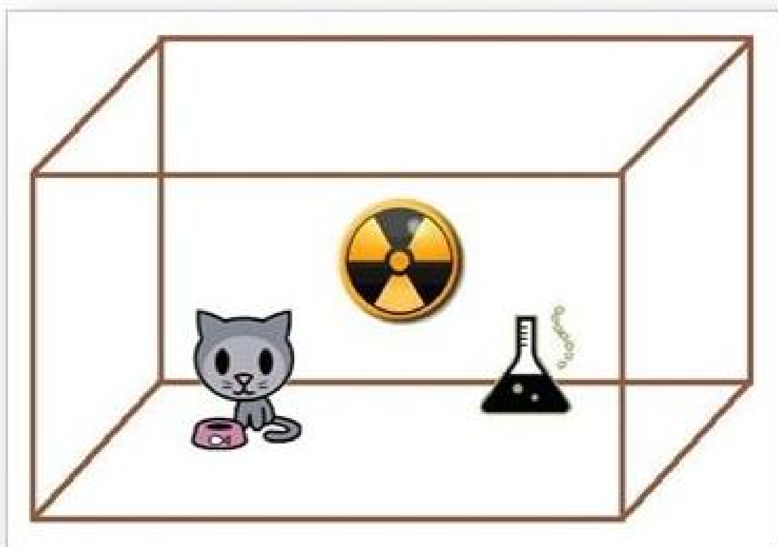
第22章　量子物理基本概念

(Basic Concepts Quantum Mechanics)



第二十二章 量子物理的基本概念

【教学内容】

1. 量子概念的诞生

主要介绍由黑体辐射实验引出的普朗克公式以及其提出的能量子的概念。

2. 光的粒子性的提出

主要讲授光电效应的实验现象以及爱因斯坦利用光量子对其做出的解释。

3. 康普顿散射

介绍 X 射线通过物质后的散射情况，并利用量子理论进行解释。

4. 粒子的波动性

主要介绍德布罗意提出的物质波的概念，并通过戴维逊-革末实验对其进行了证明。

5. 概率波与概率幅

主要介绍对德布罗意物质波的统计解释，并引出物质波的波函数，提出概率幅的概念。

6. 不确定关系

主要介绍海森伯不确定关系及其意义。

7. 薛定谔方程

主要介绍薛定谔方程及其意义，以及波函数的三个标准条件。

8. 无限深方势阱中的粒子

主要介绍利用薛定谔方程求解这个势场下粒子的波函数。

9. 势垒穿透

主要介绍微观粒子势垒穿透的现象，以及其重要的应用。

【教学目标】

1. 掌握能量子、物质波等重要概念。
2. 掌握不确定关系及其计算。
3. 了解薛定谔方程及其意义。
4. 了解势垒穿透的现象及其解释。

【重点、难点】

1. 重点：物质波的概念，不确定关系计算，薛定谔方程。
2. 难点：物质波的概念。

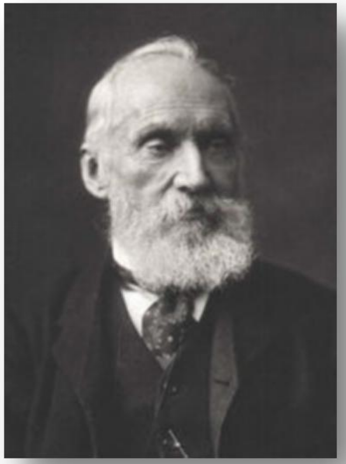
【教学方法】 讲授法、讨论法、案例法、实验法

【学时安排】 3 学时

§22.1 量子概念的诞生

物理学的大厦已经建成，未来的物理学家只需要做些修修补补的工作就行了。

——[英]威廉. 汤姆生



W. Thomson
(1824—1907)

他在展望20世纪物理学前景时，却讲道：物理学美丽而晴朗的天空却被两朵“乌云”笼罩：

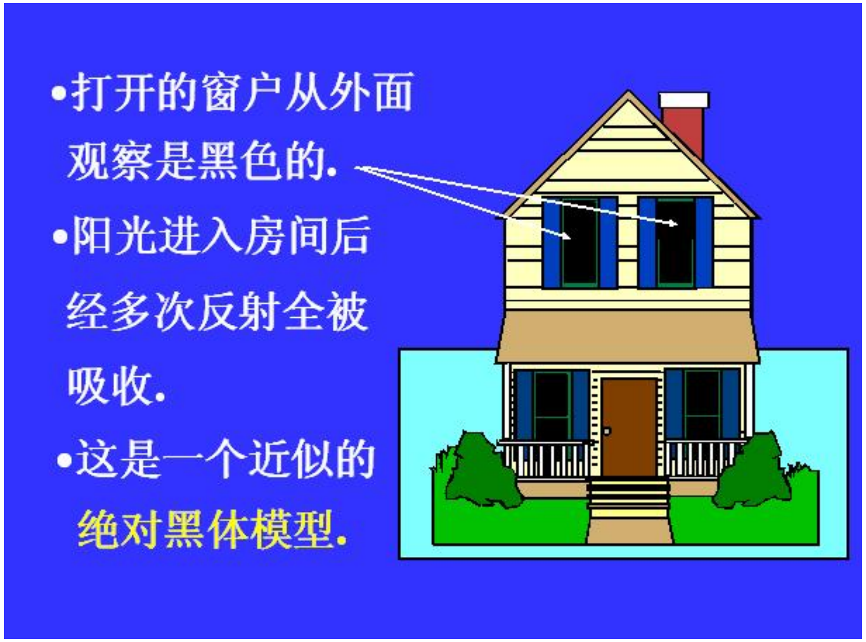
- “以太漂移”，迈克尔逊—莫雷实验表明，以太不存在。
- “紫外灾难”，由经典理论得出的瑞利—金斯公式，在高频部分趋于无穷。

正是这两朵乌云，不久便掀起了物理学上深刻的革命：一个导致相对论的建立，一个导致量子力学的诞生。

一、量子假说根据之一：黑体辐射

黑体——能完全吸收各种波长电磁波而无反射或折射的物体。且只与温度有关，而和材料及表面状态无关 。

若一个物体在任何温度下，对于任何波长的入射电磁波都吸收而无反射，则它被称为绝对黑体——简称黑体。

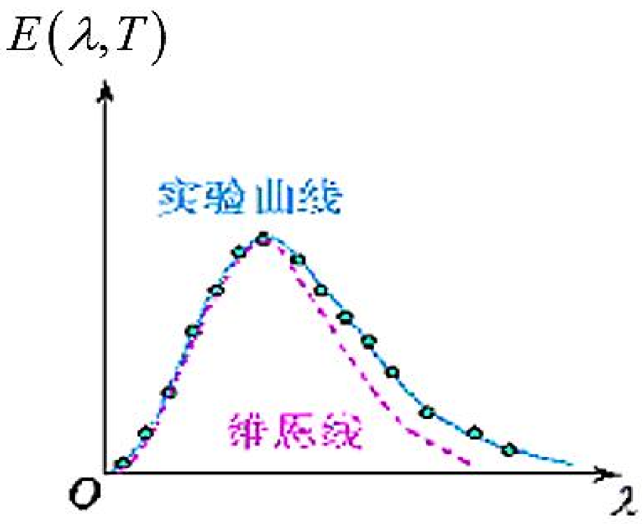


1、维恩位移定律

$$\boxed{\lambda_{\max}T = b}$$

维恩经验公式：

$$\boxed{E(\omega,T) = C_1\omega^3 e^{-C_2\omega/T}}$$

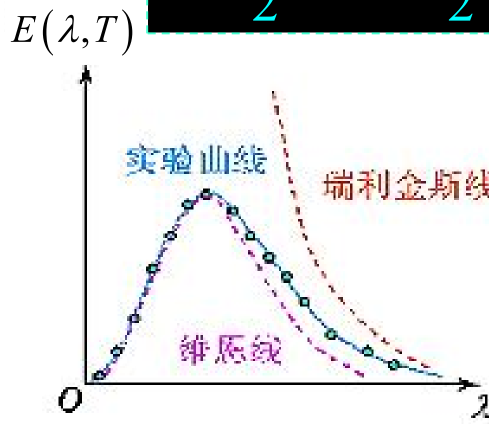


在波长比较短、温度比较低时符合

2、瑞利—金斯公式

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

金斯用波动理论求得单位体积内$(\omega, \omega + d\omega)$电磁振动模式数



$$N(d\omega)=\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}d\omega$$

瑞利将经典能均分定理用于热辐射场：每一个电磁振动模式相当于一个简谐振子，具有平均能量kT，则

$$E(\omega,T)d\omega=\frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}d\omega$$

