tenseur $\underline{\underline{F}}$ est le **tenseur gradient de la transformation** en $\vec{x}_0$ à l'instant t .

L'égalité $\mathrm{d}\vec{x} = \underline{\underline{F}}\mathrm{d}\vec{x}_0$ est la relation de **transport convectif** d'un élément de **fibre matérielle**. Le tenseur $\underline{\underline{F}}$ met en correspondance les fibres matérielles initiale et actuelle, avec :

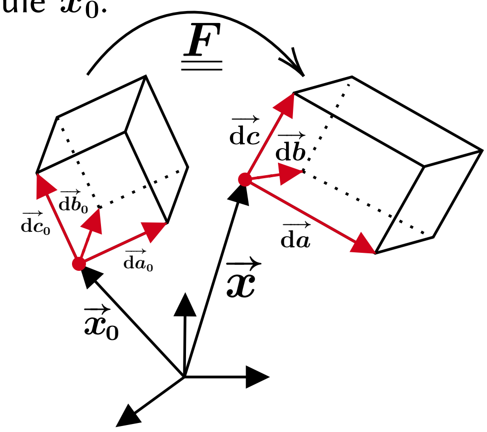
$$\underline{\underline{F}}(\vec{x}_0, t = t_0) = \underline{\underline{1}}$$

En écrivant $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}(\vec{x}_0, t)$, il vient : $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}$

$$\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u} := \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{x}_0}, \quad \underline{\underline{\nabla}}\vec{u} := \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{x}}, \quad \underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u} = (\underline{\underline{\nabla}}\vec{u})\underline{\underline{F}}$$

2.4. Jacobien de la transformation

Considérons un bloc parallélépipédique de matière engendré par trois fibres élémentaires $\overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}_0$, $\overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}_0$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}_0$ issues d'une même particule $\vec{\boldsymbol{x}}_0$.



Volume du bloc initial : $\mathrm{d}\mathcal{V}_0 = \left[\overrightarrow{\mathrm{d}a}_0, \overrightarrow{\mathrm{d}b}_0, \overrightarrow{\mathrm{d}c}_0\right]$

Transport convectif :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}a} = \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}a}_0,\ \overrightarrow{\mathrm{d}b} = \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}b}_0,\ \overrightarrow{\mathrm{d}c} = \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}c}_0$$

Volume du bloc déformé :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{V} &= \left[\overrightarrow{\mathrm{d}a}, \overrightarrow{\mathrm{d}b}, \overrightarrow{\mathrm{d}c}\right] \\ &= \left[\underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}a}_0, \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}b}_0, \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}c}_0\right] = \det \underline{\underline{F}}\,\mathrm{d}\mathcal{V}_0 \end{aligned}$$

$\det \underline{\underline{F}} = J$ est le **jacobien** de la transformation, il vérifie :

$$J(\vec{x}_0, t_0) = 1,\ \ J(\vec{x}_0, t) > 0,\ \forall \vec{x}_0 \in \Omega_0, \forall t \geq t_0$$

2.5. Changement de référentiel

Soient nos deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^\star$, qui coïncident à $t = t_0$ ($\vec{x}_0^\star = \vec{x}_0$).

- $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$
- $\vec{v}(\vec{x}_0, t) = \partial_t \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$
- $\vec{a}(\vec{x}_0, t) = \partial_t^2 \vec{\chi}(\vec{x}_0, t)$

- $\vec{x}^\star = \vec{\chi}^\star(\vec{x}_0, t)$
- $\vec{v}^\star(\vec{x}_0, t) = \partial_t \vec{\chi}^\star(\vec{x}_0, t)$
- $\vec{a}^\star(\vec{x}_0, t) = \partial_t^2 \vec{\chi}^\star(\vec{x}_0, t)$

- $\vec{x}^\star - \underline{\underline{Q}}(t)\vec{x} = \vec{c}(t)$, en notant $\dot{\phi} = \dfrac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}$, $\ddot{\phi} = \dfrac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2}$, il vient :
- $\vec{v}^\star - \underline{\underline{Q}}(t)\vec{v} = \underline{\underline{\Omega}}\left(\vec{x}^\star - \vec{c}\right) + \dot{\vec{c}}$
- $\vec{a}^\star - \underline{\underline{Q}}(t)\vec{a} = \left(\dot{\underline{\underline{\Omega}}} - \underline{\underline{\Omega}}^2\right)\left(\vec{x}^\star - \vec{c}\right) + 2\underline{\underline{\Omega}}\left(\vec{v}^\star - \dot{\vec{c}}\right) + \ddot{\vec{c}}$

avec

$$\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{Q}}}\,\underline{\underline{Q}}^T,\ \ \underline{\underline{\Omega}}^T = -\underline{\underline{\Omega}},\ \ \ddot{\underline{\underline{Q}}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \dot{\underline{\underline{\Omega}}} + \underline{\underline{\Omega}}^2$$

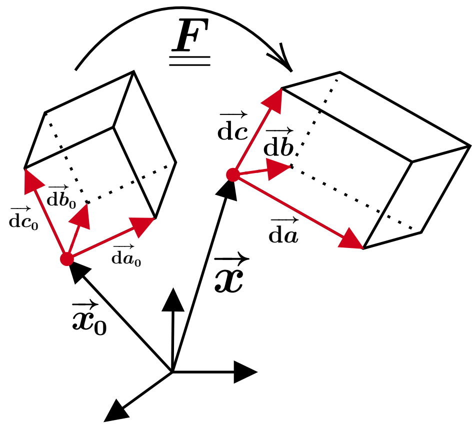
Ni la transformation, ni la vitesse, ni l'accélération sont des vecteurs objectifs. L'accélération est objective si $\dot{\vec{c}}$ et $\underline{\underline{Q}}$ sont des constantes $\Rightarrow \vec{x}^\star = \underline{\underline{Q}}_0\vec{x} + \vec{v}_0 t + \vec{c}_0$: on parle dans ce cas de **référentiels galiléens**, dit aussi **référentiel d'inertie**.

3. Déformations

3.1. Tenseurs de Cauchy-Green

Considérons les deux directions matérielles $\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$ issues de la même particule $\vec{x}_0$. Elles se transforment selon :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}a} = \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}, \quad \overrightarrow{\mathrm{d}b} = \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$$



Calculons $\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b_0} = \underline{\underline{F}}^{-1}\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}\overrightarrow{\mathrm{d}b} = \overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\underline{\underline{B}}^{-1}\overrightarrow{\mathrm{d}b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b} = \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}b_0} = \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\underline{\underline{C}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$$

avec
$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^T, \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}$$

Le tenseur $\underline{\underline{C}}$ est appelé tenseur de **Cauchy-Green à droite**.

Le tenseur $\underline{\underline{B}}$ est appelé tenseur de **Cauchy-Green à gauche**.

3. Déformations

3.1. Tenseurs de Cauchy-Green

Les tenseurs $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ vérifient :

- $\underline{\underline{C}}^T = \underline{\underline{C}}$
- $\underline{\underline{C}}$ est semi-défini positif :
$$\vec{a}\cdot\underline{\underline{C}}\,\vec{a} = \vec{a}\cdot\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}\,\vec{a} = \underline{\underline{F}}\,\vec{a}\cdot\underline{\underline{F}}\,\vec{a} = \left\|\underline{\underline{F}}\,\vec{a}\right\|^2 \geq 0$$

- $\underline{\underline{B}}^T = \underline{\underline{B}}$
- $\underline{\underline{B}}$ est semi-défini positif :
$$\vec{a}\cdot\underline{\underline{B}}\,\vec{a} = \vec{a}\cdot\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^T\vec{a} = \underline{\underline{F}}^T\vec{a}\cdot\underline{\underline{F}}^T\vec{a} = \left\|\underline{\underline{F}}^T\vec{a}\right\|^2 \geq 0$$

$\underline{\underline{F}}\,\vec{a} = \vec{0}$ avec $\vec{a} \neq \vec{0}$ ssi $\det\underline{\underline{F}} = 0$, or $\det\underline{\underline{F}} = J > 0$

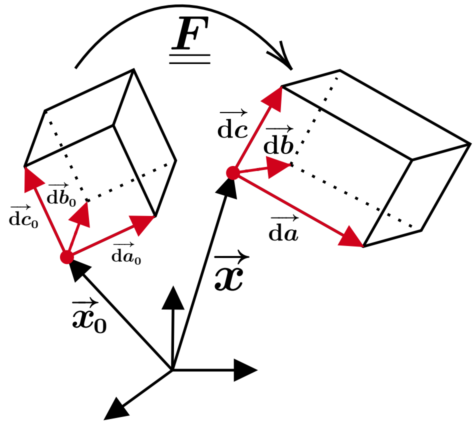
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont définis positifs.

- $\det\underline{\underline{B}} = \det\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^T = \det\underline{\underline{F}}\det\underline{\underline{F}}^T = \det\underline{\underline{F}}\det\underline{\underline{F}} = J^2 = \det\underline{\underline{C}}$

3. Déformations

3.2. Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Calculons la différence $\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b} - \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b} - \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b_0} &= \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\underline{\underline{C}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}b_0} - \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\underline{\underline{1}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}\right)\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}\\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\underline{\underline{\Delta}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}\end{aligned}$$

avec $\underline{\underline{\Delta}} = \dfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}\right)$, qui possède les propriétés suivantes :

- symétrique ;
- nul pour $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}}$;
- nul pour un mouvement de corps rigide ;
- sans dimension physique.

Il remplit des **bonnes** conditions pour servir comme **"mesure"** des déformations : c'est le **tenseur des déformations de Green-Lagrange.**

3. Déformations

3.2. Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Les tenseur $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{\Delta}}$ sont des tenseurs **lagrangiens** car ils s'appliquent sur des vecteurs relatifs à la configuration de référence. Exprimons $\underline{\underline{C}}$ en fonction de $\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}} &= \left(\underline{\underline{1}} + \left(\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}\right)^T\right)\left(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}\right)\\ &= \underline{\underline{1}} + \underbrace{\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u} + (\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T}_{\text{terme linéaire}} + \underbrace{(\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}}_{\text{terme quadratique}}\\ &= \underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}\ ,\quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u} + (\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\right)\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\Delta}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}\right) \ \Rightarrow \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}$$

Pour $\left\|\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}\right\| \ll 1$, on peut négliger le terme quadratique devant le terme linéaire (**hypothèse des transformations infinitésimales**), d'où :

$$\underline{\underline{\Delta}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est appelé **tenseur des déformations infinitésimales** ou **tenseur des déformations linéarisé.**

3.3. Déformations pures et rotation

Le tenseur gradient de la transformation étant inversible, sa décomposition polaire s'écrit :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{R}}$$

avec $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ symétriques définis positifs, et $\underline{\underline{R}}$ une rotation. On a :

$$\underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{C}}, \quad \underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{B}}$$

En introduisant la décomposition spectrale de $\underline{\underline{U}}$ sous la forme :

$$\underline{\underline{U}} = \sum_{i=1}^{3} U_i \vec{N}_i \otimes \vec{N}_i$$

Il vient :

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{R}}^T = \sum_{i=1}^{3} V_i \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i, \; V_i = U_i, \quad \vec{n}_i = \underline{\underline{R}}\vec{N}_i$$

Ainsi, $\underline{\underline{V}}$ a les mêmes valeurs propres que $\underline{\underline{U}}$, les vecteurs propres correspondants étant ceux de $\underline{\underline{U}}$ tournés par $\underline{\underline{R}}$.

3.3. Déformations pures et rotation

Considérons une fibre matérielle élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}$, transportée en $\overrightarrow{\mathrm{d}a}$ dans la configuration actuelle, et exprimons ces deux vecteurs respectivement dans la base $\left\{\vec{N}_i\right\}$ du tenseur lagrangien $\underline{\underline{U}}$ et la base $\{\vec{n}_i\}$ du tenseur eulérien $\underline{\underline{V}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}a_0} = \mathrm{d}\ell_{0i}\vec{N}_i, \; \overrightarrow{\mathrm{d}a} = \mathrm{d}\ell_i \vec{n}_i$$

Il vient :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}a} = \underline{\underline{F}}\overrightarrow{\mathrm{d}a_0} = \underline{\underline{R}}\left(\underline{\underline{U}}\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\right) = \underline{\underline{V}}\left(\underline{\underline{R}}\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\right)$$

- $\underline{\underline{R}}\left(\underline{\underline{U}}\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\ell_{0i}\underline{\underline{R}}\left(\underline{\underline{U}}\vec{N}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\ell_{0i}U_i\underline{\underline{R}}\vec{N}_i = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\ell_{0i}U_i\vec{n}_i$

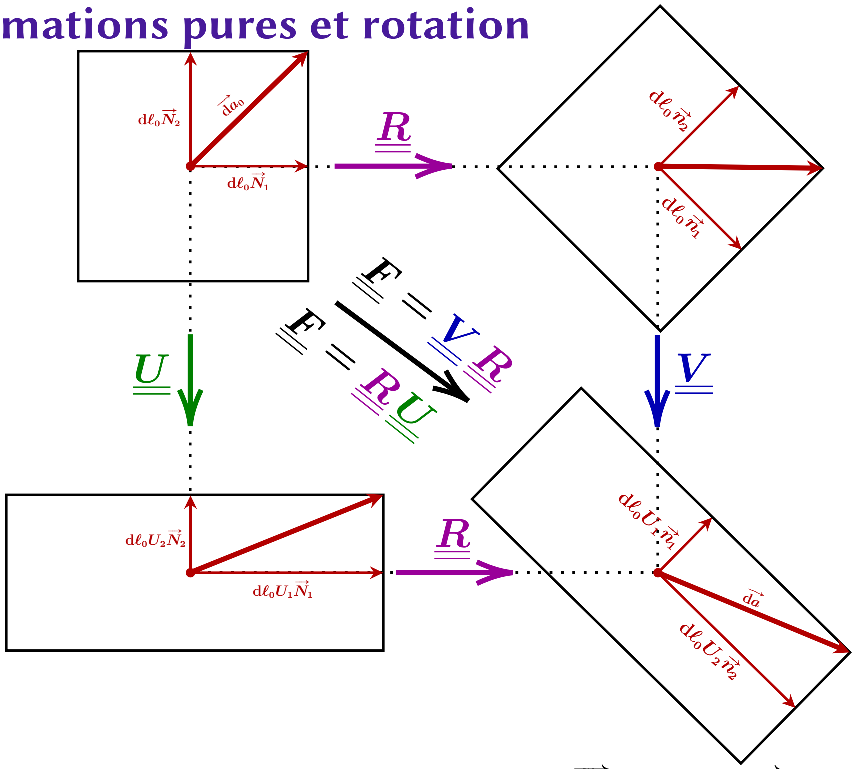
$\underline{\underline{U}}$ déforme tout d'abord la fibre initiale ($\mathrm{d}\ell_{0i} \to \mathrm{d}\ell_i = U_i\mathrm{d}\ell_{0i}$), ensuite la fibre déformée est tournée par $\underline{\underline{R}}$.

- $\underline{\underline{V}}\left(\underline{\underline{R}}\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\ell_{0i}\underline{\underline{V}}\left(\underline{\underline{R}}\vec{N}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\ell_{0i}\underline{\underline{V}}\vec{n}_i = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\ell_{0i}V_i\vec{n}_i$

$\underline{\underline{R}}$ tourne tout d'abord la fibre initiale, ensuite la fibre tournée est déformée par $\underline{\underline{V}}$ ($\mathrm{d}\ell_{0i} \to \mathrm{d}\ell_i = V_i\mathrm{d}\ell_{0i}$, avec $U_i = V_i$).

Les tenseurs $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ sont dits tenseurs des **déformations pures.**

3.3. Déformations pures et rotation



Transformation d'une fibre matérielle élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}a_0} = \mathrm{d}\ell_0(\vec{N}_1 + \vec{N}_2)$

3.4. Changement de référentiel

Le tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ est particulier : il agit sur un vecteur de la configuration de référence pour donner un vecteur de la configuration actuelle.

Configuration de référence :

L'observateur $\mathcal{O}$ note $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}$

L'observateur $\mathcal{O}^\star$ note $\overrightarrow{P^\star M^\star} = \overrightarrow{\mathrm{d}a_0^\star}$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}a_0^\star} = \underline{\underline{Q}}(t_0)\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}$$

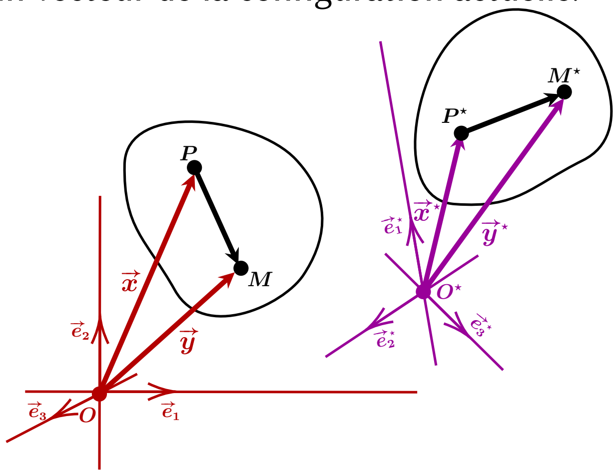
Configuration actuelle :

L'observateur $\mathcal{O}$ note $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{\mathrm{d}a}$

L'observateur $\mathcal{O}^\star$ note $\overrightarrow{P^\star M^\star} = \overrightarrow{\mathrm{d}a^\star}$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}a^\star} = \underline{\underline{Q}}(t)\overrightarrow{\mathrm{d}a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}a} = \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}, \quad \overrightarrow{\mathrm{d}a^\star} = \underline{\underline{F}}^\star\overrightarrow{\mathrm{d}a_0^\star}$$



$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{d}a} = \underline{\underline{Q}}^T(t)\underline{\underline{F}}^\star\underline{\underline{Q}}(t_0)\overrightarrow{\mathrm{d}a_0} = \underline{\underline{F}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}a_0},\ \forall\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}$, d'où :

$$\underline{\underline{F}}^\star = \underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{Q}}^T(t_0), \quad \det\underline{\underline{F}}^\star = \det\underline{\underline{F}}$$

3. Déformations

3.4. Changement de référentiel

Si nos deux observateurs coïncident à $t = t_0$ ($\vec{x}_0^\star = \vec{x}_0$), il vient :

$$\underline{\underline{F}}^\star(\vec{x}_0, t) = \underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{F}}(\vec{x}_0, t)$$

- $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}$
- $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^T$
- $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{R}}$

- $\underline{\underline{C}}^\star = \underline{\underline{F}}^{\star T}\underline{\underline{F}}^\star$
- $\underline{\underline{B}}^\star = \underline{\underline{F}}^\star\underline{\underline{F}}^{\star T}$
- $\underline{\underline{F}}^\star = \underline{\underline{R}}^\star\underline{\underline{U}}^\star = \underline{\underline{V}}^\star\underline{\underline{R}}^\star$

- $\underline{\underline{C}}^\star = \underline{\underline{F}}^{\star T}\underline{\underline{F}}^\star = \underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{C}} \Rightarrow \underline{\underline{\Delta}}^\star = \underline{\underline{\Delta}}$
- $\underline{\underline{B}}^\star = \underline{\underline{F}}^\star\underline{\underline{F}}^{\star T} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{B}}\underline{\underline{Q}}^T$
- $\underline{\underline{F}}^\star = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{F}} = \left(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\right)\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{R}} = \left(\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{V}}\underline{\underline{Q}}^T\right)\left(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\right)$

L'unicité d'une telle décomposition permet d'avoir :

$$\underline{\underline{R}}^\star = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}},\ \ \underline{\underline{U}}^\star = \underline{\underline{U}},\ \ \underline{\underline{V}}^\star = \underline{\underline{Q}}\underline{\underline{V}}\underline{\underline{Q}}^T$$

Les tenseurs $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{\Delta}}$ et $\underline{\underline{U}}$ sont invariants. Les tenseurs $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{V}}$ sont objectifs. Le tenseur $\underline{\underline{R}}$ se transforme comme $\underline{\underline{F}}$.

4. Dérivée particulaire (matérielle)

Soit $\phi(\vec{x}, t)$ un champ de scalaires, sa différentielle s'écrit :

$$\mathrm{d}\phi = \left(\partial_{\vec{x}}\phi\right)\cdot\mathrm{d}\vec{x} + \partial_t\phi\mathrm{d}t = \left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\mathrm{d}\vec{x} + \partial_t\phi\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\vec{x}(\vec{x}_0, t) = \underline{\underline{F}}\mathrm{d}\vec{x}_0 + \vec{v}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\phi = \vec{\nabla}\phi\cdot\underline{\underline{F}}\mathrm{d}\vec{x}_0 + \dot{\phi}\mathrm{d}t$$

Avec :

$$\dot{\phi} \equiv \frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} := \left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\vec{v} + \partial_t\phi$$

Pour la même particule ($\mathrm{d}\vec{x}_0 = \vec{0}$), et pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$, la particule s'est déplacée de $\vec{v}\mathrm{d}t$, et on a $\mathrm{d}\phi = \dot{\phi}\mathrm{d}t$.

