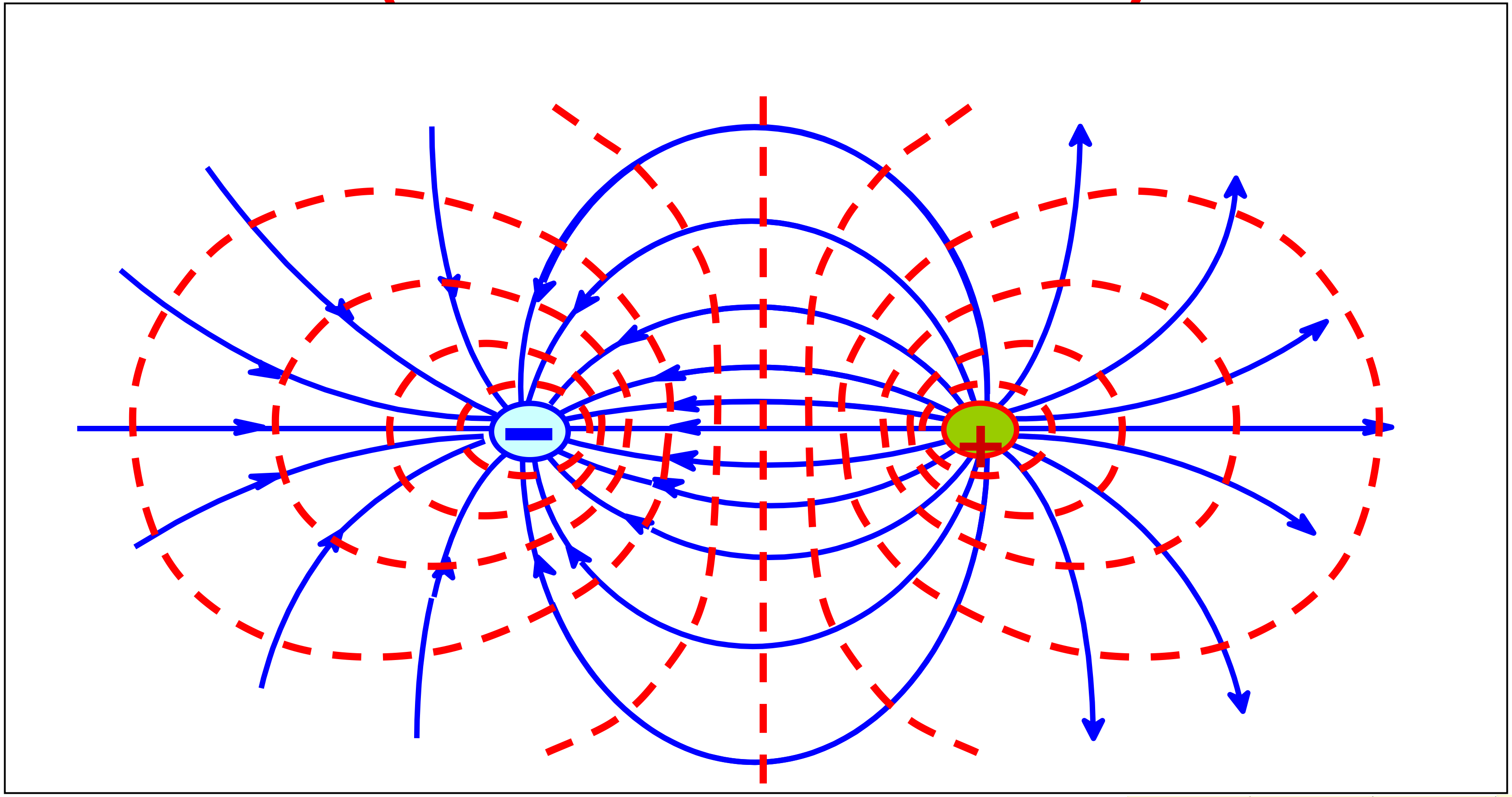
第11章 电势

(Electric Potential)



本章内容

§11.1静电场的保守性
§11.2电势差和电势
§11.3电势叠加原理
§11. 4 等势面
§11.5电势梯度
§11.6电荷在外电场中的静电势能
§11.7电荷系的静电能（后讲）
§11.8静电场的能量（后讲）