在波长比较长、温度比较高时适用

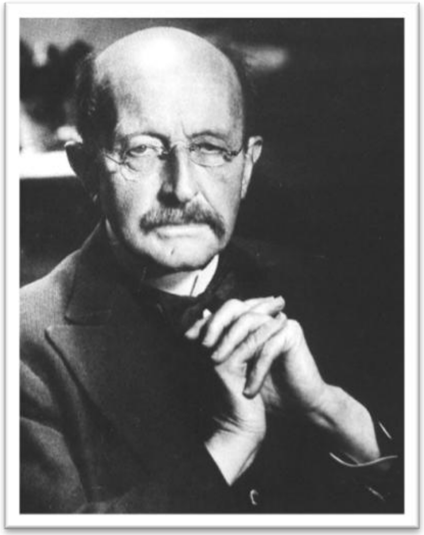
当 $\omega\to\infty$ 时，引起发散，E 趋于无穷大，即所谓的“紫外灾难”。

3、普朗克公式

$$\boxed{E(\omega,T)=\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}}$$

$$k_B=1.346\times10^{-23}J/K$$

$$h=6.62606896\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$$



Max Planck
(1858～1947)

$\hbar\omega \ll k_BT$:　$$E(\omega,T)\approx\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}k_BT$$ 瑞利—金斯公式

$\hbar\omega \gg k_BT$:　$$E(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}e^{-\hbar\omega/k_BT}$$ 维恩公式

