力　学（Mechanics）

第3章　动量与角动量

(Momentum and Angular Momentum)

本章内容

【学习目的】

1、掌握冲量、动量、角动量等重要概念。

2、掌握动量定理、动量守恒定律及它的适用条件，掌握运用它们分析问题的思路和方法。

3、了解质心的概念和质心运动定律；

4、掌握角动量定理、角动量守恒定律及它的适用条件，能运用该定律分析、解决有关问题。

【教学重点】

动量定理、动量守恒定律、角动量守恒定律。

【教学难点】 角动量和角动量守恒定律。

§3.1 冲量与动量定理

1、质点的动量定理

根据牛顿第二定律：$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt = d\vec{I}$

动量定律的微分形式

或：$\vec{\mathbf{I}} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot dt = \vec{\mathbf{p}}' - \vec{\mathbf{p}}_0$

其中，$\vec{\mathbf{I}} = \int_{t_0}^{t'} \vec{\mathbf{F}}\, d t$ 表示力对时间的累积量，叫做冲量（**impulse of force**）。

动量定理（theorem of momentum）：

质点在运动过程中，所受合外力的冲量等于质点动量的增量。

说明

(1) 冲量 $\vec{I}$ 的方向是所有元冲量$\vec{F}\mathrm{d}t$的合矢量的方向。动量定理反映了力在时间上的累积作用对质点产生的效果。

（2）动量定理中的动量和冲量都是矢量，符合矢量叠加原理，或以分量形式进行计算：

$$I_x = \int_{t_0}^{t} F_x \mathrm{d}t = mv_x - mv_{x0}$$

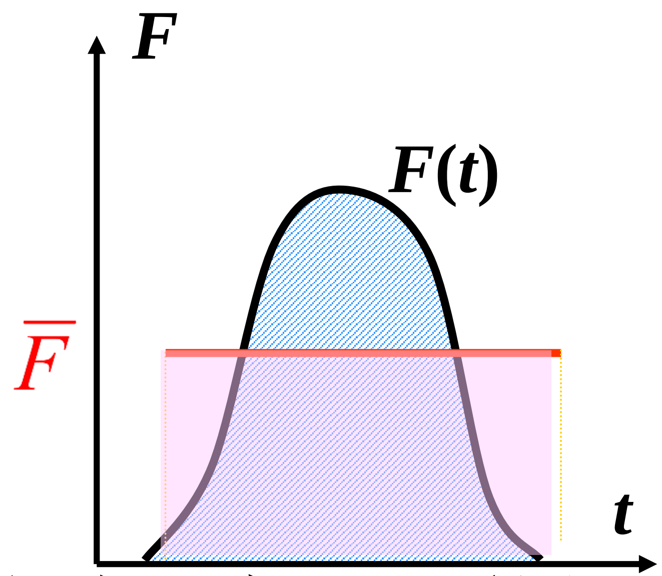
$$I_y = \int_{t_0}^{t} F_y \mathrm{d}t = mv_y - mv_{y0}$$

$$I_z = \int_{t_0}^{t} F_z \mathrm{d}t = mv_z - mv_{z0}$$

(3)动量定理在冲击、碰撞问题中估算平均冲力（implusive force）。

$$\overline{\vec{F}}=\frac{\vec{I}}{\Delta t}=\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\vec{F}\cdot \mathrm{d}t$$

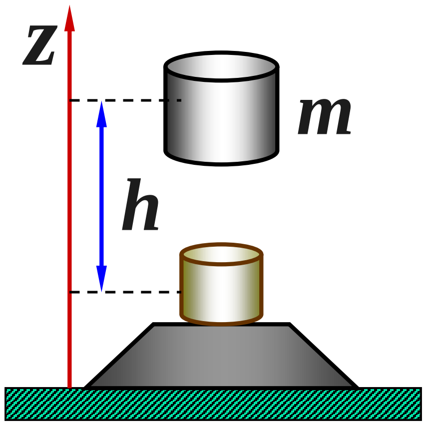
$$=\frac{\vec{p}-\vec{p}_0}{t-t_0}$$



(4) 动量定理是牛顿第二定律的积分形式，只适用于惯性系。

(5) 动量定理在处理变质量问题时很方便。

【例题】一重锤从高度h = 1.5m 处自静止下落，锤与工件碰撞后，速度为零。对于不同的打击时间 Δt，计算平均冲力和重力之比.



解：撞前锤速 $v_0=-\sqrt{2gh}$，撞后锤速零.