【学习目的】

1、了解静电场的保守性，掌握静电场的环路定理。

2、掌握计算电势的方法以及电势和电场强度的关系。

3、掌握利用电场和电势关系求电场。

【教学重点】

电势的概念，静电场的环路定理，电场强度与电势梯度的关系，计算电势的各种方法。

【教学难点】

带电体电势的计算、电场强度与电势梯度的关系。

作业：11-1、11-3，11-7，11-10、11-12。

前面根据电场力的性质

- 定义了场强 $\vec{E}$，建立计算 $\vec{E}$的方法：叠加法
- 得出高斯定律，并用之推导具有对称分布的静电场

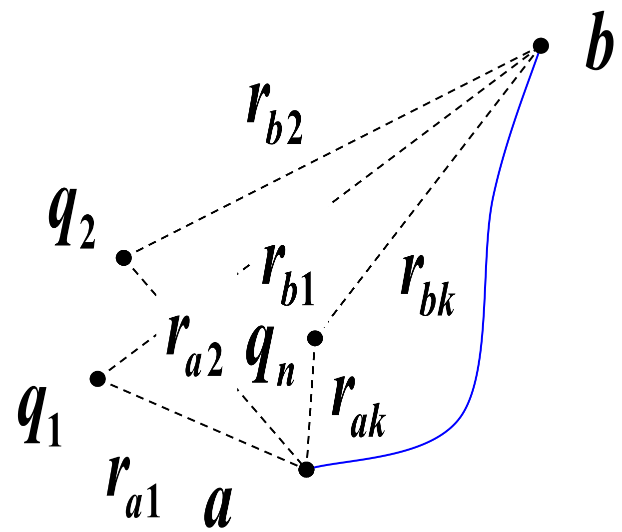
下面根据电场力作功的性质

- 定义电势 φ ，建立计算 φ 的方法：叠加法
- 得出环流定理
- 给出 $\vec{E}$ 和 φ的关系

§11.1 静电场的保守性

1、静电场力做功的特点

$$A=\sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ia}}-\frac{1}{r_{ib}}\right)$$



即：试验电荷在静电场中移动时，电场力所做的功只与试验电荷的起点和终点的位置有关，而与路径无关，即静电场力是保守力。

（此结论对任意带电体系均成立。）

2、静电场的环路定理

$$A=\oint_l q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

$\because q_0\neq 0$　　　$\therefore \oint_l \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$

即：在任何静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 沿任意闭合路径的线积分（ $\vec{E}$ 的环流）为零, 这称为静电场的环路定理。

讨论

- 该定理说明静电场为保守场；
- 该定理是静电场的基本方程。

高斯定理与环路定理完备描述静电场：

高斯定理：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0}$$

---静电场是有源场

(对任意电场都成立)

环路定理：

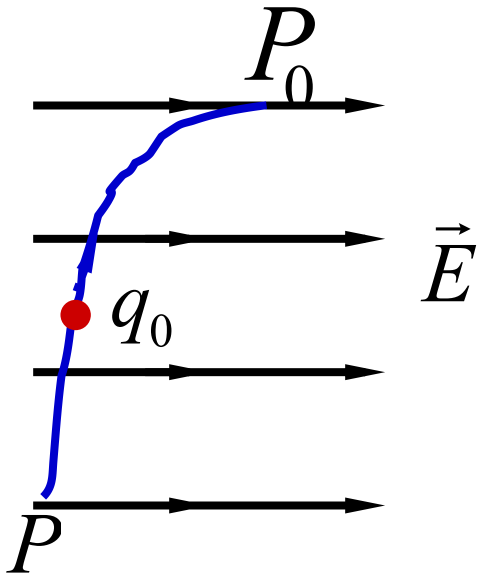
$$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

---静电场是保守场

(只对静电场成立)

3、 电势能

对于保守力场，可以引入势能的概念——电势能。



$$W_P = \int_P^{W_{P_0}=0} (q_0\vec{E})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

注意

电势能是相对的量，单位：J

对于有限大的带电体，一般规定无限远处的电势能为零：

$$W_P = \int_P^{\infty} (q_0\vec{E})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

§ 11.2 电势差和电势

1、电势的定义

$$\varphi_P = \frac{W_P}{q_0} = \int_P^{"0"} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

