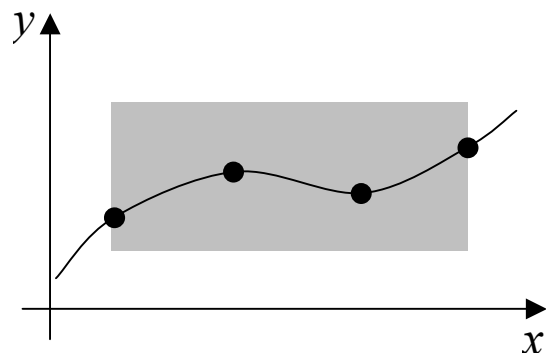


Wykład IV

Wielomianowa interpolacja i ekstrapolacja

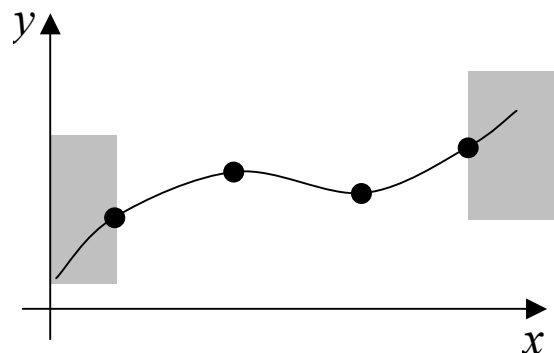
- Interpolacja wielomianowa z dowolnymi węzłami
- Interpolacja z węzłami równoodległymi
- Interpolacja funkcjami sklejanymi
- Ekstrapolacja

Zadania przybliżenia wielomianowego



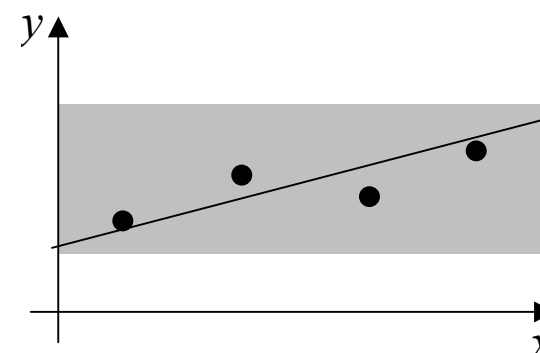
Interpolacja

Wielomian stopnia $N-1$ przechodzący przez N zadanych punktów (węzłów) x_i . Poszukiwane wartości y pomiędzy węzłami. Rozwiązanie jednoznaczne.



Ekstrapolacja

Wielomian stopnia $N-1$ przechodzący przez N zadanych punktów (węzłów) x_i . Poszukiwane wartości y poza zakresem węzłów. Rozwiązanie jednoznaczne.



Aproksymacja

Wielomian stopnia $<N-1$ dopasowany do N zadanych punktów wg określonego kryterium. Poszukiwane wartości y wg zależności dopasowanej. Rozwiązanie zależne od stopnia wielomianu i kryterium dopasowania.

Zastosowania interpolacji

„Odtwarzanie” informacji brakującej

Wstawianie brakujących danych na zasadzie gładkiego przejścia pomiędzy danymi znanymi. Odtwarzanie w cudzysłowie, bo nie jesteśmy pewni charakteru brakujących danych.

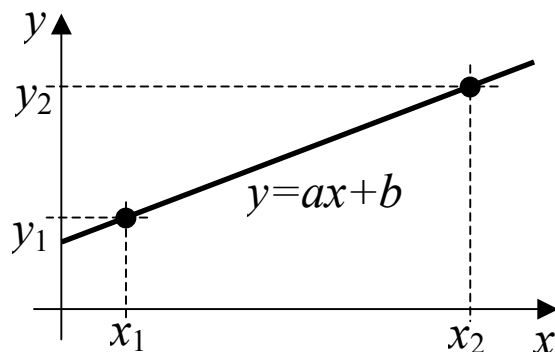
Na przykład:

- 1) Filtry interpolujące w DSP dodające próbki przy zachowaniu pasma sygnału
- 2) Odtwarzanie momentu przejścia przez zero spróbkowanego sygnału okresowego
- 3) Odtwarzanie w postaci izoterm rozkładu temperatury na obszarze Polski na podstawie pomiarów temperatury w rozproszonych stacjach meteo (problem dwuwymiarowy).

