# Biomed :

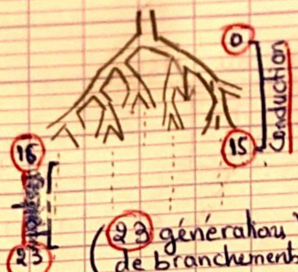
Mode de transport

Convectif : $\rightarrow$ ↑↑

Diffusif : ↑↑ $\rightarrow$

Poumons
- Trachée ← [2 cm de diamètre ; 12 cm de longueur]
- Bronches
- Branchioles
- Acinus ← [L'unité d'⇔ du poumon située entre les générations 15 et 23 de l'arbre aérien.]
- Alvéole

Siège des ⇔ gazeux en contact avec des vaisseaux sanguins




(23 générations de branchements)

- 300 Millions ds le corps humain par poumon
- Sphère de $d = 1/4$ mm
- Surface totale occupée par alvéoles : 100 m²

Au bout de chacune des 30.000 branchioles, il y a un acinus (6 mm de coté)

⇓

Génération 15 +

↳ 30.000 acinis (ds un poum)

(1/8 subacinus 3 mm de coté)

Nos besoins en $O_2$ :

$$\boxed{\phi = \frac{D}{\varepsilon} \times \beta \, \Delta P}$$

- $\phi$ : flux en $mol.cm^{-2}.s^{-1}$
- $D$ : diff $O_2$ en $cm^2/s$
- $\varepsilon$ : epaisseur membr.
- $\beta$ : cst Henry
- $\Delta P$ : diff de $P_{part.}$ en $O_2$

$\phi \simeq 4 \times 10^{-8} \, mol \, cm^{-2} s^{-1}$

$V_{O_2, max} = 40 \, ml \, min^{-1} . kg^{-1}$

!! Surface totale occupée par les alvéole $= \frac{V_{O_2, max}}{\phi} \simeq 60 \, m^2$

or la membrane alvéolaire qui sépare l'air et le sang présente une résistance donc on prend 100 m².

Viscosité $\eta$ en $kg \, m^{-1} s^{-1}$

Géométrie modèle fractal :

Dimension fractal :

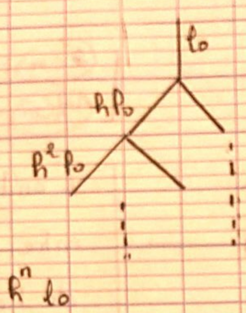
$$\boxed{N = m^D}$$

- $N$ : N° de copies, combien on a d'unité
- $m$ : zoom de longueur unité ds une ligne
- $D$ : dimension

Dimension fractal d'un flocon de neige :

$4 = 3^D \Rightarrow \boxed{D = 1{,}26}$

## Dimension fractale d'un arbre

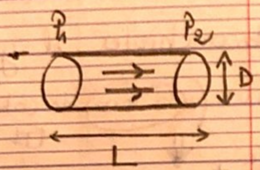



$$L_n = h^n L_0$$

$$L_{total} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n h^n L_0 = \frac{L_0}{1-2h} \quad , h < 1/2$$

$$2 = \left(\frac{1}{h}\right)^D \Rightarrow \boxed{D = \frac{\ln 2}{\ln(1/h)}} \quad , h < 1/2$$

## Loi de Murray-Hess :



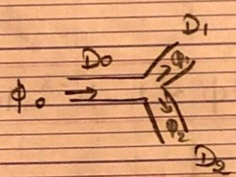

$$\boxed{\varphi = \frac{P_1 - P_2}{R_H}} \qquad \boxed{R_H = \frac{128\eta}{\pi} \cdot \frac{L}{D^4}}$$

$R_H$ : Pa.s.m$^{-3}$ — Résistance hydrolique.

Section du vaisseau.

$$\boxed{E = \alpha V + R\phi^2 = \alpha L D^2 + \beta \frac{L}{D^4}\varphi^2}$$

$$0 = 2\alpha V L D - 4\beta \frac{L}{D^5}\varphi^2$$




$$\begin{cases} \phi_0 = \phi_1 + \phi_2 \\ \phi_i = K D_i^3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D_0^3 = D_1^3 + D_2^3} \Rightarrow \boxed{h_c = \frac{D_1}{D_0} \simeq 0{,}79}$$

Bon système →
- Petit volume
- faible résistance des voies aériennes
- faible temps de transfert.

