EMINES - School of Industrial Management
Mohamed IV Polytechnic University

Année 2022/2023

Mécanique des milieux continus

Ahmed ROUABHI
Centre de Géosciences, MINES ParisTech
ahmed.rouabhi@mines-paristech.fr

Table des matières

Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

(1) Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

(2) Cinématique du milieu continu

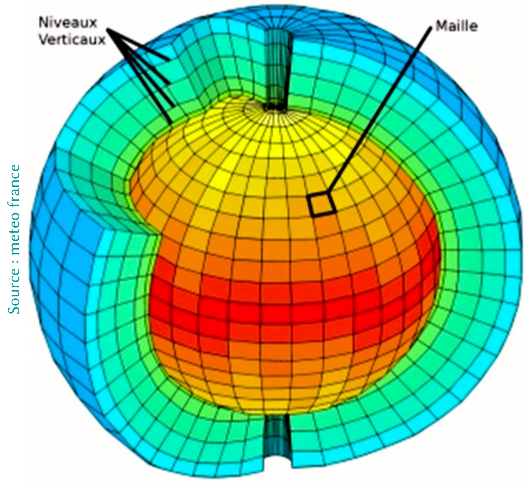
(3) Lois de bilan

(4) Lois de comportement

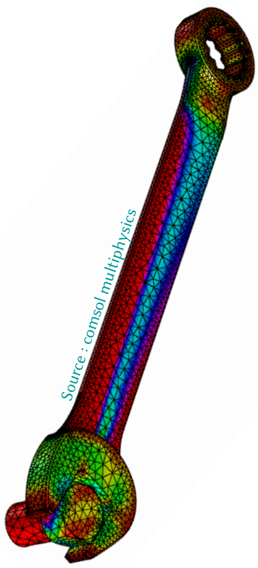
(5) Thermoélasticité linéarisée

Plan du chapitre

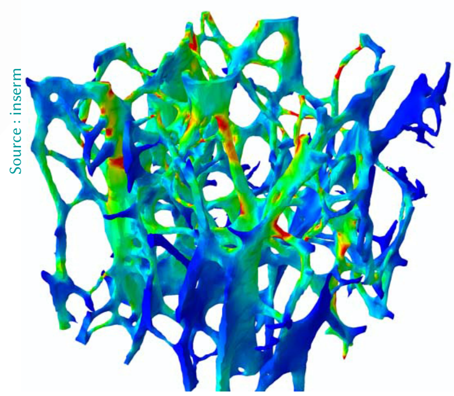
1. La mécanique est partout



Structures géologiques



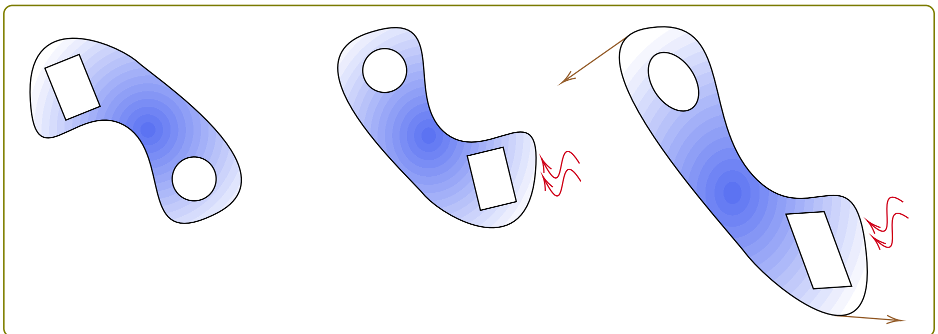
Structures industrielles



Structures osseuses

2. La mécanique des milieux continus

Approche de **modélisation** continue (dans l'espace et dans le temps) permettant d'étudier l'évolution d'une structure soumise à des sollicitations externes.



Qu'est-ce qu'une modélisation ?

Une représentation conceptuelle de la réalité dans un cadre qui permet le raisonnement. Cela exige :

- des hypothèses simplificatrices ;
- limitation aux phénomènes les plus prépondérants.

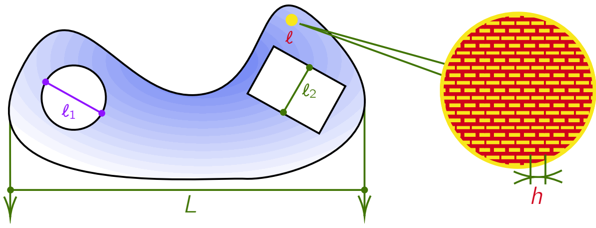
3. Hypothèse de la continuité du milieu

La MMC se place à une **échelle** dite **macroscopique**, qui évite toute hypothèse sur la constitution intime (souvent hétérogène et discontinue) du milieu.

Conséquences

- Prise en compte des phénomènes physiques qui s'opèrent uniquement à cette échelle.
- Existence d'une **longueur caractéristique** de sorte que deux parties quelconques du milieu, de tailles supérieures ou égales à cette longueur, se comportent, sous la même sollicitation, d'une manière identique.

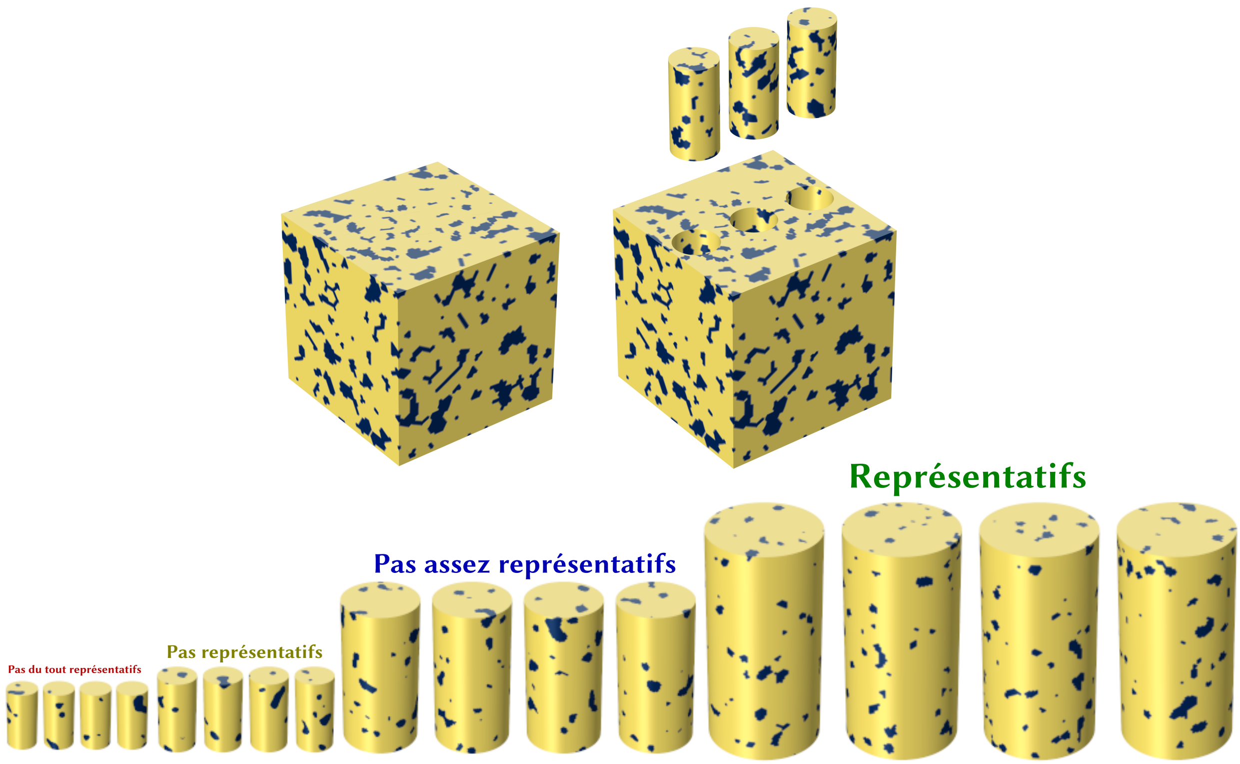
Longueur caractéristique



$h \ll \ell \ll \min(\ell_1,\ \ell_2,\ L)$, h : longueur caractéristique des hétérogénéités

ℓ est la taille du **Volume Élémentaire Représentatif (VER)**.

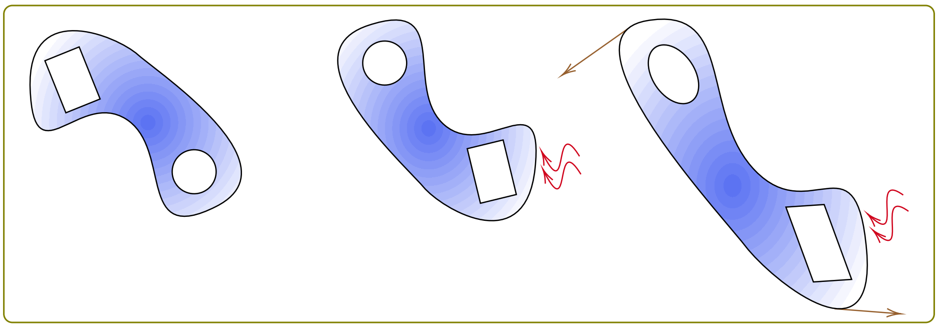
4. VER : l'exemple des géomatériaux



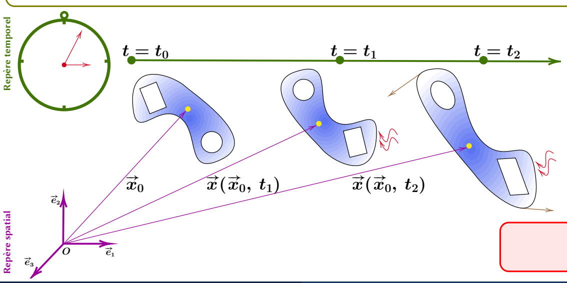
4. VER : l'exemple des géomatériaux

5. Évolution d'une structure

Approche de modélisation permettant d'étudier l'**évolution** d'une structure soumise à des sollicitations externes.



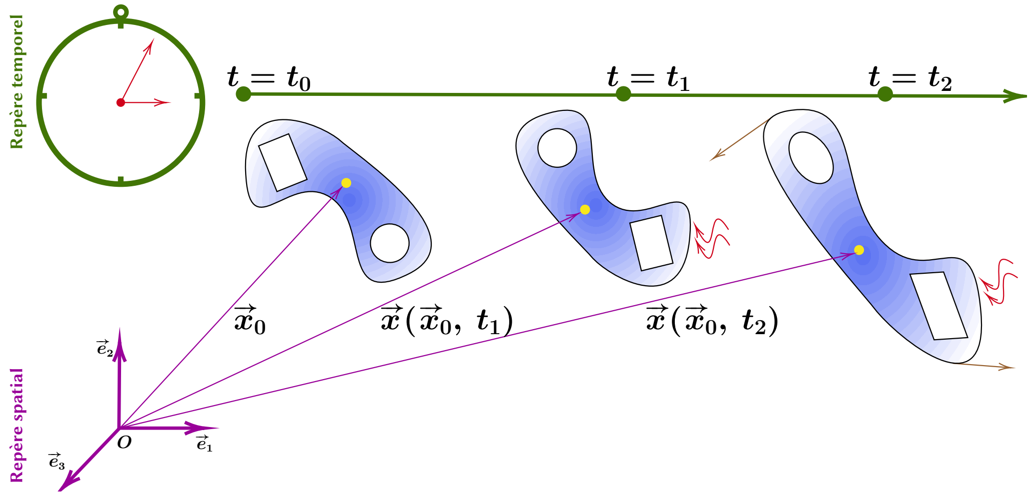
L'**évolution** ne peut être définie que par rapport à un **système de références** (référentiel), combinant un **repère spatial** et un **repère temporel**.



Temps et espace sont indépendants.

5. Évolution d'une structure

5.1. Système de références



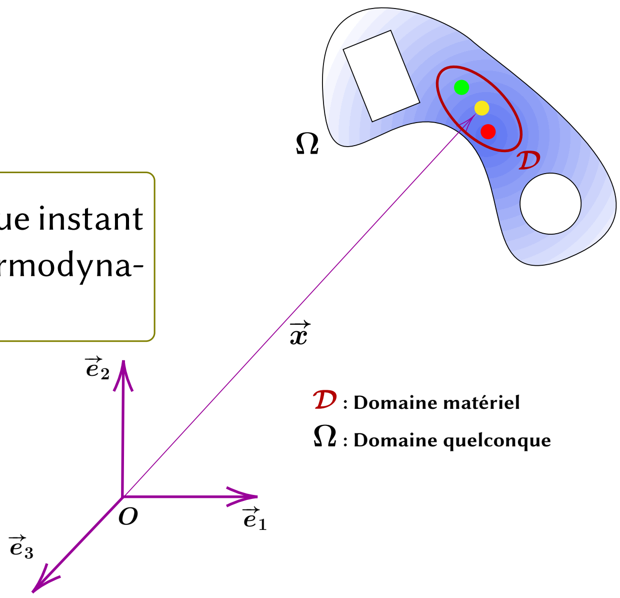
- Chaque **instant** est représenté par une variable réelle t.
- Chaque **point** de la structure occupe à l'instant t la position $\vec{x}$.
- Autour de chaque point $\vec{x}$ de l'espace, on définit un volume élémentaire représentatif (VER) de volume infinitésimal $\delta\mathcal{V}$.
- La matière contenue dans $\delta\mathcal{V}$ est appelée **point matériel** ou **particule**.

5. Évolution d'une structure

5.2. Domaine

Domaine matériel

$\mathcal{D}$: domaine matériel constitué à chaque instant par les mêmes particules (système thermodynamique fermé).



Domaine quelconque

Ω : domaine quelconque animé par un mouvement propre indépendamment du mouvement des particules.

5. Évolution d'une structure

5.3. Grandeurs physiques

Point matériel	Domaine matériel
Volume $\delta\mathcal{V}$	Volume $\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\mathcal{V}$
Masse $\delta\mathcal{M}$	Masse $\mathcal{M} = \int_{\mathcal{D}} \rho(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}$
Vitesse $\vec{v}(\vec{x},t)$	Quantité de mvt $\vec{\mathcal{Q}} = \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{v}\mathrm{d}\mathcal{V}$
Énergie interne massique $u(\vec{x},t)$	Énergie interne $\mathcal{U} = \int_{\mathcal{D}} \rho u(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}$
Entropie massique $s(\vec{x},t)$	Entropie $\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \rho s(\vec{x},t)\mathrm{d}\mathcal{V}\ldots$
Température $T(\vec{x},t)$ Gradient thermique $\vec{\nabla}T(\vec{x},t)$ Déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{x},t)$ Contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x},t)$	$\mathrm{d}\mathcal{V}$: élément de volume infinitésimal

$\rho(\vec{x},t)$, $T(\vec{x},t)$, $u(\vec{x},t)$ et $s(\vec{x},t)$ sont des **champs de scalaires**. $\vec{v}(\vec{x},t)$ et $\vec{\nabla}T(\vec{x},t)$ sont des **champs de vecteurs**. $\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{x},t)$ et $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{x},t)$ sont des **champs de tenseurs**.

6. Objectifs du cours

- Découvrir la base scientifique derrière l'**hypothèse du milieu continu déformable**.
- Introduire et traiter les lois et les notions fondamentales de la discipline.
- Préparer la base pour des sujets plus spécialisés comme :
  - la mécanique des matériaux solides (rupture, plasticité...) ;
  - la mécanique des fluides ;
  - le transfert thermique ;
  - les méthodes numériques en calculs des structures ;
  - ...

7. Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

(1) Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

(2) Cinématique du milieu continu

(3) Lois de bilan

(4) Lois de comportement

(5) Thermoélasticité linéarisée

8. Organisation du cours

Les exercices et les supports des présentations orales seront disponibles à l'adresse :
https://cloud.minesparis.psl.eu/index.php/s/aCihKtzJxhVNN5L/authenticate

Cours + TD :

08 septembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
14 septembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
21 septembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
28 septembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
05 octobre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
12 octobre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
19 octobre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
02 novembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
09 novembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**
16 novembre	**13 h 45 : 15 h 15 - 15 h 30 : 17 h**

Examen écrit : (01 décembre)

Note finale :
Note examen écrit +
Note restitution mini-projet +
Note assiduité et participation

Mini-projets (par groupe de 3-4 élèves) :
Lois de comportement des matériaux

Restitution des mini-projets : (02 décembre)
10 minutes pour chaque groupe (3-4 minutes par élève)

Plan du cours

(0) Introduction et présentation du cours

(1) Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

(2) Cinématique du milieu continu

(3) Lois de bilan

(4) Lois de comportement

(5) Thermoélasticité linéarisée

Plan du chapitre

Partie I : Algèbre tensorielle

Plan du chapitre

Partie II : Analyse tensorielle

Plan du chapitre

Partie III : Compléments d'analyse et d'algèbre tensorielles

Plan du chapitre

Partie I

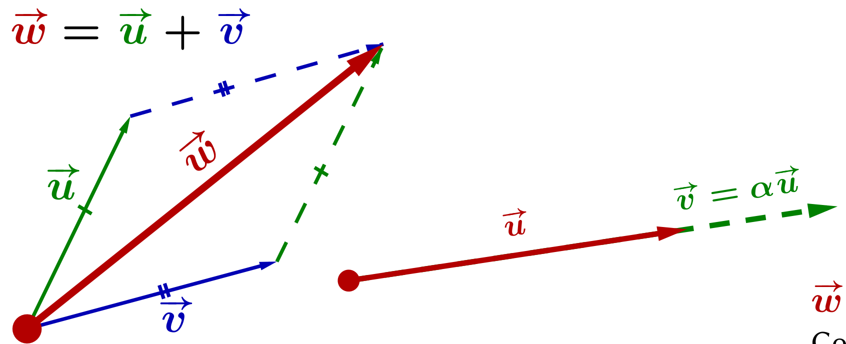
Algèbre tensorielle

1. Vecteurs

Un **vecteur** est un outil mathématique qui sert à représenter des objets de la géométrie (couple de points), de l'algèbre (un n-uplet de $\mathbb{R}^n$) ou de la physique (force, vitesse, accélération...). C'est un élément d'un ensemble d'objets que l'on peut :

- additionner entre eux ;
- multiplier par des nombres,

avec toutes les propriétés naturelles de cette addition et de cette multiplication (associativité, distributivité, élément neutre...)



Addition de vecteurs (règle du parallélogramme)

Multiplication par un scalaire

$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Combinaison linéaire de vecteurs

1. Vecteurs

C'est un élément d'un **espace vectoriel** $\vec{\mathscr{E}}$, le triplet constitué d'un ensemble non vide d'éléments quelconques $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \ldots)$, d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $\times$.

Un espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$ est souvent associé à un **espace affine** ou **ponctuel** $\mathscr{E}$ constitué de points de sorte qu'à tout couple (A, B) de **points** de $\mathscr{E}$ on fasse correspondre un vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, de $\vec{\mathscr{E}}$ tel que :

(1) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

(2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (relation de chasles)

(3) $\forall O \in \mathscr{E}, \forall \vec{x} \in \vec{\mathscr{E}}, \exists! P \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{x}$

Notre espace physique ambiant est modélisé par un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension $n = 3$ auquel on associe un espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$ (ou $\vec{\mathscr{E}}_n$).