普朗克假设： 物体只能以 $h\nu$ 为单位吸收或发射电磁波，即以“**量子**”的方式进行，每一份能量叫做一个**能量子**。

$$\boxed{E = h\nu = \hbar\omega}$$

“经典”过程

“量子”过程

正因为普朗克在能量子学说与经典物理是如此不同，因此在普朗克公式正式提出后5年内，没有人对其加以理会！

直到1905年，才由爱因斯坦作了发展，提出了光量子说支持普朗克的量子论。

普朗克因对量子的发现而推动物理学的发展

The Nobel Prize in Physics 1918

§22.2 光的粒子性的提出——光电效应

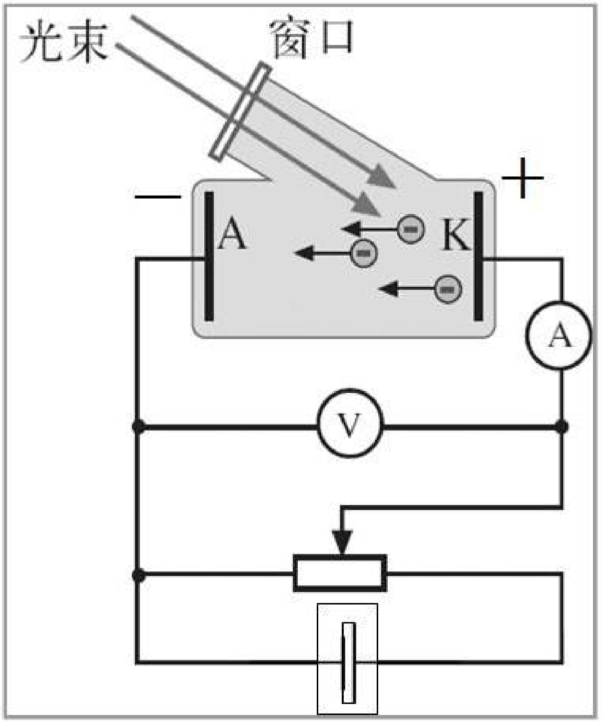
1、光电效应的发现

- 1887年，赫兹（Hertz）发现电磁波，并确定其速度。

- 1888年，霍尔瓦希斯（Hallwachs）发现锌板在紫外线照射下产生电荷。

- 1900年，勒纳德（Lenard）实验证明，金属在紫外线照射下发射电子。

2、光电效应的实验规律



经典物理理解：电子吸收光波能量脱离原子束缚。

光电子能量：

$$W=\frac{1}{2}mv_m^2+\phi=eV_0+\phi$$

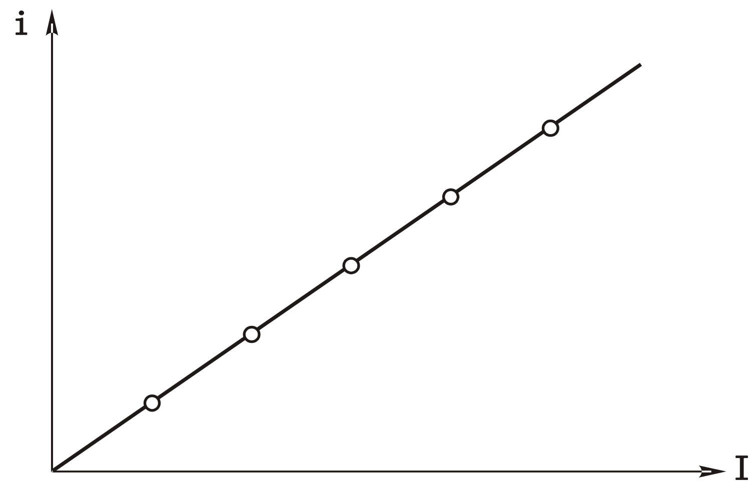
预言：W与光强有关，与频率无关；

光频率ν　光强I　光电流i

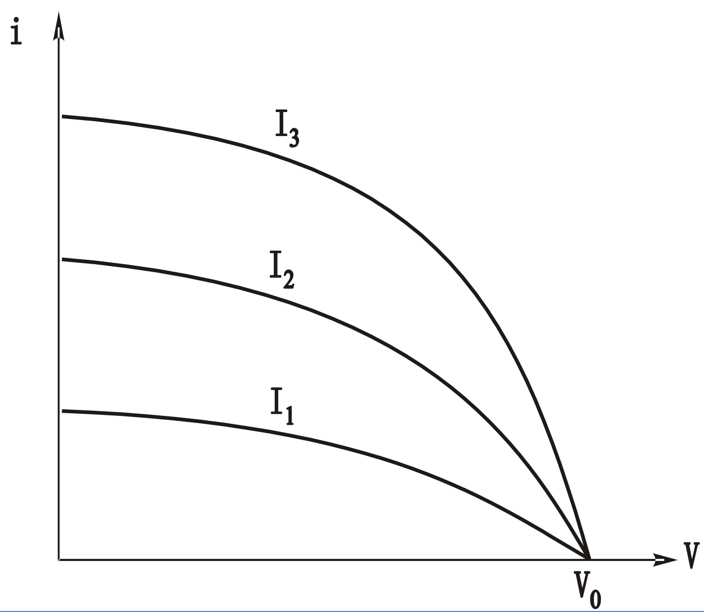
减速势V　遏止电压：V_0

预言：W与光强有关，因此只要时间足够长，一定能产生光电子。

（1）实验结果



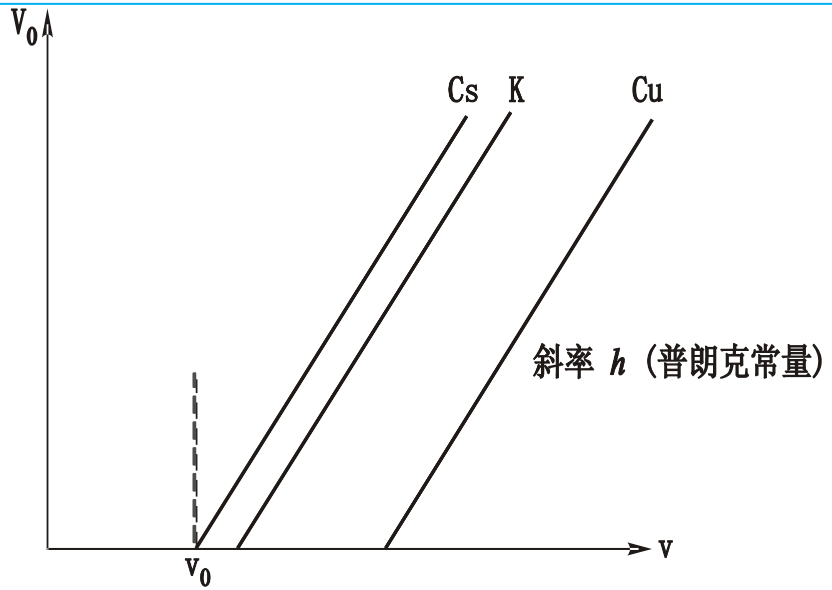
A、固定频率和减速势，光电流i与光强I成正比。



B、固定频率，光电流i随减速势V的增加而减小，但对于不同的I，有相同的V_0。

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_m^2 = eV_0}$$

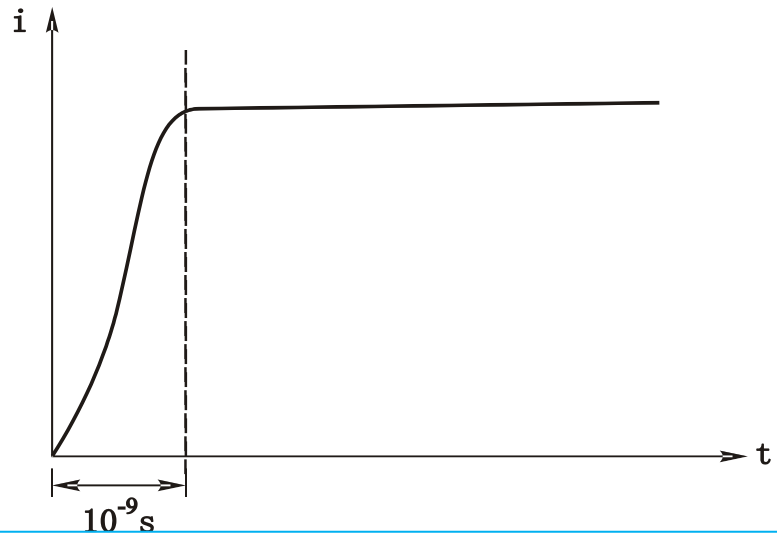
与入射光强无关—光电子的最大能量与光强无关！



C、遏止电压V_0依赖于光的频率（线性关系）而与光强无关。

截止频率或红限频率

只有当入射光频率ν大于一定的频ν_0时，才会产生光电效应，光电子的能量只与光的频率有关，与光强无关，光频率越高，光电子能量越大。



D、固定光强和频率，响应时间非常快。几乎在光照的同时产生电流。$(t < 10^{-9}\text{s})$

估算：光强为$1\,\mu\text{W/m}^2$照射金属钠(500W灯泡照射在6.3km外的)钠金属板)。一平方米上单层有10^{19}个钠原子，假设被10层原子吸收，则每个原子得到能量：

$$E \approx 10^{-26}\text{W} = 10^{-26}\text{J/s} \approx 10^{-7}\text{eV/s}$$

要获得1eV能量需要$10^7\text{s} \approx 116\text{d}$

3、光电效应的经典解释

$$W=\frac{1}{2}mv_m^2+\phi=eV_0+\phi$$

矛盾一： 经典的W与光强有关，与频率无关；而光电效应的W与光强无关，与频率有关。

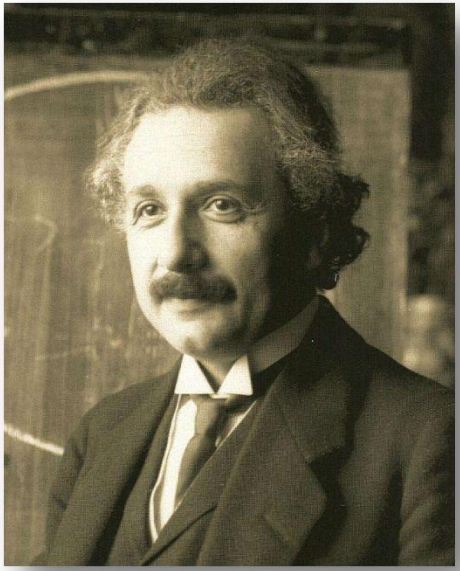
矛盾二： 经典的决定光电子能量的是光强，因此只要时间足够长，一定能产生光电子；而光电效应必须在ν大于一定的频率ν_0时，才会产生光电效应 。

矛盾三： 经典的驰豫时间10^{7}s；光电效应的不超过10^{-9}s

经典物理理论无法解释光电效应实验结果！

4、光电效应的量子解释

1905年爱因斯坦发展了普朗克的量子说，认为辐射场是由光量子（光子）组成，能量是量子化的。



Albert Einstein
(1879～1955)

$$\boxed{E_\gamma = h\upsilon = \hbar\omega}$$

爱因斯坦公式：

$$\boxed{h\upsilon = \frac{1}{2}mv^2 + \phi = eV_o + \phi}$$

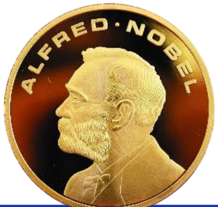
- 光电子获得能量与光强无关，与频率有关；
- 遏止电压与频率成线性关系；
- 当入射光频率ν大于频率ν_0时，才会产生光电效应。

1905: $\boxed{E_\gamma = h\upsilon}$　　1917: $\boxed{\lambda = \dfrac{h}{p_\gamma}}$

光子既有**能量**又有**动量**，即光子具有**粒子的特性**！

爱因斯坦提出光量子假说与传统经典物理相**对立**，长时间未能被物理学界接受，直到1916年密立根发表了他从1904年开始历经10多年的实验结果验证了光量子假说，证实了爱因斯坦光电方程的正确性，并测定普朗克常数，光子论渐渐才被广为承认。

