Chapitre 5

Intégrale des fonctions mesurables

On va maintenant donner une brève description de la construction de l'intégrale de Lebesgue. L'idée est que, si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et f est la fonction caractéristique d'une partie $A \in \mathcal{A}$, alors on voudrait poser $\int_X f d\mu = \mu(A)$. Une fois qu'on a fait ça, on sait comment intégrer toutes les fonctions qui s'écrivent sous la forme $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$: l'intégrale d'une telle fonction devra être $\sum \alpha_i \mu(A_i)$. Et un procédé de passage à la limite nous permettra d'intégrer encore plus de fonctions - les fonctions pour lesquelles ce processus de passage à la limite fonctionne bien sont les *fonctions mesurables*.

5.1 Intégrale des fonctions mesurables

Dans cette partie, on fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. On commence par le cas particulier des fonctions mesurables à valeurs positives, qui sont exactement les fonctions de la forme

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} \ ,$$

où chaque A_i appartient à $\mathcal{A}$ et $\alpha_i \geq 0$ (attention, éventuellement, un des α_i peut être égal à $+\infty$!). Pour une telle fonction, on pose

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \ .$$

Il faut faire un peu attention, et vérifier que la définition précédente ne dépend pas de la façon dont on écrit f sous la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$...

Ensuite, un procédé de passage à la limite que l'on ne décrira pas ici nous permet de définir l'intégrale d'une fonction mesurable et à valeurs dans $[0, +\infty]$; cette intégrale peut valoir $+\infty$! Puis, en écrivant une fonction mesurable quelconque f sous la forme $f = f^+ - f^-$, on arrive à définir l'intégrale des fonctions mesurables f, à la condition que $\int_X |f| d\mu < +\infty$. On dit que ces fonctions sont *intégrables*.

Etant donnée une partie mesurable $A \subseteq X$, et une fonction mesurable $f \colon X \to \mathbb{R}$,

$$\int_A f d\mu = \int_X f \mathbf{1}_A d\mu.$$

Résumons ici les propriétés de l'intégrale ainsi obtenue, que l'on admettra :

Proposition 5.1. *Pour toutes fonctions mesurables $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ intégrables sur une partie mesurable $A \subseteq X$ on a*

1. $\int_A 1 d\mu = \mu(A)$ *;*
2. *pour toutes constantes réelles α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est également mesurable et intégrable sur A et*

$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu \text{ (linéarité de l'intégrale);}$$

3. *si $f = g$ presque partout, alors $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$;*

4. *si* $f \geq 0$ *presque partout, alors* $\int_A f d\mu \geq 0$ (positivité de l'intégrale) *;*
   si $f \leq g$ *presque partout, alors* $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ (monotonie de l'intégrale) *;*
5. *si* $\mu(A) = 0$ *alors* $\int_A f d\mu = 0$ *;*
6. *si* A_1, A_2 *sont des parties mesurables de* A *telles que* $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$*, alors*
$$\int_{A_1 \cup A_2} f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu \ .$$

On a de plus

7. L'inégalité triangulaire
$$\left| \int_A (f+g) d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu + \int_A |g| d\mu \ .$$

Remarque 5.2. Rappelons que l'intégrale est d'abord définie pour les fonctions mesurables à valeurs positives ($+\infty$ compris) et possède les propriétés ci-dessus pour ces fonctions. Répétons également que, quand on écrit que f est une fonction mesurable de X à valeurs dans l'intervalle fermé $[0, +\infty]$, on entend que $A = \{x \in X \colon f(x) = +\infty\}$ est mesurable, et que pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(I)$ est mesurable. Dans ce cas, l'intégrale de f peut valoir $+\infty$. Si f est intégrable (c.à.d. si $\int_X f d\mu < +\infty$) alors, par monotonie, la partie A où f vaut $+\infty$ est négligeable (c.à.d. $\mu(A) = 0$).

