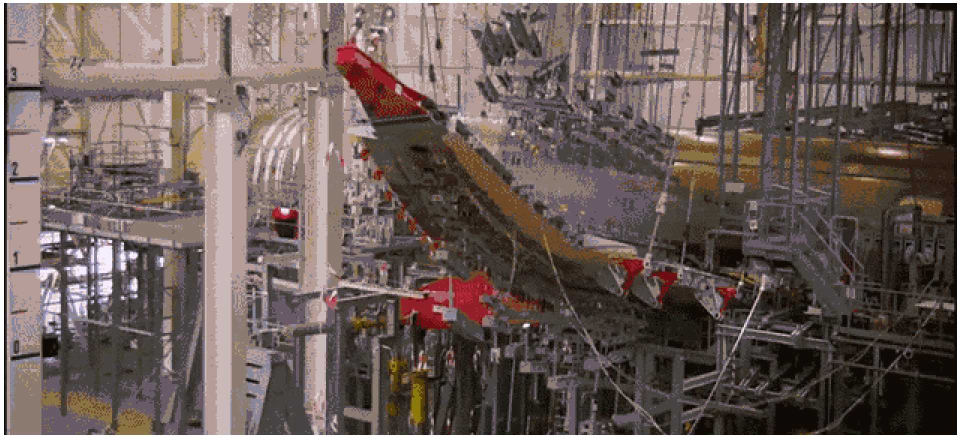


材料力学

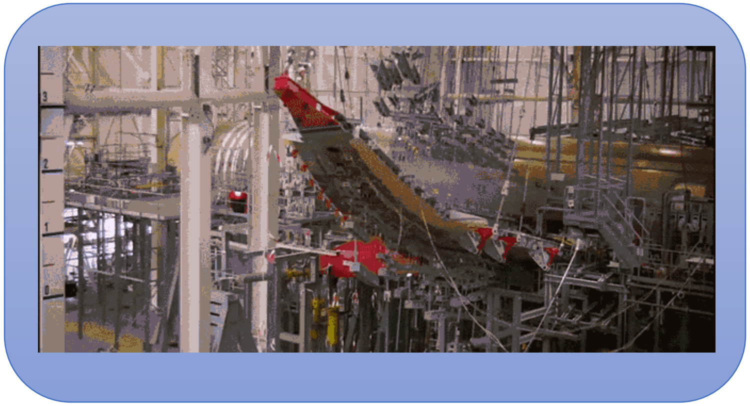
第 六 章 强度理论

任 课 教 师 ： 孙 金 煜

Q Q ： 2 4 9 8 2 6 9 4 3

邮箱：249826943@qq.com

答 疑 时 间 ： 周 二 中 午



强度理论

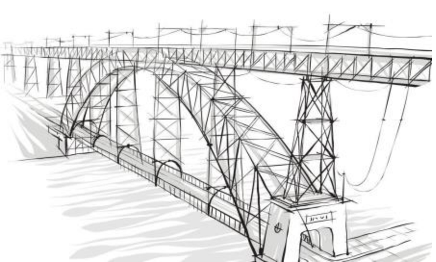
复杂应力状态下失效

最大拉应力理论（断裂）

最大拉应变理论（断裂）

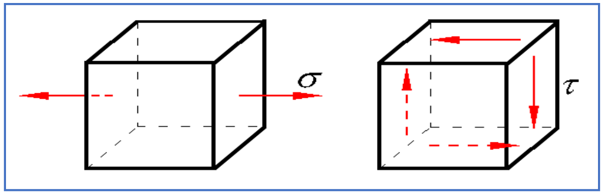
最大切应力理论（屈服）

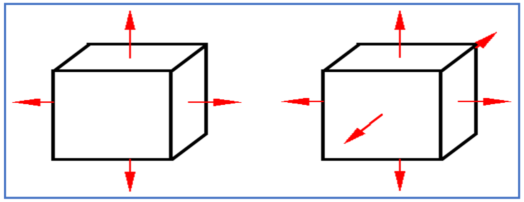