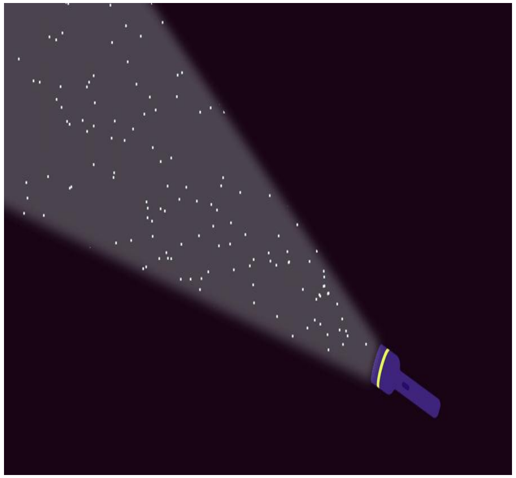
爱因斯坦因对理论物理学的成就，特别是光电效应定律的发现



The Nobel Prize in Physics 1921

§22.4 粒子的波动性

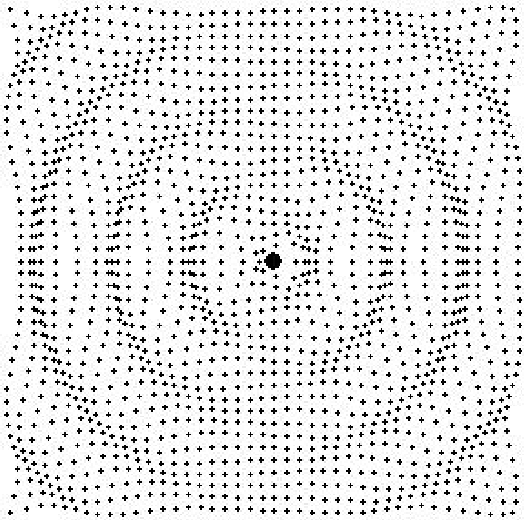
一、经典物理中的波和粒子



两种不同的能量传播方式，不能同时使用。

经典粒子　（动量、能量、速度、位置）

- 完全定域性，可精确确定其质量、动量和电荷。
- 可视为一个质点，并可根据牛顿力学进行完全描述。



经典的波 （频率、波长、周期、振幅）

- 具有确定的频率、波长。
- 是某种实在的物理量随空间和时间作周期性变化，满足叠加原理，可产生干涉、衍射等现象。
- 可精确测定频率和波长，在空间无限扩展。

确定的空间位置 → 粒子为一质点

确定波的频率、波长 → 在空间无限扩展

二、德布罗意假设

光具有波动性和粒子性。那么，实物粒子，就是那些静止质量不为零的粒子，是否具有波的性质呢？

L. Victor due de Broglie
(1892-1960)

年轻的法国学者德布罗意,当时他在物理界并不知名，在1923年首先提出了这个问题。

德布罗意提出所有物质粒子都具有波粒二象性，任何物体伴随以波，而且不可能将物体的运动和波的传播分开。

非相对论情形下，对于动量为p和质量为m的粒子，其波长为

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}}$$

人们称同实物粒子联系着的这种波为**德布罗意波**，此波长也称为**德布罗意波长**。

德布罗意因发现电子的波动性

The Nobel Prize in Physics 1929

三、戴维逊-革末实验

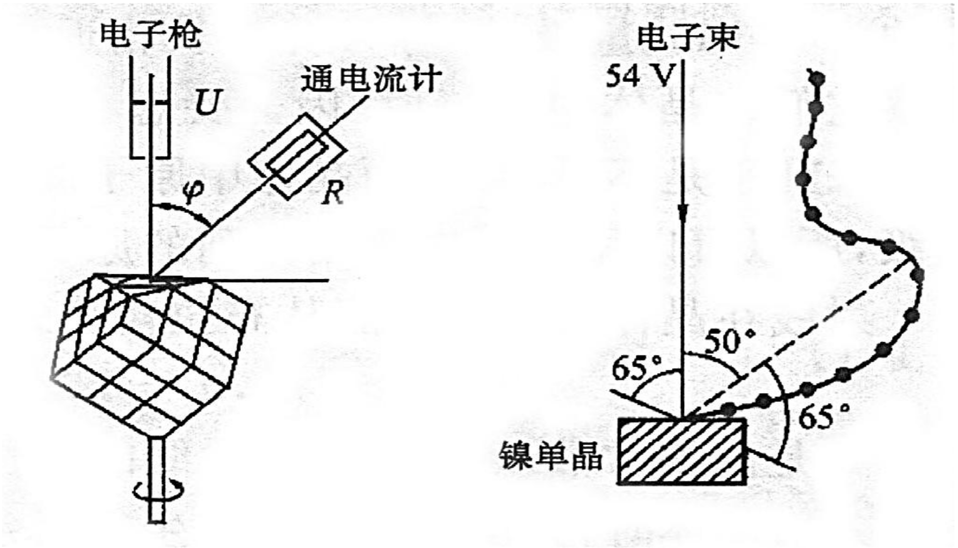
德布罗意关于物质波的观点是否可以用实验来验证呢？
实物粒子的粒子性是由大量实验事实所揭示的。

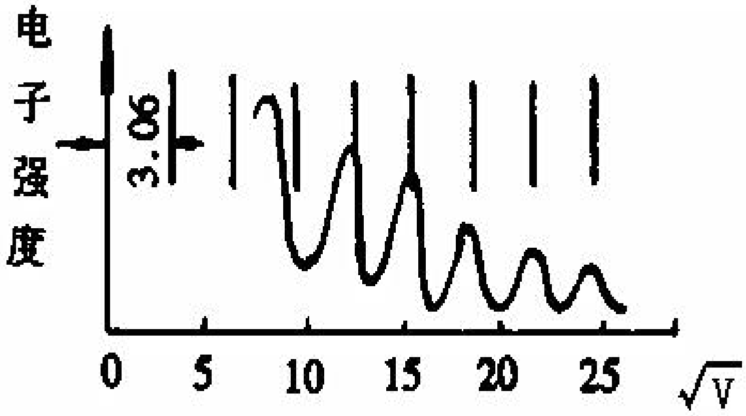
具有确定的轨迹、能量、动量等 → 电子是粒子

产生干涉和衍射现象 → 具有波动性

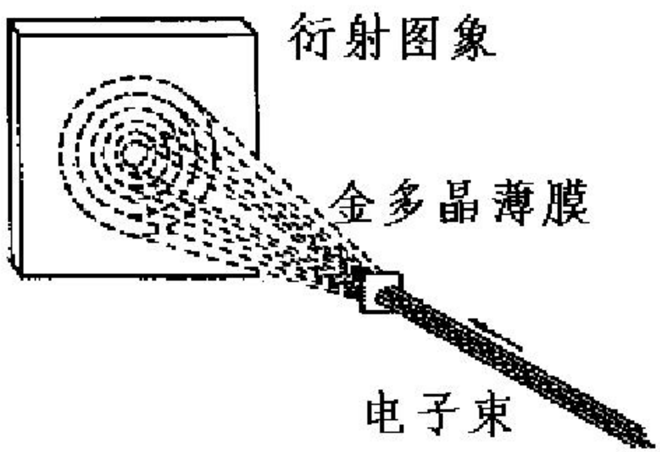
在各类实物粒子中，电子的质量最小，当它低速运动时，相应的波长较长。

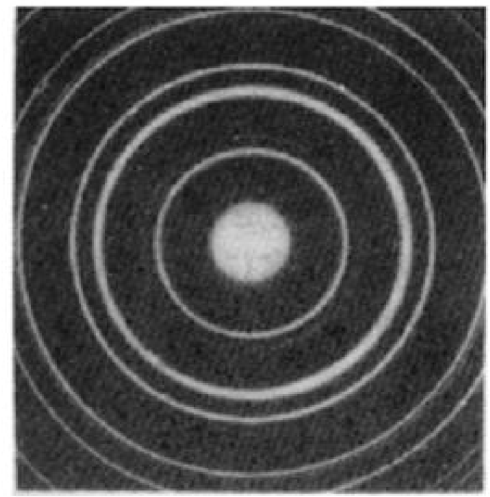
1927年，由戴维逊和革末采用**低能电子束**，将它们垂直投到晶体表面，完成了**镍晶体的电子衍射实验**，对电子波给出了明确的实验验证。



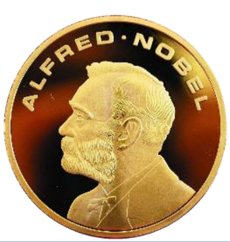


几个月后，G.P. 汤姆逊用高速电子穿过金属箔进行实验，也获得了电子衍射的图样，并证明了测量准确度范围内 $\lambda = h/p$的正确性。



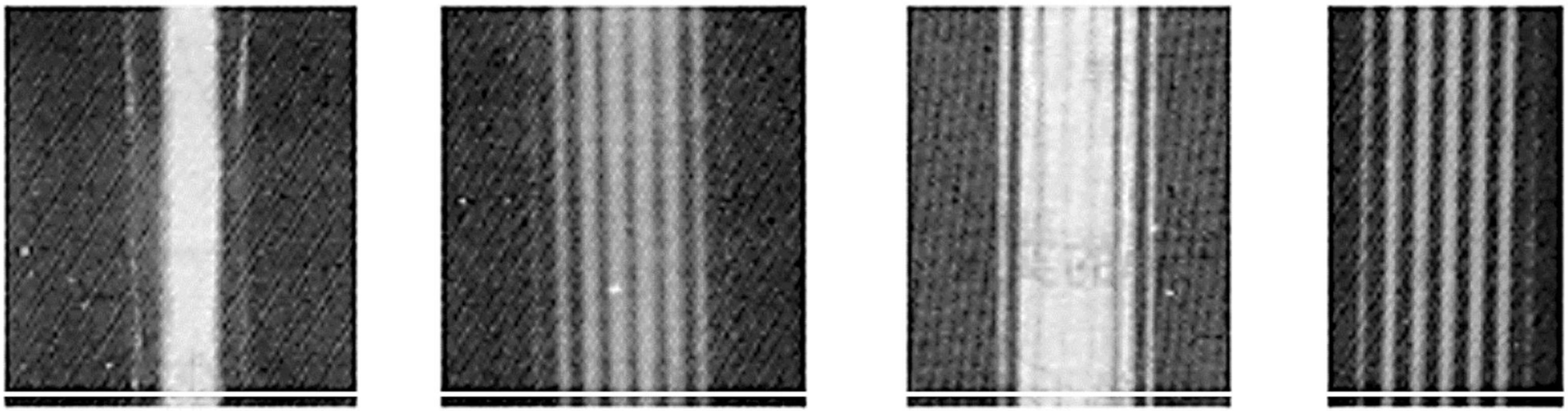


戴维逊和汤姆逊因电子的衍射现象证实了电子波动性



The Nobel Prize in Physics 1937

此后，琼森(Jonsson)实验作了大量电子的单缝、双缝、三缝和四缝衍射实验。



单缝　　双缝　　三缝　　四缝

- 后来很多的实验证实，不仅电子，质子、中子、氦原子、氢分子等都具有波动性，而且其波长都符合德布罗意关系式。
- 原子和分子也具有波动性充分表明了波动性的普遍存在。