1.1. Produit scalaire, norme euclidienne

Produit scalaire : $\left\{\begin{array}{lll} \cdot : & \vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{E}} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\vec{u},\ \vec{v}) & \longmapsto \vec{u}\cdot\vec{v} \end{array}\right.$

telle que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in \vec{\mathscr{E}}^3$:

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0,\ \vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

$\vec{\mathscr{E}}$ muni de ce produit scalaire devient un **espace euclidien**.

Norme euclidienne induite par le produit scalaire : $\left\{\begin{array}{lll} \|\ \| : & \vec{\mathscr{E}} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ & \vec{u} & \longmapsto \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \end{array}\right.$

telle que $\forall(\vec{u},\ \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$:

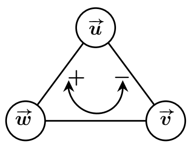
- $\|\vec{u}\cdot\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

1.2. Produit vectoriel

Pas d'extension immédiate à un espace de dimension quelconque.

$$\left\{\begin{array}{lll} \wedge : & \vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{E}} & \longrightarrow \vec{\mathscr{E}} \\ & (\vec{u},\ \vec{v}) & \longmapsto \vec{u}\wedge\vec{v} \end{array}\right.$$

telle que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in \vec{\mathscr{E}}^3$:



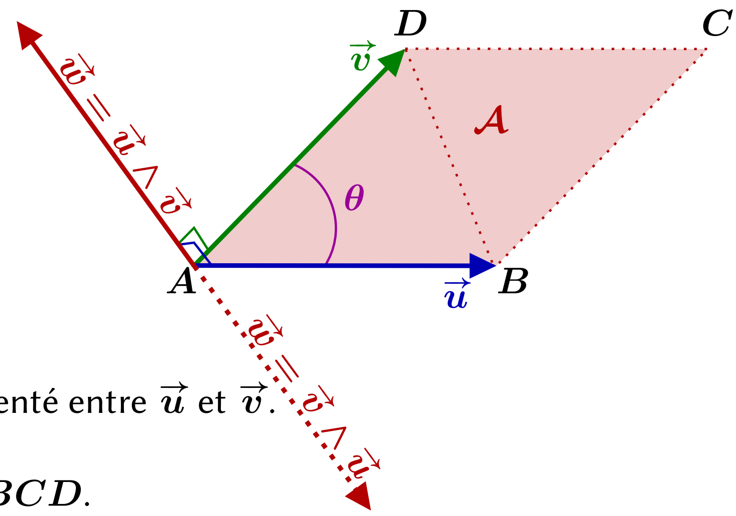
- $(\vec{u} + \vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w} + \vec{v}\wedge\vec{w}$
- $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v} = \alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) + \vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{u}) + \vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{0}$ (identité de Jacobi)

Dans une base orthonormée directe $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$, on utilise les déterminants d'ordre deux :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \text{d'où : } \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3$$

1.2. Produit vectoriel



$$\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\left|\sin(\theta)\right|$$

$$\mathcal{A} = \left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|$$

$\theta = \left(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}\right)$ est l'angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\mathcal{A}$: aire du parallélogramme $ABCD$.

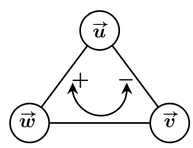
$\frac{1}{2}\mathcal{A}$: aire du triangle ABD.

1.3. Produit mixte

Pas d'extension immédiate à un espace de dimension quelconque.

$$\left\{\begin{array}{llll} [,,] : & \vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{E}} \longrightarrow \mathbb{R} & & \\ & (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) & \longmapsto & [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) \end{array}\right.$$

telle que $\forall\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right) \in \vec{\mathscr{E}}^3$:



- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = 0$

Dans une base orthonormée directe $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2,3}$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

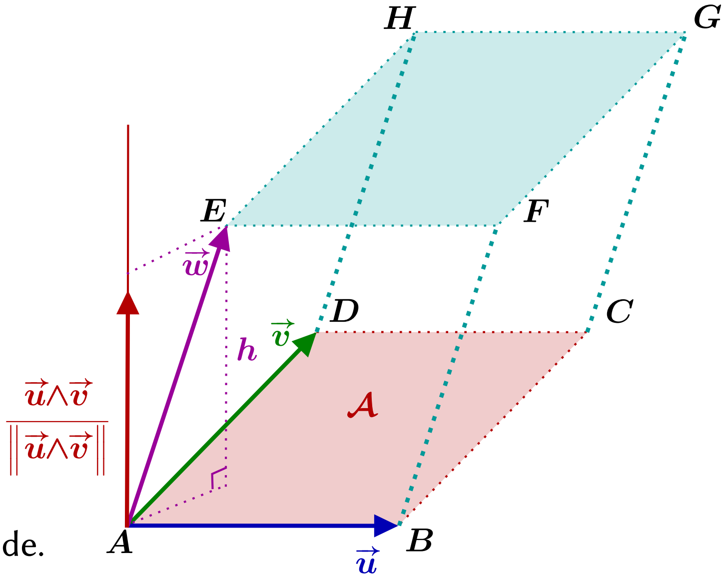
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

1.3. Produit mixte

$$\mathcal{A} = \left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|$$

$$h = \vec{w}\cdot\frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|}$$

$$\mathcal{V} = \vec{w}\cdot\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$$



$\mathcal{A}$: aire de la base du parallélépipède.

h : hauteur du parallélépipède.

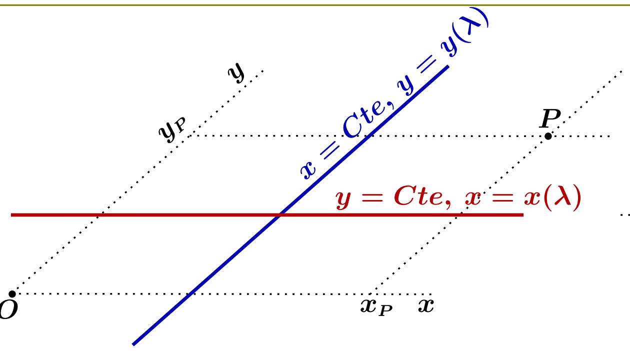
$\mathcal{V}$: volume du parallélépipède.

1.4. Système de coordonnées

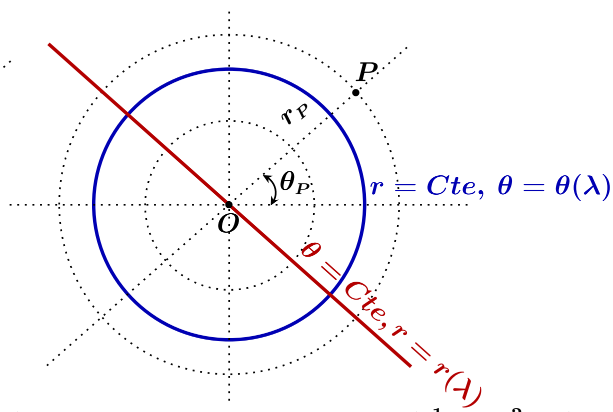
Un point de l'espace $\mathscr{E}$ est repéré par ses **coordonnées** dans un **système de coordonnées**.

Un système de coordonnées peut être **rectiligne (cartésien)** ou **curviligne**, et **orthogonal** ou non **orthogonal**.

Un système de coordonnées quelconque sera noté par $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ ou simplement ξ^i. On note par x^i un système de coordonnées cartésien.



Système de coordonnées rectilignes obliques ($x^1 = x, x^2 = y$)



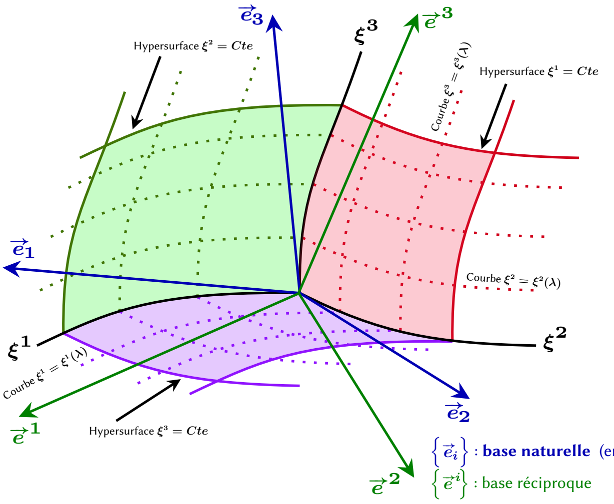
Système de coordonnées polaires ($\xi^1 = r, \xi^2 = \theta$)

1.5. Bases vectorielles

On peut associer à chaque système de coordonnées deux bases vectorielles :

- en formant les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées ;
- en formant les vecteurs perpendiculaires aux hypersurfaces de coordonnées.

Ces deux bases sont dites **réciproques**. Par convention, c'est la deuxième qui est généralement qualifiée de "base réciproque".



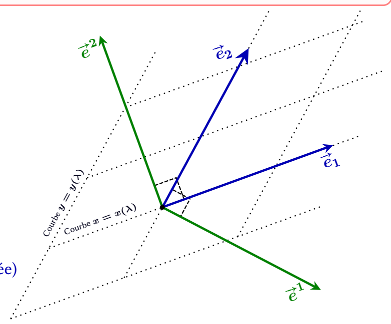
$\left\{\vec{e}_i\right\}$: **base naturelle** (en général, ni orthogonale ni normée)

$\left\{\vec{e}^i\right\}$: base réciproque

Bases réciproques : soit $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base quelconque de $\vec{\mathscr{E}}_n$. On appelle base réciproque de $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ l'unique base $\{\vec{e}^i\}_{i=1,\dots,n}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n$ telle que :

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Par convention, les vecteurs de la base réciproque ont leur indice en haut.

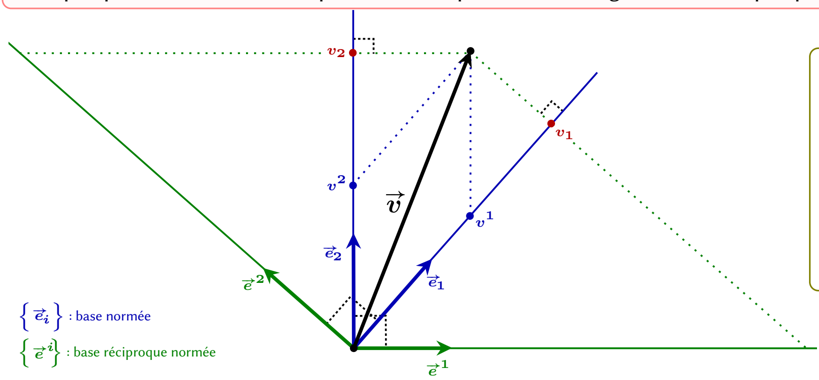


1.6. Composantes dans une base

On peut avoir les coordonnées d'un vecteur dans une base quelconque en le projetant de deux façons :

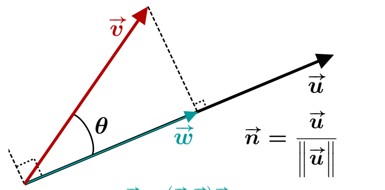
- parallèlement aux vecteurs de base : **composantes contravariantes** ;
- perpendiculairement aux vecteurs de base : **composantes covariantes**.

Composantes contravariantes et covariantes : soit $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\dots,n}$ une base quelconque de $\vec{\mathscr{E}}_n$. On appelle composantes contravariantes d'un vecteur $\vec{v}$ dans cette base, les n scalaires v^i tels que : $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i \vec{e}_i$. Si $\vec{\mathscr{E}}_n$ est muni d'un produit scalaire ($\mathscr{E}$ est un espace euclidien), on appelle composantes covariantes du vecteur $\vec{v}$, les n scalaires $v_i = \vec{v}\cdot\vec{e}_i$ tels que : $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}^i$, où $\left\{\vec{e}^i\right\}_{i=1,\dots,n}$ est la base réciproque de $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\dots,n}$. De la définition $v_i = \vec{v}\cdot\vec{e}_i$, on remarque que si le vecteur de base est multiplié par un nombre, la composante correspondante sera également multiplié par ce nombre, d'où le sens de **co**variant.



$\left\{\vec{e}_i\right\}$: base normée

$\left\{\vec{e}^i\right\}$: base réciproque normée



$\vec{w} = (\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n}$

$\vec{w}$ est la **projection** de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$

1.6. Composantes dans une base

Convention de l'indice muet

Lorsqu'un indice apparaît deux fois dans la même expression, on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice (**convention de sommation d'Einstein**). Cet indice est dit **muet**.

Avec cette convention, le vecteur $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}^{\,i}$ s'écrit simplement :

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_j \vec{e}^{\,j}$$

Symbole de Kronecker

On introduit le symbole de Kronecker définit par :

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta^i_{\ j} = \delta_i^{\ j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Si les coefficients δ_{ij} sont rangés dans une matrice $n \times n$, on obtient la matrice unité.

1.6. Composantes dans une base

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_i \vec{e}^{\,i} \quad \text{avec} \quad \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}_j = \delta^i_{\ j} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v^i = \vec{v} \cdot \vec{e}^{\,i} \\ v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i \end{cases}$$

Posons :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad g^{ij} = \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}^{\,j}$$

$\vec{v} = v_j \vec{e}^{\,j} = \left(\vec{v} \cdot \vec{e}_j\right) \vec{e}^{\,j}$. Pour $\vec{v} = \vec{e}_i = \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right) \vec{e}^{\,j}$, il vient : $\vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^{\,j}$.
$\vec{v} = v^j \vec{e}_j = \left(\vec{v} \cdot \vec{e}^{\,j}\right) \vec{e}_j$. Pour $\vec{v} = \vec{e}^{\,i} = \left(\vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}^{\,j}\right) \vec{e}_j$, il vient : $\vec{e}^{\,i} = g^{ij} \vec{e}_j$.

D'où : $\quad \vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^{\,j}\ , \quad \vec{e}^{\,i} = g^{ij} \vec{e}_j \quad$ et $\quad g^{ik} g_{kj} = \delta^i_{\ j}\ , \quad g_{ik} g^{kj} = \delta_i^{\ j}$

Le passage des composantes contravariantes aux composantes covariantes ou inversement, se fait donc selon les relations suivantes :

$$v^i = g^{ij} v_j\ , \quad v_i = g_{ij} v^j$$

Remarques :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u^i v_i = u_i v^i = g_{ij} u^i v^j = g^{ij} u_i v_j$
- $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{v_i v^i} = \sqrt{g_{ij} v^i v^j} = \sqrt{g^{ij} v_i v_j}$

1.7. Bases orthonormées

Une base $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\ldots,n}$ est orthonormée ssi ses vecteurs sont normées et deux à deux orthogonaux :

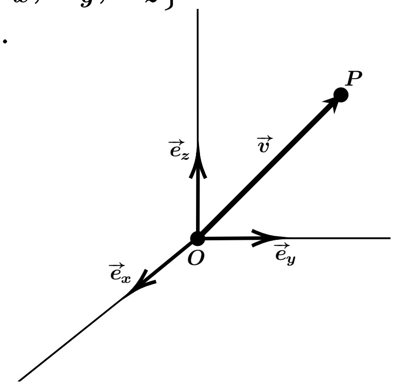
$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$$

Dans ce cas, les deux bases $\left\{\vec{e}_i\right\}$ et $\left\{\vec{e}^{\,i}\right\}$ sont confondues. De même pour les composantes contravariantes et covariantes des vecteurs.

Par la suite, et sauf contexte particulier, **nous nous limitons aux bases orthonormées** et on notera par $\vec{\mathcal{B}} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\} = \left\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right\}$ la base cartésienne orthonormée de l'espace euclidien de dimension 3.

Repère

Le choix d'un point O de l'espace affine $\mathscr{E}$ comme origine et d'une base $\vec{\mathcal{B}}$ de $\vec{\mathscr{E}}$ constitue un repère $(O, \vec{\mathcal{B}})$.



1.8. Multiplication tensorielle

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_2$ dans la base $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2}$.

Construisons un nouveau vecteur $\vec{A}$ de la façon suivante : $\vec{A} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ u_2 v_1 \\ u_2 v_2 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\vec{A}$, un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_4$, n'est pas un vecteur quelconque de $\vec{\mathscr{E}}_4$: il est formé à partir du couple de vecteur $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}_2 \times \vec{\mathscr{E}}_2$.

Pour rappeler cette correspondance, on le note :

$$\vec{A} = \vec{u} \otimes \vec{v}$$

Le symbole $\otimes$ est utilisé pour définir la manière avec laquelle les quantités $u_i v_j$ ont été formées.

1. Vecteurs

1.8. Multiplication tensorielle

Il vient :

$$\begin{aligned}\vec{A} = \vec{u}\otimes\vec{v} &= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2)\otimes(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2)\\ &= u_1v_1\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1 + u_1v_2\vec{e}_1\otimes\vec{e}_2 +\\ &\quad u_2v_1\vec{e}_2\otimes\vec{e}_1 + u_2v_2\vec{e}_2\otimes\vec{e}_2\\ &= u_iv_j\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\end{aligned}$$

avec

$$\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_1\otimes\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2\otimes\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2\otimes\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$ constitue une base de $\vec{\mathscr{E}}_4$. Si on numérote les quantités u_iv_j selon la place qu'elles occupent dans l'expression de $\vec{u}\otimes\vec{v}$, on obtient :

$$\vec{A} = A_k\vec{E}_k,\ \text{avec} \begin{cases} A_k = u_iv_j \\ \vec{E}_k = \vec{e}_i\otimes\vec{e}_j \end{cases} \quad i,j = 1,2\ ;\ k = j + 2(i-1)$$

1. Vecteurs

1.8. Multiplication tensorielle

La loi de composition $\otimes$ fait correspondre à tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux espaces vectoriels $\vec{\mathscr{E}}_n$, $\vec{\mathscr{F}}_m$, de dimensions respectives n et m, un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_{nm}$ noté $\vec{u}\otimes\vec{v}$. Elle possède les propriétés suivantes :

- elle est associative par rapport à la multiplication par un réel :
  $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}_n \times \vec{\mathscr{F}}_m, \forall\alpha \in \mathbb{R}, \alpha(\vec{u}\otimes\vec{v}) = \alpha\vec{u}\otimes\vec{v} = \vec{u}\otimes\alpha\vec{v}$
- elle est distributive par rapport à l'addition des vecteurs :
  $\forall(\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \vec{\mathscr{E}}_n^3, \forall(\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \vec{\mathscr{F}}_m^3,$
  $\vec{u}\otimes(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u}\otimes\vec{v}_1 + \vec{u}\otimes\vec{v}_2$
  $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\otimes\vec{v} = \vec{u}_1\otimes\vec{v} + \vec{u}_2\otimes\vec{v}$
- elle n'est pas commutative : $\vec{u}\otimes\vec{v} \neq \vec{v}\otimes\vec{u}$
- si $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\ldots,n}$ et $\left\{\vec{f}_j\right\}_{j=1,\ldots,m}$ sont respectivement des bases de $\vec{\mathscr{E}}_n$ et $\vec{\mathscr{F}}_m$, les nm éléments $\vec{e}_i\otimes\vec{f}_j$ de $\vec{\mathscr{E}}_{nm}$ forment une base de $\vec{\mathscr{E}}_{nm}$.

