

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ
ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
Методическая разработка

Красноярск 2003

УДК
ББК

Составитель: Н.А. Пинкина

Линейная алгебра. Решение типовых примеров. Варианты
контрольных заданий/ Краснояр. гос. Ун-т; Сост. Н.А. Пинкина.
Красноярск, 2003. 26 с.

Предназначено для студентов 1 курса экономического факультета
заочной формы обучения.

Печатается по решению редакционно – издательского совета
Красноярского госуниверситета

Красноярский
государственный
университет, 2003

Решение типовых задач

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

Основные формулы:

$$i^2 = -1$$

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

$$\text{Пример: } \frac{(2+3i)(4-2i)}{4+2i} + i^{15}$$

Решение:

$$i^{15} = i^{14} \times i = (i^2)^7 \times i = (-1)^7 \times i = -i$$

$$(2+3i)(4-2i) = 8 + 12i - 4i - 6i^2 = 8 + 8i + 6 = 14 + 8i$$

$$\frac{14+8i}{4+2i} = \frac{(14+8i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{64+32i-28i-16i^2}{16-4i^2} = \frac{64+4i+16}{16+4} = \frac{80+4i}{20} = 4 + \frac{1}{5}i$$

$$4 + \frac{1}{5}i - i = 4 - \frac{4}{5}i$$

$$\text{Ответ: } 4 - \frac{4}{5}i$$

2). Вычислить в тригонометрической форме.

Основные формулы:

Запись комплексного числа в алгебраической форме: $z = a + ib$

Переход к тригонометрической форме записи:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Формула для извлечения корня n-ой степени:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

Пример: Вычислить $\sqrt[4]{-81}$

Решение:

$$z = -81 + 0i$$

$$r = \sqrt{(-81)^2 + 0^2} = 81$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0}{-81}$$

$$\varphi = \pi$$

$$z = 81(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{81} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

Подставляя в найденный ответ значения k , получим в результате четыре корня.

$$k = 0,$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt[4]{81} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 2,$$

$$\varepsilon_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} \right) = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$k = 2,$$

$$\varepsilon_3 = 3 \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} \right) = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$k = 3,$$

$$\varepsilon_4 = 3 \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} \right) = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Ответ: $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{81} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$

$$\varepsilon_1 = \sqrt[4]{81} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} \right) = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\varepsilon_3 = 3 \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} \right) = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\varepsilon_4 = 3 \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} \right) = 3 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

3). Разложить многочлен на неприводимые множители.

Пример: $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

Решение: Подберем корень данного многочлена. Корнем является один из делителей свободного члена. Варианты: $\pm 1, \pm 2$. Подстановкой убеждаемся, что $x_0 = -1$ – корень:

$$(-1)^4 - (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$$

Поделим многочлен на $x - x_0$. Деление будет без остатка.

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 \\ \underline{-x^4 + x^3} \\ -2x^3 - x^2 - x - 2 \\ \underline{-2x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 - x - 2 \\ \underline{-2x^2 + x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x} \\ 0 \end{array}$$

Полученный результат можно записать следующим образом:

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x+1)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$$

Найдем корень многочлена $x^3 - 2x^2 + x - 2$. Варианты: $\pm 1, \pm 2$.

Подстановкой убеждаемся, что $x_0 = 2$ – корень. Поделим многочлен на $x - x_0$ уголком.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ -x^2 + x - 2 \\ \underline{-x^2 + 1} \\ x - 2 \\ \underline{x - 2} \\ 0 \end{array}$$

У многочлена $x^2 + 1$ нет действительных корней. Найдем комплексные корни.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \pm \sqrt{-1} \\ x &= \pm i \end{aligned}$$

тогда многочлен $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$

Запишем конечный результат.

Ответ: $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)(x+i)(x-i)$

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить.