$$\int_0^{\Delta t}(N-mg)\mathrm{d}t=mv_z-mv_0=m\sqrt{2gh}$$

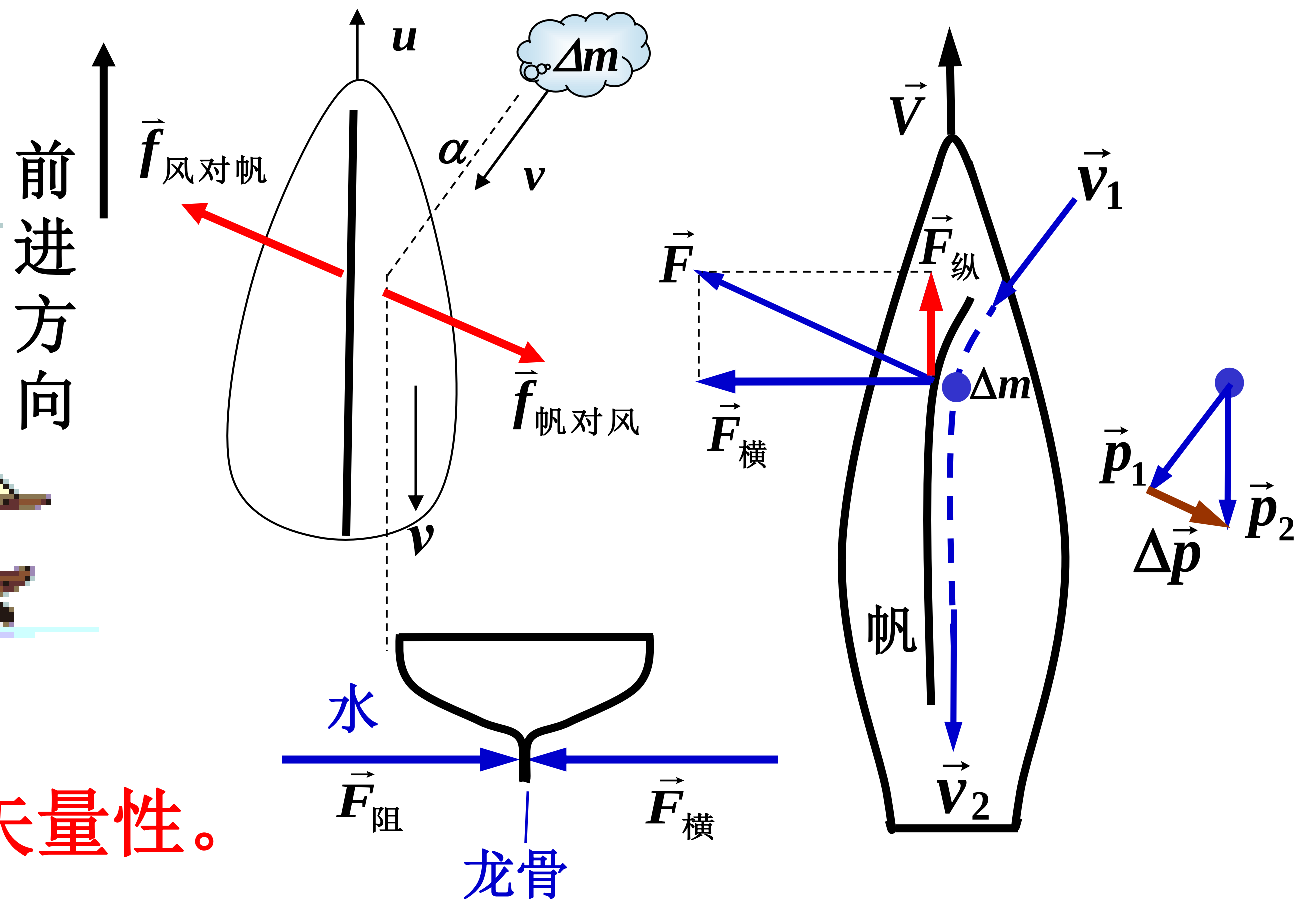
$$\overline{N}\Delta t-mg\Delta t=m\sqrt{2gh}$$

$$\frac{\overline{N}}{mg}=1+\frac{1}{\Delta t}\sqrt{\frac{2h}{g}}=1+\frac{0.55}{\Delta t}$$

$\Delta t/\mathrm{s}$	0.1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\overline{N}/mg$	6.5	56	5.5×10^{2}	5.5×10^{3}

在碰撞或打击瞬间常忽略重力作用

【例题】帆船在顺风时能向前航行，这是容易理解的事情，然而帆船在逆风时也能通调节帆的状态达到向前航行的目的，这是为什么呢？试说明逆风行舟的道理。



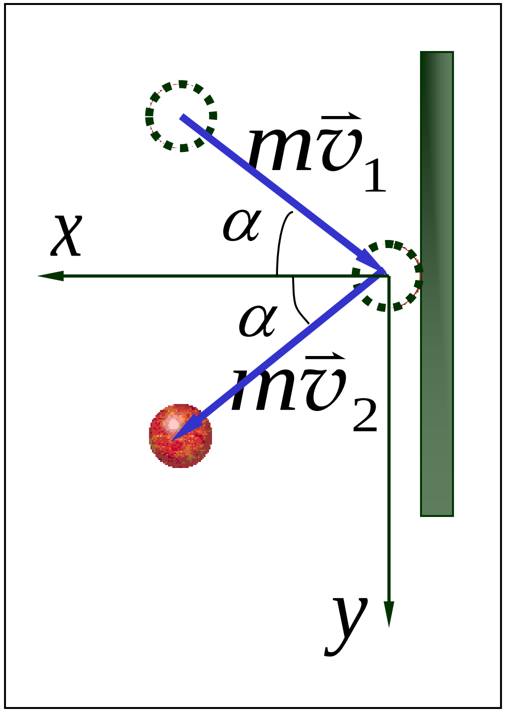
显示动量定理的矢量性。

例 一质量为0.05kg、速率为$10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的刚球，以与钢板法线呈45°角的方向撞击在钢板上，并以相同的速率和角度弹回来，设碰撞时间为0.05s，求在此时间内钢板所受到的平均冲力 $\overline{F}$ 。

解： 建立如图坐标系，由动量定理得

$$\overline{F}_x \Delta t = mv_{2x} - mv_{1x}$$
$$= mv\cos\alpha - (-mv\cos\alpha)$$
$$= 2mv\cos\alpha$$

$$\overline{F}_y \Delta t = mv_{2y} - mv_{1y}$$
$$= mv\sin\alpha - mv\sin\alpha = 0$$

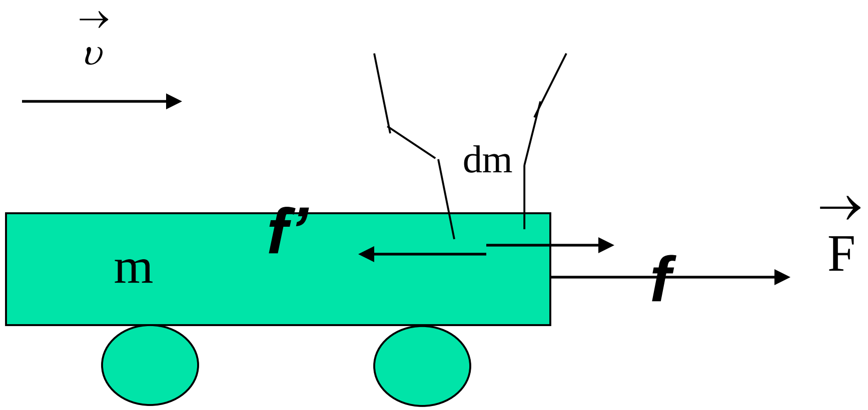


$$\overline{F} = \overline{F}_x = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} = 14.1\,\mathrm{N}$$

