Aproksymacja

Plan wykładu

1. Problem aproksymacji, normy, rodzaje aproksymacji

2. Aproksymacja średniokwadratowa

    a) w bazie jednomianów
    b) w bazie wielomianów ortogonalnych
    c) w bazie funkcji trygonometrycznych
    d) w bazie funkcji sklejanych

3. Przybliżenia Padego

Założenia

f(x) – funkcja którą aproksymujemy
f$\in$ X ; X jest przestrzenią liniową

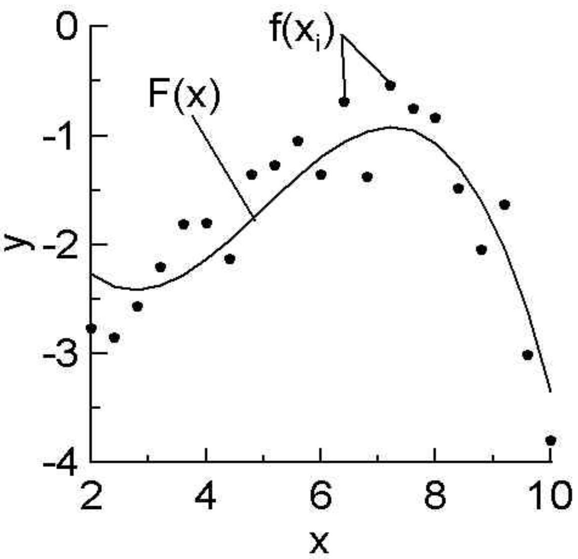
Aproksymacja liniowa funkcji f(x) (aproksymowanej - przybliżanej) polega na wyznaczeniu współczynników $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ funkcji aproksymującej:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)$$

gdzie: $\varphi_i(x)$ - są funkcjami bazowymi (m+1) wymiarowej podprzestrzeni liniowej X_{m+1} ($X_{m+1} \in X$)

Żądamy aby funkcja F(x) spełniała warunek

$$\|f(x) - F(x)\| = minimum$$



Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu:

1) podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą – 1, sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x),..., sin(kx), cos(kx)
2) podprzestrzeń wielomianów stopnia m z bazą - 1, x, x^2,x^3,..., x^m (lub wielomiany ortogonalne)
3) podprzestrzeń funkcji, których o własnościach ściśle związanych z własnościami rozważanego problemu – np. exp($-ax^2+bx+c$)

Przykłady norm stosowanych w aproksymacji:

a) norma Czebyszewa

$$\|f(x)-F(x)\| = \sup_{[a,b]} |f(x)-F(x)|$$

b) norma L_2

$$\|f(x)-F(x)\| = \left(\int_a^b |f(x)-F(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

c) norma L_2 z wagą

$$\|f(x)-F(x)\| = \left(\int_a^b w(x)|f(x)-F(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

gdzie: w(x) jest nieujemną ciągłą funkcją wagową

Jeśli funkcja f(x) jest określona na dyskretnym zbiorze punktów wówczas norma L_2 z wagą przyjmuje postać:

$$\|f(x)-F(x)\| = \left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[f(x_i)-F(x_i)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Aproksymacja średniokwadratowa.

Dla funkcji ciągłej f(x) określonej w przedziale [a,b] poszukujemy minimum całki:

$$\|F(x)-f(x)\| = \int_a^b w(x)[F(x)-f(x)]^2 dx$$

lub sumy gdy funkcja jest określona na dyskretnym zbiorze n+1 punktów (**metoda najmniejszych kwdratów**):

$$\|F(x)-f(x)\| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i)-f(x_i)]^2$$

$$w(x_i) \geq 0 \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Aproksymacja jednostajna.

Dla funkcji f(x)określonej w przedziale [a,b] poszukujemy F(x) dającej najmniejsze maksimum różnicy między nimi w całym przedziale:

$$\|F(x)-f(x)\| = \sup_{x\in[a,b]} |F(x)-f(x)|$$

Tw. 1 (Weierstrassa)
Jeżeli funkcja f(x) jest ciągła na skończonym przedziale [a,b], to dla każdego ε dodatniego można dobrać takie n, że jest możliwe utworzenie wielomianu $P_n(x)$ stopnia n ($n=n(\varepsilon)$), który spełnia nierówność:

$$\|f(x) - P_n(x)\| \leq \varepsilon$$

Z twierdzenia powyższego wynika, że **zawsze** można znaleźć wielomian o dowolnie małym odchyleniu od funkcji f(x).

