第17-18章　振动 波动

【内 容】

1 简谐振动

2 振动的合成

3 平面简谐波

4 波的能量

5 惠更斯原理　波的传播特性

6 波的干涉

- **机械振动** 物体在一定位置附近所做的往复运动。
- 任一物理量在某一定值附近反复变化均称为**振动**。

➤ 波动 —— **振动状态**在空间的**传播**过程.

经典波
- 机械波 机械振动在**弹性**介质中的传播.
- 电磁波 交变电磁场在空间的传播.

两类波的**不同**之处

- 机械波的传播需有传播振动的**弹性**介质;
- 电磁波的传播可不需介质.

两类波的**共同**特征

- 能量传播
- 反射
- 折射
- 叠加性
- 干涉
- 衍射

第一节 线性振动

•可以利用线性微分方程描述的振动称为**线性振动**（**Line Vibration**）。

一、简谐振动

• 物体运动时，离开平衡位置的线位移x（或角位移）随时间 t 按余弦或正弦规律进行变化，称物体作**简谐振动**。

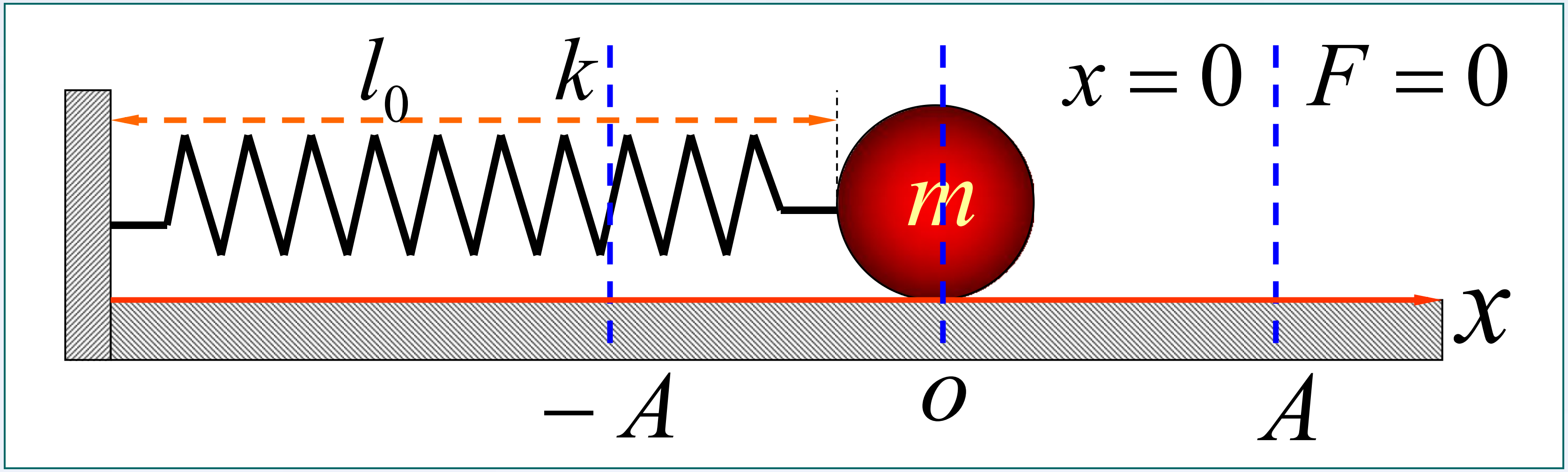
（**simple harmonic motion, SHM**）

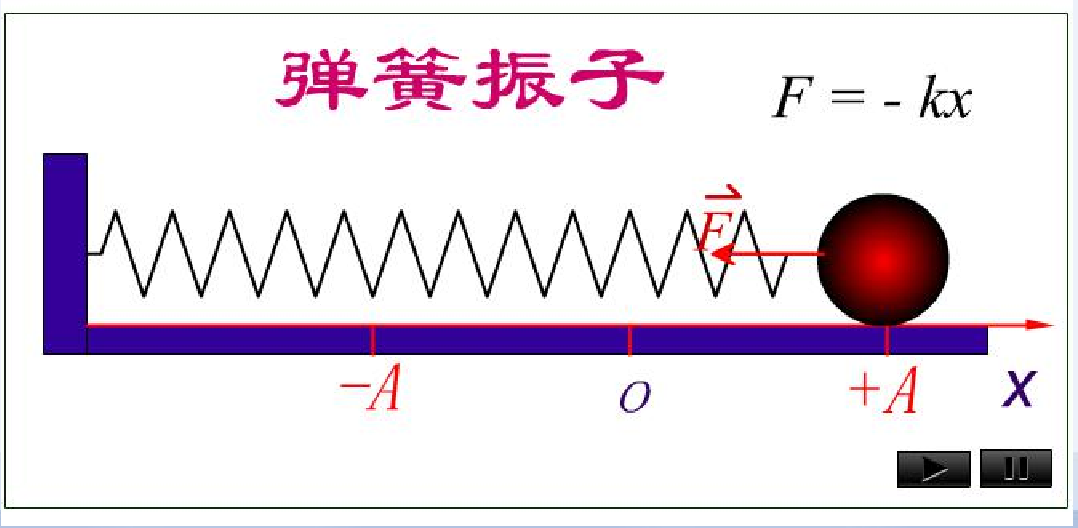
- **简谐振动**　最简单、最基本的振动。

简谐振动 $\xrightarrow[\text{分解}]{\text{合成}}$ 复杂振动

- **谐振子：**作简谐振动的物体。

弹簧振子的振动





（一）简谐振动的特征及其表达式

受力特点： 线性回复力

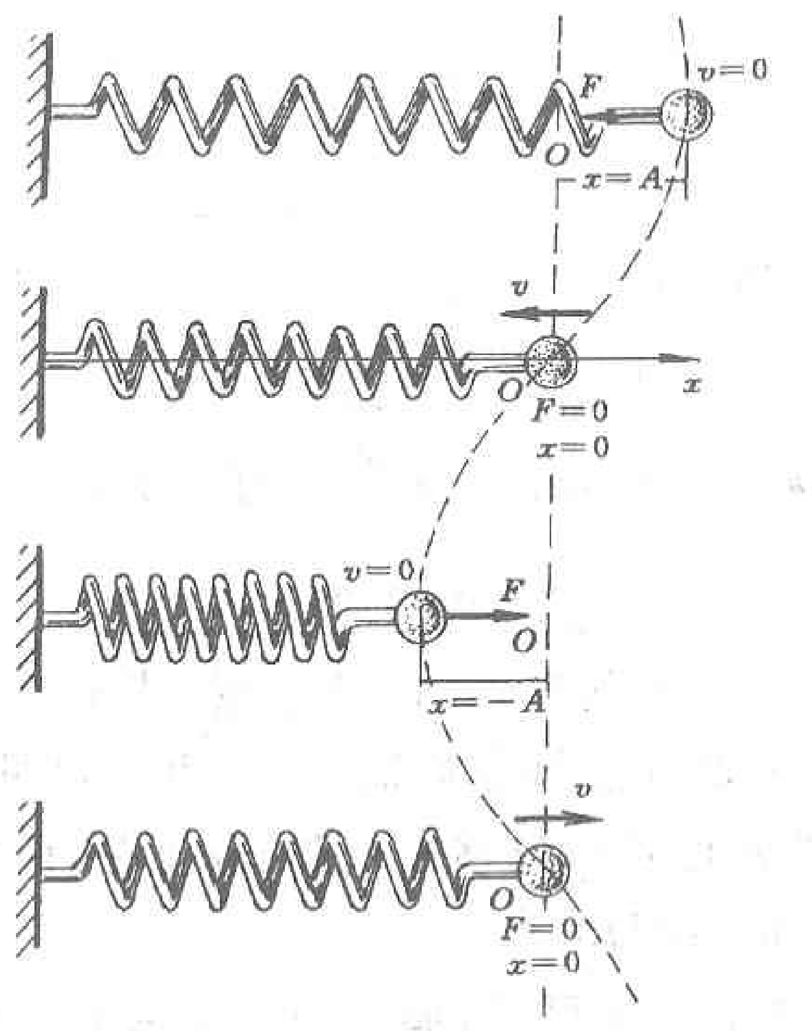
$$F=-kx$$

------动力学特征

即： $ma=-kx$

$$\therefore a=-\frac{k}{m}x$$

------运动学特征



$$\because a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

令 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$

------简谐振动的特征方程

其解为：

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ ------简谐振动表达式

综上所述，简谐振动有如下**三个等价的定义**：

（1）物体在线性回复力作用下的运动，称为简谐振动。

（2）物体的位移满足 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 形式的运动，称为简谐振动，其中ω是由系统的性质决定的常数。

（3）物体运动的微分方程可写成 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$ 形式的运动，称为简谐振动，其中ω是由系统的性质决定的常数。

• 简谐振动的速度、加速度：

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

取 $\varphi_0 = 0$

$$\boxed{v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)}$$

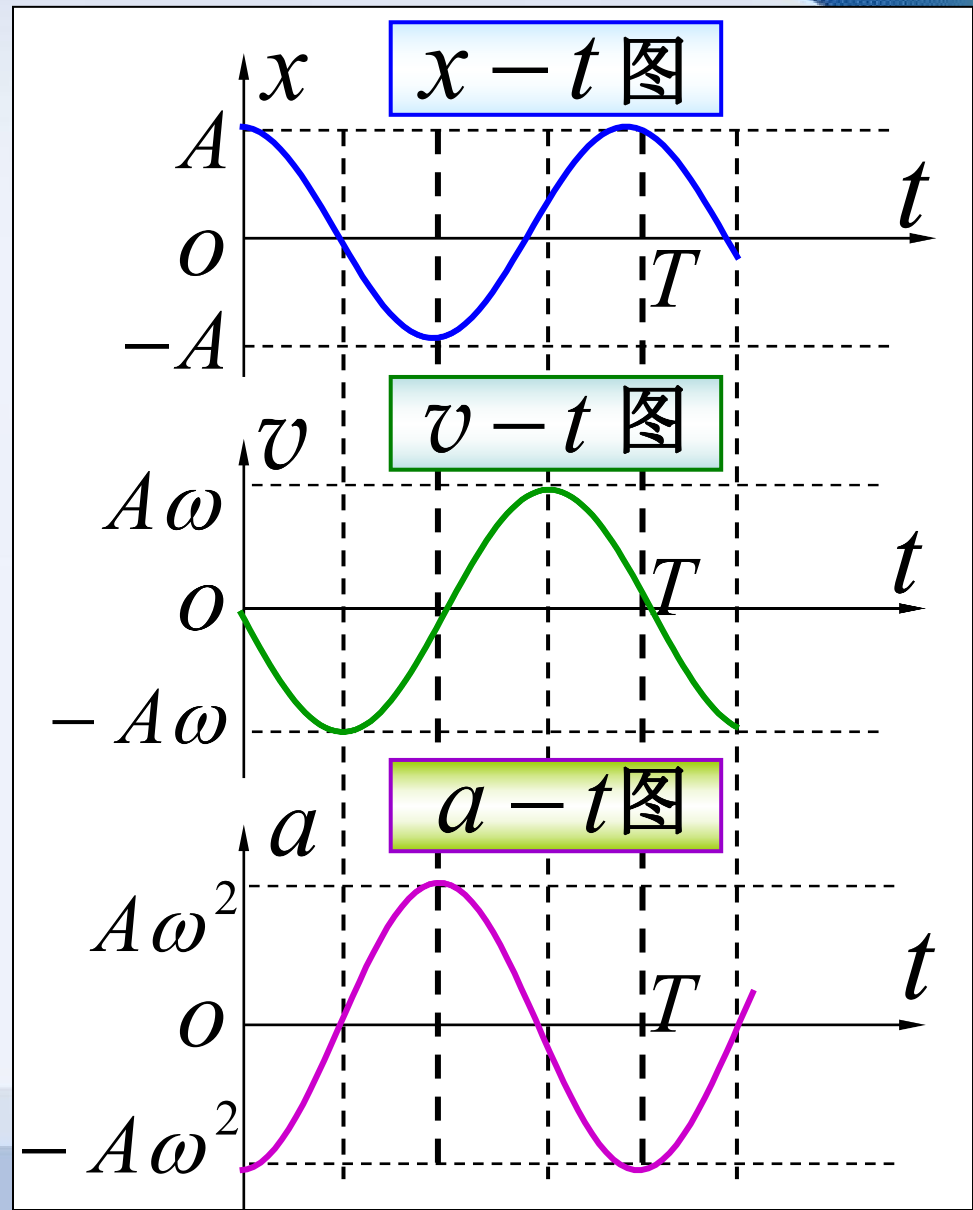
$$v = -v_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$v_m = \omega A$ 称为速度幅值；

$$\boxed{a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$a = -a_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$a_m = \omega^2 A$ 称为加速度幅值。

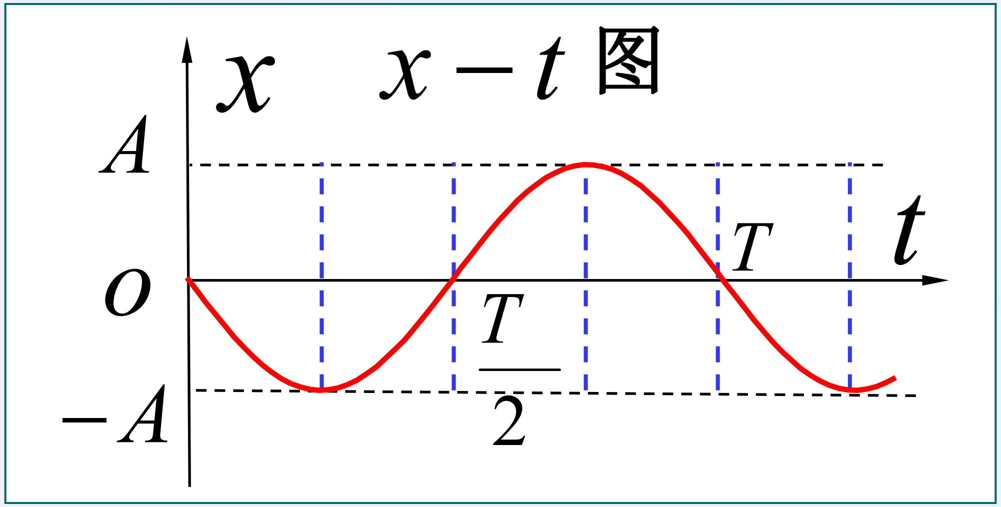


（二）描述简谐振动的特征量

1、振幅(Amplitude) A(m):

