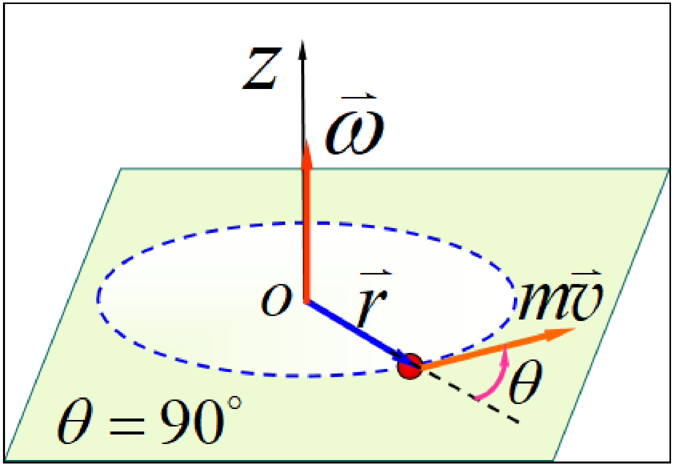
§ 5.4 刚体的角动量和角动量守恒

复习：质点角动量

质点在垂直于 z 轴平面上以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，



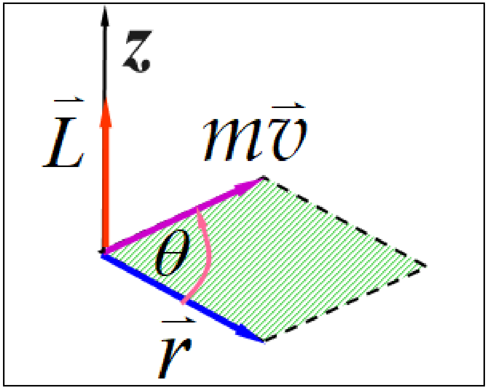
➢ 质点角动量（相对圆心）

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小 $L = rmv\sin\theta$

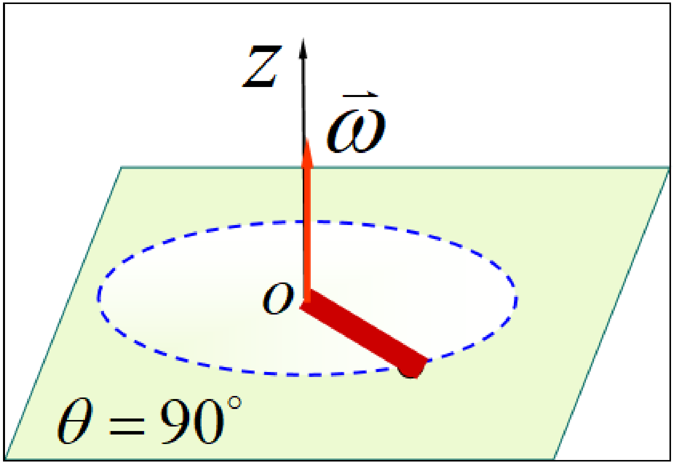
$$L = rmv = mr^2\omega \text{（圆运动）}$$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则.



1、刚体定轴转动的角动量

$$\boxed{L = J\omega}$$



2、 刚体定轴转动的角动量定理

$$\boxed{M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}}$$

作用于刚体的合外力矩等于刚体绕此轴转动的角动量随时间的变化率。

注意比较：$\vec{F} = m\vec{a}$ 或 $\vec{F} = \dfrac{dp}{dt}$ $\Longleftrightarrow$ $M = J\alpha$ 或 $M = \dfrac{dL}{dt}$

3、 刚体定轴转动的角动量守恒定律

➤ 若 $M=0$，则 $L=J\omega=$ 常量 .

讨论

（1）守恒条件 $M=0$

1）刚体不受力，或受力但力的作用线通过o点；

2）各力矩不为零，但它们的矢量和为零。

(2) 角动量定理比转动定律的适用范围更广，适用于刚体，非刚体和物体系。

(3) 内力矩不改变系统的角动量.

(4) L=常量:

若J不变,ω不变;若J变,ω也变,但$L=J\omega$不变.