Redukcja opisu danych (interpolacja w sformułowaniu aproksymacji, temat kolejnych zajęć)

- 1) Opis ciągłej charakterystyki przetwarzania kilkoma współczynnikami wielomianu interpolującego. Np. charakterystyka przetwarzania termorezystora Pt100 jest przedstawiana w normie państwowej w alternatywnych postaciach tabeli wartości lub współczynników wielomianu czwartego stopnia w funkcji temperatury.
- 2) Przybliżenie czasochłonnej obliczeniowo funkcji. Np. funkcja *erf* czyli funkcja błędu $2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ (nie obliczalna analitycznie całka eliptyczna) jest w Matlabie przybliżana przez funkcję wymierną (*rational approximation*) – aproksymacja Padé.

Najprostsze zadanie interpolacji



Poszukujemy liniowej zależności $y = ax + b$ (nieznane a i b) między punktami (x_1, y_1) i (x_2, y_2) .

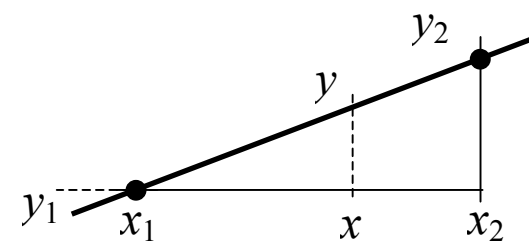
W zapisie macierzowym:
$$\begin{bmatrix} x_2 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie (np. metodą wyznaczników):

$$a = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) \quad b = (x_2 y_1 - x_1 y_2) / (x_2 - x_1).$$

Postać przyrostowa (Newtona): $y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$

Postać kombinacyjna (Lagrange'a): $y = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_2$



proporcje w trójkącie
prostokątnym

Ogólne sformułowanie zadania interpolacji wielomianowej

Poszukujemy współczynników a_i wielomianu $y(x)$, który w punktach x_1, \dots, x_N będzie miał wartości y_1, \dots, y_N :

$$y(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{N-1}x^{N-1}$$

$$y(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Wynikający z tego sformułowania układ równań :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{N-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{N-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_N^{N-1} & \cdots & x_N & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} a_{N-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

można rozwiązać ogólnymi metodami (np. dekompozycja LU macierzy \mathbf{T} i podstawienia). Jest to układ równań (z macierzą Vandermonde'a) źle uwarunkowany dla dużego N .

Nieznaczną modyfikacją parametryzacji wielomianu (postać Newtona i Lagrange'a), prowadzi do prostego iteracyjnego algorytmu wyznaczania współczynników wielomianu interpolującego.

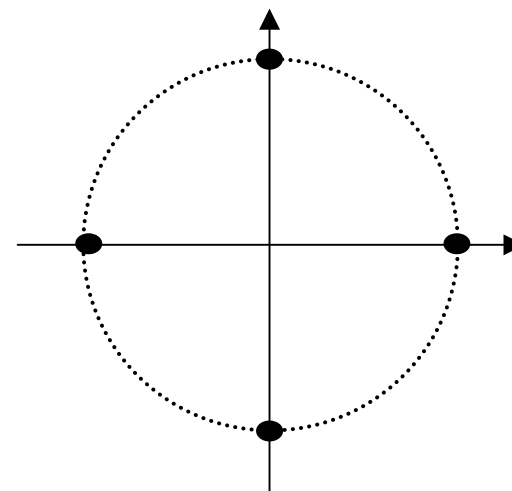
Przykład Interpolowane przybliżenie okręgu na małej ilości węzłów (punktów okręgu)

Problemem ilustrującym kolejne metody interpolacji będzie rysowanie okręgu na podstawie kilku wybranych wartości tej krzywej zadanej parametrycznie:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t\pi/2) \\ y(t) = \sin(t\pi/2) \end{cases}$$

Interpolację będziemy prowadzić dla tabeli wartości:

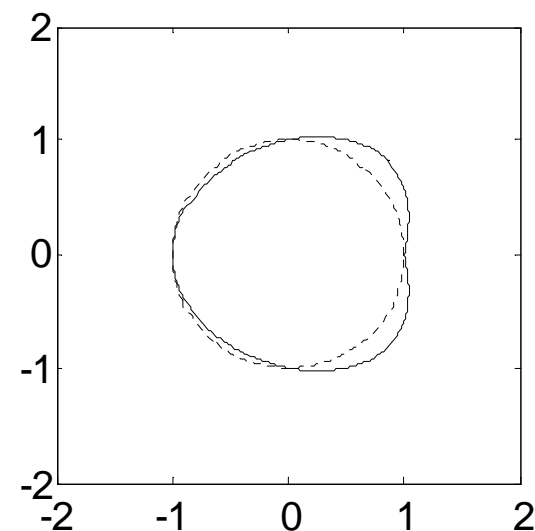
t	0	1	2	3	4
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0



Interpolujemy sinus i kosinus niezależnie. Macierz **T** jest wspólna:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
t=[0;1;2;3;4];
x=[1;0;-1;0;1];
y=[0;1;0;-1;0];
T=vander(t);
ax=inv(T)*x;
ay=inv(T)*y;
td=0:0.01:4;
plot(polyval(ax,td), polyval(ay,td))
```



Wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a

Uogólniając postać kombinacyjną wielomianu na przypadek interpolacji N -punktowej uzyskujemy:

$$y(x) = \sum_{k=1}^N y_k L_k(x) \quad \text{gdzie musi zachodzić: } L_k(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

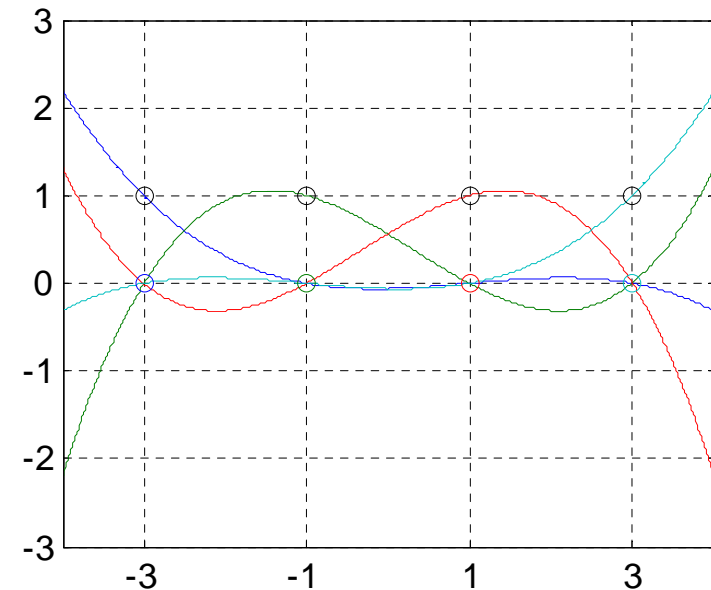
Każdy L_k jest wielomianem stopnia $N-1$:
$$L_k(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_N)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_N)} = \frac{\prod_{j=1, \dots, N, j \neq k} (x-x_j)}{\prod_{j=1, \dots, N, j \neq k} (x_k-x_j)}.$$

Zaletą takiej reprezentacji jest prosty sposób wyznaczania wartości wielomianu i łatwa interpretacja w kategoriach wielomianów bazowych (wiodąca idea w aproksymacji).

Rysunek obok przedstawia wielomiany bazowe Lagrange'a dla węzłów $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=3$. Zaznaczono odpowiednie wartości w węzłach (0,1).

Zauważ, że dla dowolnego x zachodzi $\sum_{k=1}^N L_k(x) = 1$.

W wielomianie interpolacyjnym każdy z wielomianów L_i ma udział z wagą y_i .



Wielomian interpolujący w postaci Newtona

Czasami konstrukcja wielomianu interpolującego jest wykonywana wielokrotnie dla zwiększającej się liczby węzłów interpolacji. Wtedy korzystnie jest przedstawić wielomian w postaci sumy składników, w której dodanie nowego węzła powoduje dodanie nowego składnika bez konieczności przeliczania współczynników poprzednich składników. Uogólniając postać przyrostową wielomianu na przypadek interpolacji N -punktowej uzyskujemy:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_{N-1}(x - x_1)\dots(x - x_{N-1})$$

Współczynniki a_i są obliczane jako ilorazy różnicowe kolejnych rzędów (*divided differences*):

$$a_{i-1} = d_{i,i}, \quad d_{k,j} = \frac{d_{k,j-1} - d_{k-1,j-1}}{x_k - x_{k-j+1}}, \quad d_{k,1} = y_k$$

co można zapisać w postaci tabeli i programu:

k	x_1	y_1			
	x_2	y_2	$d_{2,2}$		
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
	x_{N-1}	y_{N-1}	$d_{N-1,2}$	\dots	$d_{N-1,N-1}$
	x_N	y_N	$d_{N,2}$	$d_{N,3}$	\dots
				\dots	$d_{N,N}$
				j	