Cette loi de composition est appelée **multiplication tensorielle**.

1.9. Produit tensoriel de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{\mathscr{E}}_n$ et $\overrightarrow{\mathscr{F}}_m$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de dimensions respectives n et m. Au couple de vecteur $(\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}_n \times \overrightarrow{\mathscr{F}}_m$, on fait correspondre le vecteur $\vec{u} \otimes \vec{v}$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{E}}_{nm}$ tel que :

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$$

où les vecteurs $\vec{e}_i$ et $\vec{f}_j$ constituent respectivement des bases de $\overrightarrow{\mathscr{E}}_n$ et $\overrightarrow{\mathscr{F}}_m$.

- La dyade $\vec{u} \otimes \vec{v}$ est appelé **produit tensoriel** ou **produit dyadique** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- L'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{E}}_{nm}$ est doté d'une structure plus précise que celle d'un simple espace vectoriel de dimension nm, il se distingue par le fait qu'il est muni d'une base formée par les produits tensoriels $\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$: on dit que $\overrightarrow{\mathscr{E}}_{nm}$ est doté d'une **structure de produit tensoriel**. Pour rappeler cette structure, on note cet espace sous la forme $\overrightarrow{\mathscr{E}}_n \otimes \overrightarrow{\mathscr{F}}_m$, et on l'appelle **espace produit tensoriel des espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathscr{E}}_n$ et $\overrightarrow{\mathscr{F}}_m$**.

1.9. Produit tensoriel de deux vecteurs

Remarques

- Tous les éléments de l'espace $\overrightarrow{\mathscr{E}}_n \otimes \overrightarrow{\mathscr{F}}_m$ ne sont pas des produits tensoriels de deux vecteurs. Pour $\vec{A} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}_n \otimes \overrightarrow{\mathscr{F}}_m$ tel que $\vec{A} = A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$, il n'est pas possible de toujours trouver un vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}_n$ et un vecteur $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}_m$ tel que $A_{ij} = u_i v_j$: il y a $(n+m)$ inconnues u_i et v_j pour nm équations $A_{ij} = u_i v_j$.
- Tous les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{\mathscr{E}}_n \otimes \overrightarrow{\mathscr{F}}_m$ peuvent s'écrire sous la forme :

  $$\vec{A} = A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j, \quad i = 1, n \,;\ j = 1, m$$

  En introduisant les m vecteurs $\vec{u}_j \in \overrightarrow{\mathscr{E}}_n$ tels que $\vec{u}_j = A_{ij} \vec{e}_i$, il vient :

  $$\vec{A} = \vec{u}_j \otimes \vec{f}_j$$

  Par conséquent, tous les éléments de de l'espace $\overrightarrow{\mathscr{E}}_n \otimes \overrightarrow{\mathscr{F}}_m$ peuvent s'écrire sous la forme d'une somme d'au plus m produits tensoriels.

1. Vecteurs

1.9. Produit tensoriel de deux vecteurs

Composante d'un vecteur de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{E}}_n$

Soit $\vec{A} = \vec{u} \otimes \vec{v}$ le produit tensoriel entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n$. Par définition, la composante A_{ij} dans la base $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\}$ de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{E}}_n$ s'écrit :

$$A_{ij} = u_i v_j = \vec{A} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$$

Partant de cette définition, on obtient :

$$\begin{aligned} u_i v_j &= \vec{A} \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \\ \delta_{ik} u_k \delta_{jl} v_l &= u_k v_l (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \delta_{ik} \delta_{jl} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k)(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l)$$

Produit scalaire entre deux vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{E}}_n$

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{E}}_n$:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_{ij} B_{kl} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \\ &= A_{ij} B_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \\ &= A_{ij} B_{ij} \end{aligned}$$

1. Vecteurs

1.10. Produit tensoriel de plusieurs vecteurs

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs appartenant respectivement aux espaces vectoriels $\vec{\mathscr{E}}_n$, $\vec{\mathscr{F}}_m$ et $\vec{\mathscr{G}}_\ell$ de bases respectives $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$, $\{\vec{f}_j\}_{j=1,\dots,m}$ et $\{\vec{g}_k\}_{k=1,\dots,\ell}$.

- D'un côté, construisons le produit tensoriel entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis entre $\vec{u} \otimes \vec{v}$ et $\vec{w}$: cela donne un vecteur $\vec{x}$ de l'espace $(\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{F}}_m) \otimes \vec{\mathscr{G}}_\ell$ tel que :

$$\vec{x} = (\vec{u} \otimes \vec{v}) \otimes \vec{w} = u_i v_j w_k (\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j) \otimes \vec{g}_k$$

- D'un autre côté, construisons le produit tensoriel entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$, puis entre $\vec{u}$ et $\vec{v} \otimes \vec{w}$: cela donne un vecteur $\vec{y}$ de l'espace $\vec{\mathscr{E}}_n \otimes (\vec{\mathscr{F}}_m \otimes \vec{\mathscr{G}}_\ell)$ tel que :

$$\vec{y} = \vec{u} \otimes (\vec{v} \otimes \vec{w}) = u_i v_j w_k \vec{e}_i \otimes (\vec{f}_j \otimes \vec{g}_k)$$

Pour avoir l'égalité $\vec{x} = \vec{y}$, il suffit d'assurer l'associativité du produit tensoriel des vecteurs de base, ce que nous imposons comme nouvelle propriété de la multiplication tensorielle : **la multiplication tensorielle des vecteurs de plusieurs espaces vectoriels est associative.**

1. Vecteurs

1.10. Produit tensoriel de plusieurs vecteurs

Du fait de l'associativité du produit tensoriel, le produit tensoriel de p vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p$ appartenant à p espaces vectoriels $\vec{\mathscr{E}}_{n_1}, \vec{\mathscr{E}}_{n_2}, \ldots, \vec{\mathscr{E}}_{n_p}$ est le vecteur de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_{n_1} \otimes \vec{\mathscr{E}}_{n_2} \otimes \ldots \otimes \vec{\mathscr{E}}_{n_p}$ tel que :

$$\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 \otimes \ldots \otimes \vec{u}_p = (u_1)_{i_1} (u_2)_{i_2} \cdots (u_p)_{i_p} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_p}$$

avec $i_1 = 1, 2, \ldots, n_1$; $i_2 = 1, 2, \ldots, n_2$; $\ldots$; $i_p = 1, 2, \ldots, n_p$

- Les vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_{n_1} \otimes \vec{\mathscr{E}}_{n_2} \otimes \ldots \otimes \vec{\mathscr{E}}_{n_p}$ sont appelés des **tenseurs d'ordre p** : une généralisation des notions de scalaires et de vecteurs.
- En pratique, les p vecteurs appartiennent généralement au même espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}_n$. Dans ce cas, on note $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)} = \underbrace{\vec{\mathscr{E}}_n \otimes \vec{\mathscr{E}}_n \otimes \ldots \otimes \vec{\mathscr{E}}_n}_{p \text{ fois}}$.
- Les vecteurs $\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_p}$ constituent une base de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$, dans laquelle un vecteur $\vec{A}$ se décompose sous la forme :

$$\vec{A} = A_{i_1 i_2 \ldots i_p} (\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_p})$$

Il y a $n_1 n_2 \ldots n_p$ compostantes $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}$.

2. Tenseurs

On appelle **tenseur d'ordre p** sur $\vec{\mathscr{E}}_n$ toute forme p-linéaire de $\vec{\mathscr{E}}_n^p$ sur $\mathbb{R}$.
Par convention, **un scalaire est un tenseur d'ordre 0.**

Application linéaire

Soient $\vec{\mathscr{E}}_n$ et $\vec{\mathscr{F}}_m$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de dimensions respectives n et m, et soit $\vec{A}$ une application de $\vec{\mathscr{E}}_n$ dans $\vec{\mathscr{F}}_m$:

$$\vec{A} : \begin{array}{ccc} \vec{\mathscr{E}}_n & \longrightarrow & \vec{\mathscr{F}}_m \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{v} = \vec{A}(\vec{u}) \end{array}$$

L'application $\vec{A}$ est linéaire si : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}_n^2$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{A}(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha \vec{A}(\vec{u}) + \beta \vec{A}(\vec{v})$. Soient $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\ldots,n}$ et $\left\{\vec{f}_i\right\}_{i=1,\ldots,m}$ des bases de $\vec{\mathscr{E}}_n$ et $\vec{\mathscr{F}}_m$ respectivement. Soit $\vec{u} = u_j \vec{e}_j \in \vec{\mathscr{E}}_n$, par linéarité on a : $\vec{A}(\vec{u}) = u_j \vec{A}(\vec{e}_j)$. Introduisons les composantes A_{ij} du vecteur $\vec{A}(\vec{e}_j) \in \vec{\mathscr{F}}_m$ par rapport à la base $\left\{\vec{f}_i\right\}_{i=1,\ldots,m}$: $\vec{A}(\vec{e}_j) = A_{ij} \vec{f}_i$. On a alors $\vec{v} = \vec{A}(\vec{u}) = u_j A_{ij} \vec{f}_i$. Par conséquent, l'application linéaire $\vec{A}$ est représentée par la substitution linéaire :

$$v_i = A_{ij} u_j$$

Les coefficients A_{ij} constituent les composantes de la matrice représentative de l'application linéaire $\vec{A}$: c'est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $\vec{A}(\vec{e}_j)$ dans la base $\left\{\vec{f}_i\right\}_{i=1,\ldots,m}$. C'est un élément de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

forme linéaire

Une forme linéaire a est une application linéaire qui à un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$ associe un nombre de $\mathbb{R}$, tel que :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}_n^2, \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \ a(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha a(\vec{u}) + \beta a(\vec{v})$$

Forme multilinéaire

Une forme a est dite multilinéaire (ou $p-$linéaire) sur $\vec{\mathscr{E}}_n^p$ si elle est linéaire en chacune de ces variables, c'est-à-dire :

$$\forall (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \in \vec{\mathscr{E}}_n^p, \forall k \in [\![1, p]\!], \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \vec{v}_k \in \vec{\mathscr{E}}_n$$
$$a(\vec{u}_1, \ldots, \alpha \vec{u}_k + \beta \vec{v}_k, \ldots, \vec{u}_p) = \alpha a(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \ldots, \vec{u}_p) + \beta a(\vec{u}_1, \ldots, \vec{v}_k, \ldots, \vec{u}_p)$$

2. Tenseurs

2.1. Tenseur d'ordre 1

Suivant la définition générale, un tenseur d'ordre 1 est toute forme linéaire a de $\vec{\mathscr{E}}_n$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\vec{v} = v_i \vec{e}_i$ un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$, par linéarité on a :

$$a(\vec{v}) = a(v_i \vec{e}_i) = a(\vec{e}_i) v_i$$

Soit $\vec{a}$ le vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$ de composante $a_i = a(\vec{e}_i)$, il vient :

$$\forall \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}_n, \quad a(\vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{v}$$

Sachant que :

- pour tout vecteur $\vec{a}$, on peut trouver une et une seule forme linéaire a vérifiant : $\forall \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}_n, \ \vec{a} \cdot \vec{v} = a(\vec{v})$;
- pour toute forme linéaire a, il existe un et un seul vecteur $\vec{a}$ vérifiant : $\forall \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}_n, \ a(\vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{v}$.

Cela conduit à confondre tenseur d'ordre 1 et vecteur : un tenseur a d'ordre 1 est remplacé par son vecteur représentatif $\vec{a}$, et un vecteur quelconque $\vec{a}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n$ est appelé tenseur d'ordre 1.

2. Tenseurs

2.2. Tenseur d'ordre p

Suivant la définition générale, un tenseur d'ordre p est toute forme p-linéaire a de $\vec{\mathscr{E}}_n^p$ sur $\mathbb{R}$. Soient $\vec{u}_i = (u_i)_j \vec{e}_j, i \in [\![1, p]\!]$, p vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n^p$, par linéarité on a :

$$a(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p) = (u_1)_{i_1} (u_2)_{i_2} \cdots (u_p)_{i_p} a(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \cdots, \vec{e}_{i_p})$$

Soit $\vec{A}$ le vecteur de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$ de composantes $A_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \cdots, \vec{e}_{i_p})$, il vient : $\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p) \in \vec{\mathscr{E}}_n^p$

$$\begin{aligned} a(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p) &= (u_1)_{i_1} (u_2)_{i_2} \cdots (u_p)_{i_p} A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \\ &= (u_1)_{i_1} (u_2)_{i_2} \cdots (u_p)_{i_p} \vec{A} \cdot \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_p} \\ &= \vec{A} \cdot (\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 \otimes \ldots \otimes \vec{u}_p) \end{aligned}$$

On se retrouve avec la même définition qu'un tenseur d'ordre 1, sauf que cette fois-ci le produit scalaire est entre deux vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$.

Cela permet de confondre donc tenseur d'ordre p et vecteur de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$: un tenseur a d'ordre p est remplacé par son vecteur $\vec{A}$, et un vecteur quelques $\vec{A}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$ est appelé tenseur d'ordre p.

2. Tenseurs

Contraction des indices entre deux tenseurs

La contraction des indices entre deux tenseurs est une opération qui consiste, après avoir choisi deux indices, à les égaliser et à sommer par rapport à cet indice deux fois répété.

Exemples

- $u_i v_i = \vec{u} \cdot \vec{v}$: contraction simple
  Produit scalaire entre deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n$.
- $A_{ij} B_{ij} = \vec{A} \cdot \vec{B}$: contraction double
  Produit scalaire entre deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n^{(2)}$.

Changement des notations

Pour éviter toute confusion entre les vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n$ et ceux de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}_n^{(p)}$, dans ce cours et sauf indication contraire, les tenseurs d'ordre $p \geq 2$ seront désignés par une lettre soulignée par autant de barre que l'ordre du tenseur.

Exemples : $\underline{\underline{A}}$: pour un tenseur d'ordre 2, $\underline{\underline{\underline{A}}}$: pour un tenseur d'ordre 3, etc.

3. Tenseurs d'ordre 2

Suivant la définition générale, un tenseur d'ordre 2 est toute forme bilinéaire a de $\vec{\mathscr{E}}_n^2$ sur $\mathbb{R}$. Soient $\vec{u} = u_i \vec{e}_i$ et $\vec{v} = v_j \vec{e}_j$ deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}_n$, par linéarité on a :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = u_i v_j a(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = u_i v_j A_{ij} = u_i A_{ij} v_j = \vec{u} \cdot \underline{\underline{A}} \vec{v}$$

où nous avons associer à $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w} = \underline{\underline{A}} \vec{v}$ tel que :

$$w_i = A_{ij} v_j$$

Le vecteur $\vec{w}$ est le résultat d'une **contraction simple**. Nous dirons que $\vec{w}$ est le **produit contracté** entre le tenseur $\underline{\underline{A}}$ et le vecteur $\vec{v}$.

Nous pouvons également écrire $\vec{w} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$, mais dans ce cours, nous gardons la notation sans le point, $\vec{w} = \underline{\underline{A}} \vec{v}$, car un tenseur d'ordre 2 peut être aussi considéré comme une **application (opérateur) linéaire**. En effet, partant de l'égalité $a(\vec{u}, \vec{v}) = u_i A_{ij} v_j$, il vient : $a(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \underline{\underline{A}} \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{v})$, où $\vec{A}(\vec{v}) = \underline{\underline{A}} \vec{v}$ est l'application linéaire qui a pour matrice représentative la matrice de composantes A_{ij} dans la base $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,\ldots,n}$ de $\vec{\mathscr{E}}_n$.

Nous pouvons donc associer à un tenseur d'ordre 2 l'application linéaire qui transforme tout vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$ en un vecteur de $\vec{\mathscr{E}}_n$ (endomorphisme).

3. Tenseurs d'ordre 2

3.1. Définition à retenir

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 est une application linéaire de $\vec{\mathscr{E}}$ dans $\vec{\mathscr{E}}$:

$$\underline{\underline{A}} : \begin{array}{ccc} \vec{\mathscr{E}} & \longrightarrow & \vec{\mathscr{E}} \\ \vec{u} & \longmapsto & \vec{v} = \underline{\underline{A}}\,\vec{u} \end{array}$$

telle que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall(\vec{u},\ \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$:

- $(\alpha \underline{\underline{A}})\vec{v} = \alpha(\underline{\underline{A}}\,\vec{v})$
- $\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{u} = \vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}^T\vec{v}$, $\underline{\underline{A}}^T$ désigne le tenseur transposé de $\underline{\underline{A}}$

- $\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{u} = v_i A_{ij} u_j = u_j A^T_{ji} v_i = \vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}^T\vec{v}$, $A_{ij} = A^T_{ji}$.
- Tenseur nul $\underline{\underline{0}}$: $\forall \vec{x}, \underline{\underline{0}}\,\vec{x} = \vec{0}$.
- Tenseur identité $\underline{\underline{1}}$: $\forall \vec{x}, \underline{\underline{1}}\,\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow 1_{ij} x_j = x_i \Rightarrow 1_{ij} = \delta_{ij}$.
- Produit tensoriel de deux vecteurs : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$, $\underline{\underline{A}} = \vec{u} \otimes \vec{v}$ est le tenseur d'ordre 2 tel que $\forall \vec{x} \in \vec{\mathscr{E}},\ \underline{\underline{A}}\,\vec{x} = (\vec{u} \otimes \vec{v})\vec{x} = (\vec{v}\cdot\vec{x})\vec{u}$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.2. Produit contracté de deux tenseurs

La composition de deux tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$, appelée produit contracté de $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$, est définie par :

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\vec{v} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}$$

Les composantes du tenseur $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, relatives à une base de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$, sont :

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

- $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$
- $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$
- $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}$
- $\underline{\underline{A}}^k = \underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}\cdots\underline{\underline{A}}}_{k \text{ fois}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, par convention $\underline{\underline{A}}^0 = \underline{\underline{1}}$
- Si $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$, $\quad (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underline{\underline{A}}^{n-k} \underline{\underline{B}}^k, \quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.3. Produit doublement contracté de deux tenseurs

Le produit doublement contracté entre deux tenseurs du second ordre $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$, de composantes respectives A_{ij} et B_{ij} relatives à une base de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$, est défini par :

$$\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}:\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T:\underline{\underline{B}}^T = A_{ij}B_{ij}$$

Il y a contraction double (deux indices répétés) entre $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$.

Remarque : dans la littérature, il y a aussi la définition : $\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = A_{ij}B_{ji}$, mais seule la première définition sera utilisée dans ce cours, car elle correspond au produit scalaire entre les vecteurs de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$.