畸变能理论（屈服）



单向应力与纯剪切

一般复杂应力状态



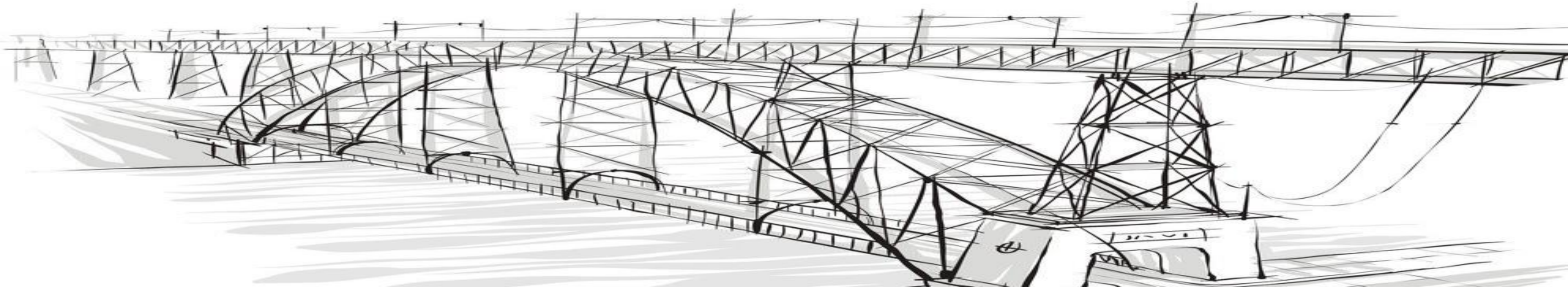


$$\sigma_{max} \le \frac{\sigma_u}{n} \qquad \tau_{max} \le \frac{\tau_u}{n}$$

σ_u，τ_u 由试验测定

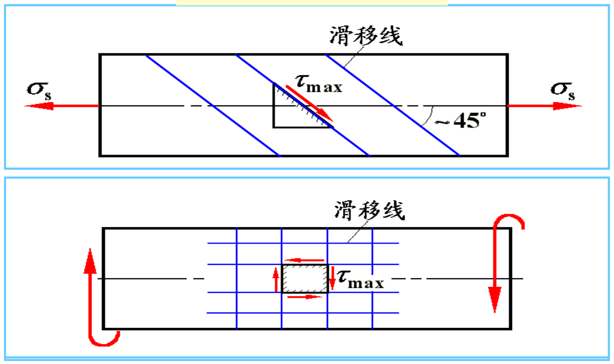
每种比值情况下的极限应力，很难全由试验测定

本节研究：材料在静态复杂应力状态下的破坏或失效的规律，及其在构件强度分析中的应用

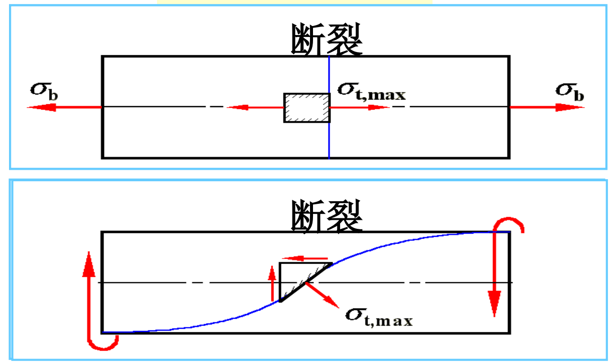


破坏形式与原因?