Le champ $\dot{\phi}(\vec{x}, t)$ est une **dérivée particulaire** de ϕ, qui contient :

- un terme $\partial_t\phi$ dû à la non-stationnarité de ϕ ;
- un terme **convectif** $\left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\vec{v}$ dû au mouvement de la particule.

4. Dérivée particulaire (matérielle)

Pour $\vec{\phi}(\vec{x},t)$ un champ de vecteurs, on a :

$$\dot{\phi}_i = (\partial_{\vec{x}}\phi_i)\cdot\vec{v} + \partial_t\phi_i = (\partial_{x_j}\phi_i)v_j + \partial_t\phi_i$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\phi}} = (\underline{\underline{\nabla}}\vec{\phi})\vec{v} + \partial_t\vec{\phi}$$

Pour $\underline{\underline{\phi}}(\vec{x},t)$ un champ de tenseurs d'ordre 2, on a :

$$\dot{\phi}_{ij} = (\partial_{\vec{x}}\phi_{ij})\cdot\vec{v} + \partial_t\phi_{ij} = (\partial_{x_k}\phi_{ij})v_k + \partial_t\phi_{ij}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{\underline{\phi}}} = (\underline{\underline{\underline{\nabla\phi}}})\vec{v} + \partial_t\underline{\underline{\phi}}$$

Remarque : pour un champ $\phi(\vec{x}_0,t)$, on a :

$$\dot{\phi} = \frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} = \partial_t\phi$$

5. Vitesses de déformation

5.1. Tenseur gradient des vitesses

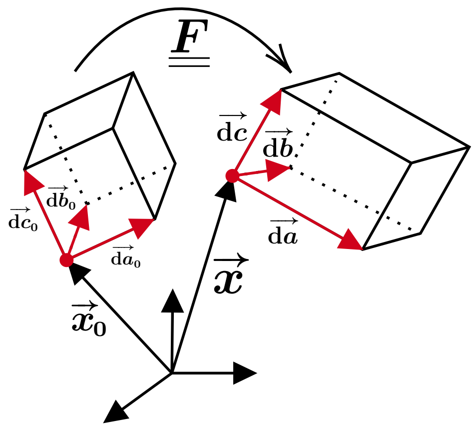
Évolution des fibres matérielles :

$$\overbrace{\overrightarrow{\mathrm{d}a}}^{\bullet} = \dot{\underline{\underline{F}}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}a_0} = \dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}\overrightarrow{\mathrm{d}a}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\underline{F}}} &= \partial_t\big(\partial_{\vec{x}_0}\vec{\chi}(\vec{x}_0,t)\big) = \partial_{\vec{x}_0}\big(\partial_t\vec{\chi}(\vec{x}_0,t)\big)\\ &= \partial_{\vec{x}_0}\vec{v} = \partial_{\vec{x}}\vec{v}\,\partial_{\vec{x}_0}\vec{x} = (\underline{\underline{\nabla}}\vec{v})\underline{\underline{F}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\overrightarrow{\mathrm{d}a}}^{\bullet} = \underline{\underline{L}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}a} \quad \text{avec}$$

$$\underline{\underline{L}}(\vec{x},t) = \underline{\underline{\nabla}}\vec{v}(\vec{x},t) = \dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}$$

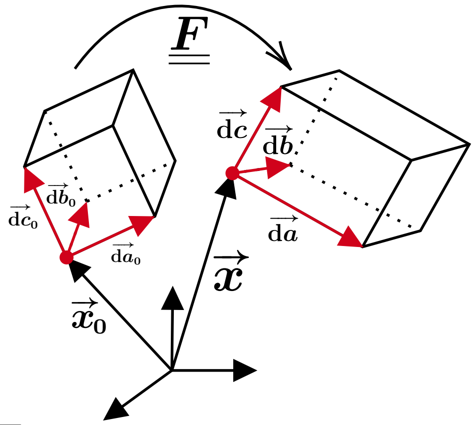


$$\begin{aligned}\overbrace{\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b}}^{\bullet} &= \overbrace{\overrightarrow{\mathrm{d}a}}^{\bullet}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b} + \overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overbrace{\overrightarrow{\mathrm{d}b}}^{\bullet}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot(\underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{L}})\overrightarrow{\mathrm{d}b}\\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\underline{\underline{D}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}b}\end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T) = \underline{\underline{L}}^S$$

Le tenseur $\underline{\underline{L}}$ est appelé **tenseur gradient des vitesses**. Le tenseur $\underline{\underline{D}}$ est appelé **tenseur taux de déformation** ou **tenseur vitesse de déformation**.

5. Vitesses de déformation

5.1. Tenseur gradient des vitesses



$$\overbrace{\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b}}^{\bullet} = 2\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\underline{\underline{D}}\overrightarrow{\mathrm{d}b}$$
$$= 2\underline{\underline{F}}\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{F}}\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$$
$$= 2\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{F}}\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$$

Or $\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b} - \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b_0} = 2\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\underline{\underline{\Delta}}\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$

$$\Rightarrow \overbrace{\overrightarrow{\mathrm{d}a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}b}}^{\bullet} = 2\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\cdot\dot{\underline{\underline{\Delta}}}\overrightarrow{\mathrm{d}b_0} \Rightarrow \dot{\underline{\underline{\Delta}}} = \frac{1}{2}\dot{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{F}}$$

De la relation $\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}$, il vient :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \overbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}}^{\bullet} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u} + (\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\underline{\underline{D}} + (\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}$$

Le tenseur $\underline{\underline{D}}$ apparaît comme la dérivée particulaire de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ que si on néglige les termes du 2e ordre.

5. Vitesses de déformation

5.2. Tenseur vitesse de rotation

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}^S + \underline{\underline{L}}^A = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}$$

Le tenseur $\underline{\underline{W}}$ est appelé **tenseur taux de rotation** ou **tenseur vitesse de rotation** :

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\vec{v} - (\underline{\underline{\nabla}}\vec{v})^T)$$

$$\underline{\underline{W}}\vec{x} = \vec{W}\wedge\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{x},\ \forall\vec{x}\in\vec{\mathscr{E}}$$

Le vecteur $\vec{W} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{v}$ est appelé **vecteur taux de rotation** ou **vecteur vitesse de rotation** ou encore **vecteur tourbillon** (mécanique des fluides).

Les tenseurs $\underline{\underline{L}}$, $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{W}}$ sont des tenseurs **eulériens** car ils s'appliquent sur des vecteurs relatifs à la configuration actuelle.

5. Vitesses de déformation

5.3. Changement de référentiel

Si nos deux observateurs coïncident à $t = t_0$ ($\vec{x}_0^\star = \vec{x}_0$), il vient :

$$\underline{\underline{F}}^\star(\vec{x}_0, t) = \underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{F}}(\vec{x}_0, t)$$

- $\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}$
- $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}$
- $\dot{\underline{\underline{\Delta}}} = \underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{F}}$

- $\underline{\underline{L}}^\star = \dot{\underline{\underline{F}}}^\star\underline{\underline{F}}^{\star-1}$
- $\underline{\underline{L}}^\star = \underline{\underline{D}}^\star + \underline{\underline{W}}^\star$
- $\dot{\underline{\underline{\Delta}}}^\star = \underline{\underline{F}}^{\star T}\underline{\underline{D}}^\star\underline{\underline{F}}^\star$

- $\underline{\underline{L}}^\star = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{L}}\underline{\underline{Q}}^T, \quad \underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{Q}}}\,\underline{\underline{Q}}^T$
- $\underline{\underline{D}}^\star = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{D}}\underline{\underline{Q}}^T$
- $\underline{\underline{W}}^\star = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{W}}\underline{\underline{Q}}^T$
- $\dot{\underline{\underline{\Delta}}}^\star = \dot{\underline{\underline{\Delta}}}$

Le tenseur $\dot{\underline{\underline{\Delta}}}$ est invariant. Le tenseur $\underline{\underline{D}}$ est objectif. Les tenseurs $\underline{\underline{L}}$ et $\underline{\underline{W}}$ sont influencés par la vitesse de rotation de $\mathcal{O}^\star$.

6. Mouvement d'un domaine

Mouvement de Ω

On définit le mouvement de Ω par celui de sa frontière $\partial\Omega$. Soit $\vec{\omega}$ le champ de vitesses défini sur $\partial\Omega$ à chaque instant t. Pour un domaine matériel, $\vec{\omega}$ est égal au champ des vitesses $\vec{v}$ des particules du milieu matériel.

Grandeurs globales sur Ω

Soit $\phi(\vec{x}, t)$ un champ de scalaires défini en tout point de Ω et de sa frontière $\partial\Omega$. Pour une grandeur $\Phi(t)$ de densité volumique $\phi(\vec{x}, t)$, on a :

$$\Phi(t) = \int_{\Omega(t)} \phi(\vec{x}, t)\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Pour une grandeur vectorielle $\vec{\phi}(\vec{x}, t)$:

$$\vec{\Phi}(t) = \int_{\Omega(t)} \vec{\phi}(\vec{x}, t)\mathrm{d}\mathcal{V}$$

6. Mouvement d'un domaine

6.1. Théorème de transport de Reynolds

En suivant le mouvement de Ω, défini par celui de sa frontière $\partial\Omega$ de normale unitaire sortante $\vec{n}$, le taux de variation instantané de $\Phi(t) = \int_{\Omega(t)} \phi(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}$ est donné par :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \overbrace{\int_{\Omega(t)} \partial_t\phi\mathrm{d}\mathcal{V}}^{\text{terme sur }\Omega\text{ figé}} + \overbrace{\int_{\partial\Omega(t)} \phi\vec{\omega}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A}}^{\text{terme de convection}}$$

Pour une grandeur vectorielle $\vec{\Phi}(t) = \int_{\Omega(t)} \vec{\phi}(\vec{x},t)\,\mathrm{d}\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_{\Omega(t)} \partial_t\vec{\phi}\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{\phi}\vec{\omega}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A} \\ &= \int_{\Omega(t)} \partial_t\vec{\phi}\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\partial\Omega(t)} (\vec{\phi}\otimes\vec{\omega})\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A}\end{aligned}$$

6. Mouvement d'un domaine

6.2. Lien entre les taux de variation

Pour une grandeur $\Phi(t) = \int_{\Omega(t)} \phi(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}$, on définit :

- $\dfrac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$: taux de variation de Φ en suivant un domaine quelconque Ω dans son mouvement propre défini par celui de sa frontière (champ de vitesses $\vec{\omega}$).
- $\dfrac{\mathrm{D}\Phi(t)}{\mathrm{D}t}$: taux de variation de Φ en suivant un domaine matériel $\Omega \equiv \mathcal{D}$ constitué à chaque instant par les mêmes particules (champ de vitesses $\vec{v}$).

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}\Phi(t)}{\mathrm{D}t} - \int_{\partial\Omega(t)} \phi(\vec{v}-\vec{\omega})\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A}$$

Les lois de bilan de la physique sont décrétées en utilisant le taux de variation $\dfrac{\mathrm{D}(\cdot)}{\mathrm{D}t}$.

MMC - (2) - Cinématique du milieu continu

Exercices

Exercice 1 : transport convectif d'une surface élémentaire

Une surface matérielle élémentaire (**facette**) délimitée par deux fibres $\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$ peut être représentée par le **vecteur aire** $\overrightarrow{\mathrm{d}\mathcal{A}_0} = \overrightarrow{\mathrm{d}a_0} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$ normal à ces deux fibres. Une fois déformée, la même facette peut être représentée par un nouveau vecteur aire $\overrightarrow{\mathrm{d}\mathcal{A}}$. Soient $\mathrm{d}\mathcal{A}_0$ et $\vec{n}_0$ respectivement l'aire et le vecteur normal unitaire de la facette de référence. Soient $\mathrm{d}\mathcal{A}$ et $\vec{n}$ respectivement l'aire et le vecteur normal unitaire de la facette déformée. Montrer que :

$$\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A} = J\,\mathrm{d}\mathcal{A}_0 \underline{\underline{F}}^{-T} \vec{n}_0$$

Que peut-on dire du transport convectif de $\vec{n}_0$?

Exercice 2 : allongement relatif dans une direction

Considérons une fibre matérielle $\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}$, issue d'une particule située initialement en $\vec{x}_0$. Soit $\overrightarrow{\mathrm{d}a}$ son transporté convectif. Posons : $\vec{m}_0 = \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}/\|\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\|$, $\vec{m} = \overrightarrow{\mathrm{d}a}/\|\overrightarrow{\mathrm{d}a}\|$. On appelle **allongement relatif dans la direction** $\vec{m}_0$ le nombre sans dimension $\delta(\vec{m}_0)$ défini par : $\delta(\vec{m}_0) := \left(\|\overrightarrow{\mathrm{d}a}\| - \|\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\|\right)/\|\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\|$. Montrer que :

$$\delta(\vec{m}_0) = \|\underline{\underline{F}}\vec{m}_0\| - 1 = \sqrt{\vec{m}_0 \cdot \underline{\underline{C}}\vec{m}_0} - 1 = \sqrt{1 + 2\vec{m}_0 \cdot \underline{\underline{\Delta}}\vec{m}_0} - 1$$

Soient F_{ij}, C_{ij} et Δ_{ij} les composantes respectivement de $\underline{\underline{F}}$, de $\underline{\underline{C}}$ et de $\underline{\underline{\Delta}}$ relatives à la base orthonormée $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$. Montrer que :

$$\delta(\vec{e}_i) = \sqrt{F_{ji}F_{ji}} - 1 = \sqrt{C_{ii}} - 1 = \sqrt{1 + 2\Delta_{ii}} - 1 \text{ (pas de sommation sur } i)$$

Avec l'hypothèse des transformations infinitésimales, montrer que :

$$\delta(\vec{m}_0) \simeq \vec{m}_0 \cdot \underline{\underline{\epsilon}}\vec{m}_0$$

Donner une interprétation simple des composantes ϵ_{11}, ϵ_{22} et ϵ_{33} de $\underline{\underline{\epsilon}}$.

Exercice 3 : angle de glissement

Considérons deux fibres matérielles $\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}$, issues d'une particule située initialement en $\vec{x}_0$, et faisant entre elles un angle θ_0. Désignons leurs vecteurs transportés respectivement par $\overrightarrow{\mathrm{d}a}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}b}$. Posons : $\vec{m}_0 = \overrightarrow{\mathrm{d}a_0}/\|\overrightarrow{\mathrm{d}a_0}\|$, $\vec{m} = \overrightarrow{\mathrm{d}a}/\|\overrightarrow{\mathrm{d}a}\|$, $\vec{n}_0 = \overrightarrow{\mathrm{d}b_0}/\|\overrightarrow{\mathrm{d}b_0}\|$, $\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{d}b}/\|\overrightarrow{\mathrm{d}b}\|$. On appelle **angle de glissement des directions $\vec{m}_0$ et $\vec{n}_0$**, l'angle γ défini par : $\gamma := \theta_0 - \theta$, où θ désigne l'angle formé entre $\overrightarrow{\mathrm{d}a}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}b}$. Montrer que :

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta_0 + 2\vec{m}_0\cdot\underline{\underline{\Delta}}\,\vec{n}_0}{\sqrt{1+2\vec{m}_0\cdot\underline{\underline{\Delta}}\,\vec{m}_0}\sqrt{1+2\vec{n}_0\cdot\underline{\underline{\Delta}}\,\vec{n}_0}}$$

Avec l'hypothèse des transformations infinitésimales et en négligeant les termes du 1er ordre montrer que :

$$\gamma\sin\theta_0 = -\left(\vec{m}_0\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{m}_0 + \vec{n}_0\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{n}_0\right)\cos\theta_0 + 2\vec{m}_0\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{n}_0$$

Donner une interprétation simple de la composante ϵ_{12} relative à la base orthonormée $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$ dans le cas de deux fibres initialement orthogonales.

Exercice 4 : évolution des longueurs, des angles

En reprenant les données des deux exercices précédents, montrer que :

$$\frac{\overbrace{\|\overrightarrow{\mathrm{d}a}\|}^{\bullet}}{\|\overrightarrow{\mathrm{d}a}\|} = \vec{m}\cdot\underline{\underline{D}}\,\vec{m}$$

$$\dot{\theta}\sin\theta = -2\vec{m}\cdot\underline{\underline{D}}\,\vec{n} + \left(\vec{m}\cdot\underline{\underline{D}}\,\vec{m} + \vec{n}\cdot\underline{\underline{D}}\,\vec{n}\right)\cos\theta$$

Donner une interprétation simple des composantes du tenseur $\underline{\underline{D}}$ relative à la base orthonormée $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$.

Montrer que :

$$\dot{\vec{m}} = \underline{\underline{L}}\,\vec{m} - (\vec{m}\cdot\underline{\underline{D}}\,\vec{m})\vec{m}$$

Dans le cas où $\vec{m}$ correspond à une direction principale de $\underline{\underline{D}}$, montrer que :

$$\dot{\vec{m}} = \vec{W}\wedge\vec{m}$$

où $\vec{W}$ est le vacteur axial associé au tenseur vitesse de rotation $\underline{\underline{W}}$. Que peut-on dire de $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{W}}$?

Exercice 5 : évolution d'un élément de volume, de surface

Un élément de volume de référence $\mathrm{d}\mathcal{V}_0$ se transforme en $\mathrm{d}\mathcal{V}$ sur la configuration actuelle selon : $\mathrm{d}\mathcal{V} = J\mathrm{d}\mathcal{V}_0$, où J est le jacobien de la transformation. Montrer que :

$$\frac{\dot{\widehat{\mathrm{d}\mathcal{V}}}}{\mathrm{d}\mathcal{V}} = \frac{\dot{J}}{J} = \mathrm{tr}\underline{\underline{L}} = \mathrm{tr}\underline{\underline{D}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

En reprenant les données de l'exercice 1, montrer que :

$$\frac{\dot{\widehat{\mathrm{d}\mathcal{A}}}}{\mathrm{d}\mathcal{A}} = \frac{\dot{J}}{J} - \vec{n}\cdot\underline{\underline{D}}\vec{n}$$

$$\dot{\vec{n}} = \left(\vec{n}\cdot\underline{\underline{D}}\vec{n}\right)\vec{n} - \underline{\underline{L}}^T\vec{n}$$

Exercice 6 : glissement simple (cisaillement simple)

Une transformation de glissement simple est définie dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$ par :

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + \gamma x_{02} \\ x_2 = x_{02} \\ x_3 = x_{03} \end{cases}$$

où $\gamma = \gamma(t)$ est l'amplitude de glissement : toutes les particules se déplacent parallèlement à l'axe $\vec{e}_1$ avec une amplitude proportionnelle à leur distance à cette axe.

1) Déterminer les matrices des tenseurs $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{\Delta}}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}$. Montrer que le tenseur $\underline{\underline{\epsilon}}$ constitue une approximation du tenseur $\underline{\underline{\Delta}}$ dans le cas d'une transformation infinitésimale ($\gamma \ll 1$).
2) La transformation est-elle **homogène** ? Est-elle **isochore** ?
3) Déterminer les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres de $\underline{\underline{\Delta}}$ et de $\underline{\underline{\epsilon}}$.
4) Vérifier que les valeurs et les vecteurs propres de $\underline{\underline{\epsilon}}$ s'obtiennent par linéarisation de ceux de $\underline{\underline{\Delta}}$.
5) Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{W}$.

Exercice 7 : mouvement de corps rigide

Un mouvement de corps rigide est une transformation homogène définie par : $\vec{x} = \underline{\underline{R}}(t)\vec{x}_0 + \vec{c}(t)$, où $\vec{c}(t)$ est le vecteur translation et $\underline{\underline{R}}(t)$ est le tenseur rotation.

1) Montrer que la vitesse $\vec{v}$ est sous la forme :

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \dot{\vec{c}} + \underline{\underline{\Omega}}(t)\big(\vec{x} - \vec{c}\big), \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\Omega}}(t) = \dot{\underline{\underline{R}}}\,\underline{\underline{R}}^T$$

2) Déterminer le tenseur gradient des vitesses $\underline{\underline{L}}$ et vérifier que le tenseur $\underline{\underline{\Omega}}$ est antisymétrique. En déduire que :

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \dot{\vec{c}} + \vec{\Omega}(t)\wedge\big(\vec{x} - \vec{c}\big)$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur axial associé à $\underline{\underline{\Omega}}$.

3) Montrer qu'une transformation est un mouvement de corps rigide (appelé aussi **mouvement rigidifiant**) si et seulement si le tenseur vitesse de déformation $\underline{\underline{D}}(\vec{x},t)$ est nul pour tout $\vec{x}$ et à chaque instant t.
4) Déterminer le champ d'accélération $\vec{a}(\vec{x},t)$ défini par $\vec{a}(\vec{x},t) = \dot{\vec{v}}$.