Norme euclidienne

La norme euclidienne induite par le produit doublement contracté est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : \vec{\mathscr{E}}^{(2)} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \underline{\underline{A}} & \longmapsto & \|\underline{\underline{A}}\| = \|\underline{\underline{A}}^T\| = \sqrt{\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{A}}} = \sqrt{A_{11}^2 + \cdots + A_{33}^2} \end{array}$$

telle que $\forall\left(\underline{\underline{A}},\ \underline{\underline{B}}\right) \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \times \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$:

- $\|\underline{\underline{A}}\vec{v}\| \leq \|\underline{\underline{A}}\|\|\vec{v}\|, \forall \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}$
- $\|\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}}\| \leq \|\underline{\underline{A}}\|\|\underline{\underline{B}}\|$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.4. Base de l'espace produit tensoriel

Dans la suite on notera par $\underline{\underline{\mathcal{B}}} = \left\{\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\right\}_{i,j=1,2,3}$ la base orthonormée de l'espace produit tensoriel $\vec{\mathscr{E}}^{(2)}$. Les 9 dyades $\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$ vérifient :

$$\left(\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\right):\left(\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l\right) = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

Dans $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$, un tenseur $\underline{\underline{A}}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{A}} = A_{11}\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1 + A_{12}\vec{e}_1\otimes\vec{e}_2 + \cdots + A_{33}\vec{e}_3\otimes\vec{e}_3 = A_{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$$

La composante A_{ij} s'obtient par projection de $\underline{\underline{A}}$ sur $\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$:

$$A_{ij} = \underline{\underline{A}} : \vec{e}_i\otimes\vec{e}_j = \vec{e}_i\cdot\underline{\underline{A}}\vec{e}_j$$

On note par $\left[\underline{\underline{A}}\right]$ la matrice 3×3 formée par les composantes de $\underline{\underline{A}}$ dans $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$.

$$\left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{e}_i\}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}_{\{\vec{e}_i\}} = A_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + A_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + A_{33}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le tenseur $\underline{\underline{A}}$ peut être exprimé dans plusieurs bases. Toutefois, toutes les matrices associées à $\underline{\underline{A}}$ doivent avoir les mêmes **invariants**.

3. Tenseurs d'ordre 2

3.5. Déterminant - trace

$$\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \vec{\mathscr{E}}^3$$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\ \det \underline{\underline{A}} = [\underline{\underline{A}}\vec{u},\underline{\underline{A}}\vec{v},\underline{\underline{A}}\vec{w}]$$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = [\underline{\underline{A}}\vec{u},\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u},\underline{\underline{A}}\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u},\vec{v},\underline{\underline{A}}\vec{w}]$$

tels que $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall(\underline{\underline{A}},\underline{\underline{B}}) \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \times \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$:

- $\det \underline{\underline{1}} = 1$
- $\det \underline{\underline{A}}^T = \det \underline{\underline{A}}$
- $\det\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right) = \det \underline{\underline{A}}\det \underline{\underline{B}}$
- $\det\left(\alpha\underline{\underline{A}}\right) = \alpha^3 \det \underline{\underline{A}}$

- $\mathrm{tr}\underline{\underline{1}} = 3$
- $\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^T = \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$
- $\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right) = \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)$
- $\mathrm{tr}\left(\alpha\underline{\underline{A}}\right) = \alpha\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.5. Déterminant - trace

Sachant que :

$$\mathrm{tr}\left(\vec{u}\otimes\vec{v}\right) = [(\vec{u}\otimes\vec{v})\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3] + [\vec{e}_1,(\vec{u}\otimes\vec{v})\vec{e}_2,\vec{e}_3] + [\vec{e}_1,\vec{e}_2,(\vec{u}\otimes\vec{v})\vec{e}_3]$$

Il vient :

$$\mathrm{tr}\left(\vec{u}\otimes\vec{v}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v},\ \ \forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$$

Par conséquent :

$$\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = \mathrm{tr}\left(A_{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\right) = A_{ij}\mathrm{tr}\left(\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\right) = A_{ij}\delta_{ij} = \underline{\underline{A}}:\underline{\underline{1}} = A_{ii}$$

Ce qui permet de redéfinir le produit doublement contracté sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{B}} = \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{B}}\right) = \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^T\right)$$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.6. Inverse

On note $\underline{\underline{A}}^{-1}$ le tenseur inverse du tenseur $\underline{\underline{A}}$, défini par :

$$\text{Si } \det \underline{\underline{A}} \neq 0,\ \exists\ \underline{\underline{A}}^{-1} /\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$$

- $\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^{-1} = \underline{\underline{A}}$
- $\left(\alpha \underline{\underline{A}}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\underline{\underline{A}}^{-1}$
- $\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$
- $\det\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$
- $\underline{\underline{A}}^{-T} := \left(\underline{\underline{A}}^{T}\right)^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)^{T}$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.7. Tenseur orthogonal

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 est orthogonal si :

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{T} = \underline{\underline{A}}^{T}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$$

tel que $\forall\left(\underline{\underline{A}},\ \underline{\underline{B}}\right) \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \times \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$ orthogonaux, $\forall\left(\vec{u},\ \vec{v}\right) \in \vec{\mathscr{E}}^{2}$:

- $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{T}$
- $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ est aussi orthogonal
- $\underline{\underline{A}}\vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{v} = \vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}^{T}\underline{\underline{A}}\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\underline{\underline{A}}\vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{u} = \left\|\underline{\underline{A}}\vec{u}\right\|^{2} = \vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}^{T}\underline{\underline{A}}\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^{2}$
- $\det \underline{\underline{A}} = \pm 1$
- si $\det \underline{\underline{A}} = 1$, $\underline{\underline{A}}$ est une rotation

3.8. Tenseur symétrique, tenseur antisymétrique

Tout tenseur $\underline{\underline{A}}$ se décompose de façon unique en la somme d'un tenseur symétrique $\underline{\underline{A}}^S$ et d'un tenseur antisymétrique $\underline{\underline{A}}^A$:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^S + \underline{\underline{A}}^A$$

$$\underline{\underline{A}}^S = \left(\underline{\underline{A}}^S\right)^T := \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T\right), \quad \underline{\underline{A}}^A = -\left(\underline{\underline{A}}^A\right)^T := \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T\right)$$

- $\underline{\underline{A}}$ symétrique $\Leftrightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T \Rightarrow \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{u} = \vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{v}, \ \forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$
- $\underline{\underline{A}}$ antisymétrique $\Leftrightarrow \underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T \Rightarrow \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{u} = -\vec{u}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{v}, \ \forall(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$
- Pour un tenseur symétrique $\underline{\underline{A}}$ et un tenseur antisymétrique $\underline{\underline{B}}$, nous avons :

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = 0$$

En effet, $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = A_{ij}B_{ij} = -A_{ji}B_{ji} = -\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}}$ car $A_{ij} = A_{ji}$ et $B_{ij} = -B_{ji}$.

3.8. Tenseur symétrique, tenseur antisymétrique

- $\underline{\underline{A}}$ symétrique $\Leftrightarrow$ le nombre de composantes indépendantes est de **6** au lieu de **9** :

$$A_{ij} = \vec{e}_i\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{e}_j = \vec{e}_j\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{e}_i = A_{ji}$$

Dans la base $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$:

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- $\underline{\underline{A}}$ antisymétrique $\Leftrightarrow$ le nombre de composantes indépendantes est de **3** au lieu de **9** :

$$A_{ij} = \vec{e}_i\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{e}_j = -\vec{e}_j\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{e}_i \Rightarrow A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ A_{ij} = -A_{ji} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Dans la base $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$:

$$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tenseurs d'ordre 2

3.9. Vecteur axial associé à un tenseur antisymétrique

Un tenseur antisymétrique $\underline{\underline{A}}$ peut être représenté par un vecteur $\vec{A}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\underline{\underline{A}}\vec{v} = \vec{A} \wedge \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}$$

Le vecteur $\vec{A}$ est le **vecteur axial** associé à $\underline{\underline{A}}$. Dans les bases $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12}v_2 + A_{13}v_3 \\ -A_{12}v_1 + A_{23}v_3 \\ -A_{13}v_1 - A_{23}v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{23} \\ A_{13} \\ -A_{12} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} -A_{23} \\ A_{13} \\ -A_{12} \end{pmatrix}$$

Remarque : la i-ème composante de $\vec{A}$ s'exprime sous la forme : $(-1)^i A_{jk}, \ i \neq j \neq k$

4. Tenseurs d'ordre 3

Les tenseurs d'ordre 3 en MMC sont rares. L'exemple type de ces tenseurs est le "pseudo-tenseur" $\underline{\underline{\underline{\eta}}}$, dit d'orientation, de permutation ou encore de Levi-Civita, qui permet de définir le produit vectoriel à partir du produit doublement contracté et du produit tensoriel :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \underline{\underline{\underline{\eta}}} : (\vec{u} \otimes \vec{v})$$

Dans les base $\vec{\mathcal{B}}$:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v})_i = \eta_{ijk} u_j v_k$$

En particulier, pour $\vec{u} = \vec{e}_j$, $\vec{v} = \vec{e}_k$, on a :

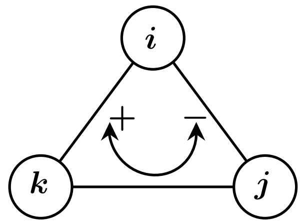
$$\vec{e}_j \wedge \vec{e}_k = \eta_{ijk} \vec{e}_i \Rightarrow [\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k] = \eta_{ijk}$$

4. Tenseurs d'ordre 3

Dans la base $\left\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k\right\}_{i,j,k=1,2,3}$, les composantes de $\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ sont données par :

$$\eta_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,\ j,\ k) \in \left\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2))\right\} \\ -1 & \text{si } (i,\ j,\ k) \in \left\{(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\right\} \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$



On peut vérifier que :

$$\eta_{ijk} = \eta_{jki} = \eta_{kij}, \quad \eta_{ijk} = -\eta_{ikj} = -\eta_{jik} = -\eta_{kji}$$

et que :

$$\underline{\underline{\underline{\eta}}} : \underline{\underline{\underline{\eta}}} = \eta_{ipq}\eta_{pqj} = 2\delta_{ij} = 2\,\underline{\underline{1}}$$

4. Tenseurs d'ordre 3

Pour un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 antisymétrique, on a :

$$\underline{\underline{A}}\,\vec{v} = \vec{A} \wedge \vec{v} = \underline{\underline{\underline{\eta}}} : \left(\vec{A} \otimes \vec{v}\right), \quad \left(\vec{A} \wedge \vec{v}\right)_i = \eta_{ijk} A_j v_k = -\eta_{ikj} A_j v_k$$

$$\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{\underline{\eta}}}\,\vec{A}$$

Sachant que $\underline{\underline{\underline{\eta}}} : \underline{\underline{\underline{\eta}}} = 2\,\underline{\underline{1}}$, on obtient :

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\underline{\underline{\underline{\eta}}} : \underline{\underline{A}}$$

Pour un tenseur $\underline{\underline{S}}$ d'ordre 2 symétrique, on a :

$$\underline{\underline{\underline{\eta}}} : \underline{\underline{S}} = \vec{0}$$

En effet, $(\underline{\underline{\underline{\eta}}} : \underline{\underline{S}})_i = \eta_{ijk} S_{jk} = -\eta_{ikj} S_{kj} = -(\underline{\underline{\underline{\eta}}} : \underline{\underline{S}})_i \Rightarrow (\underline{\underline{\underline{\eta}}} : \underline{\underline{S}})_i = 0$

5. Tenseurs d'ordre 4

5.1. Définitions

Un tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} \equiv \underset{\sim}{H}$ d'ordre 4 est une application linéaire de $\overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{H} : \overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)} &\longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)} \\ \underline{\underline{A}} &\longmapsto \underline{\underline{B}} = \underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{A}} \end{aligned}$$

- Dans la base $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$: $B_{ij} = H_{ijkl}A_{kl}$.
- La composition de deux tenseurs d'ordre 4 est encore un tenseur d'ordre 4 : $\underset{\sim}{G}(\underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{A}}) = (\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{H})\underline{\underline{A}}, \ \forall \underline{\underline{A}} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)}$.
  Dans la base $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l\}_{i,j,k,l=1,2,3}$: $(\underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{H})_{ijkl} = G_{ijpq}H_{pqkl}$.
- Le tenseur transposé $\underset{\sim}{H}^T$ est défini par :
  $\underline{\underline{A}} : \underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} : \underset{\sim}{H}^T\underline{\underline{A}}, \forall(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)} \times \overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)}$.
- Le produit scalaire peut être défini par : $\underset{\sim}{H} \vdots \underset{\sim}{G} := H_{ijkl}G_{ijkl}$.

5. Tenseurs d'ordre 4

5.2. Symétries

On distingue deux symétries : **majeure** et **mineure**.

$\underset{\sim}{H}$ est dit à symétrie majeure si :

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}^T$$

En termes de composantes, $H_{ijkl} = H_{klij}$. Il y a $\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$ composantes indépendantes, soit 45 pour $n = 3$.

$\underset{\sim}{H}$ est dit à symétrie mineure si :

$$\underline{\underline{A}} : \underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^T : \underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} : \underset{\sim}{H}\,\underline{\underline{B}}^T, \forall(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)} \times \overrightarrow{\mathscr{E}}^{(2)}$$

En termes de composantes, $H_{ijkl} = H_{jikl} = H_{jilk}$. Il y a $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ composantes indépendantes, soit 36 pour $n = 3$.

- Si $\underset{\sim}{H}$ ne possède aucune symétrie, il a n^4 composantes indépendantes, soit 81 pour $n = 3$.
- Si $\underset{\sim}{H}$ possède les deux symétries mineure et majeure, il a $\dfrac{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)}{8}$ composantes indépendantes, soit 21 pour $n = 3$.

5. Tenseurs d'ordre 4

5.3. Produits tensoriels

Pour construire un tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$ d'ordre 4 à partir de deux tenseurs $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ et $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ d'ordre 2, on peut définir les produits tensoriels suivants :

1. $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}=\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\underline{\otimes}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$, $H_{ijkl}=A_{ik}B_{jl}$, $\left(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\underline{\otimes}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^T$ $\quad \forall \underline{\underline{\boldsymbol{X}}} \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$
2. $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}=\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$, $H_{ijkl}=A_{il}B_{jk}$, $\left(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}^T\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^T$
3. $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}=\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\underline{\otimes}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\underline{\otimes}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}+\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right)$, $\left(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\underline{\otimes}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}^S\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^T$
4. $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}=\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\underline{\ominus}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\underline{\otimes}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}-\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right)$, $\left(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\overline{\underline{\ominus}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\,\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}^A\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^T$
5. $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}=\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\otimes\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$, $H_{ijkl}=A_{ij}B_{kl}$, $\left(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\otimes\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\left(\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}:\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$

En particulier pour $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}=\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}=\underline{\underline{\mathit{1}}}$, on obtient :

- $\left(\underline{\underline{\mathit{1}}}\,\underline{\otimes}\,\underline{\underline{\mathit{1}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}$
- $\left(\underline{\underline{\mathit{1}}}\,\overline{\underline{\otimes}}\,\underline{\underline{\mathit{1}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}^S$
- $\left(\underline{\underline{\mathit{1}}}\otimes\underline{\underline{\mathit{1}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\left(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\right)\underline{\underline{\mathit{1}}}$
- $\left(\underline{\underline{\mathit{1}}}\,\overline{\otimes}\,\underline{\underline{\mathit{1}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}^T$
- $\left(\underline{\underline{\mathit{1}}}\,\overline{\underline{\ominus}}\,\underline{\underline{\mathit{1}}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}=\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}^A$

On pose $\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}:=\underline{\underline{\mathit{1}}}\,\overline{\underline{\otimes}}\,\underline{\underline{\mathit{1}}}$, l'**identité symétrique d'ordre 4**, $I_{ijkl}=\dfrac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{H}},\ \forall \underset{\sim}{\boldsymbol{H}} \text{ avec symétrie mineure}$$

Partie II

Analyse tensorielle

1. Objectif et notations

L'analyse tensorielle consiste à définir les opérateurs différentiels permettant de calculer les variations d'une fonction à valeur tensorielle et d'arguments tensoriels.

On ne considère que des fonctions tensorielles suffisamment régulières.

Notations pour les dérivées partielles

En fonction du contexte, et en l'absence de toute confusion, plusieurs notations peuvent être utilisées pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi^i} := \partial_{\xi^i} U := U_{,i}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial {\xi^i}^2} := \partial^2_{\xi^i} U := U_{,ii}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^i \xi^j} := \partial^2_{\xi^i\xi^j} U := U_{,ij}$$

Notations des opérateurs différentiels

$$\vec{\nabla} U := \overrightarrow{\mathrm{grad}} U, \quad \underline{\nabla} \vec{U} := \underline{\underline{\mathrm{grad}}} \vec{U}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} := \mathrm{div} \vec{U}, \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{U}} := \overrightarrow{\mathrm{div}} \underline{\underline{U}}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{U} := \overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{U}$$

2. Différentielle d'un tenseur

- Un scalaire fonction d'un vecteur, $U(\vec{a})$:

$$U(\vec{a}) = U(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \mathrm{d}U = \partial_{a_i} U \mathrm{d}a_i$$

On pose $\partial_{\vec{a}} U = \partial_{a_i} U \vec{e}_i$, il vient :

$$\mathrm{d}U = \partial_{\vec{a}} U \cdot \vec{a}$$

- Un vecteur fonction d'un vecteur, $\vec{U}(\vec{a})$:

$$\vec{U}(\vec{a}) = U_i(\vec{a})\vec{e}_i = U_i(a_1, a_2, a_3)\vec{e}_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{U} &= \partial_{a_j} U_i \mathrm{d}a_j \vec{e}_i \\ &= \partial_{a_j} U_i \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \mathrm{d}\vec{a}) \end{aligned}$$

On pose $\partial_{\vec{a}} \vec{U} = \partial_{a_j} U_i \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, il vient :

$$\mathrm{d}\vec{U} = \left(\partial_{\vec{a}} \vec{U}\right) \mathrm{d}\vec{a}$$

2. Différentielle d'un tenseur

- Un scalaire fonction d'un tenseur d'ordre 2, $U(\underline{\underline{A}})$:

$$U(\underline{\underline{A}}) = U(A_{11}, \dots, A_{33}) \Rightarrow \mathrm{d}U = \partial_{A_{ij}} U \mathrm{d}A_{ij} = \partial_{A_{ij}} U \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j : \mathrm{d}\underline{\underline{A}}$$

On pose $\partial_{\underline{\underline{A}}} U = \partial_{A_{ij}} U \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, il vient :

$$\mathrm{d}U = \partial_{\underline{\underline{A}}} U : \mathrm{d}\underline{\underline{A}}$$

- Un tenseur d'ordre 2 fonction d'un tenseur d'ordre 2, $\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{A}})$:

$$\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{A}}) = U_{ij}(\underline{\underline{A}}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = U_{ij}(A_{11}, \dots, A_{33}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{d}\underline{\underline{U}} = \partial_{A_{kl}} U_{ij} \mathrm{d}A_{kl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j &= \partial_{A_{kl}} U_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) ((\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) : \mathrm{d}\underline{\underline{A}}) \\ &= \partial_{A_{kl}} U_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \mathrm{d}\underline{\underline{A}} \end{aligned}$$

On pose $\partial_{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{U}} = \partial_{A_{kl}} U_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)$, il vient :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{U}} = \left(\partial_{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{U}}\right) \mathrm{d}\underline{\underline{A}}$$

avec $\partial_{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$, car $\partial_{A_{kl}} A_{ij} = \delta_{ik} \delta_{jl}$.