方向沿 x 轴反向

例3.3 $v = 3m/s, dm/dt = 500kg/s$

问：车厢速度不变，需多大的牵引力拉车厢



以在dt时间内落入车厢的煤dm为研究对象

由动量定理： $$fdt = dp = dm \cdot \upsilon$$

对于车厢： $(F - f')dt = 0$

$$f = f'$$

$$\Rightarrow F = f = \frac{dm}{dt} \cdot \upsilon$$

§3.2　动量守恒定律

1、质点系的动量定理

若质点系为两个以上的质点组成，则同理可得

$$\left(\sum \vec{F}_i\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\sum \vec{P}_i\right)$$

积分得

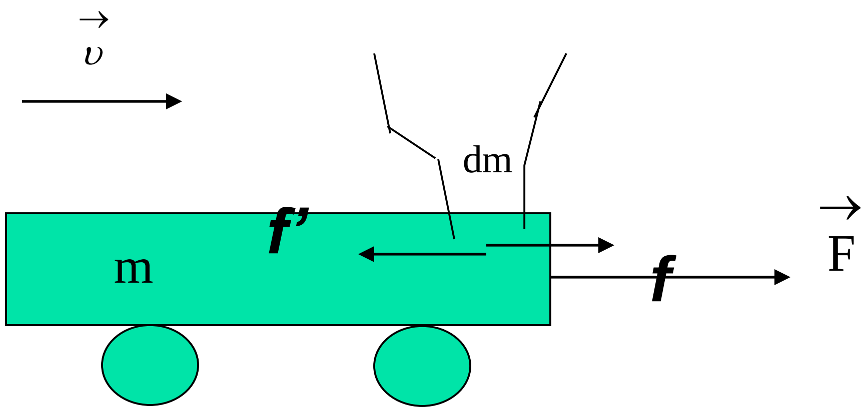
$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_i = \sum \vec{P}_i - \sum \vec{P}_{i0}}$$

- **质点系动量定理**　系统的总动量的增量等于系统所受外力的冲量的矢量和。

由该定理可以看出：内力不改变系统的总动量，但内力使得动量在系统内各个质点间相互转移，重新分配。

例3.3　$v = 3m/s, dm/dt = 500kg/s$

问：车厢速度不变，需多大的牵引力拉车厢



t时刻，水平方向　　　　$t + dt$时刻，水平方向

$m\upsilon + dm \cdot 0 = m\upsilon$　　　　$m\upsilon + dm \cdot \upsilon = (m + dm)\upsilon$

由质点系的动量定理：　$(m + dm)\upsilon - mv = Fdt$

$$\Rightarrow F = \frac{dm}{dt} \cdot \upsilon$$

2、动量守恒定律

由 $$\int_{t_0}^{t}\sum \vec{F}_i = \sum \vec{P}_i - \sum \vec{P}_{i0}$$

当 $\sum \vec{F}_i = 0$ 时，有

$$\sum \vec{P}_i - \sum \vec{P}_{i0} = 0$$

动量守恒定律　如果一个系统不受外力或所受外力的矢量和为零，那么这个系统的总动量保持不变。

或:一个孤立系统在运动过程中，其总动量一定保持不变。

讨论：

（1）在动量守恒定律的数学表达式中，由于动量是一个与参考系有关的物理量，因此所有动量都应是相对于同一惯性参考系而言的。

（2）动量守恒定律给出了始末状态总动量关系，在应用时，只要满足守恒条件，无需过问质点运动过程的细节。

（3）动量守恒定律中系统总动量不变，但系统内各质点的动量可以改变和相互转移。系统中一质点失去动量的同时，必然是别的质点得到了一份与之相等的动量。质点动量的转移反映了质点机械运动的转移。

（4）动量守恒定律是自然界中最重要最普遍的守恒定律之一，它既适用于宏观物体，也适用于微观粒子；既适用于低速运动物体，也适用于高速运动物体。实验表示，它是一条比牛顿定律更普遍、更基本的自然规律。

（5）在实际应用中，如系统内力远大于外力时（如碰撞、弹药爆炸等），可借助动量守恒定律处理。

（6）动量守恒定律的数学表达式是一个矢量式，在实际计算时，常用它按坐标轴分解的分量式。在直角坐标系中为

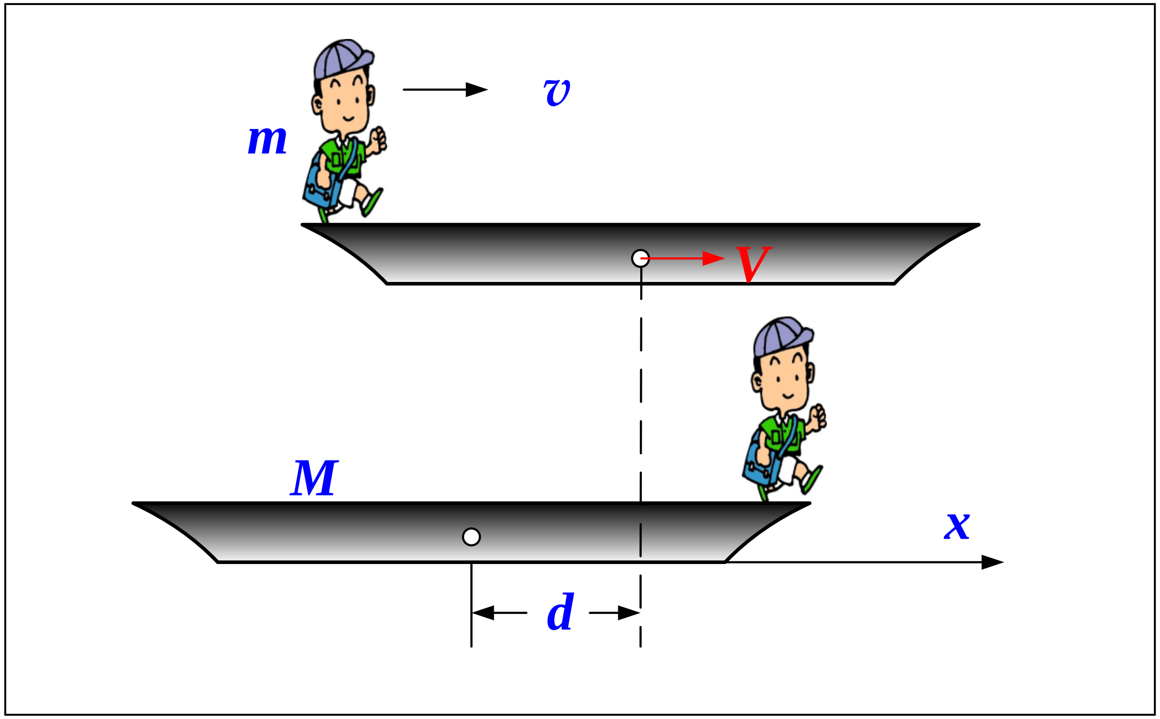
$$\sum P_{ix} - \sum P_{i0x} = 0 \qquad (若\sum F_{ix} = 0)$$