Exercice 8 : évolution d'une grandeur globale, d'un flux à travers une frontière

Soit un domaine matériel occupant la configuration $\mathcal{D}$ à l'instant t et la configuration $\mathcal{D}_0$ à l'instant initial. On désigne par $\partial\mathcal{D}$ la frontière de $\mathcal{D}$ de normale unitaire sortante $\vec{n}$, et par $\vec{v}$ le champ des vitesses des particules du domaine. Soit $\phi(\vec{x},t)$ une densité volumique d'une grandeur globale $\Phi(t) = \displaystyle\int_{\mathcal{D}} \phi(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}$. Montrer que :

$$\frac{\mathrm{D}\Phi(t)}{\mathrm{D}t} = \int_{\mathcal{D}} [\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{v})]\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \partial_t\phi\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{D}} \phi(\vec{v}\cdot\vec{n})\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Soient $\vec{\phi}(\vec{x},t)$ un champ de vecteurs et $\Phi(t)$ le flux de ce champ à travers la frontière : $\Phi(t) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{D}} \vec{\phi}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{A}$. Montrer que :

$$\frac{\mathrm{D}\Phi(t)}{\mathrm{D}t} = \int_{\partial\mathcal{D}} \big[\partial_t\vec{\phi} + \big(\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi}\big)\vec{v} + \vec{\nabla}\cdot\big(\vec{\phi}\otimes\vec{v} - \vec{v}\otimes\vec{\phi}\big)\big]\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A}$$

Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

(1) Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

(2) Cinématique du milieu continu

(3) Lois de bilan

(4) Lois de comportement

(5) Thermoélasticité linéarisée

Plan du chapitre

1 Bilan d'une grandeur physique extensive **3**
1.1 Équation de bilan sous forme intégrale 3
1.2 Équation de bilan sous forme locale 4

2 Bilan de la masse **7**
2.1 Masse d'un domaine matériel 7
2.2 Conservation de la masse 8
2.3 Conséquences de la conservation de la masse 9

3 Bilan de la quantité de mouvement **11**
3.1 Modélisation des efforts - Système discret 11
3.2 Modélisation des efforts - Milieu continu 18
3.3 Torseur d'une grandeur vectorielle globale 23
3.4 Torseur de la quantité d'accélération 24
3.5 Torseur de la quantité de mouvement 25
3.6 Loi fondamentale de la dynamique 26
3.7 Tenseur des contraintes de Cauchy 27
3.8 Tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff 29
3.9 Formes intégrales et formes locales 30

4 Premier principe de la thermodynamique **32**
4.1 Postulat de l'énergie interne 32
4.2 Énergie cinétique 33
4.3 Travail des efforts extérieurs, apport de chaleur 35
4.4 Premier principe de la thermodynamique 36
4.5 Formes locales du premier principe 37

Plan du chapitre

5 **Second principe de la thermodynamique** 38
5.1 Postulat de l'entropie 38
5.2 Facteur intégrant 39
5.3 Postulat des transformations réversibles 40
5.4 Forme locale du second principe 41
6 **Bilan des équations de bilan** 43
6.1 Récapitulatif des équations 43
6.2 Équations complémentaires 44

1. Bilan d'une grandeur physique extensive

1.1. Équation de bilan sous forme intégrale

Pour une grandeur scalaire :

$$\Phi(t) = \int_{\mathcal{D}} \phi(\vec{x}, t) \mathrm{d}\mathcal{V}$$

Le taux de variation de $\Phi(t)$, en suivant le domaine matériel $\mathcal{D}$ dans son mouvement, est sous la forme :

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \int_{\mathcal{D}} \gamma \mathrm{d}\mathcal{V} - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{\Gamma} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{A}$$

- $\gamma(\vec{x}, t)$: densité volumique de source.
- $\vec{\Gamma}(\vec{x}, t)$: vecteur densité surfacique de flux reçu par $\mathcal{D}$.

Pour une grandeur vectorielle :

$$\vec{\Phi}(t) = \int_{\mathcal{D}} \vec{\phi}(\vec{x}, t) \mathrm{d}\mathcal{V}$$

Le taux de variation de $\vec{\Phi}(t)$, en suivant le domaine matériel $\mathcal{D}$ dans son mouvement, est sous la forme :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{\Phi}}{\mathrm{D}t} = \int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma} \mathrm{d}\mathcal{V} - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\Gamma}} \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{A}$$

- $\vec{\gamma}(\vec{x}, t)$: vecteur densité volumique de source.
- $\underline{\underline{\Gamma}}(\vec{x}, t)$: tenseur densité surfacique de flux reçu par $\mathcal{D}$.

Le signe $-$ fait que la grandeur décroisse lorsque le flux est sortant $\vec{\Gamma} \cdot \vec{n} \geq \vec{0}$, $\underline{\underline{\Gamma}} \vec{n} \geq \vec{0}$, la normale $\vec{n}$ étant orientée vers l'extérieur de $\mathcal{D}$.

1. Bilan d'une grandeur physique extensive

1.2. Équation de bilan sous forme locale

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} &= \int_{\mathcal{D}} \gamma \mathrm{d}\mathcal{V} - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{\Gamma}.\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A} \\ &= \int_{\mathcal{D}} \partial_t\phi \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{D}} \phi\vec{v}.\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A}\end{aligned}$$

Transformons les intégrales de surface en intégrales de volume, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}} \Big(\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{v} + \vec{\Gamma}) - \gamma\Big)\mathrm{d}\mathcal{V} = 0$$

De même, pour une grandeur vectorielle :

$$\int_{\mathcal{D}} \Big(\partial_t\vec{\phi} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\phi}\otimes\vec{v} + \underline{\underline{\Gamma}}) - \vec{\gamma}\Big)\mathrm{d}\mathcal{V} = 0$$

Ces égalités **doivent être satisfaites** $\forall\mathcal{D} \subset \Omega$, et en supposant les fonctions introduites suffisamment régulières, on obtient les formes dites **locales**.

1. Bilan d'une grandeur physique extensive

1.2. Équation de bilan sous forme locale

Formes locales eulériennes ou conservatives

$$\Phi(t) = \int_{\mathcal{D}} \phi(\vec{x}, t)\mathrm{d}\mathcal{V} \quad \Big| \quad \vec{\Phi}(t) = \int_{\mathcal{D}} \vec{\phi}(\vec{x}, t)\mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\forall\mathcal{D} \subset \Omega$$

$$\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{v} + \vec{\Gamma}) = \gamma \quad \Big| \quad \partial_t\vec{\phi} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\phi}\otimes\vec{v} + \underline{\underline{\Gamma}}) = \vec{\gamma}$$

$$\forall\vec{x} \in \Omega,\ \forall t \geq t_0$$

Ce sont les **équations aux dérivées partielles** associées aux équations de bilan de Φ et de $\vec{\Phi}$.

Bilan de la masse

2. Bilan de la masse

2.1. Masse d'un domaine matériel

- Tout domaine matériel $\mathcal{D}$ possède une masse $\mathcal{M}(\mathcal{D}) \in \mathbb{R}^+$, vérifiant la propriété d'extensivité (additivité) :

  $\mathcal{M}(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = \mathcal{M}(\mathcal{D}_1) + \mathcal{M}(\mathcal{D}_2), \forall \mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2 \ / \ \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$

- La masse est une fonction continue du volume $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \displaystyle\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\mathcal{V}$, lorsque $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ tend vers 0, $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ tend aussi vers 0.

- Il existe une densité de masse $\rho(\vec{x}, t) \geq 0$, appelée **masse volumique**, telle que la masse d'un domaine matériel $\mathcal{D}$ s'écrive :

$$\mathcal{M}(\mathcal{D}) = \mathcal{M}(t) = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\mathcal{M} = \int_{\mathcal{D}} \rho(\vec{x}, t) \mathrm{d}\mathcal{V}$$

- Pour une grandeur extensive $\Phi(t)$, sa **densité massique** $\varphi(\vec{x}, t)$ est telle que :

$$\Phi(t) = \int_{\mathcal{D}} \varphi(\vec{x}, t) \mathrm{d}\mathcal{M} = \int_{\mathcal{D}} \varphi(\vec{x}, t) \rho(\vec{x}, t) \mathrm{d}\mathcal{V}$$

2. Bilan de la masse

2.2. Conservation de la masse

La masse de tout domaine matériel $\mathcal{D}$ se **conserve** si on suit ce domaine dans son mouvement : $\mathcal{M}(\mathcal{D}) = \mathcal{M}(\mathcal{D}_0) = \mathcal{M}_0 =$ Constante, $\forall t \geq t_0$, soit :

$$\frac{\mathrm{D}\mathcal{M}(t)}{\mathrm{D}t} = 0$$

Sous sa forme locale eulérienne ($\phi = \rho(\vec{x}, t),\ \vec{\Gamma} = \vec{0}$) :

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

En introduisant la dérivée particulaire de ρ, il vient :

$$\dot{\rho} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

C'est la forme locale **lagrangienne** ou **particulaire** de l'équation de conservation de la masse. En remplaçant le terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ par $\dot{J}/J$, il vient :

$$\overbrace{\rho J}^{\cdot} = 0 \Rightarrow \rho J = \text{Constante}$$

Posons $\rho(\vec{x}_0, t_0) = \rho_0(\vec{x}_0)$, et comme $J(\vec{x}_0, t_0) = 1$, il vient :

$$\rho J = \rho_0$$

C'est l'équation de conservation de la masse en description lagrangienne.

2. Bilan de la masse

2.3. Conséquences de la conservation de la masse

- **Les autres lois de bilan ne sont clairement énoncées que par rapport à un référentiel qui laisse invariante la masse.**
- La forme locale eulérienne de l'équation de bilan, s'écrit :

$\Phi(t) = \int_{\mathcal{D}} \rho \varphi \mathrm{d}\mathcal{V}$	$\partial_t(\rho\varphi) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\varphi\vec{v} + \vec{\Gamma}) = \gamma$
$\vec{\Phi}(t) = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\varphi} \mathrm{d}\mathcal{V}$	$\partial_t(\rho\vec{\varphi}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{\varphi} \otimes \vec{v} + \underline{\underline{\Gamma}}) = \vec{\gamma}$

- En introduisant la dérivée particulaire, il vient :

$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \int_{\mathcal{D}} \rho \dot{\varphi} \mathrm{d}\mathcal{V}$	$\rho\dot{\varphi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma} = \gamma$
$\frac{\mathrm{D}\vec{\Phi}}{\mathrm{D}t} = \int_{\mathcal{D}} \rho \dot{\vec{\varphi}} \mathrm{d}\mathcal{V}$	$\rho\dot{\vec{\varphi}} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Gamma}} = \vec{\gamma}$

Ces dernières formes sont appelées formes **lagrangiennes** ou **particulaires**.

Bilan de la quantité de mouvement

3.1. Modélisation des efforts - Système discret

Loi fondamentale de la dynamique

Pour **un point matériel de masse m constante**, la loi fondamentale de la dynamique postule l'existence d'un référentiel $\mathcal{R}$, dit **galiléen** ou **absolu**, tel que :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- Le vecteur $\vec{F} \in \vec{\mathscr{E}}$ est la **résultante des forces extérieures** exercées sur le point matériel.
- Le vecteur $\vec{a} \in \vec{\mathscr{E}}$ est **l'accélération** du point matériel par rapport à $\mathcal{R}$. Le produit $m\vec{a}$ est **la quantité d'accélération**.

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.1. Modélisation des efforts - Système discret

Soit $\mathbb{S}$ un système discret constitué de N points matériels et soit $\mathbb{P} = \{1, \ldots, n\}$ une partie de ce système. On définit sur $\mathbb{S}$:

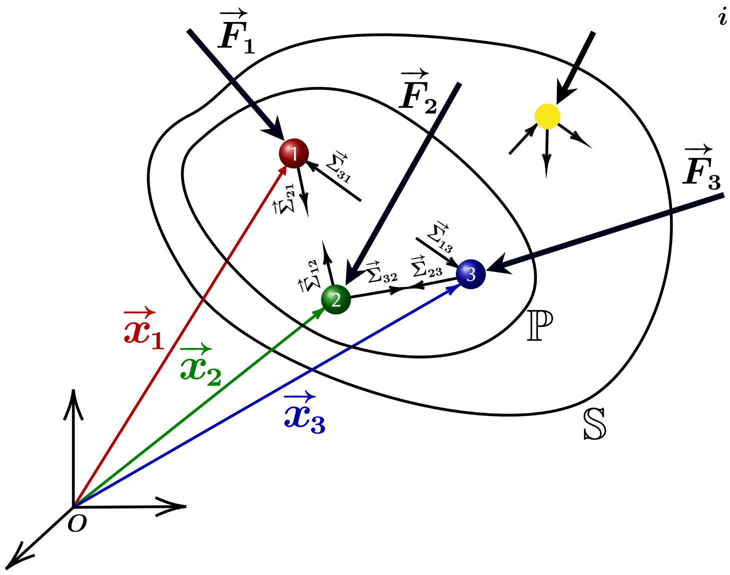
- N vecteurs position de référence $\vec{x}_{0i}$;
- N vecteurs position actuelle $\vec{x}(\vec{x}_{0i}, t) := \vec{x}_i$;
- N vecteurs vitesse $\vec{v}(\vec{x}_i, t) := \vec{v}_i$;
- N vecteurs accélération $\vec{a}(\vec{x}_i, t) = \dot{\vec{v}}_i := \vec{a}_i$;
- N masses $m(\vec{x}_i) := m_i$;
- N vecteurs force extérieure $\vec{F}(\vec{x}_i, t) := \vec{F}_i$;
- N^2 vecteurs **force intérieure** $\vec{\Sigma}(\vec{x}_i, \vec{x}_j, t) := \vec{\Sigma}_{ij}$, représentant, pour deux points i et j, la force intérieure exercée par le point i sur le point j, avec la convention $\vec{\Sigma}_{ii} = \vec{0}$ (par de sommation sur les indices répétés).

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.1. Modélisation des efforts - Système discret

La **force extérieure** $\vec{F}_j$ sur le point j de $\mathbb{P}$ est déterminée par :

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j^{\,ext} + \sum_{i \notin \mathbb{P}} \vec{\Sigma}_{ij}$$



La force $\vec{F}_j^{\,ext}$ est la force extérieure exercée par l'extérieure de $\mathbb{S}$ sur le point j.

La force $\sum_{i \notin \mathbb{P}} \vec{\Sigma}_{ij}$ est la force extérieure exercée sur le point j par les autres points de $\mathbb{S}$ à l'extérieur de $\mathbb{P}$.

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.1. Modélisation des efforts - Système discret

Les Lois de Newton (dans un référentiel galiléen)

- La loi fondamentale de la dynamique :

$$\forall j \in \mathbb{P},\ \vec{F}_j + \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} = m_j \vec{a}_j$$

- La loi des actions mutuelles

$$\forall \mathbb{P} \subseteq \mathbb{S} \begin{cases} \displaystyle\sum_j \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} = \vec{0} \\ \displaystyle\sum_j \sum_i \vec{x}_j \wedge \vec{\Sigma}_{ij} = \vec{0} \end{cases}$$

Principe des actions réciproques

$$\Leftarrow \begin{cases} \forall i \in \mathbb{P},\ \forall j \in \mathbb{P} \\ \vec{\Sigma}_{ij} + \vec{\Sigma}_{ji} = \vec{0} \\ \vec{x}_i \wedge \vec{\Sigma}_{ji} + \vec{x}_j \wedge \vec{\Sigma}_{ij} = \vec{0} \end{cases}$$

La loi des actions mutuelles traduit le fait que les **efforts intérieurs** à un sous-système quelconque forment, à tout instant, un torseur (résultante, moment résultant) nul.

Les moments sont par rapport à l'origine O du repérage des positions. $\sum_i \equiv \sum_{i \in \mathbb{P}}$.

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.1. Modélisation des efforts - Système discret

Caractérisation d'une force par la puissance

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} \cdot \vec{v}^\star = 0,\ \forall \vec{v}^\star \in \vec{\mathscr{E}}$$

$\vec{F} \cdot \vec{v}^\star = \mathscr{P}(\vec{v}^\star)$: **puissance virtuelle**, à l'image d'une puissance réelle, de la force $\vec{F}$ dans le **mouvement virtuel (m.v)** caractérisé par une **vitesse virtuelle (v.v)** $\vec{v}^\star$.

Appliquons ce concept de puissance virtuelle aux lois de Newton.

La loi fondamentale de la dynamique

$$\forall j \in \mathbb{P} \begin{cases} \vec{F}_j + \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} = m_j \vec{a}_j \\ \Updownarrow \\ \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j^\star + \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} \cdot \vec{v}_j^\star = m_j \vec{a}_j \cdot \vec{v}_j^\star,\ \forall \vec{v}_j^\star \in \vec{\mathscr{E}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall \mathbb{P} \subseteq \mathbb{S} \begin{cases} \forall \vec{v}_1^\star, \dots, \vec{v}_n^\star \in \vec{\mathscr{E}}^n \\ \displaystyle\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j^\star + \sum_j \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} \cdot \vec{v}_j^\star = \sum_j m_j \vec{a}_j \cdot \vec{v}_j^\star \end{cases}$$

La loi des actions mutuelles

$$\forall \mathbb{P} \subseteq \mathbb{S} \begin{cases} \displaystyle\sum_j \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} = \vec{0} \\ \displaystyle\sum_j \sum_i \vec{x}_j \wedge \vec{\Sigma}_{ij} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \forall \vec{V}^\star \in \vec{\mathscr{E}},\ \forall \vec{\Omega}^\star \in \vec{\mathscr{E}} \\ \Big(\displaystyle\sum_j \sum_i \vec{\Sigma}_{ij}\Big) \cdot \vec{V}^\star + \Big(\sum_j \sum_i \vec{x}_j \wedge \vec{\Sigma}_{ij}\Big) \cdot \vec{\Omega}^\star = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall \mathbb{P} \subseteq \mathbb{S} \begin{cases} \forall \vec{V}^\star \in \vec{\mathscr{E}},\ \forall \vec{\Omega}^\star \in \vec{\mathscr{E}} \\ \displaystyle\sum_j \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} \cdot \vec{v}_j^\star = 0,\ \vec{v}_j^\star = \vec{V}^\star + \vec{\Omega}^\star \wedge \vec{x}_j \end{cases}$$

La vitesse virtuelle $\vec{v}_j^\star$ n'est autre que celle d'un mouvement rigidifiant (v.r).