上式表明：电场中某点的电势等于单位正电荷在该点所具有的电势能 。

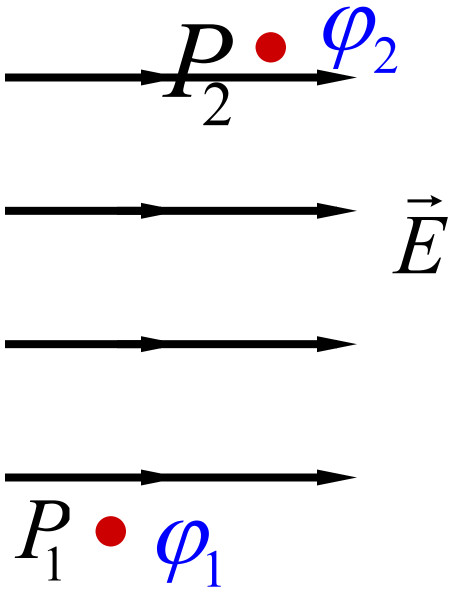
或：电场中某点的电势等于把一个单位正电荷从该点沿任意路径移到电势零点处电场力做的功。

对于电荷分布在有限的区域：$\varphi_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

电势为标量，单位：伏特（V=J/C）

电势为相对量，其数值与电势零点的选择有关。

2、电势差（电压）



$$U_{P_1P_2}=\varphi_{P_1}-\varphi_{P_2}$$

$$=\int_{P_1}^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}-\int_{P_2}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \quad =\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

- 静电场中P_1、P_2两点的电势差，等于将单位正电荷从P_1点移至P_2点电场力所做的功（与电势零点选择无关)

$$q_0(\varphi_{P_1}-\varphi_{P_2})=q_0\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=A_{P_1P_2}$$

——电场力所做功与电势差的关系。

说明

（1）视分析问题方便，可以任意选择电势零点。选择不同的电势零点，给定电场的电势描述不同！但任意两点间的电势差是保持不变的！

（2）电势零点的选择：

电荷分布在有限范围——选无穷远为电势零点，电荷分布到无限远时，电势零点的选取是“任意”的。

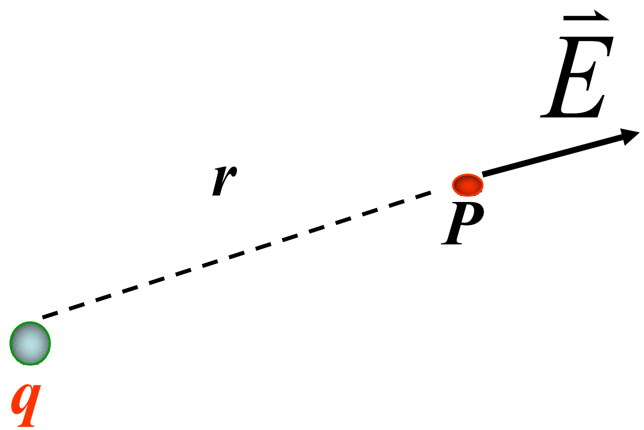
$$\varphi_{\infty} = 0 \qquad \varphi_P = \int_P^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