$$\sum P_{iy} - \sum P_{i0y} = 0 \qquad (若\sum F_{iy} = 0)$$

$$\sum P_{iz} - \sum P_{i0z} = 0 \qquad (若\sum F_{iz} = 0)$$

上式表明，虽然一个系统的总的动量不守恒，但如果系统在某方向所受合外力为零或不受外力，则在该方向我们仍可应用动量守恒定律。

【例题3－10】长度为L、质量为M的船停止在静水中（但未抛锚），船尾上有一个质量为m的人，也是静止的。现在令人在船上开始向船头走动，忽略水的阻力。试问：当人走到船头时，船将会移动多远？

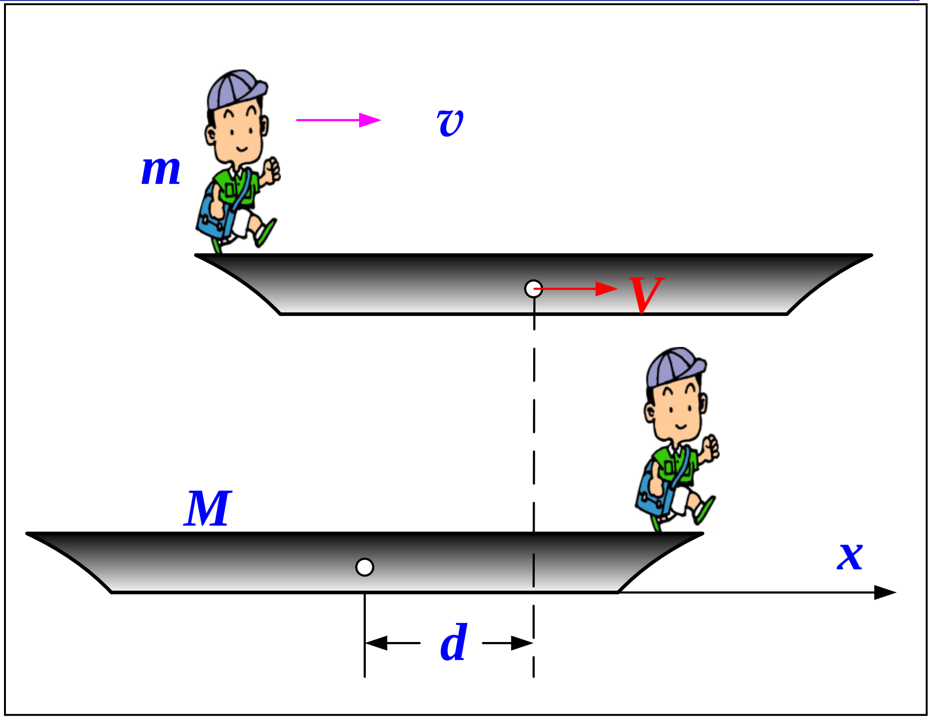


解：动量守恒法。

x方向：$$MV_x + mv_x = 0$$

$$V_x = -\frac{m}{M} v_x$$

（负号表示什么？）



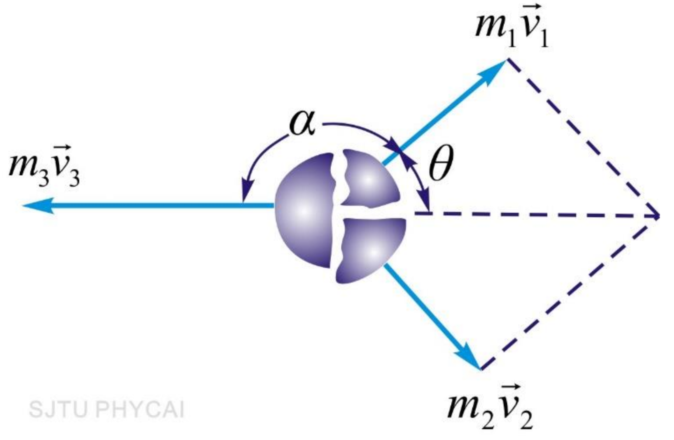
$$\therefore \quad \int_0^t V_x \mathrm{d}t = -\int_0^t \frac{m}{M} v_x \mathrm{d}t$$

位移 $$-d = -\frac{m}{M}(l-d) \qquad d = \frac{m}{m+M} l$$

还有其他解题方法吗？

例2 一个静止物体炸成三块，其中两块质量相等，且以相同速度30 m/s沿相互垂直的方向飞开，第三块的质量恰好等于这两块质量的总和。试求第三块的速度（大小和方向）。

解：炸裂时爆炸力是物体内力，它远大于重力，故在爆炸中，可认为动量守恒。



$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0$$

$$\longrightarrow -m_3\vec{v}_3 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