3.1. Modélisation des efforts - Système discret

En résumé : $\forall\, \mathbb{P} \subseteq \mathbb{S}$
$$\begin{cases} \forall \vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star \in \vec{\mathscr{E}}^n, \forall \vec{V}^\star \in \vec{\mathscr{E}},\ \forall \vec{\Omega}^\star \in \vec{\mathscr{E}} \\ \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j^\star + \sum_j \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} \cdot \vec{v}_j^\star = \sum_j m_j \vec{a}_j \cdot \vec{v}_j^\star \\ \sum_j \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} \cdot \vec{v}_j^\star = 0,\ \vec{v}_j^\star = \vec{V}^\star + \vec{\Omega}^\star \wedge \vec{x}_j \end{cases}$$

- $\mathscr{P}_e(\vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star) = \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j^\star$: **puissance virtuelle des efforts extérieurs.**
- $\mathscr{P}_i(\vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star) = \sum_j \sum_i \vec{\Sigma}_{ij} \cdot \vec{v}_j^\star$: **puissance virtuelle des efforts intérieurs.**
- $\mathscr{P}_a(\vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star) = \sum_j m_j \vec{a}_j \cdot \vec{v}_j^\star$: **puissance virtuelle des quantités d'accélération.**

3.1. Modélisation des efforts - Système discret

Les Lois de Newton (dans un référentiel galiléen)

- La loi fondamentale de la dynamique

$$\forall\, \mathbb{P} \subseteq \mathbb{S} \begin{cases} \forall \vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star \text{ v.v} \\ \mathscr{P}_e(\vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star) + \mathscr{P}_i(\vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star) = \mathscr{P}_a(\vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star) \end{cases}$$

- La loi des actions mutuelles

$$\forall\, \mathbb{P} \subseteq \mathbb{S} \begin{cases} \forall \vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star \text{ v.v.r} \\ \mathscr{P}_i(\vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star) = 0 \end{cases}$$

Du discret au continu $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \mathbb{S} \to \Omega,\ \mathbb{P} \subseteq \mathbb{S} \to \mathcal{D} \subseteq \Omega \\ (\vec{v}_1^\star, \ldots, \vec{v}_n^\star) \to \vec{v}^\star \text{(un champ de vecteurs continu sur } \Omega) \\ \sum \to \int \end{cases}$$

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.2. Modélisation des efforts - Milieu continu

- La loi fondamentale de la dynamique

$$\forall \mathcal{D} \subseteq \Omega,\ \forall \vec{v}^\star \text{ v.v },\ \mathscr{P}_e(\vec{v}^\star) + \mathscr{P}_i(\vec{v}^\star) = \mathscr{P}_a(\vec{v}^\star)$$

- La loi des actions mutuelles

$$\forall \mathcal{D} \subseteq \Omega,\ \forall \vec{v}^\star \text{ v.v.r},\ \mathscr{P}_i(\vec{v}^\star) = 0$$

Définissons la puissance virtuelle de la quantité d'accélération $\mathscr{P}_a$ associée à $\mathcal{D}$ par :

$$\mathscr{P}_a(\vec{v}^\star) := \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{a} \cdot \vec{v}^\star \mathrm{d}\mathcal{V}$$

Il reste à modéliser la puissance virtuelle des efforts intérieurs $\mathscr{P}_i$ et celle des efforts extérieurs $\mathscr{P}_e$. Postulons l'existence d'une densité volumique p_i telle que la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit sous la forme :

$$\mathscr{P}_i(\vec{v}^\star) = \int_{\mathcal{D}} p_i(\vec{v}^\star) \mathrm{d}\mathcal{V}$$

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.2. Modélisation des efforts - Milieu continu

Postulons une densité volumique p_i sous la forme :

$$p_i(\vec{v}^\star) = \vec{A} \cdot \vec{v}^\star - \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\nabla}} \vec{v}^\star$$

Avec l'exigence que p_i s'annule pour un mouvement rigidifiant, il vient :

$$\vec{v}^\star(\vec{x}, t) = \vec{V}^\star(t) + \vec{\Omega}^\star(t) \wedge \vec{x} = \vec{V}^\star(t) + \underline{\underline{\Omega}}^\star(t) \vec{x}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\nabla}} \vec{v}^\star = \underline{\underline{B}}^A : \underline{\underline{\Omega}}^\star$$

Par conséquent, $\forall \mathcal{D} \subseteq \Omega,\ \forall \vec{v}^\star$ v.v.r , $\mathscr{P}_i(\vec{v}^\star) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{V}^\star(t) \cdot \int_{\mathcal{D}} \vec{A} \mathrm{d}\mathcal{V} + \vec{\Omega}^\star(t) \cdot \int_{\mathcal{D}} (\vec{x} \wedge \vec{A}) \mathrm{d}\mathcal{V} - \underline{\underline{\Omega}}^\star(t) : \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{B}}^A \mathrm{d}\mathcal{V} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \vec{0},\ \underline{\underline{B}}^A = \underline{\underline{0}} \Rightarrow p_i(\vec{v}^\star) = -\underline{\underline{B}}^S : \underline{\underline{D}}^\star \text{ avec } \underline{\underline{D}}^\star = (\underline{\underline{\nabla}} \vec{v}^\star)^S$$

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.2. Modélisation des efforts - Milieu continu

En résumé : $\mathscr{P}_i(\vec{v}^\star) = -\int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{B}}^S : \underline{\underline{D}}^\star \mathrm{d}\mathcal{V}$. Posons $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{B}}^S$.

Sachant que $-\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^\star = -\vec{\nabla}\cdot(\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{v}^\star) + \vec{v}^\star\cdot\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}$

Il vient :

$$\mathscr{P}_i(\vec{v}^\star) = -\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}\cdot\vec{v}^\star \mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \vec{v}^\star\cdot\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Cela suggère de chercher la puissance virtuelle des efforts extérieurs $\mathscr{P}_e$ sous la même forme :

$$\mathscr{P}_e(\vec{v}^\star) = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T}\cdot\vec{v}^\star \mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{g}\cdot\vec{v}^\star \mathrm{d}\mathcal{V}$$

- Le vecteur $\vec{T} = \vec{T}(\vec{x}, t, \mathcal{D})$ est une **densité surfacique de forces**. Il représente les **efforts de contact**.
- Le vecteur $\vec{g} = \vec{g}(\vec{x}, t)$ est **une densité massique de forces**, homogène à une accélération. Il représente les **efforts à distance**.

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.2. Modélisation des efforts - Milieu continu

Dans le cas d'un mouvement virtuel rigidifiant :

$$\mathscr{P}_e(\vec{v}^\star) = \vec{R}\cdot\vec{V}^\star + \vec{M}_o\cdot\vec{\Omega}^\star, \text{ avec}$$

$$\vec{R} = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T}\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{g}\mathrm{d}\mathcal{V},\ \vec{M}_o = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\vec{T}\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\rho\vec{g}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

- Le vecteur $\vec{R}$ est la **résultante des efforts extérieurs associée au domaine $\mathcal{D}$**.
- Le vecteur $\vec{M}_o$ est le **moment** de la résultante par rapport à l'origine O.

Les efforts extérieurs peuvent donc être représentés par le **torseur** $\left[\vec{R}\right]$ défini par :

$$\left[\vec{R}\right] = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T}\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{g}\mathrm{d}\mathcal{V} \\ \displaystyle\int_{\partial\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\vec{T}\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\rho\vec{g}\mathrm{d}\mathcal{V} \end{cases}$$

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.2. Modélisation des efforts - Milieu continu

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$\forall \mathcal{D} \subseteq \Omega, \ \forall \vec{v}^{\star} \text{ v.v}$$

$$\mathscr{P}_e(\vec{v}^{\star}) + \mathscr{P}_i(\vec{v}^{\star}) = \mathscr{P}_a(\vec{v}^{\star})$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{\partial\mathcal{D}} (\vec{T} - \underline{\underline{\sigma}}\vec{n})\cdot\vec{v}^{\star}\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} (\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \rho\vec{g} - \rho\vec{a})\cdot\vec{v}^{\star}\mathrm{d}\mathcal{V} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}, \ \rho\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \rho\vec{g}$$

Les efforts intérieurs peuvent donc être représentés par le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$, symétrique d'ordre 2, tels que l'effort de contact exercé au point $\vec{x}$ est linéaire par rapport au vecteur normal à $\partial\mathcal{D}$ en $\vec{x}$.

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.3. Torseur d'une grandeur vectorielle globale

D'une manière générale, pour une grandeur vectorielle $\vec{\Phi} = \int_{\mathcal{D}} \vec{\phi}\mathrm{d}\mathcal{V}$, le **moment** de $\vec{\Phi}$ associé à $\mathcal{D}$ par rapport à un point quelconque $\vec{x}_P$, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$, est défini par :

$$\int_{\mathcal{D}} (\vec{x} - \vec{x}_P)\wedge\vec{\phi}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

En choisissant l'origine O ($\vec{x}_P = \vec{0}$), il devient : $\int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\vec{\phi}\mathrm{d}\mathcal{V}$

On définit alors le **torseur** de $\vec{\Phi}$ au point O par :

$$\left[\vec{\Phi}\right] = \begin{cases} \int_{\mathcal{D}} \vec{\phi}\mathrm{d}\mathcal{V} \\ \int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\vec{\phi}\mathrm{d}\mathcal{V} \end{cases}$$

3.4. Torseur de la quantité d'accélération

La quantité d'accélération de l'élément de matière $\mathrm{d}\mathcal{M} = \rho \mathrm{d}\mathcal{V}$ est, par définition :

$$\vec{a}(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{M} = \rho(\vec{x},t)\vec{a}(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Pour un domaine matériel $\mathcal{D}$, on appelle **quantité d'accélération associée à $\mathcal{D}$** le vecteur :

$$\vec{A} = \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{a}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Le torseur de la quantité d'accélération est défini par :

$$\left[\vec{A}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathcal{D}} \rho\vec{a}\mathrm{d}\mathcal{V} \\ \displaystyle\int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\rho\vec{a}\mathrm{d}\mathcal{V} \end{array} \right.$$

3.5. Torseur de la quantité de mouvement

En explicitant la quantité d'accélération de l'élément de matière $\mathrm{d}\mathcal{M}$:
$\vec{a}\mathrm{d}\mathcal{M} = \rho\dot{\vec{v}}\mathrm{d}\mathcal{V} = \Big(\partial_t(\rho\vec{v}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v})\Big)\mathrm{d}\mathcal{V}$, il vient :

$$\vec{A} = \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{a}\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \rho\dot{\vec{v}}\mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\mathcal{D}} \rho\vec{v}\mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{\mathrm{D}\vec{Q}}{\mathrm{D}t}$$

$\vec{Q} = \displaystyle\int_{\mathcal{D}} \rho\vec{v}\mathrm{d}\mathcal{V}$ est appelé vecteur **quantité de mouvement associée à $\mathcal{D}$**.

Le torseur de la quantité de mouvement est défini par :

$$\left[\vec{Q}\right] = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathcal{D}} \rho\vec{v}\mathrm{d}\mathcal{V} \\ \displaystyle\int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\rho\vec{v}\mathrm{d}\mathcal{V} \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \left[\vec{A}\right] = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\vec{Q}\right]$$

avec $\displaystyle\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\rho\vec{v}\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\rho\vec{a}\mathrm{d}\mathcal{V}$

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.6. Loi fondamentale de la dynamique

La loi fondamentale de la dynamique stipule alors que, dans un référentiel galiléen, à chaque instant et pour tout domaine matériel $\mathcal{D} \subseteq \Omega$, le **torseur de la quantité d'accélération** $\left[\vec{A}\right]$, dérivée particulaire du **torseur de la quantité de mouvement** $\left[\vec{Q}\right]$, est en équilibre avec le **torseur des efforts extérieurs** $\left[\vec{R}\right]$:

$$\left[\vec{A}\right] = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\vec{Q}\right] = \left[\vec{R}\right], \quad \text{soit :}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \vec{a}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\mathcal{D}} \rho \vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T}\,\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{g}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\rho\vec{a}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\rho\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{x}\wedge\vec{T}\,\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} (\vec{x}\wedge\rho\vec{g} + \rho\vec{m})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

C'est la forme générale de la loi fondamentale de la dynamique, où on a ajouté une densité massique de couples $\vec{m}$.

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.7. Tenseur des contraintes de Cauchy

Du bilan de vecteur quantité de mouvement $\vec{Q}$, on déduit :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(\vec{a} - \vec{g})\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T}\,\mathrm{d}\mathcal{A}$$

Ainsi, les efforts de contact sur la frontière équilibrent les forces d'inertie et à distance qui sont dans le domaine. Comment transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume ? Cela passe par :

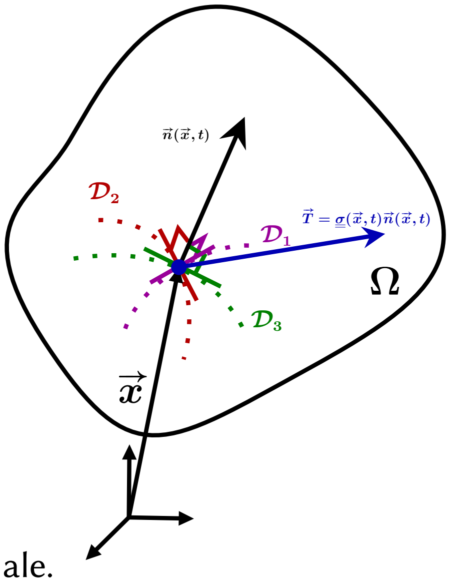
- **Postulat de Cauchy :** admettre que les efforts de contact ne sont fonction que du point et de l'orientation de l'élément de surface considéré en ce point : $\vec{T}(\vec{x}, t, \mathcal{D}) := \vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$.
- **Principe des actions réciproques :** $\vec{T}(\vec{x}, t, -\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$.
- **Théorème de Cauchy :** il existe un champ de tenseurs du second ordre $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t)$ tel que : $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, t)\vec{n}(\vec{x}, t)$

Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ est appelé **tenseur des contraintes de Cauchy**.

Le vecteur $\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}$ est appelé **vecteur-contrainte**.

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.7. Tenseur des contraintes de Cauchy



En chaque point $\vec{x} \in \Omega$, et à chaque instant t, la force élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ sur l'élément de surface $\mathrm{d}\mathcal{A}$ de normale sortante $\vec{n}(\vec{x},t)$ (**facette**) est indépendante du sous domaine matériel $\mathcal{D}$ considéré :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \vec{T}(\vec{x},t,\vec{n})\mathrm{d}\mathcal{A} = \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x},t)\vec{n}(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{A}$$

C'est la force appliquée par les particules où pointe la normale sur les particules voisines d'où sort la normale.

Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ appliqué au vecteur élémentaire de surface dans la configuration actuelle donne la force s'exerçant sur l'élément de surface dans la configuration actuelle : c'est un tenseur eulérien.

3. Bilan de la quantité de mouvement

3.8. Tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff

Sachant que $\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A} = J\mathrm{d}\mathcal{A}_0\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{n}_0$, il vient : $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = J\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{n}_0\mathrm{d}\mathcal{A}_0$

Introduisons une force fictive $\overrightarrow{\mathrm{d}F_0}$ attachée à l'élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}\mathcal{A}_0}$ et qui se transforme en $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ comme pour un vecteur matériel (il n' y a aucune raison pour ça !) : $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \underline{\underline{F}}\overrightarrow{\mathrm{d}F_0}$, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_0} = \underline{\underline{\Pi}}\vec{n}_0\mathrm{d}\mathcal{A}_0, \text{ avec } \underline{\underline{\Pi}} = J\underline{\underline{F}}^{-1}\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{F}}^{-T}$$

Nous avons donc les trois contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, $J\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{F}}^{-T}$ et $\underline{\underline{\Pi}}$ telles que :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = J\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{F}}^{-T}\vec{n}_0\mathrm{d}\mathcal{A}_0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_0} = \underline{\underline{\Pi}}\vec{n}_0\mathrm{d}\mathcal{A}_0$$

Les grandeurs $J\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{F}}^{-T}$ et $\underline{\underline{\Pi}}$ sont respectivement le **1er et le 2e tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff**. Remarquer les caractères purement eulérien de $\underline{\underline{\sigma}}$, purement lagrangien de $\underline{\underline{\Pi}}$ et hybride de $J\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{F}}^{-T}$.

3.9. Formes intégrales et formes locales

1. Quantité de mouvement
   - Forme intégrale

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\mathcal{D}}\rho\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V}=\int_{\partial\mathcal{D}}\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}+\int_{\mathcal{D}}\rho\vec{g}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

   - Forme locale

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}+\rho(\vec{g}-\vec{a})=\vec{0}$$

2. Moment de la quantité de mouvement
   - Forme intégrale

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\mathcal{D}}\vec{x}\wedge\rho\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V}=\int_{\partial\mathcal{D}}\vec{x}\wedge\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}+\int_{\mathcal{D}}(\vec{x}\wedge\rho\vec{g}+\rho\vec{m})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

   - Forme locale

$$\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\sigma}}-\rho\vec{m}=\vec{0}$$

Soit $\underline{\underline{\sigma}}=\underline{\underline{\sigma}}^T$, pour $\vec{m}=\vec{0}$. **On retiendra dans la suite $\vec{m}=\vec{0}$.**

Bilan de l'énergie

4. Premier principe de la thermodynamique

4.1. Postulat de l'énergie interne

On peut attacher a tout système physique **fermé** une grandeur $\mathcal{U}$ dite **énergie interne** telle qu'en toute transformation réelle élémentaire du système on ait :

$$\mathrm{d}\mathcal{U} + \mathrm{d}\mathcal{K} = \delta W + \delta Q$$

- $\mathcal{K}$: **énergie cinétique**.
- W : **travail des efforts extérieurs**.
- Q : **quantité de chaleur reçue pendant la transformation**.

Ni δW, ni δQ ne sont des différentielles totales exactes, le symbole δ n'intervient que pour rappeler qu'il s'agit d'une quantité infiniment petite du même ordre que les vraies différentielles $\mathrm{d}\mathcal{U}$ et $\mathrm{d}\mathcal{K}$.

4. Premier principe de la thermodynamique

4.2. Énergie cinétique

Partons de l'équation locale du bilan de la quantité de mouvement (avec $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$) :

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \rho(\vec{g} - \vec{a}) = \vec{0}$$

Multiplions les deux membres par la vitesse $\vec{v}$, sachant que $\vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = \dot{k}$, avec $k = \vec{v}\cdot\vec{v}/2$, et que $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} = \vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{v}\right) - \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\nabla}}\vec{v}$:

$$\rho\dot{k} = \vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{v}\right) + \rho\vec{g}\cdot\vec{v} - \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\nabla}}\vec{v}$$

En intégrant sur le domaine $\mathcal{D}$ et en posant $\mathcal{K} = \int_{\mathcal{D}} \rho k \mathrm{d}\mathcal{V}$, il vient :

$$\dot{\mathcal{K}} = \frac{\mathrm{D}\mathcal{K}}{\mathrm{D}t} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{g}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V} - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\nabla}}\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

La grandeur $\mathcal{K}$ est **l'énergie cinétique associée au domaine matériel $\mathcal{D}$**.

4. Premier principe de la thermodynamique

4.2. Énergie cinétique

Posons :

$$\mathscr{P}_e = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{g}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\mathscr{P}_i = -\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\nabla}}\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Il vient :

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathscr{P}_e + \mathscr{P}_i$$

C'est le **théorème de l'énergie cinétique**, avec :

- $\mathscr{P}_e$: **puissances des efforts extérieurs**
- $\mathscr{P}_i$: **puissances des efforts intérieurs**

Ce théorème ne constitue pas une loi de bilan supplémentaire, mais juste une conséquence du bilan de la quantité de mouvement.

4. Premier principe de la thermodynamique

4.3. Travail des efforts extérieurs, apport de chaleur

$$\delta W = \mathscr{P}_e \mathrm{d}t,\ \mathscr{P}_e = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{g}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\delta Q = \mathscr{P}_t \mathrm{d}t,\ \mathscr{P}_t = -\int_{\partial\mathcal{D}} \vec{\psi}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} r\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

$\mathscr{P}_t$ est le **taux de chaleur reçue par $\mathcal{D}$** (puissance thermique d'origine non mécanique), il est composé :

- d'une densité surfacique du taux de chaleur reçue par $\mathcal{D}$ par **conduction**. Le vecteur $\vec{\psi}$ est le **vecteur flux de chaleur**.
- d'une densité volumique du taux de chaleur reçue par $\mathcal{D}$ de la part de sources extérieures à $\mathcal{D}$.

Une évolution est dite **adiabatique** si $\mathcal{D}$ n'échange pas de chaleur avec l'extérieur : $\vec{\psi} = \vec{0}$ ou $\vec{\nabla}\cdot\vec{\psi} = \vec{0}$ et $r = 0$.

4. Premier principe de la thermodynamique

4.4. Premier principe de la thermodynamique

La variation de **l'énergie totale** $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{K}$ associée à un domaine matériel $\mathcal{D}$ est égale, à chaque instant, à la somme de la puissance des efforts extérieurs et la puissance thermique :

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathscr{P}_e + \mathscr{P}_t$$

C'est l'équation de bilan de l'énergie totale.

En écrivant que : $\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{U}} + \dot{\mathcal{K}}$, et que $\dot{\mathcal{K}} = \mathscr{P}_e + \mathscr{P}_i$, il vient :

$$\dot{\mathcal{U}} = -\mathscr{P}_i + \mathscr{P}_t$$

C'est l'équation de bilan de l'énergie interne.

4. Premier principe de la thermodynamique

4.5. Formes locales du premier principe

L'énergie interne $\mathcal{U}$ est une grandeur **extensive** au même titre que l'énergie cinétique $\mathcal{K}$, le volume $\mathcal{V}$ ou la masse $\mathcal{M}$, elle peut être donc définie à l'aide d'une densité massique u : $\mathcal{U} = \int_{\mathcal{D}} \rho u \mathrm{d}\mathcal{V}$.

Soit $e = u + k$, la densité massique de l'énergie totale : $\mathcal{E} = \int_{\mathcal{D}} \rho e \mathrm{d}\mathcal{V}$

De l'égalité $\dot{\mathcal{E}} = \mathscr{P}_e + \mathscr{P}_t$, on en déduit :

$$\rho \dot{e} = -\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\psi} - \underline{\underline{\sigma}}\,\vec{v}\right) + \rho \vec{g}\cdot\vec{v} + r$$

En combinant cette équation avec celle de $\dot{k}$, on obtient :

$$\rho \dot{u} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\psi} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}\,\vec{v} + r$$

5. Second principe de la thermodynamique

5.1. Postulat de l'entropie

On peut attacher a tout système physique **fermé** une grandeur $\mathcal{S}$ dite **entropie** telle qu'en toute transformation réelle élémentaire du système on ait :

$$\mathrm{d}\mathcal{S} = \delta_e\mathcal{S} + \delta_i\mathcal{S}$$

- $\delta_e\mathcal{S}$: provient de l'interaction du système avec l'extérieur.
- $\delta_i\mathcal{S}$: provient uniquement de phénomènes internes, **strictement positif** pour une **quelconque irréversibilité** et **nul** quand il n'y en a aucune.