总结：

1、实物粒子具有粒子性

- 指它与物质相互作用的“颗粒性”或“整体性”。

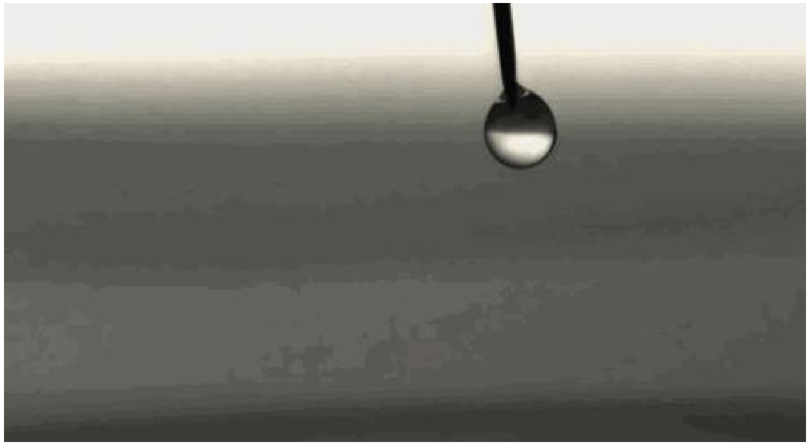
2、实物粒子具有波动性

- 指它在空间传播有“可叠加性”，有“干涉”、“衍射”等现象。

3、实物粒子既具有粒子性又具有波动性—波粒二象性！

波动性，是什么波？

声波、水波等是由分子密度疏密变化而形成的一种分布。

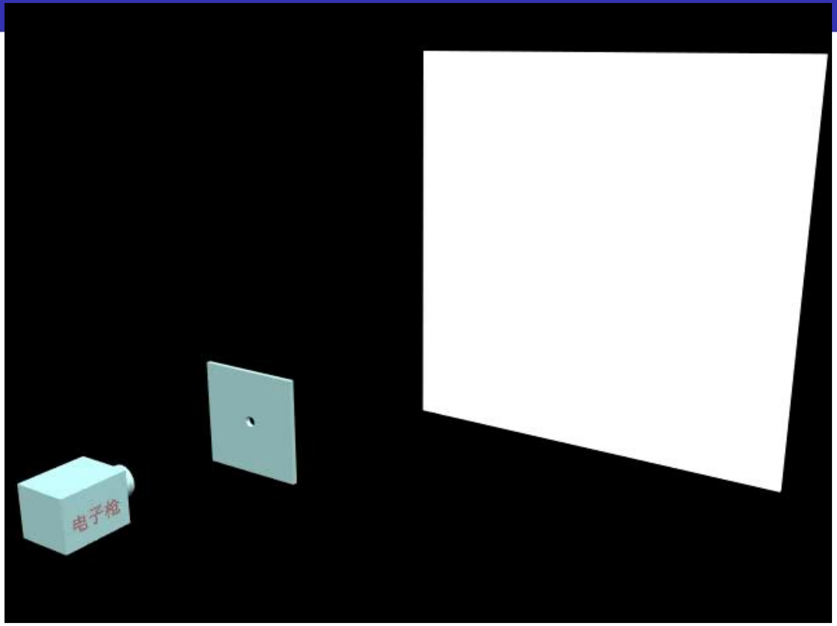


观点1：粒子是基本的。

波动性是由于有大量的电子分布于空间而形成的像声波一样的疏密波，即电子疏密相间分布而形成的纵波。

实验事实：单电子衍射实验

实验中我们可以做到让入射的电子流强度很弱，比如让电子一个一个地入射，开始屏上得到的分布似乎毫无规律，时间长了，我们仍然得到了双缝干涉图像。



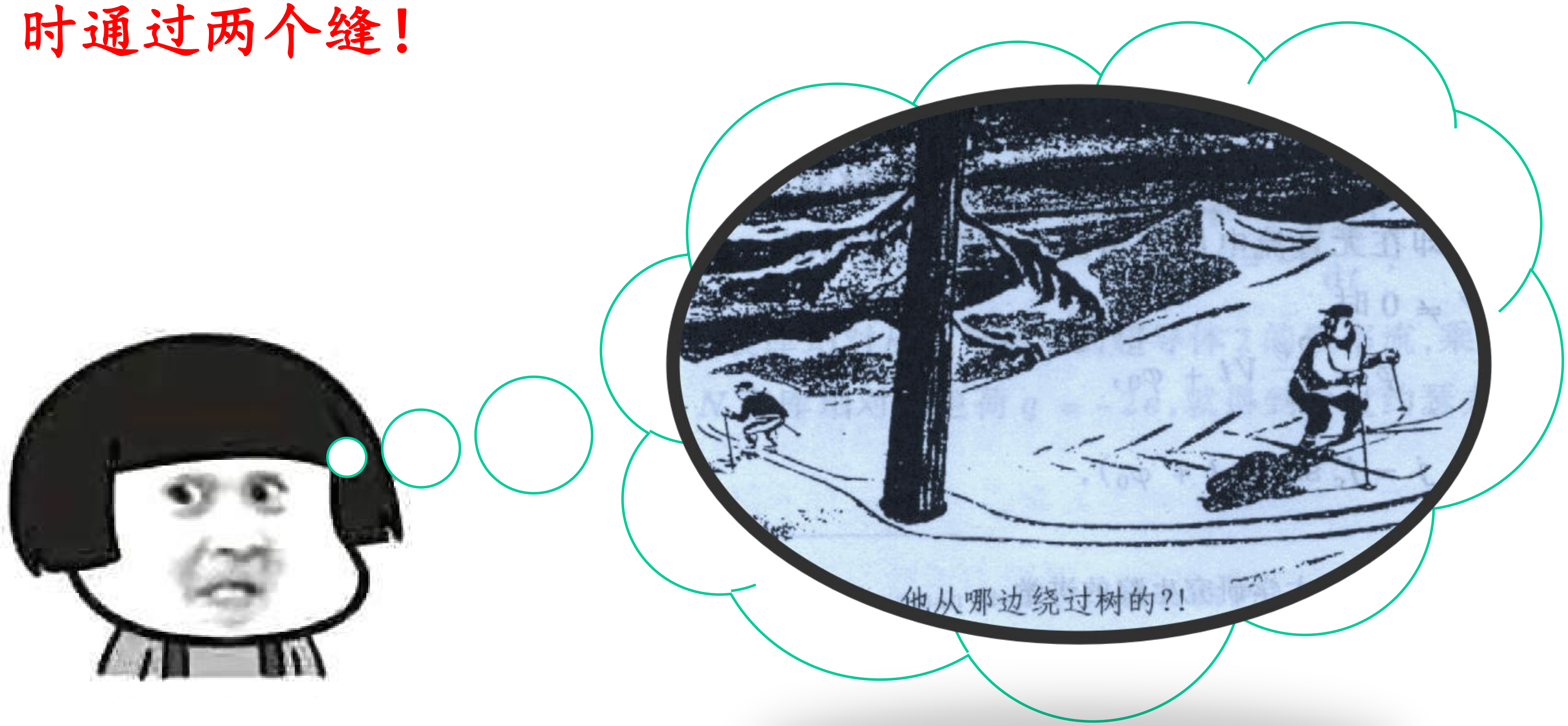
这种观点不能解释长时间单个电子衍射实验！

实验表明：“一个电子”就具有的波动性，电子波并不是电子间相互作用的结果。

尽管单个电子的去向具有不确定性，但大量电子的行为却是完全确定的。

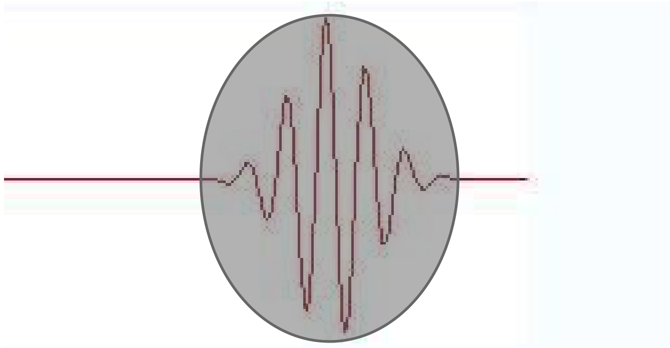
就单个电子而言，通过其中一个缝时，另一个缝是否打开对它不应有任何影响，屏幕上强度应是两缝分别打开时强度之和。

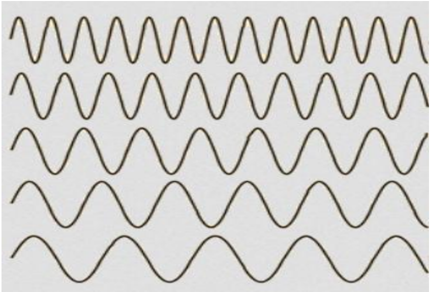
但是事实却不是如此！故两缝同时起作用，**似乎是电子同时通过两个缝！**



观点2:波是基本的。

粒子是无限多波长不同的平面波叠加而成的波包。波包的大小即电子的大小,波包的群速度即电子的运动速度,波包的活动表现出粒子的性质。





物质波在真空中也出现色散!