(3)在实际应用中，取大地、仪器外壳等为电势零点。

3、电势的计算

（1）点电荷的电势

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



• 点电荷的电势是球对称的，对称中心在点电荷处。

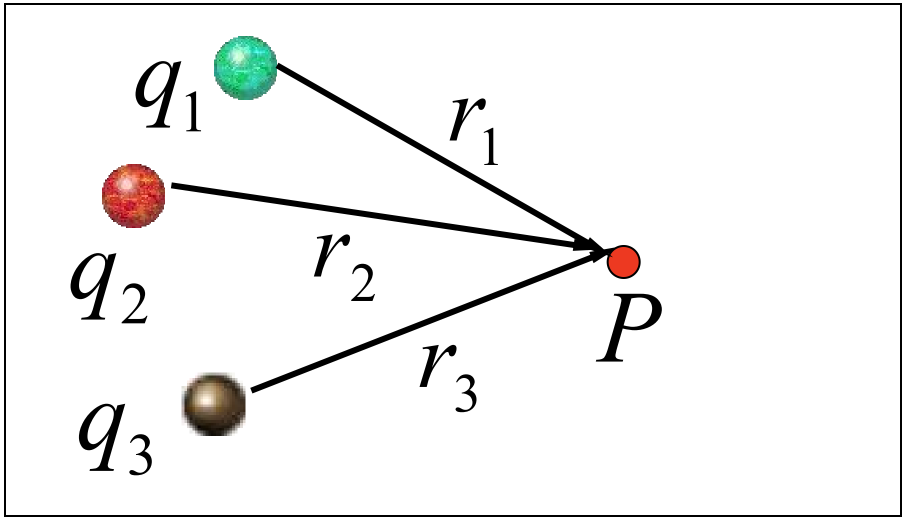
• 电势是标量，正负与电荷及电势零点选择有关。

$$\begin{cases} q > 0, & \varphi_P > 0 \\ q < 0, & \varphi_P < 0 \end{cases}$$

（2）点电荷系的电势

$$\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$ ——电势叠加原理

$$\varphi_P = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$



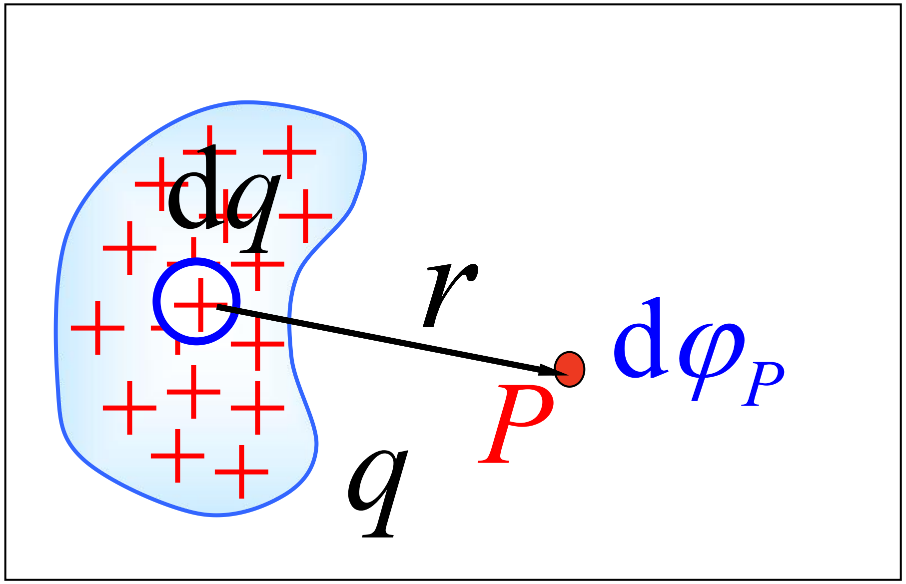
上式表明：在点电荷系形成的电场中，任意一点处的电势等于所有点电荷在该点产生的电势的代数和。

（3）电荷连续分布的带电体电势

$$d\varphi_P = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \varphi_P = \int d\varphi_p = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