振动物体离开平衡位置的最大位移的绝对值。即

$$A = \left| x_{\max} \right|$$



A 由初始条件决定。

$$-A \le x \le A$$

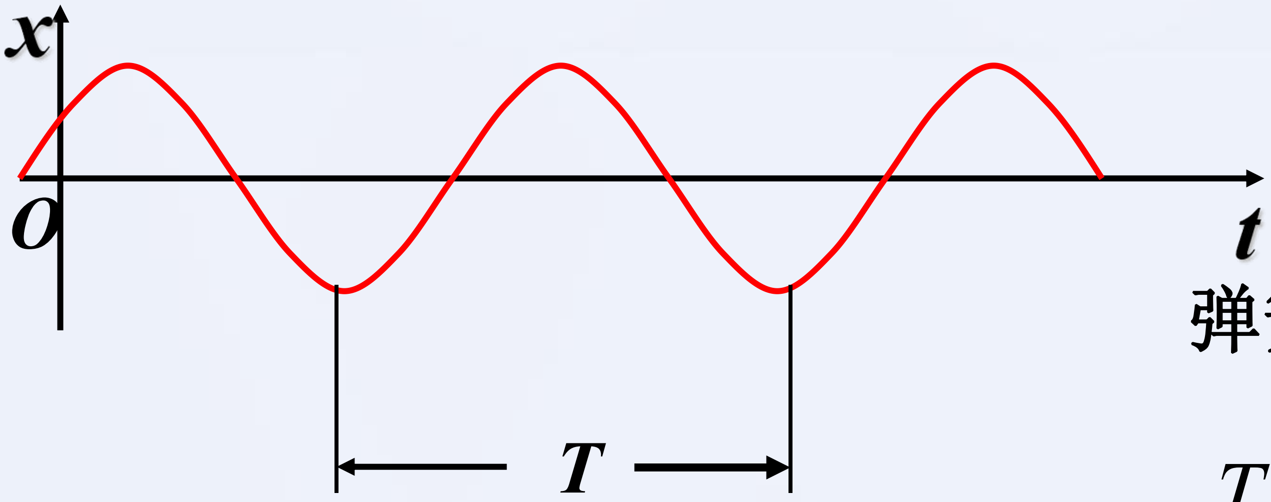
2、周期(period) T (s): 完成一次完全振动所经历的时间。

频率(frequency) f (Hz): 单位时间内完成完全振动的次数。

$$f = 1/T$$

角频率（或称圆频率）ω：

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = 2\pi f$$



弹簧振子周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

3、相位（phase）： $(\omega t + \varphi_0)$

初相位（initial phase）： φ_0

作用：（1）是描述振动状态的物理量；

（2）可以比较不同振动系统的振动步调；

例：对两同频率的谐振动

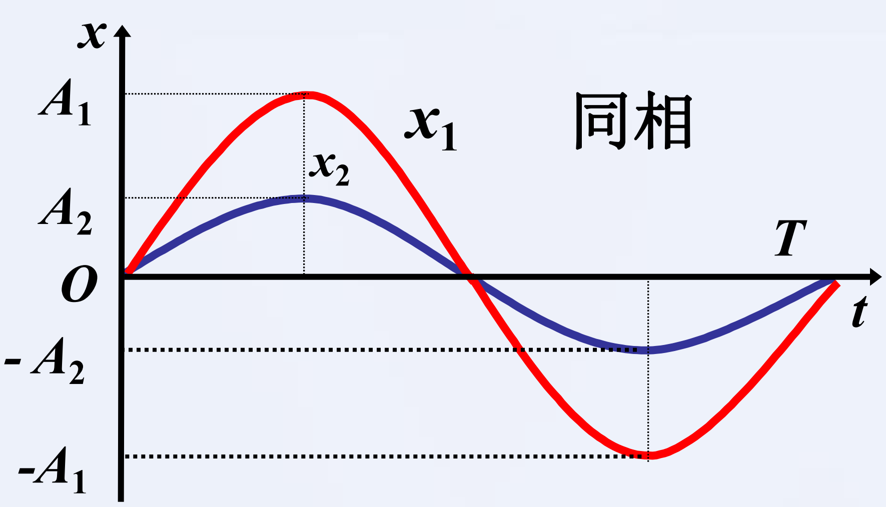
$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{10})$$

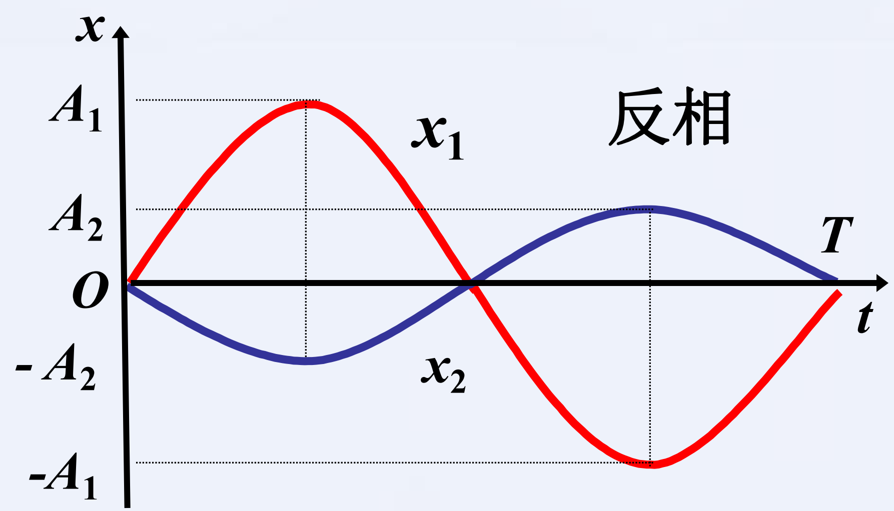
$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{20})$$

相位差： $\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10}$ 　　初相差

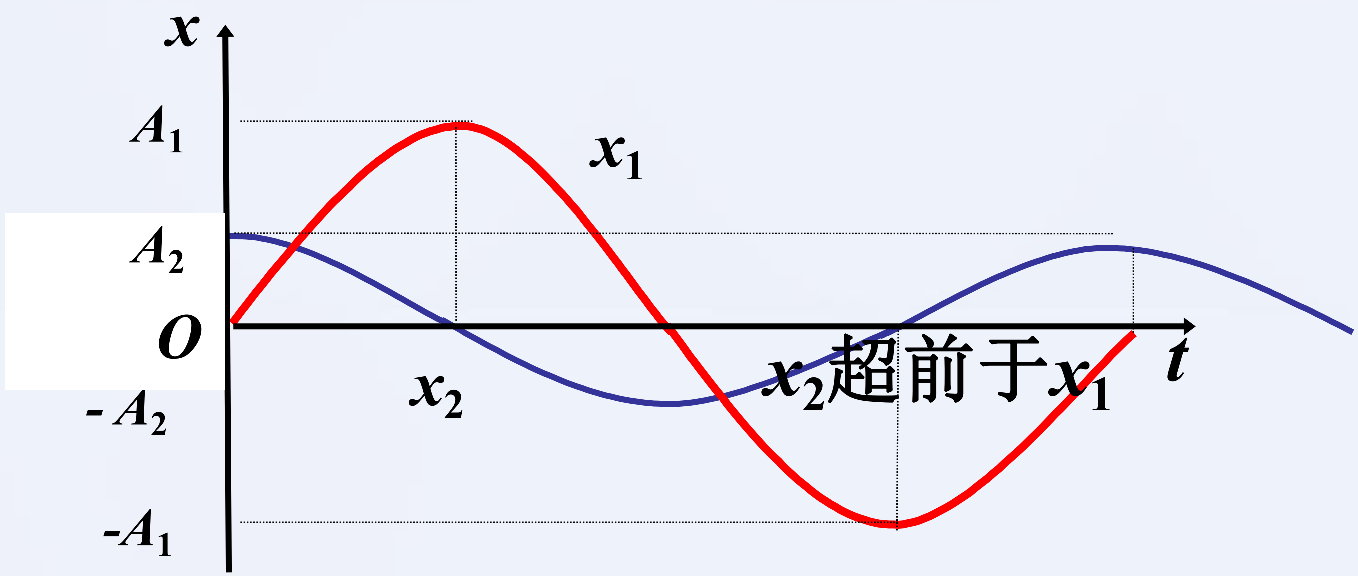
当$\Delta\varphi = \pm 2k\pi$，(k =0,1,2,…)，两振动步调相同，称同相。

当$\Delta\varphi = \pm (2k+1)\pi$，(k =0,1,2,…)，两振动步调相反，称反相。





若 $0<\Delta\varphi<\pi$，则 x_2比x_1较早达到正最大，称x_2比x_1超前（或x_1比x_2落后）。



（3）可以比较不同物理量变化的步调。

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\boxed{v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)}$$

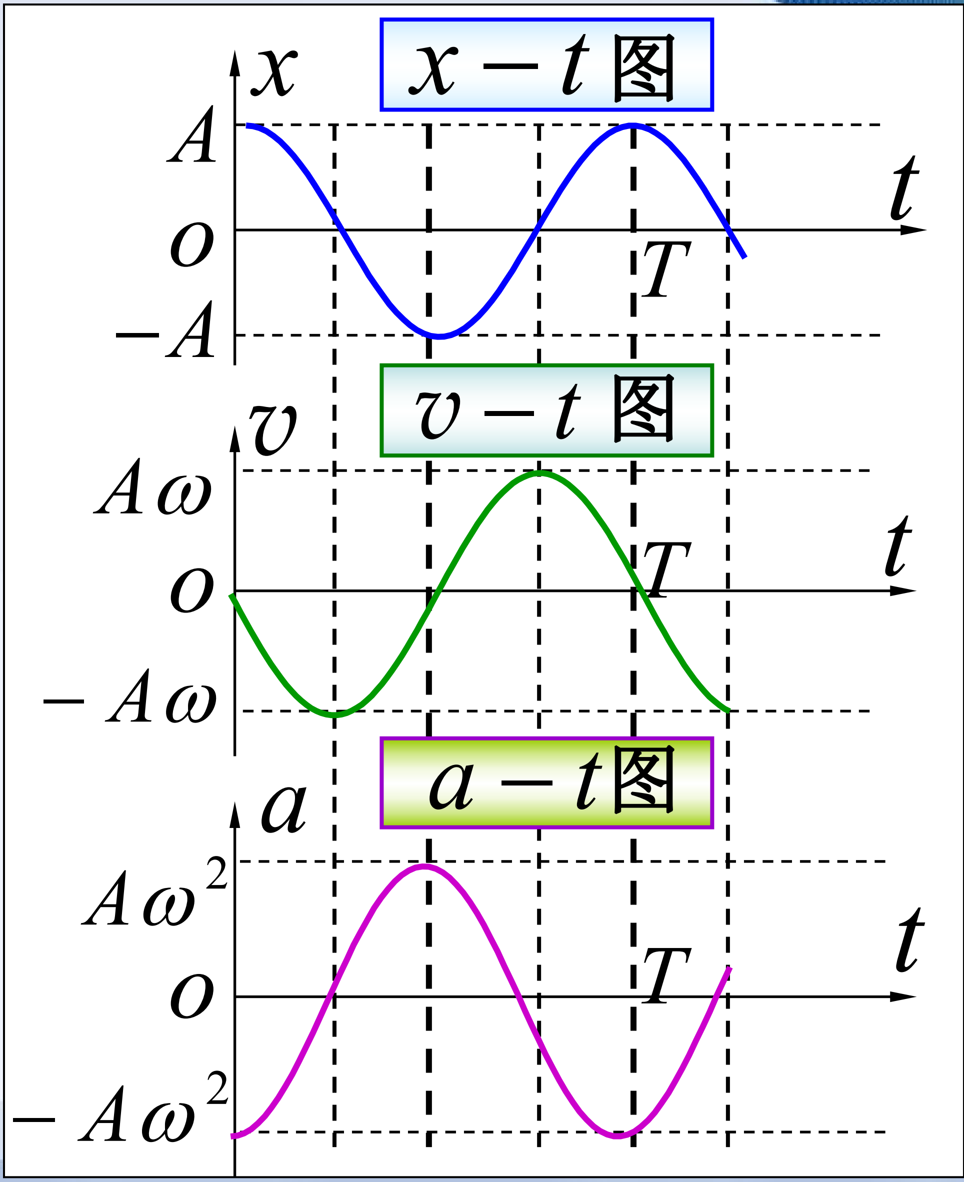
$$= A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$= A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

速度相位比位移相位超前 π/2。

加速度与位移反相位。



4、描述简谐振动的三个特征量：A、ω、φ_0

• A、φ_0 由初始条件决定：

初始条件 $t=0 \quad x=x_0 \quad v=v_0$

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi_0) \\ v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 \end{cases}$$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}} \qquad \boxed{\tan\varphi_0 = \frac{-v_0}{\omega x_0}}$$

注意：φ_0应由 x_o和v_o 共同和决定。

- ω的确定：

1）已知T（f），用 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$， $\omega=2\pi f$ 确定。