```

D(:,1)=y(1:N);
for j=2:N
    for k=j:N
        D(k,j)=( D(k,j-1)- D(k-1,j-1) )/( x(k)-x(k-j+1) );
    end
end
    
```


Przykład: Odtwarzanie ciągłego przebiegu temperatury otoczenia na podstawie nierównomiernej sekwencji pomiarów.

Stacja meteorologiczna we wczesnowiosenny dzień dostarczyła pomiarów temperatury w Krakowie w postaci tabeli wartości:

Godzina	$g_1=5:00$	$g_2=6:00$	$g_3=8:00$	$g_4=11:00$
Temperatura [°C]	$T_1=-2$	$T_2=3$	$T_3=7$	$T_4=10$

Przygotuj wielomian interpolacyjny do prezentacji zmian temperatury w sposób „gładki”.

Rozwiązanie w postaci Lagrange’a (g – godzina jako ułamek dziesiętny):

$$L_1(g) = \frac{(g-6)(g-8)(g-11)}{(5-6)(5-8)(5-11)}, \dots, L_4(g) = \frac{(g-5)(g-6)(g-8)}{(11-5)(11-6)(11-8)}$$

$$T(g) = -2L_1(g) + 3L_2(g) + 7L_3(g) + 10L_4(g)$$

Rozwiązanie w postaci Newtona:

$$d_{1,1} = T_1 = -2, d_{2,2} = \frac{d_{2,1} - d_{1,1}}{6-5} = \frac{3+2}{6-5} = 5, d_{3,3} = \frac{d_{3,2} - d_{2,2}}{8-5} = \frac{d_{3,1} - d_{2,1} - 5}{3} = \frac{\frac{7-3}{2} - 5}{3} = -1, d_{4,4} = \frac{4}{30}$$

$$T(g) = -2 + 5(g-5) - (g-5)(g-6) + \frac{4}{30}(g-5)(g-6)(g-8)$$

Pytania: Jaka była wartość temperatury o 7:15 ? O której godzinie temperatura przekroczyła 1[°C] (problem odwrotny) ? O godzinie 14:00 dostarczono świeży pomiar temperatury - jakie zmiany spowoduje on w powyższych współczynnikach interpolacji ?

Przypadek szczególny – węzły równoodległe

Jeśli węzły interpolacji są równoodległe z odstępem Δx , to postać wielomianów upraszcza się.

Ponieważ przy równoodległych węzłach $x = x_1 + s \cdot \Delta x$ to stosując podstawienie $s = \frac{x - x_1}{\Delta x}$ (s w

kolejnych węzłach przyjmuje wartości $0, \dots, N-1$) uzyskujemy:

$$y(x) = Y(s) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-N+1)}{(N-1)!}\Delta^{N-1} y_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{s}{i} \Delta^i y_0$$

gdzie, przez analogię do ilorazów różnicowych, różnica w przód (*forward difference*):

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Odmiany tej formuły z różnicami w tył i różnicami centralnymi służą dokładniejszej interpolacji na końcu i w środku przedziału (czego już nie przytaczamy – patrz np. Buchanan „Numerical Methods and Analysis”).

Przykład: Sygnał temperatury silnika samochodu T próbkowany od momentu uruchomienia silnika ($t=0$) do nagrzania (10 minut) co 1 minutę.

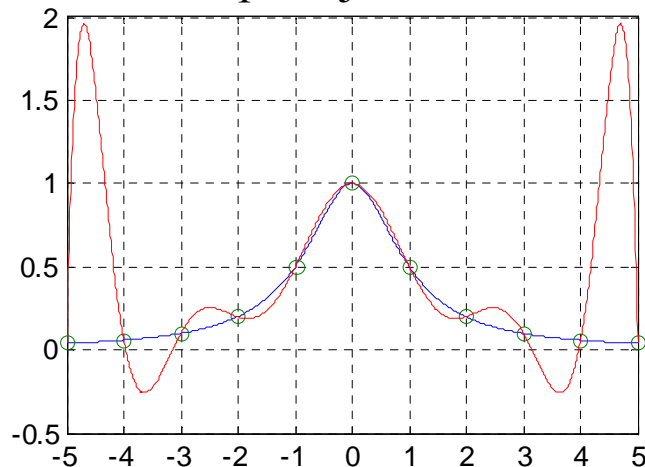
Jaka była wartość temperatury silnika T_i po $t_i=20$ [s] ?

$$s[\text{min}/\text{min}] = \frac{t - t_1}{\Delta t} = t[\text{min}], \quad T(s) = T(t) = \sum_{i=0}^{10} \binom{t}{i} \Delta^i T$$