随时间的演化,电子将愈变愈“胖”,这与实验是矛盾的!

§22.5 概率波与概率幅

经典粒子—有一定的质量、动量、电荷等属性，可以由牛顿力学来描述它的运动状态；

经典波—某种实际的物理量的空间分布有周期性的变化。

如经典电磁理论中的电磁波

$$\boxed{E(x,t)=E_0\cos(\omega t-kx)}$$

很具体地和电场强度在空间的周期性的变化联系了起来，它的波幅和电场强度相对应。

在宏观物理中这些经典的概念和理论取得了极大的成功。

德布罗意波(物质波)的波函数怎么表示呢?

1、自由粒子的波函数

对于自由粒子的实物粒子，它的动量和能量将保持不变。根据德布罗意波长和爱因斯坦公式

$$\boxed{p=\frac{h}{\lambda}} \qquad \boxed{E=h\nu}$$

自由粒子的德布罗意波长和频率是不变的。这是一单色平面波。若用Ψ表示波函数，则单色波平面可以写为

$$\boxed{\Psi\left(\vec{r},t\right)=A\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$

其中 $\vec{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\hat{n}=\frac{\vec{p}}{\hbar}$ 称为波矢，它的方向表示波的传播方向，与粒子的运动方向一致。

若用复数形式可表示为

$$\boxed{\Psi(\vec{r},t)=A\,\mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}$$

在量子力学中常用能量和动量为参数来表示，利用

$$\boxed{p=\hbar k} \qquad \boxed{E=\hbar\omega}$$

可以得到

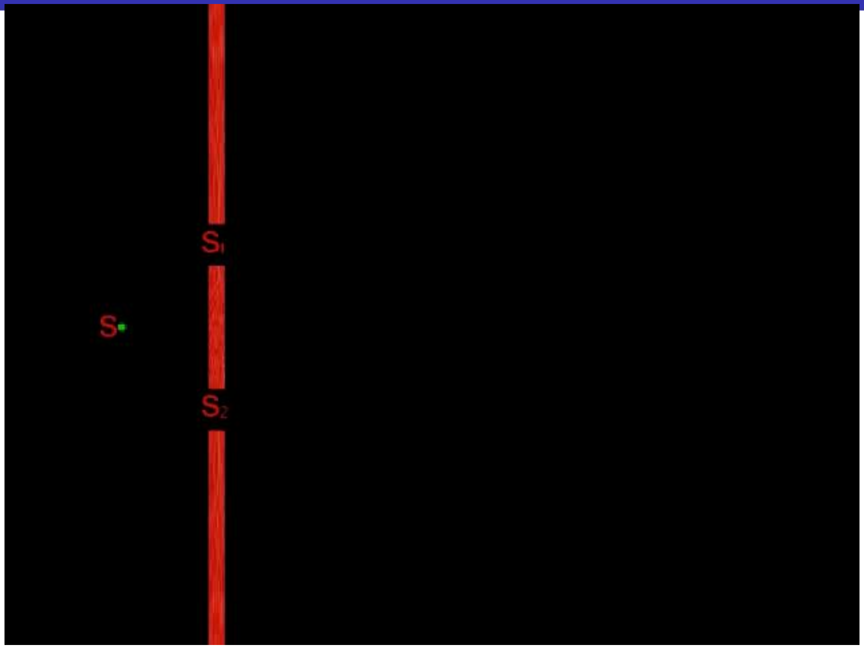
$$\boxed{\Psi(\vec{r},t)=A\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}}$$

这就是自由粒子的波函数，它表示一个振幅恒定，在时间和空间上无限延展的波。

波函数Ψ的物理含义？

2、概率幅

类比光子的情况，考虑光的双缝干涉图样。

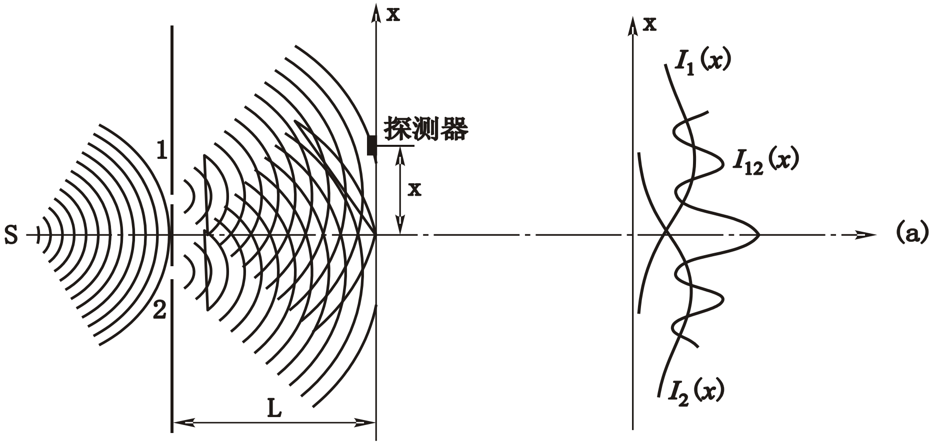


屏幕上某点的强度I表示为

$$\boxed{I = \varepsilon_0 c\left|E\right|^2}$$

另一方面：

$$\boxed{I = N \cdot h\nu}$$



其中N为光子通量。

虽然单个光子到达屏幕什么地方无法预测，但光子到达某个区域的概率是确定的！

它到达亮带的概率大，到达暗带的概率小，在屏幕上一点的光子通量N就是该点附近发现光子概率的一个量度。

根据： $I = N \cdot h\nu$ $I = \varepsilon_0 c |E|^2$ 可得： $\boxed{N \propto |E|^2}$

说明，在某处发现一个光子的概率与光波的电场强度的平方成正比。这就是爱因斯坦早在1917年对光辐射的量子统计解释。

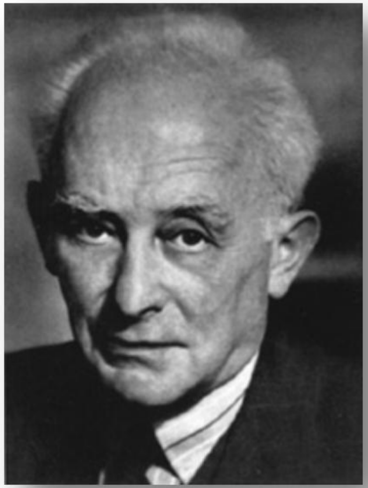
平面电磁波： $\boxed{E(\vec{r},t) = E_0\, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}$

发现光子的概率： $\boxed{N \propto |E|^2 = E_0^2}$

由于电子也产生类似的干涉条纹：概率大的地方，出现的电子多，形成亮条纹；概率小的地方，出现的电子少，形成暗条纹。

$$E(\hat{r},t)=E_0\,\mathrm{e}^{i(\hat{k}\cdot\hat{r}-\omega t)} \quad\longrightarrow\quad N\propto|E|^2=E_0^2$$

$$\Psi(\hat{r},t)=A\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\hat{p}\cdot\hat{r}-Et)} \quad\longrightarrow\quad N\propto|\Psi|^2=|A|^2$$



Max. Born
(1882 ～ 1970)

与爱因斯坦把$|E|^2$解释为“光子密度的概率量度”相似，波恩在1927年提出了德布罗意波的统计意义：

t时刻在r处的单位体积内发现这个粒子的概率正比于波函数的平方$|\Psi(r,t)|^2$。

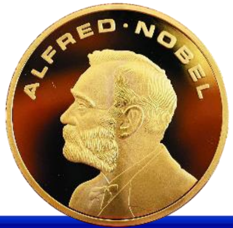
如果Ψ是复数，就用$\Psi^*\Psi$代替$|\Psi|^2$。我们把在体积$d\tau$中发现一个粒子的概率表达为

$$\boxed{d\omega \propto \Psi^*\Psi d\tau}$$

这是量子力学的基本原理之一!

