組合賽局

Created by STEP5
Modified by Paul Hsia

簡介

賽局理論?

- 研究鬥爭或競爭行為的數學方法
- 計算能夠獲得最大利益的最佳策略
- 又稱為博弈論

囚犯困局

	甲不認罪	甲認罪
乙不認罪	二人同服刑半年	甲獲釋；乙服刑10年
乙認罪	甲服刑10年；乙獲釋	**二人同服刑5年**

不過這不是我們的重點

組合賽局

- 兩位玩家對戰，雙方輪流操作
- 資訊完全公開
- 決定性
- 必在有限步內結束
- 零和 (Zero-sum)

組合賽局

- OOXX
- 五子棋、象棋、西洋棋、圍棋
- 各種撿石頭

GAME GRAPH

GAME GRAPH

- 遊戲是決定性的！
- 用圖 (Graph) 來表示

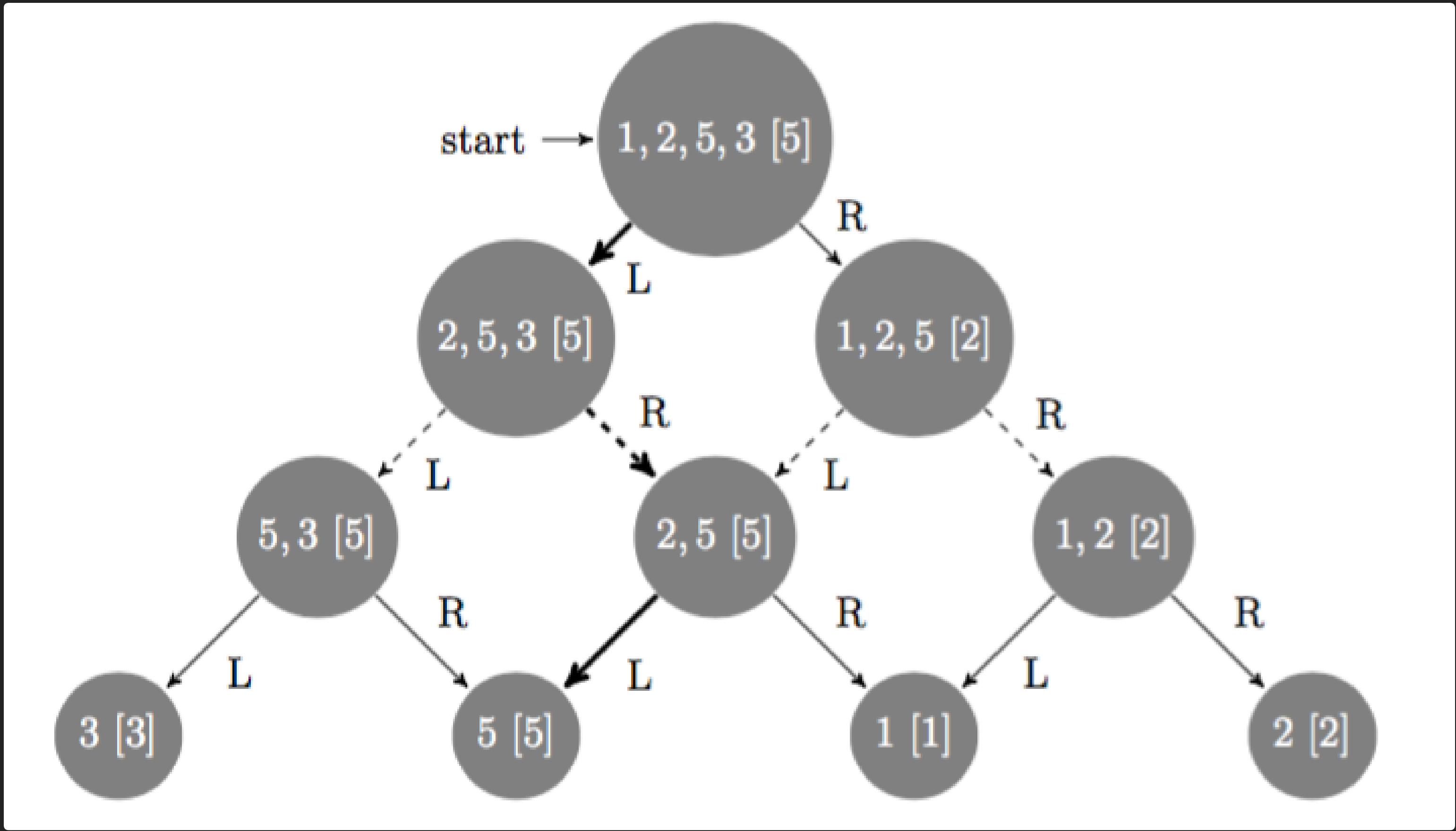
盤面 -> 狀態 -> 點 $(\mathbf{V})$

操作 -> 轉移 -> 邊 $(\mathbf{F})$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{F})$$

GAME GRAPH

- 遊戲必定會結束
- Directed Acyclic Graph (DAG)!



- 起始狀態
- 結束狀態

遊戲策略

- 先手 / 後手
- 鉀方 / 釔方
- 每個結束局面都有一個鉀方獲利值 x