塑性材料



脆性材料



❶ 屈服或滑移—可能是τ_{max}过大所引起

❷ 断裂—可能是 $\sigma_{t,max}$ 或$\varepsilon_{t,max}$过大所引起

强度理论:　关于材料在静态复杂应力状态下破坏或失效规律的学说或假说

❐ 最大拉应力理论（第一强度理论）

理论要点

- 引起材料断裂的主要因素—最大拉应力σ_1
- 不论材料处于何种应力状态，只要最大拉应力σ_1达到材料单向拉伸断裂时的最大拉应力σ_{1u}（即σ_b），材料即发生断裂

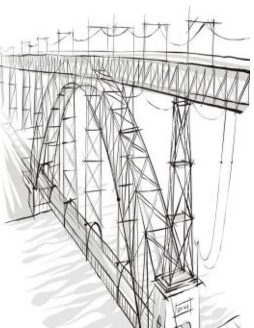
$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_b}$$ —材料的断裂条件

强度条件

$$\sigma_1 \le \frac{\sigma_b}{n} \qquad \boxed{\sigma_1 \le [\sigma]} \qquad [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}$$

σ_1 — 构件危险点处的最大拉应力

$[\sigma]$ — 材料单向拉伸时的许用应力



❐ 最大拉应变理论（第二强度理论）

理论要点

- 引起材料断裂的主要因素—最大拉应变 ε_1
- 不论材料处于何种应力状态，当 $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1u,单拉}$ 时，材料断裂。

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

单向拉伸断裂时：

$$\sigma_1 = \sigma_b \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

故 $\varepsilon_{1u,单拉} = \dfrac{\sigma_b}{E}$

$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$ －材料的断裂条件

强度条件

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — 构件危险点处的工作应力

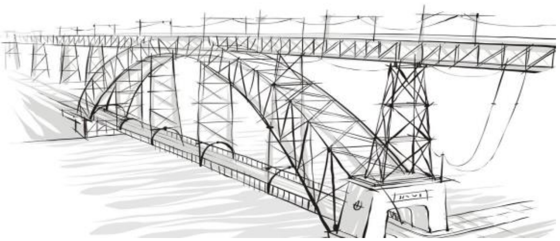
$[\sigma]=\sigma/n$— 材料单向拉伸时的许用应力

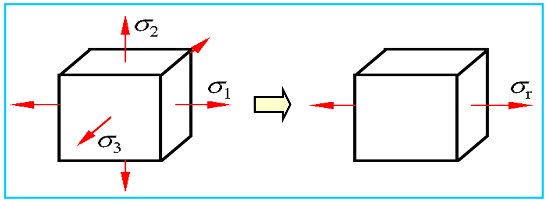
$$\sigma_{r,2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

σ_r －相当应力或折算应力

$$\sigma_{r,2} \le [\sigma]$$

σ_{r2}—第二强度理论的相当应力





在促使材料破坏或失效方面，与复杂应力状态应力等效的单向应力

最大切应力理论（第三强度理论）

理论要点

- 引起材料屈服的主要因素—最大切应力 τ_{max}
- 不论材料处于何种应力状态，当 $\tau_{max} = \tau_{s,单拉}$ 时, 材料屈服。

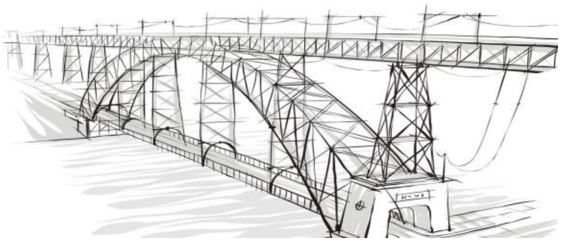
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \qquad \tau_{s,单拉} = \frac{\sigma_s - 0}{2} = \frac{\sigma_s}{2}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

－材料的屈服条件

强度条件

$$\sigma_{r,3} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$$



σ_1 , σ_3 — 构件危险点处的工作应力

$[\sigma]$ — 材料单向拉伸时的许用应力

❐ 畸变能理论（第四强度理论）

畸变能强度理论要点

- 引起材料屈服的主要因素—畸变能, 其密度为 v_d
- 不论材料处于何种应力状态，当 $v_d = v_{ds,单拉}$ 时, 材料屈服

$$v_d = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] \qquad v_{ds,单拉} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_s^2$$