Notons tout de suite le théorème suivant, sur lequel on reviendra un peu plus en détail, et qui dit que la définition de l'intégrale que l'on vient d'esquisser coïncide, dans le cas des fonctions continues, avec celle qui vous connaissiez déjà.

Théorème 5.3. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue telle que* $\displaystyle\int_I |f(x)| dx < +\infty$ *(ici, l'intégrale est au sens de Riemann!). Alors* f *est intégrable au sens de Lebesgue, et on a* $\displaystyle\int_I f(x) dx = \int_I f d\mu$*.*

Proposition 5.4 (Inégalité de Tchebychev)**.** *Soit* $f \colon X \to [0, +\infty]$ *une fonction mesurable. Alors, pour tout* $\alpha > 0$*, on a*
$$\mu(\{x \colon f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu \ .$$

Preuve:

Notons $B = \{x \in X \colon f(x) \geq \alpha\}$. Alors $\alpha \mathbf{1}_B \leq f$ et par monotonie de l'intégrale, on a
$$\alpha \mu(B) \leq \int_X f d\mu \ .$$

Les propriétés de l'intégrale rappelées dans la proposition 5.1 se vérifient directement à partir de la définition de l'intégrale, à l'exception de la linéarité ou plus précisément de la propriété $\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$ qui est un corollaire du théorème de convergence monotone. Pour montrer ce dernier, nous allons utiliser la propriété supplémentaire suivante que nous admettrons. Cette propriété se vérifie tout d'abord pour les fonctions simples positives de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, puis pour toutes les fonctions positives intégrables par le procédé de passage à la limite permettant de définir l'intégrale.

Proposition 5.5 (Mesures à densité)**.** *Soit* $f \colon X \to [0, +\infty]$ *une fonction mesurable. On définit une application* $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *par*
$$\nu(A) = \int_A f d\mu \ .$$
Alors, ν *est une mesure sur* X*, appelée* mesure de densité f *par rapport à* μ*.*

Exemple. On peut définir une mesure de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$ en posant
$$\mu(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2}} d\lambda(x) \ .$$

Cette mesure s'appelle la *mesure gaussienne*.

5.2 Convergence monotone et convergence dominée

Théorème 5.6 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit $f_n\colon X \to [0,+\infty]$ une suite de fonctions mesurables telle pour presque tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ soit une suite croissante. Alors il existe une fonction mesurable $f\colon X \to [0,+\infty]$ telle que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ presque partout, et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \ .$$

Preuve:

On peut supposer que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est une suite croissante (la partie où ce n'est pas le cas étant négligeable). Dans ce cas, pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ a une limite (finie ou infinie) que l'on note $f(x)$. Cette limite f est alors mesurable (voir la preuve de la proposition 4.23 et la remarque 5.2).

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ et donc, par monotonie de l'intégrale, la suite $\int_X f_n d\mu$ a une limite vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \ .$$

Pour l'inégalité réciproque, considérons $\alpha \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $E_n = \{x \in X \colon f_n(x) \geq \alpha f(x)\}$. Alors, par linéarité, chaque E_n est mesurable. De plus, par hypothèse, on a $E_n \subseteq E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. Comme $A \mapsto \int_A \alpha f d\mu$ définie une mesure, on en déduit par la proposition 4.14 4 que

$$\int_X \alpha f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} \alpha f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \ .$$

En faisant tendre α vers 1, on conclut que

$$\int_X \alpha f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \ .$$

Théorème 5.7 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables satisfaisant les hypothèses suivantes :*

1. *Pour presque tout $x \in X$, la suite $f_n(x)$ est convergente vers une limite qu'on appelle $f(x)$.*
2. *Il existe une fonction $g\colon X \to [0,+\infty]$ mesurable et intégrable, telle que pour presque tout x on ait*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors f est intégrable (ainsi que les f_n), et on a

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \ .$$

Rappelons que dans le théorème ci-dessus, il est fondamental que *la fonction g ne dépende pas de n* et que g soit intégrable, c'est-à-dire $\int_X g d\mu < \infty$.

