力　学（Mechanics）

第5章　刚体的定轴转动

(Fixed-spindle Rotation of Rigid Body)

本章内容

【学习目的】

（1）掌握角速度、角加速度概念及匀变速定轴转动公式，掌握角量与线量的关系。

（2）理解力矩和转动惯量概念，掌握刚体定轴转动定理，并能运用它解决刚体定轴转动问题；

（3）掌握角动量定理及其守恒定律，并能用它来解决具体问题。

（4）理解功的概念，掌握刚体定轴转动的动能定理和机械能守恒定律。

【教学重点】

（1）力矩和转动惯量概念，定轴转动定理及应用；

（2）角动量定理和角动量守恒定律以及它们的应用。

（3）功的概念，定轴转动动能定理和机械能守恒定律以及它们的应用；

【教学难点】

刚体的角动量和角动量守恒定律以及它们的应用

§5.1 刚体转动的描述

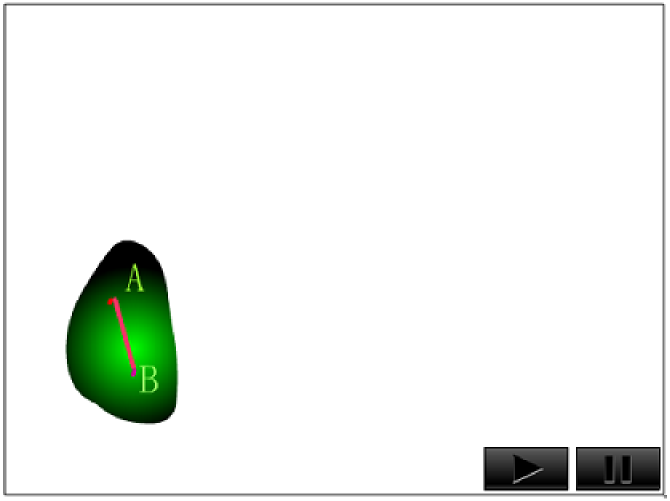
一 、刚体的运动

1、刚体：在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体.（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组）

2、刚体的运动形式：平动、转动。

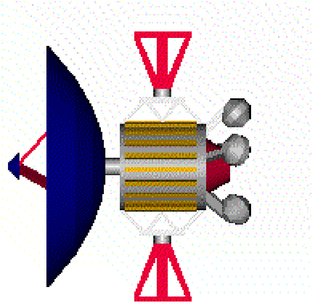
➢ 平动：当刚体运动时，如果刚体内任何一条给定的直线，在运动中始终保持它的方向不变，这种运动叫平动。

特点：刚体内各质点的运动情况完全相同。

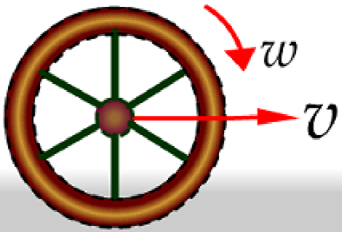


刚体平动 ⟶ 质点运动

➢ **转动：** 刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动．转动又分定轴转动和非定轴转动．



➢ 刚体的平面运动．



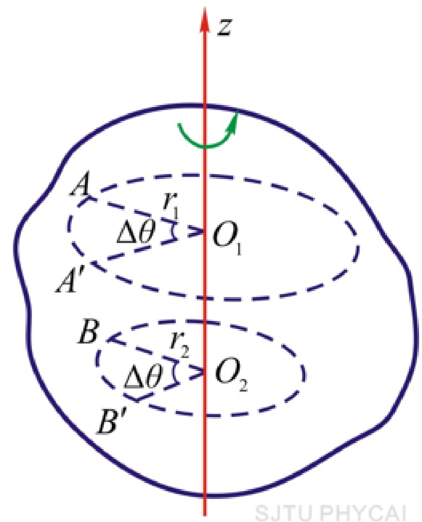
➢ 刚体的一般运动 质心的平动 + 绕质心的转动

➢ 刚体的定轴转动

定轴转动时，刚体上各点都绕同一固定转轴做不同半径的圆周运动。

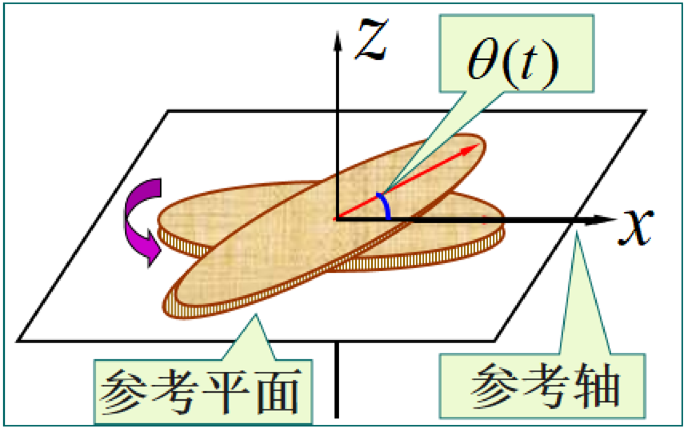
在同一时间内，各点转过的圆弧长度不同，但在相同时间内转过的角度相同，称为角位移，它可以用来描述整个刚体的转动。