Tw. 2 (Weierstrassa)
Jeżeli funkcja f(x) jest funkcją ciągłą na R i okresową o okresie 2π to dla każdego ε dodatniego istnieje wielomian trygonometryczny

$$\begin{aligned} S_n(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx)) \\ n &= n(\varepsilon) \end{aligned}$$

spełniający dla wszystkich x nierówność

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Metoda aproksymacji średniokwadratowej.

Dysponując układem funkcji bazowych w podprzestrzeni X_n:

$$\varphi_i(x), \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

szukamy wielomianu F(x) będącego najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym funkcji f(x) na zbiorze $X=(x_j)$:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x)$$

Dla F(x) liczymy normę L_2

$$\begin{aligned} &H(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \\ &= \sum_{j=0}^{n} w(x_j) \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x_j) \right]^2 \\ &= \sum_{j=0}^{n} w(x_j) R_j^2 \end{aligned}$$

gdzie: R_j jest odchyleniem w punkcie x_j

Szukamy minimum funkcji H (wielu zmiennych) ze względu na współczynniki $a_0, a_1, \ldots$

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

Warunek ten generuje m+1 równań liniowych z m+1 niewiadomymi:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial a_k} &= -2 \sum_{j=0}^{n} w(x_j) \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x_j) \right] \varphi_k(x_j) = 0 \\ k &= 0, 1, 2, \ldots, m \end{aligned}}$$

Powyższy układ równań zwany jest **układem normalnym**. Ponieważ funkcje bazowe są liniowo niezależne, istnieje więc dokładnie jedno rozwiązanie minimalizujące wartość H. Układ równań można zapisać w postaci macierzowej (**zakładamy ω(x)=1**):

$$D^T D A = D^T f$$

Uwaga:

a) Macierz D może nie być kwadratowa np. w tzw. **regresji liniowej** baza jest dwuelementowa {1,x}, a węzłów może być dowolna ilość

b) $D^T D$ jest macierzą kwadratową i symetryczną o rozmiarach $(m+1)$x$(m+1)$

$$D = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \ldots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \ldots & \varphi_m(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & \ldots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów

Jako bazę przyjmujemy ciąg jednomianów

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^m$$

Warunek minimum przyjmuje postać:

po zmianie kolejności sumowania

$$\sum_{j=0}^{n} f(x_j)x_j^k = \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k} \right)$$

i wprowadzeniu oznaczeń

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k} \quad \rho_k = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)x_j^k$$

otrzymujemy układ normalny:

W aproksymacji średniokwadratowej ciąg funkcyjny

$$\{\varphi_m(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$$

stanowi bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jeśli narzucimy dwa warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = 0, \quad j \neq k$$

Oraz nie wszystkie węzły są zerami tych wielomianów

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i) > 0$$

Macierz układu normalnego przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi jest macierzą diagonalną

$$D^T D = \left[\begin{array}{cccc} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{array} \right]$$

$$d_{jj} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i)$$

Macierz układu jest dobrze uwarunkowana i układ posiada jedno rozwiązanie.

Jak znaleźć wielomiany ortogonalne?

Zakładamy, że węzły są równoodległe

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

i wykonujemy przekształcenie

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad x_i \to q_i$$

Naszym zadaniem jest znalezienie ciągu wielomianów

$$\{F_i^{(n)}(q)\} = F_0^{(n)}(q), F_1^{(n)}(q), \ldots, F_m^{(n)}(q)$$

postaci

$$\begin{array}{rcl} F_k^{(n)}(q) & = & a_0 + a_1 q + a_2 q(q-1) \\ & + & \ldots + a_k q(q-1)\cdots(q-k+1) \end{array}$$

spełniające warunek ortogonalności

$$\sum_{i=0}^{n} F_j^{(n)}(i) F_k^{(n)}(i) = 0 \Longleftrightarrow j \neq k$$

Korzystamy z postaci wielomianu czynnikowego

$$q^{[k]} = q(q-1)\dots(q-k+1)$$

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q^{[1]} + a_2 q^{[2]} + \dots + a_k q^{[k]}$$

i dodatkowo normujemy wielomiany tzn. mają one postać

$$\widehat{F}_k^{(n)}(0) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\widehat{F}_k^{(n)}(q) = 1 + b_1 q^{[1]} + b_2 q^{[2]} + \dots + b_k q^{[k]}$$

Szukane **wielomiany ortogonalne** są **wielomianami Grama**

$$\boxed{\widehat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[n]}}}$$

Mając zdefiniowaną bazę można znaleźć funkcję aproksymującą F(x)

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \widehat{F}_k^{(n)}(q) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \widehat{F}_k^{(n)} \left(\frac{x - x_0}{h} \right), \quad m \le n \end{aligned}$$