Dans l'énoncé, l'application f est définie presque partout et on la définit par 0 (ou par une fonction mesurable quelconque) sur le complémentaire qui est négligeable. Par la proposition 4.23, la fonction f est mesurable.

Preuve:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n| \leq g$ presque partout et de même $|f| \leq g$ presque partout par passage à la limite. Comme g est intégrable, par monotonie les f_n et f le sont également.

Pour simplifier, on suppose par la suite la convergence simple et les inégalités vraies partout. On pose pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n = \inf_{k\geq n} (2g - |f - f_k|).$$

On peut alors vérifier que les fonctions h_n sont mesurables, positives et majorées par $2g$. De plus, pour tout x, la suite $h_n(x)$ est croissante et converge vers $2g$. Par le théorème de convergence monotone, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X h_n d\mu = \int_X 2g d\mu$.

Par définition, on a pour tout n :

$$\int_X h_n d\mu \leq \int_X (2g - |f - f_n|) d\mu \leq \int_X 2g d\mu \ .$$

Ainsi,

$$\left| \int_X f d\mu - \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \int_X (f - f_n) d\mu \right| \leq \lim_{n \to +\infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0.$$

Ces théorèmes ont pour corollaires les théorèmes analogues d'échanges séries/intégrales et de continuité ou dérivabilité des intégrales à paramètres.

Pour les théorèmes d'échanges séries/intégrales, on applique les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée sur les sommes partielles d'une suite de fonctions et on obtient :

Corollaire 5.8 (Échanges série/intégrale).

1. Si $f_n \colon X \to [0, +\infty]$ est une suite de fonctions mesurables alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement vers une fonction mesurable et

$$\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \ d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu \qquad \text{(convergence monotone).}$$

2. Si $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions mesurables telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$$

alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument pour presque tout $x \in X$ vers une fonction f intégrable, et on a

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu \qquad \text{(convergence dominée).}$$

Discutons quelques exemples.

1. Si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, que vaut l'intégrale dans ce cas ? Pour le comprendre, commençons par le cas d'une fonction positive $f \colon \mathbb{N} \to [0, +\infty[$, et même, par un cas simple, où il existe N tel que $f(n) = 0$ pour tout $n \geq N$. Dans ce cas, f ne prend qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_k$ et on a par définition de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \, |\{p \in \mathbb{N} \colon f(p) = x_i\}|$$

Dans la somme ci-dessus, x_i apparaît exactement autant de fois qu'il existe d'entiers p pour lesquels $f(p) = x_i$; autrement dit, la somme ci-dessus est simplement la somme de toutes les valeurs de f, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{p=0}^{N} f(p) \ .$$

On vient de voir que, au sens de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, on a $\int_N f d\mu = \sum_{p=0}^{+\infty} f(p)$, du moment que f est à valeurs positives et nulle pour n suffisamment grand. Maintenant, si jamais $f \colon \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ est une fonction quelconque, alors on peut considérer la suite (f_N) définie par

$$f_N(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout i fixé, la suite $(f_N(i))$ est croissante vers $f(i)$; on peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour déduire que

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} f(i) = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i) \ .$$

Ainsi, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)$ pour toute fonction positive f ; on en déduit qu'une fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est intégrable si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} |f(i)|$ converge (ou encore la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} f(i)$ est absolument convergente) , et que dans ce cas-là, on a encore $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)$.

Par conséquent, la sommation de séries absolument convergentes peut être vue comme un cas particulier de calcul d'intégrale, relativement à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

2. Supposons maintenant que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré quelconque, $f\colon X \to [0, +\infty]$ est mesurable et ν est la mesure de densité f par rapport à μ. Alors, on sait que, pour toute partie mesurable A, on a

$$\int_X \mathbf{1}_A d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int_X f \mathbf{1}_A d\mu \ .$$

En suivant le même cheminement que ci-dessus (et en admettant le fait que toute fonction mesurable, à valeurs positives, est une limite presque partout de fonctions mesurables, positives et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs) on peut alors montrer qu'on a, pour toute fonction mesurable $g\colon X \to [0, +\infty]$:

$$\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu \ .$$

Cette formule permet de déduire que les fonctions ν-intégrables sont les fonctions $g\colon X \to \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_X f|g| d\mu < +\infty$, et que pour ces fonctions on a aussi $\displaystyle\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu$.