2）对于某些特定振动系统：

弹簧振子 $\omega=\sqrt{k/m}$ 单摆 $\omega=\sqrt{g/l}$

（由振动系统本身性质决定）

3）由$v_m=\omega A, a_m=\omega^2 A$确定。

4）若某些振动系统的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0$$

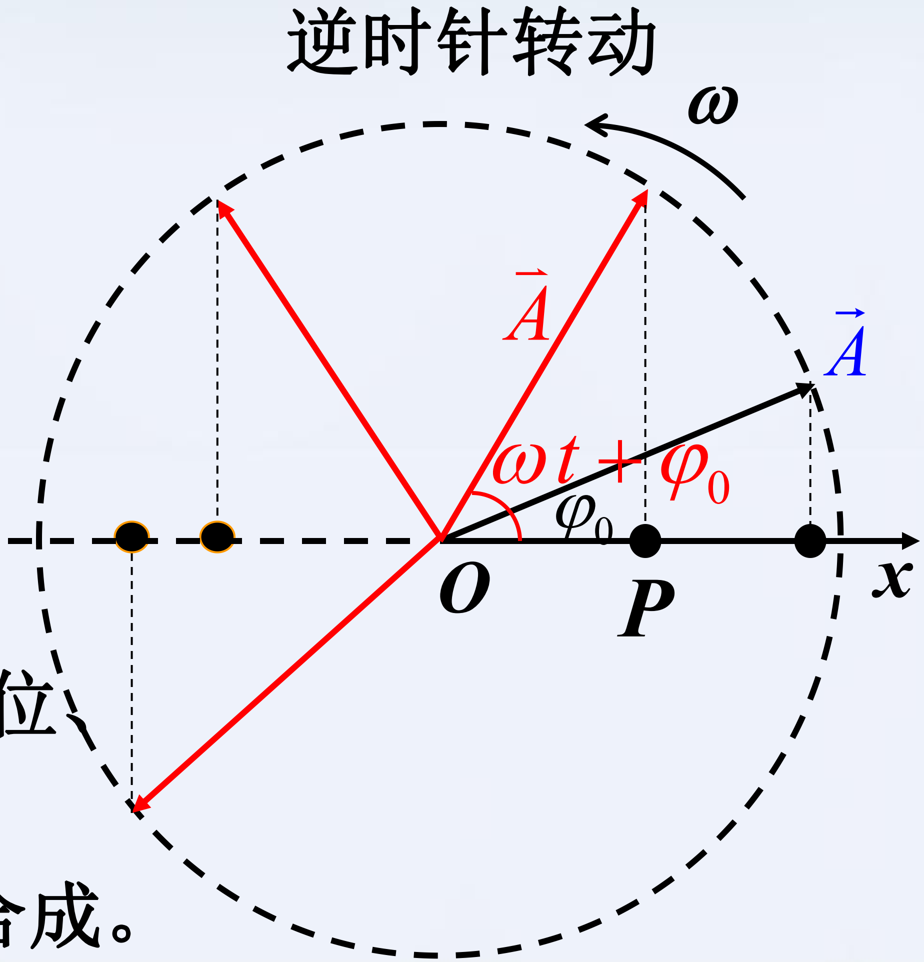
也可由该方程确定。

（三）简谐振动的旋转矢量表示法

旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在x 轴上的投影点P的位移：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

➡ 投影点P 的运动为简谐振动。

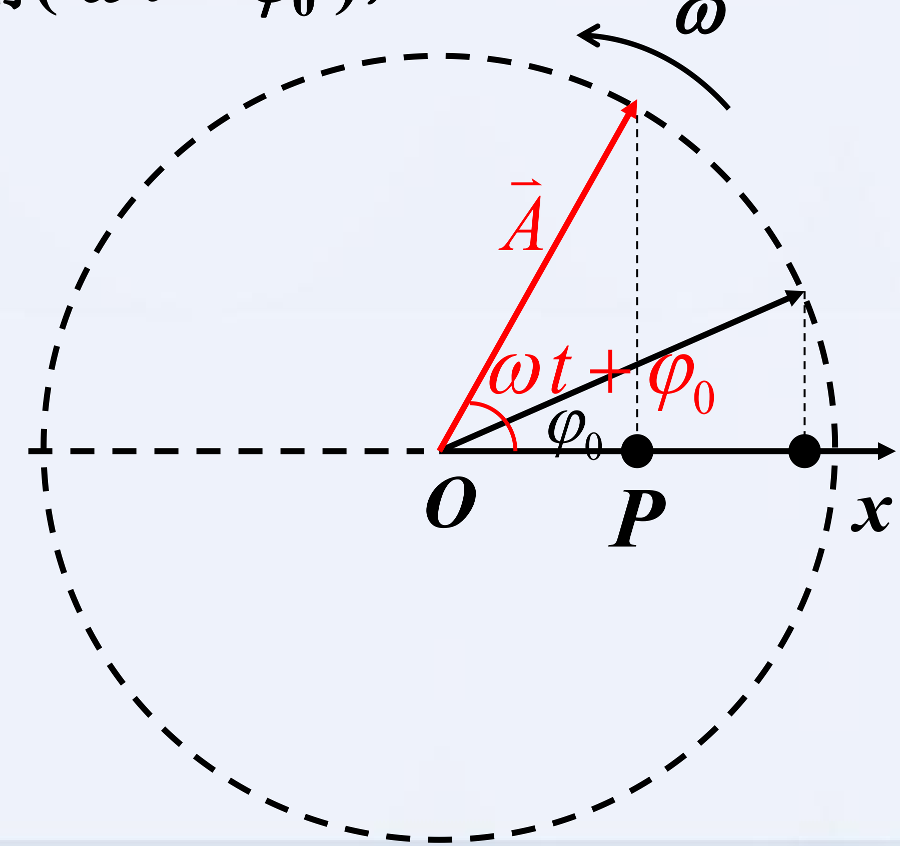


作用：1）可方便确定初相位、相位、相位差；

2) 可方便地进行振动的合成。

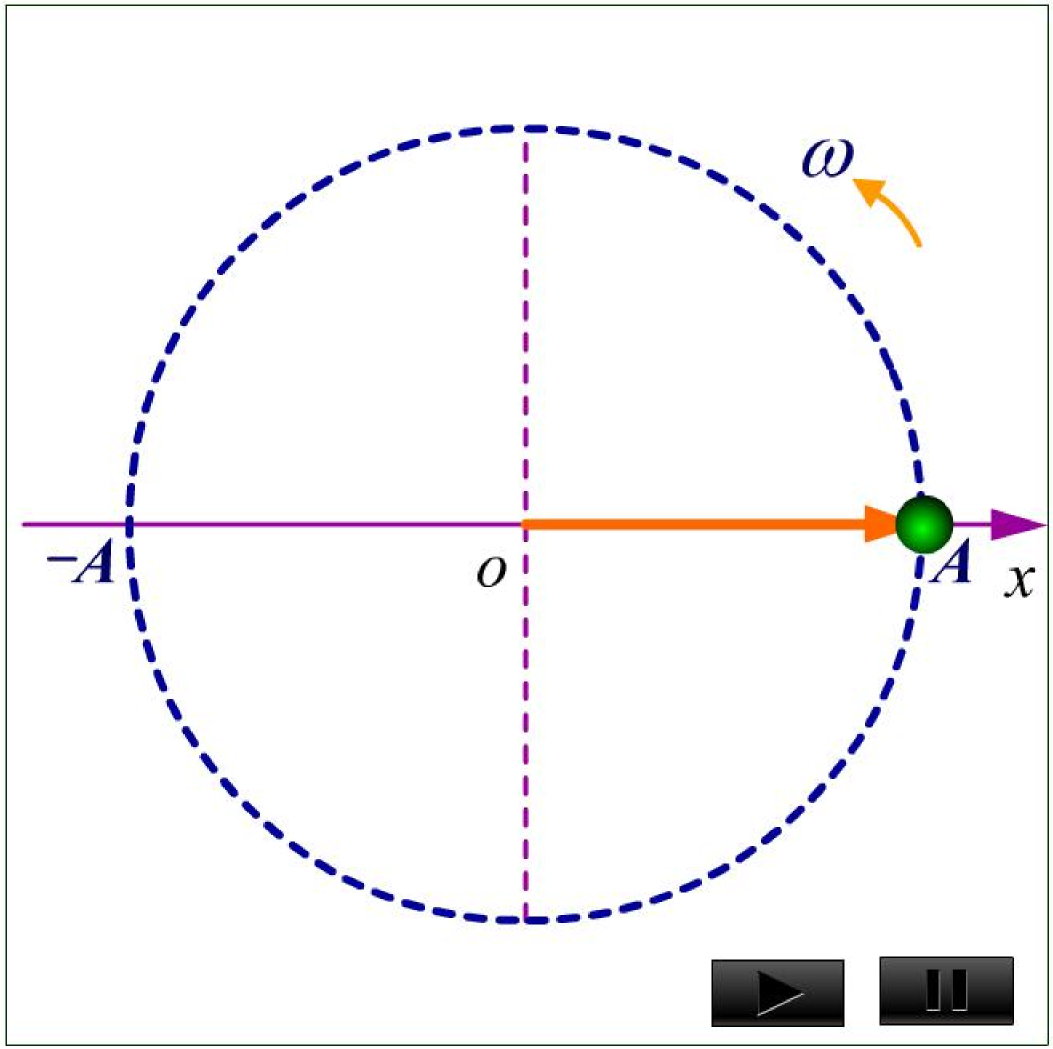
- 旋转矢量 $\vec{A}$ 的模即为简谐振动的**振幅**。
- 旋转矢量 $\vec{A}$ 的角速度 ω 即为振动的**角频率**。
- 旋转矢量 $\vec{A}$ 与 x 轴的夹角($\omega t+\varphi_0$)，为简谐振动的**相位**。
- $t=0$ 时，$\vec{A}$ 与 x 轴的夹角 φ_0 即为简谐振动的**初相位**。
- 旋转矢量 $\vec{A}$ 旋转一周，P 点完成一次完全振动

周期：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$



$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

旋转矢量$\vec{A}$的端点在x轴上的投影点的运动为简谐运动.



【例题 】一物体沿x轴作简谐振动，振幅A=0.12 m，周期T=2 s。当t=0时,物体的位移x=0.06 m,且向x 轴正向运动。求：(1)简谐振动表达式;(2) t =T/4时物体的位置、速度和加速度;(3)物体从x =-0.06 m向x 轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间。

解：(1) 设简谐振动表达式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ \mathrm{s}^{-1}$$

由初始条件：

$$\left.\begin{aligned} &0.06 = 0.12\cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3} \\ &v_0 = -\omega A\sin\varphi > 0 \rightarrow \sin\varphi_0 < 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$

简谐振动表达式： $x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3}) \quad (\mathrm{m})$

(2) *t* =*T*/4时物体的位置、速度和加速度

$$x\big|_{t=0.5} = 0.12\cos(0.5\pi - \frac{\pi}{3}) = 0.104(\mathrm{m})$$

$$v\big|_{t=0.5} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0.5} = -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})\bigg|_{t=0.5} = -0.189\ (\mathrm{m/s})$$

$$a\big|_{t=0.5} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0.5} = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\bigg|_{t=0.5} = -1.024\ (\mathrm{m/s}^2)$$

或 $$a\big|_{t=0.5} = \omega^2 x\big|_{t=0.5} = -1.024\ \mathrm{m/s}^2$$

设在某一时刻 t_1， $x = -0.06$ m

$$-0.06 = 0.12\cos(\pi t_1 - \pi/3)$$

$$\cos(\pi t_1 - \pi/3) = -\frac{1}{2}$$

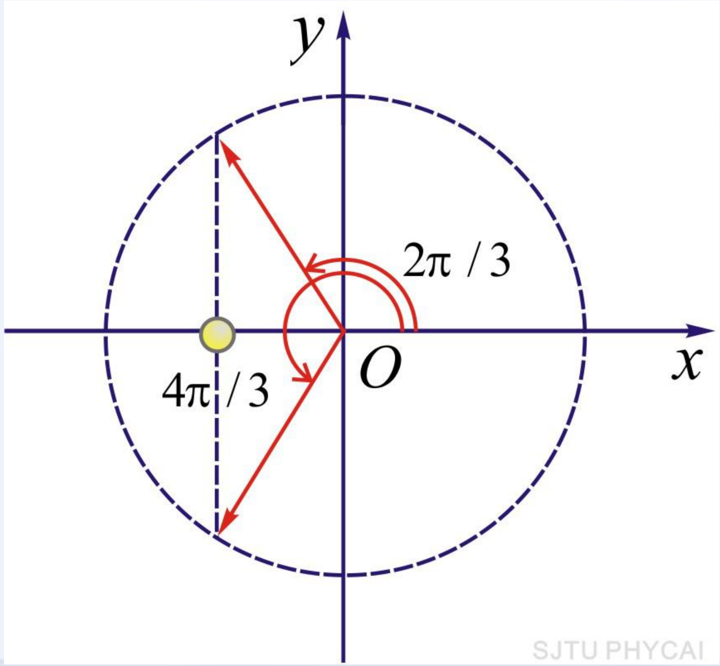
$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad 或 \quad \frac{4\pi}{3}$$

且向x轴负方向运动。

$$\Longrightarrow \quad \pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad t_1 = 1\ \text{s}$$

(3)物体从x =-0.06 m向x轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间。



设t_2时刻第一次回到平衡位置

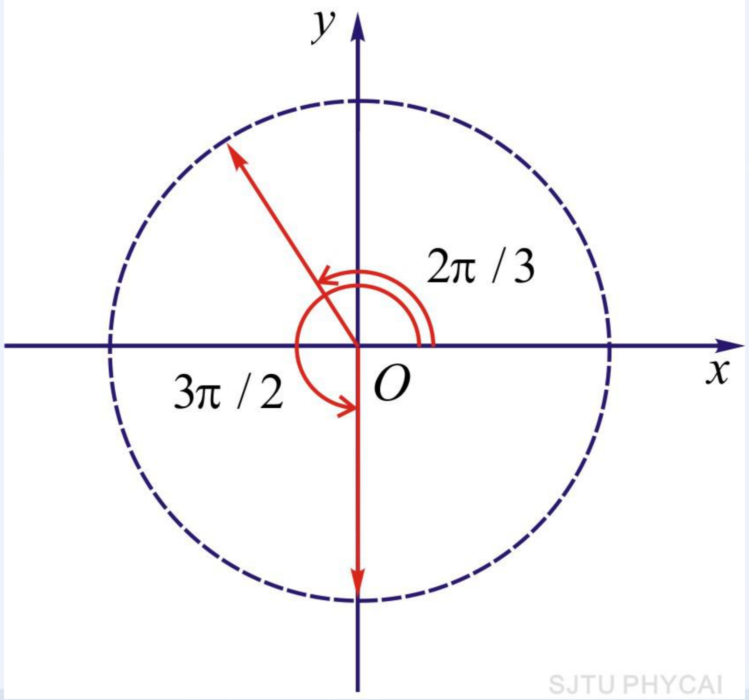
$$\pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow t_2 = \frac{11}{6}\ \mathrm{s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (\frac{11}{6} - 1)\mathrm{s} = \frac{5}{6}\ \mathrm{s}$$

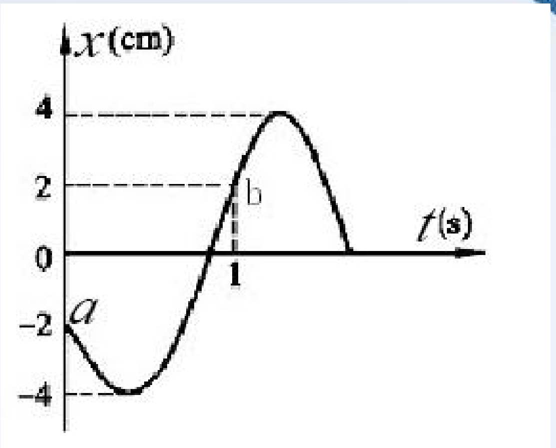
或：$$\Delta\varphi = (\frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3}\pi) = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore \Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{5}{6}\ (s)$$