Ze współczynnikami

$$s_k = \sum_{q=0}^{n} [\widehat{F}_k^{(n)}(q)]^2 \qquad c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i \widehat{F}_k^{(n)}(x_i)$$

Wielomiany ortogonalne dla punktów rozmieszczonych dowolnie (nie równoodległych)

Kolejne wielomiany ortogonalne wyznaczamy rekurencyjnie tj. na podstawie znajmości postaci wielomianów niższych stopni:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_{j+1}(x) &= (x - \alpha_{j+1})\varphi_j(x) - \beta_j \varphi_{j-1}(x) \\ j &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}}$$

z warunkami

$$\varphi_0(x) = 1 \qquad \varphi_{-1}(x) = 0$$

$$\alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i \varphi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i)}$$

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i \varphi_{j-1} \varphi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} \varphi_{j-1}^2(x_i)}$$

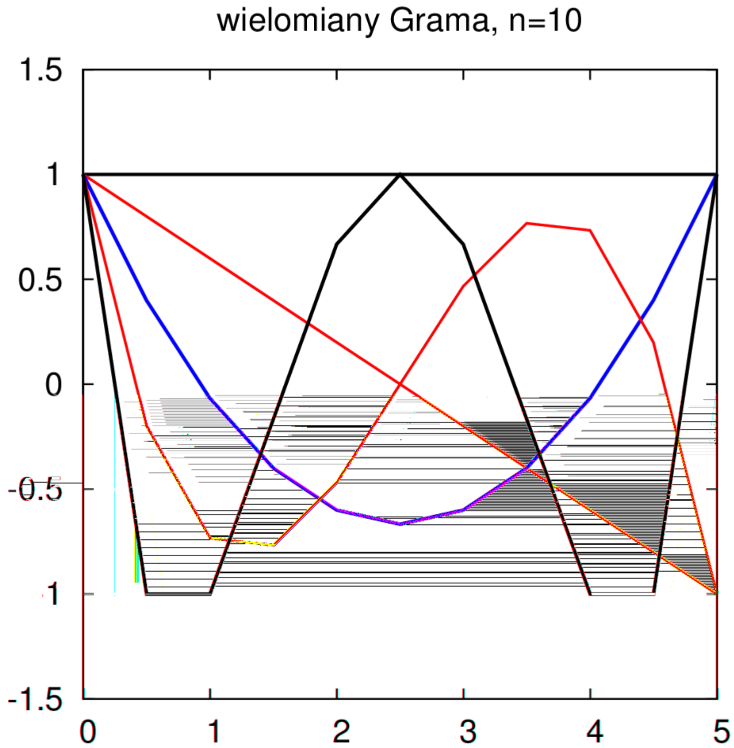
Wielomiany Grama dla 11 węzłów (n=10),h=0.5

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k \varphi_k(x)$$

$$b_k = \frac{C_k}{S_k}$$

$$C_k = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_k(x_i)$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} \varphi_k^2(x_i)$$



Aproksymacja średniokwadratowa w bazie funkcji trygonometrycznych

Funkcje okresowe aproksymujemy przy użyciu funkcji trygonometrycznych, czyli w bazie

$$1,\ sin(x),\ cos(x),\ sin(2x),\ cos(2x),\ldots$$

Wielomian trygonometryczny o okresie 2π ma postać:

$$Q_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx))$$

Jeśli funkcja f(x) jest określona na dyskretnym zbiorze równoodległych punktów, a liczba punktów jest parzysta i wynosi 2L:

$$x_i = \frac{\pi i}{L}, \quad i = 0,1,2,\ldots,2L-1$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} sin(mx_i)sin(kx_i) = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ L, & m = k \neq 0 \\ 0, & m = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} cos(mx_i)cos(kx_i) = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ L, & m = k \neq 0 \\ 2L, & m = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} cos(mx_i)sin(kx_i) = 0, \quad m,k - dowolne$$

Szukamy wielomianu w postaci:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j cos(jx) + b_j sin(jx))$$

$$n < L$$

Współczynniki a_j oraz b_j wyznacza się z warunku minimalizacji wyrażenia:

$$\sum_{i=0}^{2L-1}[f(x_i) - F(x_i)]^2 = min$$

co prowadzi do zależności na współczynnki

$$a_j = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)cos(jx_i)$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)cos\frac{\pi ij}{L}$$

$$b_j = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)sin(jx_i)$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)sin\frac{\pi ij}{L}$$

Aproksymacja średnokwadratowa w bazie funkcji sklejanych

Zakładamy, że funkcję s(x) można przedstawić w postaci kombinacji liniowej funkcji bazowych w postaci funkcji sklejanych trzeciego stopnia
(np. zdefiniowanych na wykładzie z interpolacji):