Основные формулы:

Вычисление определителей второго и третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{12}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Свойства определителей:

- 1) определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы;
- 2) если у определителя строка (столбец) равна нулю, то и сам определитель нулевой;
- 3) если в определителе поменять местами две строчки (столбца), то знак определителя поменяется;
- 4) если в определителе две одинаковых строчки (столбца), то он равен нулю;
- 5) если все элементы некоторой строки (столбца) умножить на некоторое число k , то сам определитель умножится на k ;
- 6) определитель, содержащий две пропорциональные строки равен нулю;
- 7) если все элементы i -ой строки определителя представить в виде суммы двух слагаемых

$$a_{ij} = b_i + c_j$$

то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки кроме i -ой – такие же как и в заданном определителе, а i -ая строка (столбец) в одном из слагаемых состоит из элементов b_i , в другом – из элементов c_j ;

- 8) если одна из строк (столбцов) определителя равна линейной комбинации его других строк (столбцов), то определитель равен нулю;
- 9) определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Разложение определителя по i -ой строке (j -ому столбцу):

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} .

Определение: дополнительным минором M_{ij} элемента a_{ij} называется минор порядка $(n-1)$ получающийся после вычеркивания из определителя i -ой строки и j -ого столбца. Тогда

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} .

Разложение определителя по i -ой строке (j -ому столбцу):

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{in}A_{in}$$

$$\text{Пример: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 5 & -2 \\ -4 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Для начала нужно выбрать такие две строки или столбца, чтобы при их сложении получалось наибольшее количество нулей. В нашем случае это первая и третья строки. Пользуясь девятым свойством определителя умножаем первую строчку на (-1) и складываем с третьей. Получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Произведем разложение определителя по третьей строке. В сумму будем включать только ненулевые элементы, т. к. перемножая ноль и его алгебраическое дополнение в результате получим нулевое слагаемое.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \times (-7) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \times 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Заметим, что степень у (-1) определяется номером строчки и столбца, на котором стоит выбранный элемент. В нашем случае элемент (-7) стоит на третьей строчке и во втором столбце, следовательно степень у (-1) будет $3+2$.

В результате получилось, что мы понизили порядок определителя на один. Проведем необходимые преобразования и разложим полученные определители по первому столбцу. Первую строку умножим на (-3) и сложим со второй, затем ее же умножим на 2 и сложим с третьей и умножим на (-1) и сложим с четвертой строкой.

$$(-1) \times (-7) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \times 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

В первых столбцах полученных определителей получилось по одному ненулевому элементу, что значительно упрощает дальнейшее решение. Разложим данные определители по первому столбцу.

$$= 7 \times (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} -4 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} - 4 \times (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 1 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Полученные определители решаем по формуле вычисления определителя 3-го порядка.

$$\begin{aligned} & 14 \times ((-4) \times 6 \times 6 + 1 \times (-2) \times 2 + 9 \times 3 \times 0 - (9 \times 6 \times 2 + (-4) \times (-2) \times 0 + 1 \times 3 \times 6)) - \\ & - 8 \times (2 \times 3 \times 6 + (-4) \times (-2) \times (-4) + 9 \times 1 \times 2 - (9 \times 3 \times (-4) + 2 \times (-2) \times 2 + (-4) \times 1 \times 6)) = \\ & = 14 \times (-144 - 4 + 0 - (108 + 0 + 18)) - 8 \times (36 - 32 + 18 - (-108 - 8 - 24)) = \\ & = 14 \times (-148 - 126) - 8 \times (22 + 140) = 14 \times (-274) - 8 \times 166 = -3836 - 1328 = -5164 \end{aligned}$$

5). Доказать совместность системы и решить ее

- a) Методом Гаусса
- б) Методом Крамера
- в) Матричным методом

а) Методом Гаусса.

При решении системы методом Гаусса расширенная матрица системы приводится к треугольному виду. Обратным ходом находятся неизвестные. В матрице можно умножать строчку на число и складывать с другой строчкой, менять строчки местами, менять столбцы местами (при этом нужно переобозначить неизвестные).

Сначала работаем с первой строкой, чтобы получить нули в первом столбце, затем со второй строкой, чтобы получить нули во втором столбце и то же самое с третьей строкой.

