第五章 二次型

1️⃣、求二次型矩阵及其秩

练习

1）写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2x_3+x_3^2$ 所对应的矩阵。

2）写出矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&-2\\3&-2&-1\end{pmatrix}$ 所对应的二次型。

例2 设

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&2\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

问 $f(x_1,x_2,x_3)$是否为二次型?

如果是,写出 $f(x_1,x_2,x_3)$所对应的矩阵A。

例 3 求下面的二次型所对应的矩阵：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

例4 写出下面二次型f的矩阵表示，并求f的秩r(f)。

$$f=x_1^2+5x_2^2+9x_3^3+6x_1x_2+10x_1x_3+14x_2x_3$$

2、合同变换求二次型的标准型

用合同变换化二次型为标准型

例5 化二次型 $f = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2^2$ 为标准型

例6 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，

求非退化矩阵C，使 $C^T AC$为对角阵

例7. 用合同变换化二次型为标准形

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

3、配方法求二次型的标准型

用配方法化二次型为标准形

例8 化二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ 为标准形，并写出所作的线性变换。

例9 化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形，并写出所作的线性变换。