3.7. Доказать, что при ортогональном преобразовании сохраняется расстояние между точками.

1) Линейное преобразование на плоскости:

$X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$

$Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$

ортогонально если:

$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \quad a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} = 0$

$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

пусть $M_1(x, y)$ и $M_2(x_2, y_2)$ ортогонально преобразованы в $M_1'(x_1', y_1')$ и $M_2'(x_2', y_2') \Rightarrow M_1M_2 = M_1'M_2'$

$|M_1'M_2'|^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2$, где $x_2' = a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}$

$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}$

$y_2' = a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}$

$y_1' = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}$

$(a_{11}x_2 + a_{12}y_2 - a_{11}x_1 - a_{12}y_1)^2 + (a_{21}x_2 + a_{22}y_2 - a_{21}x_1 - a_{22}y_2)^2 =$

$[a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1)]^2 + [a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1)]^2 =$

$a_{11}^2(x_2 - x_1)^2 + 2a_{11}a_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + a_{12}^2(y_2 - y_1)^2 + a_{21}^2(x_2 - x_1)^2 + 2a_{21}a_{22}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) +$

$+ a_{22}^2(y_2 - y_1)^2 =$

$= \underbrace{(a_{11}^2 + a_{21}^2)}_{1}(x_2 - x_1)^2 + \underbrace{(a_{12}^2 + a_{22}^2)}_{1}(y_2 - y_1)^2 + 2\underbrace{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}_{0}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) =$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |M_1M_2|^2$

$|M_1'M_2'|^2 = |M_1M_2|^2$