线电荷：$dq = \lambda dl$　面电荷：$dq = \sigma dS$　体电荷：$dq = \rho dV$

说明 使用此公式的前提条件为有限大带电体，且选无限远处为电势零点。



（4）多个带电体的总电势

$$\varphi_P = \sum_i \varphi_i$$

总结　带电体电势计算的两种方法：

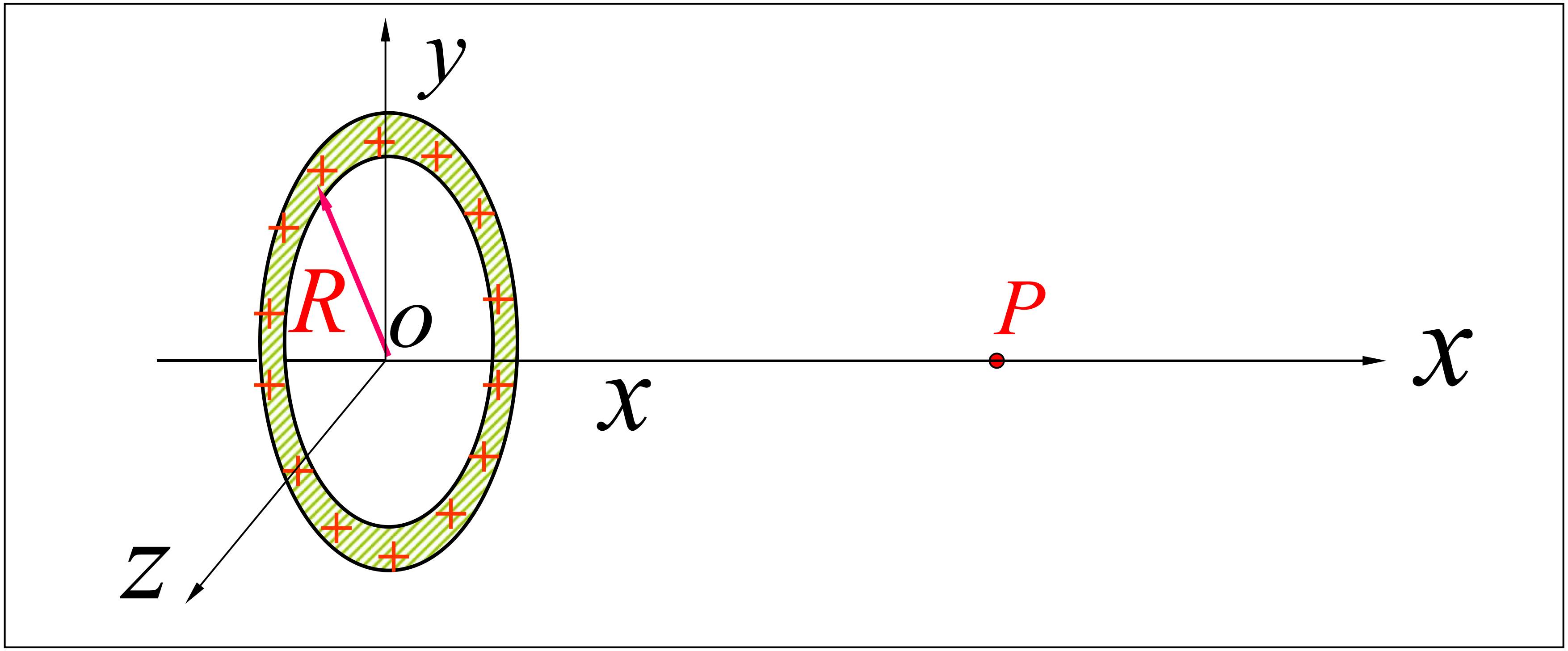
（一）已知电场强度分布，由电势的定义计算：

$$\varphi_P = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

积分路径可任意选取一个方便的路径。

注意：$\vec{E}$ 的分布应已知，或容易求出。若 $\vec{E}$ 为不连续函数，积分应分段进行 。

（二）从点电荷的电势出发，应用电势叠加原理计算任何有限分布电荷系统的电势。



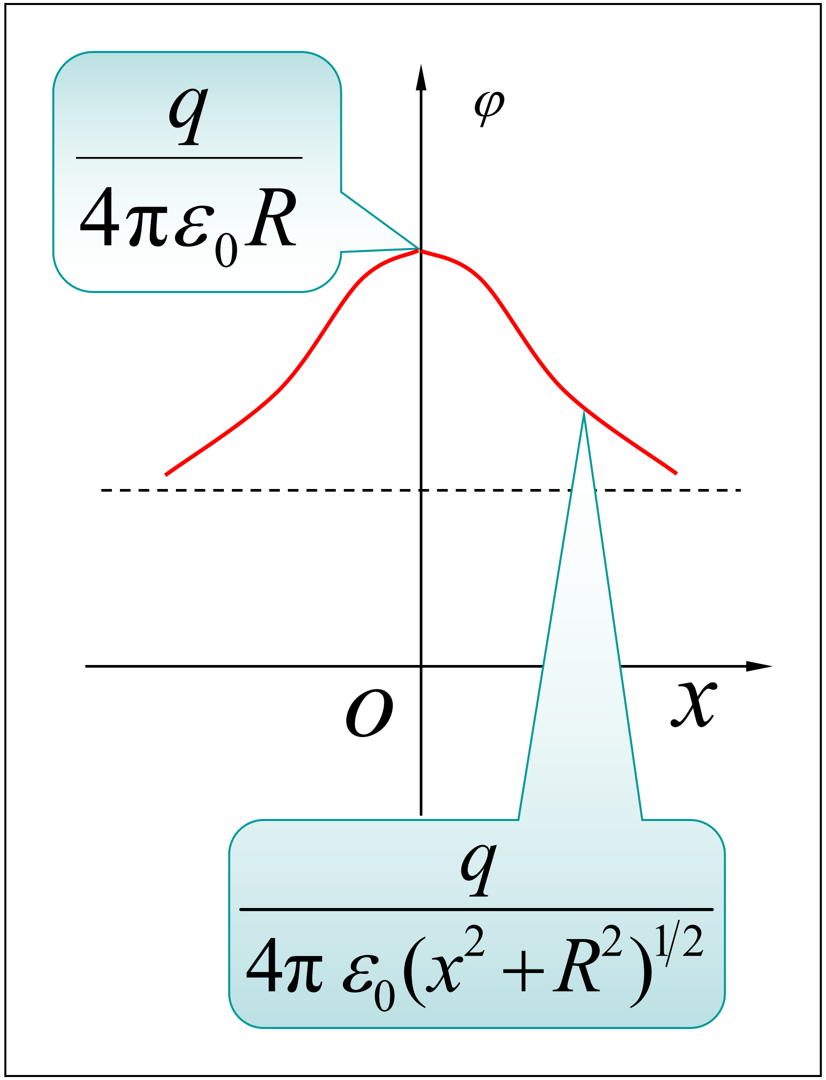
例11.4　一半径为R均匀带电细圆环，所带总电量为q，求在圆环轴线上任意一点P的电势。