```
fd(:,1)=T(1:N);
for j=1:N-1
    for k=j:N-1
        fd(k+1,j+1)=( fd(k+1,j)- fd(k,j) );
    end
end
Ti=cumprod([1, ti, (ti-1)/2, (ti-2)/3])*diag(fd)
```

Efekt Rungego – oscylacje wielomianu interpolacyjnego wysokiego stopnia

Aproksymacja na wielu węzłach wymusza stosowanie wielomianu interpolacyjnego wysokiego stopnia. Szczególnie przy równoodległych węzłach prowadzi to do oscylacji wielomianu na końcach przedziału interpolacji.



Zadanie interpolacji wielomianem wysokiego stopnia jest dodatkowo wrażliwe na zaburzenie danych (jest źle uwarunkowane numerycznie). Z tych powodów warto stosować interpolację lokalną niższego stopnia – funkcje sklejane, lub interpolację z narzuconymi węzłami Czebyszewa, co omówimy przy okazji tematu aproksymacji.

```
% Function
x=(-5:0.01:5)';
y=1./(1+x.^2);

% Nodes
xk=(-5:1:5)';
yk=1./(1+xk.^2);
N=length(xk);

% Divided differences
D(:,1)=yk(1:N);
for j=2:N
    k=j:N;
    D(k,j)=( D(k,j-1)- D(k-1,j-1) ) ./ ( xk(k)-xk(k-j+1) );
end

% Interpolating polynomial
yi=[];
for i=1:length(x)
    xi=x(i);
    yi(i)=cumprod([1, (xi-xk(1:N-1))'])*diag(D);
end

% Result
plot(x,y,xk,yk,'o',x,yi,'r')
```

Funkcje sklejane (splajny) i gładka interpolacja lokalna

Funkcje sklejane są realizacją idei gładkiej interpolacji lokalnej wielomianem niskiego stopnia z gładkim połączeniem (sklejeniem) poszczególnych wielomianów lokalnych. Matlab, poza opcją w podstawowej funkcji interpolacji *interp1*, oferuje zestaw funkcji operujących splajnami w postaci *Spline Toolbox*.

Przypadek prosty – splajn pierwszego stopnia

Funkcje sklejane pierwszego stopnia to interpolacja liniowa pomiędzy poszczególnymi węzłami (reprezentacja Newtona):

$$y(x_i \leq x \leq x_{i+1}) = S_i(x) = y_i + \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)$$

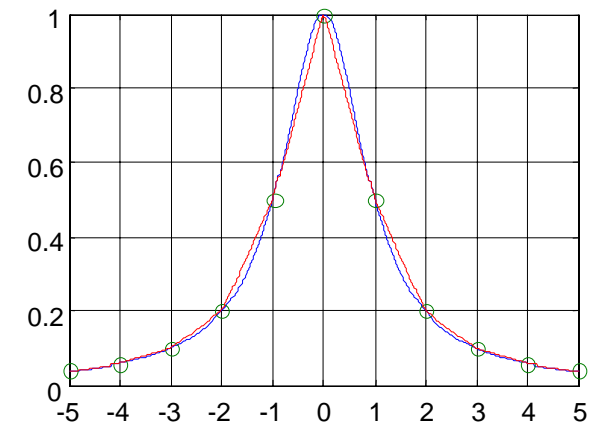
Oczywiście takie postawienie zadania spełnia warunek:

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

Chociaż idea takiej interpolacji jest prosta, to powszechnie się ją wykorzystuje w dwóch wymiarach np. w grafice przy tworzeniu map/wykresów z odwzorowaniem wartości zmiennej ciągłej (np. wysokości czy wartości natężenia pola elektrycznego) przez kolor lub stopień szarości. W taki sposób są kolorowane powierzchnie rysowane przez *surf* przy opcji *shading interp*.

Pytanie: Jak będzie wyglądał nasz okrąg z taką interpolacją ?