## Ecoulement de Poiseuille :

$$\boxed{\phi = \Delta P \cdot \frac{\pi r^4}{8\eta \ell}} \rightarrow \boxed{R = \frac{8\eta\ell}{\pi r^4}}$$

1 branche

$$\boxed{V = \pi r^2 \ell}$$

**Volume mort :**

$$\boxed{V = \sum_{n=0}^{N} 2^n \left(\frac{\pi D_n^2}{4} L_n\right) = V_0 \sum_{n=0}^{N} (2h^3)^n}$$

**Résistance des voies aériennes :**

$$\boxed{R = \frac{128\eta}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{L_n}{D_n^4} = R_0 \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2h^3)^n}}$$

**Temps de transit :**

$T = \frac{L}{v} = \frac{L.S}{\Phi}$ ($\Phi$ : débit)

$$\boxed{\tau = \sum_{n=0}^{N} \frac{L_n}{U_n} = \tau_0 \sum_{n=0}^{N} 2^n h^{3n}}$$

$\boxed{\tau_0 = 0{,}06\,s}$ $\boxed{\tau(h = h_c) = 1\,s}$

$D_{k+1} = h\, D_k$

↳ Rapport de taille entre les bronches optimal : $\boxed{0{,}79 = 2^{-1/3}}$

↳ Humain : 0,85

**Equation de Navier-Stokes :**

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{u}}$$

Conservation de la masse : $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0}$

**Equation maîtresse en notation matricielle :**

* **Reversibilité micro :** $\boxed{\frac{\Pi(t+dt) - \Pi(t)}{dt} = M \cdot \Pi(t)}$

  $M$ : matrice symétrique

**Processus de Markov :** Processus sans mémoire où l'état du système à $t+dt$ ne dépend que de son état à $t$ et pas de son histoire

* **Irreversibilité macro :** $\Pi(t) = \exp(M\,t)\, \Pi(0)$

## Distribution uniforme des configurations :

N particules, combien de répartition $(K, N-K)$ ? $C_N^k$

Probabilité de voir K à gauche ? $P_K = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{N-K} = \frac{C_N^k}{2^N}$

## Entropie : S

↳ positive / additive

↳ A l' ⇔ ne doit dépendre que du W (nombre de micro-états du système) $\boxed{S = S(W)}$

↳ $\boxed{S(W_1 W_2) = S(W_1) + S(W_2)}$

$$\Rightarrow \boxed{S = k \ln(W)}$$

Pr un système composé d'un mélange d'états, chaque état possédant une probabilité $p_i$ d'apparition : $\boxed{S = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i)}$

Théorème H : "Pr un système isolé, l'entropie est une fct ↑ en fct du tps. Elle atteint le max à l' ⇔"

## Principe du désordre maximal :

Pr un système macroscopique pouvant atteindre W micro-états l'entropie maximale est atteinte pr : $\boxed{p_1 = p_2 = \dots = p_W = \frac{1}{W}}$

$$\boxed{S = k_B \ln(W)}$$

## Equations de chaleur :

Courant de chaleur : $\boxed{\vec{J_\varphi} = -K \vec{\nabla} T}$

Equation de chaleur : $\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -k \, \Delta T}$

Loi de Fick : $\boxed{\vec{J_D} = -D \vec{\nabla} C}$

En stationnaire : $\boxed{\Delta T = 0}$
(Laplace)

Molécule d'air parcourt 0,3 μm avant de rencontrer une autre

**Probabilité de collision :**

$$\boxed{dP = \frac{dt}{\tau}}$$

Probabilité de vol sans choc durant un temps t : P(t) :

$$P(t+dt) = P(t)\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)$$

**Coefficient de diffusion :**

$$\boxed{D = \frac{a^2}{2d\tau}}$$

Relation de Stokes-Einstein :

$$\boxed{D = \frac{k_B T}{4\pi r \eta}}$$

**L'équation de diffusion :**

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = D \times \Delta P}$$

perméabilité w → interface air-sang

Air alvéolaire $\Delta C = 0$

Entrée du subacinus $C = C_{entr.}$

**Diffusion moléculaire :**

$$\boxed{J = w(C - C_{blood})} = -w\Delta C$$

courant de diffusion

$$\boxed{\Lambda = \frac{D}{w}}$$

$D$ : m²/s ; $w$ : m/s

$\Lambda$ : longueur de périmètre non écrantée.