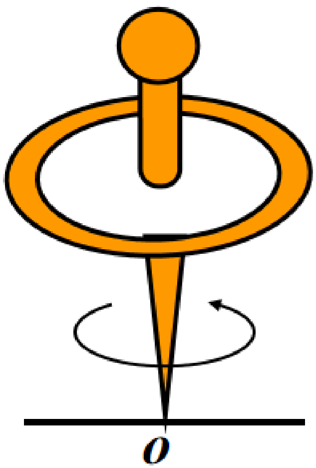
如花样滑冰、跳水运动员跳水等

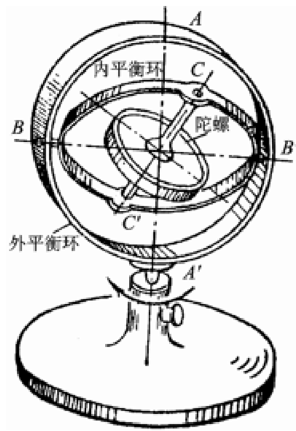
(5) 在冲击等问题中 $\because M^{\text{in}} >> M^{\text{ex}} \therefore L \approx$ 常量

(6) 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律.

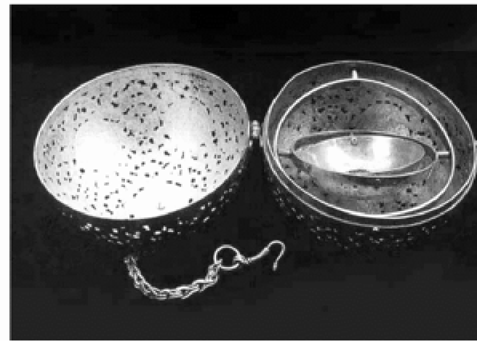
1）刚体(J 不变)的角动量守恒

若 $M=0$，则 $J\omega=$常量，而刚体的 J 不变，故 ω 的大小，方向保持不变。 如：直立旋转陀螺不倒。





回转仪



卧褥香炉（西汉、丁缓）

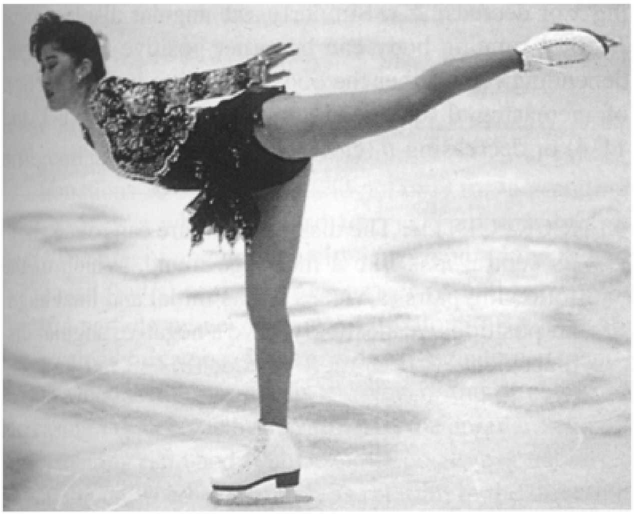
此时，即使把支架作任何转动， 也不影响转子转轴的方向——定向回转仪—— 可以作定向装置。