- 鉀方 想要讓 x 值最大化
- 釔方 想要讓 x 值最小化

假設**每個**盤面 S 都有一個固定的鉀方獲利值 $x(S)$

那麼如果 S 不是結束局面的話

$$x(S) = \begin{cases} \max x(u), u \in F(S) & \text{, if 輪到鉀方} \\ \min x(u), u \in F(S) & \text{, if 輪到釔方} \end{cases}$$

可是真的每個盤面都有固定的獲利值嗎？

YES !!

- DAG 存在 拓樸順序(Topological order)
- 結束盤面存在 $x(S)$
- 數學歸納法！
- 真的嗎...?

還要證明鉀方的獲利值確實固定是 $x(S)$ ！

- 不論釔方怎麼走，鉀方總是可以讓自己獲利值 $\geq x(S)$
- 不論鉀方怎麼走，釔方總是可以讓對手獲利值 $\leq x(S)$
- 雙方都使用最佳策略的話，最終獲利值就是 $x(S)$ ！

定理

設初始盤面為 R ，則如果雙方都使用最佳策略，那麼鉀方最終獲利值一定是 $x(R)$ 。

那麼要如何計算 $\mathbf{x}(\mathbf{S})$ 值呢？

- DAG 有拓樸順序
- Dynamic Programming !
- $O(V + F)$

如果遊戲只分輸贏呢？

- OOXX
- 五子棋、象棋、...

