TD 1 - Calcul Intégral

13 Septembre 2022

Exercice 1

On définit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\forall\, n \geq 1,\ x_n = n^{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Calculer $\overline{\lim}\ x_n$ et $\underline{\lim}\ x_n$.

Exercice 2

1. On considère la suite $(b_n)_n$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ b_{2n} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad b_{2n+1} = -1 + \frac{1}{n+1}$$

   On pose $\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_n =]-\infty\,,\, b_n]$. Calculer $\overline{\lim}\ B_n$ et $\underline{\lim}\ B_n$.
2. Soient X un ensemble non-vide (quelconque) et $F, G, H \in \mathcal{P}(X)$. On considère $(A_n)_n$ la suite de $\mathcal{P}(X)$ définie par :

$$A_{3n} = F \ \ ; \ \ A_{3n+1} = G \ \ ; \ \ A_{3n+2} = H$$

   Calculer $\overline{\lim}\ A_n$ et $\underline{\lim}\ A_n$.

Exercice 3

Soit $f\colon X \to Y$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

1. f est surjective.
2. $\forall\, B \in \mathcal{P}(Y),\ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. $\forall\, A \in \mathcal{P}(X),\ \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

Exercice 4

Soient X un ensemble non-vide et $(A_n)_n$ une suite de $\mathcal{P}(X)$.

1. Calculer $\mathbf{1}_{\bigcap_{n\geq 0} A_n},\ \mathbf{1}_{\bigcup_{n\geq 0} A_n}, \mathbf{1}_{\overline{\lim}\ A_n},\ \mathbf{1}_{\underline{\lim}\ A_n}$ à l'aide de $\mathbf{1}_{A_n}$.
2. En déduire que $(\overline{\lim}\ A_n)^c = \underline{\lim}\,(A_n^c)$.
3. Montrer que $\overline{\lim}\ A_n = \left\{ \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{A_n} = +\infty \right\}$, et en déduire que $\underline{\lim}\ A_n = \left\{ \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{A_n^c} < +\infty \right\}$

Exercice 5

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction càdlàg et croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.
Définition : Une fonction f est dite **càdlàg** (continue à droite, limite à gauche) lorsque f est continue à droite en tout point et admet une limite finie en tout point à gauche.