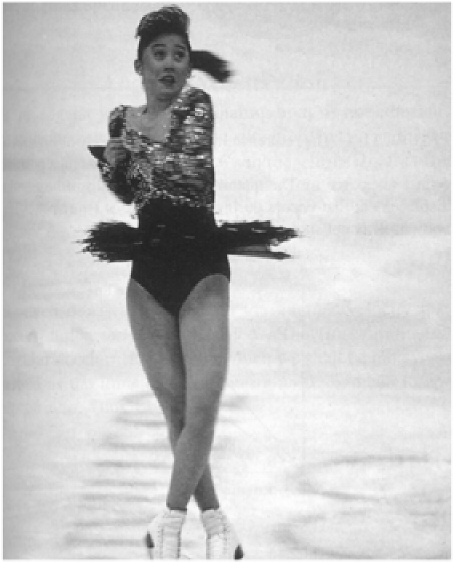
2）非刚体(J 可变)的角动量守恒

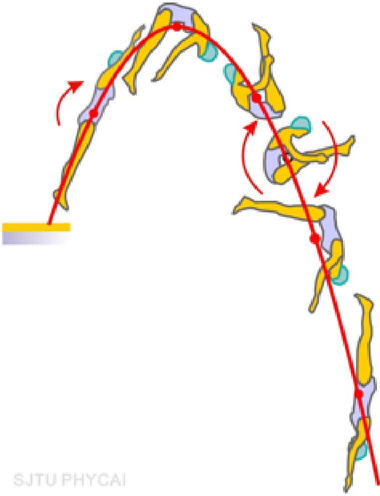
$$J\omega = J_0\omega_0 = 常量$$

当 J 增大，ω 就减小，当 J 减小，ω 就增大。

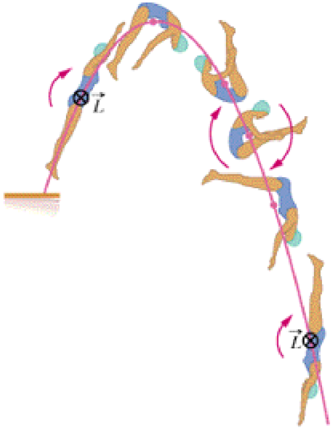
如：芭蕾舞、花样滑冰、跳水中的转动等。







角动量守恒的的应用



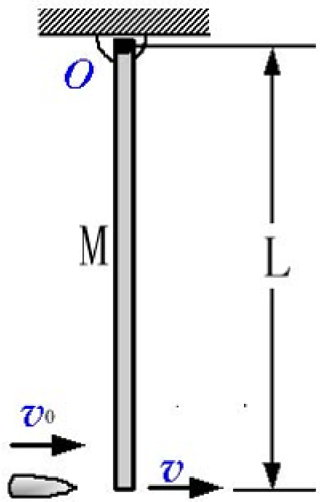
3）物体系的角动量守恒

若系统由几个物体组成，当系统受到的外力对轴的力矩的矢量和为零，则系统的总角动量守恒：

$$\sum_i J_i \omega_i = \text{常量}$$

如：直升机机尾加侧向旋叶，是为防止机身的反转。

【例5.7】如图所示，一根长为l、质量为M的均匀直棒，其一端挂在一个水平光滑轴上而静止在竖直位置。今有一子弹，质量为m以水平速度为v_0射入棒的下端而不复出。求棒和子弹一起运动的角速度。



解：将子弹和杆视为一系统，子弹和杆相碰，角动量守恒，有：

$$\begin{cases} mvl = mlv + \dfrac{1}{3}Ml^2\omega \\ v = l\omega \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} mv_0 l = J\omega \\ J = ml^2 + \dfrac{1}{3}Ml^2 \end{cases}$$

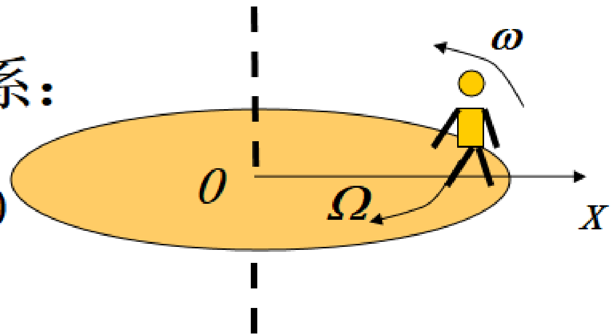
$$\Rightarrow \omega = \frac{3m}{3m+M}\frac{v_0}{l}$$

例2、半径R、质量M 的水平均匀圆盘可绕通过圆心的光滑竖直轴自由转动，其边缘有一质量m 的人，二者最初相对地面静止，求当人绕盘一周时，盘对地面转过的角度？

解：（人+盘）关于转轴0点的和外力矩为零，

（人+盘）角动量守恒

以逆时针为正方向，对地面参照系：



$$j\omega - J\Omega = 0 \quad \Rightarrow mR^2\omega - \frac{1}{2}MR^2\Omega = 0$$