故：做定轴转动时，刚体内各点具有相同的角量，包括角位移、角速度和角加速度。但不同位置的质点具有不同的线量，包括位移、速度和加速度。



3、刚体绕定轴转动的角速度和角加速度

（1） 角速度和角加速度



- 角坐标 $\theta = \theta(t)$

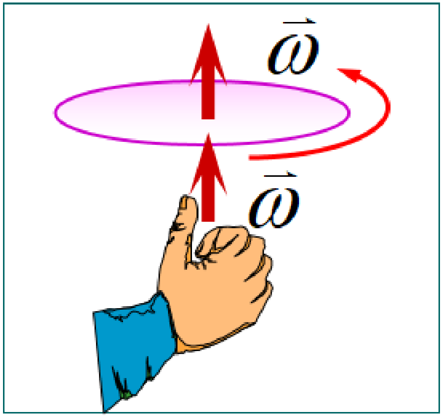
◆ 约定

沿逆时针方向转动 $\theta > 0$

沿顺时针方向转动 $\theta < 0$

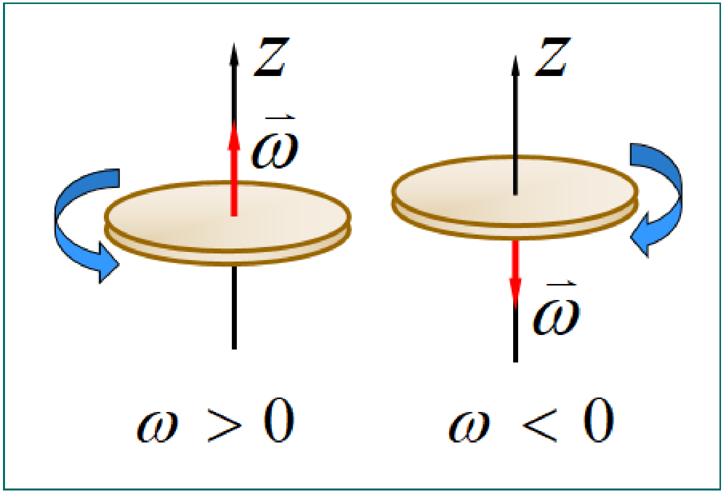
- 角位移 $\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$

- 角速度矢量 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$



◆ $\vec{\omega}$ 方向：右手螺旋方向

➢ 刚体**定轴**转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正负来表示．



➢ 角加速度

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

定轴转动的**特点**

1）每一质点均作圆周运动，圆面为转动平面；

2）任一质点运动$\Delta\theta, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$ 均相同，但$\vec{v}, \vec{a}$ 不同，

3）运动描述仅需一个坐标．

（2）匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动的**角加速度为恒量**时，刚体做匀变速转动．

刚体匀变速转动与质点匀变速直线运动公式对比

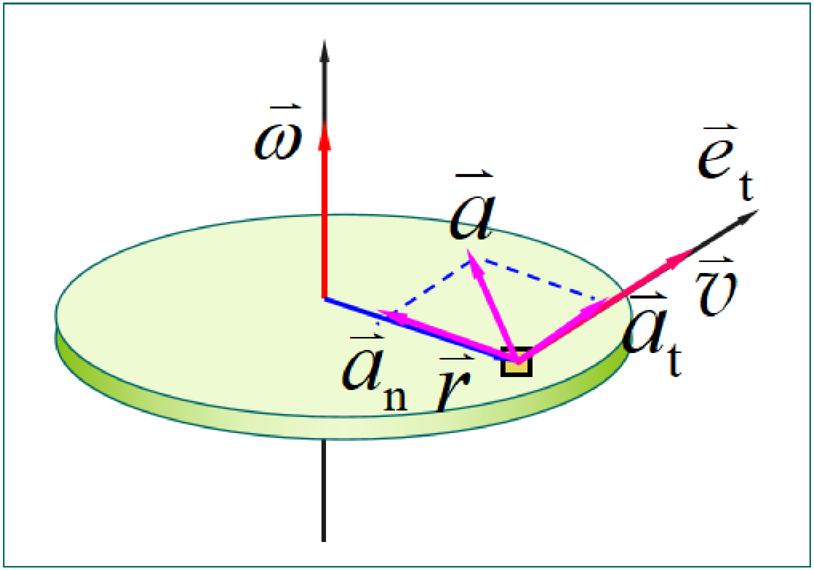
质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