定義獲利值：勝利 = $+1$，落敗 = -1

定理 必勝策略

對於一個只分輸贏的遊戲，如果 $x(R) = +1$ ，則先手必勝；如果 $x(R) = -1$ ，則後手必勝。

沒錯，遊戲結果也是決定性的！

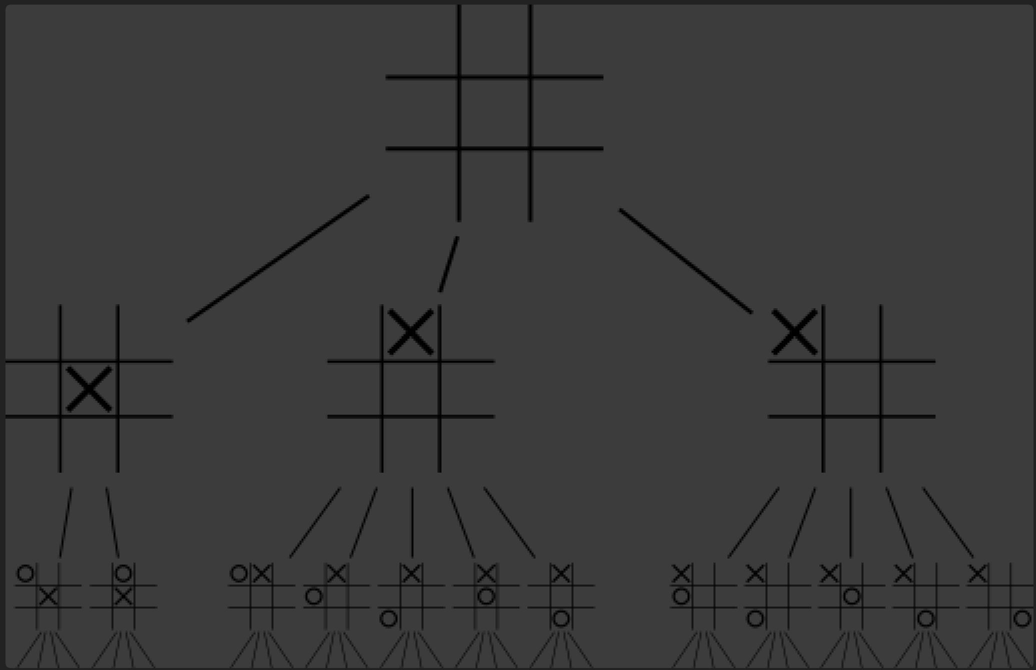
所以，我們就這樣破解了所有遊戲？

當然沒有！

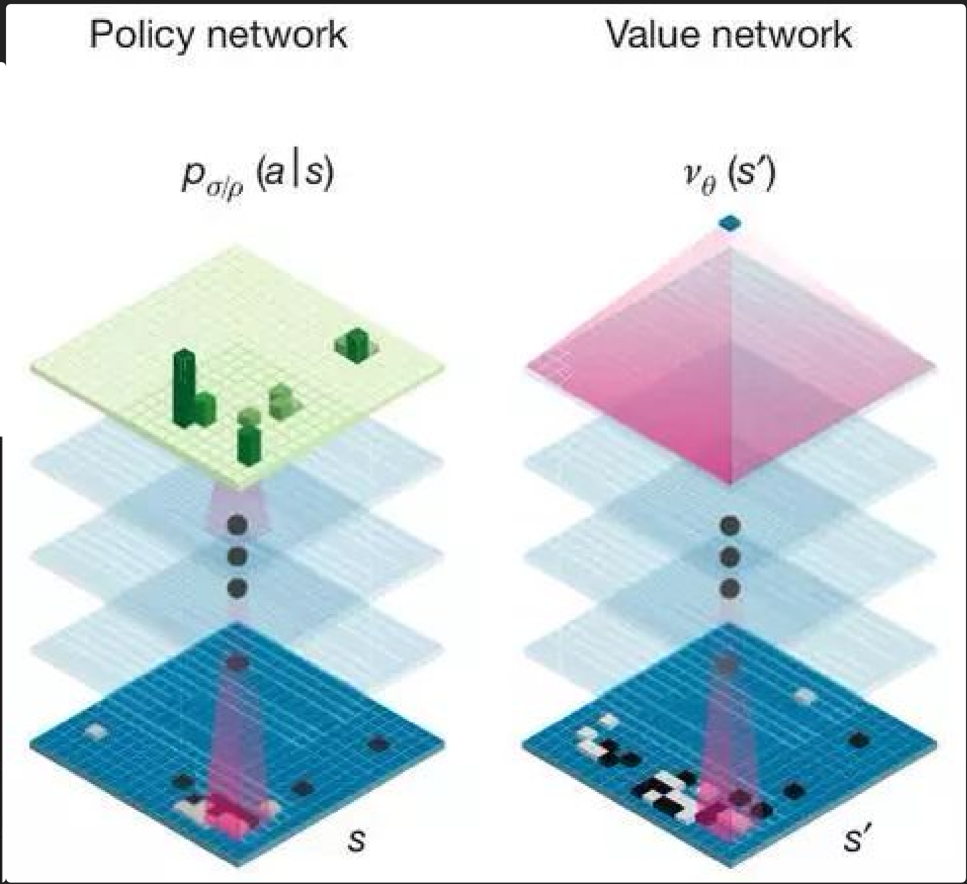
$$\mathbf{O(V + F)}$$

- OOXX : $V \approx 10^5$
- 象棋 : $V \approx 10^{40}$
- 西洋棋 : $V \approx 10^{47}$
- 圍棋 : $V \approx 10^{170}$

OOXX的game graph



各種剪枝、各種 Heuristic



對稱遊戲

不論是先手或後手，面對同一個盤面，可以進行的操作集合是一樣的。

- OOXX？
- 圍棋？
- 撿石頭！

- 不在意誰是整局遊戲的先手
- 重要的是**接下來的一方**輸或贏

$$x(S) = \begin{cases} +1 & \text{, 接下來的一方贏} \\ -1 & \text{, 接下來的一方輸} \end{cases}$$