5. Second principe de la thermodynamique

5.2. Facteur intégrant

Retournons au premier principe. En négligeant les forces volumiques (pesanteur et accélération) :

$$\delta W = \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \vec{v} \, \mathrm{d}\mathcal{V}\mathrm{d}t$$

Considérons le cas des fluides simples :

- $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\zeta}}$, p uniforme ;
- transformation infiniment lente : $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\zeta}} : \underline{\underline{\nabla}} \vec{v} \approx 0$

$$\Rightarrow \quad \delta W = -p\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Cela montre qu'au travail δW on associe la variation d'une grandeur extensive $\mathcal{V}$ via un **facteur intégrant** $(-1/p)$. Est-il possible, comme pour δW, de trouver un facteur intégrant pour δQ ?

5. Second principe de la thermodynamique

5.3. Postulat des transformations réversibles

Il existe une grandeur positive T dite **température** telle qu'en toute transformation réversible ($\delta_i \mathcal{S} = 0$) élémentaire du système **fermé** on ait :

$$\mathrm{d}\mathcal{S} = \delta \mathcal{Q} / T$$

$\delta \mathcal{Q}$ est la quantité de chaleur reçue par le système. À cette quantité on associe la variation d'une grandeur **extensive** $\mathcal{S}$ via un facteur intégrant $(1/T)$.

Une transformation est dite réversible si : 1) elle est quasi-statique, 2) le système est en permanence en équilibre avec le milieu extérieur. Dans la pratique, une telle transformation est impossible à réaliser puisqu'elle exige des durées infinies afin d'assurer des faibles vitesses. Toutes les transformations réelles sont donc, en toute rigueur, irréversibles.

Pour un domaine matériel $\mathcal{D}$: $\delta_e \mathcal{S} = \left(- \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\vec{\psi}.\vec{n}}{T} \mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} \mathrm{d}\mathcal{V} \right) \mathrm{d}t$

Le second principe s'écrit alors :

$$\dot{\mathcal{S}} \geq - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\vec{\psi}.\vec{n}}{T} \mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} \mathrm{d}\mathcal{V}, \ \forall \mathcal{D}$$

- Pour un domaine matériel en évolution adiabatique $\vec{\psi} = \vec{0}$ et $r = 0$, $\dot{\mathcal{S}} \geq 0$, l'entropie d'un tel domaine ne peut donc que croître.

5. Second principe de la thermodynamique

5.4. Forme locale du second principe

L'entropie $\mathcal{S}$ est une grandeur **extensive** au même titre que l'énergie interne $\mathcal{U}$, elle peut être donc définie à l'aide d'une densité massique s : $\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \rho s \mathrm{d}\mathcal{V}$.

Lorsque $\dot{\mathcal{S}}$ est supérieur au taux d'apport extérieur d'entropie, on dit qu'il y a **production interne d'entropie**. Désignons par ϖ / T la densité volumique de cette production interne d'entropie, ϖ est appelée **dissipation volumique**, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \dot{s} \mathrm{d}\mathcal{V} = - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\vec{\psi}.\vec{n}}{T} \mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} \frac{r + \varpi}{T} \mathrm{d}\mathcal{V}, \ \forall \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \rho \dot{s} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\psi}}{T} \right) = \frac{r + \varpi}{T}$$

L'évolution d'un domaine $\mathcal{D}$ est dite :

- **isentropique** si $\dot{s} = 0$ en tout point et à chaque instant ;
- **réversible** si $\varpi = 0$ en tout point et à chaque instant : pas de production interne d'entropie.

Une évolution **réversible** et **adiabatique** ($\vec{\psi} = \vec{0}, r = 0$) est dite **isentropique**.

Bilan des équations de bilan

6. Bilan des équations de bilan

6.1. Récapitulatif des équations

$$\Phi = \int_{\mathcal{D}} \rho\varphi \mathrm{d}\mathcal{V}\,, \quad \mathrm{D}\Phi/\mathrm{D}t = \int_{\mathcal{D}} \gamma \mathrm{d}\mathcal{V} - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{\Gamma}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{A}$$
$$\partial_t(\rho\varphi) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\varphi\vec{v} + \vec{\Gamma}) = \gamma$$

Φ	φ	γ	$\vec{\Gamma}$
$\mathcal{M}$	1	0	$\vec{0}$
$\vec{\mathcal{Q}}$	$\vec{v}$	$\rho\vec{g}$	$-\underline{\underline{\sigma}}$
$\mathcal{E}$	e	$\rho\vec{g}\cdot\vec{v} + r$	$-\underline{\underline{\sigma}}\vec{v} + \vec{\psi}$

$\mathcal{U}$	u	$r + \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\nabla}}\vec{v}$	$\vec{\psi}$
$\mathcal{S}$	s	$(r + \varpi)/T$	$\vec{\psi}/T$

6. Bilan des équations de bilan

6.2. Équations complémentaires

Φ	Forme locale	Inconnues
$\mathcal{M}$ (1)	$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$	$\rho, \vec{V}$ (4)
$\vec{\mathcal{Q}}$ (3)	$\partial_t (\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \underline{\underline{\sigma}}) = \rho \vec{g}$	$\underline{\underline{\sigma}}$ (6)
$\mathcal{E}$ (1)	$\partial_t (\rho e) + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{v} + \vec{\psi} - \underline{\underline{\sigma}}\, \vec{v}) = r + \rho \vec{g} \cdot \vec{v}$	$e, \vec{\psi}$ (4)
(5)		(14)

Il manque donc **14 - 5 = 9** relations. Des équations complémentaires, permettant de prendre en compte les **propriétés de la matière**, doivent être introduites afin de permettre la **fermeture du modèle** (autant d'équations que d'inconnues) : **les lois de comportement**.

EMINES - School of Industrial Management - Année 2022/2023

MMC - (3) - Lois de bilan

Exercices

Exercice 1

Considérons une grandeur scalaire de la forme $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} \varphi(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{M} = \int_{\mathcal{D}} \phi(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}$ où $\mathcal{D}$ est un domaine matériel.

1) En utilisant le théorème de transport de Reynolds et la loi de conservation de la masse, montrer que :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\mathcal{D}} \varphi \mathrm{d}\mathcal{M} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\mathcal{M}$$

2) Dans le cas d'une évolution isochore (qui conserve le volume), montrer que :

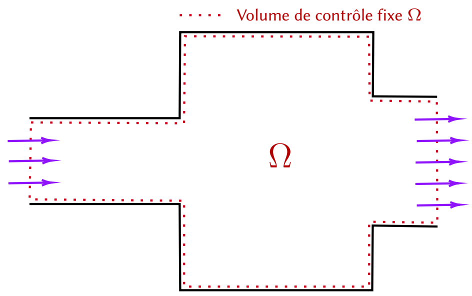
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\mathcal{D}} \phi \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Que peut-on en déduire sur la permutation des symboles $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ et $\displaystyle\int_{\mathcal{D}}$?

Exercice 2

En mécanique des fluides, un volume fixe, dit de "contrôle", est souvent utilisé pour établir un bilan intégral d'une grandeur physique. Sa frontière est souvent décomposée en trois parties :

- une section d'entrée Σ_e telle que $\vec{v}\cdot\vec{n} \leq 0$;
- une section de sortie Σ_s telle que $\vec{v}\cdot\vec{n} \geq 0$;
- une paroi Σ_ℓ étanche telle que $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$.



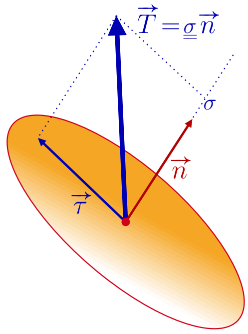
Les indices e et s désignent respectivement l'entrée et la sortie du fluide.

Soit $\mathcal{M}(t)$ la masse de la matière contenue à l'instant t dans le domaine Ω. On définit le débit massique $Q(t)$ et la vitesse moyenne de débit $\langle V\rangle(t)$ respectivement par : $Q(t) = \displaystyle\int_{\Sigma} \rho|\vec{v}\cdot\vec{n}|\mathrm{d}\mathcal{A}$, $\langle V\rangle = \dfrac{1}{\mathcal{A}}\displaystyle\int_{\Sigma}|\vec{v}\cdot\vec{n}|\mathrm{d}\mathcal{A}$, où Σ est une section droite quelconque d'aire $\mathcal{A}$.

1) Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{M}(t)}{\mathrm{d}t} = Q_e - Q_s$.
2) Dans le cas d'un fluide **incompressible** et d'un **écoulement stationnaire**, montrer que $\mathcal{A}_e\langle V_e\rangle = \mathcal{A}_s\langle V_s\rangle$.

Exercice 3 : cercles de Mohr

Considérons un point $\vec{x}$ et un instant t fixés. Soit une facette de normale $\vec{n}$ et $\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}$ le vecteur-contrainte correspondant, comme le montre la figure ci-contre. Ce vecteur peut se décomposer en une composante normale σ appelée **contrainte normale** et une composante tangentielle $\vec{\tau}$ appelée **contrainte de cisaillement** ou **cission** :



$$\vec{T}(\vec{n}) = \sigma\vec{n} + \vec{\tau}$$

L'écriture $\vec{T}(\vec{n})$ devra être comprise comme $\vec{T}(\vec{x}, t, \vec{n})$, les variables $\vec{x}$ et t sont omises car elles sont fixées.

Connaissant le tenseur des contraintes de Cauchy au point $\vec{x}$ et à l'instant t, on se propose de chercher dans le plan (σ, τ) dit **plan de Mohr**, le domaine engendré par l'extrémité du vecteur-contrainte lorsque $\vec{n}$ varie.

Considérons par commodité une base orthonormée dirigée suivant les vecteurs propres $\{\vec{c}_i\}$ de $\underline{\underline{\sigma}}$. Soient (n_1, n_2, n_3) les composantes du vecteur $\vec{n}$ dans cette base et soient $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ rangées de sorte que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

1) On désigne par $\vec{t}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{n}$ contenu dans le plan de la facette tel que $\vec{\tau} = \tau\,\vec{t}$. Montrer que :

$$\sigma = \vec{T}\cdot\vec{n} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{\tau} = \left(\underline{\underline{1}} - \vec{n}\otimes\vec{n}\right)\vec{T}, \quad \tau^2 = \left\|\vec{T}\right\|^2 - \sigma^2$$

2) Montrer que les composantes du vecteur $\vec{n}$ constituent les inconnues d'un système linéaire dont la solution est la suivante :

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)}$$
$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma-\sigma_3)(\sigma-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}$$
$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}$$

3) Monter que σ et τ vérifient les trois inégalités suivantes :

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2$$
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$$

4) Dans le plan de Mohr, délimiter la zone du plan où les coordonnées (σ, τ) du vecteur-contrainte $\vec{T}$ dans la base $(\vec{n}, \vec{t})$ vérifient les 3 inégalités précédentes.

5) Soit $\mathscr{C}_2$ le plus grand des cercles de Mohr. Les facettes concernées sont parallèles à la direction de la contrainte principale **intermédiaire** σ_2. Choisissons $\vec{t}$ de sorte que la base $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{c}_2)$ soit directe.
La normale $\vec{n}$ évolue dans le plan $(\vec{c}_1, \vec{c}_3)$ et fait un angle θ avec $\vec{c}_1$.
   a) Montrer que :

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos(2\theta)$$

$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin(2\theta)$$

   b) Déterminer l'intensité et la direction de la contrainte de cisaillement maximale.

6) États de contrainte remarquables. Dessiner les trois cercles de Mohr dans chacune des situations suivantes, en supposant que les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ sont maintenant rangées de sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
   a) **État de contrainte en un point d'une surface libre**. On suppose que le point $\vec{x}$ est sur la frontière du domaine d'étude et ce point est **libre de contraintes**, c-à-d :

$$\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n} = \vec{0}$$

   b) **État de contrainte uni-axial**. L'état de contrainte est uni-axial lorsque $\underline{\underline{\sigma}}$ est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma\,\vec{a}\otimes\vec{a}$$

   avec $\vec{a}$ un vecteur unitaire. Lorsque $\sigma > 0$, il s'agit d'un état de **traction**. Lorsque $\sigma < 0$, il s'agit d'un état de **compression**.

   c) **État de cisaillement simple**. L'état de contrainte est de cisaillement simple ou de **cission simple** lorsque $\underline{\underline{\sigma}}$ est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau\left(\vec{a}\otimes\vec{b} + \vec{b}\otimes\vec{a}\right)$$

   avec $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux.

   d) **État de contrainte plan**. L'état de contrainte est dit plan dans le plan $(\vec{a}, \vec{b})$ lorsque $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifie :

$$\underline{\underline{\sigma}}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right) = \vec{0}$$

e) **État de contrainte tri-axial de révolution**. L'état de contrainte est dit tri-axial de révolution si deux contraintes principales sont égales et non nulles : $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$ ou $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$.

f) **État de contrainte hydrostatique ou isotrope**. L'état de contrainte est dit hydrostatique ou isotrope lorsque $\underline{\underline{\sigma}}$ est sphérique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{\underline{1}}$$

C'est en particulier l'état de contraintes qui existe dans un fluide au repos, $p = -\sigma$ est la pression.

Exercice 4 : courbe intrinsèque et critère de Mohr-Coulomb

Dans le plan (σ, τ) des cercles de Mohr, il existe une courbe particulière appelée **courbe intrinsèque** qui délimite le comportement élastique d'un matériau solide : c'est l'enveloppe des cercles extérieurs de Mohr pour lesquels la **limite d'élasticité** est atteinte. Elle est donnée par :

$$|\tau| = \mathcal{F}(\sigma)$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction empirique déterminée expérimentalement pour chaque matériau. L'expression la plus simple de f est une droite connue sous le nom de **droite de Coulomb** :

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi$$

où $c \geq 0$ et $0 \leq \phi \leq \pi/2$ sont des constantes caractéristiques du matériau, appelées respectivement **cohésion** et **angle de frottement interne**. Le critère d'admissibilité des états de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ associé à la droite de Coulomb est appelé **critère de Mohr-Coulomb** : $|\tau| \leq c - \sigma \tan \phi$.

1) Déterminer les facettes sur lesquelles la condition $|\tau| = c - \sigma \tan \phi$ est vérifiée.
2) Monter que le critère de Mohr-Coulomb peut s'écrire sous la forme :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = f(\sigma_1, \sigma_3) = K\sigma_1 - \sigma_3 - R_c \leq 0$$

avec

$$K = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right), \quad R_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

Les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ sont rangées de sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
3) Donner une interprétation physique simple à R_c.

Exercice 5 : corps soumis à un mouvement de corps rigide

Considérons un corps, occupant à l'instant t une certaine région de l'espace $\mathcal{D}$, soumis à un mouvement de corps rigide défini par $\vec{v} = \dot{\vec{c}} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{x} - \vec{c})$. Désignions par $\vec{X}$ le **centre d'inertie** de ce corps :

$$\vec{X}(t) = \frac{1}{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{D}}\rho\vec{x}\mathrm{d}\nu, \text{ avec } \mathcal{M} = \int_{\mathcal{D}}\rho\mathrm{d}\nu$$

Ce vecteur est aussi appelé **centre de masse** ou encore **centre de gravité**.

1) Soit $\vec{Q}(t) = \displaystyle\int_{\mathcal{D}}\rho\vec{v}\mathrm{d}\nu$ le vecteur quantité de mouvement associée à $\mathcal{D}$. Montrer que :

$$\vec{Q}(t) = \mathcal{M}\vec{V}(t)$$

où $\vec{V}$ est la vitesse du centre d'inertie.

2) Soit $\vec{M}_O = \displaystyle\int_{\mathcal{D}}\vec{x}\wedge\rho\vec{v}\mathrm{d}\nu$ le moment de la quantité de mouvement par rapport au centre O du repère $(O, \{\vec{e}_i\})$.

a) Pseudo-tenseur d'inertie $\underline{\underline{I}}_O$. Montrer que :

$$\int_{\mathcal{D}}\rho\vec{x}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{x})\mathrm{d}\nu = \underline{\underline{I}}_O\vec{\Omega}$$

avec

$$\underline{\underline{I}}_O = \int_{\mathcal{D}}\rho\left[(\vec{x}\cdot\vec{x})\underline{\underline{1}} - (\vec{x}\otimes\vec{x})\right]\mathrm{d}\nu$$

Le pseudo-tenseur $\underline{\underline{I}}_O$ est appelé **tenseur d'inertie** par rapport au point O. Montrer que les composantes I_{Oij} de sa matrice peuvent être explicitées sous la forme :

$$I_{O11} = \int_{\mathcal{D}}\rho(x_2^2 + x_3^2)\mathrm{d}\nu,\ I_{O22} = \int_{\mathcal{D}}\rho(x_1^2 + x_3^2)\mathrm{d}\nu,\ I_{O33} = \int_{\mathcal{D}}\rho(x_1^2 + x_2^2)\mathrm{d}\nu$$

$$I_{O12} = -\int_{\mathcal{D}}\rho x_1x_2\mathrm{d}\nu,\ I_{O13} = -\int_{\mathcal{D}}\rho x_1x_3\mathrm{d}\nu,\ I_{O23} = -\int_{\mathcal{D}}\rho x_2x_3\mathrm{d}\nu,$$

Les termes diagonaux sont appelés **moments d'inertie** par rapport aux axes $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ du repère. Les opposés des termes non diagonaux sont appelés **produits d'inertie**.

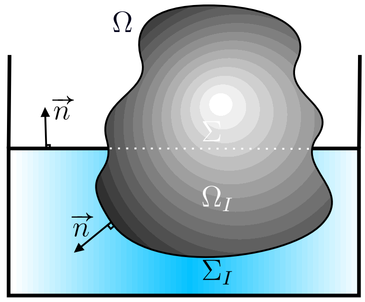
b) En déduire que :

$$\vec{M}_O = \mathcal{M}\vec{X}\wedge\vec{V} + \underline{\underline{I}}_G\vec{\Omega}, \text{ avec } \underline{\underline{I}}_G = \underline{\underline{I}}_O - \mathcal{M}\left[(\vec{X}\cdot\vec{X})\underline{\underline{1}} - (\vec{X}\otimes\vec{X})\right]$$

3) Soit $\vec{F}^{Ext}$ et $\vec{M}_0^{Ext}$ respectivement la résultante et le moment résultant des efforts extérieurs exercés sur $\mathcal{D}$. Écrire la loi fondamentale de la dynamique.

Exercice 6 : poussée d'Archimède

Considérons un corps Ω de volume $\mathcal{V}$ partiellement immergé dans un fluide $\boldsymbol{A}$ au repos. On se propose d'étudier les actions de contact du fluide sur ce corps maintenu en équilibre dans le fluide. On suppose que le corps, de masse volumique ρ_c, et le fluide, de masse volumique ρ_f, sont incompressibles et immiscibles. On suppose également que la frontière non immergée du corps et la surface libre du fluide sont libres de contraintes (l'action de l'air est négligée).



Désignons par Ω_I la partie immergée du corps, de volume $\mathcal{V}_I$ et de frontière $\partial\Omega_I = \Sigma \cup \Sigma_I$, avec Σ_I la partie de la frontière en contact avec le fluide. Soit $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ la densité massique des efforts à distance dus à la pesanteur, avec g l'accélération de la pesanteur et $\vec{e}_3$ un vecteur unitaire vertical ascendant.

1) Sachant que dans un fluide au repos le tenseur des contraintes de Cauchy est sphérique, déterminer la force élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ s'exerçant sur une facette quelconque du fluide de normale $\vec{n}$. En déduire la force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur le corps Ω.
2) Déterminer la résultante des efforts extérieurs $\vec{R}$ s'exerçant sur le corps Ω.
3) Supposons qu'on puisse remplacer la partie immergée Ω_I par un fluide $\boldsymbol{B}$ de même masse volumique que le fluide $\boldsymbol{A}$, de telle façon que le fluide total $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ soit en équilibre, sans que le fluide $\boldsymbol{A}$ s'en trouve perturbé. Le fluide $\boldsymbol{B}$ étant toujours au repos, montrer que :

$$\vec{F} = -\rho_f \mathcal{V}_I \vec{g}$$

   C'est le célèbre **théorème d'Archimède** : tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une poussée égale et opposée au poids du fluide déplacé par le corps.
4) Déterminer le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'origine du repère. En déduire le point d'application de $\vec{F}$.
5) Déterminer la condition de flottabilité du corps Ω ($\mathcal{V}_I < \mathcal{V}$).