（3） 角量与线量的关系

1）角速度与线速度

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{v} = r\omega \vec{e}_{\mathrm{t}}}$$



2）角加速度与切向加速度和法向加速度

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}^2 t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{\mathrm{t}} &= r\alpha \\ a_{\mathrm{n}} &= r\omega^2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{a} = r\alpha\vec{e}_{\mathrm{t}} + r\omega^2\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

例 一飞轮半径为 0.2m、转速为 $150\mathrm{r \cdot min^{-1}}$，因受制动而均匀减速，经 30 s 停止转动 .

试**求**:（**1**）角加速度和在此时间内飞轮所转的圈数;

解　（**1**）$\omega_0 = 5\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$，$t = 30\ \mathrm{s}$ 时，$\omega = 0$.

设 $t = 0\ \mathrm{s}$ 时，$\theta_0 = 0$. 飞轮做匀减速运动

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 5\pi}{30} = -\frac{\pi}{6} \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$$

飞轮 30 s 内转过的角度

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{-(5\pi)^2}{2 \times (-\pi/6)} = 75\pi\ \mathrm{rad}$$

转过的圈数　$N = \theta/2\pi = 37.5\,\mathrm{r}$

已知：$\omega_0 = 5\pi\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$， $r = 0.2\mathrm{m}$. 求：

（2）制动开始后 $t = 6\ \mathrm{s}$ 时飞轮的角速度；

解： $$\omega = \omega_0 + \alpha t = (5\pi - \frac{\pi}{6}\times 6) = 4\pi\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

（3）$t = 6\ \mathrm{s}$ 时飞轮边缘上一点的线速度、切向加速度和法向加速度 .

解： $$v = r\omega = 0.2\times 4\pi = 2.5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$a_\mathrm{t} = r\alpha = 0.2\times(-\frac{\pi}{6}) = -0.105\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$a_\mathrm{n} = r\omega^2 = 0.2\times(4\pi)^2 = 31.6\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

【例题5.1】一条缆索绕过一定滑轮拉动一升降机，如图5.1所示。滑轮半径r=0.5m，如果升降机从静止开始以加速度a=0.4m/s^{2}匀加速度上升，求：

（1）滑轮的角加速度；

（2）开始上升后，t=5s末滑轮的角速度；

（3）在5s内滑轮转过的圈数；

（4）开始上升后，t=1s末滑轮边缘上一点的加速度（假设缆索和滑轮之间不打滑）。

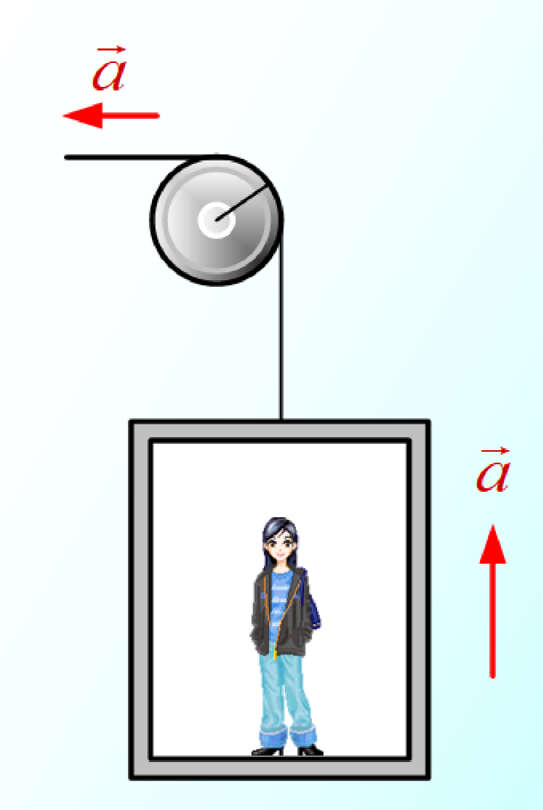
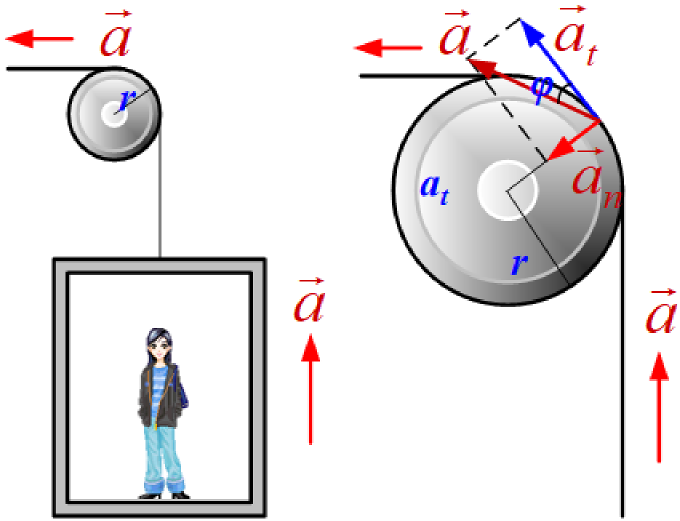