$\boxed{\Delta C = 0}$, ds le volume

$\boxed{\frac{\partial C}{\partial n} = -\frac{C}{\Lambda}}$, sur la surface alvéolaire ; condit° limites d'une membrane à $w < +\infty$

$\boxed{C = C_0}$, Entrée de l'acinus. ($C$ : m³)

$w = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial C}{\partial n} = 0} \Rightarrow$ Membrane imperméable

$w = +\infty \Rightarrow \boxed{C = 0} \Rightarrow$ Membrane transparente, absorbante

$0 < w < +\infty \Rightarrow$ Membrane non parfaite / non imperméable

- **Dans le subacinus humain :**

$L_p = \frac{A}{L} \Rightarrow \boxed{L_p \simeq 30\,cm}$

$\Lambda = \frac{D}{w} \Rightarrow \boxed{\Lambda \simeq 28\,cm}$

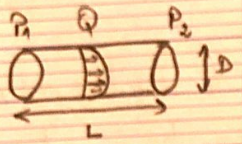
(*) Longueur d'exploration $\Rightarrow \boxed{L_{exp} = 28\,cm}$

(*) Longueur parcourue avant d'être absorbée

Longueur de coupe $\Rightarrow \boxed{L_{coupe} = 30\,cm}$

- Efficacité de l'acinus : 
  - Repos : $\boxed{\eta = 40\%}$
  - Exercice : $\boxed{\eta = 85\%}$

L'écoulement de Poiseuille :




$$\boxed{Q = \frac{P_1 - P_2}{R_H}}$$

- Résistance des voies aériennes :

$$\boxed{R_H = \frac{128\,\eta}{\pi}\,\frac{L}{D^4}}$$

- Volume des voies aériennes :

$$\boxed{V = \frac{\pi D^2}{4} L}$$

Courbe débit - volume :

La courbe débit - volume maximale permet de détecter :

- Collapsus bronchique
- Rigidification des voies aériennes
- Obstruction

Pression alvéolaire et pleurale :

$$\boxed{P_{alv} = P_{PL} + P_R} \leftarrow \text{pression de rétraction}$$

$$P_{alv} = P_m \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\left(\frac{V_L - RV}{CV}\right) - R_T\,\Phi$$

- $P_m$ : 24 KPa — $P_{max}$
- $\tau$ : 0,2 s — Constante de tps des muscles respiratoires
- $R_T$ : 28 - 50 Pa.s/L — Résistance des tissus thoracique

Equation de Navier Stokes stationnaire :

$$\boxed{\rho\,(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u} = \eta\,\Delta\vec{u} - \vec{\nabla} p}$$

écoulement incompressible : $\boxed{\operatorname{div}\vec{u} = 0}$

Frottement de stokes : $\boxed{F_{stokes} = 3\pi\eta\, d_p\,(\vec{u} - \vec{u_p})}$

• Efficacité de l'acinus : → Repos : $\boxed{\eta = 40\%}$

Pa.s   m s⁻¹   proportionnelle à la vitesse

Nombre de Reynolds : $\boxed{Re = \frac{\rho U L}{\eta}}$   kg.m⁻³

Nombre de Stokes : $\boxed{S_t = \frac{\rho_p \, d_p^2 \, U}{18 \eta D}}$

$\boxed{S_t \simeq 3 \times 10^{-4} \, d_p^2}$   ($d_p$ en µm)

temps pr traverser un domaine D (diamètre) : $\boxed{\tau_t = \frac{D}{U}}$

temps de réponse au bout duquel $\vec{u}_p \simeq \vec{u}$ : $\boxed{\tau_r = \frac{\rho_p \, d_p^2}{18 \eta}}$

Si $\tau_r \ll \tau_t$ ⇒ Particule capturée

$\boxed{S_t > 1}$ capturée   $\boxed{S_t < 1}$ non capturée   $\boxed{S_t = \frac{\tau_r}{\tau_t}}$

$\boxed{S_{t_i} = \frac{1}{2h^3} S_{t_{i-1}}}$ →
- $2h^3 < 1$ ⇒ plus dur après la 1ère bifurcation
- $2h^3 > 1$ ⇒ plus facile

Notes TD :

Vitesse thermique :

$\frac{1}{2} m_{mol} \, v_{th}^2 = \frac{3}{2} k_B T$ , $\boxed{k_B = \frac{1}{40} \, eV = 25 \, meV}$

temps de collision :

$t = \frac{\lambda}{v_{th}}$ ← libre parcours moyen ds l'air 0,3 µm

$\boxed{t_{coll} \simeq 10^{-10} \, s}$

Courant des particules :

$\boxed{\vec{J} = \vec{J}_{dér} + \vec{J}_{diff}}$

dû à la chute par pesanteur $C \vec{v}$   dû à l'agitation microscopique $-D \vec{\nabla} C$

Equation d'état :

$$\boxed{\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} = \frac{k_B T}{m}}$$

Comment calculer D macroscopiquement :

D peut se déduire en regardant la trajectoire individuelle brownienne d'une particule et en mesurant le rapport $r^2/t$

Vitesse d'écoulement de l'air ds la trachée dans la respiration au repos : 1m/s

Cellule humaine : entre 5 et 50 µm.