(3)物体从x =-0.06 m向x 轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间。



【例】已知如图所示的谐振曲线，试写出振动方程。



解：(1)　设简谐振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$A=4cm$，　$x_0=-2cm$，且$v_0<0$,

得：$-2 = 4\cos\phi_0 \rightarrow \phi_0 = \pm\dfrac{2\pi}{3}$

$v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 < 0$　$\Longrightarrow$　$\varphi_0 = \dfrac{2\pi}{3}$

又：$t = 1s, x = 2cm$　$\omega + 2\pi/3 = \dfrac{5\pi}{3}$　或 $= \dfrac{\pi}{3}$

$2 = 4\cos(\omega + 2\pi/3)$　$v_0 = -\omega A\sin\phi > 0$　$\Longrightarrow$　$\omega = \pi$

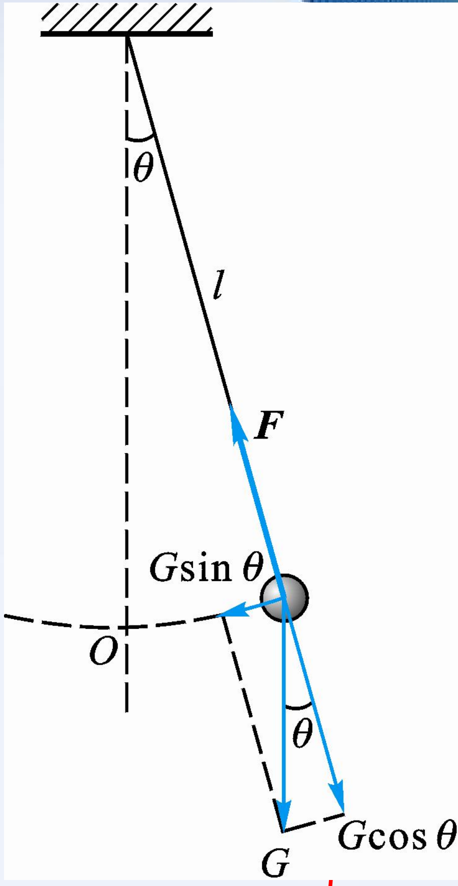
$$x = 4\cos(\pi t + \frac{2\pi}{3}) \quad (cm)$$

【例】单摆的微小振动

使小球往返运动的力是重力的切向分力：

$$F = G_t = mg\sin\theta$$

$\boldsymbol{\theta}$很小时，振动的力可以写为：$F = -mg\theta$



$$F = ma_t \;= m\frac{dv}{dt} \;= m\frac{d}{dt}(l\omega) = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

令 $\omega^2 = g/l \Longrightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$

振动表达式为 $\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

（四）谐振动的能量 -------以弹簧振子为例

$$F=-kx \quad \begin{cases} x=A\cos(\omega t+\varphi_0) \\ v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi_0) \\ E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0) \end{cases}$$

注意动能和势能的转换

$$\omega^2=k/m \qquad E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kA^2\propto A^2$$

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

谐振动的动能和势能在一个周期的平均值：

$$\overline{E}_{\mathrm{k}} = \frac{1}{T}\int_{o}^{T} E_k(t)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t+\varphi)dt$$

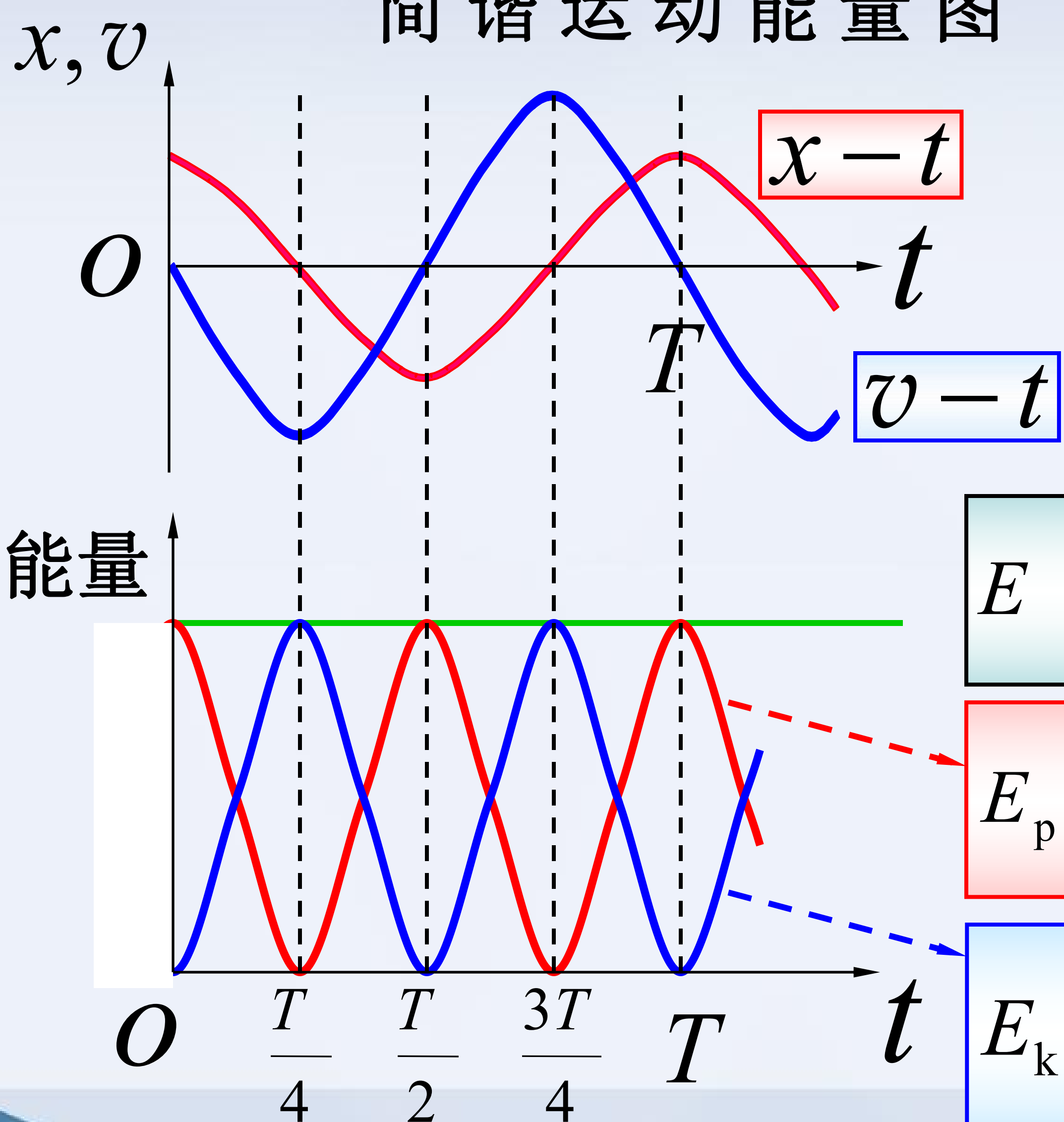
$$= \frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E}_P = \frac{1}{T}\int_{o}^{T} E_P(t)dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t+\varphi)dt$$

$$= \frac{1}{4}kA^2$$

谐振动的动能和势能在一个周期的平均值相等，且等于总能量的一半。

简谐运动能量图



$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi_0)$

$\varphi_0 = 0$

$x = A\cos\omega t$

$v = -A\omega\sin\omega t$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\omega t$$

【例题】质量为0.10kg 的物体，以振幅1.0×10^{-2} m作简谐运动，其最大加速度为$4.0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，求：

（1）振动的周期；

解：

$$a_{\max} = A\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = 20\,\mathrm{s^{-1}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.314\,\mathrm{s}$$

（2）通过平衡位置的动能；

$$E_{\mathrm{k,max}} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = 2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$$

$$T = 0.314\ \mathrm{s} \qquad E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

（3）总能量：

$$E = E_{\mathrm{k,max}} = 2.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

（4）物体在何处其动能和势能相等？

$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}}$ 时， $E_{\mathrm{p}} = 1.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$

由 $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$

$$x^2 = \frac{2E_{\mathrm{p}}}{m\omega^2} = 0.5\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2 \qquad x = \pm 0.707\ \mathrm{cm}$$

第二节　振动的合成

◆ 简谐振动　最简单、最基本的振动.

$$\text{简谐振动} \underset{\text{分解}}{\overset{\text{合成}}{\longleftrightarrow}} \text{复杂振动}$$

一、一维线性振动的合成

- 两个同方向同频率简谐运动的合成
- 两个同方向不同频率简谐运动的合成

二、二维线性振动的合成

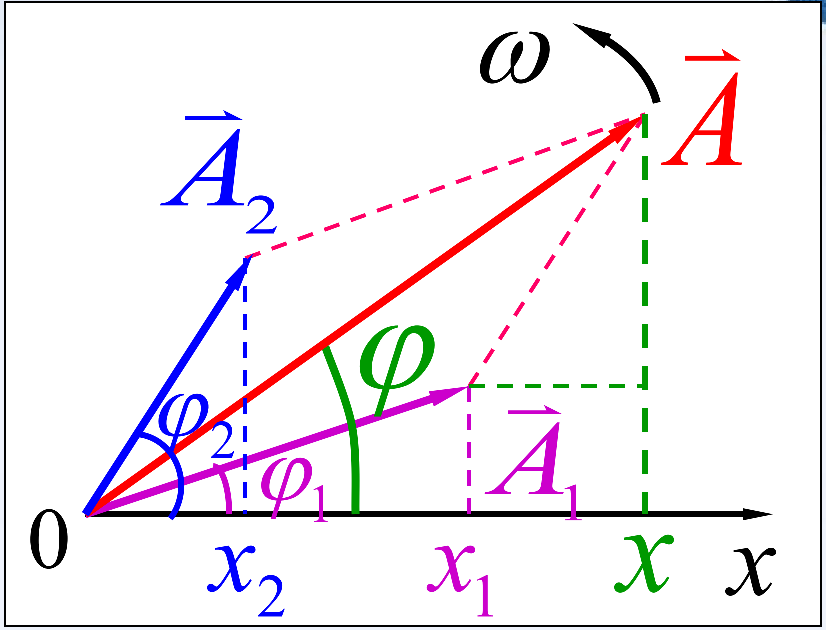
- 两个同频率垂直简谐振动的合成
- 两个不同频率垂直简谐振动的合成

1、 两个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$



$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

两个同方向同频率简谐运动合成后仍为简谐运动

结论： $$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

➢ 相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

1）相位差 $\Delta\varphi=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=A_1+A_2$$

相互加强

2）相位差 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$

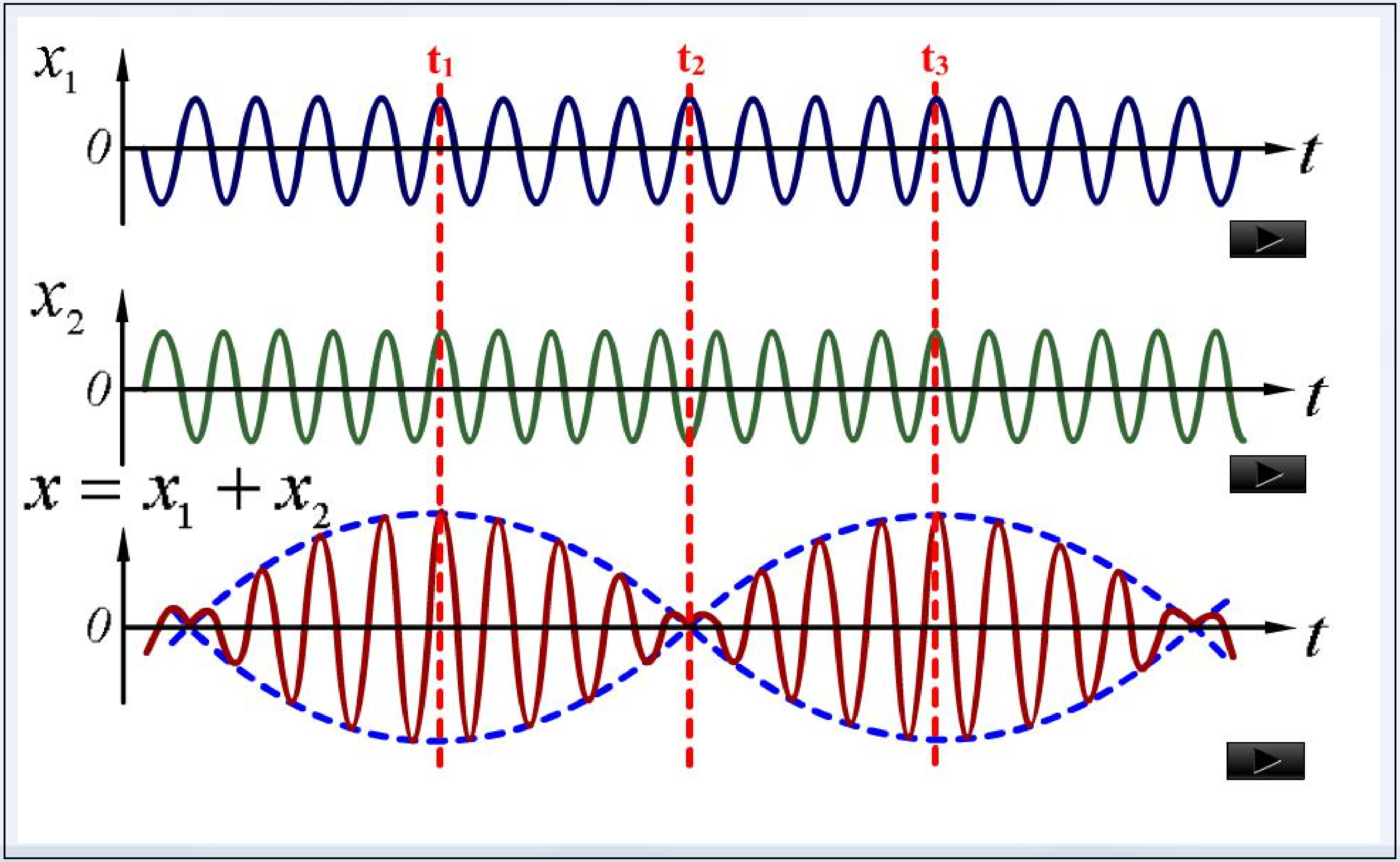
相互削弱

3）一般情况

$$A_1+A_2>A>\left|A_1-A_2\right|$$

2、两个同方向不同频率简谐运动的合成

------拍的现象

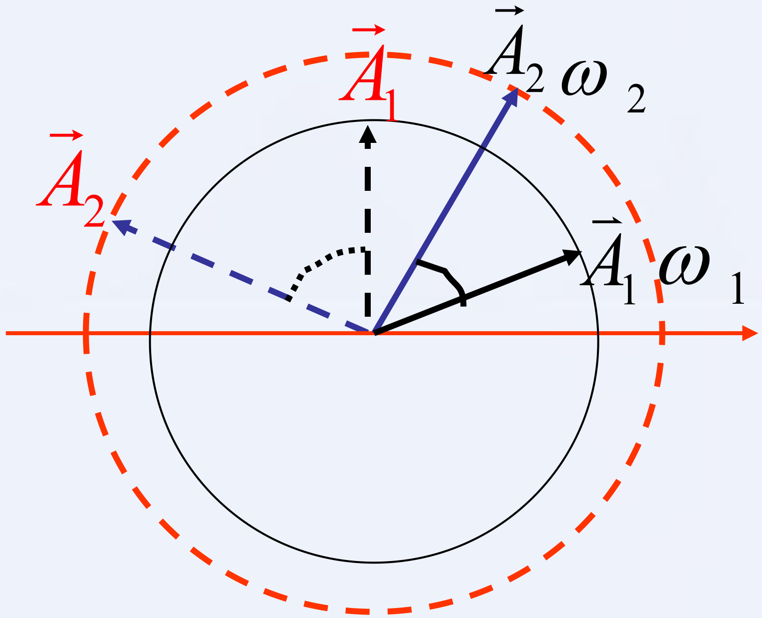


设同方向、角频率分别为 ω_1 和 ω_2 的两简谐振动（$\omega_2 > \omega_1$），它们所对应的旋转矢量分别为 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$$