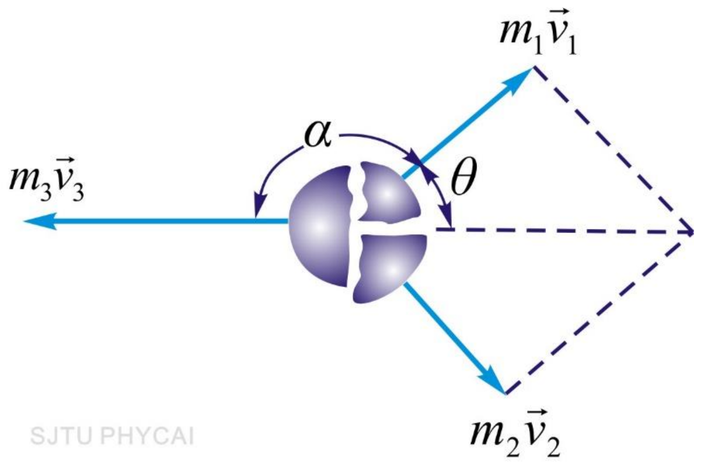
$$\longrightarrow (m_3 v_3)^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2$$

$$(m_3 v_3)^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2$$

$$\because m_1 = m_2 = m, m_3 = 2m$$

$$\therefore v_3 = \frac{1}{2}\sqrt{v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2}} = \frac{1}{2}\sqrt{30^2 + 30^2} = 21.2(\text{m/s})$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 180^\circ - \theta \\ \tan\theta = \dfrac{v_2}{v_1} = 1, \theta = 45^\circ, \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha = 135^\circ$$



即 $\vec{v}_3$和$\vec{v}_1$及$\vec{v}_2$都成135°，

且三者都在同一平面内

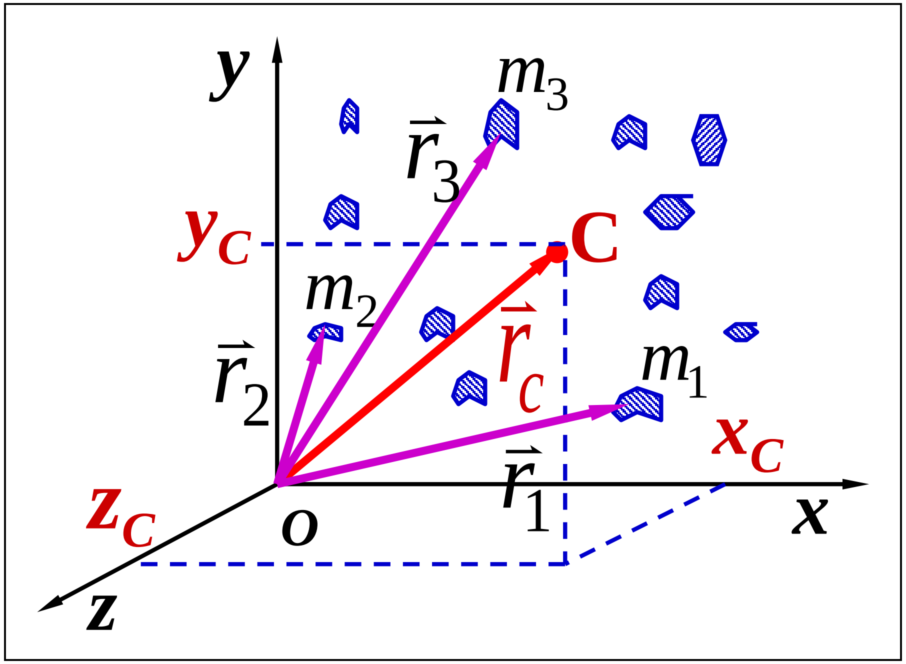
§3.4 质心

手榴弹质心（红点）的运动轨迹是抛物线

- 其余质点运动　质心的平动 + 绕质心的转动

1、质心（center of mass）：是与质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心，**是一个以质量为权重取平均的特殊点**。

2、质心的位置

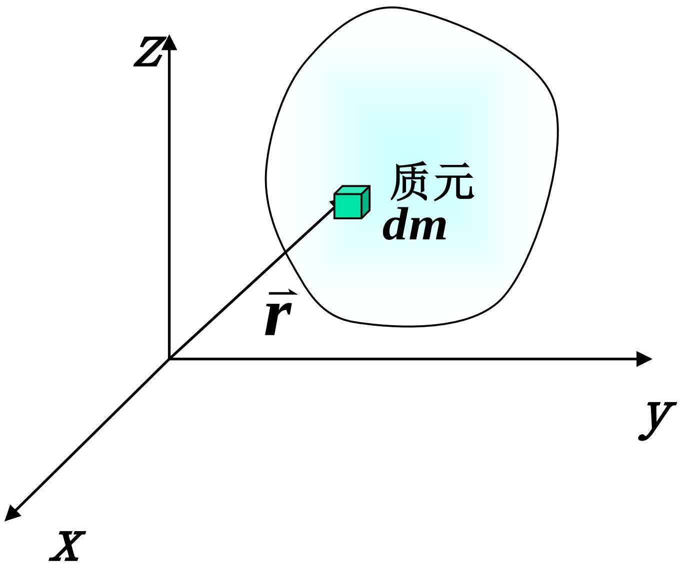


$$\vec{r}_c=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{m}$$

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m}\qquad y_c=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m}\qquad z_c=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{m}$$

对质量连续分布的物体

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}dm}{m}$$



$$x_c = \frac{\int xdm}{m} \quad y_c = \frac{\int ydm}{m} \quad z_c = \frac{\int zdm}{m}$$

说明:

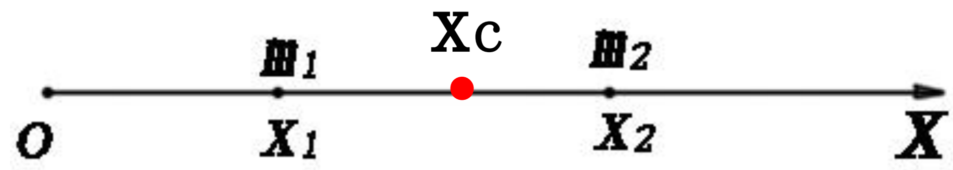
1）选择不同的坐标系或坐标系的原点位置不同，质心的坐标数不同，但质心相对于物体的位置是固定的；