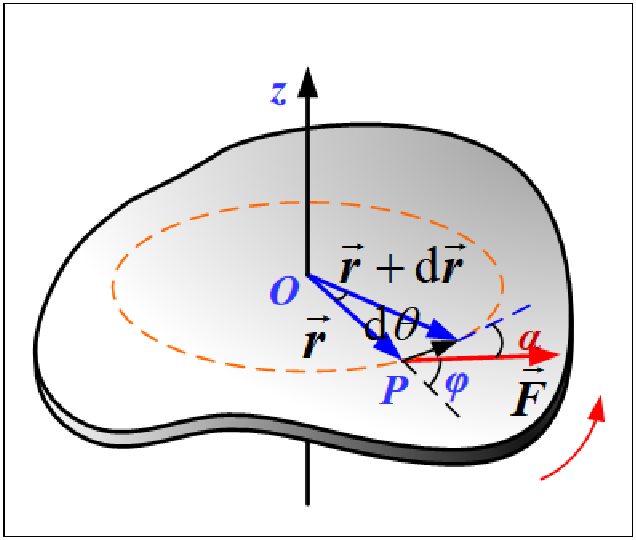
$$\int_0^t m\omega dt = \int_0^t \frac{1}{2}M\Omega dt$$

$$\left.\begin{aligned} m\theta &= \frac{1}{2}M\Theta \\ \text{且} \quad \theta &= 2\pi - \Theta \end{aligned}\right\} \qquad \Theta = \frac{2m}{2m+M}2\pi$$

§5.5 转动中的功和能

一、力矩的功

$$\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta$$



$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$$

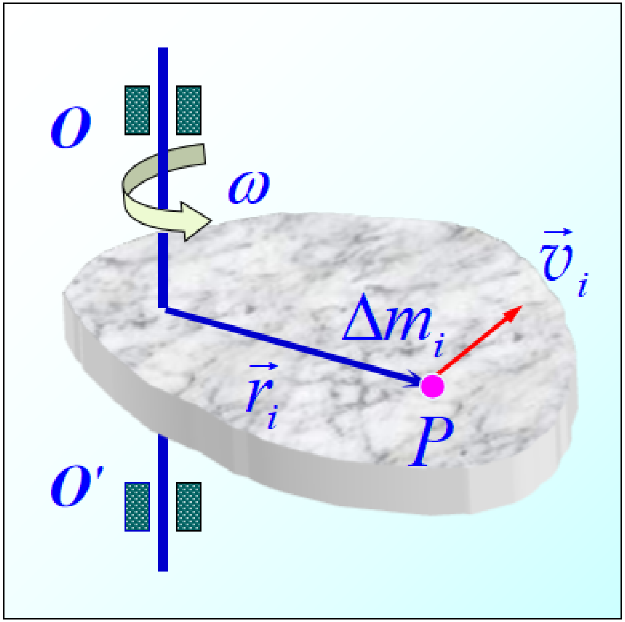
恒力矩时，有　$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta = M\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta = M(\theta_2-\theta_1)$

力矩的功率为　$P = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = M\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega$

二、刚体定轴转动的动能

$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$$

刚体的转动动能是刚体各部分质元的动能之和。



三、刚体定轴转动的动能定理

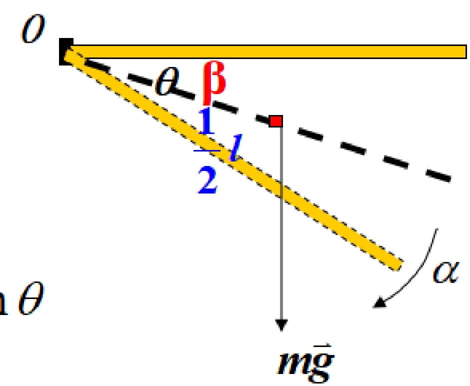
$$A=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

刚体定轴转动的动能定理

合外力矩对绕定轴转动的刚体所做的功等于刚体的转动动能的增量。

例5. 12　已知均匀细直棒长l、质量m，在竖直面内转动；求：棒由水平静止自由摆动到θ角时的角速度及角加速度。

解： 以0点为轴，棒受到重力矩作用，转到任意位置，重力矩做功为：



$$dA = mg\frac{l}{2}\cos\beta d\beta$$

$$A = \int dA = \int_0^\theta mg\frac{l}{2}\cos\beta d\beta = \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