$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$+ A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

其合运动不是简谐振动。

设： $A_1 = A_2 = A \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$

$$x = \boxed{2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t} \cdot \cos(\boxed{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}t + \varphi_0)$$

周期性变化，但不明显

合振动的振幅部分 合振动的角频率

若 ω_1 和 ω_2 都较大，且两者相差很小：

振幅： $A' = \left|2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right|$ 随时间缓慢变化 $\begin{cases} A_{\max} = 2A_1 \\ A_{\min} = 0 \end{cases}$

拍：合振动的振幅随时间作周期性加强和减弱的现象。

合振幅一次强弱的变化，叫一拍。

振幅： $A' = \left| 2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t \right|$

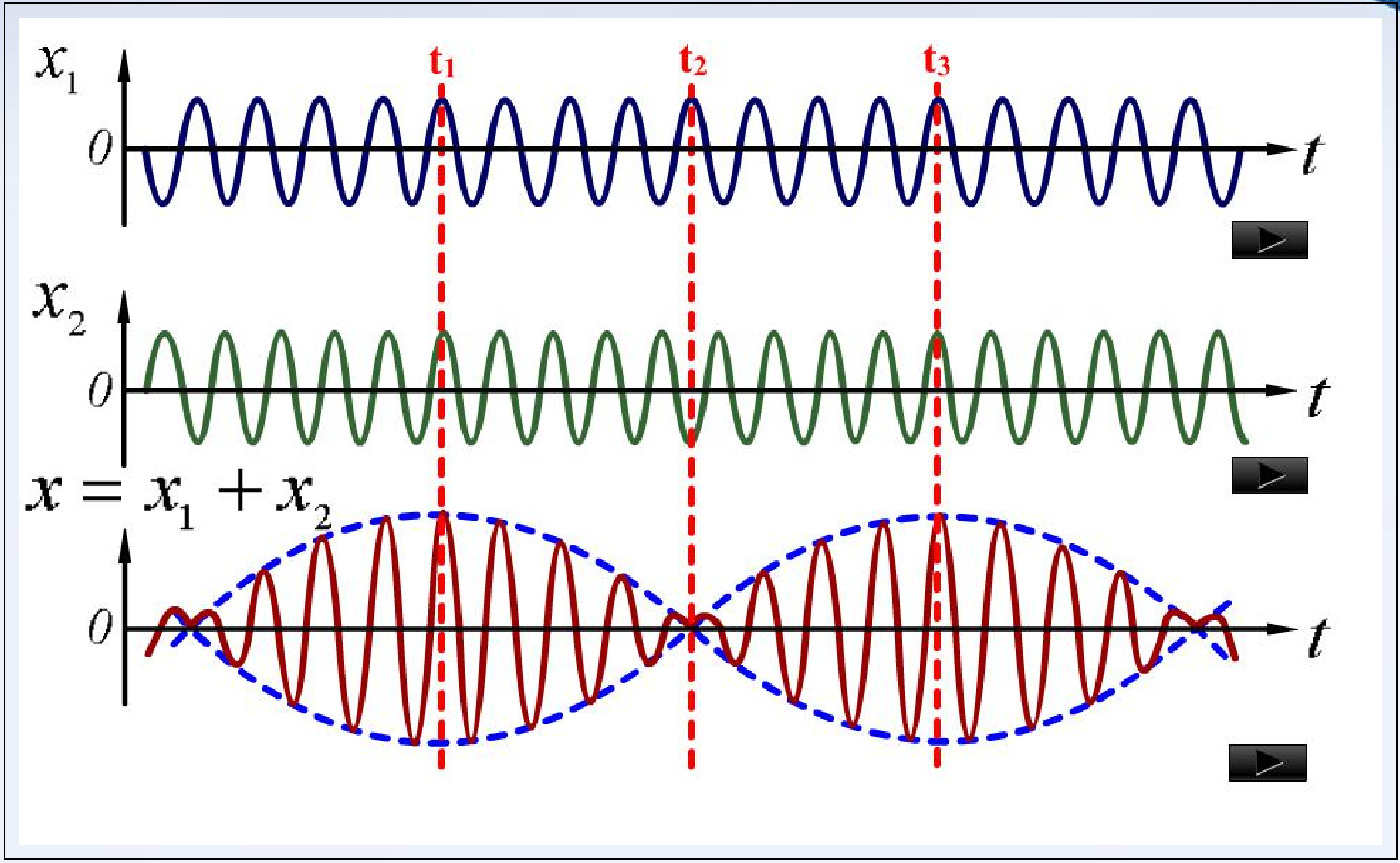
合振动振幅变化的周期（即拍的周期）：

$$T' = \frac{\pi}{\frac{|\omega_2-\omega_1|}{2}} = \frac{2\pi}{|\omega_2-\omega_1|}$$

拍的频率： $f_{拍} = \frac{|\omega_2-\omega_1|}{2\pi} = |f_2 - f_1|$

即:拍频在数值上等于俩分振动的频率之差。

合振动的频率： $f = \frac{\frac{\omega_2+\omega_1}{2}}{2\pi} = \frac{f_2+f_1}{2}$



频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍.

第三讲 平面简谐波

➢ 波动 —— 振动状态在空间的传播过程。

经典波
- 机械波 机械振动在弹性介质中的传播。
- 电磁波 交变电磁场在空间的传播。

两类波的不同之处

❖机械波的传播需有传播振动的弹性介质;

❖电磁波的传播可不需介质。

两类波的共同特征

- 能量传播
- 反射
- 折射
- 叠加性
- 干涉
- 衍射

一、物体的弹性形变

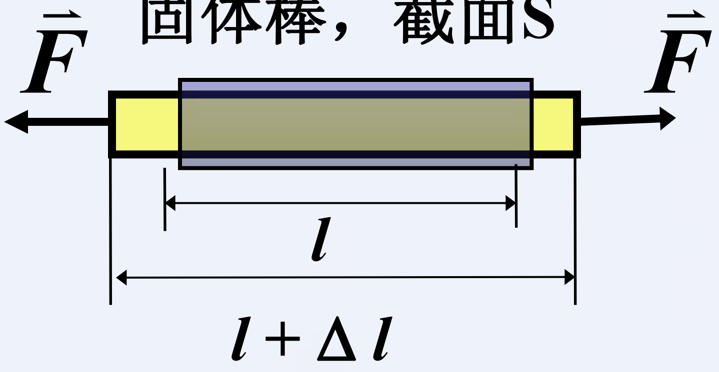
（一）弹性形变的定义

形变—— 物体在受到外力作用时，形状、体积发生的变化。

弹性形变—— 去掉外力后，形状、体积可以恢复的形变。

（二）弹性形变的分类

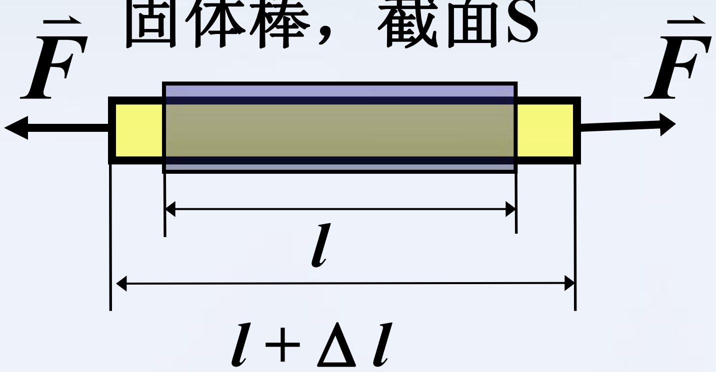
1、线变



应力：$\dfrac{F}{s}$　　应变：$\dfrac{\Delta l}{l}$

胡克定律： 应力与线应变成正比

即：
$$\frac{F}{s}=E\frac{\Delta l}{l}$$



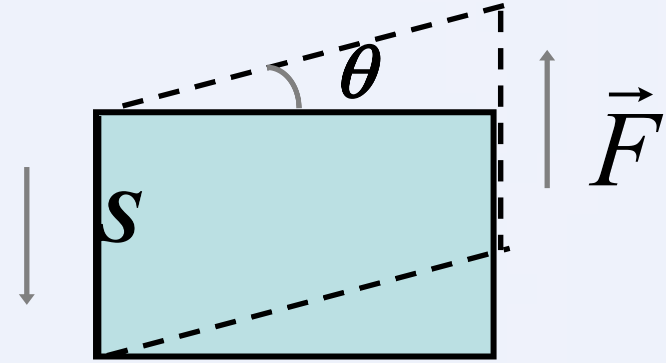
杨氏弹性模量： E（N/m^2）

由上式得：
$$F=\frac{ES}{l}\Delta l=k\Delta l$$

k为劲度系数

2、切变

切应力： F/S 切应变： θ



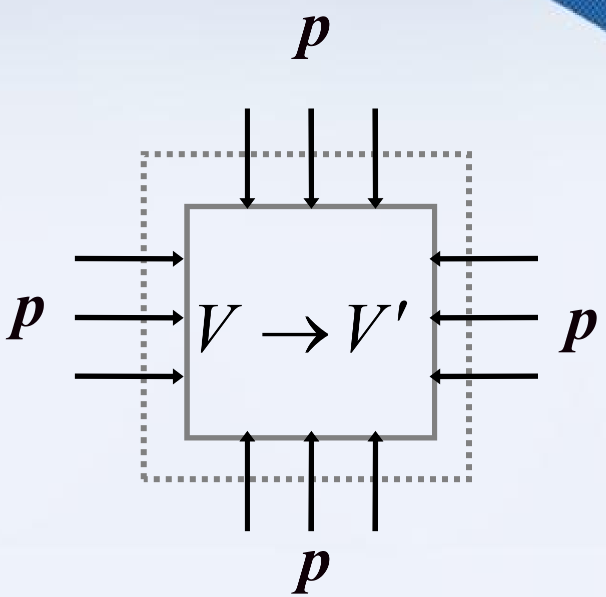
$$\frac{F}{S}=G\theta$$

切变模量： G （N/m^2）

3、体变

压强为p时，体积为V;