3. Champs de tenseurs

Considérons un ensemble Ω formé de points de l'espace affine $\mathscr{E}$. Désignons par $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ le vecteur **position** d'un point $P \in \Omega$ (vecteur joignant une origine fixe O de $\mathscr{E}$ au point P). Soient $\{\xi^i\}$ les coordonnées de P dans un système de coordonnées quelconques : $\vec{x} = \vec{x}(\xi^i)$.

Un champ de tenseurs, d'ordre 0 (champ de scalaires), d'ordre 1 (champ de vecteurs) ou d'ordre > 1 (champ de tenseurs), est une application qui à tout point $P \in \Omega$, de vecteur position $\vec{x}$, associe un tenseur $U(\vec{x}) = U(\xi^i)$. On suppose que $U(\vec{x})$ est suffisamment régulier.

Un champ U est dit **non stationnaire** s'il dépend à la fois de $\vec{x}$ et du temps t : $U = U(\vec{x}, t)$.

Un champ U est dit **homogène** sur Ω s'il prend la même valeur en tout point de Ω : $U = U(t)$.

4. Différentielle du vecteur position d'un point

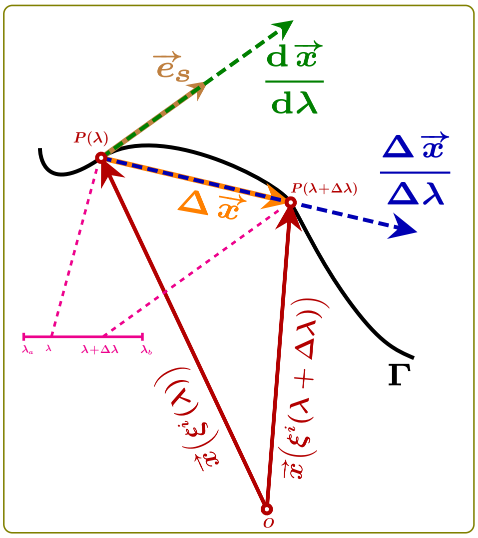
Considérons dans Ω un ensemble de points formant un arc de courbe Γ. Chaque points P de la courbe peut être mis en correspondance biunivoque avec les paramètres λ d'un intervalle $\left[\lambda_a, \lambda_b\right]$. Le vecteur position de P, joignant une origine fixe O de $\mathscr{E}$ au point P sur Γ, s'écrit : $\vec{x} = \vec{x}\left(\xi^i(\lambda)\right)$.

La dérivée de $\vec{x}$ par rapport à λ est définie par :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\lambda} &= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\vec{x}\left(\xi^i(\lambda+\Delta\lambda)\right) - \vec{x}\left(\xi^i(\lambda)\right)}{\Delta\lambda} \\
&= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\lambda} \\
&= \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta\lambda} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\vec{e}_s
\end{aligned}$$

avec $\Delta s = \left\|\Delta\vec{x}\right\|, \quad \vec{e}_s = \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}, \quad \left\|\vec{e}_s\right\| = 1$

où s est l'abscisse curviligne sur la courbe Γ (distance le long de Γ).



Remarque : la dérivée du vecteur position du point P est indépendante du choix de l'origine du repère. Pour un autre point fixe arbitraire Q ($\overrightarrow{OQ}$ constant), on a :
$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \vec{y} \text{ avec } \vec{y} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}\lambda}$$

4. Différentielle du vecteur position d'un point

La différentielle de $\vec{x}$ est le vecteur, $\mathrm{d}\vec{x}$ défini par : $\mathrm{d}\vec{x} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda$, où $\mathrm{d}\lambda$ est la différentielle de la fonction scalaire λ.

En introduisant les différentielles $\mathrm{d}\xi^i$ des fonctions $\xi^i(\lambda)$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\xi^i}\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}\lambda}, \quad \mathrm{d}\vec{x} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\xi^i}\mathrm{d}\xi^i$$

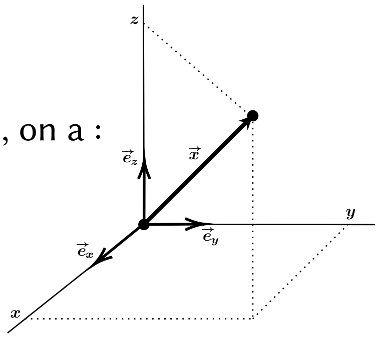
Les vecteurs $\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial\xi^i}$, tangents aux lignes de coordonnées, sont les vecteurs de la **base naturelle** $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2,3}$:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\xi^i}$$

Le repère $\left(P, \left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2,3}\right)$ constitue un repère **local mobile**.

4. Différentielle du vecteur position d'un point

4.1. Différentielle en coordonnées cartésiennes



Le système de coordonnées cartésiennes est défini par $(x^1 = \xi^1 = x,\ x^2 = \xi^2 = y,\ x^3 = \xi^3 = z)$ tel que, dans la base orthonormée $\vec{\mathcal{B}} = \left\{\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z\right\}$, on a :
$\vec{x} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

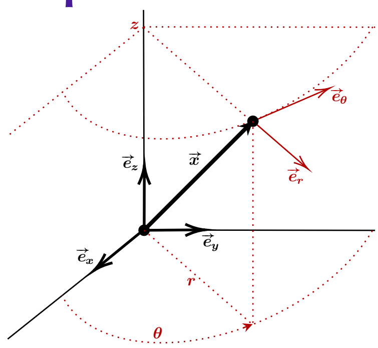
La différentielle de $\vec{x}$ s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_x\mathrm{d}x + \vec{e}_y\mathrm{d}y + \vec{e}_z\mathrm{d}z \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_x \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_y \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_z \end{cases}$$

La base naturelle $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2,3}$ est la même en tout point, confondue avec la base cartésienne orthonormée $\vec{\mathcal{B}}$.

4. Différentielle du vecteur position d'un point

4.2. Différentielle en coordonnées cylindriques



Le système de coordonnées cylindriques est défini par $(\xi^1 = r,\ \xi^2 = \theta,\ \xi^3 = z)$ tel que, dans la base orthonormée $\vec{\mathcal{B}} = \left\{\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z\right\}$, on a :

$$\begin{pmatrix} x^1(r,\theta,z) & = & r\cos\theta \\ x^2(r,\theta,z) & = & r\sin\theta \\ x^3(r,\theta,z) & = & z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = r\,\vec{e}_r(\theta) + z\,\vec{e}_z$$

avec $\vec{e}_r(\theta) = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$

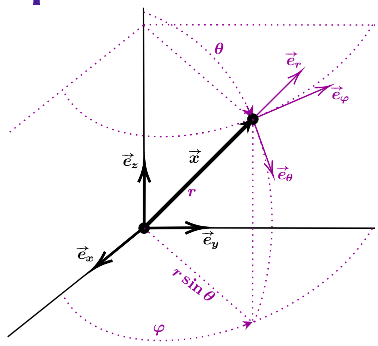
La différentielle de $\vec{x}$ s'écrit : $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_r\mathrm{d}r + r\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta + \vec{e}_z\mathrm{d}z \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_r \\ \vec{e}_2 = r\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_z \end{cases}$

On pose $\vec{e}_\theta = \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$.

La base naturelle $\left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1,2,3}$ est orthogonale, mais elle est non normée et elle change avec le point. La base $\left\{\vec{e}_r(\theta),\ \vec{e}_\theta(\theta),\ \vec{e}_z\right\}$ est une base locale orthonormée colinéaire à la base naturelle.

4. Différentielle du vecteur position d'un point

4.3. Différentielle en coordonnées sphériques



Le système de coordonnées sphériques est défini par ($\xi^1 = r,\ \xi^2 = \theta,\ \xi^3 = \varphi$) tel que, dans la base orthonormée $\vec{\mathcal{B}} = \{\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z\}$, on a :

$$\begin{pmatrix} x^1(r,\theta,\varphi) & = & r\sin\theta\cos\varphi \\ x^2(r,\theta,\varphi) & = & r\sin\theta\sin\varphi \\ x^3(r,\theta,\varphi) & = & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = r\sin\theta\big(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\big) + r\cos\theta\,\vec{e}_z$$
$$= r\,\vec{e}_r(\theta,\varphi)$$

avec $\vec{e}_r(\theta,\varphi) = \sin\theta\big(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\big) + \cos\theta\,\vec{e}_z$

La différentielle de $\vec{x}$ s'écrit : $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_r\mathrm{d}r + r\partial_\theta\vec{e}_r\mathrm{d}\theta + r\partial_\varphi\vec{e}_r\mathrm{d}\varphi \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_r \\ \vec{e}_2 = r\partial_\theta\vec{e}_r \\ \vec{e}_3 = r\partial_\varphi\vec{e}_r \end{cases}$

On pose $\begin{cases} \vec{e}_\theta = \partial_\theta\vec{e}_r = \cos\theta\big(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y\big) - \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \dfrac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi\vec{e}_r = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \end{cases}$

La base naturelle $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ est orthogonale, mais elle est non normée et elle change avec le point. La base $\{\vec{e}_r(\theta,\varphi),\ \vec{e}_\theta(\theta,\varphi),\ \vec{e}_\varphi(\theta,\varphi)\}$ est une base locale orthonormée colinéaire à la base naturelle.

5. Opérateur nabla

Soit Ω un ensemble de points de l'espace affine $\mathscr{E}$. Un champ de scalaires est une application qui à tout point $P \in \Omega$, de vecteur position $\vec{x}(\xi^i)$, associe le scalaire $U(\vec{x}) = U(\xi^i)$. La différentielle de U, s'écrit : $\mathrm{d}U = \partial_{\xi^i}U\mathrm{d}\xi^i$. En introduisant la base réciproque $\{\vec{e}^{\,i}\}_{i=1,2,3}$ de la base naturelle $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$, il vient :

$$\mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_j\mathrm{d}\xi^j \Rightarrow \vec{e}^{\,i}\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}^{\,i}\cdot\vec{e}_j\mathrm{d}\xi^j = \delta^i_{\ j}\mathrm{d}\xi^j = \mathrm{d}\xi^i$$

D'où :
$$\mathrm{d}U = \partial_{\xi^i}U\,\vec{e}^{\,i}\cdot\mathrm{d}\vec{x}$$

Opérateur nabla

On introduit l'opérateur différentiel vectoriel $\vec{\nabla}$, appelé **nabla**, tel que :

$$\vec{\nabla} := \frac{\partial}{\partial\xi^i}\vec{e}^{\,i}$$

- Sachant que $\vec{e}^{\,i} = g^{ij}\vec{e}_j$, on a : $\vec{\nabla} = g^{ij}\dfrac{\partial}{\partial\xi^i}\vec{e}_j$.
- En coordonnées cartésiennes, il s'écrit dans la base $\vec{\mathcal{B}}$ sous la forme :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

6. Gradient

❶ Soit $U(\vec{x})$ un champ de scalaires. Le gradient de U est le champ de vecteurs $\vec{\nabla} U$ défini par :

$$\mathrm{d}U = \vec{\nabla} U \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

Remarque : en écrivant $\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}s\,\vec{e}_s$, il vient $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \vec{\nabla} U \cdot \vec{e}_s$. La projection de $\vec{\nabla} U$ sur la direction définie par $\vec{e}_s$, exprime le taux de variation de U suivant cette direction.

❷ Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. Le gradient de $\vec{U}$ est le champ de tenseurs $\underline{\underline{\nabla}}\vec{U}$ d'ordre 2 défini par :

$$\mathrm{d}\vec{U} = (\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})\mathrm{d}\vec{x}$$

❸ Soit $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. Le gradient de $\underline{\underline{U}}$ est le champ de tenseurs $\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}}$ d'ordre 3 défini par :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{U}} = (\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}})\mathrm{d}\vec{x}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} U = \partial_{x_i} U \,\vec{e}_i\ , \quad \underline{\underline{\nabla}}\vec{U} = \partial_{x_j} U_i \,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\ , \quad \underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}} = \partial_{x_k} U_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$$

7. Divergence

❶ Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. La divergence de $\vec{U}$ est le champ de scalaires $\vec{\nabla} \cdot \vec{U}$ défini par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = (\underline{\underline{\nabla}}\vec{U}) : \underline{\underline{1}}$$

❷ Soit $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. La divergence de $\underline{\underline{U}}$ est le champ de vecteurs $\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{U}}$ défini par :

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{U}} = (\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}}) : \underline{\underline{1}}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \partial_{x_i} U_i\ , \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{U}} = \partial_{x_j} U_{ij}\,\vec{e}_i$$

8. Laplacien

1. Soit $U(\vec{x})$ un champ de scalaires. Le laplacien de U est le champ de scalaires ΔU défini par :

$$\Delta U = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} U)$$

2. Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. Le laplacien de $\vec{U}$ est le champ de vecteurs $\vec{\Delta}\vec{U}$ défini par :

$$\vec{\Delta}\vec{U} = \vec{\nabla}\cdot(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})$$

3. Soit $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. Le laplacien de $\underline{\underline{U}}$ est le champ de tenseurs $\underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{U}}$ d'ordre 2 défini par :

$$\underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{U}} = \vec{\nabla}\cdot(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}})$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta U = \partial_{x_i}(\partial_{x_i} U) = \sum_{i=1}^{3} \partial^2_{x_i} U \ , \quad \vec{\Delta}\vec{U} = \Delta U_i \vec{e}_i \ , \quad \underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{U}} = \Delta U_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

9. Rotationnel

1. Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. Soit $\vec{W}$ le vecteur axial associé à la partie antisymétrique de $\underline{\underline{\nabla}}\vec{U}$. Le rotationnel de $\vec{U}$ est le champ de vecteurs $\vec{\nabla}\wedge\vec{U}$ défini par :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{U} = -\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} = 2\vec{W}$$

2. Soit $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. Le rotationnel de $\underline{\underline{U}}$ est le champ de tenseurs $\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{U}}$ d'ordre 2 défini par :

$$\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{U}} = -(\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\,\underline{\underline{U}}):\underline{\underline{\underline{\eta}}}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{U} = -\eta_{ijk}\partial_{x_k} U_j \vec{e}_i \ , \quad \vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{U}} = -\partial_{x_q} U_{ip}\eta_{pqj}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

10. Éléments différentiels pour les intégrales

Élément de longueur

Soit une courbe $\mathcal{C}$ dont les points ont pour vecteur position $\vec{x}(\xi)$:

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi) \Rightarrow \mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}\,\mathrm{d}\xi, \quad \vec{e} = \partial_\xi \vec{x}$$

L'élément de longueur de $\mathcal{C}$ est défini par : $\mathrm{d}\ell = \left\|\vec{e}\right\|\mathrm{d}\xi$

Élément de surface

Soit une surface $\mathcal{A}$ dont les points ont pour vecteur position $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$:

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi^1, \xi^2) \Rightarrow \mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_1\mathrm{d}\xi^1 + \vec{e}_2\mathrm{d}\xi^2, \quad \vec{e}_i = \partial_{\xi^i}\vec{x}$$

L'élément de surface de $\mathcal{A}$ est défini par : $\mathrm{d}\mathcal{A} = \left\|\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\right\|\mathrm{d}\xi^1\mathrm{d}\xi^2$

Élément de volume

Soit un volume $\mathcal{V}$ dont les points ont pour vecteur position $\vec{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$:

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \Rightarrow \mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_1\mathrm{d}\xi^1 + \vec{e}_2\mathrm{d}\xi^2 + \vec{e}_3\mathrm{d}\xi^3, \quad \vec{e}_i = \partial_{\xi^i}\vec{x}$$

L'élément de volume de $\mathcal{V}$ est défini par : $\mathrm{d}\mathcal{V} = \left|\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right]\right|\mathrm{d}\xi^1\mathrm{d}\xi^2\mathrm{d}\xi^3$

11. Théorème de la divergence (ou d'Ostrogradski)

Soit $\Omega \subset \vec{\mathscr{E}}$ un domaine volumique fermé. On note par $\partial\Omega$ sa surface frontière sur laquelle peut être défini le vecteur unitaire $\vec{n}$ de la normale sortante en tout point. Si le gradient et la divergence sont définies en tout point de Ω et de sa frontière $\partial\Omega$, on a :

1. Pour un champ de scalaires $U(\vec{x})$:

$$\int_\Omega \vec{\nabla} U \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega} U\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}$$

2. Pour un champ de vecteurs $\vec{U}(\vec{x})$:

$$\int_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{U} \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega} \vec{U}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}$$

3. Pour un champ de tenseurs $\underline{\underline{U}}(\vec{x})$:

$$\int_\Omega \vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{U}} \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{U}}\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}$$

12. Théorème de l'intégrale nulle

Soit $\boldsymbol{U}(\vec{x})$ un champ (de scalaires, de vecteurs ou de tenseurs) défini et **continu** sur un domaine $\boldsymbol{\Omega}$. Si quelque soit le sous domaine $\boldsymbol{\omega} \subset \boldsymbol{\Omega}$, l'intégrale de $\boldsymbol{U}$ sur le domaine $\boldsymbol{\omega}$ est nulle, alors le champ est identiquement nul sur tout le domaine $\boldsymbol{\Omega}$ et réciproquement :

$$\int_{\omega} \boldsymbol{U}(\vec{x})\mathrm{d}\mathcal{V} = 0, \ \forall \omega \subset \Omega \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{U}(\vec{x}) = 0, \ \forall \vec{x} \in \Omega$$

Ce théorème est aussi appelé Lemme fondamental de la mécanique des milieux continus ou encore théorème de localisation.

Partie III

Compléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.1. Base principale

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ symétrique d'ordre 2 possède trois valeurs propres réelles a_i et trois vecteurs propres $\vec{n}_i$ deux à deux orthogonaux. La base $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$, dite **propre** ou **principale**, forme une base orthonormée de $\vec{\mathscr{E}}$:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}_{\{\vec{n}_i\}} \quad , \quad \underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{\underline{n}}_i, \quad \underline{\underline{n}}_i = \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i$$

Une valeur propre a du tenseur $\underline{\underline{A}}$ vérifie $\underline{\underline{A}}\vec{x} = a\vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Pour que cette équation ait une solution, il suffit que $\det\big(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}}\big) = 0$.

$$\det\big(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}}\big) = \mathbf{p}(a) = -a^3 + I_1(\underline{\underline{A}})a^2 - I_2(\underline{\underline{A}})a + I_3(\underline{\underline{A}})$$

Le polynôme $\mathbf{p}(a)$ est appelé polynôme caractéristique de $\underline{\underline{A}}$. Tout tenseur $\underline{\underline{A}}$ satisfait son propre polynôme caractéristique (**théorème de Cayley-Hamilton**) :

$$-\underline{\underline{A}}^3 + I_1(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}^2 - I_2(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}} + I_3(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}$$

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.1. Base principale

Les coefficients $I_i(\underline{\underline{A}})$ sont les **invariants principaux** de $\underline{\underline{A}}$:

$$I_1(\underline{\underline{A}}) = \frac{[\underline{\underline{A}}\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]} := \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$$

$$I_2(\underline{\underline{A}}) = \frac{[\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}] + [\underline{\underline{A}}\vec{u}, \vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}] + [\underline{\underline{A}}\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

$$I_3(\underline{\underline{A}}) := \det \underline{\underline{A}}$$

Ils s'exprimeent en fonction de $(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3)$ ou de (a_1, a_2, a_3) :

$$I_1(\underline{\underline{A}}) := \mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = a_1 + a_2 + a_3$$

$$I_2(\underline{\underline{A}}) = \det \underline{\underline{A}}\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^{-1} = \tfrac{1}{2}\big((\mathrm{tr}\underline{\underline{A}})^2 - \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2\big) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$$

$$I_3(\underline{\underline{A}}) := \det \underline{\underline{A}} = \tfrac{1}{6}\big((\mathrm{tr}\underline{\underline{A}})^3 - 3\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2 + 2\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3\big) = a_1a_2a_3$$

Les triplets $(I_1(\underline{\underline{A}}), I_2(\underline{\underline{A}}), I_3(\underline{\underline{A}}))$, $(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3)$, (a_1, a_2, a_3) forment des ensembles équivalents d'**invariants** de $\underline{\underline{A}}$, indépendants de la base choisie. Le choix d'un triplet est souvent guidé par la physique.