遞迴式也變得比較簡單

$$x(S) = -\min x(u), u \in F(S)$$

定理 對稱遊戲遞迴規則

如果 S 不是結束盤面，

$$x(S) = \begin{cases} +1 & \text{, 可以走到至少一個 -1} \\ -1 & \text{, otherwise} \end{cases}$$

常用結束條件：不能動的一方輸

=> S 是結束盤面也適用！

另一種常用的表示法

- $x(S) = +1$: N-position, Next player win
- $x(S) = -1$: P-position, Previous player win

例題 撿石頭

老鼠窩裡有 N 個石頭，兩人輪流拿，每次可以拿走 $1 \sim 3$ 顆，拿到最後一顆的一方贏。請問先手還後手必勝？$(1 \leq N \leq 10^{18})$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x(n)$	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$

必勝策略：每次拿到剩 **4** 的倍數

NIM

例題 Nim (Easy)

螞蟻窩裡有 N 個石頭，兩人輪流拿，每次可以拿走**任意多顆**(但至少要拿1顆)，拿到最後一顆的一方贏。請問先手還後手必勝？ ($1 \leq N \leq 10^{18}$)

例題　Nim (Medium)

蟑螂窩裡有 2 堆石頭，分別是 A, B 個，兩人輪流拿，每次可以從一堆拿走**任意多顆**(但至少要拿1顆，且一次只能從同一堆拿)，拿到最後一顆的一方贏。請問先手還後手必勝？ $(1 \leq A, B \leq 10^{18})$

- $A = B$: 後手必勝！
  先手拿一堆 k 個，後手模仿他另一堆 k 個
  後手永遠拿得到最後一個

- $A \neq B$: 先手必勝！
  第一步把多的那堆拿到跟少的一樣

例題 Nim (Final)

垃圾場裡有 N 堆石頭，分別是 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 個，兩人輪流拿，每次可以從一堆拿走**任意多顆**(但至少要拿1顆，且一次只能從同一堆拿)，拿到最後一顆的一方贏。請問先手還後手必勝？ ($1 \le N \le 10^6, 1 \le a_i \le 10^{18}$)

神奇的結論

定理 Nim

定義一個盤面的**特徵值**為

$$X = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_N$$

此盤面**先手必勝**，若且唯若 $X \neq 0$ 。

還記得嗎?

$$x(S) = \begin{cases} +1 & \text{, 可以走到至少一個 -1} \\ -1 & \text{, otherwise} \end{cases}$$

合法的 $x(S)$ 值是唯一的！

我們只要證明剛才的定理符合此規則就好了：

- $X = 0$ 的狀態無法走到其他 $X = 0$ 的狀態
- $X \neq 0$ 的狀態必定可以走到至少一個 $X = 0$ 的狀態

$\mathbf{X = 0}$ 的狀態無法走到其他 $\mathbf{X = 0}$ 的狀態

- 必須從一堆中拿掉一些石頭
- 其中一個 a_i 變小
- a_i 必有 Bit 變化
- 其他 a 值沒變
- 全部 XOR 起來必有 Bit 變化
- $X' \neq 0$

$\mathbf{X \neq 0}$ 的狀態必可以走到至少一個 $\mathbf{X = 0}$ 的狀態

- 假設 X 最高位為第 k 位
- 至少一個 a_i 的第 k 位為 1
- 如果把 a_i 拿成 $a_i \oplus X$，新的 X 就變 0 了！
- 而且 a_i 一定會變小！

[喵]

SPRAGUE-GRUNDY THEOREM

- Nim 其實是很多團廢遊戲組合起來
- 每次只能挑一團動一步
- 廢遊戲組合起來就這麼難，那麼萬一是一般遊戲呢？
- 安啦！

SPRAGUE-GRUNDY THEOREM！

死布拉格-個浪底 定理！

對於任意的遊戲盤面，可以定義類似 Nim 一樣的特徵值:

SG VALUE (死個數值)