压强为$p+\Delta p$时，体积为$V+\Delta V$。



体应变： $\Delta V/V$

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}$$

体变模量 ：B（N/m^2）

$$\Delta p > 0, \Delta V < 0; \quad \Delta p < 0, \Delta V > 0$$

二、机械波的产生和传播

1、机械波产生的条件：

机械波： 机械振动(波源)在弹性介质中的传播过程。

机械波产生的两个条件：

首先是要有作机械振动的波源；

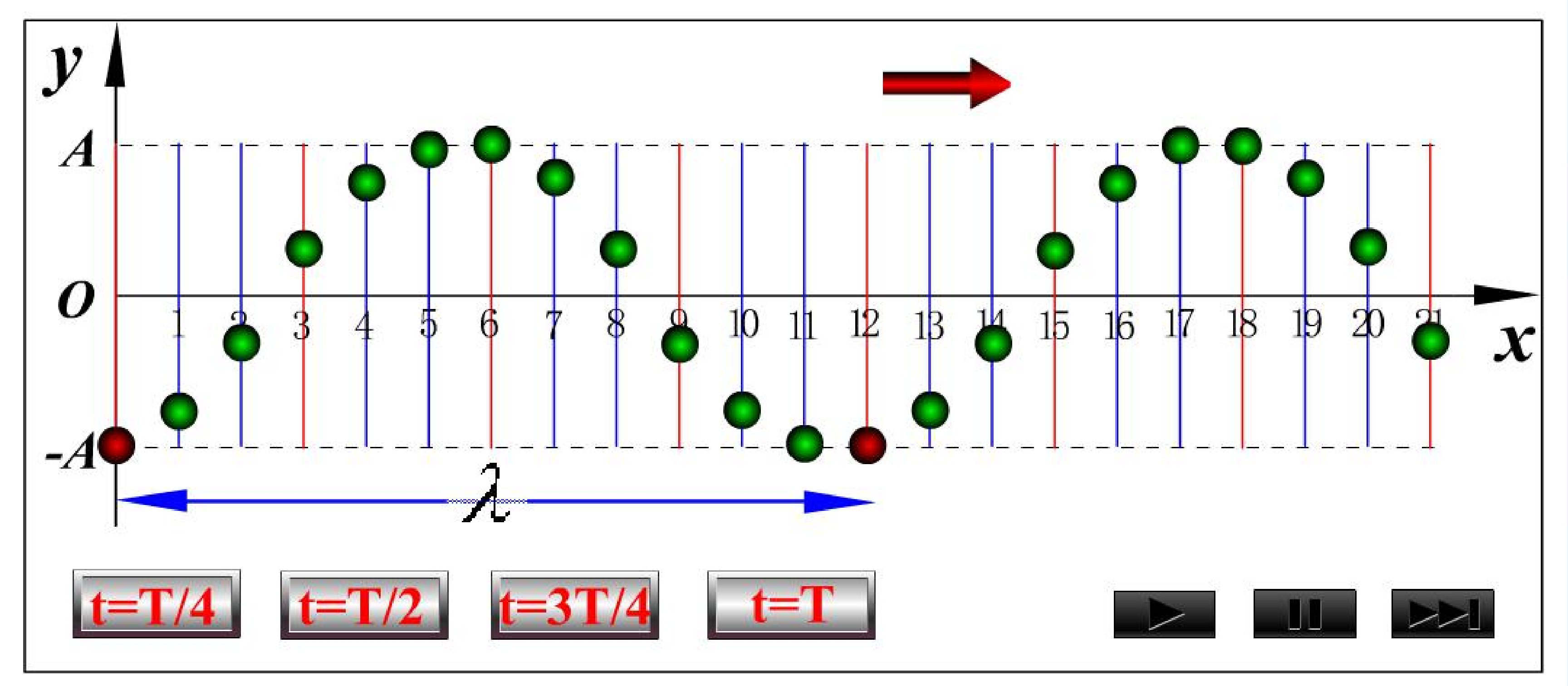
其次是要有能够传播机械振动的媒质，

传播特征： 由近及远传播振动状态。

2、横波与纵波

横波：质点振动方向与波的传播方向相垂直的波。

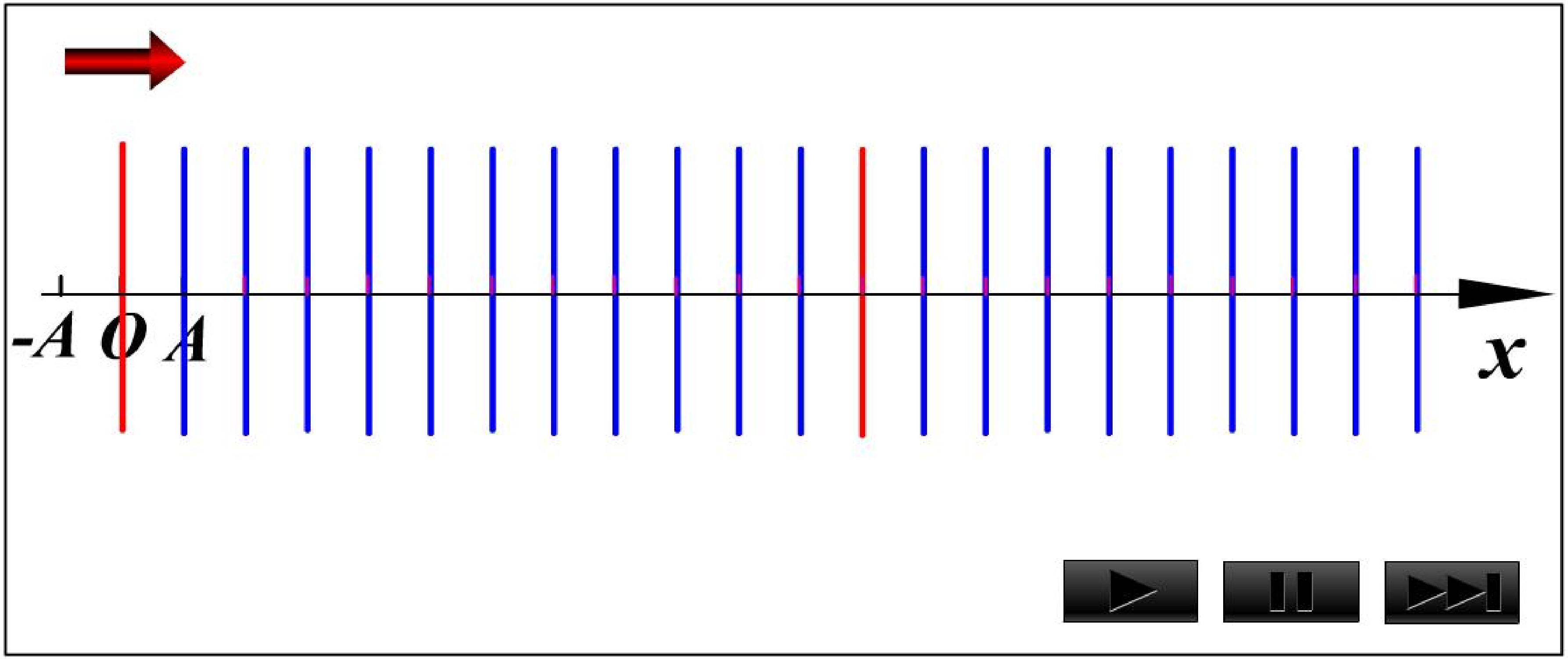
（仅在固体中传播 ）



- 特征：具有交替出现的波峰和波谷.

纵波：质点振动方向与波的传播方向互相平行的波。

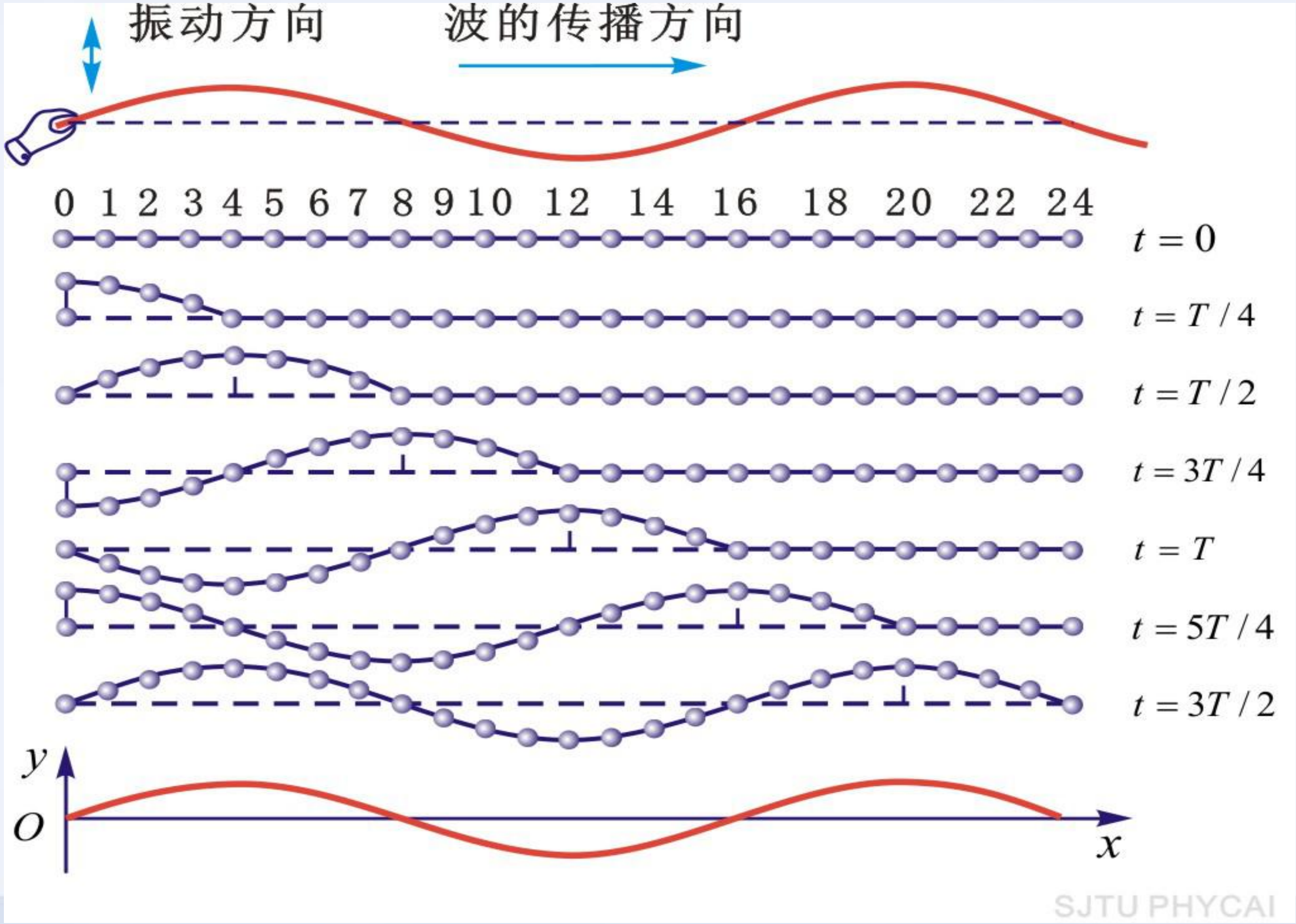
（可在固体、液体和气体中传播）



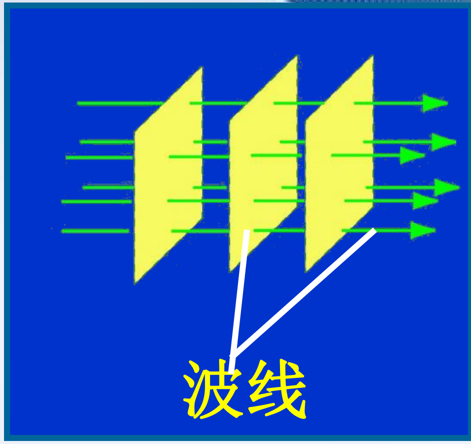
➢ 特征：具有交替出现的密部和疏部.

注意

波是振动运动状态的传播，介质的质点并不随波传播。



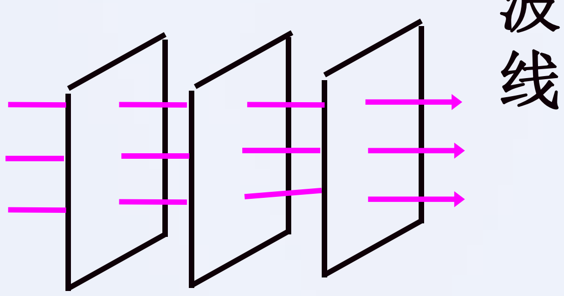
3、波面和波线



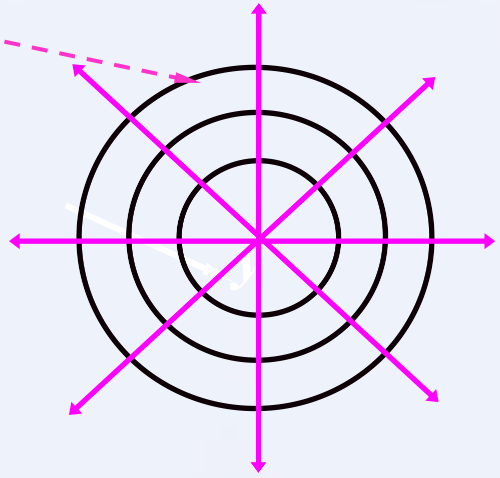
•**波面** 在波传播过程中，任一时刻波所到达的各点联结成的面。

•**波射线** 表示波传播方向的射线。

•**波前** 在某一时刻，波传播到的最前面的波面。（唯一的）



平面波



球面波

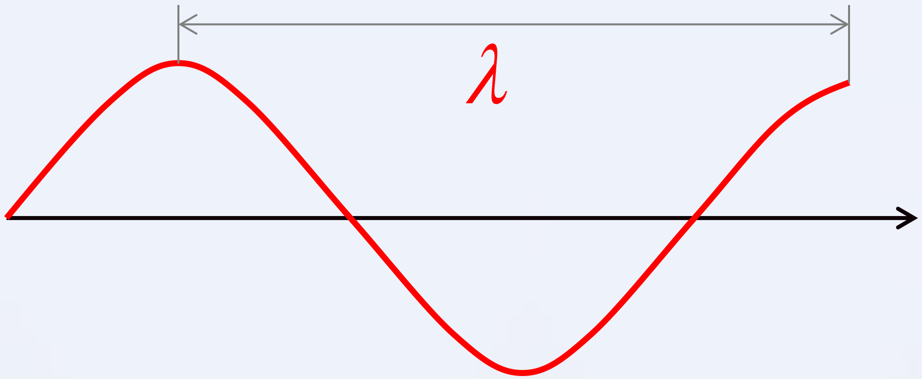
特点：1）各波面上各点的相位相同（同相面）。

2）在各向同性介质中波射线与波阵面相互垂直。

3)波射线是波的能量传播方向。

4、描述波动的物理量

1）波长$\lambda(m)$：沿波的传播方向,两相邻同相位点之间的距离.



2） 周期T（s）：波前进一个波长的距离所需的时间。

(等于波源的振动周期)

频率f(Hz)： $$f=\frac{1}{T}$$

单位时间内波动所传播的完整波的数目.

角频率(rad/s)： $$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

3) 波速 u (相速)：振动状态或相位在空间的传播速度。

$$u=\frac{\lambda}{T}=\nu\lambda$$

u 一般取决于介质的性质(弹性和惯性)。

三、平面简谐波的波函数

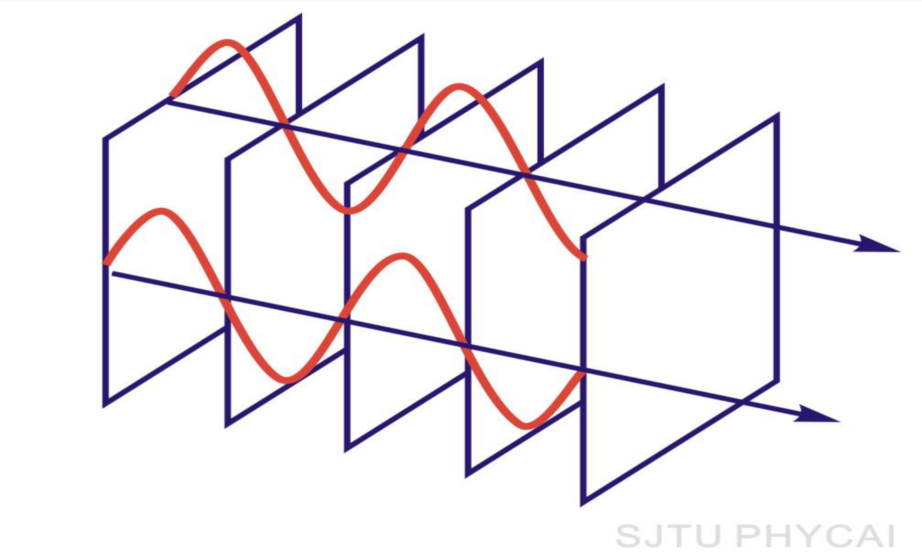
➢**简谐波：**在均匀的、无吸收的介质中，波源作简谐运动时，在介质中所形成的波.