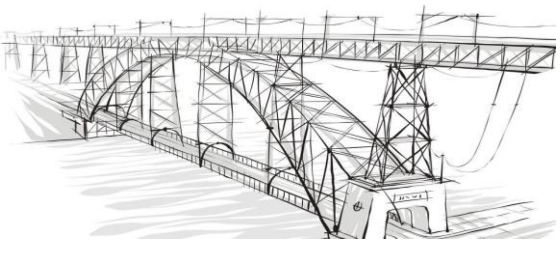
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \sigma_s$$ –屈服条件

强度条件

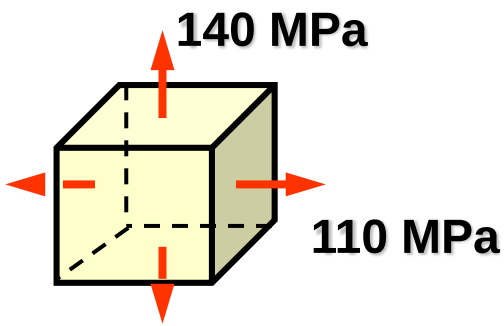
$$\sigma_{r4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \le [\sigma]$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — 构件危险点处的工作应力

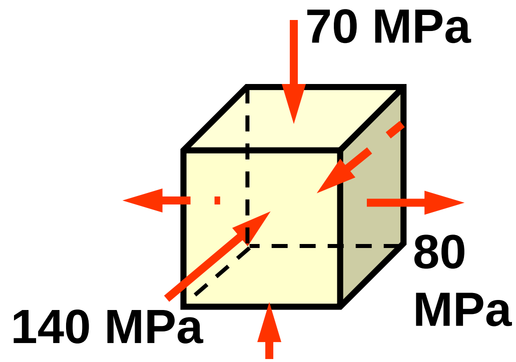
$[\sigma]$ — 材料单向拉伸时的许用应力



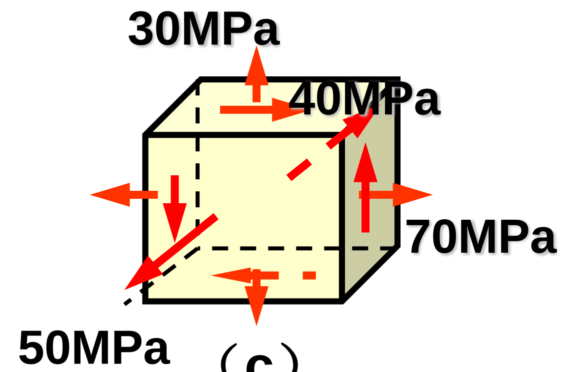
对于图示各单元体,试分别按第三强度理论及第四强度理论求相当应力.



（a）



（b）



（c）

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$$

解： （1）单元体（a）

$$\sigma_1=140\text{MPa}\qquad \sigma_2=110\text{MPa}\qquad \sigma_3=0$$

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=140\text{MPa}$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[30^2+110^2+(-140)^2]}=128\text{MPa}$$

（2）单元体（b）

$$\sigma_1=80\text{MPa}\qquad \sigma_2=\text{-}70\text{MPa}\qquad \sigma_3=\text{-}140\text{MPa}$$

$$\sigma_{r3}=220\text{MPa}\qquad \sigma_{r4}=195\text{MPa}$$

（3）单元体（c）

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{70+30}{2}\pm\sqrt{(\frac{70-30}{2})^2+40^2}=\left\{\begin{matrix}94.72\\ 5.28\end{matrix}\right.$$