定理 SG Value

對於一個遊戲盤面 S，定義其 SG Value 為其可以走到的狀態的 SG Value 中，**最小沒出現的**非負整數。

$$SG(S) = \text{mex}\{SG(x) : x \in F(S)\}$$
$$\text{mex}(S) = \min\{i : i \in \mathbb{N} \setminus S\}$$

例如: $\text{mex}(\{0, 1, 2, 4, 6\}) = 3$

有沒有跟 NIM 很像？

SG Value 可以視為 $x(S)$ 值的強化版：

定理

盤面 S 為先手必勝，若且唯若 $SG(S) \neq 0$。

- 從定義就看得出來
- $SG = 0$ 走不到 $SG = 0$
- $SG \neq 0$ 走得到至少一個 $SG = 0$

不過 SG Value 厲害的其實是...

他可以像 NIM 特徵值一樣隨便 XOR !!

定理 Game Sum

假設 S_1, S_2 是兩個獨立的遊戲，他們的和 $S_1 + S_2$ 代表將兩個遊戲擺在一起形成的新遊戲。每次操作只能從 S_1, S_2 挑一邊動一步。也就是說，

$$F(S_1 + S_2) = x + S_2 : x \in F(S_1) \cup S_1 + y : y \in F(S_2)$$

定理 Game Sum

對於任意的遊戲 S_1, S_2，他們的和的 SG Value 為

$$SG(S_1 + S_2) = SG(S_1) \oplus SG(S_2)$$

- 但其實也沒那麼顯然
- 畢竟他跟 NIM 還是有點不一樣
- NIM 無法走到 Value 更大的狀態
- 一般遊戲有可能！

要證明 $\mathbf{SG(S_1 + S_2) = SG(S_1) \oplus SG(S_2)}$，只需要證兩件事

- $S_1 + S_2$ 無法走到 $SG = SG(S_1) \oplus SG(S_2)$ 的狀態。
- 對於任何 $0 \leq x \leq SG(S_1) \oplus SG(S_2)$，$S_1 + S_2$ 可以走到至少一個 $SG = x$ 的狀態。

- 因為 $S_1 + S_2$ 盤面也會在有限步內結束，因此新的 Game Graph 也可以表示成 DAG。
- 而新 Game Graph 的結束狀態，代表已無步可動，也就是 S_1, S_2 都已處於結束狀態，其 SG Value 為 $0 \oplus 0 = 0$。
- 因此我們可以依照拓樸順序來使用數學歸納法，假設所有 $S_1 + S_2$ 可以走到的狀態，都已符合 SG Theorem。

$\mathbf{S_1 + S_2}$ 無法走到 $\mathbf{SG = SG(S_1) \oplus SG(S_2)}$ 的狀態。

- 恰好挑一邊動一步
- 該邊的 SG Value 必改變
- 新狀態兩邊 XOR 起來，必不等於原狀態兩邊 XOR 起來
- 根據數歸假設，新狀態 SG Value 等於兩邊 SG Value XOR 起來
- 新 SG Value $\neq SG(S_1) \oplus SG(S_2)$

對於任何 $\mathbf{0 \le x \le SG(S_1) \oplus SG(S_2)}$，$\mathbf{S_1 + S_2}$ 可以走到至少一個 $\mathbf{SG = x}$ 的狀態。

- 動 S_1 的話，可以走到 $0 \sim SG(S_1) - 1$ 的狀態。
- 動 S_2 的話，可以走到 $0 \sim SG(S_2) - 1$ 的狀態。
- 我們希望動完之後，兩邊 XOR 起來恰是 X。
- 也就是說，要證底下這件事情：

定理

設 $a, b \ge 0$, 對於所有 $0 \le x < a \oplus b$，或者存在 $0 \le a' < a$ 使得 $a' \oplus b = x$，或者存在 $0 \le b' < b$ 使得 $a \oplus b' = x$。

- 假設 x 與 $a \oplus b$ 從左邊數來第一次相異是在第 k 個 Bit
- $x < a \oplus b$，因此 x 的第 k Bit 為 0 ，$a \oplus b$ 的第 k Bit 為 1
- a, b 中恰好一數第 k Bit 為 1，假設是 a
- 所以 b 的第 k Bit 為 0
- 取 $a' = x \oplus b$
- a' 的第 k Bit 為 0 ，更左邊的 Bit 都跟 a 相同
- $a' < a$!