Пример: решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ x - y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - z = 25 \end{cases}$$

Преобразовываем расширенную матрицу данной системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-1) \\ \times(-3) \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array} \right) \approx$$

$$\approx \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array} \right|$$

В результате получаем систему:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ -3y - 2z = 11 \\ -8z = 8 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $z = -1$, подставляем во второе уравнение получаем

$$-3y + 2 = 11$$

$$y = -3$$

Подставляем найденные z и y в первое уравнение и получаем

$$x - 6 - 5 = -9$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$ $y = -3$ $z = -1$

б) Методом Крамера:

Решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

находится по формулам

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Пример: Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ x - y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - z = 25 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = (1+18-30) - (-15-18-2) = -11+35=24$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 25 & -6 & -1 \end{vmatrix} = (-9+150-60) - (-125+162-4) = 81-33=48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix} = (-2-81+125) - (30+75+9) = 42-114=-72$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 25 \end{vmatrix} = (-25+12+54) - (27-12+50) = 41-65=-24$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48}{24} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{72}{24} = -3$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{24}{24} = -1$$

Ответ: $x = 2$ $y = -3$ $z = -1$

в) Матричным методом

Систему линейных уравнений можно записать в виде:

$$AX=B, \quad (1)$$

Где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Домножим уравнение (1) на A^{-1} слева. Получим

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

$$X=A^{-1}B$$

Значит, нашей задачей является найти A^{-1} (обратную матрицу) и перемножить ее с вектором B и мы получим вектор X , составляющие которого будут являться решением нашей системы.

Формула для нахождения обратной матрицы.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} является алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\text{В нашем задании: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Найдем A^* :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = (1 + 18) = 19,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 9) = 10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = (-6 + 3) = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 + 30) = -28$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 15) = -16$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 - 6) = 12$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (6 + 5) = 11$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 5) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 2) = -3$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = |A| = 24$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда, } X = A^{-1}B = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -171 - 56 + 275 = 48 \\ -90 - 32 + 50 = -72 \\ 27 + 24 - 75 = -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x=2, y=-3, z=-1$

б) Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной однородной системы.

Определение: система $AX=B$ называется однородной если столбец свободных членов $B=0$.

Определение: рангом расширенной матрицы называется максимальное число линейно независимых (ненулевых) строк.

Если ранг расширенной системы равен r , а число уравнений n , то число свободных неизвестных равно $(n-r)$.

Определение: элементарными называются следующие преобразования:

1) умножение любой строки матрицы на число;

2) прибавление к любой строке матрицы другой строки умноженной на число;

Теорема: элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

При переносе местами двух строк или двух столбцов (при этом переобозначив переменные) ранг матрицы также остается неизменным.

Пример: Пусть дана однородная система линейных уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

определим ранг данной системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \xrightarrow{(-3)} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 0 & -24 & 21 & -75 & 12 \\ 0 & -32 & 28 & 100 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\begin{matrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{matrix} \right)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 0 & -24 & 21 & -75 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет ранг равный 2. Выбираем в матрице две линейно независимые строки и оставляем в системе лишь те уравнения, коэффициенты которых вошли в выбранные строки.

В этих уравнениях оставляем в левых частях такие две неизвестные, что определитель из коэффициентов при них отличен от нуля, а остальные неизвестные объявляем свободными и переносим в правые части уравнений.

Пусть x_3, x_4, x_5 – свободные неизвестные, тогда

$$\begin{cases} x_1 + 11x_2 = 12x_3 - 34x_4 + 5x_5 \\ -24x_2 = -21x_3 + 75x_4 - 12x_5 \end{cases}$$

Из второго уравнения находим

$$x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5$$

Подставляя найденное значение x_2 в первое уравнение находим:

$$x_1 + \frac{77}{8}x_3 - \frac{275}{8}x_4 + \frac{11}{2}x_5 = 12x_3 - 34x_4 + 5x_5$$

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

Запишем общее однородное решение системы:

$$\mathbf{X}_{o.o.} = \left(\frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5; \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5; x_3; x_4; x_5 \right)$$

Давая свободным неизвестным произвольные числовые значения, мы получаем все решения данной системы.