Exercice 7 : forme locale de la loi de bilan du moment de la quantité de mouvement

On se propose de déterminer la forme locale de la loi de bilan du moment de la quantité de mouvement qui, sous sa forme intégrale, s'écrit :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\mathcal{D}}\vec{x}\wedge\rho\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{D}}\vec{x}\wedge\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}}(\vec{x}\wedge\rho\vec{g} + \rho\vec{m})\mathrm{d}\mathcal{V}$$

1) Trouver le tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}$ d'ordre 2 tel que :

$$\underline{\underline{\Sigma}}\vec{n} = \vec{x}\wedge\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}$$

2) Montrer que :

$$\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\Sigma}} = \vec{x}\wedge\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\sigma}}$$

3) En déduire que :

$$\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\sigma}} - \rho\vec{m} = \vec{0}$$

Exercice 8 : énergie potentielle

Pour un domaine matériel $\mathcal{D}$, l'équation de bilan du premier principe s'écrit :

$$\dot{\mathcal{U}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathscr{P}_e + \mathscr{P}_t$$

avec

$$\mathcal{U} = \int_{\mathcal{D}}\rho u\,\mathrm{d}\mathcal{V},\ \mathcal{K} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\rho v^2\mathrm{d}\mathcal{V},\ v = \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$\mathscr{P}_e = \int_{\partial\mathcal{D}}\underline{\underline{\sigma}}\vec{n}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}}\rho\vec{g}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V},\quad \mathscr{P}_t = -\int_{\partial\mathcal{D}}\vec{\psi}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}}r\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Ni $\mathscr{P}_e$, ni $\mathscr{P}_t$ ne peuvent se mettre sous la forme d'une dérivée particulaire d'une grandeur globale associée à $\mathcal{D}$. Toutefois, il peut exister des cas où cela est possible pour la puissance des efforts à distance. On se propose d'étudier ce cas, en désignant par Φ la grandeur associée à $\mathcal{D}$ telle que :

$$\dot{\Phi} = -\int_{\mathcal{D}}\rho\vec{g}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

1) Étudier sous quelles conditions cette égalité est vérifiée pour une grandeur Φ **extensive** de densité massique $\varphi(\vec{x},t)$ telle que :

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi$$

On dit que le champ $\vec{g}$ **dérive du potentiel scalaire** φ. Vérifier qu'une condition nécessaire pour que $\vec{g}$ dérive d'un potentiel est que $\vec{\nabla}\wedge\vec{g} = \vec{0}$.

2) En déduire que la quantité $\mathcal{U}+\mathcal{K}+\Phi$ se conserve lorsque l'évolution de $\mathcal{D}$ est adiabatique et que la puissance des efforts de contact sur $\partial\mathcal{D}$ est négligeable. La grandeur Φ est appelée **énergie potentiel**.
3) Le potentiel φ est défini à une constante additive près qui peut être choisie arbitrairement. Justifier pourquoi cette constante n'as aucun rôle à jouer dans le bilan de l'énergie.
4) Déterminer φ et Φ dans le cas où les actions à distance sont dus à la pesanteur : $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, avec g l'accélération de la pesanteur et $\vec{e}_3$ un vecteur unitaire vertical ascendant.

Exercice 9 : fluide parfait incompressible - équation de Bernoulli

Un fluide est dit **parfait** si le tenseur des contraintes de Cauchy est sphérique : $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x},t) = -p(\vec{x},t)\underline{\underline{1}}$, avec $p(\vec{x},t)$ le champ de pression. Un fluide est dit **incompressible**, si sa masse volumique reste constante. On se propose d'étudier le cas particulier où le fluide est à la fois parfait et incompressible.

1) Montrer que le système d'équations formé par les lois de bilan de la masse et de la quantité de mouvement est fermé (autant d'équations que d'inconnues).
2) Supposons que les efforts à distance dérive d'un potentiel ($\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})$), montrer que :

$$\partial_t\vec{v} + \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\right)\wedge\vec{v} + \vec{\nabla}H = 0, \text{ avec } H = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \varphi, \quad v = \vec{v}\cdot\vec{v}$$

3) Supposons en plus que le champ de vitesse dérive lui aussi d'un potentiel scalaire $\phi(\vec{x},t)$, $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi(\vec{x},t)$, on parle dans ce cas d'un écoulement **irrotationnel**, montrer que :

$$\partial_t\phi + H = C(t)$$

où $C(t)$ est une fonction uniquement du temps. Lorsque l'écoulement est stationnaire, la quantité H est constante : c'est **l'équation de Bernoulli**.

Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

(1) Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

(2) Cinématique du milieu continu

(3) Lois de bilan

(4) Lois de comportement

(5) Thermoélasticité linéarisée

Plan du chapitre

1 Rôle du second principe **2**
2 Lois de comportement des fluides classiques **3**
2.1 Lois d'état, lois complémentaires 3
2.2 Lois d'état, potentiel thermodynamique 5
2.3 Lois complémentaires 6
2.4 Loi de Newton, loi de Fourier 7
2.5 Équivalence des deux principes 8
2.6 Équation de la chaleur 9
3 Lois de comportement des solides **10**
3.1 Puissance volumique des efforts intérieurs 11
3.2 Lois d'état, lois complémentaires 12
3.3 Lois d'état, potentiel thermodynamique 14
3.4 Équivalence des deux principes 15
3.5 Équation de la chaleur 16

1. Rôle du second principe

Les lois de comportement doivent être telles que le second principe de la thermodynamique soit satisfait :

$$\varpi \geq 0$$

Rappelons les équations de bilan des deux principes :

$$\begin{cases} \rho\dot{u} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\psi} = r + \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} \\ \rho\dot{s} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\psi}/T) = (r+\varpi)/T \end{cases} \qquad \text{avec } \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{\nabla}}\vec{v})^S$$

Introduisons **l'énergie libre**

$$f = u - Ts$$

$$\Rightarrow \quad \varpi = -\rho\dot{f} - \rho s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T \geq 0$$

C'est l'inégalité dite de **Clausius-Duhem**.

2. Lois de comportement des fluides classiques

2.1. Lois d'état, lois complémentaires

Un fluide classique, dit aussi fluide **Newtonien**, est un milieu **homogène** et **isotrope** pour le quel nous avons :

- $f = f(\rho, T)$
- $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\zeta}}$

La dissipation volumique ϖ devient :

$$\varpi = -\rho(\partial_\rho f)\dot{\rho} - \rho(s + \partial_T f)\dot{T} - p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \underline{\underline{\zeta}}:\underline{\underline{D}} - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T$$

En utilisant la loi de conservation de la masse $\dot{\rho} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$, il vient :

$$\varpi = (p - \rho^2\partial_\rho f)\dot{\rho}/\rho - \rho(s + \partial_T f)\dot{T} + \underline{\underline{\zeta}}:\underline{\underline{D}} - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T$$

L'inégalité $\varpi \geq 0$ doit être vérifiée pour toute évolution possible.

2. Lois de comportement des fluides classiques

2.1. Lois d'état, lois complémentaires

Prenons le cas d'une transformation infiniment lente ($\underline{\underline{D}} \approx \underline{\underline{0}}$) avec $\vec{\nabla} T = \vec{0}$, il vient :

$$\varpi = (p - \rho^2 \partial_\rho f)\dot{\rho}/\rho - \rho(s + \partial_T f)\dot{T}$$

L'inégalité $\varpi \geq 0$ doit être vérifiée $\forall\, \dot{T}$ et $\forall\, \dot{\rho}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} p = \rho^2 \partial_\rho f \\ s = -\partial_T f \end{cases}$ D'où :

$$\varpi = \underline{\underline{\zeta}} : \underline{\underline{D}} - \left(\vec{\psi} \cdot \vec{\nabla} T\right)/T \geq 0$$

- **Lois d'état** : $f = f(\rho, T)$, $p = \rho^2 \partial_\rho f$ et $s = -\partial_T f$.
- **Lois complémentaires** à formuler pour $\underline{\underline{\zeta}}$ et $\underline{\underline{\psi}}$.

2. Lois de comportement des fluides classiques

2.2. Lois d'état, potentiel thermodynamique

La détermination de f permet, par dérivation adéquate, de calculer toutes les autres fonctions thermodynamiques : f est un **potentiel thermodynamique**.

Pour les fluides classiques, l'état thermodynamique est défini soit par le couple (ρ, T), avec l'énergie libre de **Helmholtz** f comme potentiel thermodynamique, soit par le couple (p, T), avec l'enthalpie libre de **Gibbs** $g = f + p/\rho$, comme potentiel thermodynamique.

Nous pouvons définir d'autres potentiels thermodynamiques :

- l'énergie interne $u(\rho, s)$
- l'enthalpie $h(p, s) = u + p/\rho$

2. Lois de comportement des fluides classiques

2.3. Lois complémentaires

$$\varpi = \underline{\underline{\zeta}}:\underline{\underline{D}} - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T \geq 0$$

Les irréversibilités dans le fluide résultent donc de deux processus :

- le travail des contraintes $\underline{\underline{\zeta}}$: **dissipation intrinsèque** ;
- la conduction de la chaleur : **dissipation thermique**.

Un postulat fondamental de la physique

Chaque **flux** entrant dans l'expression de ϖ est une fonction de toutes les **forces thermodynamiques** qui interviennent dans cette expression, fonction qui s'annule avec l'ensemble de ces forces.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\zeta}} = \underline{\underline{\zeta}}\big(-\vec{\nabla}T/T,\ \underline{\underline{D}}\big),\quad \vec{\psi} = \vec{\psi}\big(-\vec{\nabla}T/T,\ \underline{\underline{D}}\big)$$

En pratique, on se limite à des relations linéaires qui font appel uniquement aux effets purs (lien entre la force thermodynamique et le flux qui lui est conjugué).

2. Lois de comportement des fluides classiques

2.4. Loi de Newton, loi de Fourier

- **Loi de Newton** : $\underline{\underline{\zeta}} = 2\mu\underline{\underline{D}} + \big(\mu_v - \dfrac{2}{3}\mu\big)\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,\underline{\underline{1}}$
  μ : **viscosité dynamique**, μ_v : **viscosité volumique**.

- **Loi de Fourier** : $\vec{\psi} = -\Lambda\vec{\nabla}T$, Λ : **conductivité thermique**.

La dissipation s'écrit : $\varpi = 2\mu\underline{\underline{D}}':\underline{\underline{D}}' + \mu_v(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})^2 + \Lambda\vec{\nabla}T\cdot\vec{\nabla}T/T$

D'où, $\varpi \geq 0$ est bien vérifiée si μ, μ_v et Λ sont positifs :

$$\mu \geq 0,\ \mu_v \geq 0,\ \Lambda \geq 0$$

Dans ce cas, on a : $\varpi = \varpi_i + \varpi_T \geq 0$ avec $\varpi_i \geq 0$ et $\varpi_T \geq 0$.

La dissipation **intrinsèque** $\varpi_i = 2\mu\underline{\underline{D}}':\underline{\underline{D}}' + \mu_v(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})^2$ est le résultat de deux mécanismes : déviatorique et sphérique.

2.5. Équivalence des deux principes

Équations de bilan de l'énergie interne et de l'entropie

$$\begin{cases} \rho\dot{u} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\psi} = r + \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} \\ \rho\dot{s} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\psi}/T) = (r+\varpi)/T \end{cases}$$

Avec $\varpi = -\rho\dot{f} - \rho s\dot{T} + p\dot{\rho}/\rho + \underline{\underline{\zeta}}:\underline{\underline{D}} - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T \geq 0$

Lois d'état

$$f = u - Ts = f(\rho, T), \;\; p = \rho^2\partial_\rho f, \;\; s = -\partial_T f$$

$$\Downarrow$$

$$\varpi = \underbrace{\overbrace{-\rho\dot{f} - \rho s\dot{T} + p\dot{\rho}/\rho}^{=0} + \underline{\underline{\zeta}}:\underline{\underline{D}}}_{\text{Dissipation intrinsèque } \varpi_i > 0} \;\; \underbrace{-(\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T}_{\text{Dissipation thermique } \varpi_T > 0} \geq 0$$

$\Rightarrow$ les deux équations de bilan sont équivalentes ($\rho\dot{u} = p\dot{\rho}/\rho + \rho T\dot{s}$).

2. Lois de comportement des fluides classiques

2.6. Équation de la chaleur

En utilisant l'équation de l'entropie et la loi de Fourier, il vient :

$$\rho T\dot{s} - \vec{\nabla}\cdot(\Lambda\vec{\nabla}T) = r + \underline{\underline{\zeta}}:\underline{\underline{D}}$$

En introduisant les coefficients suivants :

- **dilatation thermique volumique à pression constante** : $\alpha = -\partial_T\rho(p,T)/\rho$;
- **compressibilité isotherme** : $\beta = \partial_p\rho(p,T)/\rho$;
- **capacité thermique à pression constante** : $C_p = T\partial_T s(p,T)$;
- **capacité thermique à volume constant** : $C_v = T\partial_T s(\rho,T)$.

Il vient : $\rho T\dot{s} = \rho C_v\dot{T} - (\alpha T/\beta)\dot{\rho}/\rho = \rho C_p\dot{T} - \alpha T\dot{p}$

Équation de la chaleur avec C_v :

$$\rho C_v\dot{T} - \vec{\nabla}\cdot(\Lambda\vec{\nabla}T) = r + \underline{\underline{\zeta}}:\underline{\underline{D}} - \frac{\alpha T}{\beta}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

Équation de la chaleur avec C_p :

$$\rho C_p\dot{T} - \vec{\nabla}\cdot(\Lambda\vec{\nabla}T) = r + \underline{\underline{\zeta}}:\underline{\underline{D}} + \alpha T\dot{p}$$

3. Lois de comportement des solides

$$\varpi = -\rho\dot{f} - \rho s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T \geq 0$$

- Les variables intervenant dans la description de **l'état thermodynamique** ne sont pas évidentes à fixer.
- Le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est plus complexe, et la conservation de la masse n'est plus directement exploitable.
- Le tenseur $\underline{\underline{D}}$ ne s'exprime pas comme la dérivée particulaire d'un autre tenseur.

Commençons par chercher comment substituer le terme $\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}}$ par un autre qui fait intervenir la dérivée particulaire d'un tenseur.

3. Lois de comportement des solides

3.1. Puissance volumique des efforts intérieurs

Nous avons exprimé la puissance des efforts intérieurs à l'aide des tenseurs **eulériens** $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{D}}$. Cherchons s'il existe un tenseur **lagrangien** $\underline{\underline{A}}$ tel que :

$$\mathscr{P}_i = -\int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{D}_0} \underline{\underline{A}}:\underline{\underline{\dot{\Delta}}}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Sachant que $\underline{\underline{\dot{\Delta}}} = \underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{F}}$, et que $\int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}}J\,\mathrm{d}\mathcal{V}_0$, on obtient :

$$\underline{\underline{A}} = J\underline{\underline{F}}^{-1}\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{F}}^{-T}$$

Le tenseur $\underline{\underline{A}}$ n'est autre que le 2e tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\Pi}}$. Il vient :

$$\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}} = \frac{1}{J}\underline{\underline{\Pi}}:\underline{\underline{\dot{\Delta}}}$$

3.2. Lois d'état, lois complémentaires

$$\varpi = -\rho\dot{f} - \rho s\dot{T} + \frac{1}{J}\underline{\underline{\Pi}}:\dot{\underline{\underline{\Delta}}} - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T \geq 0$$

En utilisant la forme lagrangienne $\rho J = \rho_0$ de la conservation de la masse , il vient :

$$J\varpi = -\rho_0\dot{f} - \rho_0 s\dot{T} + \underline{\underline{\Pi}}:\dot{\underline{\underline{\Delta}}} - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)J/T \geq 0$$

Hypothèse sur l'état thermodynamique : $f = f(\underline{\underline{\Delta}}, T)$

L'inégalité $J\varpi \geq 0$ doit être vérifiée pour toute évolution possible, en particulier pour $\vec{\nabla}T = \vec{0}$, il vient :

$$J\varpi = (\underline{\underline{\Pi}} - \rho_0\partial_{\underline{\underline{\Delta}}}f):\dot{\underline{\underline{\Delta}}} - \rho_0(s + \partial_T f)\dot{T} \geq 0$$

L'inégalité $J\varpi \geq 0$ doit être vérifiée $\forall\, \dot{\underline{\underline{\Delta}}}$ et $\forall\, \dot{T} \;\Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\Pi}} = \rho_0\partial_{\underline{\underline{\Delta}}}f \\ s = -\partial_T f \end{cases}$

3. Lois de comportement des solides

3.2. Lois d'état, lois complémentaires

$$\varpi = \underbrace{-\rho\dot{f} - \rho s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{D}}}_{\text{Dissipation intrinsèque } \varpi_i = 0} \; \underbrace{-(\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T}_{\text{Dissipation thermique } \varpi_T > 0} = -(\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T \geq 0$$

- **Lois d'état** : $f = f(\underline{\underline{\Delta}}, T)$, $\underline{\underline{\Pi}} = \rho_0\partial_{\underline{\underline{\Delta}}}f$ et $s = -\partial_T f$.
- La donnée de f en fonction des variables d'état détermine complètement le tenseur des contraintes, les **lois complémentaires** qui restent à formuler sont celle de $\vec{\psi}$ et des autres irréversibilités inélastiques (plastique, viscoplastique...).
  Pour $\vec{\psi}$, la **loi de Fourier** est généralement utilisée :

$$\vec{\psi} = -\underline{\underline{\Lambda}}\vec{\nabla}T$$

  avec $\underline{\underline{\Lambda}}$ un tenseur symétrique défini positif : **tenseur de conductivité thermique**.

3. Lois de comportement des solides

3.3. Lois d'état, potentiel thermodynamique

Pour les matériaux solides, toutes les lois de comportement ne supposent pas l'existence d'un potentiel thermodynamique. Celles qui utilisent un potentiel thermodynamique sont appelées **lois hyperélastiques**.

Les limitations pratiques font que la détermination expérimentale ne donne accès qu'à quelques dérivées partielles du potentiel thermodynamique. En partant des lois d'état : $\underline{\underline{\Pi}} = \rho_0 \partial_{\underline{\underline{\Delta}}} f$ et $s = -\partial_T f$, on obtient les **lois de la thermoélasticité** :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\Pi}}} = \underset{\sim}{H}(\dot{\underline{\underline{\Delta}}} - \underline{\underline{\alpha}}\dot{T}) \\ \dot{s} = \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}/\rho_0 + C_\Delta \dot{T}/T \end{cases}$$

- $\underset{\sim}{H}$: **tenseur d'ordre 4 d'élasticité de Hooke**. Ce tenseur s'appelle aussi **tenseur des rigidités**. Son inverse $\underset{\sim}{H}^{-1}$ s'appelle **tenseur des souplesses**.
- $\underline{\underline{\alpha}}$: **tenseur de dilatation thermique volumique**.
- C_Δ : **capacité thermique massique à déformations constantes**.

3. Lois de comportement des solides

3.4. Équivalence des deux principes

Équations de bilan de l'énergie interne et de l'entropie

$$\begin{cases} \rho\dot{u} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\psi} = r + \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}/J \\ \rho\dot{s} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\psi}/T) = (r + \varpi)/T \end{cases}$$

Avec $\varpi = \big(-\rho_0\dot{f} - \rho_0 s\dot{T} + \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}\big)/J - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T \geq 0$

Lois d'état

$$f = u - Ts = f(\underline{\underline{\Delta}}, T), \;\; \underline{\underline{\Pi}} = \rho_0 \partial_{\underline{\underline{\Delta}}} f, \;\; s = -\partial_T f$$

$$\Downarrow$$

$$\varpi = \underbrace{\big(-\rho_0\dot{f} - \rho_0 s\dot{T} + \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}\big)/J}_{\text{Dissipation intrinsèque } \varpi_i = 0} \underbrace{-(\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T}_{\text{Dissipation thermique } \varpi_T > 0} = -(\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T \geq 0$$

$\Rightarrow$ les deux équations de bilan sont équivalentes ($\rho_0\dot{u} = \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}} + \rho_0 T\dot{s}$).

3.5. Équation de la chaleur

En utilisant l'équation de l'entropie et la loi de Fourier, il vient :

$$\rho T\dot{s} - \vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\Lambda}}\vec{\nabla}T\right) = r$$

Sachant que : $\rho T\dot{s} = \rho C_\Delta \dot{T} + \dfrac{\rho}{\rho_0} T \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}}:\dot{\underline{\underline{\Delta}}} = \rho C_\Pi \dot{T} + \dfrac{\rho}{\rho_0} T \underline{\underline{\alpha}}:\dot{\underline{\underline{\Pi}}}$ avec

$$C_\Pi = T\partial_T s(\underline{\underline{\Pi}}, T) = C_\Delta + T\underline{\underline{\alpha}}:\underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}}/\rho_0$$

C_Π **: capacité thermique massique à contraintes constantes**.

Équation de la chaleur avec C_Δ :

$$\rho C_\Delta \dot{T} - \vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\Lambda}}\vec{\nabla}T\right) = r - \rho T \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}}:\dot{\underline{\underline{\Delta}}}/\rho_0$$

Équation de la chaleur avec C_Π :

$$\rho C_\Pi \dot{T} - \vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\underline{\Lambda}}\vec{\nabla}T\right) = r - \rho T \underline{\underline{\alpha}}:\dot{\underline{\underline{\Pi}}}/\rho_0$$

EMINES - School of Industrial Management - Année 2022/2023

MMC - (4) - Lois de comportement

Exercices

Exercice 1 : équations de Navier-Stokes

1) Monter que, pour un fluide newtonien, l'équation locale du bilan de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho\dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla}p + 2\vec{\nabla}\cdot\left(\mu\underline{\underline{D}}\right) + \vec{\nabla}\Big(\big(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\big)\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\Big) + \rho\vec{g}$$

où μ et μ_v sont les deux coefficients de viscosité dépendant à priori de l'état thermodynamique du fluide. Ces équations sont dites **de Navier-Stokes**.

