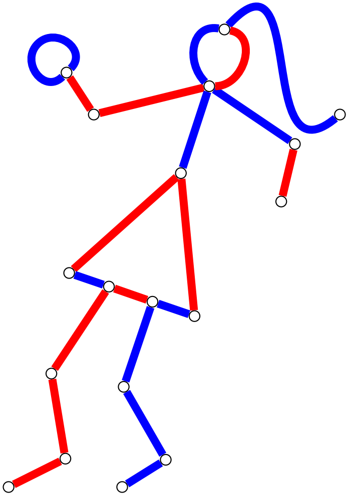
組合賽局 - Hackenbush

夏誌陽

February 10, 2017



Hackenbush

定義 (Hackenbush)

Hackenbush 是一個圖上的兩人遊戲，圖中會有地面 (ground)、點 (在地上或是在空中)，以及紅色或藍色兩種邊連接在點之間．一個人當藍色，一個人當紅色，每次可以選擇一個自己顏色的邊刪掉，刪掉之後如果有無法跟地面連通的部分，那些邊跟點也會一起消失．兩人輪流操作，先不能動作的人輸．

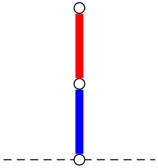


Figure: 例子

先看圖1。

1. 如果藍色先手，整張圖就消失，紅色輸。
2. 如果藍色後手，紅色動完後藍色依然可以動作，紅色輸，

所以這是個藍色一定贏的局面。

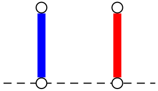


Figure: 例子

再看圖2，這是張對雙方對稱的圖，所以誰先手誰就輸．

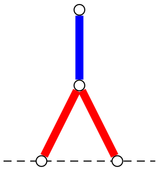


Figure: 例子

再看圖3，紅色不管先手後手都會贏．

由於 Hackenbush 是個非對稱的遊戲，所以並不能使用 SG Value 來分析他的勝負，我們該怎樣去計算每張 Hackenbush 的圖誰會贏呢？

定義

對於一張 Hackenbush 的圖，我們要給一個值 G，使得:

1. 如果藍色一定獲勝，則 $G > 0$
2. 如果誰先誰輸，則 $G = 0$
3. 如果紅色一定獲勝，則 $G < 0$

而且 $|G|$ 越大代表贏得「越多」.

最簡單的想法是去看藍色紅色各自有多少條邊，然後 $E_{blue} - E_{red}$ 當做 G 值。
不過從圖1 可以知道這是不太正確的，該圖相減之後會是 0，但卻是個藍色一定會贏的遊戲。
最主要的原因是各自動作會造成對方邊的消失，所以每條邊「權重」並不相同。

我們同時會希望 G 有以下的好性質:

定義

對於兩張分開的 Hackenbush 有值 G_1 跟 G_2，希望他們的併在一起玩的值 G 為:

$$G = G_1 + G_2$$

這樣我們就可以把沒有連在一起的圖拆開來分開計算．

全藍全紅

對於那些全部只有藍邊或是紅邊的 Hackenbush，我們設定：

1. 只有 n 條藍邊的 Hackenbush 圖，$G = n$
2. 只有 n 條紅邊的 Hackenbush 圖，$G = -n$

會發現任意數個這樣的圖合在一起玩就只是在比誰的邊比較多，剛剛好跟他們全部 G 的合正負號一樣．符合我們定義的要求，但是我們還是不會計算紅藍混雜的 Hackenbush 遊戲．

$\frac{1}{2}$!

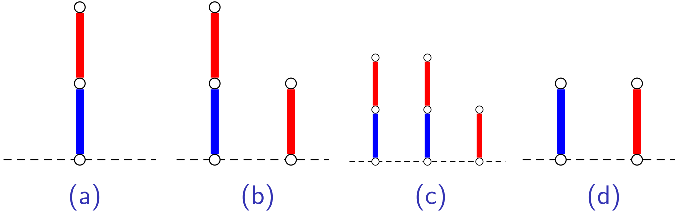


Figure: 一些 smaple

來嘗試算算看圖4a 應該要有怎樣的值呢?
因為在這張圖中藍色必勝, 所以 $G > 0$ ·

而從圖 4b 可以知道加上一條紅邊之後就變成紅色必勝了，一條紅邊的遊戲已經被我們給予 -1 的值了，所以代表 $G - 1 < 0$。
最後看到圖 4c，經過嘗試之後可以知道，這是個先手輸的遊戲，所以我們可以反推出圖4a 的 $G = \frac{1}{2}$!