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.2. Bases sphérique-déviatorique

De la **décomposition** (**représentation**) **spectrale** $\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{\underline{n}}_i$, il vient pour $a_1 = a_2 = a_3 = a$, $\underline{\underline{A}} = a\underline{\underline{1}}$: tenseur **sphérique**.

D'où l'idée de décomposer $\underline{\underline{A}}$ en partie sphérique et partie $\underline{\underline{A}}'$ dite **déviatorique** :

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{3}\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}}', \quad \underline{\underline{A}}' : \textbf{déviateur} \text{ tel que } \underline{\underline{A}}' : \underline{\underline{1}} = 0$$

Sachant que $\underset{\sim}{I}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$ et que $\left(\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}\right)\underline{\underline{A}} = \left(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\right)\underline{\underline{1}}$, ces deux parties peuvent être redéfinies en introduisant les tenseurs $\underset{\sim}{J}$ et $\underset{\sim}{K}$:

$$\underset{\sim}{K} = \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}, \quad \underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{K}$$

avec $\underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{J}$, $\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K}$, $\underset{\sim}{J}\,\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{0}$ et $\begin{cases} \underset{\sim}{K}\,\underline{\underline{A}} = \dfrac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{3}\underline{\underline{1}} \\ \underset{\sim}{J}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}' \end{cases}$

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

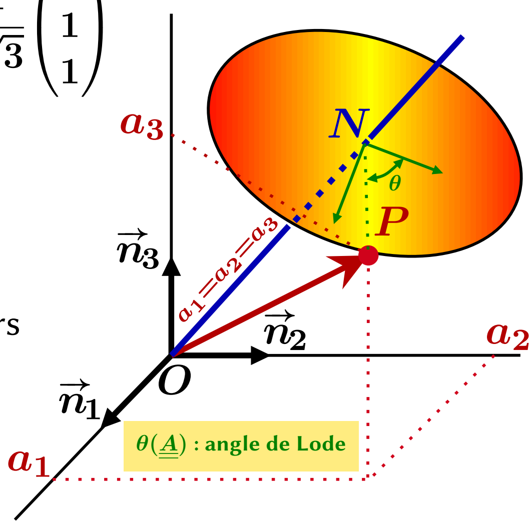
1.2. Bases sphérique-déviatorique

Dans la base $\{\vec{n}_i\}$, $\underline{\underline{A}}$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ tel que :

$$\overrightarrow{OP} = \left\|\overrightarrow{ON}\right\| \vec{i} + \overrightarrow{NP}, \text{ avec } \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il vient $\left\|\overrightarrow{ON}\right\| = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$, d'où :

$$\overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}, \quad \left\|\overrightarrow{NP}\right\| = \left\|\underline{\underline{A}}'\right\|$$



Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{NP}$ sont les valeurs propres du tenseur $\underline{\underline{A}}'$, racines du polynôme caractéristique :

$$\mathrm{p}(a) = -a'^3 - I_2(\underline{\underline{A}}')a' + I_3(\underline{\underline{A}}') = 0$$

Pour trouver ces racines, on effectue un changement de variable de la forme $a' = u\cos(\theta)$.

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.2. Bases sphérique-déviatorique

Pour $u = \sqrt{2/3}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\|$, le problème se transforme en la recherche de θ tel que :

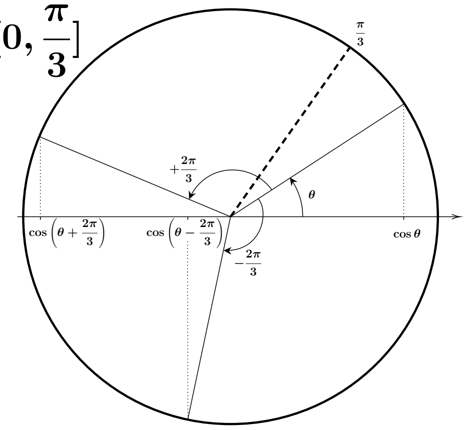
$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos(3\theta) = 3\sqrt{6}\frac{\det \underline{\underline{A}}'}{\left\|\underline{\underline{A}}'\right\|}$$

qui admet trois solutions réelles : $\theta_i = \theta - \frac{2\pi}{3}(i-1),\ \ i = 1, 2, 3$, avec

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(3\sqrt{6}\frac{\det \underline{\underline{A}}'}{\left\|\underline{\underline{A}}'\right\|}\right) \in [0, \frac{\pi}{3}]$$

D'où :

$$\begin{cases} a_1' = a_1 - \frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \cos(\theta) \\ a_2' = a_2 - \frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ a_3' = a_3 - \frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\underline{\underline{A}}'\right\| \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$



$a_1 \geq a_2 \geq a_3$

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.2. Bases sphérique-déviatorique

Partons de la décomposition spectrale : $\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{\underline{n}}_i$, et remplaçons les a_i par leurs expressions en fonction du triplet $(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \left\|\underline{\underline{A}}'\right\|, \theta)$, qui définit un triplet d'invariants équivalents aux autres triplets, on obtient :

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{\sqrt{3}}\underline{\underline{I}} + \left\|\underline{\underline{A}}'\right\|\left(\cos\theta \underline{\underline{J}}_1 + \sin\theta \underline{\underline{J}}_2\right)$$

avec

$$\underline{\underline{I}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\underline{1}},\ \underline{\underline{J}}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(3\underline{\underline{n}}_1 - \underline{\underline{1}}),\ \ \underline{\underline{J}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\underline{n}}_2 - \underline{\underline{n}}_3)$$

La base $(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{J}}_1, \underline{\underline{J}}_2)$ est une base orthonormée pour les tenseurs symétriques ayant $\{\vec{n}_i\}$ comme base propre.

1.2. Bases sphérique-déviatorique

Posons $\underline{\underline{J}} = \dfrac{\underline{\underline{A}}'}{\left\|\underline{\underline{A}}'\right\|} = \cos\theta\,\underline{\underline{J}}_1 + \sin\theta\,\underline{\underline{J}}_2$, d'où : $\underline{\underline{A}} = \dfrac{\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}}{\sqrt{3}}\underline{\underline{I}} + \left\|\underline{\underline{A}}'\right\|\,\underline{\underline{J}}$.

Et cherchons une nouvelle base orthonormée $(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{J}}, \underline{\underline{K}})$.

En décomposant $\underline{\underline{K}}$ dans la base $(\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{J}}_1, \underline{\underline{J}}_2)$ sous la forme $\underline{\underline{K}} = a\underline{\underline{I}} + b\underline{\underline{J}}_1 + c\underline{\underline{J}}_2$,

et sachant qu'il doit vérifier : $\underline{\underline{K}}:\underline{\underline{I}} = 0$, $\underline{\underline{K}}:\underline{\underline{J}} = 0$, $\left\|\underline{\underline{K}}\right\| = 1$, on obtient :

$$\underline{\underline{K}} = -\sin\theta\,\underline{\underline{J}}_1 + \cos\theta\,\underline{\underline{J}}_2$$

En calculant $\underline{\underline{J}}^2$, le tenseur $\underline{\underline{K}}$ peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$\underline{\underline{K}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos(3\theta)}}\left(\sqrt{2}\underline{\underline{I}} - \sqrt{6}\underline{\underline{J}}^2 + \cos(3\theta)\underline{\underline{J}}\right)$$

1.3. Dérivées partielles des invariants

Triplets $(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3)$ **et** $\left(I_1(\underline{\underline{A}}), I_2(\underline{\underline{A}}), I_3(\underline{\underline{A}})\right)$

$$\begin{cases} \partial_{\underline{\underline{A}}}\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{1}} \\ \partial_{\underline{\underline{A}}}\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2 &= 2\underline{\underline{A}}^T \\ \partial_{\underline{\underline{A}}}\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3 &= 3\left(\underline{\underline{A}}^2\right)^T \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_{\underline{\underline{A}}} I_1(\underline{\underline{A}}) &= \underline{\underline{1}} \\ \partial_{\underline{\underline{A}}} I_2(\underline{\underline{A}}) &= \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{A}}^T \\ \partial_{\underline{\underline{A}}} I_3(\underline{\underline{A}}) &= I_3(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{A}}^{-T} \end{cases}$$

Triplet (a_1, a_2, a_3)

De la décomposition $\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{\underline{n}}_i$, il vient : $\mathrm{d}\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{3}\left(\mathrm{d}a_i\underline{\underline{n}}_i + a_i\mathrm{d}\underline{\underline{n}}_i\right)$

Sachant que : $\mathrm{d}\underline{\underline{n}}_i:\underline{\underline{n}}_j = \left(\mathrm{d}\vec{n}_i\otimes\vec{n}_i + \vec{n}_i\otimes\mathrm{d}\vec{n}_i\right):\vec{n}_j\otimes\vec{n}_j = 0$ et $\underline{\underline{n}}_i:\underline{\underline{n}}_j = \delta_{ij}$ (car $\|\vec{n}_i\| = 1$), on obtient :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{A}}:\underline{\underline{n}}_i = \mathrm{d}a_i \Rightarrow \partial_{\underline{\underline{A}}} a_i = \underline{\underline{n}}_i$$

1. Tenseur symétrique d'ordre 2 : bases et invariants

1.3. Dérivées partielles des invariants

Triplet $(\text{tr}\underline{\underline{A}}, \|\underline{\underline{A}}'\|, \theta)$

De la décomposition $\underline{\underline{A}} = \frac{\text{tr}\underline{\underline{A}}}{\sqrt{3}}\underline{\underline{I}} + \|\underline{\underline{A}}'\| \underline{\underline{J}}$, il vient :

$$\text{d}\underline{\underline{A}} = \frac{\text{dtr}\underline{\underline{A}}}{\sqrt{3}}\underline{\underline{I}} + \text{d}\|\underline{\underline{A}}'\| \underline{\underline{J}} + \|\underline{\underline{A}}'\| \text{d}\underline{\underline{J}}$$

avec

$$\text{d}\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{K}}\text{d}\theta + \cos\theta \text{d}\underline{\underline{J}}_1 + \sin\theta \text{d}\underline{\underline{J}}_2$$

Les deux tenseurs $\underline{\underline{J}}_1$ et $\underline{\underline{J}}_2$ ont des valeurs propres constantes, d'où : $\text{d}\underline{\underline{J}}_1 : \underline{\underline{I}} = 0$, $\text{d}\underline{\underline{J}}_1 : \underline{\underline{J}} = 0$ et $\text{d}\underline{\underline{J}}_1 : \underline{\underline{K}} = 0$ (car $\text{d}\underline{\underline{n}}_i : \underline{\underline{n}}_j = 0$). De même pour $\underline{\underline{J}}_2$. Il vient :

$$\text{d}\underline{\underline{J}} : \underline{\underline{I}} = 0, \ \text{d}\underline{\underline{J}} : \underline{\underline{J}} = 0, \ \text{d}\underline{\underline{J}} : \underline{\underline{K}} = \text{d}\theta$$

Par conséquent :

$$\partial_{\underline{\underline{A}}}\text{tr}\underline{\underline{A}} = \sqrt{3}\underline{\underline{I}}, \ \partial_{\underline{\underline{A}}}\|\underline{\underline{A}}'\| = \underline{\underline{J}}, \ \|\underline{\underline{A}}'\| \partial_{\underline{\underline{A}}}\theta = \underline{\underline{K}}$$

2. Fonctions isotropes

Pourquoi les coefficients du polynôme caractéristiques $I_i(\underline{\underline{A}})$ sont appelés **invariants** de $\underline{\underline{A}}$? Car ce sont des **fonctions isotropes** du tenseur $\underline{\underline{A}}$, qui vérifient : $I_i(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T) = I_i(\underline{\underline{A}}), \ \forall \underline{\underline{Q}} \ / \ \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{1}}$

En effet :
$$\begin{aligned}\det\left(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T - a\underline{\underline{1}}\right) &= \det\left(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T - a\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T\right) \\ &= \det\left(\underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}})\underline{\underline{Q}}^T\right) = (\det \underline{\underline{Q}})^2 \det\left(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}}\right) \\ &= \det\left(\underline{\underline{A}} - a\underline{\underline{1}}\right)\end{aligned}$$

Une fonction scalaire Φ, vectorielle $\vec{\Phi}$ ou tensorielle d'ordre 2 $\underline{\underline{\Phi}}$, dont les variables peuvent être des scalaires u, des vecteurs $\vec{v}$ ou des tenseurs d'ordre 2 $\underline{\underline{A}}$, est dite **isotrope** si on a, $\forall \underline{\underline{Q}}$ orthogonal :

$$\Phi(u, \underline{\underline{Q}}\vec{v}, \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T) = \Phi(u, \vec{v}, \underline{\underline{A}})$$

$$\vec{\Phi}(u, \underline{\underline{Q}}\vec{v}, \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T) = \underline{\underline{Q}}\vec{\Phi}(u, \vec{v}, \underline{\underline{A}})$$

$$\underline{\underline{\Phi}}(u, \underline{\underline{Q}}\vec{v}, \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}^T) = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{\Phi}}(u, \vec{v}, \underline{\underline{A}})\underline{\underline{Q}}^T$$

3. Théorèmes de représentation

Soient $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ deux tenseurs d'ordre 2 symétriques.

- Une fonction scalaire $\Phi\left(\underline{\underline{A}}\right)$ est isotrope ssi :

$$\Phi\left(\underline{\underline{A}}\right) = \Phi\left(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3\right)$$

- Une fonction scalaire $\Phi(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}})$ est isotrope ssi :

$$\Phi\left(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\right) = \Phi\left(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3, \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}, \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}^3, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}, \right.$$
$$\left. \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2, \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}^2\right)$$

- Une fonction tensorielle $\underline{\underline{\Phi}}\left(\underline{\underline{A}}\right)$ est isotrope ssi :

$$\underline{\underline{\Phi}}\left(\underline{\underline{A}}\right) = \varphi_0\underline{\underline{1}} + \varphi_1\underline{\underline{A}} + \varphi_2\underline{\underline{A}}^2$$

  où les $\varphi_i(\underline{\underline{A}})$ sont des fonctions scalaires isotropes.

- Une fonction tensorielle $\underline{\underline{\Phi}}\left(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\right)$ est isotrope ssi :

$$\underline{\underline{\Phi}}\left(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\right) = \varphi_0\underline{\underline{1}} + \varphi_1\underline{\underline{A}} + \varphi_2\underline{\underline{A}}^2 + \varphi_3\underline{\underline{B}} + \varphi_4\underline{\underline{B}}^2 + \varphi_5\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right) +$$
$$\varphi_6\left(\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2\right) + \varphi_7\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^2 + \underline{\underline{B}}^2\underline{\underline{A}}\right) + \varphi_8\left(\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}^2 + \underline{\underline{B}}^2\underline{\underline{A}}^2\right)$$

  où les $\varphi_i\left(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\right)$ sont des fonctions scalaires isotropes.

4. Tenseurs définis positifs

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 est **défini positif** si

$$\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{v} > 0, \quad \forall\vec{v} \neq \vec{0}$$

Sachant que $\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{v} = \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^S\vec{v} + \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^A\vec{v}$ et que $\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^A\vec{v} = 0$, il vient :

$$\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{v} = \vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^S\vec{v}$$

Par conséquent, la définie positivité de $\underline{\underline{A}}$ est décidée par celle de sa partie symétrique :

$$\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}^S\vec{v} > 0, \quad \forall\vec{v} \neq \vec{0}$$

Un tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre 2 est **semi-défini positif** si

$$\vec{v}\cdot\underline{\underline{A}}\vec{v} \geq 0, \quad \forall\vec{v} \neq \vec{0}$$

Un tenseur $\underset{\sim}{H}$ d'ordre 4 est défini positif si

$$\underline{\underline{A}}:\underset{\sim}{H}\underline{\underline{A}} > 0, \ \forall\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{0}}$$

4. Tenseurs définis positifs

Un tenseur $\underline{\underline{S}}$ symétrique défini positif, de base propre $\{\vec{n}_i \otimes \vec{n}_i\}$, possède les propriétés suivantes :

- ses valeurs propres sont strictement positives
  $\vec{v} \cdot \underline{\underline{S}}\vec{v} = s\,\|\vec{v}\|^2 > 0 \Rightarrow s > 0$

- ses invariants principaux sont strictement positives
  $I_1(\underline{\underline{S}}) = s_1 + s_2 + s_3 > 0,\ I_2(\underline{\underline{S}}) = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 > 0,\ I_3(\underline{\underline{S}}) = s_1 s_2 s_3 > 0$

- sa racine n-ième est définie par :

$$\sqrt[n]{\underline{\underline{S}}} = \underline{\underline{S}}^{\frac{1}{n}} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt[n]{s_i}\,\vec{n}_i \otimes \vec{n}_i,\ n \in \mathbb{N}$$

- son logarithme népérien est défini par :

$$\ln \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^{3} \ln s_i \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i$$

5. Exponentielle d'un tenseur d'ordre 2

L'exponentielle d'un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 défini par :

$$\exp(\underline{\underline{A}}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{A}}^k}{k!}$$

telle que $\forall(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \in \vec{\mathscr{E}}^{(2)} \times \vec{\mathscr{E}}^{(2)}$:

- $\det\Big(\exp(\underline{\underline{A}})\Big) = \exp(\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}) > 0$
- si $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$, $\exp(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \exp(\underline{\underline{A}})\exp(\underline{\underline{B}}) = \exp(\underline{\underline{B}})\exp(\underline{\underline{A}})$
- $\exp(n\underline{\underline{A}}) = \Big(\exp(\underline{\underline{A}})\Big)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\exp(-\underline{\underline{A}}) = \Big(\exp(\underline{\underline{A}})\Big)^{-1}$
- pour $\underline{\underline{B}}$ inversible, $\exp(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^{-1}) = \underline{\underline{B}}\exp(-\underline{\underline{A}})\underline{\underline{B}}^{-1}$
- pour $\underline{\underline{A}}$ antisymétrique, $\exp(\underline{\underline{A}})$ est une rotation

6. Décomposition polaire

Pour tout tenseur $\underline{\underline{A}}$ inversible ($\det \underline{\underline{A}} \neq 0$), il existe deux tenseurs uniques $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ symétriques définis positifs et un tenseur unique $\underline{\underline{R}}$ orthogonal tels que :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{R}}$$

$\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}}$ est appelée décomposition polaire à droite.