因此德布罗意波也称为概率波，Ψ也称作概率幅。

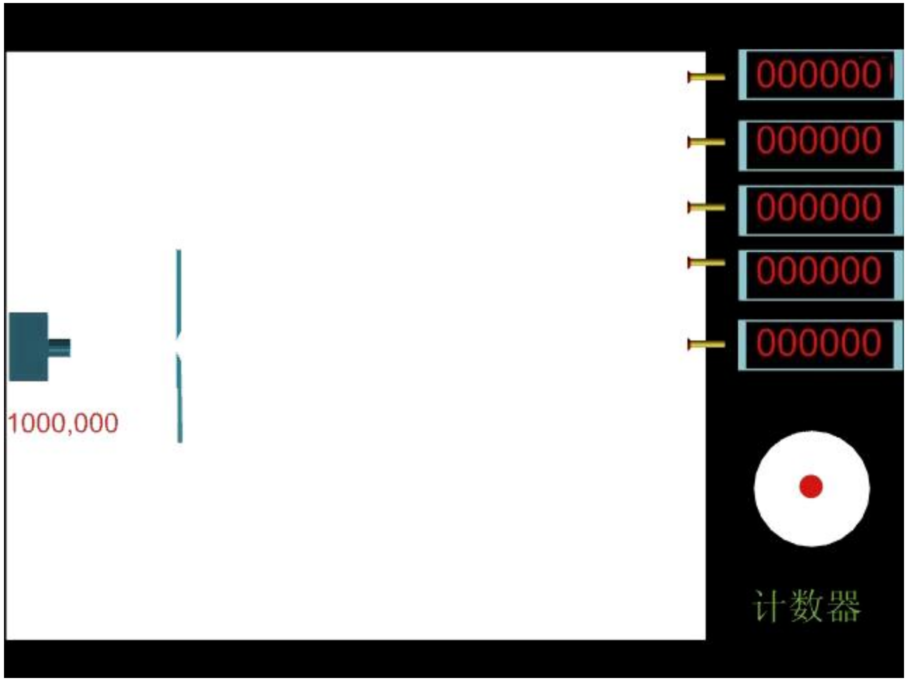
波恩因在量子力学的基础性研究，特别是对波函数的统计诠释

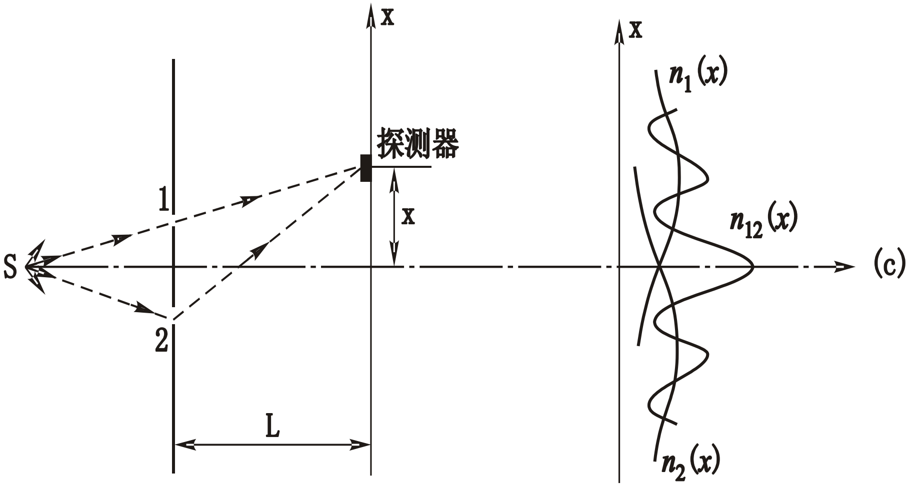


The Nobel Prize in Physics 1954

3、态叠加原理

在S处放一把电子枪，观测到电子的干涉条纹。





$$n_{12}(x) = n_1(x) + n_2(x) + \text{干涉项}$$

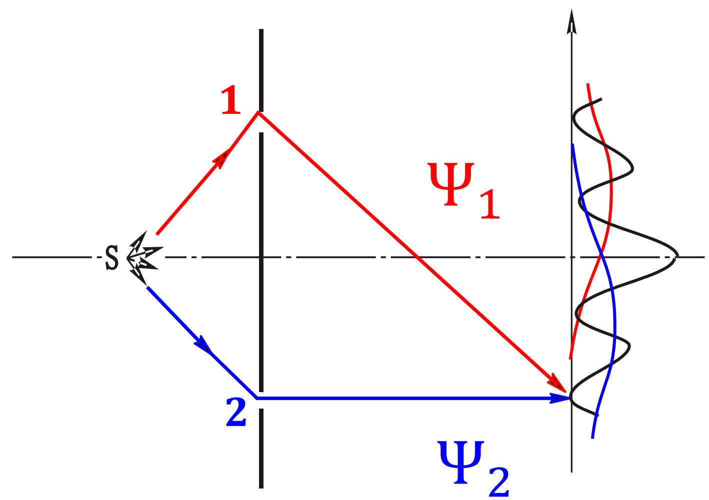
态叠加原理：

如果Ψ_1和Ψ_2是体系可能的状态，那么它们的线性叠加

（C_1和C_2为复数）

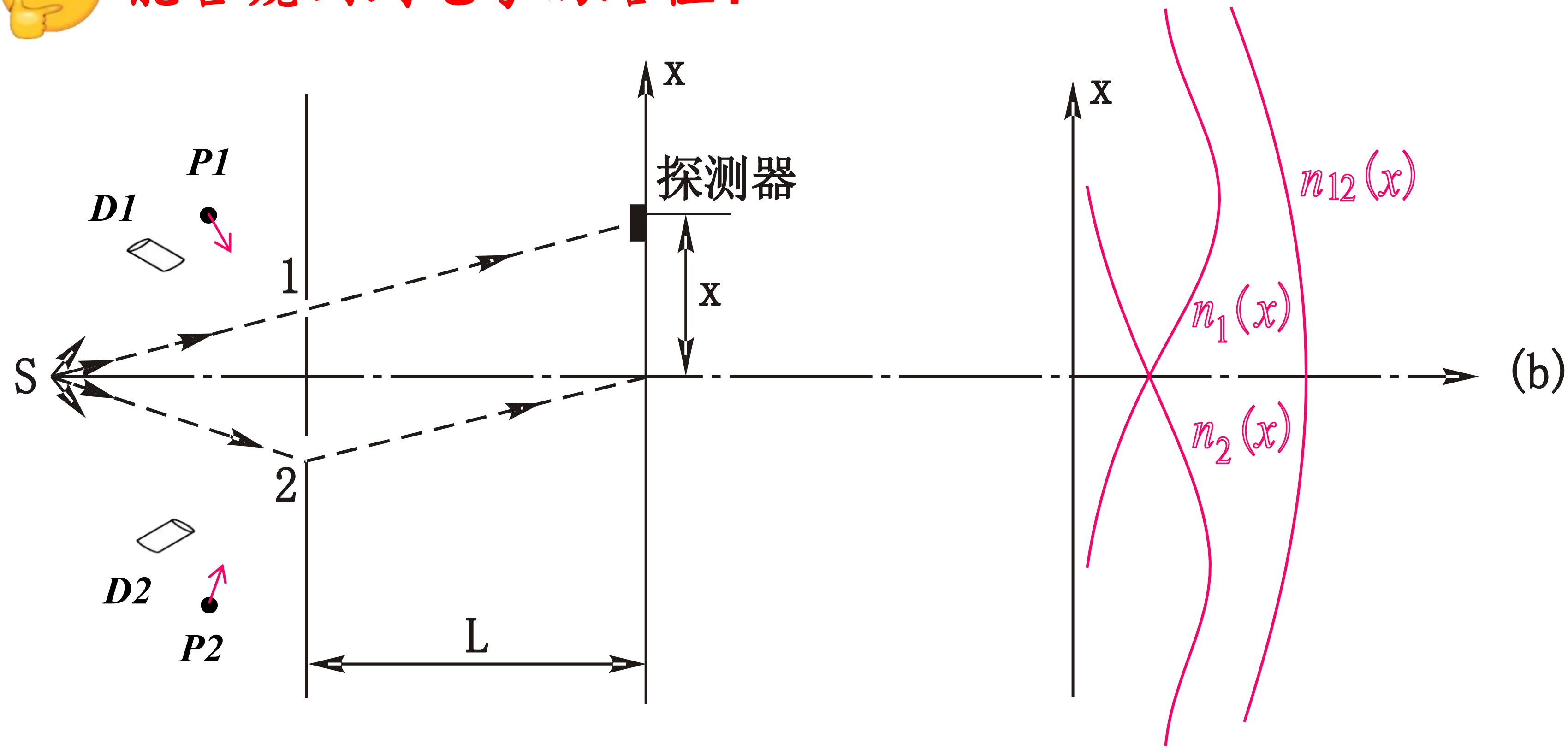
也是体系的一个可能状态。

$$
\begin{aligned}
|\psi|^2 &= |\psi_1+\psi_2|^2 \\
&= |\psi_1|^2+|\psi_2|^2+\underbrace{\psi_1^*\psi_2+\psi_1\psi_2^*}_{\text{干涉项}}
\end{aligned}
$$