各种不同的简谐波 $\xrightarrow{\text{合成}}$ 复杂波

各种不同的简谐波 $\xleftarrow[\text{分解}]{}$ 复杂波

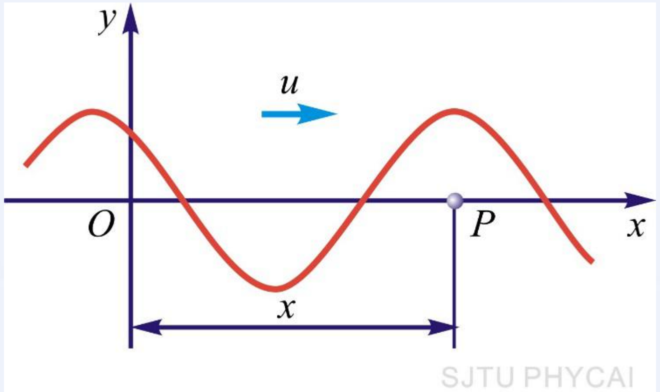
- 如果波阵面为平面，则为**平面简谐波**。

平面波的特点：任一时刻在同一波阵面上的各点有相同的相位。



• 波函数

介质中任一质点（坐标为 x）相对其平衡位置的位移（坐标为 y）随时间的变化关系，即 $y(x,t)$ 称为波函数（波动方程).



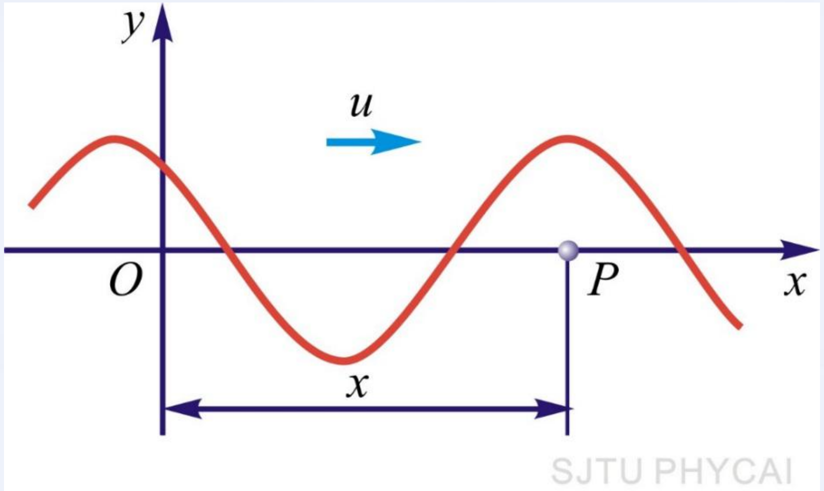
$$\boxed{y = y(x,t)}$$

各质点相对平衡位置的位移

波线上各质点平衡位置

1、平面简谐波的波函数（波动方程）

设一平面余弦波，在无吸收的均匀无限介质中沿x轴的正方向传播，波速为u。取任意一条波线为x轴，取O作为x轴的原点。



O点处质点的振动表式为

$$y_0(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

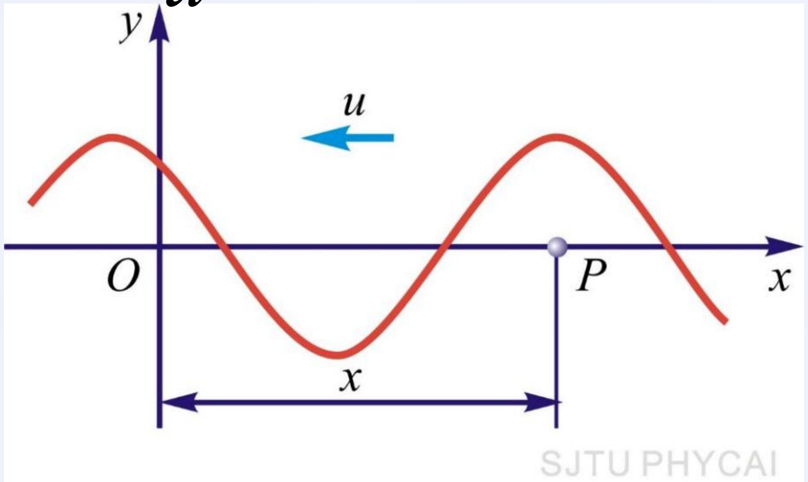
P点的振动状态在时间上落后于O点： $\Delta t = \dfrac{x}{u}$

$$y_P(t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

平面简谐波的波函数：（沿x 轴正向传播）

$$y(x,t) = A\cos[\omega\,(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\,]$$

若波沿x 轴反方向传播：



P点的振动状态在时间上超前于O点：

$$\Delta t = \frac{x}{u}$$

沿x 轴负向传播的平面简谐波的波函数：

$$y(x,t) = A\cos[\omega\,(t+\frac{x}{u})+\varphi_0\,]$$

故：平面简谐波的波函数

$$y(x,t)=A\cos[\omega\,(t\mp\frac{x}{u})+\varphi_0\,]$$

利用关系式 $\omega=2\pi/T=2\pi f$ 和 $uT=\lambda$，可得其他形式的平面简谐波波函数：

$$y(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$

$$y(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(ft\mp\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$

$$y(x,t)=A\cos(\omega\,t\mp k\,x+\varphi_0)$$

其中角波数

$$k=2\pi/\lambda$$

2、波函数的意义:

$$y(x,t)=A\cos[\omega\,(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

(1)当 x 给定时：若x=x_1, 波动式成为x_1 处质点的振动式

$$y(x_1,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi_0]$$

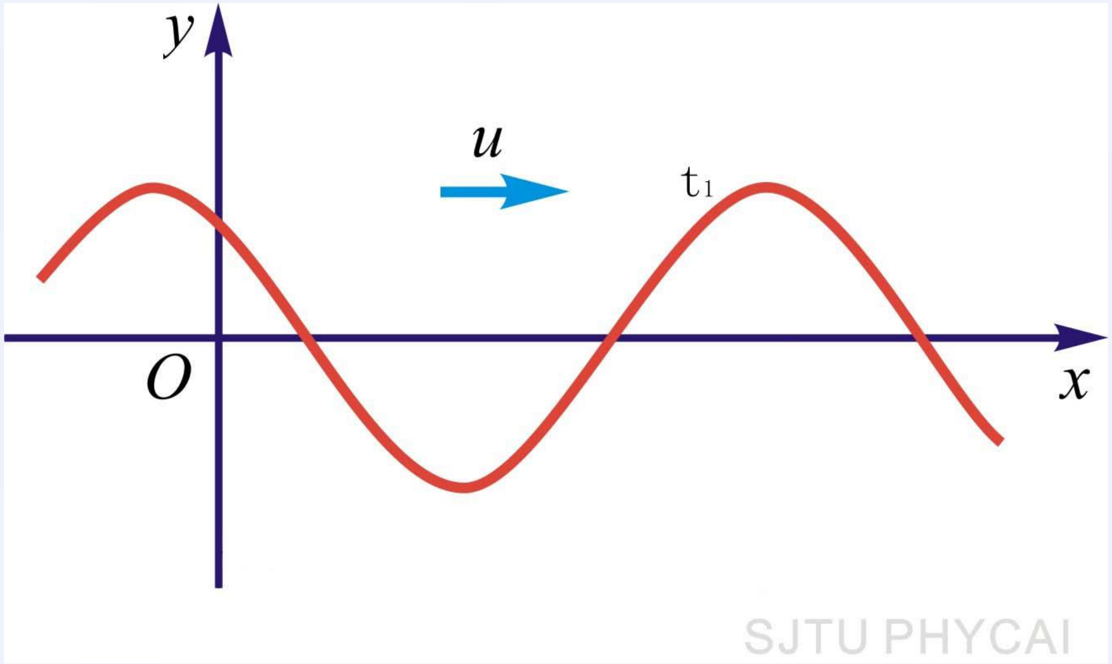
$$=A\cos[\omega t+\varphi_0-\frac{\omega x_1}{u}]=f(t)$$

初相: $\varphi_0-\omega\frac{x_1}{u}=\varphi_0-\frac{2\pi x_1}{\lambda}$

即各质点均做简谐振动。在传播方向上，随着x 值的增大，各质点的相位依次落后。这是波动的一个基本特征。

(2)当 t 给定时：若$t=t_1$，波动式表示t_1时的波形

$$y(x,t_1)=A\cos[\omega\,(t_1-\frac{x}{u})+\varphi_0]=f(x)$$

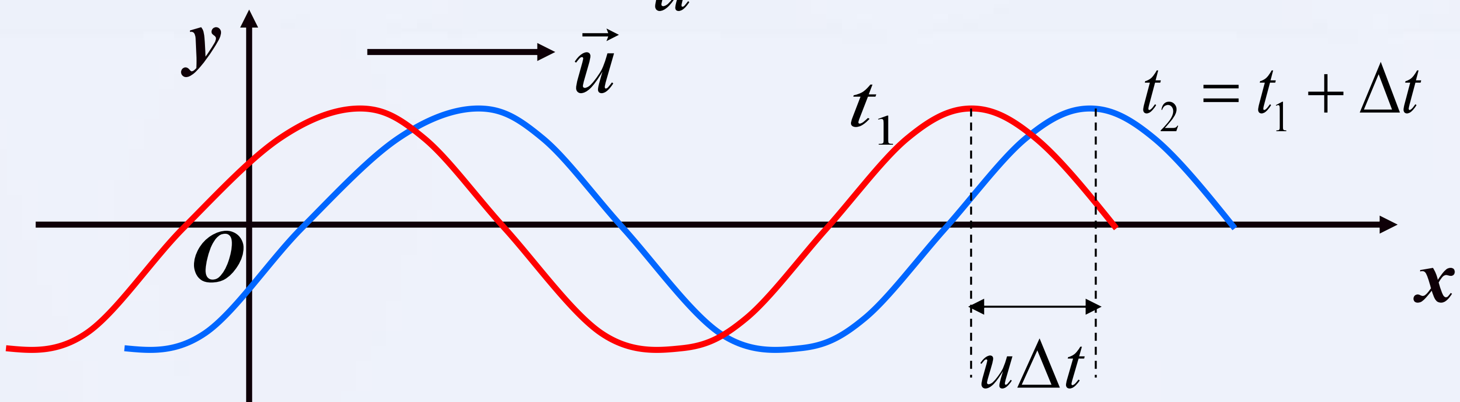


(3)当$y=y_1$时（观察某一振动）:

$$y_1(x,t_1)=A\cos[\omega\,(t_1-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$=A\cos[\omega\,(t_1+\Delta t-\frac{x+\Delta x}{u})+\varphi_0]$$

$$\omega\Delta t=\frac{\omega\Delta x}{u}\qquad \Delta x=u\Delta t$$



t_1 时刻的波形经Δt 时间沿波的传播方向移动了 $u\Delta t$ 的距离，波函数反映了波形的传播——行波。

（4） 若 x, t 均变化，波函数才有完整的意义：

既表示了波线上各个不同质点在不同时刻的振动位移，又形象地反映了波形的传播。

同一质点在先后时刻的相位差：

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T} = \omega\Delta t$$

不同质点在同一时刻的相位差：

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = k\Delta x$$

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[2\pi\nu t \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0]$$

$$y = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut \mp x) + \varphi_0] = A\cos[k(ut \mp x) + \varphi_0]$$

$$A\cos[\omega t \mp kx + \phi_0]$$

3、平面波的波动方程

$$y(x,t)=A\cos[\omega\,(t\mp\frac{x}{u})+\varphi_0\,]$$

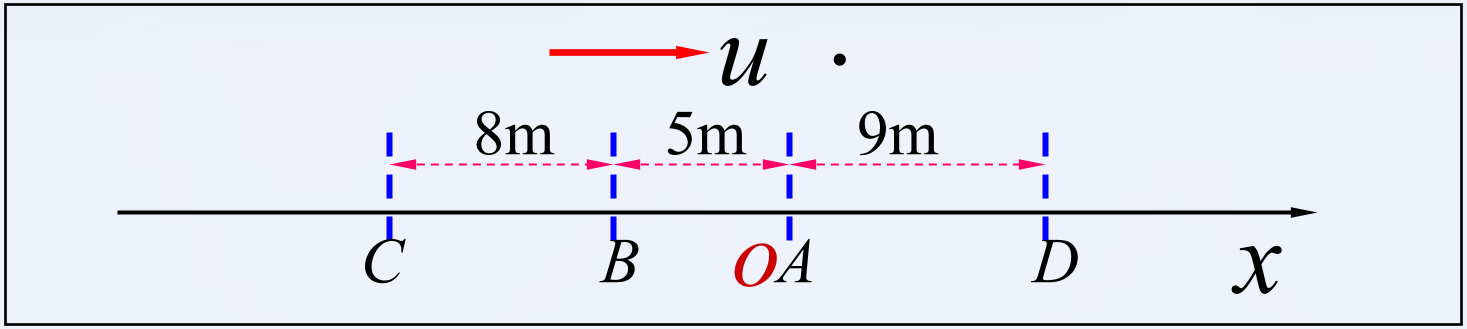
速度：$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin[\,\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

加速度：$$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-A\omega^2\cos[\omega\,(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\,]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{A\omega^2}{u^2}\cos[\omega\,(t-\frac{x}{u})+\varphi_0\,]$$

平面波的波动方程：$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

【例题】一平面简谐波以速度$u=20\mathrm{m/s}$ 沿直线传播，波线上点 A 的简谐运动方程 $y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)\mathrm{m}$



1）以 A 为坐标原点，写出波函数

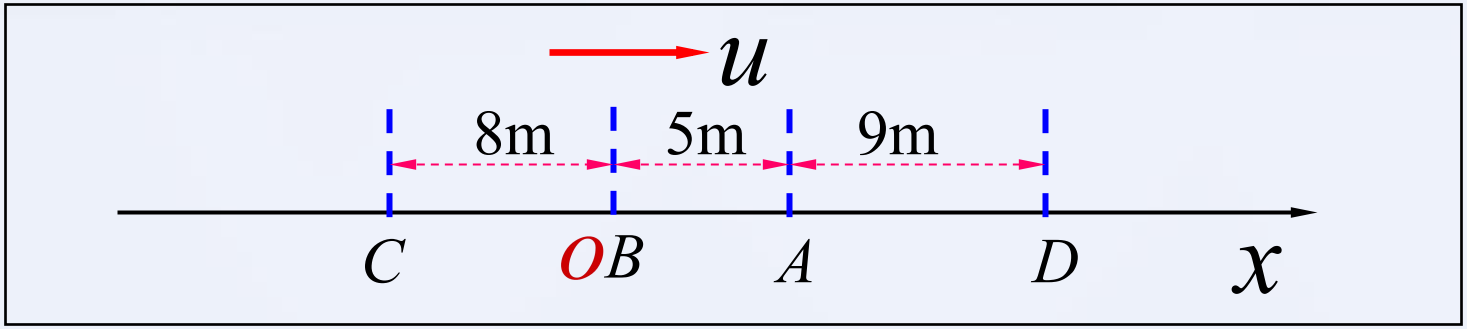
$$A=3\times10^{-2}\mathrm{m} \quad T=0.5\mathrm{s} \quad \varphi=0 \quad \lambda=uT=10\mathrm{m}$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y = 3\times10^{-2}\cos 2\pi(\frac{t}{0.5}-\frac{x}{10})\mathrm{m}$$