由刚体转动的动能定理：

$$A = \frac{1}{2}mgl\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

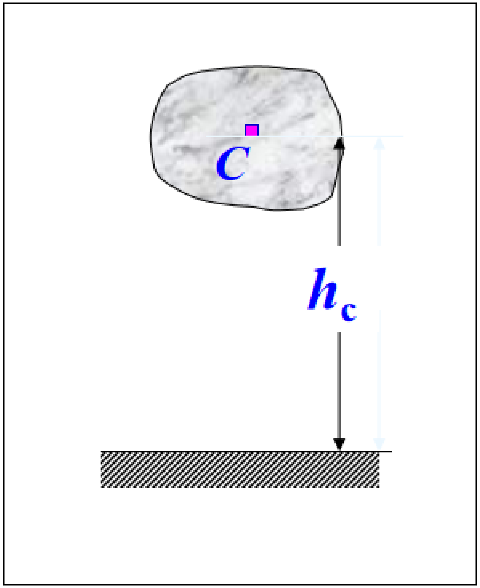
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{3g\sin\theta}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{3g\cos\theta}{l}\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

四、刚体的重力势能

是指刚体与地球共有的重力势能，它等于刚体各质点与地球共有的重力势能之和：

$$E_p = mgh_c$$

h_c:刚体质心离参考面的高度。



一个不大的刚体的重力势能与它的质量集中在质心时所具有的重力势能一样 。

五、刚体的机械能守恒定律

质点系功能原理对刚体仍成立：

$$A_{外}+A_{非}=E_B-E_A$$

系统机械能包括刚体重力势能、刚体平动动能及刚体定轴转动动能

即：

$$E=(\boxed{\frac{1}{2}mv_c^2}+\frac{1}{2}J\omega^2)+mgh_c$$

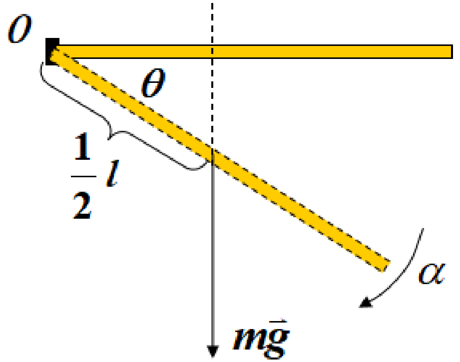
定轴转动，此项无

当 $A_{外}=0, A_{非}=0$ 时，系统机械能守恒

------刚体的机械能守恒定律

例5. 12已知均匀细直棒长l、质量m，在竖直面内转动；求：棒由水平静止自由摆动到 θ角时的角速度及角加速度。

解：取细棒和地球为系统，在棒转动过程中机械能守恒，设末位置为重力势能零点：



$$mg\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2$$

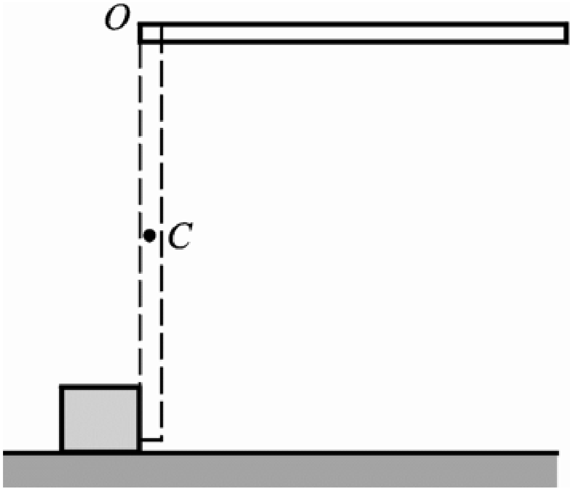
$$\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{3g\sin\theta}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{3g\cos\theta}{l}\frac{d\theta}{dt}\qquad\Rightarrow\alpha=\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