Пусть $x_3=8$, $x_4=-8$, $x_5=2$. Подставляя данные значения в общее однородное решение мы получим частное однородное решение:

$$\mathbf{X}_{c.o.} = (15; 33; 8; -8; 2)$$

Определение: Всякая максимально линейно независимая система решений однородной системы уравнений называется ее фундаментальной системой.

Если ранг матрицы равен r , а число неизвестных n , то всякая фундаментальная система решений системы состоит из $n-r$ решений.

В нашем случае $r=2$, $n=5$, следовательно фундаментальная система решений (ФСР) будет состоять из 3-х линейно независимых векторов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$. Чтобы составить ФСР мы должны задать такие значения свободным неизвестным, чтобы определитель из данных значений был ненулевым.

$$\mathbf{X}_1 : x_3 = 8, x_4 = 0, x_5 = 0$$

$$\text{Зададим: } \mathbf{X}_2 : x_3 = 0, x_4 = 8, x_5 = 0$$

$$\mathbf{X}_3 : x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2$$

На диагонали могут стоять любые элементы, мы подбираем наиболее удобные для нас. Все элементы, стоящие не на диагонали берем равные нулю. В результате мы получаем линейно независимую систему (так как определитель не равен нулю). Далее подставляем наши значения в общее однородное решение и строим ФСР.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
\mathbf{X}_1	19	7	8	0	0
\mathbf{X}_2	3	-25	0	8	0
\mathbf{X}_3	-1	1	0	0	2

Данная система решений будет являться базой для любого частного решения. Любой вектор, не входящий в данную систему векторов

будет являться линейной комбинацией из базисных векторов.

Проведем иллюстрацию:

$$\mathbf{X}_{c.o.} = \alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \alpha_3 \mathbf{X}_3$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 33 \\ 8 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -25 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Получим систему:

$$19\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 15$$

$$7\alpha_1 - 25\alpha_2 + \alpha_3 = 33$$

$$8\alpha_1 = 8$$

$$8\alpha_2 = -8$$

$$2\alpha_3 = 2$$

Отсюда,

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = -1$$

$$\alpha_3 = 1$$

$$\mathbf{X}_{c.o.} = 3\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3$$

7). Образует ли линейное пространство данное множество.

Определение: множество V называется линейным пространством, если в нем определены операции сложения (если $a \in V, b \in V \Rightarrow (a+b) \in V$) и умножения на число α (если $a \in V \Rightarrow \alpha a \in V$), и введенные операции удовлетворяют аксиомам:

- 1) $a+b=b+a$
- 2) $a+(b+c)=(a+b)+c$
- 3) $\exists 0 : a+0=a$
- 4) $\exists -a : a+(-a)=0$
- 5) $\alpha(a+b)=\alpha a + \alpha b$
- 6) $(\alpha+\beta)a=\alpha a + \beta a$
- 7) $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$
- 8) $1 \times a=a$

Пример 1: будет ли являться линейным пространством множество матриц размером $m \times n$?

Решение: Пусть множество V составляют матрицы размером $m \times n$ они будут являться линейным пространством, так как на данном множестве введена операция сложения : если матрицу $A \in V$ сложить с матрицей $B \in V$, то мы получим матрицу C размером $m \times n$, которая тоже принадлежит множеству V ; и операция умножения на число: если матрицу $A \in V$ умножить на число α , то получим матрицу D ,

которая также принадлежит множеству V . И так как элементы матрицы – это действительные числа, следовательно данное множество будет удовлетворять основным аксиомам.

Пример 2: Будет ли являться линейным пространством множество многочленов пятой степени?

Решение: Данное множество не будет составлять линейное пространство, так как можно подобрать пару таких многочленов, сумма которых не будет давать многочлен пятой степени:

$$f_1(x) = 4x^5 + 3x^3 - x + 5$$

$$f_2(x) = -4x^5 - 3x^4 + x^2 + x - 6$$

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) = -3x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$$

Полученный многочлен является многочленом четвертой степени. Для того чтобы доказать что множество не является линейным пространством достаточно привести хотя бы один пример, опровергающий определение.