終於證完了！

那麼來看些題目吧

例題

例題 Lieges of Legendre

桌面上有 N 堆壓克力板，每堆分別有 $a_1, a_2, \cdots a_N$ 片。Kevin 和 Nicky 打算用這些壓克力板玩一個遊戲，兩人輪流移動，每次可以從以下兩種操作選一種：

- 選擇一堆壓克力板，並把最上面的一片拿掉。
- 選擇一堆 $2x$ 片 (x 為正整數) 的壓克力板，將它整堆拿掉，並另外補上 k 堆每堆 x 片的壓克力板。

最後無法移動的人就輸了。如果 Kevin 先動，且雙方使用最佳策略，那麼最後誰會獲勝？ (
$1 \le N \le 10^5, 1 \le k \le 10^9, 1 \le a_i \le 10^9$)

- 每堆壓克力是獨立的
- SG Value！
- 那麼單獨一堆壓克力的 SG Value 是多少呢？
- 只有至多 2 種操作 => SG Value ≤ 2
- 直接用定義算

$$SG(x) = \begin{cases} \text{mex}\{SG(x-1)\}, \\ \ \text{when } x \bmod 2 = 1 \\ \text{mex}\{SG(x-1), SG(x/2) \cdot (k \bmod 2)\}, \\ \ \text{when } x \bmod 2 = 0 \text{ and } x > 0 \\ 0, \text{ when } x = 0 \end{cases}$$

找規律!

- k 偶數
- k 奇數

例題　？克力蛋糕

桌上有一塊巧克力蛋糕，被切成 $N \times M$ 的矩形，左下角為 $(1,1)$，右上角為 (N,M)，而 $(1,1)$ 的塊被偷換成壓克力蛋糕。兩人輪流操作，每回合可以選一塊剩餘的蛋糕 (i,j) ，並將他右上角 $(i' \geq i, j' \geq j)$ 的蛋糕都吃掉。壓克力蛋糕難吃又傷牙齒，請問先手還是後手會被迫吞下它？

後手有可能會必勝嗎？

- 假設可以好了XD
- 那麼先手選 (N, M)，後手必有一個 (i, j) 位置可以應對
- 然後後手就贏了
- 欸... 你說後手贏了？ 那先手幹麻不一開始就下 (i, j) 就好了？
- 反正 (i, j) 的矩形會覆蓋到 (N, M) 嘛
- 所以事實是：根本就是先手必勝，後手必吃壓克力
- 然後你就會吃一個大大的 Wrong Answer
- 小心 $N = M = 1$

例題　翻軟幣遊戲

鋼安最近吃飽沒事幹，跑去銀行把身上的 $10NM$ 元全換成十元硬幣，就為了回家跟銀蒂玩遊戲。他把十元硬幣在桌上排成一個 $N \times M$ 的矩形，有些文字朝上，有些人頭朝上。兩人輪流移動，每次需要做的事有：

- 任選一個**文字朝上**的硬幣 (i, j)，$1 \le i \le N, 1 \le j \le M$。
- 任選一個座標 (i', j') 使得 $0 \le i' < i, 0 \le j' < j$。
- 把 $(i, j), (i, j'), (i', j), (i', j')$ 四個位置的硬幣都翻面。(如果座標數值有 0，代表該個硬幣不存在，跳過它。)

鋼安先動，不能動的人就輸了。獲勝的人可以拿走所有的硬幣，因此他們兩人都會使用最佳策略，不會故意放水。給定初始盤面，你能預測誰會把錢帶走嗎？ $(1 \le N, M \le 50)$

- 文字朝上為 1 ，人頭朝上為 0
- 這遊戲會在有限步內結束！
- 每個位置都是獨立的！
- ... Why?