```
% Przykład interpolacji
% splajnem I-go stopnia
x=(-5:0.01:5);
y=1./(1+x.^2);
xk=-5:1:5;
yk=1./(1+xk.^2);
yi= interp1(xk,yk,x,'linear')
plot(x,y,xk,yk,'o',x,yi,'r');
```



Przypadek trudniejszy – splajn trzeciego stopnia (*cubic spline*)

Ponieważ wielomian stopnia $N-1$ jest definiowany jednoznacznie przez N równań to kolejne równania możemy uzyskać z narzucenia ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej w punkcie sklejenia wielomianów. W ten sposób uzyskujemy wygładzenie przebiegu interpolującego.

Dla splajnu trzeciego stopnia w każdym z $N-1$ przedziałów między sąsiednimi węzłami mamy:

$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$, $i = 1, \dots, N-1$, a więc potrzebujemy $4(N-1)$ różnych warunków.

Podstawowy warunek interpolacji daje 2 równania dla każdego splajnu, łącznie $2(N-1)$ równań:

$$S_i(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, N \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N$$

$2(N-2)$ warunki uzyskamy z przyrównania pierwszych i drugich pochodnych w połączeniach:

$$S'_i(x) = \frac{dS_i(x)}{dx} = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i \quad S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), \quad i = 2, \dots, N$$

$$S''_i(x) = \frac{d^2 S_i(x)}{dx^2} = 3a_i x + 2b_i \quad S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i), \quad i = 2, \dots, N$$

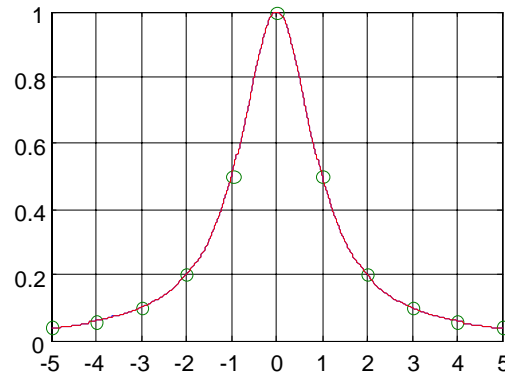
Brakujące 2 warunki możemy narzucić na węzły brzegowe w różny sposób uzyskując różny efekt. Popularny wybór to $S''_1(x_1) = S''_{N-1}(x_N) = 0$, inne to zapewnienie okresowości, określonego nachylenia bądź zakrzywienia.

Układ powyższych $4(N-1)$ równań tworzy macierz trójkątniową, którą można efektywnie rozwiązać metodami eliminacji, czego tu już nie przedstawiamy (zob. Bjorck, Dahlquist, str.131).

Przykład: Przedstawiany już poprzednio (przy okazji efektu Rungego i splajnów I-go stopnia) problem interpolacji trudnej dla wielomianu wysokiego stopnia funkcji $f(x) = 1/(1+x^2)$.

Użyjemy funkcji dostępnych standardowo w Matlabie poza *Spline Toolbox*.

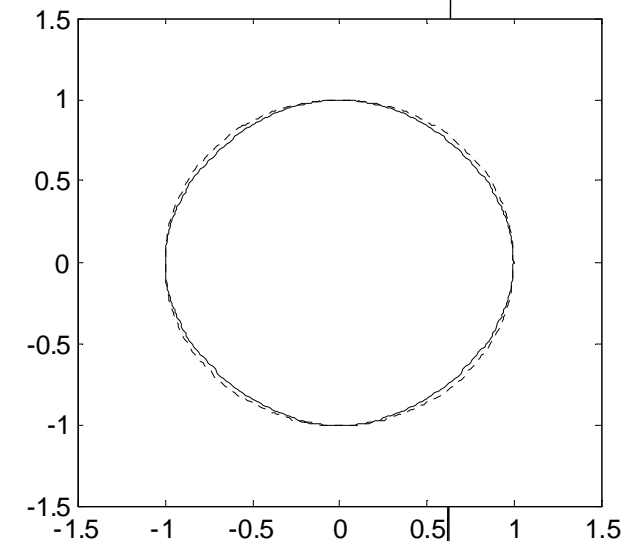
```
xk = -5:1:5;
yk = 1./(1+xk.^2);
x = -5:0.01:5;
y=1./(1+x.^2)
cs = spline(x,[0 y 0]);
yi= ppval(cs,x);
plot(x,y,xk,yk,'o',x,yi,'r--');
```