例匀质细棒：l、m，可绕通过端点O的水平轴转动。棒从水平位置自由释放后，在竖直位置与放在地面的物体m相撞。该物体与地面的摩擦因数为 μ，撞后物体沿地面滑行一距离 s 而停止。求撞后棒的质心C 离地面的最大高度 h ，并说明棒在碰撞后将向左摆或向右摆的条件

解：　分三个阶段进行分析。

第一阶段：棒自由摆落的过程，机械能守恒。



$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$$

第二阶段：碰撞过程。系统的对O轴的角动量守恒。

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega = mvl + \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'$$

第三阶段：碰撞后物体的滑行过程与棒的上升过程。物体做匀减速直线运动。

$$-\mu mg = ma$$

$$0 = v^2 + 2as$$

联合求解，即得碰撞后棒的角速度：

$$\omega' = \frac{\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs}}{l}$$

$$\omega' = \frac{\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs}}{l}$$

ω'取正值，表示碰后棒向左摆；反之，表示向右摆。

棒向左摆的条件为 $\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs} > 0$

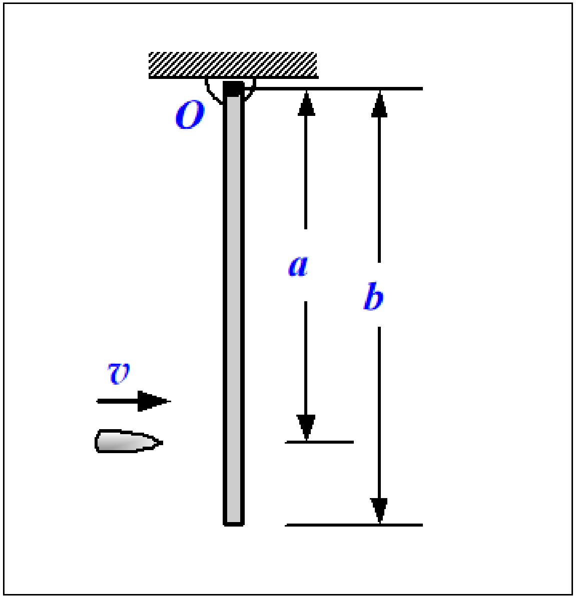
棒向右摆的条件为 $\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs} < 0$