5.3 Comparaison avec l'intégrale de Riemann

La théorie de l'intégrale de Cauchy-Riemann est basée sur la stratégie suivante : d'abord, on définit l'intégrale des fonctions en escalier (qui coïncide avec leur intégrale pour la mesure de Lebesgue). Ensuite, on utilise le fait que toute fonction continue par morceaux f définie sur un segment I est une limite uniforme de fonctions en escalier f_i, et on définit $\displaystyle\int_I f(x)dx = \lim_{i\to+\infty} \int_I f_i(x)dx$.

Comme toute suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée par une constante M, et que les fonctions constantes sont intégrables sur les segments, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que $\displaystyle\int_I f d\lambda = \lim \int_I f_i d\lambda$. Ainsi, on déduit que, pour une fonction continue par morceaux, son intégrale au sens de Riemann et son intégrale au sens de Lebesgue coïncident.

En utilisant le théorème de convergence monotone, on en déduit que l'intégrale généralisée au sens de Riemann d'une application continue positive sur un intervalle ouvert est égale à son intégrale au sens de Lebesgue. Enfin, une fonction continue qui a une intégrale généralisée absolument convergente au sens de Riemann, est également intégrable au sens de Lebesgue et à nouveau par le théorème de convergence dominée, ces intégrales coïncident. Plus précisément :

Théorème 5.9 (Comparaison avec l'intégrale de Riemann)**.** *Les intégrales au sens de Riemann et au sens de Lebesgue coïncident (en particulier) dans les situations suivantes :*

1. *Si $-\infty < a < b < +\infty$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, alors f est intégrable au sens de Riemann et au sens de Lebesgue, et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

2. *Si $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f:]a,b[\to [0,+\infty[$ est une fonction continue par morceaux, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{]a,b[} f d\lambda.$$

(Rappelons que ces intégrales peuvent valoir $+\infty$.)

3. *Si $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux dont l'intégrale généralisée au sens de Riemann est absolument convergente, c'est-à-dire telle que $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$, alors f est intégrable au sens de Lebesgue et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{]a,b[} f d\lambda.$$

5.4 Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres

Dans cette section, on fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (en pratique, X est souvent un borélien de $\mathbb{R}$ ou parfois $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue), et I un intervalle. Étant donnée une fonction $f: X \times I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$ $x \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur X, on peut définir la fonction $F: t \mapsto \int_X f(x,t)d\lambda(x)$. On s'intéresse à des hypothèses sur f permettant de conclure que F est continue, ou dérivable.

Théorème 5.10 (Théorème de continuité des intégrales à paramètres)**.** *Soit $f: X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

1. *Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.*
2. *Il existe une fonction $g: X \to [0,+\infty[$ intégrable et telle que pour tout $t \in I$ on ait $|f(x,t)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$.*
3. *Pour tout t la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable.*

Alors la fonction $F: t \mapsto \displaystyle\int_X f(x,t)d\lambda(x)$ est bien définie et continue sur I.

Remarque 5.11. Dans la deuxième condition ci-dessus, *la fonction g ne dépend pas de t*. Dans les applications, il n'est pas toujours facile de trouver une fonction g satisfaisant les conditions du théorème ! La première condition est, elle, normalement facile à vérifier.