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

讨 论

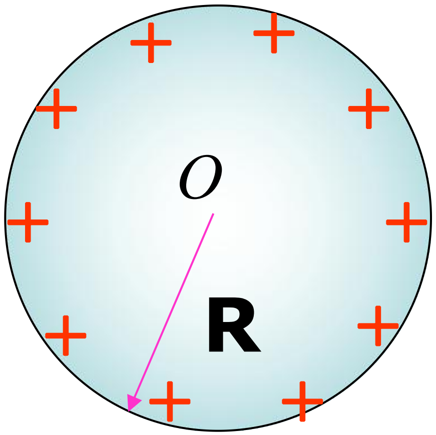
$$\left\{\begin{array}{ll} x=0, & \varphi_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ x \gg R, & \varphi_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x} \end{array}\right.$$



例11.1 求均匀带电的球面内外的电势分布。假设球面的半径为R，带电总量的电荷量为q。

解： 按高斯定理可得场强分布：

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} & (r\geq R)\\[2ex] 0 & (r<R)\end{cases}$$

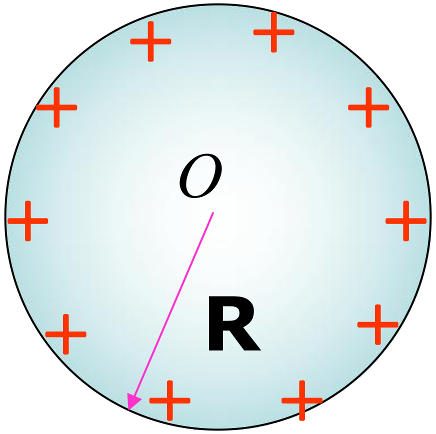


$r<R$时：$\varphi_1=\int_r^R E_1\mathrm{d}r+\int_R^\infty E_2\mathrm{d}r=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

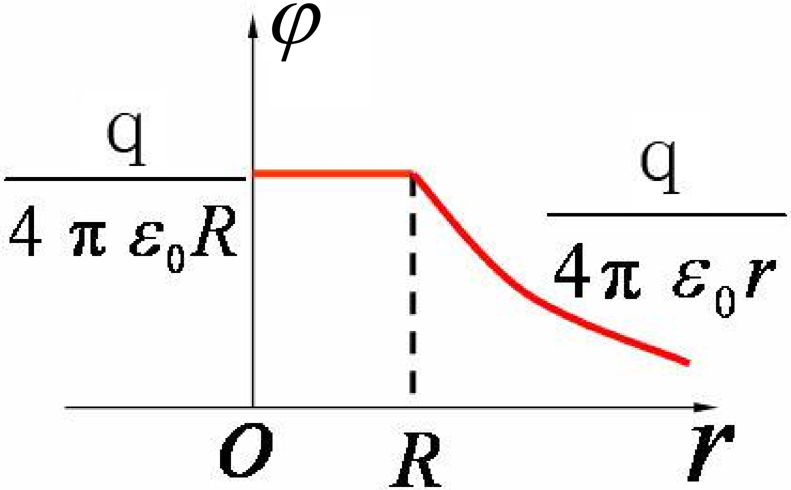
$r\geq R$时：$\varphi_2=\int_r^\infty E_2\mathrm{d}r=\int_r^\infty \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

均匀带正电的薄球壳内外的电势分布为：

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r \geq R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r < R) \end{cases}$$