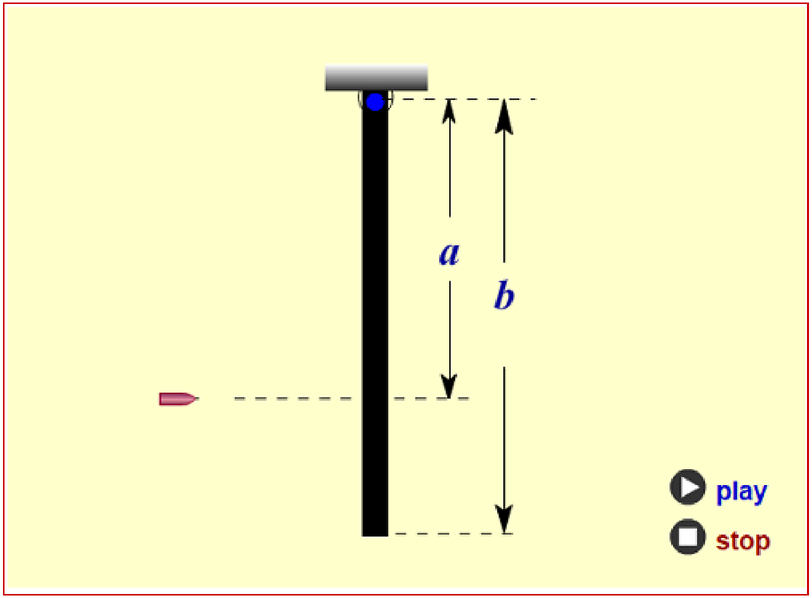
棒的质心C上升的最大高度，也可由机械能守恒定律求得：

$$mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'^2$$

$$\Longrightarrow \quad h = \frac{l}{2} + 3\mu s - \sqrt{6\mu sl}$$

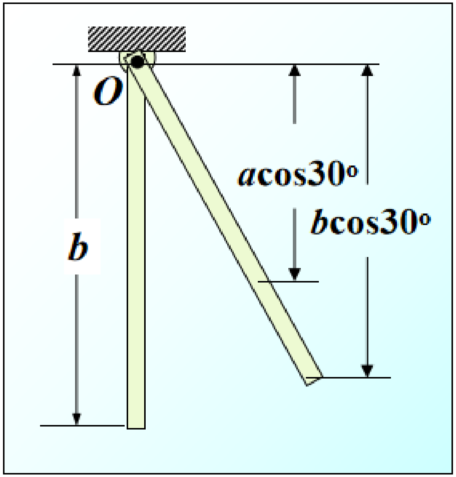
【例题】如图所示，一长为l、质量为M的杆可绕支点O自由转动。一质量为m、速度为v的子弹射入距支点为a的杆内。若杆的偏转角为30°，问子弹的初速为多少。





解：子弹和杆相碰，角动量守恒，有

$$mva=(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2)\omega$$



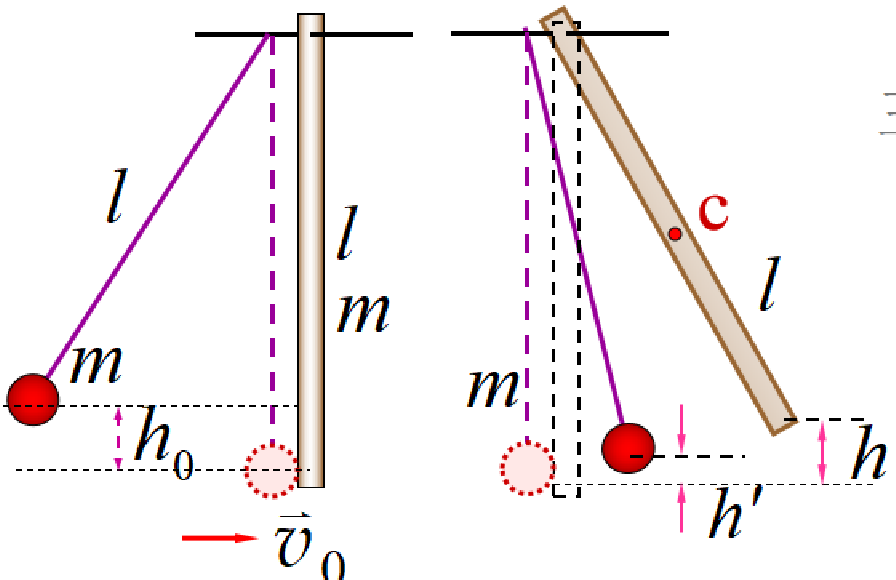
子弹射入杆内，在摆动过程中只有重力做功，故以子弹、杆和地球为系统，系统的机械能守恒。于是有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2\right)\omega^2=mga(1-\cos 30^0)+Mg\frac{1}{2}l(1-\cos 30^0)$$

解上述方程，得

$$v=\frac{1}{ma}\sqrt{\frac{g}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)(Ml+2ma)(Ml^2+3ma^2)}$$

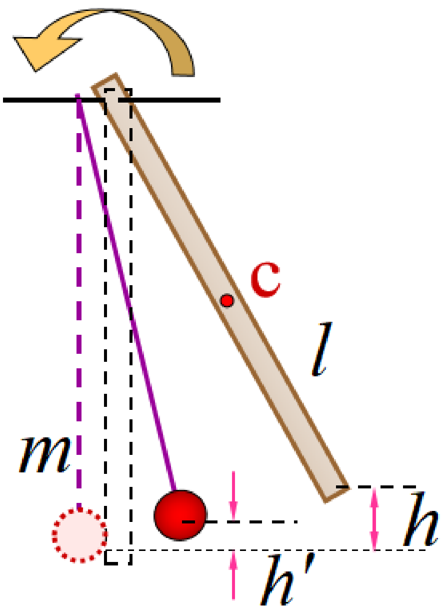
例　把单摆和一等长的匀质直杆悬挂在同一点，杆与单摆的摆锤质量均为 m．开始时直杆自然下垂，将单摆摆锤拉到高度 h_0，令它自静止状态下摆，于垂直位置和直杆作弹性碰撞．**求** 碰后直杆下端达到的高度 h．