2）对于不太大物体，质心与重心重合；

3）对于具有规则的几何形状、质量均匀分布的物体，质心在其几何中心；

4）质心是位置的加权平均值，质心处不一定有质量。

例、如图，有两质点m_1、m_2 ，求质心的位置。



解：

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_1x_c + m_2x_c = m_1x_1 + m_2x_2$$

$$m_1(x_c - x_1) = m_2(x_2 - x_c)$$

$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1}$$

§3.5 质心运动定理

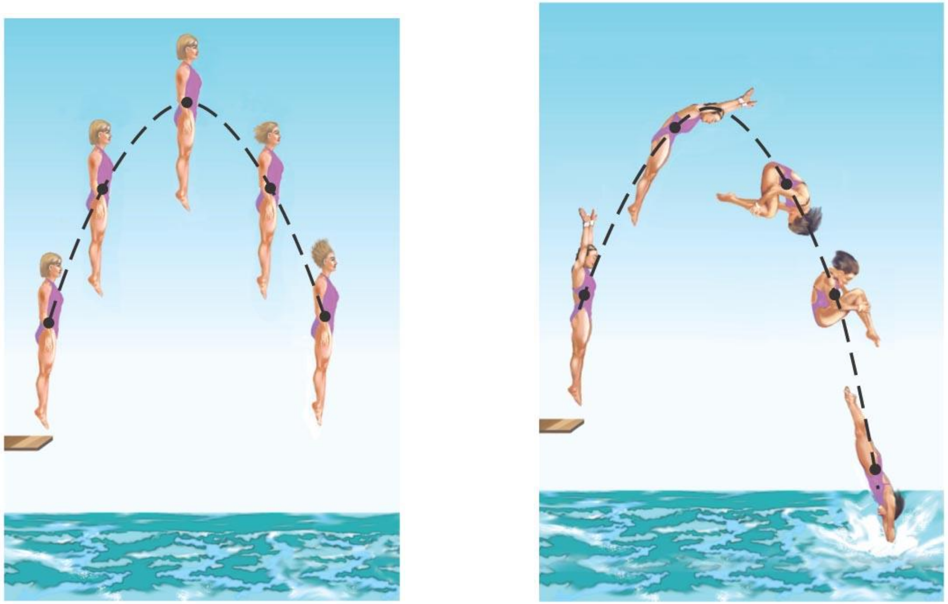
•在任何参考系中，质心的动量都等于质点系的总动量。

质心的动量

$$\vec{P}_c = m\vec{v}_c = \vec{P}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = m\vec{a}_c$$

它表明：一个质点系质心的运动等同于一个质点的运动，该质点具有质点系的总质量并集中在质心，它受到的外力为质点系所受的所有外力的矢量和。



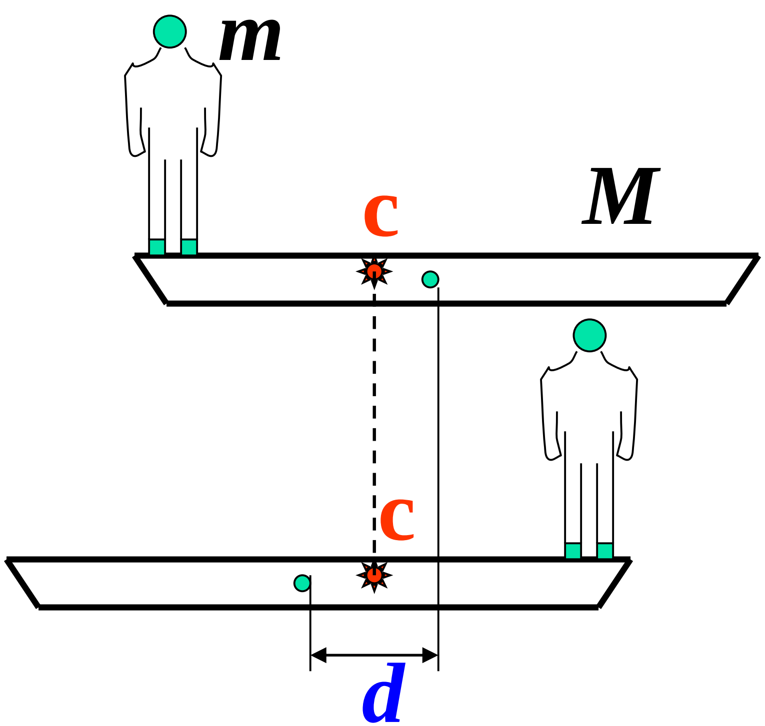
(a) (b)

说明：①不管物体的质量如何分布，也不管外力作用在物体的什么位置上，质心的运动就象是物体的全部质量都集中于此，而且所有外力也都集中作用其上的一个质点的运动一样。

②质点组的内力不会影响质心的运动状态，若质点组所受外力矢量和为零，则质心静止或作匀速直线运动；

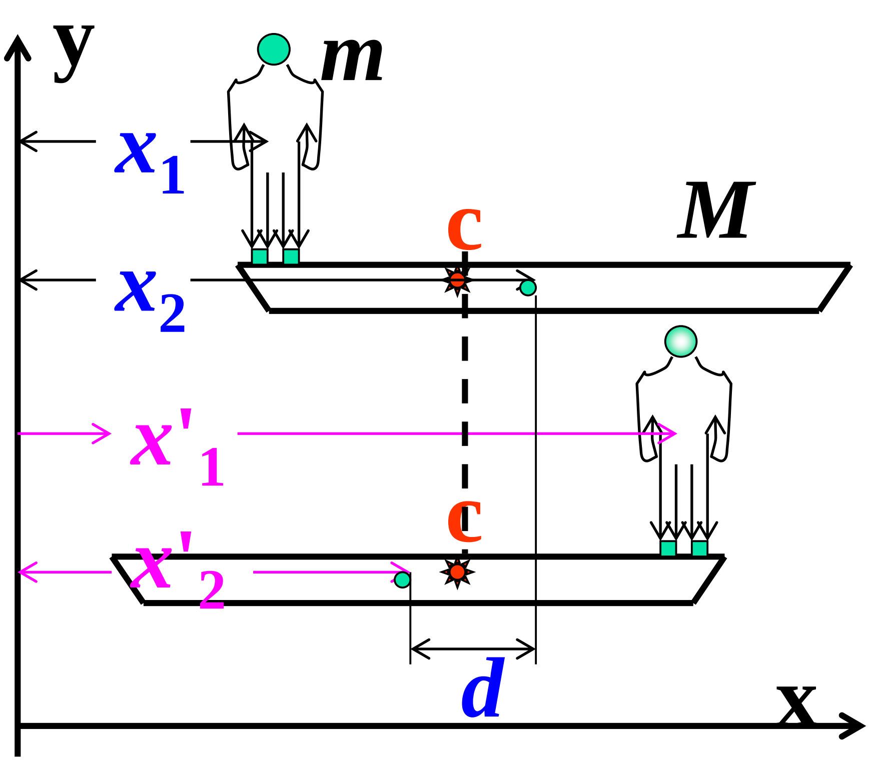
③质心运动定理只能给出质心的运动情况，不能给出各质点围绕质心的运动情况以及质点组内部的相对运动。