$$\sigma_1=94.72\text{MPa}\qquad \sigma_2=\sigma_z=50\text{MPa}$$

$$\sigma_3=5.28\text{MPa}$$

$$\sigma_{r3}=89.44\text{MPa}$$

$$\sigma_{r4}=77.5\text{MPa}$$

❐ 强度理论的选用

● **一般情况**

脆性材料：抵抗断裂的能力 < 抵抗滑移的能力

塑性材料：抵抗滑移的能力 < 抵抗断裂的能力

第一与第二强度理论，一般适用于脆性材料

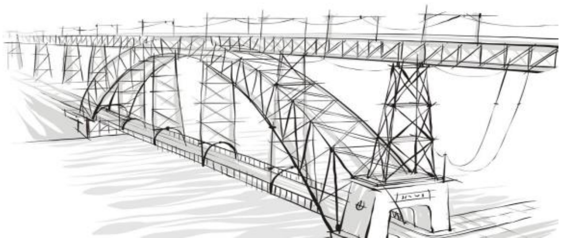
第三与第四强度理论，一般适用于塑性材料

● **全面考虑**

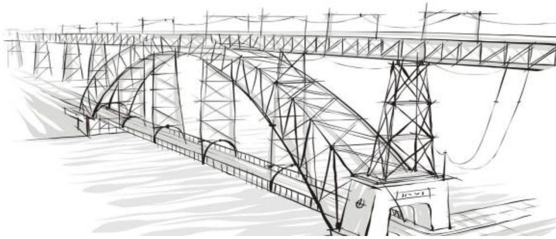
材料的失效形式，不仅与材料性质有关，而且与应力状态形式、温度与加载速率等有关

低碳钢, 三向等拉, $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 0$, 断裂

低碳钢, 低温断裂



□ 一种常见应力状态的强度条件



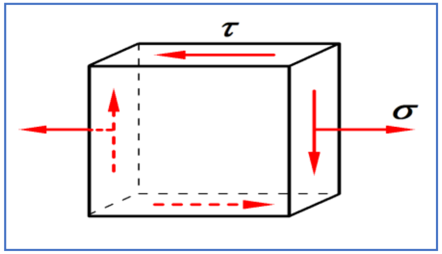
单向、纯剪切联合作用

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

$$\sigma_x=\sigma,\quad \tau_x=\tau,\quad \sigma_y=0$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma+0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\frac{1}{2}\left(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)\qquad \sigma_2=0$$



塑性材料：$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\le[\sigma]$　　$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\le[\sigma]$

□ 纯剪切许用应力

纯剪切情况下（$\sigma=0$）

$$\sigma_{r3}=2\tau\le[\sigma]$$

$$\tau\le\frac{[\sigma]}{2}$$

$$[\tau]=\frac{[\sigma]}{2}$$

塑性材料：

$$\sigma_{r4}=\sqrt{3}\tau\le[\sigma]$$

$$\tau\le\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

$$[\tau]=\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

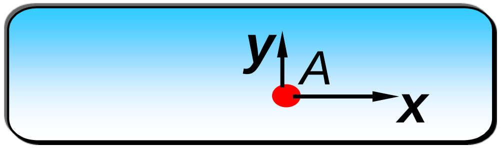
$$[\tau]=(0.5\sim0.577)[\sigma]$$

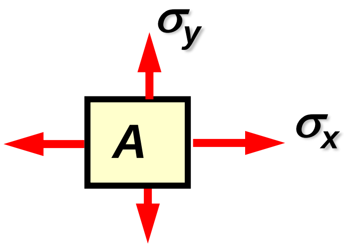
$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3\le[\sigma]$$

$$\sigma_x=\frac{pD}{4\delta}$$

$$\sigma_t=\frac{pD}{2\delta}$$

例题14 薄壁圆筒受最大内压时,测得ε_x=1.88×10^{-4},ε_y=7.37×10^{-4},已知钢的E=210GPa,[σ]=170MPa,泊松比μ=0.3,试用第三强度理论校核其**强度**.





解:由广义胡克定律

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)=\frac{2.1}{1-0.3^2}(1.88+0.3\times7.37)\times10^7=94.4\text{MPa}$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)=\frac{2.1}{1-0.3^2}(7.37+0.3\times1.88)\times10^7=183.1\text{MPa}$$