图5.1 升降机

解：（1）滑轮的角加速度为

$$\alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{a}{r} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8(\mathrm{rad/s^2})$$



（2）5s末滑轮的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0.8 \times 5 = 4(\mathrm{rad/s})$$

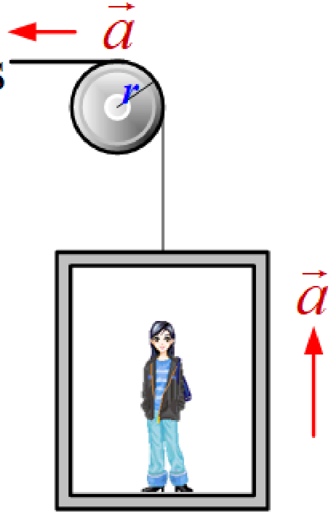
（3）5s内滑轮转过的角度为

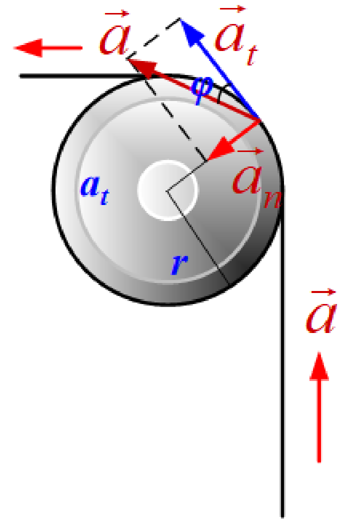
$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 5^2 = 10(\mathrm{rad})$$

在5s内滑轮转过的圈数为　$n = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{10}{2\pi} = 1.6$

（4）1s末滑轮的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0.8\times 1 = 0.8\text{rad/s}$$





切向加速度为

$$a_t = a = 0.4\text{m/s}^2$$

1s末滑轮边缘上一点的法向加速度为

$$a_n = r\omega^2 = 0.5\times 0.8^2 = 0.32\text{m/s}^2$$

1s末滑轮边缘上一点的加速度大小为

$$a' = \sqrt{a_n{}^2 + a_t{}^2} = \sqrt{0.32^2 + 0.4^2} = 0.51\text{m/s}^2$$

$$\varphi = \arctan\frac{a_n}{a_t} = \arctan\frac{0.32}{0.4} = 38.7^\circ$$

§5.2 转动定律

一、力矩

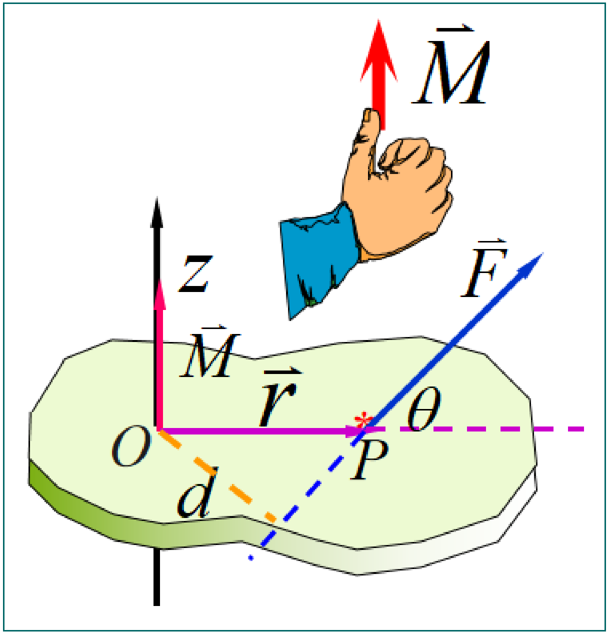
刚体绕 Oz 轴旋转，力 $\vec{F}$ 作用在刚体上点 P，且在转动平面内，$\vec{r}$ 为由点O 到力的作用点 P 的径矢．

