第四章

1、已知矩阵求特征值与特征向量

第九讲

- 例4.1 设

$$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$$

- 求A的特征值与特征向量.

第九讲

- 例4.3 设

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

- 求A的特征值与特征向量.

2、矩阵每行元素相同求特征值

例 设 n 阶矩阵 A 的任何一行元素的和都是 a，求 A 的一个特征值与特征向量 .

第九讲

(5) A 的各行元素之和均等于2,则 A有一个特征值是___, 它对应的特征向量是______。

3、已知矩阵等式、证明特征值

例4 设矩阵A满足$A^2=A$，证明：A的特征值λ只能是0和1.(重点题型)

第九讲

例4.5 设方阵A满足$A^2=E$,证明
(1) A的特征值为1或-1.
(2) $4E-3A$可逆.

4、矩阵特征值与行列式关系

4. 设n阶方阵$A=(a_{ij})$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则有

(1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$;

(2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr(A)$

第九讲

- **例4.6 设三阶方阵A的1, -2, 4. 求$|A^*+3A-2E|$**

(4) $|A|=0$， A 有一个特征值为______.

$|A+E|=0$， A有一个特征值为______.

（7）已知三阶矩阵A的特征值为 1，—1， 2，则｜$A-5E$｜=（　　　）。

5、矩阵可逆与特征值关系

.

（6）设A是3阶方阵，已知方阵$E-A$， $E+A$， $3E-A$都不可逆，则A的特征值为（　　　　　　　）.

6️⃣、矩阵的对角化

例4　判断下列实矩阵能否化为对角阵?

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

例4.13 设方阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$$

- 的特征方程有一个**二重根**，讨论a取何值时A能对角化，并给出一个可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.

7️⃣、利用特值、特向求矩阵

1. 由特征值、特征向量反求矩阵

例3：已知方阵 A的特征值是 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$,

相应的特征向量是 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

求矩阵 A.

7️⃣、求矩阵的方幂

2. 求方阵的幂

例5：设 $A=\begin{pmatrix}4&-5\\2&-3\end{pmatrix}$, **求** A^{100}.

[LINEAR ALGEBRA]　线性代数　　第九讲

例4.15 设方阵

$$A=\begin{pmatrix}0.9&0.4\\0.1&0.6\end{pmatrix}$$

- 且$x_k=Ax_{k-1}$, $k=1,2,\ldots$, 当 $x_0=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$

时, 计算x_k,并确定时$k\to\infty$, x_k的变化趋势.

8、实际问题

例5 金融机构为保证现金充分支付, 设立一笔总额1亿的基金, 分开放置在位于A城和B城的两家公司, 基金在平时可以使用, 但每周末结算时必须确保总额仍然为5400万. 经过相当长的一段时期的现金流动, 发现每过一周, 各公司的支付基金在流通过程中多数还留在自己的公司内, 而A城公司有10%支付基金流动到B城公司, B城公司则有40%支付基金流动到A城公司. 起初A城公司基金为0. 5亿, B城公司基金为0. 5亿. 按此规律, 两公司支付基金数额变化趋势如何?

例 6 环境污染与经济发展，对于这两个问题的讨论是世界上恒久不变的主题. 设某地区的环境污染程度为 x_0，经济发展水平为 y_0，数年以后二者的发展程度为 x_t, y_t 有如下的关系式:

$$\begin{cases} x_t = 3x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = 2x_{t-1} + 2y_{t-1} \end{cases}，其中\ \alpha_0 = \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

按此规律，环境污染与经济发展变化趋势如何?