如果存在某種方式可以訂出一個好的 Hackenbush 值 G，滿足我們之前講過的兩種定義，我們可以發現什麼性質呢？
對於藍色玩家先手時，當前盤面拿走任何一條藍邊都會獲得不同的子圖，假設這些子圖的值是 $b_1, \cdots, b_m$，其中 $b_1 \leq \cdots \leq b_m$。
而假設紅色玩家先手時從當前盤面拿走一條紅邊之後，可以獲得子圖值有 $r_1, \cdots, r_n$ ，其中 $r_1 \geq \cdots \geq r_n$。

我們可以用

$$\{b_1, \cdots, b_m | r_1, \cdots, r_n\}$$

來代表這個 Hackenbush 的圖在不同玩家先手操作下可能的結果·如果現在 Hackenbush 的值真如我們所說，大小可以用來代表贏家的勝利程度，在兩個玩家都是理智的狀態下，其實我們只會有 b_m 跟 r_n 這兩個子圖出現。

所以我們其實可以用

$$\{b_m | r_n\}$$

來代表這個 Hackenbush 圖的值，也就是 $G = \{\max\{b_i\} | \min\{r_j\}\}$，我們希望利用這個符號來計算任何圖的值．

引理

如果一個 Hackenbush 值 $G = \{a|b\}$，那麼一定會有 $a < b$．

這邊不特別證明這個 lemma，不過可以想說 G 值代表的是雙方有優勢的程度，每動一步自己的優勢就會下降，藍色動 G 就會減少，紅色動 G 就會上升，所以符號裡面左邊的數值會本原本的 G 值小，右邊的數值會比原本的 G 值大．

計算 general G 值

我們先討論一些邊界的 case:

1. 對於 $\{|\}$ 來說，雙方先手時都沒有邊可以刪除，所以 $\{|\} = 0$。
2. 對於 $\{n|\}$ 來說，只有藍色拿完後還有 n 的值，所以 $\{n|\} = n + 1$。
3. 對於 $\{| - n\}$，來說，只有紅色拿完後還有 $-n$ 的值，所以 $\{| - n\} = -n - 1$。

定理

對於 $G = \{a|b\}, a < b$ 來說，存在最小的 $i \in 0 \cup \mathbb{N}$，使得存在 $j \in \mathbb{Z}$，有

$$a < \frac{j}{2^i} < b$$

那麼就會有 $G = \frac{j}{2^i}$

由於篇幅的關係，所以不特別證明這個定理的結果，符號 $\{|\}$ 本身有另外一個名字叫做 **Surreal number**，有興趣可以研究，不少非對稱的遊戲也都可以轉成 Surreal number 做計算．

回到前面去計算之前的例子，圖1，我們可以知道
$G = \{0|1\} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$．
而圖3，我們可以知道 $G = \{-2| - 1/2\} = \frac{-1}{2^0} = -1$．

這樣給定任意一張 Hackenbush 的圖，我們獲得了可以一個把 game tree 展開之後，再 DP 上來計算值然後判斷輸贏的做法，不過這樣複雜度很巨大，如果邊數量是 E，那時間複雜度大概是 $O(E!)$ 左右吧。

More for Surreal Number

在某些非對稱遊戲會遇到 $b - a > 1$ 的情況，這時候會需要以下的式子：

$$\{a|b\} = \begin{cases} \text{大於}a\text{的第一個整數}, & 0 \leq a < b \\ 0, & a < 0 < b \\ \text{小於}b\text{的第一個整數}, & 0 \geq b > a \end{cases}$$

巧克力

例題

一天小直跟小橫收到一片巧克力，這片巧克力是由 $A \times B$ 塊 1×1 的巧克力所組成的巧克力磚，他們想要把所有巧克力撥成 1×1 來吃．因為太無聊了所以他們決定玩個遊戲．兩人輪流從巧克力堆中選出一塊巧克力撥成兩半放回巧克力堆中，小直只能縱向的撥斷，小橫只能橫向的撥斷，最後挑不出巧克力來撥的人輸．
例如小直可以把 4×2 的巧克力撥成 2 塊 4×1 的巧克力，而小橫可以把 4×2 的巧克力撥成 3×2 與 1×2 或是 2 塊 2×2 的巧克力．
請問兩人都在最佳策略下玩遊戲時，誰輸誰贏呢？
這裡 $1 \leq A, B \leq 300$。

1. $SR(1 \times 1) = 0$
2. $SR(1 \times N) = N - 1$
3. $SR(N \times 1) = -N + 1$
4. $A \times B$，像 Hackenbush 一樣計算 $\{\cdots|\cdots\}$ 來獲得結果。

舉例 3×2 跟 4×2

$$
\begin{aligned}
SR(3 \times 2) &= \{2 \times SR(3 \times 1) | SR(2 \times 2) + SR(1 \times 2)\} \\
&= \{2 \times -2 | 1\} \\
&= \{-4 | 1\} \\
&= 0 \\
SR(4 \times 2) &= \{2 \times SR(4 \times 1) | SR(3 \times 2) + SR(1 \times 2), 2 \times SR(2 \times 2)\} \\
&= \{2 \times -3 | 0 + 1, 0\} \\
&= \{-6 | 0\} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

這樣就獲得一個 $O(n^3)$ 的做法。