Coefficient de diffusion de l'air :

Combien y a-t-il de branche dans le ~~corps~~ poumon humain ? 15

$2^5 = 32$

$2^{10} = 1024$

$$\text{Débit} = \frac{\text{Volume}}{t} \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{dS} = \underset{\text{vitesse}}{v}$$

$$Pa = N \cdot m^{-1}$$

- fluide incompressible ≡ $\rho$ = cte
- stationnaire ≡ indépendant du temps.

$$\vec{\Delta}\,\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

* <u>Navier-stokes</u> : $\frac{d\rho\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t} + \overbrace{(\vec{u}.\vec{\nabla})(\rho\vec{u})}^{\text{accélération convective}} = \underbrace{-\vec{\nabla}P}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\mu\Delta\vec{u}}_{\text{frottement visqueux}} + \overbrace{\vec{f}}^{\text{force volumique}}$

$\cdot\ \phi = \frac{\Delta P}{R_H} = \frac{\overset{\text{entrée}}{P_1} - \overset{\text{sortie}}{P_2}}{R_H}$ $\quad \cdot\ \phi = \int v \cdot ds$

Rechercher $R_H$

Conditions limites : → Sans glissement : vitesse (R) = 0
→ ~~Avant glissement~~
→ Symétrie du centre du canal : accéle = 0

* Taille typique d'une cellule : 10 µm

* <u>Cylindre</u> → $S = 2\pi r h$
→ $V = h\pi r^2$

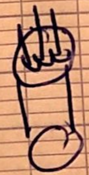
<u>Sphère</u> → $S = 4/3\ \pi r^3$
→ $V = 4\pi r^2$

<u>Cercle</u> → $S = \pi r^2$
→ $P = 2\pi r$.

* $\boxed{V = e . S}$
épaisseur de ce qu'on couvre avec la surface.

* $\boxed{\varphi_n = \frac{\varphi_0}{2^n}}$
débit

$\varphi = S\, U_n$
Surface du cercle



* Pour chercher $U_n$ en fct de $U_0$ :
on calcule $\varphi_n$ de 2 façons → $\varphi_n = \frac{\varphi_0}{2^n} = \frac{S_0 U_0}{2^n}$
→ $\varphi_n = S_n \times U_n$

* Relation de diffusion : $\boxed{\tau = \frac{L^2}{2dD}}$
temps
distance parcourue
dimension
coefficient de diffusion

figure fractale = objet mathématique qui présente une structure similaire à toutes les échelles

- la superficie de la surface d'échange entre air et sang constituée par la membrane alvéolo-capillaire :
$10^6$ $cm^2$ / 100 $m^2$

- Combien y-a-t-il d'alvéoles pulmonaire

total: 300 Millions.

dans un acinus: 10 000

- Pr faire la distinction maligne / bénigne entre deux tumeurs d'allure similaire sur une image : Module de cisaillement.

- La manoeuvre d'expiration forcée en exploration fonctionnelle respiratoire a pr objectif de :
tester la mécanique des bronches en situation de limitation de débit.

$\mu(air) = 18,5 \times 10^{6}$ Pa.s

$d(air) = \frac{\rho_f}{\rho_{eau}}$

$$\pi = 22/7$$

- Volume d'une alvéole 800 $\mu m^3$

- Volume total des poumons ou / capacité thoracique moyenne chez l'adulte : 3,5 à 4 l (2 poumons)

- Courant de diffusion : $\vec{J} = -D\,\vec{\nabla} C$

- $S = k_B \ln(W)$ = l'entropie d'un système isolé à l'équilibre.

- Particule se déplace dans un fluide immobile :
$$m_p \frac{d\vec{u_p}}{dt} = \cancel{-3\pi\eta d_p}\ \vec{F}$$

(écoulement stationnaire)

- Si le fluide a une vitesse indépendante du tps :
$$\cancel{m_p}\ \frac{d(\vec{u_p} - \vec{u})}{dt} = -\frac{(\vec{u_p} - \vec{u})}{\tau}$$

Résistance hydrodynamique = perte de charge subit par un fluide s'écoulant ds une conduite.