Preuve:

Déjà, notons que, pour tout t fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable et telle que $|f(x,t)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$; comme g est intégrable, on en déduit que $\int_X |f(x,t)|d\lambda(x) \leq \int_X g(x)d\lambda(x) < +\infty$, donc la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable, et F est donc bien définie.
Fixons maintenant $t \in I$. Pour montrer que F est continue en t, on doit vérifier que, pour toute suite (t_n) d'éléments de I qui converge vers t, la suite $F(t_n)$ converge vers $F(t)$. Fixons donc une telle suite (t_n). Par définition, on a $F(t_n) = \displaystyle\int_X f(x,t_n)d\lambda(x)$.
La première hypothèse ci-dessus nous permet d'affirmer que la suite de fonctions $f_n: x \mapsto f(x,t_n)$ est une suite de fonctions mesurables et telle que $f_n(x)$ converge vers $f(x,t)$ pour presque tout $x \in X$; et on a aussi $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout x. Comme g est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\lambda(x) = \int_X f(x,t)d\lambda(x) \ .$$

On vient de montrer que $F(t_n) = \int_X f_n(x)d\lambda(x)$ converge vers $F(t)$, ce qui prouve que F est bien continue en t.

Remarque 5.12. En regardant la preuve, on voit que si, dans les hypothèses du théorème, on avait remplacé « pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I »par « pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue en un certain $t_0 \in I$ »(en laissant les autres hypothèses inchangées), alors on aurait pu conclure que F est continue en t_0.

Par ailleurs, notons que si X et I sont des segments, et f est une fonction continue, alors f est bornée, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $|f(x,t)| \leq M$ pour tout $(x,t) \in X \times I$. Comme les fonctions constantes sont intégrables sur les segments, on voit qu'on peut poser $g(x) = M$ et appliquer le théorème de continuité : si X et I sont des segments, et f est une fonction continue des deux variables (x,t), alors F est continue. Ce corollaire du théorème de continuité peut se démontrer simplement sans utiliser le théorème de convergence dominée.

Théorème 5.13 (Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres)**.** *Soit $f\colon X \to I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

1. *Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur X.*
2. *Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I (on note sa dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$).*
3. *Il existe une fonction $g\colon X \to [0,+\infty[$ intégrable et telle que pour tout $t \in I$ et tout $x \in X$ on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.*
4. *Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est mesurable.*

Alors la fonction $F\colon t \mapsto \displaystyle\int_X f(x,t)d\lambda(x)$ est bien définie sur I, dérivable, et on a pour tout $t \in I$ que

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\lambda(x) \ .$$

Remarque 5.14. En fait, le théorème reste vrai si l'on remplace la première hypothèse par le fait qu'il existe un $t \in I$ tel que $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I (bien sûr, on doit toujours supposer que cette fonction est mesurable pour tout $t \in I$).

Remarque 5.15. Si on ajoute l'hypothèse selon laquelle la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est continue sur I pour presque tout $x \in X$, alors le théorème de continuité des intégrales à paramètres nous permet de conclure que F' est continue sur I, c'est-à-dire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Preuve:

Fixons $t \in I$. Pour vérifier que F est dérivable en t, on doit étudier le taux d'accroissement de F en t ; fixons donc une suite (t_n) d'éléments de I différents de t, et considérons le taux d'accroissement

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\lambda(x) \ .$$

Comme dans la preuve du théorème de continuité, considérons la suite de fonctions $f_n\colon x \mapsto \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$. Le fait que $t \mapsto f(x,t)$ soit dérivable en t pour presque tout $x \in X$ nous dit que $f_n(x)$ converge vers $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ pour presque tout $x \in X$. De plus, l'inégalité des accroissements finis nous dit que, pour presque tout $x \in X$, on a

$$\left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\right| \leq \sup_{s \in [t_n,t]} \frac{\partial f}{\partial t}(x,s) \leq g(x) \ .$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite f_n pour conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)d\lambda(x) = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n(x)d\lambda(x) \ .$$

Autrement dit, on a montré que $\dfrac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t}$ converge vers $\displaystyle\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\lambda(x)$ quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que F est dérivable en t et $F'(t) = \displaystyle\int_X \lim_{n \to +\infty} f_n(x)d\lambda(x)$.