2）以 B 为坐标原点，写出波函数

$$y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)\text{m}$$



$$\varphi_B - \varphi_A = -2\pi\frac{x_B - x_A}{\lambda} = -2\pi\frac{-5}{10} = \pi$$

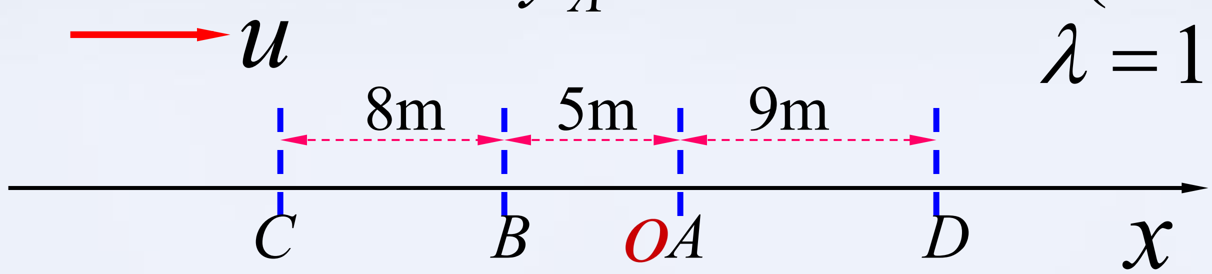
$$\varphi_B = \pi \qquad y_B = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + \pi)\text{m}$$

$$y = 3\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{10}) + \pi]\text{m}$$

3）写出传播方向上点C、点D的简谐运动方程

$$y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)\mathrm{m}$$

$$\lambda = 10\mathrm{m}$$



点 C 的相位比点 A 超前

$$y_C = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + 2\pi\frac{AC}{\lambda})\mathrm{m}$$

$$= 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + \frac{13}{5}\pi)\mathrm{m}$$

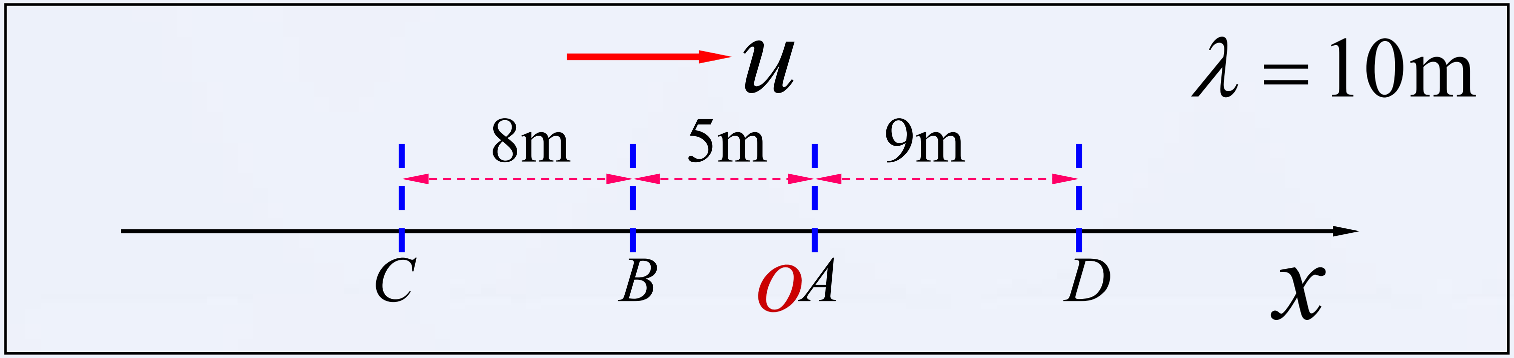
点 D 的相位落后于点 A

$$y_D = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t - 2\pi\frac{AD}{\lambda})$$

$$= 3\times10^{-2}\cos(4\pi t - \frac{9}{5}\pi)\mathrm{m}$$

4）分别求出 BC，CD 两点间的相位差

$$y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)\mathrm{m}$$

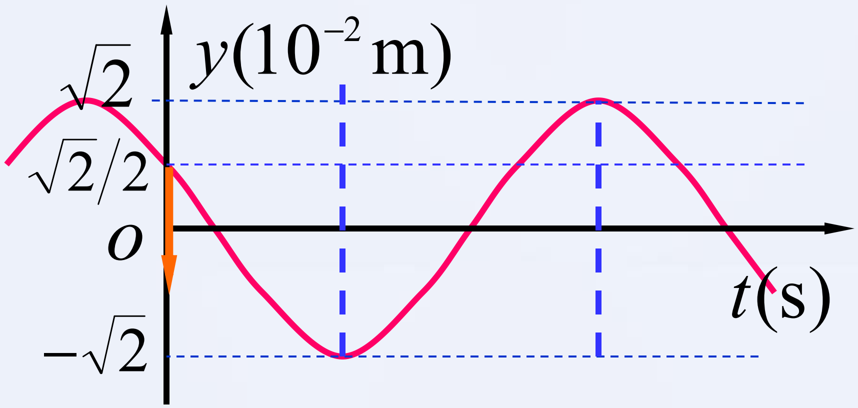


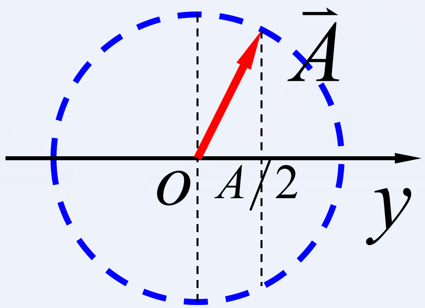
$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi\frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi\frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi\frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi\frac{-22}{10} = 4.4\pi$$

【例题】 一简谐波沿ox轴正向传播，$\lambda = 4\mathrm{m}, T = 4\mathrm{s}$ 已知 $x = 0$ 点振动曲线如图，求 1） $x = 0$ 点振动方程、2）波函数。

解：
$$y_o = \sqrt{2}\times 10^{-2}\cos(2\pi\frac{t}{4} + \varphi)\mathrm{m}$$





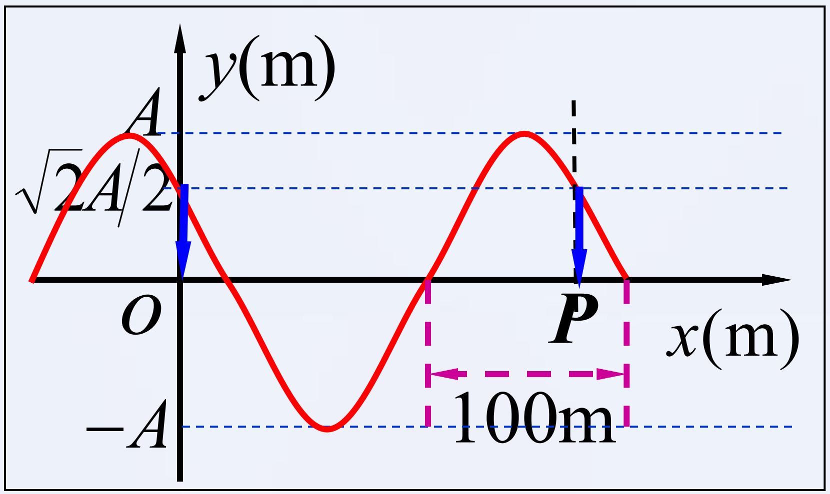
$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{t = 0, x = 0 \quad y = A/2 \quad v < 0}$$

波函数

$$y = \sqrt{2}\times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{4} - \frac{x}{4}) + \frac{\pi}{3}]\mathrm{m}$$

【例题】一平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图如图，设频率 $f=250\,\text{Hz}$，且此时 P 点的运动方向向下，求 1）该波的波函数;



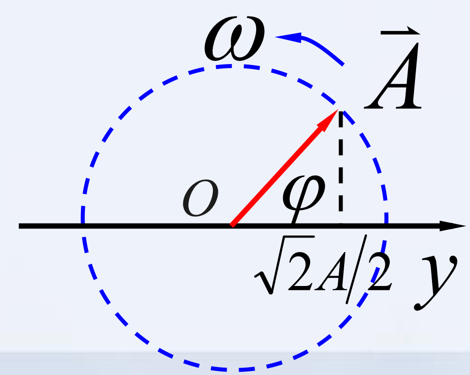
解： $f=250\,\text{Hz}$

$\lambda = 200\ \text{m}$

$\because v_p<0$

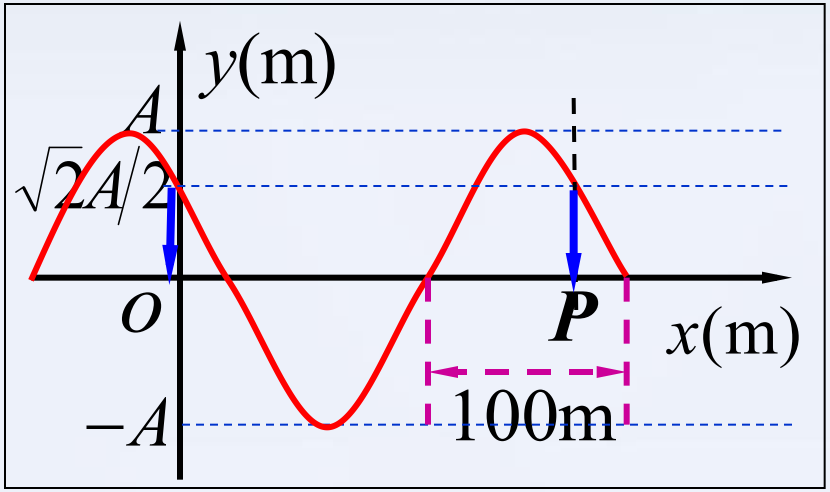
$\therefore$ 波向 x 轴负向传播

$$y=A\cos[2\pi(250t+\frac{x}{200})+\varphi]$$



$\because t=0, x=0 \quad y=\dfrac{\sqrt{2}A}{2} \quad v<0 \qquad \therefore \varphi=\dfrac{\pi}{4}$

$$y = A\cos[2\pi(250t + \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{4}]$$



2） 求在距原点 *O* 为100m处质点的振动方程与振动速度表达式。

$$x = 100\ \mathrm{m},\ y = A\cos(500\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -500\pi A\sin(500\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

【例9.7】一平面简谐横波以$u=200m.s^{-1}$的波速在均匀介质中沿x轴正向传播，位于坐标原点的质点的振动周期为0.02s, 振幅为0.2m, 取原点处质点经过平衡位置且向正方向运动时作为计时起点。（1）写出波动方程；（2）写出距原点为4m处的质点P的振动方程；(3)画出t=0.01s和t=0.015s时的波形图；（4）若以距原点4m处为坐标原点，写出波动方程。

解：（1）设原点0处质点的振动方程为：

$$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

题设条件可求得 $\varphi_0 = \dfrac{3}{2}\pi \Longrightarrow y_0 = 0.2\cos(100\pi t + \dfrac{3}{2}\pi)$

$$y_0 = 0.2\cos(100\pi t + \frac{3}{2}\pi)$$

波动方程为： $y = 0.2\cos\left[100\pi(t - \frac{x}{200}) + \frac{3}{2}\pi\right]$

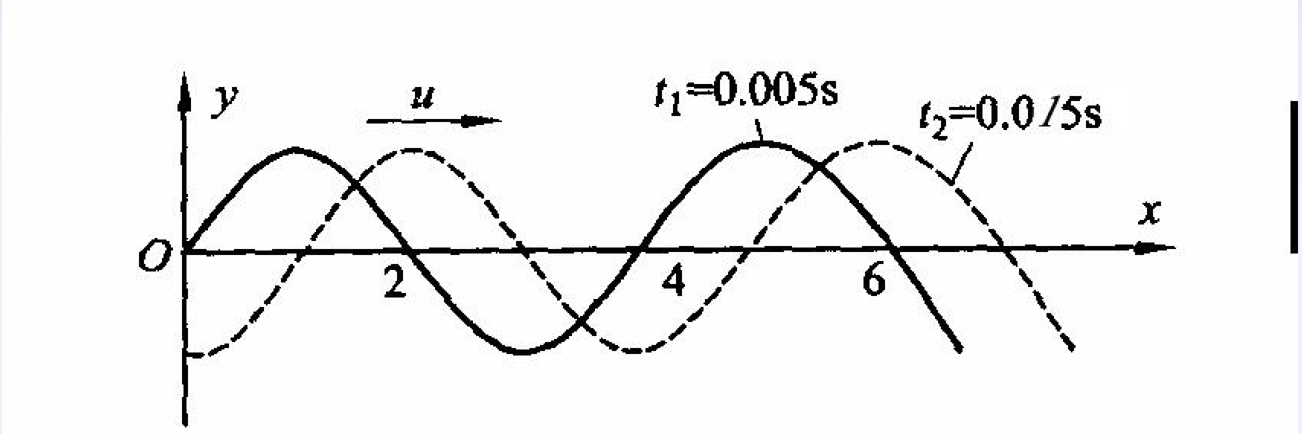
（2）距原点为4*m*处的质点***P***的振动方程为：

$$y = 0.2\cos\left[100\pi(t - \frac{4}{200}) + \frac{3}{2}\pi\right] = 0.2\cos(100\pi t - \frac{1}{2}\pi)$$

将***t***=0.01***s***代人波动方程，得：

$$y = 0.2\cos\left[100\pi(0.01 - \frac{x}{200}) + \frac{3}{2}\pi\right] = 0.2\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x)$$

可得该时刻的波形曲线如图实线所示：



（3） t=0.015s时刻的波形图只需将t=0.01s时刻的波形曲线向着波的传播方向平移1/4λ，如图中虚线所示。

（4）新坐标原点 O的振动方程为：$y_0' = 0.2\cos(100\pi t - \frac{1}{2}\pi)$

新的波动方程为：

$$y' = 0.2\cos\left[100\pi(t - \frac{x'}{200}) - \frac{1}{2}\pi\right])$$