$\vec{F}$ 对转轴 Z 的力矩

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$M=Fr\sin\theta=Fd$$

d：力臂



方向：右手螺旋法则

讨论

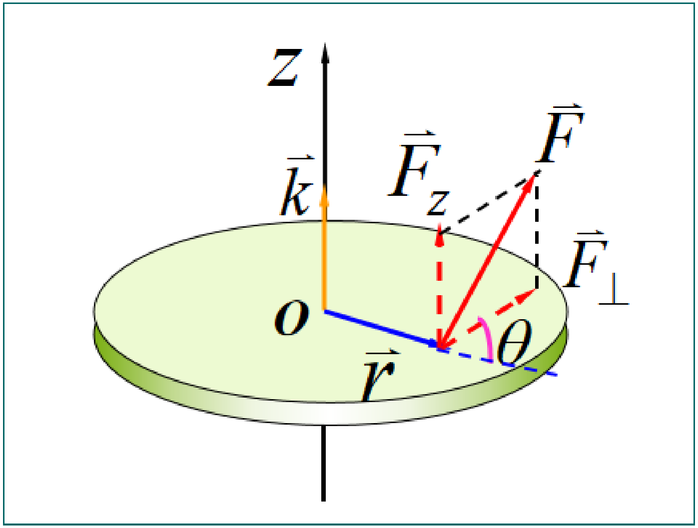
1） 若力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，把力分解为平行和垂直于转轴方向的两个分量

$$\vec{F}=\vec{F}_z+\vec{F}_\perp$$

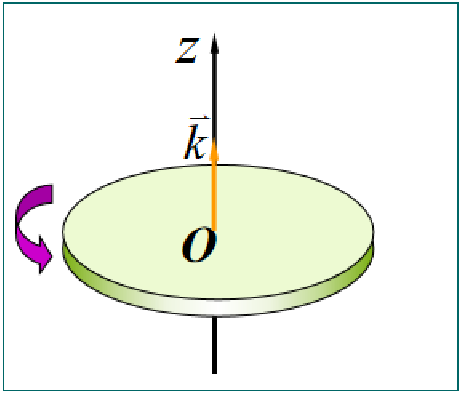
其中 $\vec{F}_z$ 对转轴的力矩为零，故 $\vec{F}$ 对转轴的力矩

$$M_z\vec{k}=\vec{r}\times\vec{F}_\perp$$

$$M_z=rF_\perp\sin\theta$$



2）在转轴方向确定后，力对转轴的力矩方向可用正负号表示:



通常先确定OZ轴的正方向，

若M的方向与OZ轴的正方向相同，M>0;

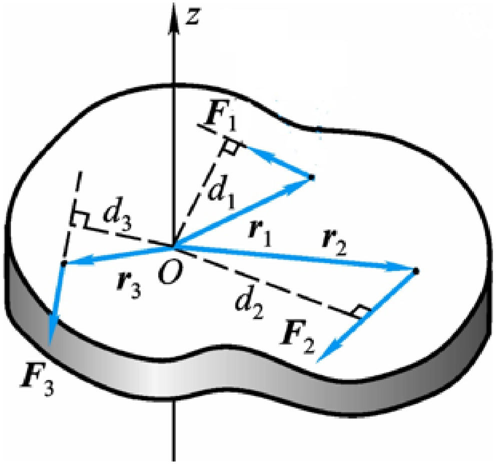
若M的方向与OZ轴的正方向相反，M<0。

3）合力矩等于各分力矩的矢量和

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$$

（必须对同一转轴）

例如： $M_Z = F_1 d_1 + F_3 d_3 - F_2 d_2$

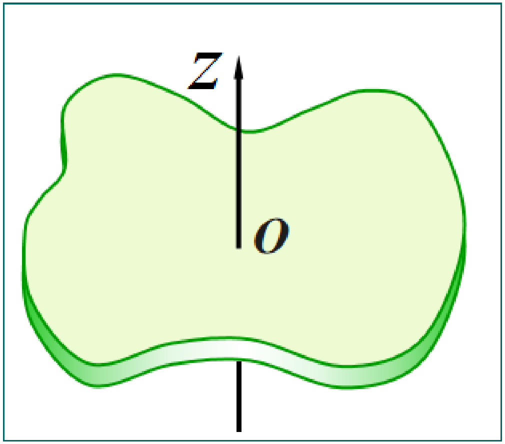


二　转动定律

◆ 转动定律 $\boxed{M = J\alpha}$

➤ 转动惯量（**moment of inertia** ）

$$\boxed{J = \sum \Delta m_i r_i^2}$$



刚体绕固定轴转动时，刚体的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比，角加速度的方向与合外力矩方向相同。