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

Определение: Базисом является максимальная система линейно независимых векторов.

Пример: Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (-9, 2, 25), \vec{a} = (1, 1, 3), \vec{b} = (2, -1, -6), \vec{c} = (5, 3, -1)$$

В нашем случае система состоит из трех векторов (a, b, c) , которые составляют базис. Значит любой вектор будет являться линейной комбинацией из данной системы векторов. Вектор d должен линейно зависеть от заданной тройки векторов. Пользуясь определением можно записать в виде формулы:

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

Подставляя наши значения получим:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$$

что можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 5\gamma = -9 \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 2 \\ 3\alpha - 6\beta - \gamma = 25 \end{cases}$$

Решим данную систему методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = (1+18-30) - (-15-18-2) = -11+35=24$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 25 & -6 & -1 \end{vmatrix} = (-9+150-60) - (-125+162-4) = 81-33=48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix} = (-2-81+125) - (30+75+9) = 42-114=-72$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 25 \end{vmatrix} = (-25+12+54) - (27-12+50) = 41-65=-24$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48}{24} = 2$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{72}{24} = -3$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{24}{24} = -1$$

Ответ: $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$

10). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A .

Определение: многочлен n -ой степени $|A - \lambda E|$ называется характеристическим многочленом матрицы A , а его корни называются характеристическими корнями (собственными числами) матрицы A .

Определение: вектор X называется собственным вектором, если выполняется следующее равенство:

$$\begin{aligned} \lambda A &= \lambda X \\ X &\neq 0 \end{aligned}$$

где λ – собственные числа матрицы A .

Пример: Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ матрицы A . На практике вычитаем из диагональных элементов λ . Получим:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & -3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Найдем определитель данной матрицы и вычислим его разложением по первой строке.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times (6-\lambda) \times \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) \times ((3-\lambda) \times (4-\lambda) - (-2) \times (-3)) = (6-\lambda) \times (12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 6) = (6-\lambda) \times (\lambda^2 - 7\lambda + 6) = 0$$

$$(6-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 6$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda = 6, \lambda = 1$$

В результате мы получили следующие собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = 6$$

$$\lambda_3 = 1$$

Найдем соответствующие им собственные вектора.

По определению собственного значения и собственного вектора

$$AX = \lambda X$$

$$AX - \lambda X = 0$$

$$(A - \lambda E)X = 0$$

Найдем собственный вектор для

$$\lambda_{1,2} = 6$$

$$A - 6E = \begin{pmatrix} 6-6 & 0 & 0 \\ 1 & 3-6 & -2 \\ -1 & -3 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} =$$

Воспользуемся методом Гаусса для определения ранга полученной матрицы. Для этого проведем следующие преобразования: сложим вторую и третью строчку.

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Умножив полученную матрицу с вектором $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ получим

$$\text{систему: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -6x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг данной системы равен 2, а количество неизвестных три, следовательно должна быть одна свободная неизвестная. Обозначим за свободную неизвестную x_3 . Из второго уравнения выражаем x_2 через свободную неизвестную:

$$-6x_2 = 4x_3$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_3$$

Полученное значение x_2 подставляем в первое уравнение.

$$x_1 - 3 \times \left(-\frac{2}{3}x_3\right) - 2x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Проверка: x_3 -свободная неизвестная. Пусть $x_3 = 3$, тогда $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

По определению собственного значения собственного вектора:

$$AX = \lambda X$$

Подставим в определение найденное собственное число и собственный вектор.

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} = 6 \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times X = \lambda \times X$$

Теперь найдем собственный вектор для $\lambda_3 = 1$

$$A - 1E = \begin{pmatrix} 6-1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-1 & -2 \\ -1 & -3 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} =$$

Воспользуемся методом Гаусса для определения ранга данной матрицы. Для этого поменяем местами первую и третью строчки. Затем полученную первую строчку сложим со второй и умножив на 5 сложим с третьей строчкой.