主应力 $\sigma_1=183.1\text{MPa},\quad \sigma_2=94.4\text{MPa},\quad \sigma_3=0$

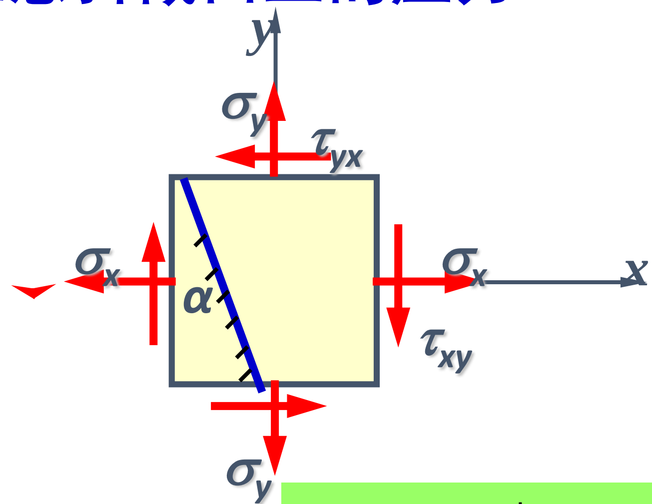
$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=183.1\text{MPa}>[\sigma]$$

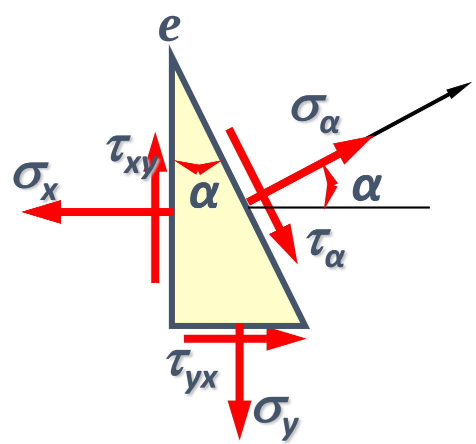
$$\frac{\sigma_{r3}-[\sigma]}{[\sigma]}=\frac{183.1-170}{170}=7.7\%$$

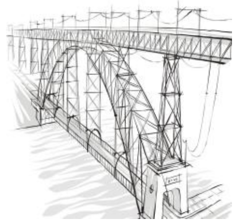
不安全

小结

1 任意斜截面上的应力：



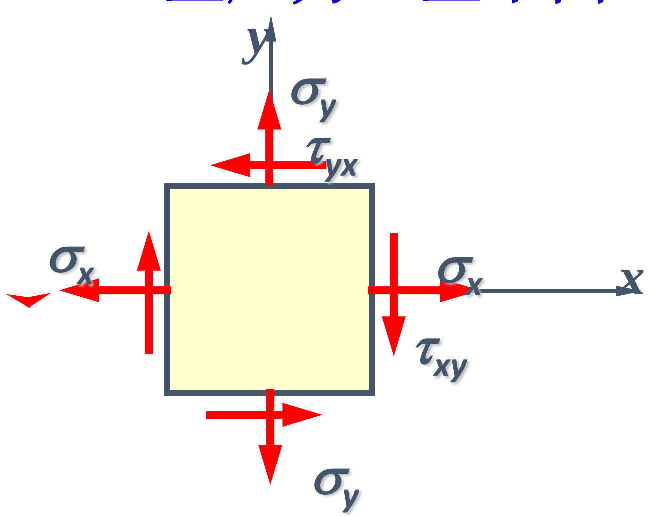




$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

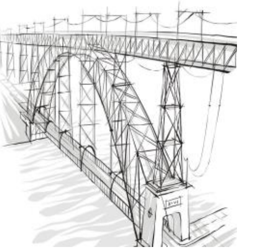
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