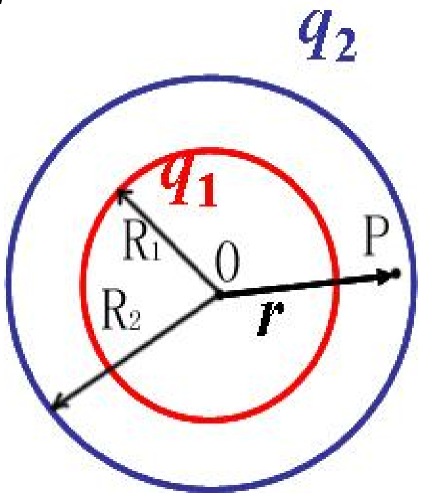
即:球内为等势区，球外为点电荷的电势公式。



例　设两球面同心放置，半径分别为R_1和R_2，电荷分别为q_1、q_2，求其电势分布。

解：均匀带电球面的电势分布：

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r<R)\\[2ex] \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r\ge R)\end{cases}$$

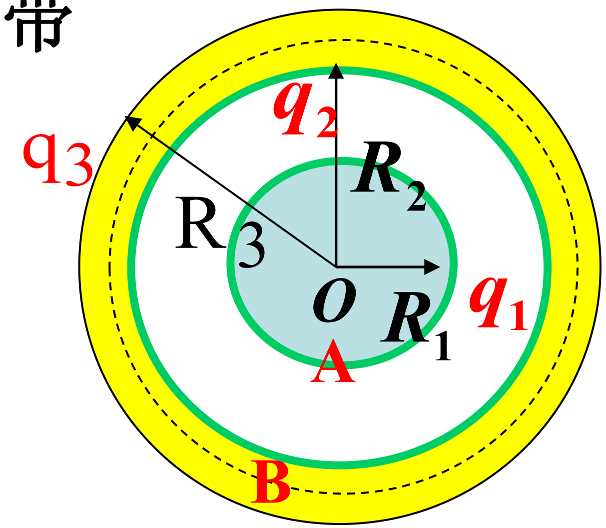


$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\begin{cases}\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & (r<R_1)\\[2ex] \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & (R_1\le r\le R_2)\\[2ex] \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r>R_2)\end{cases}$$

例 11.7　球套以球壳。

金属球A，R_1，外套一同心金属球壳B，内外半径R_2, R_3，二者带电后电势分别为φ_A ,φ_B，求此系统的电荷及电场分布，导线连接球和壳后，结果又如何?

解： 设金属球、内球壳、外球壳分别带电q_1、q_2、q_3,



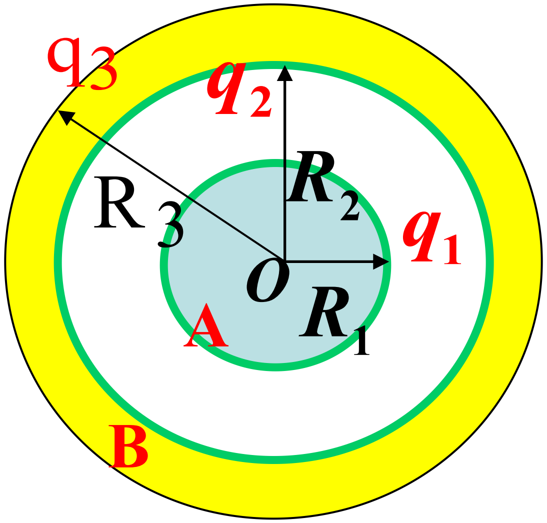
$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$\varphi_B = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$q_1 + q_2 = 0$$

得：$q_1 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0(\varphi_A - \varphi_B)R_1R_2}{R_2 - R_1}$ $q_2 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0(\varphi_B - \varphi_A)R_1R_2}{R_2 - R_1}$

$$q_3 = 4\pi\varepsilon_0\varphi_B R_3$$



故：

$$E_1 = 0(r < R_1, R_2 < r < R_3)$$

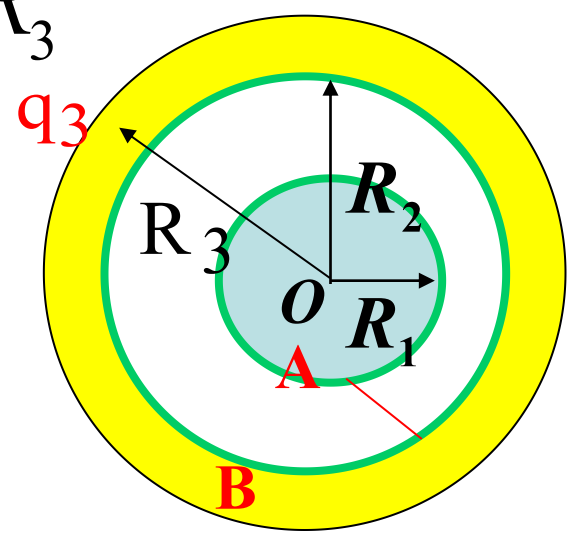
$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(\varphi_A - \varphi_B)R_1R_2}{(R_2 - R_1)r^2}(R_1 < r < R_2)$$

$$E_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varphi_B R_3}{r^2}(r > R_3)$$