2) L'effet de la deuxième viscosité μ_v est généralement négligé. Écrire les équations de Navier-Stokes dans ce cas, en supposant en plus que la viscosité μ est constante.

3) Étudier le cas particulier d'un fluide incompressible.

4) On considère un fluide newtonien incompressible tel que μ soit constante et $\mu_v = 0$. On suppose également que les efforts à distance dérive d'un potentiel ($\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x})$).
   a) Écrire les équations de Navier-Stokes.
   b) Étudier le cas particulier où $\vec{g} = -g\,\vec{e}_3$ avec g l'accélération de la pesanteur et $\vec{e}_3$ un vecteur unitaire vertical ascendant.

Exercice 2 : lois d'état thermoélastiques

1) En partant des lois d'état $\underline{\underline{\Pi}} = \rho_0\partial_{\underline{\underline{\Delta}}}f$ et $s = -\partial_T f$, où $f = f(\underline{\underline{\Delta}}, T)$ est le potentiel thermodynamique de Helmholtz, montrer que :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\Pi}}} = \underset{\sim}{H}(\dot{\underline{\underline{\Delta}}} - \underline{\underline{\alpha}}\dot{T}) \\ \dot{s} = \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}/\rho_0 + C_\Delta\dot{T}/T \end{cases}$$

où les grandeurs $\underset{\sim}{H}$, $\underline{\underline{\alpha}}$ et C_Δ sont à exprimer en fonction des dérivées partielles de f.

2) Étudier les symétries du tenseur $\underset{\sim}{H}$.

Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

(1) Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

(2) Cinématique du milieu continu

(3) Lois de bilan

(4) Lois de comportement

(5) Thermoélasticité linéarisée

Plan du chapitre

1	**Constatations théoriques, empiriques**	**2**
2	**Hypothèse des petites perturbations**	**3**
2.1	Hypothèse des petites transformations	4
2.2	Conditions de compatibilité	5
3	**Conséquences de l'hypothèse des petites transformations**	**6**
4	**Lois thermoélastiques linéaires**	**8**
5	**Lois thermoélastiques linéaires et isotropes**	**9**
5.1	Coefficients thermoélastiques	9
5.2	Dimensions et ordres de grandeur	12
6	**Formulation du problème mécanique**	**13**
6.1	Problème à résoudre	13
6.2	Conditions aux limites	14
6.3	Méthode de résolution	15
7	**Formulation du problème thermique**	**16**
7.1	Équation de la chaleur	16
7.2	Problème à résoudre	17
7.3	Conditions aux limites	18

1. Constatations théoriques, empiriques

- **Première constatation** : dans les équations de bilan, les opérateurs différentiels (gradient, divergence...) sont par rapport à la configuration actuelle qui est elle même une inconnue. $\Rightarrow$ La résolution des problèmes d'évolution des structures nécessite donc, par nature, une **approche incrémentale**.
- **Deuxième constatation** : dans la plupart des situations pratiques, les structures solides ne subissent que des **petites perturbations** par rapport à un état initial d'équilibre. $\Rightarrow$ partant de la configuration de référence, la résolution en une seule étape est suffisante.

Les petites perturbations regroupent deux catégories, généralement indépendantes :

- les petits déplacements ;
- les petites transformations.

Lorsque ces deux catégories sont justifiées, on parle alors de l'**hypothèse des petites perturbations : HPP**.

2. Hypothèse des petites perturbations

Pour un vecteur $\vec{v}$ quelconque (de l'espace vectoriel ou de l'espace produit tensoriel) à n composantes, on a :

$$\max\left(|v_1|, \cdots, |v_n|\right) = |v_I| \leq \sqrt{\cdots + (v_I)^2 + \cdots}$$

Par conséquent, si $\|\vec{v}\|$ est très petit devant 1, il en est de même de toutes les composantes de $\vec{v}$.

Soit à l'instant t une grandeur ϕ définie sur Ω : $\phi(\vec{x}, t),\ \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}$.

Hypothèse des petits déplacements $\Rightarrow \|\vec{u}\| / L \ll 1$, où L est une longueur caractéristique de la structure $\Rightarrow$ on peut donc confondre configuration de référence et configuration actuelle pour représenter une grandeur :

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}_0 + \vec{u}, t) \simeq \phi(\vec{x}_0, t)$$

Le tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}_0 \vec{u}$.

Hypothèse des petites transformations $\Rightarrow \left\|\underline{\underline{\nabla}}_0 \vec{u}\right\| \ll 1$.

2. Hypothèse des petites perturbations

2.1. Hypothèse des petites transformations

$$\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u} + (\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\right)}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u} - (\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u})^T\right)}_{\underline{\underline{\omega}}}$$

Petites transformations ⇒ petites déformations + petites rotations.

$$\left\|\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}\right\| \ll 1 \Rightarrow \left\|\underline{\underline{\varepsilon}}\right\| \ll 1, \left\|\underline{\underline{\omega}}\right\| \ll 1$$

- $\underline{\underline{\varepsilon}}$: **tenseur des déformations infinitésimales**.
- $\underline{\underline{\omega}}$: **tenseur des rotations infinitésimales**.

Remarques :

On peut avoir l'hypothèse des petites déformations $\left\|\underline{\underline{\varepsilon}}\right\| \ll 1$ sans exclure les grandes rotations (l'exemple des corps élancés).

En général, pour les structures tridimensionnelles, si les déformations sont petites les rotations le sont aussi.

2. Hypothèse des petites perturbations

2.2. Conditions de compatibilité

Étant donné un champ de tenseurs du second ordre symétriques $\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{x})$ défini en chaque point $\vec{x} \in \Omega$, à quelles conditions ce champ est-il un **champ de déformation du milieu continu**, autrement dit, existe-t-il un champ de déplacement $\vec{u}(\vec{x})$ dont il dérive au sens de la formule : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + (\underline{\underline{\nabla}}\vec{u})^T\right)$?

Ce problème n'a de solution que si et seulement si le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ satisfait certaines conditions appelées **conditions de compatibilité**.

Conditions de compatibilité

Un champ symétrique $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est compatible ssi il vérfie :

$$\vec{\nabla}\wedge\left[\left(\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{\varepsilon}}\right)^T\right] = \underline{\underline{0}}$$

3. Conséquences de l'hypothèse des petites transformations

Conséquence sur $\underline{\underline{F}}$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}_0 \vec{u} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}} \simeq \underline{\underline{1}}$$

$$J = \det(\underline{\underline{F}}) = \frac{[\underline{\underline{F}}\vec{u}, \underline{\underline{F}}\vec{v}, \underline{\underline{F}}\vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

En écrivant que $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}$, en développant l'expression du déterminant et en ne gardant que les termes du premier ordre, on obtient :

$$J \simeq 1 + \mathrm{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} + \mathrm{tr}\underline{\underline{\omega}} = 1 + \mathrm{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = 1 + \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}$$

Comme $J = \dfrac{\rho_0}{\rho}$, nous avons :

$$\rho \simeq \rho_0 (1 - \mathrm{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}) \simeq \rho_0$$

Conséquence sur $\underline{\underline{\Delta}}$

En écrivant que $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}$, et en ne gardant que les termes d'ordre 1 en $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\omega}}$, il vient :

$$\underline{\underline{\Delta}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{L}} &= \dot{\underline{\underline{F}}}\,\underline{\underline{F}}^{-1} \\
&\simeq \dot{\underline{\underline{F}}}(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\omega}}) \\
&\simeq \dot{\underline{\underline{F}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \dot{\underline{\underline{\omega}}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{L}}^S = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \underline{\underline{W}} = \underline{\underline{L}}^A = \dot{\underline{\underline{\omega}}} \end{cases}$$

3. Conséquences de l'hypothèse des petites transformations

Conséquences sur les lois d'état

En remplaçant $\underline{\underline{D}}$ par $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$, on obtient :

$$\begin{cases} \rho\dot{u} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\psi} = r + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \rho\dot{s} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\psi}/T) = (r + \varpi)/T \end{cases}$$

Avec $\quad \varpi = -\rho\dot{f} - \rho s\dot{T} + \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - (\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T)/T \geq 0$

$$\Downarrow$$

Lois d'état

$$f = u - Ts = f(\underline{\underline{\varepsilon}}, T), \quad \underline{\underline{\sigma}} = \rho\partial_{\underline{\underline{\varepsilon}}} f, \quad s = -\partial_T f$$

Et les lois de la thermoélasticité s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underset{\sim}{H}(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\alpha}}\dot{T}) \\ \rho T\dot{s} = \rho C_\varepsilon \dot{T} + T\underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \rho C_\sigma \dot{T} + T\underline{\underline{\alpha}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \end{cases}$$

Avec $\quad C_\sigma = C_\varepsilon + T\underline{\underline{\alpha}} : \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}}/\rho$

4. Lois thermoélastiques linéaires

Pour $\underset{\sim}{H}$, $\underline{\underline{\alpha}}$ et $C_{\boldsymbol{\sigma}}$ constants, l'intégration entre la configuration de référence et la configuration actuelle donne :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underset{\sim}{H}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} - (T - T_0)\underline{\underline{\alpha}}\right) \\ s = s_0 + C_{\boldsymbol{\sigma}} \ln\left(\dfrac{T}{T_0}\right) + \dfrac{1}{\rho}\underline{\underline{\alpha}} : \left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0\right) \simeq s_0 + \dfrac{C_{\boldsymbol{\sigma}}}{T_0}T + \dfrac{1}{\rho}\underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\sigma}} \end{cases}$$

La relation $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$ peut être inversée : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\underset{\sim}{H}^{-1}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^e} + \underbrace{(T - T_0)\underline{\underline{\alpha}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}}$

- $\underline{\underline{\sigma}}_0$, T_0 : contrainte et température de référence ($T = T_0$ et $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}$).
- s_0 : constante arbitraire.
- **Hypothèse des petites variations de température** : $\left|T - T_0\right| / T_0 \ll 1$.
  Les déformations engendrées par la variation de température doivent être du même ordre de grandeur que celles engendrées par les contraintes (la déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ doit rester petite).
- $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$: **tenseur des déformations élastiques**
- $\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$: **tenseur des déformations thermiques**

5. Lois thermoélastiques linéaires et isotropes

5.1. Coefficients thermoélastiques

Les tenseurs $\underline{\underline{\alpha}}$ et $\underset{\sim}{H}$ sont sous la forme :

$$\underline{\underline{\alpha}} = \alpha \underline{\underline{1}}, \quad \underset{\sim}{H} = 2\mu \underset{\sim}{J} + 3\kappa \underset{\sim}{K}$$

- α : **coefficient de dilatation thermique linéique** ($\mathrm{tr}\underline{\underline{\alpha}} = 3\alpha$).
- μ, κ : **modules de cisaillement et de compressibilité**.

Le tenseur $\underset{\sim}{H}$ est défini positif :

$$\underset{\sim}{H}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = 2\mu \underline{\underline{s}}' : \underline{\underline{s}}' + \kappa\left(\mathrm{tr}\underline{\underline{s}}\right)^2 > 0 \; \forall \underline{\underline{s}} \neq \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \mu > 0, \; \kappa > 0$$

$$\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{H}^{-1} = \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{K} \Rightarrow \underset{\sim}{H}^{-1} = \frac{1}{2\mu}\underset{\sim}{J} + \frac{1}{3\kappa}\underset{\sim}{K}$$

5. Lois thermoélastiques linéaires et isotropes

$$\underset{\sim}{H} = 2\mu \underset{\sim}{J} + 3\kappa \underset{\sim}{K}$$

En remplaçant $\underset{\sim}{J}$ par $\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{K}$ et en posant $3\lambda = 3\kappa - 2\mu$, il vient :

$$\underset{\sim}{H} = 2\mu \underset{\sim}{I} + 3\lambda \underset{\sim}{K}$$

$\mu, \ \lambda$: **coefficients de Lamé**

$$\underset{\sim}{H}^{-1} = \frac{1}{2\mu}\underset{\sim}{J} + \frac{1}{3\kappa}\underset{\sim}{K} = \frac{1}{2\mu}\Big(\underset{\sim}{I} - 3\frac{\lambda}{3\kappa}\underset{\sim}{K}\Big)$$

En posant $\dfrac{1}{2\mu} = \dfrac{\zeta}{E}, \ \dfrac{\lambda}{3\kappa} = \dfrac{\nu}{\zeta} \Rightarrow \underset{\sim}{H}^{-1} = \dfrac{\zeta}{E}\underset{\sim}{I} - 3\dfrac{\nu}{E}\underset{\sim}{K}$

Pour un état de contrainte uni-axial de la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \vec{n} \otimes \vec{n}$, on a :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \vec{n} \otimes \vec{n} = \underset{\sim}{H}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} : \vec{n} \otimes \vec{n} = \frac{\zeta - \nu}{E}\sigma := \frac{\sigma}{E} \quad \Rightarrow \zeta = 1 + \nu$$

$$\underset{\sim}{H}^{-1} = \frac{1+\nu}{E}\underset{\sim}{I} - 3\frac{\nu}{E}\underset{\sim}{K}$$

$E, \ \nu$: **module d'Young et coefficient de Poisson**.

5. Lois thermoélastiques linéaires et isotropes

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\big(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0\big) - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\big(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0\big)\underline{\underline{1}} + \alpha(T - T_0)\underline{\underline{1}}$$

$$\mu > 0 \text{ et } \kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0 \Rightarrow E > 0, \ -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \ \kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

$$E = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$1 + \nu = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}, \ 1 - \nu = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}, \ \ldots$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \mathrm{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{1}} - 3\kappa\alpha(T - T_0)\underline{\underline{1}}$$

5. Lois thermoélastiques linéaires et isotropes

5.2. Dimensions et ordres de grandeur

- ρ s'exprime en kg·m^{-3}.
- E, λ, μ et κ s'expriment en Pa (MPa, GPa).
- ν est sans dimension.
- α s'exprime en K^{-1}.
- C_ε et C_σ s'expriment J·kg^{-1}K^{-1}.
- Λ s'exprime en W·m^{-1}·K^{-1} ($\underline{\underline{\Lambda}} = \Lambda \underline{\underline{1}}$).

Matériau	ρ (kg·m^{-3})	E (GPa)	ν	α ($\times 10^{-6}$K^{-1})	C_ε (J·kg^{-1}·K^{-1})	Λ (W·m^{-1}·K^{-1})
Diamant	3500	1000	0.2	1.2	500	70
Acier	7800	200	0.28	14	500	60
Aluminium	2700	70	0.33	23	900	237
Béton	2500	20 à 50	0.2	10	900	2
Marbre	2800	20 à 80	0.25	6	900	3

6. Formulation du problème mécanique

6.1. Problème à résoudre

Avec l'hypothèse des petites perturbations (HPP), le problème mécanique à résoudre consiste à trouver les champs $\left(\vec{u}(\vec{x},t),\ \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x},t)\right)$, définis sur la configuration initiale, qui vérifient :

$$
\begin{cases}
\underline{\underline{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + (\underline{\underline{\nabla}}\vec{u})^T\right) & \forall \vec{x} \in \Omega, \forall t \geq t_0 & \text{compatibilité} \\
\rho \partial_t^2 \vec{u} = \vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \rho \vec{g} & \forall \vec{x} \in \Omega, \forall t \geq t_0 & \text{équilibre} \\
\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\varepsilon}} - (T - T_0)\underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}} & \forall \vec{x} \in \Omega, \forall t \geq t_0 & \text{loi de comportement} \\
\left[\begin{array}{l} \vec{u}(\vec{x},t_0) = \vec{u}_0(\vec{x}) \\ \partial_t \vec{u}(\vec{x},t_0) = \vec{v}_0(\vec{x}) \end{array}\right. & \forall \vec{x} \in \Omega, \forall t = t_0 & \text{conditions initiales} \\
+ \text{ conditions aux limites sur la frontière } \partial\Omega & &
\end{cases}
$$

- Le champ de température est supposé connu.
- L'argument $\vec{x}$ coïncide avec $\vec{x}_0$.

6. Formulation du problème mécanique

6.2. Conditions aux limites

Les **sollicitations** imposées au corps Ω étudié sont **volumiques** sur Ω (le champ $\vec{g}$) et **surfaciques** sur la frontière $\partial\Omega$.

Conditions aux limites sur la frontière

En chaque point de la frontière, trois composantes sont données parmi l'ensemble des composantes du vecteur déplacement $\vec{u}$ et du vecteur contrainte $\vec{T} = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}$. Ces trois composantes doivent correspondre à trois directions orthogonales entre elles.

$$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma, \quad \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma = \varnothing$$

- **Conditions aux limites en déplacement** : $\forall \vec{x} \in \partial_u\Omega, \forall t \geq t_0$

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{u}_D(\vec{x},t)$$

- **Conditions aux limites en contraintes** : $\forall \vec{x} \in \partial_\sigma\Omega, \forall t \geq t_0$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x},t)\vec{n}(\vec{x}) = \vec{\sigma}_D(\vec{x},t)$$

6. Formulation du problème mécanique

6.3. Méthode de résolution

Classiquement, il existe deux méthodes de résolution :

1. **Méthode des contraintes**. Cela consiste à prendre le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ comme inconnue principale :

- le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est calculé par la loi de comportement ;
- le champ de déplacement $\vec{u}$ est calculé par intégration de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Cette intégration est possible si celui-ci satisfait les conditions de compatibilité.

2. **Méthode des déplacements**. Cela consiste à prendre le champ de déplacement $\vec{u}$ comme inconnue principale :

- le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est calculé par dérivation de $\vec{u}$;
- le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est calculé par la loi de comportement.

7. Formulation du problème thermique

7.1. Équation de la chaleur

$$\begin{cases} \rho C_\varepsilon \dot{T} - \vec{\nabla}\cdot(\underline{\underline{\Lambda}}\vec{\nabla}T) = r - T\underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}}:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \rho C_\sigma \dot{T} - \vec{\nabla}\cdot(\underline{\underline{\Lambda}}\vec{\nabla}T) = r - T\underline{\underline{\alpha}}:\dot{\underline{\underline{\sigma}}} \end{cases} \quad \text{avec } C_\sigma = C_\varepsilon + T\underline{\underline{\alpha}}:\underset{\sim}{H}\underline{\underline{\alpha}}/\rho$$

Considérons un matériau isotrope $\underline{\underline{\alpha}} = \alpha\underline{\underline{1}}$ et $\underset{\sim}{H} = 2\mu\underset{\sim}{J} + 3\kappa\underset{\sim}{K}$, avec :

- évolution adiabatique ($\vec{\psi} = \vec{0}$, $r = 0$) ;
- état de contrainte hydrostatique $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}}$.

$$\rho C_\sigma \dot{T}/T = 3\alpha\dot{p} \Rightarrow \Delta T/T_0 \simeq \frac{3\alpha}{\rho C_\sigma}\Delta p$$

$$C_\sigma = C_\varepsilon + 9T\kappa\alpha^2/\rho$$

$\rho = 7800$ kg·m^{-3}
$\kappa = 150$ GPa
$\alpha = 14\cdot10^{-6}$K $^{-1}$
$C_\varepsilon = 500$ J·kg^{-1}·K^{-1}
$\Delta p = 1$ MPa.

$$(C_\sigma - C_\varepsilon)/C_\varepsilon \approx 0.00006\, T, \qquad \Delta T/T_0 \approx 10^{-11}$$

Le problème thermique peut être résolu indépendamment du problème mécanique avec $C_\sigma = C_\varepsilon = C_p$ (même notation que les fluides).