$\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{R}}$ est appelée décomposition polaire à gauche.

- Si $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\underline{\underline{R}}$ est une rotation ($\det \underline{\underline{R}} = 1$) car $\det \underline{\underline{U}} > 0$
- $\underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}$
- $\underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T$

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.1. Représentation avec axe et angle

Si $\underline{\underline{R}} \neq \underline{\underline{1}}$ est une rotation, $+1$ est toujours une valeur propre de $\underline{\underline{R}}$.

En effet : $\det\left(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}\right) = \det\left(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}}\right) = \det \underline{\underline{R}}\,\det\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{R}}^T\right) = \det\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{R}}^T\right)^T$

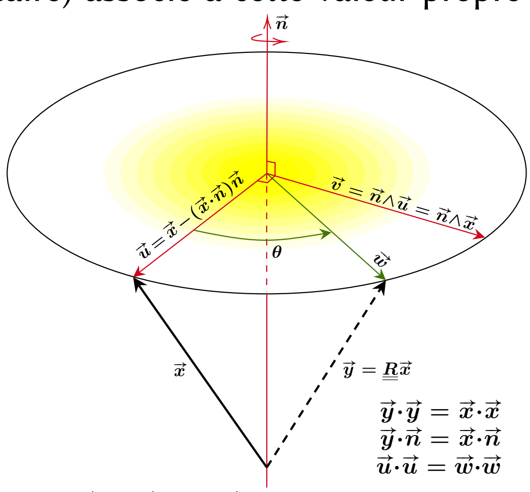
$$= \det\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{R}}\right) = -\det\left(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}\right) \Rightarrow \det\left(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}\right) = 0$$

Le vecteur propre $\vec{n}$ (que l'on peut choisir unitaire) associé à cette valeur propre est **l'axe** de la rotation :

$$\underline{\underline{R}}\vec{n} = \vec{n}$$

Considérons les deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tels que $\vec{y} = \underline{\underline{R}}\vec{x}$. Nous avons :

$$\vec{w} = \vec{y} - (\vec{y}\cdot\vec{n})\vec{n}$$
$$= \underline{\underline{R}}\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n}$$
$$= \left(\underline{\underline{R}} - \vec{n}\otimes\vec{n}\right)\vec{x}$$



Or $\vec{w} = \cos(\theta)\vec{u} + \sin\theta\,\vec{n}\wedge\vec{u}$, d'où :

$$\underline{\underline{R}}\vec{x} = \left(\vec{n}\otimes\vec{n}\right)\vec{x} + \cos\theta\left(\underline{\underline{1}} - \vec{n}\otimes\vec{n}\right)\vec{x} + \sin\theta\,\vec{n}\wedge\vec{x},\ \forall\vec{x}$$

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.1. Représentation avec axe et angle

Soit le tenseur antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$ de vecteur axial $\vec{n}$, il vient :

$$\underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) = \vec{n}\otimes\vec{n} + \cos\theta\left(\underline{\underline{1}} - \vec{n}\otimes\vec{n}\right) + \sin\theta\underline{\underline{\Omega}}$$

Sachant que $\underline{\underline{\Omega}}^2\vec{x} = \underline{\underline{\Omega}}\left(\underline{\underline{\Omega}}\vec{x}\right) = \vec{n}\wedge\vec{n}\wedge\vec{x} = (\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n} - \vec{x}$, d'où :

$$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \vec{n}\otimes\vec{n} - \underline{\underline{1}}$$

Par conséquent :

$$\underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) = \underline{\underline{1}} + \sin\theta\underline{\underline{\Omega}} + (1-\cos\theta)\underline{\underline{\Omega}}^2$$

Le vecteur $\vec{n}$, axe de la rotation, est calculé en cherchant le vecteur propre associé à 1, quant à l'angle θ on l'obtient en calculant la trace de $\underline{\underline{R}}$:

$$\text{tr}\underline{\underline{R}} = 2\cos\theta + 1 \Rightarrow \theta = \pm\arccos\left(\tfrac{1}{2}(\text{tr}\underline{\underline{R}} - 1)\right) + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Sachant que $\underline{\underline{R}}(\vec{n},2\pi-\theta) = \underline{\underline{R}}(-\vec{n},\theta)$, on se limite à $\theta\in[0,\pi]$.

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.1. Représentation avec axe et angle

Dans la base $\vec{\mathcal{B}}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

$$\left[\underline{\underline{R}}\right] = \begin{bmatrix} 1+(1-c)(n_1^2-1) & -su_3+(1-c)n_1n_2 & sn_2+(1-c)n_1n_3 \\ sn_3+(1-c)n_1n_2 & 1+(1-c)(n_2^2-1) & -sn_1+(1-c)n_2n_3 \\ -sn_2+(1-c)n_1n_3 & sn_1+(1-c)n_2n_3 & 1+(1-c)(n_3^2-1) \end{bmatrix}$$

$$c = \cos\theta,\ s = \sin\theta$$

$$\left[\underline{\underline{R}}\right]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix},\ \left[\underline{\underline{R}}\right]_2 = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix},\ \left[\underline{\underline{R}}\right]_3 = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.2. Représentation avec vecteur rotation

Au lieu d'utiliser quatre paramètres (θ, n_1, n_2, n_3) avec la contrainte $\|\vec{n}\| = 1$, on peut utiliser le **vecteur rotation** $\vec{a} = \theta\vec{n}$:

$$\underline{\underline{R}}\vec{a} = \vec{a}, \; \|\vec{a}\| = \theta$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) = \underline{\underline{R}}(\vec{a}) &= \underline{\underline{1}} + \frac{\sin\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}\underline{\underline{\Omega}} + \frac{1-\cos\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|^2}\underline{\underline{\Omega}}^2 \\ &= \underline{\underline{1}} + \frac{\sin\|\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}\underline{\underline{\Omega}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\|\vec{a}\|/2\right)}{\|\vec{a}\|/2}\right]^2\underline{\underline{\Omega}}^2\end{aligned}$$

où $\underline{\underline{\Omega}} = \theta\underline{\underline{\overline{\Omega}}}$ est le tenseur antisymétrique de vecteur axial $\vec{a}$.

7. Tenseur orthogonal de rotation

7.3. Représentation exponentielle

Le développement en série de Taylor de $\sin\theta$ et de $1-\cos\theta$, donne :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots, \; 1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) &= \underline{\underline{1}} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)\underline{\underline{\overline{\Omega}}} + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right)\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^2 \\ &= \underline{\underline{1}} + \theta\underline{\underline{\overline{\Omega}}} + \frac{\theta^2}{2!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^2 - \frac{\theta^3}{3!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}} - \frac{\theta^4}{4!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^2 + \frac{\theta^5}{5!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}} + \frac{\theta^6}{6!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^2 + \cdots \\ &= \underline{\underline{1}} + \frac{\theta}{1!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}} + \frac{\theta^2}{2!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^2 + \frac{\theta^3}{3!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^3 + \frac{\theta^4}{4!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^4 + \frac{\theta^5}{5!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^5 + \frac{\theta^6}{6!}\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^6 + \cdots\end{aligned}$$

Car $\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^{k+2} = -\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^k$ pour $k \geq 1$.

En effet : $\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^2 = \vec{n}\otimes\vec{n} - \underline{\underline{1}}, \; \underline{\underline{\overline{\Omega}}}^3 = \underline{\underline{\overline{\Omega}}}\left(\vec{n}\otimes\vec{n} - \underline{\underline{1}}\right) = -\underline{\underline{\overline{\Omega}}}$

$\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^4 = \underline{\underline{\overline{\Omega}}}^3\underline{\underline{\overline{\Omega}}} = -\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^2, \; \underline{\underline{\overline{\Omega}}}^5 = \underline{\underline{\overline{\Omega}}}^4\underline{\underline{\overline{\Omega}}} = -\underline{\underline{\overline{\Omega}}}^3 = \underline{\underline{\overline{\Omega}}}, \; \underline{\underline{\overline{\Omega}}}^6 = \underline{\underline{\overline{\Omega}}}^5\underline{\underline{\overline{\Omega}}} = \underline{\underline{\overline{\Omega}}}^2 \ldots$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R}}(\vec{n},\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta\underline{\underline{\overline{\Omega}}})^k}{k!} := \exp\left(\theta\underline{\underline{\overline{\Omega}}}\right), \text{ ou encore } \underline{\underline{R}}(\vec{a}) = \exp\left(\underline{\underline{\Omega}}\right)$$

7.4. Valeurs propres

$$\det\left(\underline{\underline{R}} - r\underline{\underline{1}}\right) = -r^3 + I_1(\underline{\underline{R}})r^2 - I_2(\underline{\underline{R}})r + I_3(\underline{\underline{R}})$$

$$I_3(\underline{\underline{R}}) = \det\underline{\underline{R}} = 1,\ I_1(\underline{\underline{R}}) = \mathrm{tr}\underline{\underline{R}}$$
$$I_2(\underline{\underline{R}}) = \det\underline{\underline{R}}\,\mathrm{tr}\underline{\underline{R}}^{-1} = \mathrm{tr}\underline{\underline{R}}$$
$$\mathrm{p}(r) = -(r-1)\left(r^2 + (1-\mathrm{tr}\underline{\underline{R}})r + 1\right) = 0$$

avec

$$\Delta = (1-\mathrm{tr}\underline{\underline{R}})^2 - 4$$

En introduisant l'angle θ, on obtient :

$$\Delta = -4\sin^2\theta \leq 0$$

En plus de $r = 1$, les deux autres racines sont complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$ ($\theta \in [0,\ \pi]$) :

$$r_{\pm} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

7.5. Rotation infinitésimale

Pour un angle θ infinitésimale, il vient :

$$\underline{\underline{R}} \simeq \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Omega}}$$

$\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T = \left(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Omega}}\right)\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}\right) = \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}^2 \neq \underline{\underline{1}} \Rightarrow \underline{\underline{R}}$ n'est pas orthogonal. Pour avoir un tenseur orthogonal, on peut écrire :

$$\underline{\underline{R}} = \exp\left(\underline{\underline{\Omega}}\right) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}} + \tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\right) = \left(\exp\left(-\tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\right)\right)^{-1}\exp\left(\tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\right)$$
$$\simeq \left(\underline{\underline{1}} - \tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\right)^{-1}\left(\underline{\underline{1}} + \tfrac{1}{2}\underline{\underline{\Omega}}\right)$$

d'où :

$$\underline{\underline{R}} \simeq 4\left(2\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}\right)^{-1} - \underline{\underline{1}}$$

Le tenseur $2\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}$ est défini positif : $\vec{v}\cdot\left(2\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}\right)\vec{v} = 2\,\|\vec{v}\|^2 > 0$.

Grâce à l'identité $\underline{\underline{A}}^{-1} + \underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\right)\underline{\underline{B}}^{-1}$, on peut vérifier que $\underline{\underline{R}}\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{1}}$.

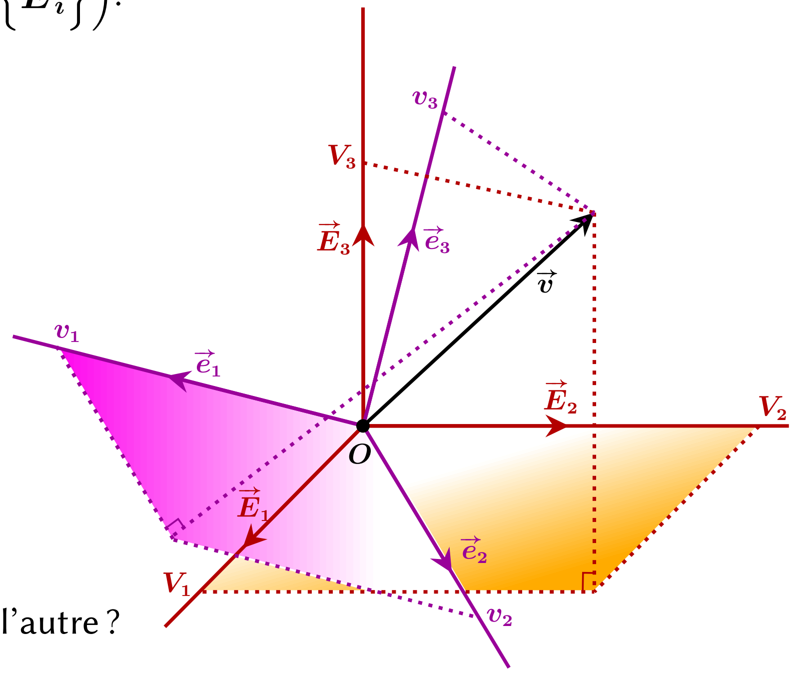
8. Changement de base

Considérons deux repères ayant le même origine O mais deux bases orthonormées différentes : $\left(O, \{\vec{e}_i\}\right)$, $\left(O, \left\{\vec{E}_i\right\}\right)$.

Le **même** vecteur $\vec{v}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= V_1\vec{E}_1 + V_2\vec{E}_2 + V_3\vec{E}_3\\ &= \left(\vec{v}\cdot\vec{E}_i\right)\vec{E}_i\\ &= \left(\vec{E}_i\otimes\vec{E}_i\right)\vec{v} = \underline{\underline{1}}\,\vec{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3\\ &= \left(\vec{v}\cdot\vec{e}_i\right)\vec{e}_i\\ &= \left(\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i\right)\vec{v} = \underline{\underline{1}}\,\vec{v}\end{aligned}$$



Comment passer d'une base à l'autre ?

8. Changement de base

$$\vec{E}_i = \underline{\underline{1}}\,\vec{E}_i = \left(\vec{e}_j\otimes\vec{e}_j\right)\vec{E}_i = \left(\vec{E}_i\cdot\vec{e}_j\right)\vec{e}_j$$

Posons $Q_{ij} = \vec{E}_i\cdot\vec{e}_j$, il vient : $\vec{E}_i = Q_{ij}\,\vec{e}_j$.

Soit le tenseur $\underline{\underline{Q}}$ de composantes Q_{ij}. Par définition, les composantes de $\underline{\underline{Q}}$ dans la base $\left\{\vec{E}_i\right\}$ sont $Q_{ij} = \vec{E}_i\cdot\underline{\underline{Q}}\vec{E}_j$, d'où : $\vec{e}_i = \underline{\underline{Q}}\vec{E}_i$.

En effet : $Q_{ij} = \vec{E}_i\cdot\underline{\underline{Q}}\vec{E}_j = \vec{E}_i\cdot\vec{e}_j \Rightarrow \vec{E}_i\cdot\left(\vec{e}_j - \underline{\underline{Q}}\vec{E}_j\right) = 0 \Rightarrow \vec{e}_j - \underline{\underline{Q}}\vec{E}_j = \alpha\vec{E}_k + \beta\vec{E}_l,\ i\neq k\neq l$

$\underbrace{\vec{E}_k\cdot\vec{e}_j}_{Q_{kj}} - \underbrace{\vec{E}_k\cdot\underline{\underline{Q}}\vec{E}_j}_{Q_{kj}} = \alpha \Rightarrow \alpha = 0$. De même $\beta = 0$.

$$\vec{E}_i = Q_{ij}\,\vec{e}_j \quad \text{et} \quad \vec{e}_i = \underline{\underline{Q}}\vec{E}_i$$

Le même raisonnement avec $\vec{e}_i$ et la base $\{\vec{e}_i\}$ conduit à :

$$\vec{e}_i = Q_{ji}\vec{E}_j \quad \text{et} \quad \vec{E}_i = \underline{\underline{Q}}^T\vec{e}_i$$

Les deux bases étant orthonormées ($\|\vec{e}_i\| = 1$, $\left\|\vec{E}_i\right\| = 1$), d'où :

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right] = \left[\underline{\underline{Q}}\vec{E}_1, \underline{\underline{Q}}\vec{E}_2, \underline{\underline{Q}}\vec{E}_3\right] = \det\underline{\underline{Q}}\left[\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\right]$$

8. Changement de base

Si les deux bases ont les mêmes orientations ($\det \underline{\underline{Q}} = 1$), le passage d'une base à une autre se fait alors par une **rotation** $\underline{\underline{Q}}$ telle que :

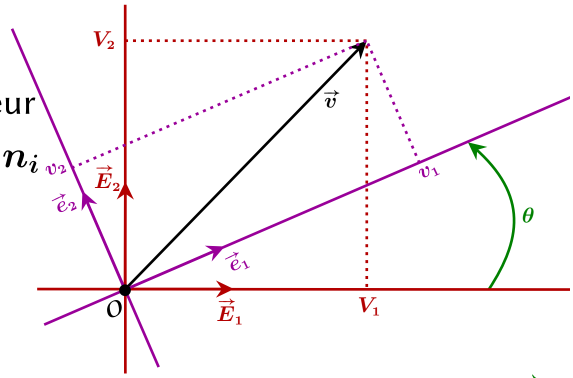
$$\vec{e}_i = \underline{\underline{Q}}\vec{E}_i = Q_{ji}\vec{E}_j$$
$$\vec{E}_i = \underline{\underline{Q}}^T\vec{e}_i = Q_{ij}\vec{e}_j$$

Le tenseur $\underline{\underline{Q}}$ a les mêmes composantes dans les deux bases :

$$Q_{ij} = \vec{E}_i \cdot \underline{\underline{Q}}\vec{E}_j = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{Q}}\vec{e}_j = \vec{E}_i \cdot \vec{e}_j = \left\|\vec{E}_i\right\| \|\vec{e}_j\| \cos\theta(\vec{E}_i, \vec{e}_j) = \cos\theta(\vec{E}_i, \vec{e}_j)$$

Ces 9 composantes sont appelées **cosinus directeurs**.

Remarque : les cosinus directeurs d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base $\{\vec{e}_i\}$ sont les composantes n_i du vecteur unitaire $\vec{n} = \vec{v}/\|\vec{v}\|$:
$n_i = \cos\theta(\vec{v}, \vec{e}_i) = \vec{v} \cdot \vec{e}_i / \|\vec{v}\|$, avec $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.



Rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{E}_3$

8. Changement de base

8.1. Transformation des composantes d'un vecteur

$$V_i = \vec{v} \cdot \vec{E}_i = Q_{ij}\vec{v} \cdot \vec{e}_j = Q_{ij}v_j \quad \Big| \quad v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i = Q_{ji}\vec{v} \cdot \vec{E}_j = Q_{ji}V_j$$

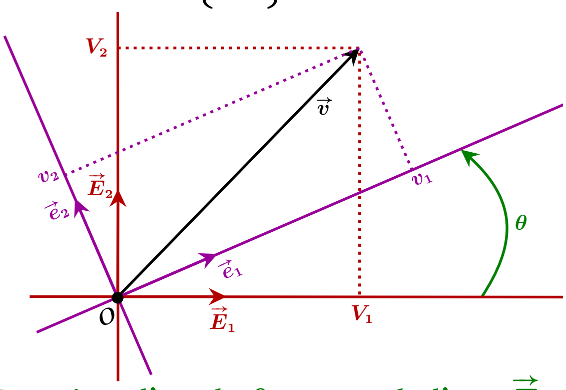
En notation matricielle :

$$[\vec{v}]_{\{\vec{E}_i\}} = \left[\underline{\underline{Q}}\right][\vec{v}]_{\{\vec{e}_i\}} \quad \text{et} \quad [\vec{v}]_{\{\vec{e}_i\}} = \left[\underline{\underline{Q}}\right]^T[\vec{v}]_{\{\vec{E}_i\}}$$

$\left[\underline{\underline{Q}}\right]$ est la **matrice de passage** de la base $\{\vec{e}_i\}$ à la base $\{\vec{E}_i\}$.