Funkcja *spline* wylicza współczynniki wielomianów interpolujących w strukturze *cs* (postać *pp-value*), która jest następnie przekazywana do funkcji *ppval* wyliczającej wartości interpolowane. Zadano warunki brzegowe na splajny w postaci zerowego nachylenia (pochodnej).

Przykład: Interpolowany okrąg

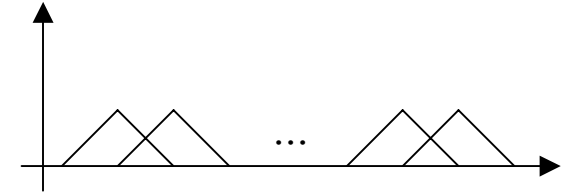
```
t=[0;1;2;3;4];
x=[1;0;-1;0;1];
y=[0;1;0;-1;0];
td=0:0.01:4;
ppx=csape(t,x,'periodic');
ppy=csape(t,y,'periodic');
plot(ppval(ppx,td), ppval(ppy,td), 'k', cos(td*pi/2), sin(td*pi/2), 'k:');
```



Dobry kształt bo narzuciliśmy warunki okresowości

B-splajny (postać funkcji bazowych zamiast postaci wielomianów przedziałowych)

Splajny w reprezentacji Lagrange'a – kombinacja splajnów bazowych.
Przykład splajnów bazowych pierwszego stopnia (omówić na tablicy):



Temat do rozwinięcia

Cubic B-splines, związki z funkcją sinc i zawartością widmową

Ekstrapolacja czyli wyjście poza węzły

Wyznaczanie brakujących wartości poza zakresem węzłów jest z natury rzeczy (brak obustronnego odniesienia dla wartości) obarczone większymi błędami niż uzupełnianie wartości wewnątrz zakresu. Efekty przy wyjściu poza węzły dla wielomianu wysokiego stopnia są podobne do efektu Rungego (duża zmienność, złe uwarunkowanie). Ekstrapolacja w niewielkiej odległości od węzła może dawać przydatne wartości.

W ujęciu czasowym ekstrapolacja jest zadaniem przewidywania przyszłości na podstawie dotychczasowych zdarzeń. Przy powszechnych w naszej dziedzinie zakłóceniach danych lepszym podejściem niż przewidywanie przyszłych wartości (predykcja) na zasadzie interpolacji jest predykcja na podstawie aproksymacji, czyli określanie i przedłużanie trendu w danych.

Zagadnienia nie poruszane (do doczytania dla zainteresowanych)

Szereg zagadnień, z uwagi na założony profil zajęć, pozostał nie omówiony. Są to m.in.:

- Oszacowanie błędów interpolacji (do omówienia przy całkowaniu i aproksymacji)
- Interpolacja z węzłami Czebyszewa (zbieżna z aproksymacją – do omówienia)
- Interpolacja Hermite’a (uwzględnienia informację o pochodnej w węzłach)
- Interpolacja wielowymiarowa (zbyt złożony opis, zob. Bjorck, Dahlquist, str. 131)
- Splajny wyższego stopnia (rzadko stosowane), B-splajny (*bell shaped*)
- Interpolacja trygonometryczna (zbieżna z DFT) i funkcjami wymiernymi