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x), \quad a \le x \le b$$

Szukamy minimum odchylenia kwadratowego:

$$I = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x) \right]^2 dx$$

licząc pochodne cząstkowe względem c_j:

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0$$

Dostajemy układ n+3 równań z n+3 niewiadomymi.

$$\sum_{i=-1}^{n+1} c_i \int_a^b \Phi_i^3(x)\Phi_j^3(x)dx = \int_a^b f(x)\Phi_j^3(x)dx$$

$$j = -1, 0, 1, \ldots, n+1$$

Ze względu na liniową niezależność funkcji bazy układ ma jednoznaczne rozwiązanie dające minimum funkcji ***I***.

$$\sum_{i=-1}^{n+1} a_{ij} c_i = \frac{1}{h} \int_a^b f(x)\Phi_j^3(x)dx$$

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_a^b \Phi_i^3(x)\Phi_j^3(x)dx$$

Macierz układu jest macierzą symetryczną i wstęgową (pięcioprzekątniową).

$$Ac = \rho$$

W przypadku aproksymacji na dyskretnym zbiorze punktów (x_i), gdzie:

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n_1, \quad n_1 > n + 3$$

szukamy minimum wyrażenia:

$$J = \sum_{k=0}^{n_1} \left[f(x_k) - \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x_k) \right]^2$$

Postępując jak w przypadku funkcji ciągłych otrzymyjemy układ równań:

$$\sum_{i=-1}^{n+1} b_{ij} c_i = \sum_{k=0}^{n_1} f(x_k) \Phi_j^3(x_k)$$
$$j = -1, 0, 1, \ldots, n+1$$

gdzie:

$$b_{ij} = \sum_{k=0}^{n_1} \Phi_i^3(x_k) \Phi_j^3(x_k)$$

Również w tym przypadku macierz współczynników układu jest symetryczna i ma postać wstegową:

$$b_{ij} = 0 \Leftrightarrow |i - j| \geq 4$$

Nierzadko zależy nam na dopasowaniu do danych pomiarowych określonej zależności funkcyjnej (np. wynikającej z zasady działania danego urzadzenia).

Często stosuje się poniższe upraszczające formuły aproksymacyjne:

$$\begin{aligned} y &= ax^b + c \\ y &= e^{ax^2 + bx + c} \\ y &= ax^2 + bx + c \\ y &= ax^b e^{cx} \end{aligned}$$

Aproksymacja Padego

Funkcję aproksymowaną przybliżamy funkcją wymierną

$$R_{n,k}(x) = \frac{L_n(x)}{M_k(x)}$$

Gdzie: N=n+k

Zaletą powyższego przybliżenia (w problemie aproksymacji jednostajnej) są mniejsze błędy niż aproksymacja wielomianem stopnia N (otrzymanych np. z rozwinięć Taylora czy Maclaurina).

Zadanie polega na znalezieniu N+1 współczynników L_N oraz M_k

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$M_k(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_k x^k$$

$$b_0 \neq 0$$

tak aby w x_0=0 funkcje: aproksymowana i aproksymująca miały jak najwięcej równych pochodnych.

Rozwijamy f(x) w szereg Maclaurina

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

Liczymy **błąd aproksymacji** (w celu otrzymania zależności współczynniki a_i oraz b_i)

$$f(x) - \frac{L_n(x)}{M_k(x)} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k} b_i x^i\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{k} b_i x_i}$$

Wykorzystujemy warunki z ciągłością pochodnych w x=0

$$f^{(m)}(x)|_{x=0} - R_{n,k}^{(m)}(x)|_{x=0} = 0$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, k+n$$

Powyższy warunek będzie spełniony, gdy licznik zapiszemy jako

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k} b_i x^i\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} d_{N+j} x^{N+j}$$

Dla $f(0) = R_{n,k} = 0$

$$(b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k)(c_0 + c_1 x + \ldots) = \\ = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)$$

Dostajemy zależności

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & b_0 c_0 \\ a_1 & = & b_0 c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 & = & b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$\boxed{a_r = \sum_{j=0}^{r} c_{r-j} b_j, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n}$$

Wykorzystujemy założenie o równości pochodnych (do rzędu n+k+1) co daje dodatkową zależność

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} c_{n+k-s-j} b_j = 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, k-1}$$

Przykład.

Należy przybliżyć w otoczeniu x=0 funkcję

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{8}x}{1 + 2x}}$$

Rozwinięcie w szereg Maclaurina do wyrazów stopnia 2 daje

$$f_M(x) = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{39}{32}x^2$$

natomiast przybliżenie Padego $R_{1,1}$

$$R_{1,1} = \frac{1 + \frac{7}{8}x}{1 + \frac{13}{8}x}$$