三 转动惯量及计算

分离质点系

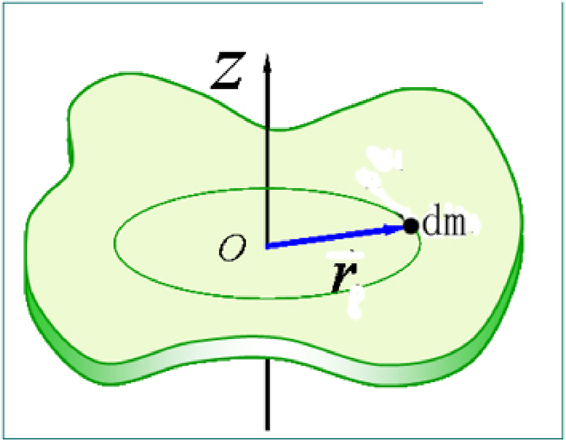
$$J=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2$$

即：刚体的**转动惯量**是刚体中所有质元的质量与该质元到转轴距离平方乘积之和。

质量连续分布的刚体

$$dJ=r^2dm$$

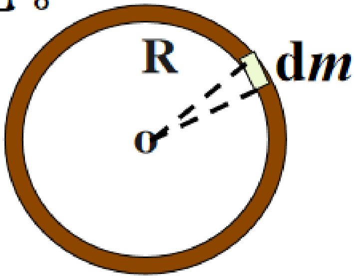
$$J=\int r^2\mathrm{d}m$$



注意

- 转动惯量是标量，单位：$kg.m^2$，合成遵从代数法则。（必须对同一转轴）
- 转动惯量物理意义：转动惯性的量度。
- 转动惯量的大小取决于刚体的质量、质量分布及转轴的位置。
- 可以通过计算和测量方法得到刚体的转动惯量。

例5-4　求质量 m 半径 R 的 均匀薄圆环的转动惯量，轴与圆环平面垂直并且通过其圆心。

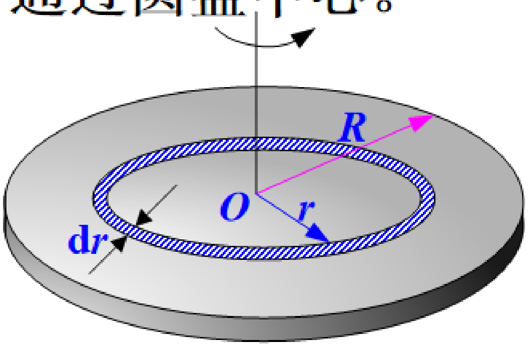


解：

$$dJ = R^2 dm$$

$$J = \int R^2 dm = mR^2$$

【例题5.5】求质量为m、半径为R、厚为l的均匀圆盘的转动惯量。轴与盘面垂直并通过圆盘中心。



解：

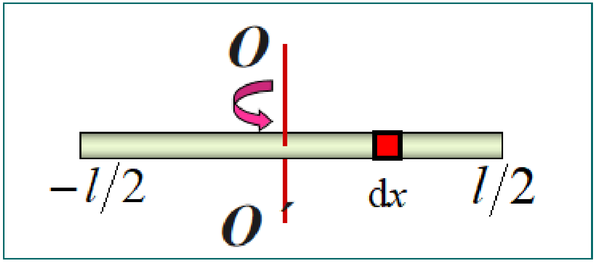
$$dJ = r^2 dm$$

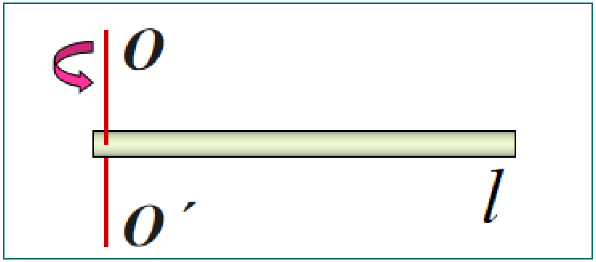
$$J = \int dJ = \frac{1}{2} mR^2$$

例5.6 求长度为 l、质量为 m 的均匀细棒的转动惯量。

（1）转轴通过中心C与棒垂直，

（2）转轴通过棒的一端0与棒垂直。

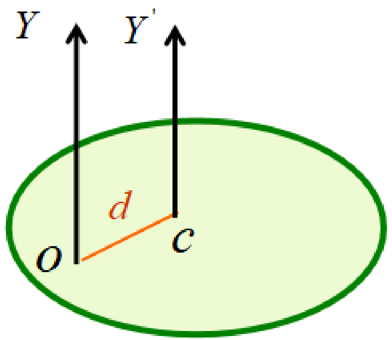




（1）转轴过中心垂直于棒 $J=\lambda\int_{-l/2}^{l/2}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{12}ml^2$

(2)转轴过端点垂直于棒 $J=\lambda\int_{0}^{l}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}ml^2$