7. Formulation du problème thermique

7.2. Problème à résoudre

Avec l'hypothèse des petites perturbations (HPP), le problème thermique à résoudre consiste à trouver le champ $T(\vec{x}, t)$, définis sur la configuration initiale, qui vérifient :

$$\begin{cases} \rho C_p \partial_t T = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\psi} + r \;\forall\vec{x} \in \Omega, \forall t \geq t_0 & \text{équation de la chaleur} \\ \vec{\psi} = -\underline{\underline{\Lambda}}\vec{\nabla}T \quad \forall\vec{x} \in \Omega, \forall t \geq t_0 & \text{loi de comportement} \\ T(\vec{x}, t) = T_0(\vec{x}) \quad \forall\vec{x} \in \Omega, \forall t = t_0 & \text{condition initiale} \\ + \text{ conditions aux limites sur la frontière } \partial\Omega & \end{cases}$$

7. Formulation du problème thermique

7.3. Conditions aux limites

Les **sollicitations** imposées au corps Ω étudié sont **volumiques** sur Ω (le champ r) et **surfaciques** sur la frontière $\partial\Omega$.

$$\partial\Omega = \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_\psi, \quad \partial\Omega_T \cap \partial\Omega_\psi = \varnothing$$

- **Conditions aux limites en température** : $\forall \vec{x} \in \partial_T\Omega, \forall t \geq t_0$

$$T(\vec{x}, t) = T_D(\vec{x}, t)$$

- **Conditions aux limites en flux** : $\forall \vec{x} \in \partial_\psi\Omega, \forall t \geq t_0$

$$-\vec{\psi}(\vec{x}, t)\cdot\vec{n}(\vec{x}) = \psi_D(\vec{x}, t)$$

$$-\vec{\psi}(\vec{x}, t)\cdot\vec{n}(\vec{x}) = H_c\big(T_f - T(\vec{x}, t)\big) \qquad \text{loi de Newton}$$

$$-\vec{\psi}(\vec{x}, t)\cdot\vec{n}(\vec{x}) = H_r\big(T(\vec{x}, t)\big)\big(T_\infty - T(\vec{x}, t)\big) \qquad \text{loi de Stefan}$$

$$H_r(T) = h_r\big(T_\infty^3 + T_\infty^2 T + T_\infty T^2 + T^3\big) \Rightarrow -\vec{\psi}\cdot\vec{n} = h_r(T_\infty^4 - T^4)$$

$$-\vec{\psi}(\vec{x}, t)\cdot\vec{n}(\vec{x}) = \psi_D(\vec{x}, t) + H(\vec{x}, t)\big(T_{Ext}(\vec{x}, t) - T(\vec{x}, t)\big)$$

MMC - (5) - Thermoélasticité linéarisée

Exercices

Exercice 1 : transformation infinitésimale rigidifiante

Un mouvement de corps rigide est défini par : $\vec{x} = \underline{\underline{R}}(t)\vec{x}_0 + \vec{c}(t)$, où $\vec{c}(t)$ est le vecteur translation et $\underline{\underline{R}}(t)$ est le tenseur rotation.

1) Montrer que le déplacement $\vec{u}$ est de la forme :

$$\vec{u}(\vec{x}_0, t) = \left(\underline{\underline{R}}(t) - \underline{\underline{1}}\right)\vec{x}_0 + \vec{c}(t)$$

2) Déterminer le tenseur gradient du déplacement $\underline{\underline{\nabla}}_0\vec{u}$ et montrer, dans le contexte des petites transformations, que :

$$\left(\underline{\underline{R}}^T - \underline{\underline{1}}\right)\left(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}\right) = \underline{\underline{0}}$$

3) Déterminer le tenseur de déformation infinitésimale $\underline{\underline{\epsilon}}$ et en déduire que les champs de déplacement rigidifiants sont de la forme :

$$\vec{u}(\vec{x}_0, t) = \vec{c}(t) + \vec{W}(t)\wedge\vec{x}_0, \ \|\vec{W}\| \ll 1$$

4) Supposons une transformation homogène et infinitésimale de tenseur de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}(t)$. Montrer que le champ de déplacement associé à $\underline{\underline{\epsilon}}(t)$ est de la forme :

$$\vec{u}(\vec{x}_0, t) = \underline{\underline{\epsilon}}(t)\vec{x}_0 + \vec{c}(t) + \vec{W}(t)\wedge\vec{x}_0$$

Exercice 2 : conditions de compatibilité

Pour résoudre analytiquement certains problèmes avec l'hypothèse des petites perturbations, il est parfois utile de les reformuler en cherchant le champ de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{x})$ avant celui de déplacement $\vec{u}(\vec{x})$. Le problème qui consiste à trouver le champ vectoriel $\vec{u}(\vec{x})$ tel que $\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + (\underline{\underline{\nabla}}\vec{u})^T\right)$ n'a de solution que sous réserve que $\underline{\underline{\epsilon}}$ satisfasse les conditions : $\vec{\nabla}\wedge\left[\left(\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{\epsilon}}\right)^T\right] = \underline{\underline{0}}$. Montrer que ces conditions de compatibilité sont équivalentes aux conditions suivantes :

$$\frac{\partial^2\epsilon_{ij}}{\partial x_k\partial x_l} + \frac{\partial^2\epsilon_{kl}}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2\epsilon_{ik}}{\partial x_j\partial x_l} + \frac{\partial^2\epsilon_{jl}}{\partial x_i\partial x_k}$$

$$(i,j,k,l) \in \{(1,1,2,2),(2,2,3,3),(3,3,1,1),(1,1,2,3),(2,2,3,1),(3,3,1,2)\}$$

avec ϵ_{ij} les 6 composantes indépendantes de la matrice de $\underline{\underline{\epsilon}}$ dans une base orthonormée.

Exercice 3 : équilibre statique, équation de Navier, équation de Beltrami

1) Montrer que dans le cas d'un équilibre statique isotherme d'un corps solide Ω homogène, isotrope, de masse volumique constante et initialement dans un état non contraint, le système d'équations du problème thermoélastique linéaire est sous la forme :

$$\forall \vec{x} \in \Omega \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \vec{g} = \vec{0} \\ \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda (\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \vec{u} + (\underline{\underline{\nabla}} \vec{u})^T) \end{cases}$$

2) Monter que le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{x})$ est solution de l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 suivante :

$$(\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \vec{\Delta} \vec{u} + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

Cette équation est dite **de Navier**.

3) En appliquant l'opérateur divergence à l'équation de Navier, montrer que :

$$\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \Delta (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0$$

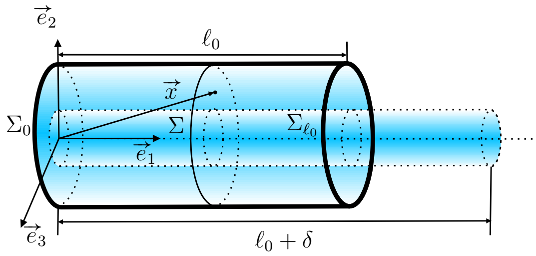
4) Monter que le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x})$ est solution de l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 suivante :

$$\underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{1 + \nu} \underline{\underline{\nabla}} \big(\vec{\nabla} (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \big) + \frac{\nu}{1 - \nu} \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) \underline{\underline{1}} + \rho \big(\underline{\underline{\nabla}} \vec{g} + (\underline{\underline{\nabla}} \vec{g})^T \big) = \underline{\underline{0}}$$

Cette équation est dite **de Beltrami**.

Indication : partir de l'équation de compatibilité de l'exercice 1 en l'exprimant sous la forme compacte $\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0$, avec $i = j$ et (k, l) quelconques. La notation $\phi_{,i} = \partial \phi / \partial x_i$ est conseillée afin d'alléger l'écriture.

Exercice 4 : traction/compression d'une barre cylindrique



On considère une barre cylindrique homogène parallèle à $\vec{e}_1$, de section droite Σ, et de longueur ℓ_0. On désigne par Σ_0 et Σ_{ℓ_0} les deux sections aux extrémités. Les directions des axes $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont quelconques dans le plan de Σ_0.

Le matériau constituant la barre est élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν. On néglige les forces volumiques à distance et d'inertie, et on part d'un état initial non contraint.

On désigne par $\vec{u}$ le déplacement d'un point $\vec{x}$ de la section droite Σ.

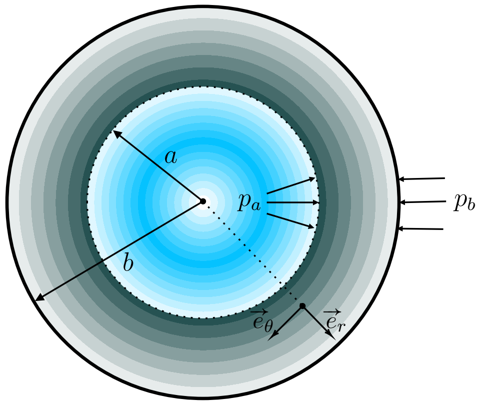
Les données du problème sont :

- surface latérale libre de contraintes : $\vec{T} = \vec{0}$;
- à l'extrémité Σ_0 : $\vec{u}\cdot\vec{e}_1 = 0,\ \vec{T}\cdot\vec{e}_2 = 0,\ \vec{T}\cdot\vec{e}_3 = 0$;
- à l'extrémité Σ_{ℓ_0} : $\vec{u}\cdot\vec{e}_1 = \delta,\ \vec{T}\cdot\vec{e}_2 = 0,\ \vec{T}\cdot\vec{e}_3 = 0$, où δ est une donnée.

1) Montrer qu'un champ de contrainte de la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma\,\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1$ satisfait les équations de l'équilibre statique et les conditions aux limites. Le paramètre σ, indépendant de la position $\vec{x}$, sera déterminé en fonction des données du problème.
2) Déterminer le champ de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$ et donner une interprétation physique au module de Young et au coefficient de Poisson.
3) Montrer que le champ de déplacement $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme :
$$\vec{u} = \frac{\sigma}{E}x_1\vec{e}_1 - \nu\frac{\sigma}{E}\left(x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3\right) + \vec{c} + \vec{W}\wedge\vec{x}$$
où $\vec{c}$ et $\vec{W}$ sont respectivement les vecteurs translation et rotation d'un déplacement rigidifiant arbitraire dans l'hypothèse des petites perturbations.
4) Trouver la valeur du paramètre σ et vérifier que le champ de déplacement est déterminé à une translation parallèle à $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et une rotation autour de $\vec{e}_1$ près. Déterminer les conditions nécessaires pour la validité du contexte infinitésimal.
5) Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{A}$ respectivement le volume de la barre et l'aire de la section droite Σ. Montrer que :
$$\frac{\mathcal{A}-\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_0} = -2\nu\frac{\delta}{\ell_0}, \qquad \frac{\mathcal{V}-\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0} = (1-2\nu)\frac{\delta}{\ell_0}$$
où $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{A}_0$ désignent respectivement le volume et l'aire initiaux. Le coefficient de Poisson vérifie généralement $0 \leq \delta < 1/2$, interpréter les variations de volume et de surface.

Exercice 5 : sphère creuse sous pression

On considère une enveloppe sphérique homogène de rayon intérieur et extérieur respectivement a et b. Le matériau constituant la sphère est élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν. Les surfaces $r = a$ et $r = b$ sont soumises à des pressions uniformes respectivement p_a et p_b.

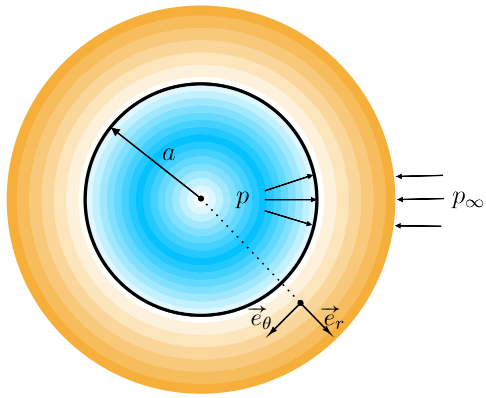


On néglige les forces volumiques à distance et d'inertie, et on part d'un état initial non contraint.

1) Étudier les conditions de symétrie du problème (structure, géométrie, chargement, matériau) et justifier le choix des coordonnées sphériques. En déduire que le déplacement est de la forme $\vec{u} = u(r)\vec{e}_r$ dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) dont l'origine est le centre de l'enveloppe.
2) Définir les conditions de chargement en tout point de la frontière.
3) Déterminer le gradient de $\vec{u}$ et en déduire les expressions des champs de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$ et de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$. Voir l'annexe pour le calcul des opérateurs différentiels en coordonnées sphériques.
4) Montrer que la fonction $u(r)$ vérifie l'équation différentielle suivante :
$$u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u = 0$$
5) Résoudre l'équation différentielle et déterminer l'expression du champ de contrainte sous la forme :
$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(C_1 - \frac{2C_2}{r^3}\right)\vec{e}_r \otimes \vec{e}_r + \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3}\right)\left(\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta + \vec{e}_\varphi \otimes \vec{e}_\varphi\right)$$
Déterminer les deux constantes C_1 et C_2.
6) Coque mince. On désigne par e l'épaisseur de l'enveloppe et par $R = (a+b)/2$ son rayon moyen. En supposant que $e/R \ll 1$, analyser les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ et trouver la contrainte prépondérante.
7) Cavité sphérique dans un milieu infini. Étudier le cas d'une cavité sphérique de rayon a soumise à une pression interne p_a.
8) Sphère pleine. Étudier le cas d'une sphère pleine de rayon b soumise à une pression externe p_b.

Exercice 6 : cavité cylindrique dans un milieu infini

On considère une cavité cylindrique de rayon a et d'axe $\vec{e}_z$, dans un milieu homogène et infini. Le matériau constituant le milieu est élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν. La surface $r = a$ est soumise à une pression uniforme p. On néglige les forces volumiques à distance et d'inertie, et on part d'un état initial sous contraintes uniformes et sphériques $\underline{\underline{\sigma}}_0 = -p_\infty \underline{\underline{1}}$, où p_∞ est la pression à l'infini. On suppose que l'hypothèse des petites perturbations est vérifiée.



1) En admettant que la cavité est infinie dans la direction de son axe $\vec{e}_z$, étudier les conditions de symétrie du problème (structure, géométrie, chargement, matériau) et justifier le choix des coordonnées cylindriques. En déduire que le déplacement est de la forme $\vec{u} = u(r)\vec{e}_r$ dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe $\vec{e}_z$.
2) Définir les conditions de chargement en tout point de la frontière.
3) Déterminer le gradient de $\vec{u}$ et en déduire les expressions des champs de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$ et de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$. Voir l'annexe pour le calcul des opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques.
4) Montrer que la fonction $u(r)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}u = 0$$

5) Résoudre l'équation différentielle et déterminer l'expression du champ de contrainte sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2}\right)\vec{e}_r \otimes \vec{e}_r + \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2}\right)\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta + (2\nu C_1 - (1-2\nu)p_\infty)\,\vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$$

Déterminer les deux constantes C_1 et C_2.
6) Déterminer la variation relative du rayon de la cavité et commenter le résultat en fonction du signe de $p_\infty - p$.
7) Supposons que le matériau constitutif obéit à un critère, délimitant son domaine d'élasticité, de type Mohr-Coulomb $f(\underline{\underline{\sigma}}) = K \max_i(\sigma_i) - \min_i(\sigma_i) - R_c$, où les σ_i sont les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$. Pour $p < p_\infty$, déterminer la condition sur p permettant au milieu de rester à l'intérieur du domaine élastique : $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$.

Exercice 7 : température du sous-sol

On se propose de déterminer la température du sous-sol à partir de la connaissance de la température de l'air T_a, que nous approchons par une fonction périodique du temps sous la forme :

$$T_a(t) = A_a + B_a \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right),\ A_a = \frac{1}{2}(T_{max} + T_{min}),\ B_a = \frac{1}{2}(T_{max} - T_{min})$$

où τ est la période considérée dans laquelle la température de l'air varie entre une valeur maximale T_{max} et une valeur minimale T_{min}.

1) Justifier les hypothèses permettant de ramener l'équation de la chaleur dans le sous-sol à celle qui consiste à trouver la température $T(z \leq 0, t)$ telle que :

$$\Lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

2) Soit l'expression suivante de la température T :

$$T(z,t) = A_s + B_s \exp\left(\frac{z}{D}\right) \cos\left(\frac{2\pi(t - t_s)}{\tau} + \frac{z}{D}\right)$$

Déterminer la constante D pour que cette expression soit solution de l'équation aux dérivées partielles précédente. Les constantes A_s, B_s et t_s seront déterminées en fonction des données du problème.

3) Discuter les hypothèses permettant de considérer les conditions aux limites suivantes :

$$\Lambda \partial_z T(z = 0, t) = H_c(T_a(t) - T(0, t)),\ \Lambda \partial_z T(z = -\infty, t) = 0$$

4) Les constantes A_s, B_s et t_s sont données par :

$$A_s = A_a,\ B_s = k B_a \sin\left(\frac{2\pi t_s}{\tau}\right),\ t_s = \frac{\tau}{2\pi} \arctan\left(\frac{1}{1+k}\right), \text{avec } k = \frac{HD}{\Lambda}$$

Expliquer brièvement comment ces constantes ont pu être identifiées.

Coordonnées cartésiennes, base $\vec{\mathcal{B}} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\vec{x} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

$$U(\vec{x}) = U(x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{U}(\vec{x}) = U_x(x, y, z)\vec{e}_x + U_y(x, y, z)\vec{e}_y + U_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

$$\left[\underline{\underline{\nabla}}\vec{U}\right]_{\vec{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} & \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial x} & \frac{\partial U_z}{\partial y} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{\vec{\mathcal{B}}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\vec{\Delta}\vec{U} = (\Delta U_x)\vec{e}_x + (\Delta U_y)\vec{e}_y + (\Delta U_z)\vec{e}_z$$

$$\underline{\underline{U}}(\vec{x}) = U_{ij}(x, y, z)\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\ ,\quad i, j = x, y, z$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{U}} = &\left(\frac{\partial U_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial U_{xz}}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \\ &\left(\frac{\partial U_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial U_{yz}}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \\ &\left(\frac{\partial U_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial U_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z}\right)\vec{e}_z\end{aligned}$$

Ccoordonnées cylindriques, base $\vec{\mathcal{B}} = \left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\right)$

$$\vec{x} = \vec{x}(r,\theta,z) = r\,\vec{e}_r(\theta) + z\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_r(\theta) = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y, \quad \vec{e}_\theta = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta}$$

$$U(\vec{x}) = U(r,\theta,z)$$

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{U}(\vec{x}) = U_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + U_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + U_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

$$\left[\underline{\underline{\nabla}}\vec{U}\right]_{\vec{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_r}{\partial \theta} - \dfrac{U_\theta}{r} & \dfrac{\partial U_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{U_r}{r} & \dfrac{\partial U_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{\vec{\mathcal{B}}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\vec{\Delta}\vec{U} = \left(\Delta U_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r}{r^2}\right)\vec{e}_r + \left(\Delta U_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r^2}\right)\vec{e}_\theta + \left(\Delta U_z\right)\vec{e}_z$$

$$\underline{\underline{U}}(\vec{x}) = U_{ij}(r,\theta,z)\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\ , \quad i,j = r,\theta,z$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{U}} = &\left(\frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{U_{rr} - U_{\theta\theta}}{r}\right)\vec{e}_r + \\ &\left(\frac{\partial U_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial U_{\theta z}}{\partial z} + \frac{U_{r\theta} + U_{\theta r}}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\ &\left(\frac{\partial U_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \frac{U_{zr}}{r}\right)\vec{e}_z\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques, base $\vec{\mathcal{B}} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$$\vec{x} = \vec{x}(r,\theta,\varphi) = r\,\vec{e}_r(\theta,\varphi)$$

$$\vec{e}_r(\theta,\varphi) = \sin\theta\big(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\big) + \cos\theta\,\vec{e}_z,\quad \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\theta},\quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\varphi}$$

$$U(\vec{x}) = U(r,\theta,\varphi)$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\operatorname{cotan}\theta}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

$$\vec{U}(\vec{x}) = U_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r + U_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\theta + U_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\varphi$$

$$\big[\underline{\underline{\nabla}}\vec{U}\big]_{\vec{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_r}{\partial\theta} - \dfrac{U_\theta}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U_r}{\partial\varphi} - \dfrac{U_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial U_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{U_r}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U_\theta}{\partial\varphi} - \dfrac{U_\varphi\operatorname{cotan}\theta}{r} \\ \dfrac{\partial U_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial\theta} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi} + \dfrac{U_r}{r} + \dfrac{U_\theta\operatorname{cotan}\theta}{r} \end{bmatrix}_{\vec{\mathcal{B}}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{2U_r + U_\theta\operatorname{cotan}\theta}{r}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}\vec{U} = &\left(\Delta U_r - \frac{2}{r^2}U_r - \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(U_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right)\vec{e}_r + \\ &\left(\Delta U_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_r}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{U_\theta}{2} + \cos\theta\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right)\vec{e}_\theta + \\ &\left(\Delta U_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial\varphi} + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial U_\theta}{\partial\varphi} - \frac{U_\varphi}{2}\right)\right)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{U}}(\vec{x}) = U_{ij}(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\ ,\quad i,j = r,\theta,\varphi$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{U}} = &\left(\frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2U_{rr} - U_{\theta\theta} - U_{\varphi\varphi} + U_{r\theta}\operatorname{cotan}\theta}{r}\right)\vec{e}_r + \\ &\left(\frac{\partial U_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{(U_{\theta\theta} - U_{\varphi\varphi})\operatorname{cotan}\theta + 2U_{\theta r} + U_{r\theta}}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\ &\left(\frac{\partial U_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_{\varphi\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2U_{\varphi r} + U_{r\varphi} + (U_{\varphi\theta} + U_{\theta\varphi})\operatorname{cotan}\theta}{r}\right)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$