导线连接球和壳后：

$$\varphi_A = \varphi_B$$

$$\varphi_B = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \Rightarrow q_3 = 4\pi\varepsilon_0 \varphi_B R_3$$



$$E = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varphi_B R_3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\varphi_B R_3}{r^2} (r > R_3)$$

§11.5　电势梯度

$$\varphi_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$ ——电场强度与电势的积分关系

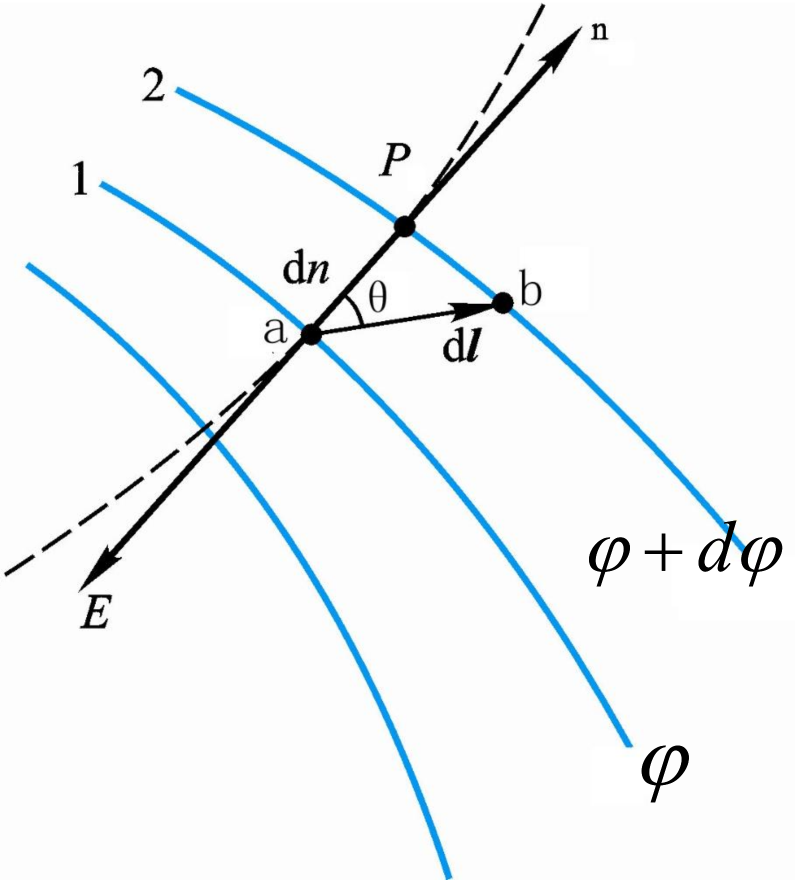
1、电势梯度

电势梯度是矢量：

其方向与该点电势在空间变化最快的方向相同，$(\vec{n})$

其大小就等于电势在该方向的变化率。

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)$$



记为 $$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}\vec{n}$$

或 $$\nabla\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}\vec{n}$$

$$\therefore \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\nabla\varphi$$

------电场强度与电势梯度的关系

上式表明：**电场中任一点的电场强度，等于该点电势梯度的负值。**

上式说明：电场为零处，电势不一定为零；电势为零处，电场不一定为零；只有在电势不变的空间，场强 一定为零。

总结

计算带电体场强的三种方法

1、直接计算。运用点电荷场强公式和场强叠加原理。

$$\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}=\int \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}$$

2、高斯定理。计算对称分布电荷的电场强度。

$$\Phi_\mathrm{e}=\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}q_i$$

3、场势微分关系。计算结构简单的带电体的电场强度。

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi=-\nabla\varphi$$

总结

带电体电势计算的两种方法:

1、从点电荷的电势出发, 应用电势叠加原理计算任何有限分布电荷系统的电势。

$$\varphi_P=\int d\varphi_p=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

2、已知电场强度分布, 由电势的定义计算:

$$\varphi_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$ （有限大带电体！）

积分路径可任意选取一个方便的路径。

注意：$\vec{E}$ 的分布应已知，或容易求出。若 $\vec{E}$ 为不连续函数，积分应分段进行 。