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -15 & 15 \end{pmatrix} =$$

Перемножив полученную матрицу с вектором $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ получим систему:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг данной системы равен двум а число неизвестных трем следовательно одну неизвестную объявляем свободной (пусть это будет x_3). Выразим из второго уравнения x_2 через x_3 и подставим в первое уравнение

$$x_2 = x_3$$

$$-x_1 - 3x_3 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Проверка: x_3 -свободная неизвестная. Пусть $x_3=2$, тогда $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

По определению собственного значения собственного вектора:

$$AX = \lambda X$$

Подставим в определение найденные собственное число и собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \times X = \lambda \times X$$

$$\lambda_{1,2} = 6, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\lambda_3 = 1, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Вариант 1

1). Выполнить действия в алгебраической форме:

$$\frac{2-2\sqrt{3}i}{1+i\sqrt{3}} i$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[6]{1+\sqrt{3}i}$$

3). Разложить многочлен $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$ на неприводимые множители.

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -5 & 4 & 5 \\ 9 & -3 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 4 & 2 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -2 & 8 & 3 \\ -4 & -3 & 4 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

и решить ее

- а) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \\ 12x_1 - 11x_2 - x_3 - 34x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

7). Будет ли являться линейным пространством множество всех дробных чисел.

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (-2, 11, -2), \vec{a} = (1, 2, -3), \vec{b} = (3, -3, -2), \vec{c} = (-1, 4, 2)$$

9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

- 1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{(1-3i)(1+3i)}{3+i} + 2i^{17}$$

- 2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[6]{\sqrt{3} + i}$$

- 3). Разложить многочлен $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 20x + 15$ на неприводимые множители.

- 4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & -9 & -4 & 4 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

- 5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + 3z = 1 \\ 4x - y - 6z = 1 \end{cases}$$

и решить ее

- a) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

- 6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 - 11x_2 - x_3 - 34x_4 + 12x_5 = 0 \end{cases}$$

- 7). Образуют ли линейное пространство множество целых чисел?

- 8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (1, -2, -1), \vec{a} = (0, -1, 2), \vec{b} = (1, 0, -1), \vec{c} = (1, 2, 1)$$

- 9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

- 1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i} - (1+i\sqrt{3})$$

- 2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{2+2\sqrt{3}i}$$

- 3). Разложить многочлен $x^4 + x^3 + 3x^2 + 5x - 10$ на неприводимые множители.

- 4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

- 5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 6x + 2y - z = 2 \\ 4x - y + 3z = -3 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

и решить ее

- a) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

- 6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- 7). Образует ли линейное пространство множество всех функций, принимающих отрицательное значение?

- 8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (3, -2, 0), \vec{a} = (-3, 1, 0), \vec{b} = (2, -1, 0), \vec{c} = (1, 2, 1)$$

- 9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

- 1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\left(\frac{1+i}{1-2i} - \frac{2}{5}(2+i) \right)$$

- 2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[5]{1+i}$$

- 3). Разложить многочлен $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$ на неприводимые множители.

- 4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ -6 & -4 & -7 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

- 5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 9 \\ 2x + 4y + 3z = -3 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

и решить ее

- а) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

- 6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- 7). Образует ли линейное пространство множество векторов на плоскости?

- 8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (6, 1, 0), \vec{a} = (2, -1, 1), \vec{b} = (0, 1, -2), \vec{c} = (3, 1, -1)$$

- 9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

- 1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\left(\frac{(4-i)^2}{i^5} - 8i^3(2-i^{13}) \right)$$

- 2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{3+\sqrt{3}i}$$

- 3). Разложить многочлен $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 20x + 15$ на неприводимые множители.

- 4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & -2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ -4 & 9 & 3 & -7 & 5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- 5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

и решить ее

- а) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

- 6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

- 7). Образуют ли линейное пространство множество всех отрицательных чисел?