Attention

Les deux équations matricielles ne sont pas équivalentes, respectivement, à $\vec{V} = \underline{\underline{Q}}\vec{v}$ et $\vec{v} = \underline{\underline{Q}}^T\vec{V}$, relations entre deux vecteurs différents $\vec{V}$ et $\vec{v}$.



Rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{E}_3$

8. Changement de base

8.2. Transformation des composantes d'un tenseur

$$\underline{\underline{A}} = A_{ij}\vec{E}_i \otimes \vec{E}_j = a_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$A_{ij} = \vec{E}_i \cdot \underline{\underline{A}}\vec{E}_j = Q_{ik}Q_{jl}\vec{e}_k \cdot \underline{\underline{A}}\vec{e}_l = Q_{ik}A_{kl}Q_{jl}$$

$$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \underline{\underline{A}}\vec{e}_j = Q_{ki}Q_{lj}\vec{E}_k \cdot \underline{\underline{A}}\vec{E}_l = Q_{ki}A_{kl}Q_{lj}$$

En notation matricielle :

$$\left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{E}_i\}} = \left[\underline{\underline{Q}}\right]\left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{e}_i\}}\left[\underline{\underline{Q}}\right]^T \quad \text{et} \quad \left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{e}_i\}} = \left[\underline{\underline{Q}}\right]^T\left[\underline{\underline{A}}\right]_{\{\vec{E}_i\}}\left[\underline{\underline{Q}}\right]$$

Attention

Les deux équations matricielles ne sont pas équivalentes, respectivement, à $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{Q}}^T$ et $\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}$, relations entre deux tenseurs différents $\underline{\underline{a}}$ et $\underline{\underline{A}}$.

MMC - (1) - Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielles

Exercices

$\overrightarrow{\mathscr{E}}$ désigne l'espace vectoriel euclidien de dimension 3.
$\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ désigne le tenseur d'orientation d'ordre 3.

Exercice 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Montrer que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$$

Exercice 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Montrer que :

$$\vec{u}\otimes\vec{v} + \vec{v}\otimes\vec{u} = \vec{a}\otimes\vec{a} - \vec{b}\otimes\vec{b}$$

avec

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}+\vec{v}),\ \ \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}-\vec{v}),\ \ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0,\ \ \left\|\vec{a}\right\| = 1,\ \ \left\|\vec{b}\right\| = 1$$

Exercice 3

1) Calculer les expressions $\delta_{ii}\delta_{jj}$, $\delta_{i1}\delta_{ij}\delta_{j1}$.
2) Simplifier l'expression $\delta_{1i}\delta_{1j} + \delta_{2i}\delta_{2j} + \delta_{3i}\delta_{3j}$.

Exercice 4

1) Calculer l'expression $\eta_{ijk}\delta_{1i}\,\delta_{2j}\,\delta_{3k}$.
2) Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2 de composantes A_{ij}. Développer les expressions :
   a) $\eta_{1jk}A_{jm}A_{kn},\ \ \eta_{1jk}A_{mj}A_{nk}$
   b) $\eta_{2jk}A_{jm}A_{kn},\ \ \eta_{2jk}A_{mj}A_{nk}$
   c) $\eta_{3jk}A_{jm}A_{kn},\ \ \eta_{3jk}A_{mj}A_{nk}$
3) En déduire l'expression du déterminant de $\underline{\underline{A}}$ sous la forme :

$$\det \underline{\underline{A}} = \eta_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} = \eta_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$$

Exercice 5

Le produit contracté $\underline{\underline{\underline{\eta}}}\,\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ est un tenseur d'ordre 4 de composantes $\eta_{ijk}\eta_{kmn}$. Le produit doublement contracté $\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ est un tenseur d'ordre 2 de composantes $\eta_{ijk}\eta_{jkn}$.

1) Exprimer η_{ijk} en fonction de η_{lmn}.
2) Montrer que η_{ijk} est le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{bmatrix}$$

3) Montrer que le produit $\eta_{ijk}\eta_{lmn}$ est le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix}$$

4) En déduire les composantes du tenseur $\underline{\underline{\underline{\eta}}}\,\underline{\underline{\underline{\eta}}}$ sous la forme :

$$\eta_{ijk}\eta_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

En notation tensorielle, on écrit : $\underline{\underline{\underline{\eta}}}\,\underline{\underline{\underline{\eta}}} = \underline{\underline{1}} \underline{\otimes} \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{1}} \overline{\otimes} \underline{\underline{1}}$.

5) En déduire l'identité tensorielle :

$$\underline{\underline{\underline{\eta}}}:\underline{\underline{\underline{\eta}}} = 2\,\underline{\underline{1}}$$

Exercice 6

Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2 de composantes A_{ij}. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$ tels que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

1) En utilisant les résultats de l'exercice 5 montrer que :

$$\eta_{lmn} \det \underline{\underline{A}} = \eta_{ijk}A_{li}A_{mj}A_{nk} = \eta_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn}$$

2) En déduire l'expression du déterminant de $\underline{\underline{A}}$ sous la forme :

$$\det \underline{\underline{A}} = \frac{[\underline{\underline{A}}\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

3) Montrer que :

$$\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = \frac{[\underline{\underline{A}}\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \underline{\underline{A}}\vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \underline{\underline{A}}\vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

Exercice 7 : identité de Lagrange

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ quatre vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$. Montrer que :

$$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right) = \left(\vec{u}\cdot\vec{x}\right)\left(\vec{v}\cdot\vec{y}\right) - \left(\vec{u}\cdot\vec{y}\right)\left(\vec{v}\cdot\vec{x}\right)$$

En déduire que :

$$\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2\left\|\vec{v}\right\|^2 - \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2$$

Exercice 8

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$. Montrer que :

1) $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right) = \left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\vec{w} = \left(\vec{v}\otimes\vec{w} - \vec{w}\otimes\vec{v}\right)\vec{u}$
2) $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right) = \left(\left(\vec{u}\cdot\vec{u}\right)\underline{\underline{1}} - \vec{u}\otimes\vec{u}\right)\vec{v}$

Exercice 9

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$. Soit $\vec{w}$ de $\vec{\mathscr{E}}$ le vecteur axial associé à la partie antisymétrique du tenseur $\vec{u}\otimes\vec{v}$. Montrer que :

$$\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{u}\wedge\vec{v}$$

Exercice 10

Soient $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$ trois tenseurs d'ordre 2. Montrer que :

$$\underline{\underline{A}}:\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right) = \left(\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}\right):\underline{\underline{C}} = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}^T\right):\underline{\underline{B}}$$

Exercice 11

Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2 d'invariants principaux $I_1(\underline{\underline{A}}) = \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}$, $I_2(\underline{\underline{A}})$ et $I_3(\underline{\underline{A}}) = \det\underline{\underline{A}}$, et de valeurs propres a_1, a_2 et a_3. Monter que :

1) $I_1(\underline{\underline{A}}) = a_1 + a_2 + a_3$
2) $I_2(\underline{\underline{A}}) = \det\underline{\underline{A}}\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\underline{\underline{A}})^2 - \mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2\right) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$
3) $I_3(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{6}\left((\mathrm{tr}\underline{\underline{A}})^3 - 3\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^2 + 2\,\mathrm{tr}\underline{\underline{A}}^3\right) = a_1a_2a_3$

Exercice 12 : valeurs propres d'un tenseur antisymétrique d'ordre 2

Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur antisymétrique d'ordre 2 et de vecteur axial $\vec{A}$.
1) Montrer que : $\mathrm{tr}\underline{\underline{A}} = 0$, $\det\underline{\underline{A}} = 0$, $I_2(\underline{\underline{A}}) = (1/2)\left\|\underline{\underline{A}}\right\|$, $\left\|\underline{\underline{A}}\right\| = 2\left\|\vec{A}\right\|$.
2) En déduire que les valeurs propres de $\underline{\underline{A}}$ sont $(0, i\left\|\vec{A}\right\|, -i\left\|\vec{A}\right\|)$.

Exercice 13 : identités de Rivlin

Soient $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ deux tenseurs d'ordre 2. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton respectivement à $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{B}}$, montrer que :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2 = \; & (\text{tr}\underline{\underline{A}})(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})+(\text{tr}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{A}}^2 \\ & +(\text{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}-\text{tr}\underline{\underline{A}}\text{tr}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{A}}-\tfrac{1}{2}\big((\text{tr}\underline{\underline{A}})^2-\text{tr}\underline{\underline{A}}^2\big)\underline{\underline{B}} \\ & +\Big(\text{tr}\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}-\text{tr}\underline{\underline{A}}\text{tr}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\tfrac{1}{2}\text{tr}\underline{\underline{B}}\big((\text{tr}\underline{\underline{A}})^2-\text{tr}\underline{\underline{A}}^2\big)\Big)\underline{\underline{1}}\end{aligned}$$

Pour $\underline{\underline{A}}$ symétrique et $\underline{\underline{B}}$ antisymétrique, en déduire que :

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2=(\text{tr}\underline{\underline{A}})(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})-\tfrac{1}{2}\big((\text{tr}\underline{\underline{A}})^2-\text{tr}\underline{\underline{A}}^2\big)\underline{\underline{B}}$$

Exercice 14

Soient $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ deux tenseurs d'ordre 2. Montrer que :

1) $\left(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\right)^{-1}\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{1}}-\left(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\right)^{-1}\underline{\underline{A}}$

2) $\underline{\underline{A}}^{-1}+\underline{\underline{B}}^{-1}=\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})\underline{\underline{B}}^{-1}=\underline{\underline{B}}^{-1}(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})\underline{\underline{A}}^{-1}$

Exercice 15 : mouvement de corps rigide

Soit un domaine matériel occupant la configuration $\mathcal{D}_0$ à l'instant initial et la configuration $\mathcal{D}$ à l'instant t. Soit $\vec{\chi}$ la transformation entre les deux configurations qui associe à chaque point matériel occupant initialement la position $\vec{x}_0$ dans $\mathcal{D}_0$ la position $\vec{x}$ dans $\mathcal{D}$: $\vec{x}=\vec{\chi}(\vec{x}_0,t)$.

Pour une transformation de la forme $\vec{\chi}(\vec{x}_0,t)=\underline{\underline{R}}(t)\vec{x}_0+\vec{c}(t)$, trouver les conditions sur le tenseur $\underline{\underline{R}}$ permettant de conserver les distances, les angles et l'orientation.

Exercice 16

Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ de vecteurs de gradient $\underline{\nabla}\vec{U}$. Soit $\vec{W}$ le vecteur axial associé à la partie antisymétrique de $\underline{\nabla}\vec{U}$. Montrer que :

$$\vec{W}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{U}$$

Exercice 17

Soient $T(\vec{x})$ un champ de scalaires et $\vec{\psi}(\vec{x})$ un champ de vecteurs. Montrer que :

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{\psi}}{T}\right)=\frac{1}{T}\vec{\nabla}\cdot\vec{\psi}-\frac{1}{T^2}\vec{\psi}\cdot\vec{\nabla}T$$

Exercice 18

Soient $\vec{U}(\vec{x})$ et $\vec{V}(\vec{x})$ deux champs de vecteurs et $\underline{\underline{A}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs d'ordre 2. Montrer que :

$$\vec{\nabla}\cdot(\underline{\underline{A}}\vec{U}) = \vec{U}\cdot\vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{\nabla}}\vec{U}$$

$$(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})\vec{U} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{U}\cdot\vec{U}) + (\vec{\nabla}\wedge\vec{U})\wedge\vec{U}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{U}\wedge\vec{V}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\vec{U} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{U})\vec{V} + (\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})\vec{V} - (\underline{\underline{\nabla}}\vec{V})\vec{U} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{U}\otimes\vec{V} - \vec{V}\otimes\vec{U})$$

Exercice 19 : formules de Green

Soient $f(\vec{x})$ et $g(\vec{x})$ deux champs de scalaires définis en tout point d'un domaine Ω. Soit $\vec{n}$ le champ des normales sortantes de la frontière $\partial\Omega$ de Ω. Montrer que :

$$\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot(f\vec{\nabla}g)\mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega} f(\vec{\nabla}g)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}$$

$$\int_{\Omega}(f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega}(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{A}$$

Exercice 20 : conditions de compatibilité

Soit $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ un champ de tenseurs symétriques d'ordre 2. On se propose de trouver le champ vectoriel $\vec{U}(\vec{x})$ dont dérive $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ au sens suivant :

$$\underline{\underline{S}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\Big(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} + (\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})^T\Big)$$

Ce problème n'a de solution que si et seulement si le champ $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ satisfait la condition suivante :

$$\vec{\nabla}\wedge\Big[(\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{S}})^T\Big] = \underline{\underline{0}} \qquad (\star)$$

1) Commençons par vérifier les identités suivantes :

$$\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} = \underline{\underline{0}},\quad \underline{\underline{1}}:\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{S}} = 0$$

2) La condition $(\star)$ est nécessaire. Soit $\vec{U}(\vec{x})$ un champ vectoriel et soit $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ la partie symétrique de son gradient. Montrer que :

$$(\vec{\nabla}\wedge\underline{\underline{S}})^T = \frac{1}{2}\underline{\underline{\nabla}}(\vec{\nabla}\wedge\vec{U}) \qquad (\star\star)$$

En déduire la condition annoncée sur $\underline{\underline{S}}$.

3) La condition $(\star)$ est suffisante. Soit maintenant un champ de tenseurs symétriques $\underline{\underline{S}}(\vec{x})$ vérifiant la condition $(\star)$. Cherchons le champ $\vec{U}(\vec{x})$ tel que : $\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} + (\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})^T\right) = \underline{\underline{S}}(\vec{x})$. La démonstration repose sur le théorème suivant. *Dans un domaine simplement connexe Ω, le problème :*

$$\begin{cases} \textit{trouver } \vec{U}(\vec{x}) \textit{ tel que} \\ \underline{\underline{\nabla}}\vec{U}(\vec{x}) = \underline{\underline{T}}(\vec{x}) \; \forall \vec{x} \in \Omega \end{cases}$$

admet une solution $\vec{U}$ si et seulement si $\vec{\nabla} \wedge \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{0}}$.

a) En vertu de ce théorème, si le champ $\underline{\underline{S}}$ satisfait la condition $(\star)$, alors l'équation $(\star\star)$ admet une solution. Montrer que l'inconnue de l'équation $(\star\star)$ est le vecteur axial $\vec{A}$ du tenseur antisymétrique $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\nabla}}\vec{U} - \underline{\underline{S}}$:

$$\underline{\underline{\nabla}}\vec{A} = \left(\vec{\nabla} \wedge \underline{\underline{S}}\right)^T$$

La solution de cette équation différentielle, d'inconnue $\vec{A}$, admet une solution grâce à la condition $(\star)$.

b) Le champ recherché $\vec{U}(\vec{x})$ est alors solution de l'équation différentielle :

$$\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} = \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{\eta}}\vec{A}$$

Montrer que cette équation n'a de solution que si :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Vérifier que cette condition est satisfaite grâce à la symétrie de $\underline{\underline{S}}$.

En conclusion, le champ $\vec{U}(\vec{x})$ duquel dérive $\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\vec{U} + (\underline{\underline{\nabla}}\vec{U})^T\right) = \underline{\underline{S}}(\vec{x})$ existe à condition que $\underline{\underline{S}}$ satisfait $(\star)$. Ce champ n'est toutefois pas unique, puisqu'il est défini, comme $\vec{A}$, à un champ vectoriel uniforme près. Les 6 équations formées par la condition $(\star)$, ne faisant intervenir que les dérivées secondes des composantes de $\underline{\underline{S}}$, sont appelées **conditions de compatibilité**.

Exercice 21

Soit une rotation $\underline{\underline{R}}$ d'axe le vecteur unitaire $\vec{n}$ et d'angle θ. Montrer que :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}(q_0, \vec{q}) &= \underline{\underline{1}} + 2q_0\underline{\underline{W}}(\vec{q}) + 2\underline{\underline{W}}^2(\vec{q}) \\ &= 2(q_0^2 - \frac{1}{2})\underline{\underline{1}} + 2q_0\underline{\underline{W}}(\vec{q}) + 2\vec{q} \otimes \vec{q} \end{aligned}$$

$$q_0 = \cos\frac{\theta}{2}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \sin\frac{\theta}{2}\vec{n} \;\text{ et }\; q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

où $\underline{\underline{W}}(\vec{q})$ est le tenseur antisymétrique de vecteur axial $\vec{q}$. Dans $\mathbb{R}^4$, la rotation $\underline{\underline{R}}$ est donc représentée par (q_0, q_1, q_2, q_3) (coordonnées du **quaternion** $q_0 + \vec{q}$ tel que $q_0^2 + \|\vec{q}\|^2 = 1$).

Exercice 22 : tenseur d'élasticité pour un matériau isotrope

Le comportement élastique linéaire d'un matériau peut être décrit par une relation de la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$, exprimant le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction du tenseur symétrique des déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$. En utilisant les théorèmes de représentation, monter que cette relation peut s'écrire sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\varepsilon}}$, avec :

$$\underset{\sim}{H} = c_1 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + c_2 \underline{\underline{1}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\underline{1}}$$

où les c_i sont des constantes.

Exercice 23 : tenseur d'élasticité pour un matériau isotrope transverse

Un matériau isotrope transverse d'axe $\vec{e}$ est un matériau isotrope uniquement dans le plan perpendiculaire à $\vec{e}$. Son comportement élastique linéaire peut être décrit par une relation de la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{e}})$, exprimant le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction du tenseur symétrique des déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et du tenseur $\underline{\underline{e}} = \vec{e} \otimes \vec{e}$. En utilisant les théorèmes de représentation, monter que cette relation peut s'écrire sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \underset{\sim}{H}\underline{\underline{\varepsilon}}$, avec :

$$\underset{\sim}{H} = c_1 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + c_2 \underline{\underline{1}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\underline{1}} + c_3 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{e}} + c_4 \underline{\underline{e}} \otimes \underline{\underline{1}} + c_5 \underline{\underline{e}} \otimes \underline{\underline{e}} + c_6 \left(\underline{\underline{e}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{1}} \,\overline{\otimes}\, \underline{\underline{e}} \right)$$

où les c_i sont des constantes. Pour que $\underset{\sim}{H}$ possède sa symétrie majeure, montrer qu'il suffit d'assurer la condition $c_3 = c_4$.

Exercice 24 : gradients d'une fonction scalaire isotrope

Pour modéliser le comportement non linéaire (plastique, viscoplastique...) des matériaux solides, le gradient d'une fonction scalaire F, isotrope du tenseur symétrique des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, est souvent utilisé pour le calcul des déformations irréversibles. Calculer ce gradient pour les deux triplets d'invariants $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et $(\mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}, \|\underline{\underline{\sigma}}'\|, \theta)$, avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.