例3.10　一质量m=50千克的人站在一条质量M=200千克、长为L=4米的船的船头上。开始时船静止，试求当人以时快时慢的不规则速率走到船尾时，船相对岸移动的距离d=？（设船与水之间的摩擦可以忽略）



解：　质心法。

系统：人与船在水平方向不受外力，质心始终静止。



$$x_c = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$$

$$x'_c = \frac{mx'_1 + Mx'_2}{m+M}$$

$$\therefore mx_1 + Mx_2$$

$$= mx'_1 + Mx'_2$$

$$M\left(x_2 - x'_2\right) = m\left(x'_1 - x_1\right) \qquad Md = m\left(l - d\right)$$

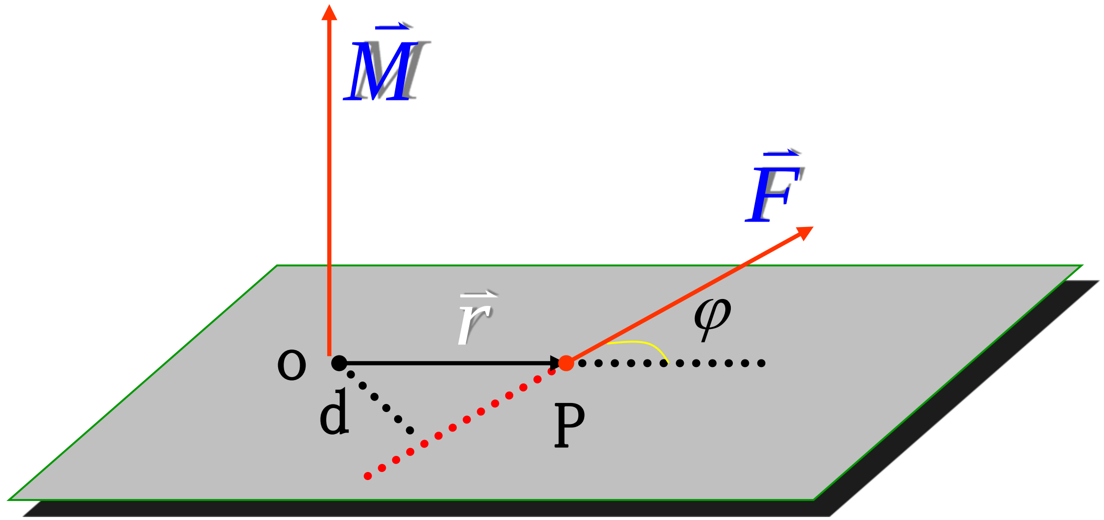
得 $$d = \frac{m}{m+M} l = \frac{50}{50+200} \times 4 = 0.8m$$

§3.6 质点的角动量和角动量定理

1、力矩

作用力 $\vec{F}$ 对参考原点O的力矩定义为：

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



单位：N·m

力矩的大小： $M = Fr\sin\varphi = Fd$

力矩的方向：位矢 $\vec{r}$ 与作用力 $\vec{F}$ 的矢积方向

力臂：从参考点O到力的作用线的垂直距离（d=rsinφ）

2、质点的角动量（动量矩）

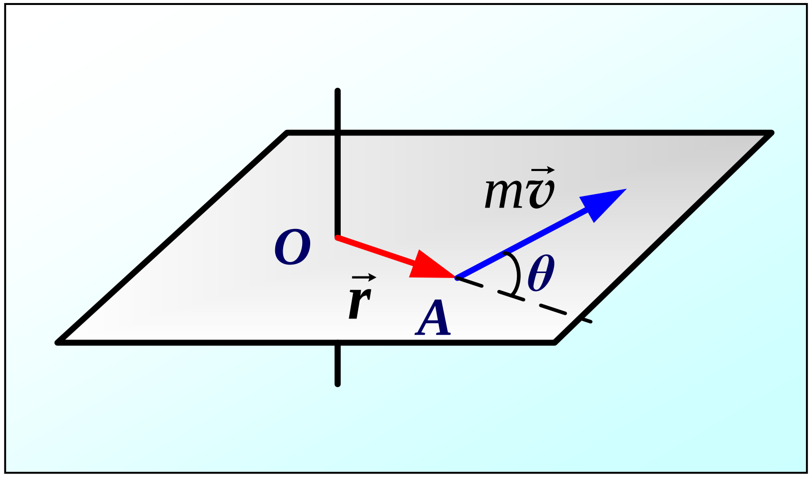
定义质点m对o点的角动量：

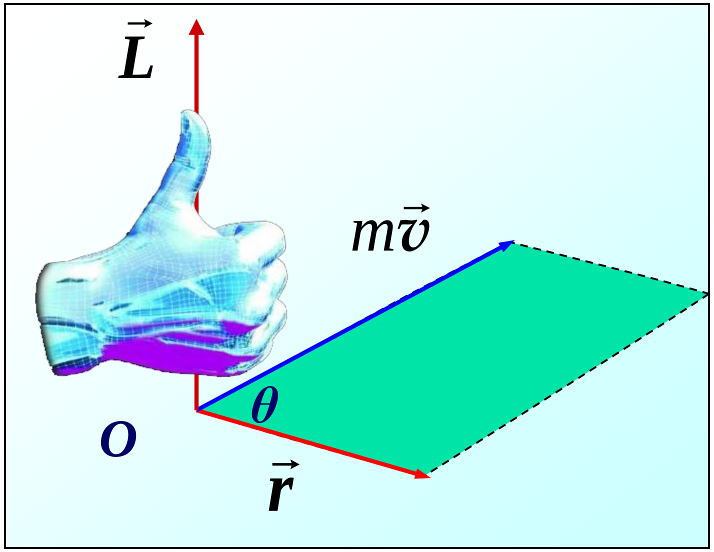
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小：　$L = mvr\sin\theta$

