Неразрешимость задачи о проверке на принадлежность к классу КС-языков дополнения КС-языка

Долгополова Мария
СПБГУ, 2019

Утверждение

Задача о проверке на принадлежность к классу КС-языков дополнения КС-языка неразрешима

Определения

- $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$
- $P_x = \{\ S \to ba^iSx_i \mid ba^icx_i\ : i \in [1..n]\ \}$
- $P_y = \{\ S \to ba^iSy_i \mid ba^icy_i\ : i \in [1..n]\ \}$
- $G_x = \{\{S\}, \Sigma_3, P_x, S\}$, $G_y = \{\{S\}, \Sigma_3, P_y, S\}$
- $L_x = L(G_x)$, $L_y = L(G_y)$
- $K_{xy} = L_x \cdot \{c\} \cdot (L_y)^R$

K_{xy} - контекстно-свободный

Доказательство 1/3

Лемма 1: Пусть $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $x_i, y_i \in \{a, b\}^*$

Тогда язык $K_{xy} \cap \{ zcz^R \mid z \in \Sigma_3^* \}$ является контекстно-свободным тогда и только тогда, когда ПСП(x,y) не имеет решений.

Доказательство 2/3

Лемма 2: дополнение языка $K_{xy} \cap \{ zcz^R \mid z \in (\Sigma_3)^* \}$ является контекстно-свободным.

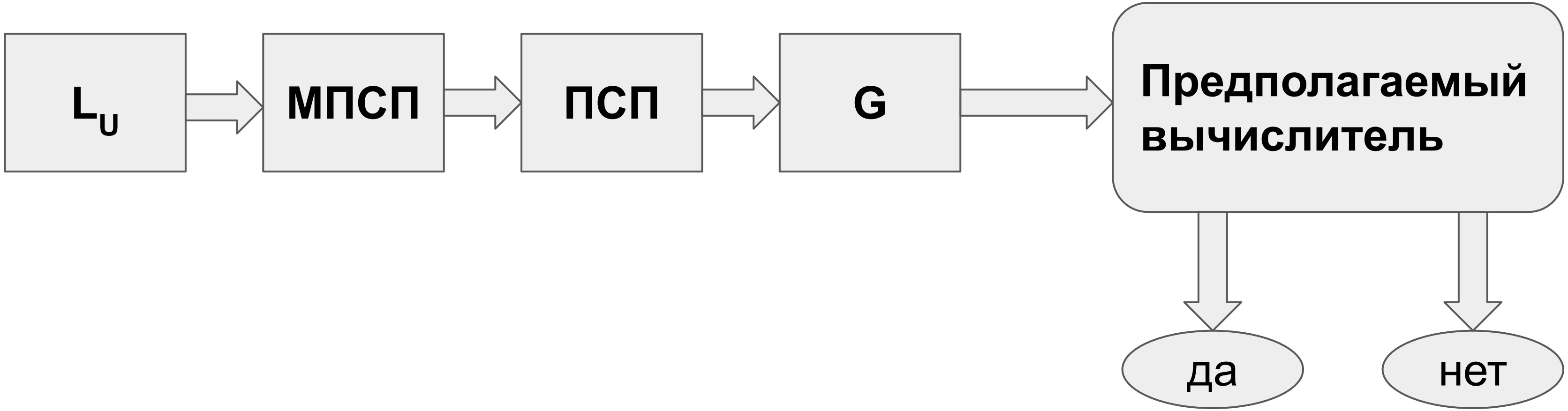
Доказательство:

- $L_0 = \{w \in (\Sigma_3)^*: |w|c = 1\}$
- $L_1 = \{w \in (\Sigma_3)^*: |w|c \neq 3\}$
- $L_2 = \{v_1cv_2cv_3cv_4 : v_1, v_2, v_3, v_4 \in \{a, b\}^*, v_1 \neq v_4^R\}$
- $L_3 = \{v_1cv_2cv_3cv_4 : v_1, v_2, v_3, v_4 \in \{a, b\}^*, v_2 \neq v_3^R\}$
- $L_4 = (((\Sigma_3)^*-L_x) \cap L_0) \cdot \{c\} \cdot L_0$
- $L_5 = L_0 \cdot \{c\} \cdot ((\Sigma_3^*-L_y)^R \cap L_0)$
- $(\Sigma_3)^*- K_{xy} \cap \{ zcz^R \mid z \in (\Sigma_3)^* \} = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5$

Доказательство 3/3

- Построим по постовской системе соответствия (x, y), $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $x_i, y_i \in \{a, b\}^*$ кс-грамматику G, порождающую язык $(\Sigma_3)^* - K_{xy} \cap \{ zcz^R \mid z \in (\Sigma_3)^* \}$
- По лемме 2 язык $(\Sigma_3)^* - K_{xy} \cap \{ zcz^R \mid z \in (\Sigma_3)^* \}$ - КС
- Его дополнение - $K_{xy} \cap \{ zcz^R \mid z \in (\Sigma_3)^* \}$
- По лемме 1 $K_{xy} \cap \{ zcz^R \mid z \in (\Sigma_3)^* \}$ - КС $\Leftrightarrow$ ПСП(x,y) не имеет решений

Является ли дополнение L(G) кс?



Экземпляр ПСП не имеет решения

Экземпляр ПСП имеет решение

Спасибо за внимание!

Пусть Σ_3 = {a, b, c}, x = (x_1 ,...,x_n), y = (y_1 ,...,y_n), где $x_i \in \{a, b\}^*$, yi $\in$ {a, b}* и $x_i y_i \neq \varepsilon$ для всех i. Тогда язык $K_{xy} \cap \{zcz^R \mid z \in (\Sigma_3)^*\}$ является контекстно-свободным тогда и только тогда, когда ПСП(x, y) не имеет решений.

Доказательство: Пусть (i_1 ,...,i_k) — решение ПСП (x, y), где $x_i y_i \neq \varepsilon$ для всех i. Обозначим $u = ba^{ik} ba^{ik-1} \ldots ba^{i1}$, $v = x_{i1} \ldots x_{ik}$ и $L_0 = \{u\}^* \cdot \{c\} \cdot \{v\}^* \cdot \{c\} \cdot \{v^R\}^* \cdot \{c\} \cdot \{u^R\}^*$. Язык L_0 является регулярным. $Kxy \cap \{zcz^R \mid z \in \{\Sigma_3\}^*\} \cap L_0 = \{u^m c v^m c (v^R)^m c (u^R)^m \mid m > 0\}$ не является КС. Согласно теореме о пересечении КС и регулярного языков $Kxy \cap \{zcz^R \mid z \in \{\Sigma_3\}^*\}$ также не является контекстно-свободным.