2 主应力、主平面：

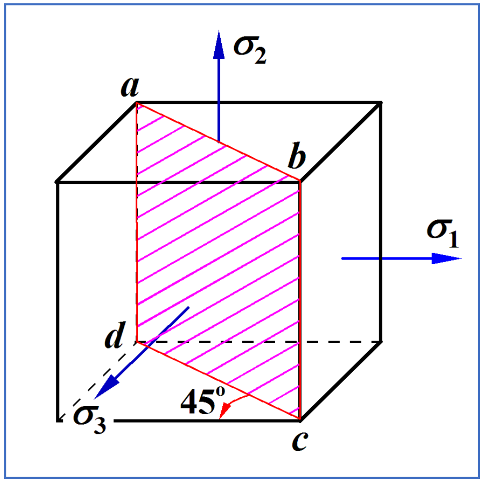


$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$ α_0 、 $\alpha_0 + 90^0$



3. 最大切应力



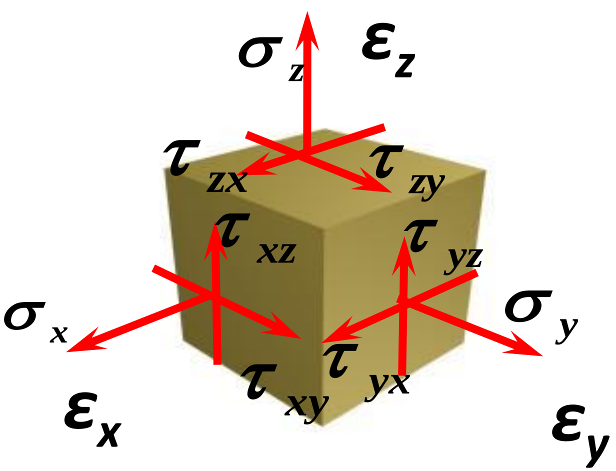
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

最大切应力截面位置:

与 σ_2 所在平面垂直

与 σ_1 及 σ_3 所在平面均成45°

4. 广义胡克定律



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

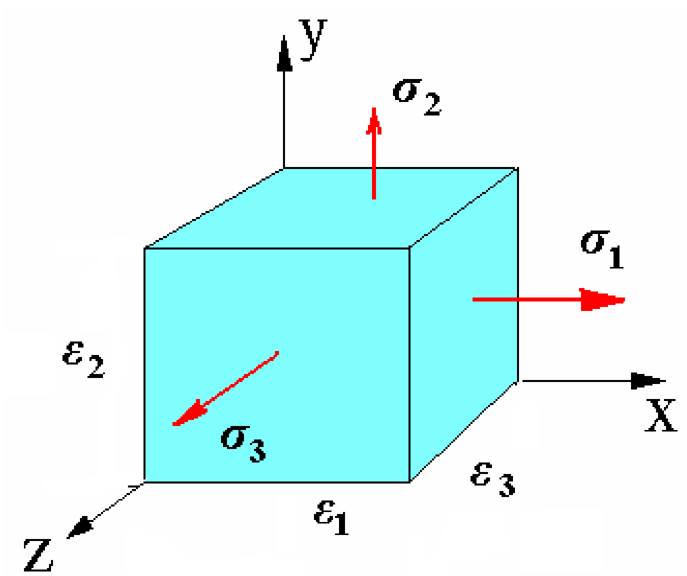
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

