99 级《数学分析（上)》期中考试试卷 1999 年 11 月 29 日

一、(14 分)

求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^n$

(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

二、(8 分)

用定义证明 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ 在 $x=2$ 处连续。

三、(8 分)

计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$。

四、(14 分)

证明收敛数列 $\{x_n\}$ 至少达到它的上确界和下确界中的一个。

五、(14 分)

设 $x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$，利用“单调有界必有极限”证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

六、(14 分)

叙述并证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在（且有限）的 Cauchy 收敛原理。

七、(14 分)

设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<b$，t_1，t_2 是任意两个正实数，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，满足

$$t_1f(x_1)+t_2(x_2)=(t_1+t_2)f(\xi)\text{ 。}$$

八、(14 分)

设连续函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上单调有界，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。