★补充：转动惯量的平行轴定理



★平行轴定理

刚体对某一轴的转动惯量，等于该刚体对同此轴平行并通过质心之轴的转动惯量加上该刚体的质量同两轴间距离平方的乘积。

$$J = J_c + md^2$$

四、刚体定轴转动定律的应用

◆ 转动定律 $\boxed{M = J\alpha}$

注意 ------是描述刚体定轴转动的基本动力学方程

(1)$\vec{M}$和J必须对同一转轴而言。

（2）与牛顿第二定律比较：

平动 $\vec{F} = m\vec{a}$　　　　$M = J\alpha$ 转动

$$\vec{M} \Leftrightarrow \vec{F} \quad J \Leftrightarrow m \quad \vec{a} \Leftrightarrow \vec{\alpha}$$

（3）必须注意M、α正负号的规定。

◆ 转动定律 $\boxed{M = J\alpha}$

解题步骤：

（1）确定研究对象；

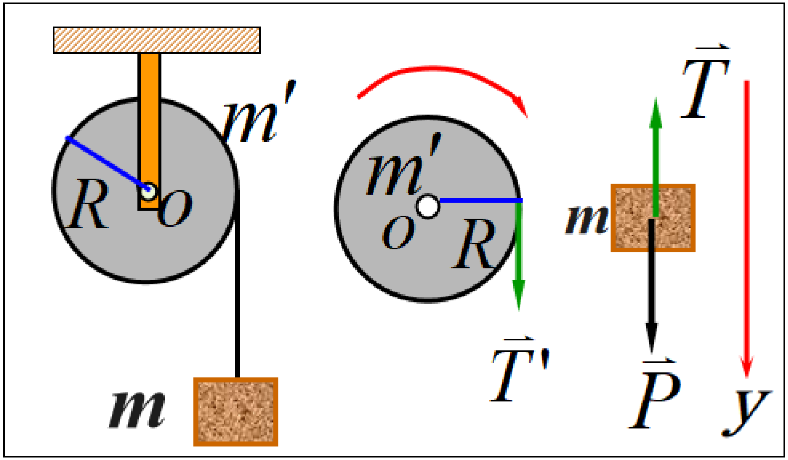
（2）对研究对象进行具体的分析
- 运动情况
  - 平动
  - 转动
- 受力情况（隔离法）

（3）建立坐标，列出方程
- 平动：牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$
- 转动： 转动定律 $M = J\alpha$

（再加上约束方程）

（4）解方程，并对结果进行讨论。

例　如图，有一半径为 R 质量为 m' 的匀质圆盘，可绕通过盘心 O 垂直盘面的水平轴转动．转轴与圆盘之间的摩擦略去不计．圆盘上绕有轻而细的绳索，绳的一端固定在圆盘上，另一端系质量为 m 的物体．试求物体下落时的加速度、绳中的张力和圆盘的角加速度．



解：1）确定研究对象

2）分析受力

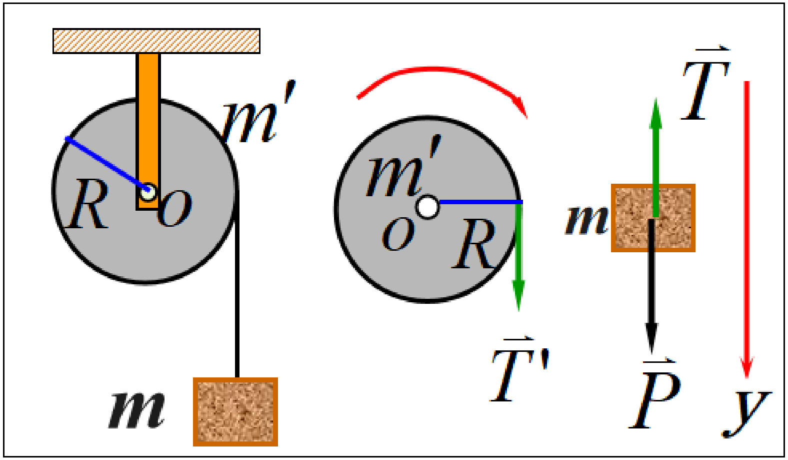
3）选取坐标

注意：转动和平动的坐标取向要一致．

3）列方程（用文字式）

牛顿第二定律（质点）
转动定律（刚体）
约束条件
转动惯量

$$\begin{cases} mg - T = ma_y \\ T'R = J\alpha \\ a_y = R\alpha \quad T = T' \\ J = m'R^2/2 \end{cases}$$