—广义胡克定律



5. 强度理论

$\boxed{\sigma_r \le [\sigma]}$ σ_r –相当应力或折算应力

$\boxed{\sigma_{r,1} = \sigma_1}$

$\boxed{\sigma_{r,2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}$

$$\sigma_{r,3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

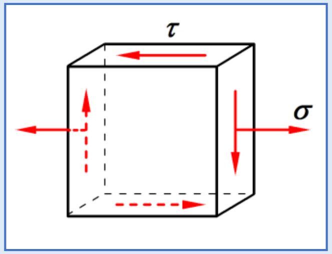
第一与第二强度理论，一般适用于脆性材料

第三与第四强度理论，一般适用于塑性材料

6.一种常见应力状态的强度条件

单向、纯剪切联合作用

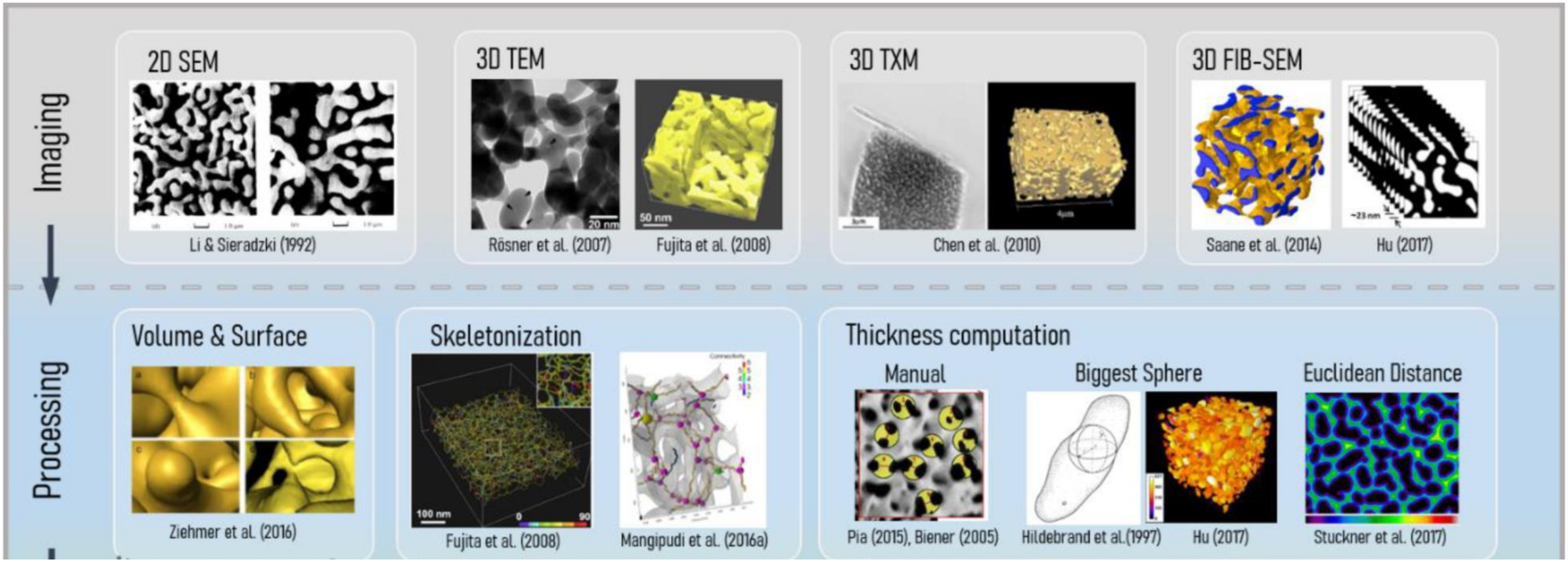
塑性材料：



$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]$$

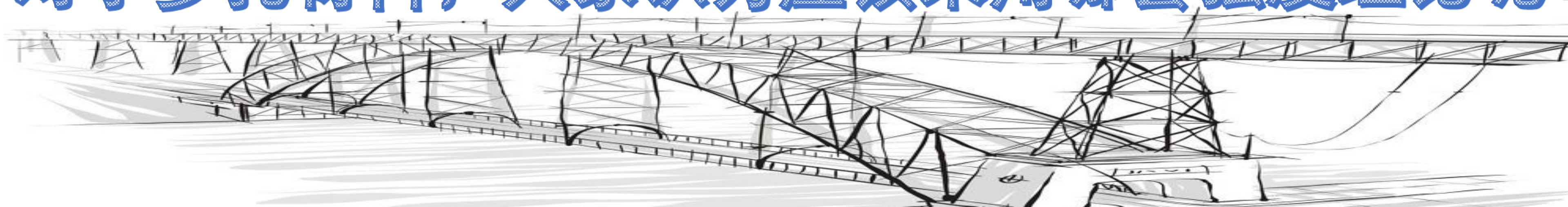
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]$$

纳米多孔金属微机械模型



Claudia Richert， Norbert Huber . A Review of Experimentally Informed Micromechanical Modeling of Nanoporous Metals: From Structural Descriptors to Predictive Structure–Property Relationships[J]. Materials 2020, 13, 3307; doi:10.3390/ma13153307

对于多孔材料，大家认为应该采用哪套强度理论呢？



谢谢大家！