方向：　右手螺旋法则

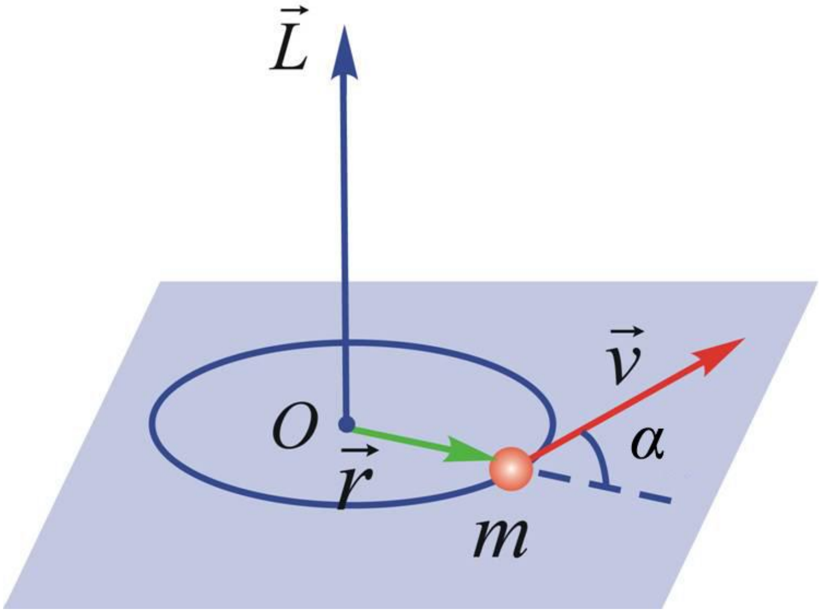
单位：　千克·米^2/秒（kg·m^2/s）





$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

特例：做圆周运动时，由于 $\vec{r} \perp \vec{v}$，质点对圆心的角动量大小为 $L = rmv$ ，



注意

同一质点，对不同定点的角动量不同；只要是谈质点相对于某点的运动，无论质点是作曲线运动还是作直线运动，都可以引入角动量。

3、角动量定理

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$ ---质点的角动量定理

质点所受的合外力矩等于质点角动量对时间的变化率。

它说明力矩的作用效果：使物体的角动量发生变化。

说明

1）$\vec{M}$和$\vec{L}$都是相对惯性系中同一定点定义的。

2）积分形式：

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot \mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$ —冲量矩，力矩的时间积累。

§3.7 角动量守恒定律

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$ ---质点的角动量定理

若 $\vec{M}=0$，则 $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0$，$\vec{L}=\vec{L}_0$ (常矢量)

即：若对惯性系某一固定点，质点所受的合外力矩为零，则此质点对该固定点的角动量矢量保持不变，即角动量的大小和方向都保持不变。

和动量守恒定律一样，角动量守恒定律也是自然界的一条最基本的定律。

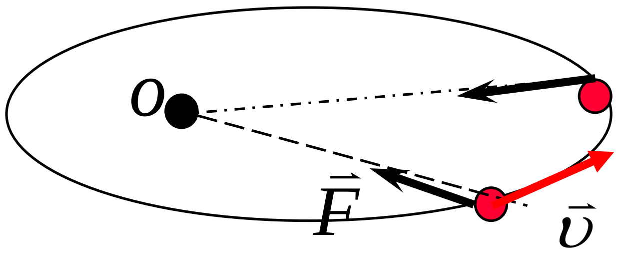
讨论

1）质点角动量守恒的条件：$M=0$

2）$M=0$ ：$\vec{F}=0$ 或r与F 平行或反平行，其夹角为0或π（有心力）。

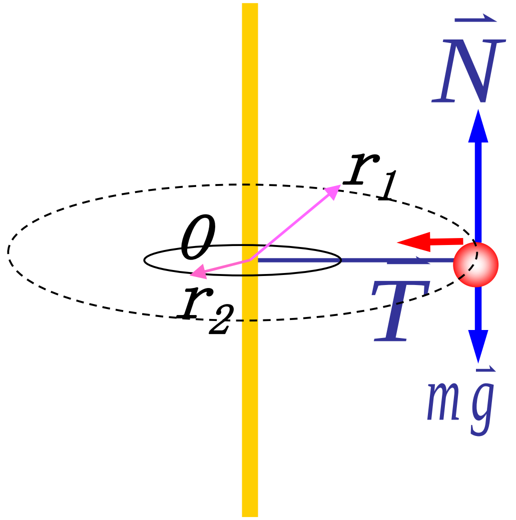
3）动量守恒与角动量守恒是相互独立的定律；

如行星运动 $\begin{cases}\text{动量不守恒}\\\text{角动量守恒}\end{cases}$



行星在速度和有心力所组成的平面内运动

例 质量为m 的小球系于细绳的一端，绳的另一端缚在一根竖直放置的细棒上。小球被约束在水平面内绕细棒旋转，某时刻角速度为ω_1， 细绳长度为r_1。当旋转了若干圈后，由于细绳缠绕在细棒上，绳长度变为r_2，求此时小球绕细棒旋转的角速度ω_2。



解： 根据角动量守恒 $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$

小球做圆周运动，

对圆点0的角动量大小为

$$L = rmv$$

$$\therefore mr_1v_1 = mr_2v_2 \xrightarrow{v=r\omega} mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$$

由此得到： $\omega_2 = (r_1/r_2)^2\omega_1$

课后作业

3.1

3.5

3.8

3.11

3.12

3.15