這遊戲會在有限步內結束！

把整個盤面表示成二進位數

$$f(S) = \sum a_{i,j} 2^{i \cdot M + j}$$

- 每次操作 (i, j) 從 1 變 0
- 剩下三個怎麼變，貢獻都贏不過 (i, j)
- $f(S)$ 必減小！每次至少減少 1
- $f(S) = 0$ 時遊戲結束

每個位置都是獨立的！

- 這就比較沒道理了
- 先把遊戲規則改一下...
- (i, j) 數值 -1 ，另外三格數值 $+1$
- 遊戲一樣會結束
- 這下每格很明顯獨立了吧！

但這規則與原本的遊戲等價嗎？

- 新規則下，一格數字 ± 2 ，不影響 SG Value
- 使用數學歸納法
- 假設二進位數值比 S 小的盤面，新舊規則 SG Value 都相同
- 對於每個 S 用新規則走到的盤面，把所有 2 換成 0，不影響 SG Value
- 而且會一一對應到一個舊規則走到的盤面
- 所以新舊規則走得到的盤面的 SG Value 集合相同
- 盤面 S ，新舊規則 SG Value 相同

所以確實可以視為獨立！

接下來呢？

- 考慮全部只有 (i,j) 是 1 的盤面
- 枚舉所有操作，使用 SG Theorem 算出到達盤面的 SG Value
- 利用 mex 的定義直接計算 (i,j) 盤面的 SG Value
- 再用這些只有一個 1 的盤面，組成原始盤面
- $O(N^2M^2)$

例題 拿石頭

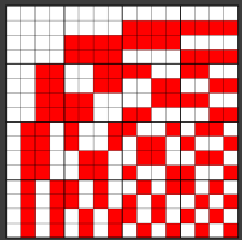
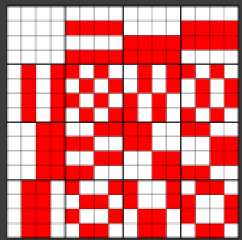
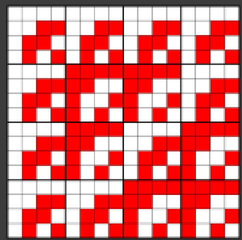
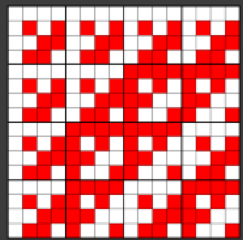
桌上有N堆石頭，每堆石頭有a_i個石頭排成一列，編號從1到a_i，兩個人輪流拿，每次可以從{\bf 某一堆}拿走任意一個或是任意{\bf 相鄰}的兩個石頭（同一堆編號j跟$j+1$的石頭），最後不能拿的人輸。 輸入兩行代表初始盤面，第一行N代表石頭堆數，$1 \leq N \leq 100000$，第二行有N個數字$a_1, \cdots, a_N$，代表每一堆有幾個石頭排成一列$1 \leq a_i \leq 1000$，如果先手會獲勝請輸出F，後手會獲勝請輸出S。

討論第一步拿走一顆石頭或是拿兩顆連續石頭的位置，就可以用DP 從1到$n-1$個石頭的SG Value轉移出n石頭的SG Value。 注意講義裡面的程式碼不小心有用到 sg[-1] 與 sg[-2]。

還想更快嗎？

NIM PRODUCT

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0	2	3	1	8	10	11	9	12	14	15	13	4	6	7	5
3	0	3	1	2	12	15	13	14	4	7	5	6	8	11	9	10
4	0	4	8	12	6	2	14	10	11	15	3	7	13	9	5	1
5	0	5	10	15	2	7	8	13	3	6	9	12	1	4	11	14
6	0	6	11	13	14	8	5	3	7	1	12	10	9	15	2	4
7	0	7	9	14	10	13	3	4	15	8	6	1	5	2	12	11
8	0	8	12	4	11	3	7	15	13	5	1	9	6	14	10	2
9	0	9	14	7	15	6	1	8	5	12	11	2	10	3	4	13
10	0	10	15	5	3	9	12	6	1	11	14	4	2	8	13	7
11	0	11	13	6	7	12	10	1	9	2	4	15	14	5	3	8
12	0	12	4	8	13	1	9	5	6	10	2	14	11	7	15	3
13	0	13	6	11	9	4	15	2	14	3	8	5	7	10	1	12
14	0	14	7	9	5	11	2	12	10	4	13	3	15	1	8	6
15	0	15	5	10	1	14	4	11	2	13	7	8	3	12	6	9

性質

- $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
- 相異費馬冪次 ($X = 2^{2^k}$) 相乘，等於正常整數相乘
- 費馬冪次 $X \otimes X = \frac{3}{2}X$

Q & A