解： 此问题分为三个阶段

1） 单摆自由下摆（机械能守恒），与杆碰前速度

$$v_0 = \sqrt{2gh_0}$$



$$v_0 = \sqrt{2gh_0}$$

2）摆与杆弹性碰撞（摆，杆）

角动量守恒 $mlv_0 = J\omega + mlv$

机械能守恒 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

解得： $v = \frac{1}{2}v_0 \quad \omega = \frac{3v_0}{2l}$

3）碰后杆上摆，机械能守恒（杆，地球）

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = mg\Delta h_c \qquad h = 2\Delta h_c = \frac{3}{2}h_0$$

本章小结

一. 刚体的定轴转动 匀变速转动

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

二. 刚体的定轴转动定律

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比 .

$$M = J\alpha$$

- 刚体转动惯量　$J = \sum \Delta m_i r_i^2$　$J = \int r^2 \mathrm{d}m$

三. 刚体定轴转动功和能

- 力矩的功 $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$
- 转动动能 $E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}J\omega^2$
- 重力势能 $E_\mathrm{P}=mgh_C$
- 刚体定轴转动的动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

- 刚体的机械能守恒定律：若只有保守力做功时，

则 $E_\mathrm{P}+E_\mathrm{k}=$ 恒量

四. 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

- 刚体对转轴的角动量： $L = J\omega$
- 角动量定理： $M = \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$$

- 角动量守恒定律　若 $M = 0$，则 $L = J\omega =$ 常量

五　定轴转动的动力学问题　解题基本步骤

首先分析各物体所受力和力矩情况，然后根据已知条件和所求物理量判断应选用的规律，最后列方程求解.

1. 求刚体转动某瞬间的角加速度，一般应用转动定律求解。如质点和刚体组成的系统，对质点列牛顿运动方程，对刚体列转动定律方程，再列角量和线量的关联方程，联立求解.

2. 刚体与质点的碰撞、打击问题，在有心力场作用下绕力心转动的质点问题，考虑用角动量守恒定律.

3. 在刚体所受的合外力矩不等于零时，比如木杆摆动，受重力矩作用，一般应用刚体的转动动能定理或机械能守恒定律求解。

另外：实际问题中常常有多个复杂过程，要分成几个阶段进行分析，分别列出方程，进行求解.

质点运动与刚体定轴转动描述的对照			
质点的平动		刚体的定轴转动	
速度	$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度	$\vec{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t}$
加速度	$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$	角加速度	$\vec{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$
力	$\vec{F}$	力矩	$\vec{M}$
质量	m	转动惯量	$J=\int r^2\mathrm{d}m$
动量	$\vec{P}=m\vec{v}$	角动量	$\vec{L}=J\vec{\omega}$

质点运动规律与刚体定轴转动的规律对照	
质点的平动	**刚体的定轴转动**
运动定律 $\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律 $M=J\alpha$
动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{F}\mathrm{d}t=m\vec{v}-m\vec{v}_0$	角动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}-\vec{L}_0$
动量守恒定律 $\sum\vec{F}_i=0,\ \sum m_i\vec{v}_i=$恒量	角动量守恒定律 $\vec{M}=0,\ \sum J_i\vec{\omega}_i=$恒量
力的功 $A=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功 $A=\int_{\theta_0}^{\theta}M\mathrm{d}\theta$
动能 $E_\mathrm{k}=mv^2/2$	转动动能 $E_\mathrm{k}=J\omega^2/2$

质点运动规律与刚体定轴转动的规律对照	
质点的平动	刚体的定轴转动
动能定理 $A=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理 $A=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$
重力势能 $E_{\mathrm{p}}=mgh$	重力势能 $E_{\mathrm{p}}=mgh_{\mathrm{C}}$
机械能守恒 只有保守力作功时 $E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=$ 恒量	机械能守恒 只有保守力作功时 $E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=$ 恒量