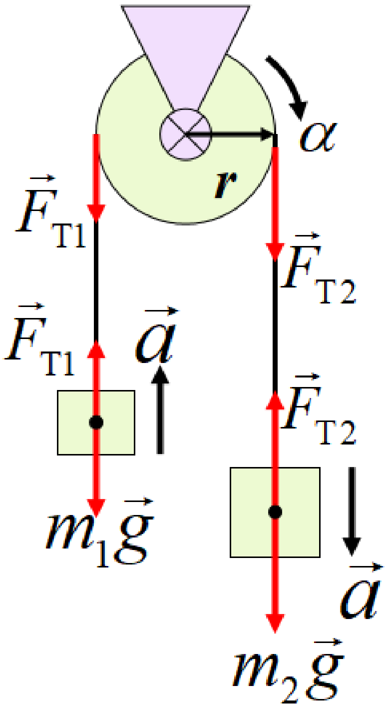


先文字计算求解，

后带入数据求值.

$$\begin{cases} a_y = 2mg/(2m+m') \\ T = m'mg/(2m+m') \\ \alpha = 2mg/[(2m+m')R] \end{cases}$$

例 物体：m_1、$m_2(>m_1)$，定滑轮：m、r，受摩擦阻力矩为M_r。轻绳不能伸长，无相对滑动。求物体的加速度和绳的张力。



解： 由于考虑滑轮的质量和所受的摩擦阻力矩， $F_{T1} \neq F_{T2}$

问题中包括平动和转动：

$$\left.\begin{aligned} F_{T1} - m_1 g &= m_1 a \\ m_2 g - F_{T2} &= m_2 a \\ F_{T2} r - F_{T1} r - M_r &= J\alpha \end{aligned}\right\}$$

轮不打滑： $a = r\alpha$

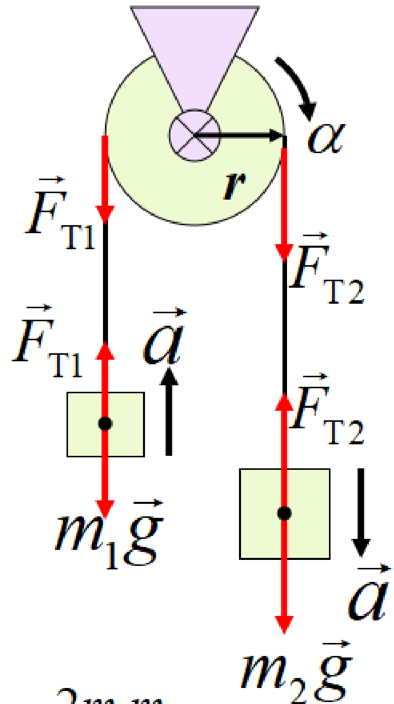
联立方程，可解得 F_{T1}，F_{T2}，a，α：

$$a=\frac{(m_2-m_1)g-M_r/r}{m_1+m_2+m/2}$$

$$\alpha=\frac{a}{r}=\frac{(m_2-m_1)g-M_r/r}{(m_1+m_2+m/2)/r}$$

$$F_{T1}=m_1(g+a)=\frac{m_1[(2m_2+m/2)g-M_r/r]}{m_1+m_2+m/2}$$

$$F_{T2}=m_2(g-a)=\frac{m_2[(2m_1+m/2)g+M_r/r]}{m_1+m_2+m/2}$$

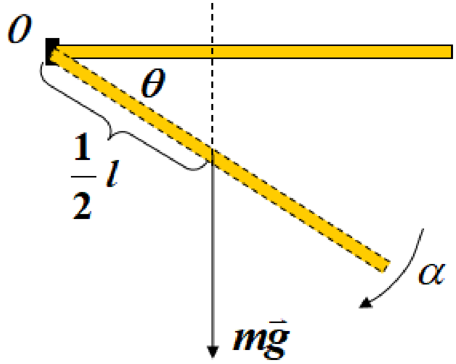


若令m=0，Mr=0，$a=\frac{(m_2-m_1)g}{m_1+m_2}$　$F_{T1}=F_{T2}=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$

此装置称阿特伍德机——可用于测量重力加速度 g

例5.12已知均匀细直棒长l、质量m，在竖直面内转动；

求：棒由水平静止自由摆动到θ角时的角速度及角加速度。



解：以O点为轴，棒受到重力矩作用，根据刚体定轴转动定律：

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta=\frac{1}{3}ml^2\alpha \to \alpha=\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{3g\cos\theta}{2l} \to \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

$$\to \omega d\omega=\frac{3g\cos\theta}{2l}d\theta \to \int_0^{\omega}\omega d\omega=\int_0^{\theta}\frac{3g\cos\theta}{2l}d\theta$$

$$\to \omega^2=\frac{3g\sin\theta}{l} \to \omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$