- 8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (2, -1, 4), \vec{a} = (1, 0, 2), \vec{b} = (3, -3, 4), \vec{c} = (0, 1, 1)$$

- 9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

- 1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\left(\frac{(1-3i)(1+3i)}{-i(3+i)} - 2i^{18} \right)$$

- 2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$$

- 3). Разложить многочлен $x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12$ на неприводимые множители.

- 4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & -5 & 2 & -5 \\ -3 & 5 & -7 & -3 & -9 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 & -4 \\ 7 & 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

- 5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

и решить ее

- а) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

- 6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

- 7). Образуют ли линейное пространство множество многочленов шестой степени?

- 8). Найти разложение вектора базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (4, 0, -1), \vec{a} = (2, -1, 3), \vec{b} = (1, 0, -1), \vec{c} = (0, -1, 2)$$

- 9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

- 1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\left(i \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{20} + i^{18} \right)$$

- 2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{4+4\sqrt{3}i}$$

- 3). Разложить многочлен $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x + 6$ на неприводимые множители.

- 4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & 5 & -3 \\ 7 & 4 & -9 & 6 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

- 5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 3z = 2 \\ -x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

и решить ее

- а) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

- 6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

- 7). Образуют ли линейное пространство множество векторов с целыми координатами?

- 8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (7, -7, -1), \vec{a} = (1, -2, 1), \vec{b} = (0, 1, -3), \vec{c} = (2, 1, 0)$$

- 9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

- 1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^9} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{i}}$$

- 2). Разложить многочлен $x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 18$ на неприводимые множители.

- 3). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & -2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

- 4). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ 5x + 2y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

и решить ее

- а) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

- 5). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- 6). Образует ли линейное пространство множество векторов с дробными коэффициентами?

- 7). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (3, -3, 5), \vec{a} = (0, 2, 5), \vec{b} = (1, -1, 1), \vec{c} = (2, 0, -1)$$

- 8). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

- 1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{(-2+i)^2}{1+i} i - (0,3+0,1i)$$

- 2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{27}$$

- 2). Разложить многочлен $x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$ на неприводимые множители.

- 3). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} -9 & 7 & 6 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 5 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

- 4). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 4z = 11 \\ -3x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$$

и решить ее

- а) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

- 5). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- 6). Образует ли линейное пространство множество многочленов с целыми коэффициентами?

- 7). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (2, -7, 3), \vec{a} = (5, -3, 4), \vec{b} = (1, -2, 3), \vec{c} = (1, -1, 4)$$

- 8). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

- 1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{(-1+i)^2}{2i^{15}} - \frac{(1+i)}{(2-i)}$$

- 2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{16}$$

- 3). Разложить многочлен $x^4 + x^3 + 3x^2 + 5x - 10$ на неприводимые множители.

- 4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -4 & -2 \\ -6 & 5 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

- 5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + 3z = -4 \end{cases}$$

и решить ее

- а) методом Гаусса,
- б) методом Крамера,
- в) в матричном виде.

- 5). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

- 7). Образует ли линейное пространство множество многочленов с дробными коэффициентами?

- 8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c) .

$$\vec{d} = (2, 1, 0), \vec{a} = (1, 2, -3), \vec{b} = (5, -4, 3), \vec{c} = (1, 3, -5)$$

- 9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Список литературы

1. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1966.
2. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – М.: Наука, 1978.
3. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемешев. – М.: Наука, 2000.
4. Курс высшей алгебры / А. Г . Курош. –М.: Наука, 1971.

Линейная алгебра. Решение типовых примеров. Варианты
контрольных заданий.

Составитель Наталья Анатольевна Пинкина

Редактор О.Ф. Александрова
Корректура автора

Лицензия ЛР № 020372 от 29.01.1997г.

Подписано в печать 24.10.2003

Тиражируется на электронных носителях

Заказ 284

Дата выхода 30.10.2003

Адрес в Internet: www.lan.krasu.ru/studies/editions.asp

Отдел информационных ресурсов управления информатизации

КрасГУ

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 22-05, e-mail:

info@lan.krasu.ru

Издательский центр Красноярского государственного университета

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, e-mail: rio@lan.krasu.ru