注意：在双缝干涉实验中，绝不是两个电子的干涉，而是一个电子的两个不同状态的叠加。

能否窥测到电子的路径?



$$n_{12}(x) = n_1(x) + n_2(x)$$

观察效应使得干涉现象消失!

态叠加原理与测量有密切联系：

Ψ_1——Live

Ψ_2——Dead

$$\boxed{\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2}$$

Live: $a^* a$ **Dead:** $b^* b$

4、评注

量子物理与经典物理的根本区别：

量子物理的基本规律是统计规律，而经典物理的基本规律是决定论、严格的因果律。大自然的一切规律都是统计性的，经典因果律只是统计规律的极限。

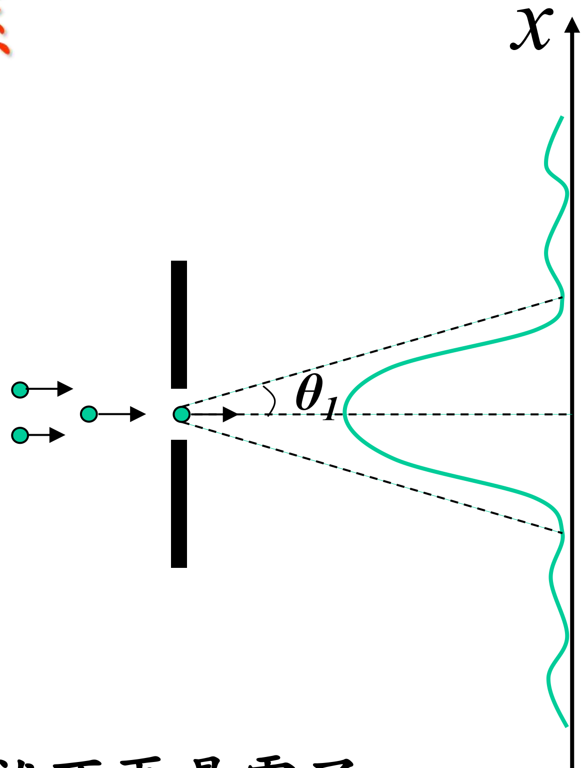
经典物理中，“概率”是统计规律的关键概念；量子物理中，“概率幅”才是最核心的概念。

经典物理中，统计规律只是对待多粒子体系的一种方法、一种工具、一种权宜之计；量子物理中，个别粒子都体现出统计属性。


God does not play dice with the universe.
——A. Einstein

§22.6 不确定关系

一束动量为p的电子通过宽为Δx的单缝后发生衍射而在屏上形成衍射条纹。



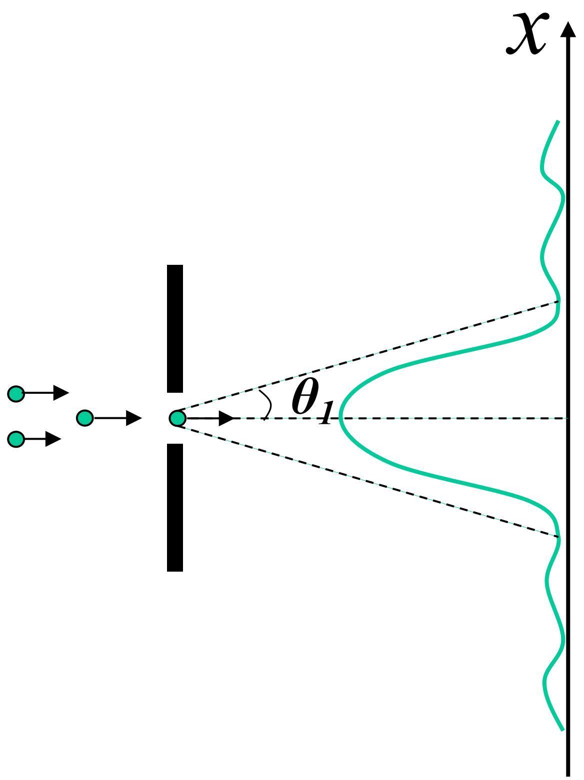
各极小值（强度为零）对应的θ角满足：

$$\boxed{\sin\theta = \frac{n\lambda}{\Delta x}}$$

如果它在缝前的 p_x 等于零，在过缝后，p_x 就不再是零了。

忽略次极大，我们可以认为电子都落在中央亮纹内，因而电子在通过缝时，运动方向可以有大到 θ_1 角的偏转。

根据动量矢量的合成，可知一个电子在通过缝时在x方向动量的分量p_x的大小为下列不等式所限



$$0 \le p_x \le p\sin\theta_1$$

这表明，一个电子通过缝时在x方向上的动量不确定量为

$$\Delta p_x = p\sin\theta_1$$

考虑到衍射条纹的次极大，可得

$$\Delta p_x \ge p\sin\theta_1$$

由单缝衍射公式 $\sin\theta = \dfrac{n\lambda}{\Delta x}$，第一级暗纹中心的角位置满足

$$\Delta x \sin\theta_1 = \lambda$$

$$\Delta p_x \geq p\sin\alpha_0$$

根据德布罗意公式，有

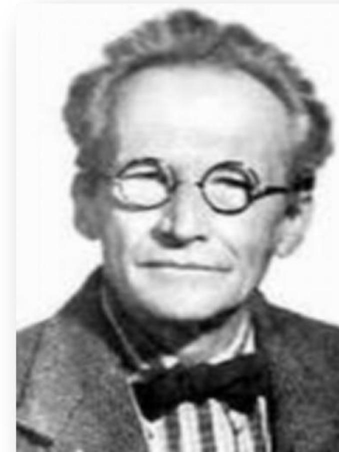
$$\sin\theta_1 = \frac{h}{p\Delta x}$$

即 $\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq h}$

量子力学的严格计算给出：

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}} \qquad \boxed{\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}}$$

§22.7 薛定谔方程



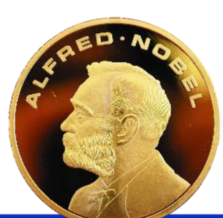
Erwin Schrodinger
1887～1961

1925年在瑞士，德拜（Debye）让薛定谔作一个关于德布罗意的学术报告。报告后，德拜提醒薛定谔“有了波，应该有一个波动方程”。

薛定谔此前就曾注意到爱因斯坦对德布罗意假设的评价，此时又受到了德拜的鼓励，于是就努力钻研。

几个月后，薛定谔果然提出了一个波动方程，当时谁也没有想到这个方程会变得如此重要，以致成了著名的薛定谔方程。

薛定谔因创立了量子力学一种有效形式—波动力学



The Nobel Prize in Physics 1933

对于在恒定势场$U(\vec{r})$中运动的粒子，其概率密度分布和时间无关，只是空间坐标的函数，此时波函数$\psi(\vec{r})$称为定态波函数。

对一维情况，决定定态波函数的定态薛定谔方程为：

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+U\psi=E\psi}$$

- ψ需要满足波函数的标准条件：单值、有限、连续。
- 并非所有能量E对应的解都满足边界条件和标准条件——自然地给出能量量子化。
- 量子力学中的薛定谔方程，相当于经典力学中的牛顿运动定律，是量子力学的一个基本假设。