

**Analyse Numérique et Optimisation**  
**Miniprojet : stabilisation numérique pour les problèmes**  
**à convection dominante**

Dans ce projet et on s'intéresse à l'équation de convection-diffusion en régime stationnaire.

$$-\varepsilon \Delta u + a \cdot \nabla u = f \quad \text{sur } \Omega, \quad u|_{\Gamma} = 0,$$

et à sa discrétisation numérique par la méthode des éléments finis.

Dans cette équation  $\Omega$  désigne un domaine de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\Gamma$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $a(x) = (a_1(x), \dots, a_d(x))$  est un champ de vecteur dont toutes les composantes sont uniformément bornées sur  $\Omega$ , et tel que  $\text{div}(a) = 0$  en tout point de  $\Omega$ . L'objectif est de mettre en évidence et d'étudier les difficultés numériques qui apparaissent dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (régime dit de "convection dominante"), et de mettre en oeuvre une méthode pour les résoudre.

**Partie 1. Mise en évidence des difficultés numériques**

**1.** Etablir la formulation variationnelle dans  $H_0^1(\Omega)$

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (a \cdot \nabla u) v = \int_{\Omega} f v.$$

et montrer qu'il existe une solution unique dans cet espace.

**2.** Etablir une estimation de  $\|u\|_{H^1}$ . On considère les espaces d'éléments finis  $P_1$  de Lagrange  $V_h$  et la solution approchée  $u_h$  par la méthode de Galerkin. Etablir une estimation d'erreur  $\|u - u_h\|_{H^1}$ . Que se passe-t-il lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  ?

**3.** Dans le cas 1D avec  $\Omega = [0, 1]$  et  $a = f = 1$ , calculer exactement la solution  $u$  de l'équation en fonction de  $\varepsilon$ . A l'aide de Scilab, résoudre le problème et comparer graphiquement et numériquement les fonctions  $u_h$  et l'interpolée  $r_h u$  pour  $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  et  $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ . Que constate-t-on ?

**4.** Dans le cas 2D avec  $\Omega = [0, 1]^2$ ,  $f = 1$  et  $a = (1, 1)$ , résoudre le problème à l'aide de FreeFem et représenter graphiquement  $u_h$  pour  $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  et  $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ . Que constate-t-on ?

5. Etablir pour les éléments finis de Lagrange l'inégalité inverse : pour tout  $u_h \in V_h$  on a

$$\|\nabla u_h\|_{L^2} \leq Ch^{-1} \|u_h\|_{L^2}.$$

Montrer dans le cas  $f = 1$  que si  $u_h$  est la solution approchée par la méthode de Galerkin, on a

$$0 \leq \int u_h \leq \frac{\varepsilon}{h^2} \int |u_h|^2.$$

(indication: utiliser une fonction test particulière et l'inégalité inverse). En déduire que pour  $h$  fixé et dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a nécessairement un comportement oscillant ou explosif de  $u_h$ .

6. Dans le cas 1D avec  $f = a = 1$ , montrer qu'on a dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  l'estimation  $\|u - r_h u\|_{L^2} \leq Ch^{1/2}$  avec  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ , et qu'il ne peut pas en être de même pour l'erreur  $\|u - u_h\|_{L^2}$ .

7. Dans le cas 1D avec  $a = 1$  et en utilisant la base des fonctions chapeau pour l'espace  $V_h$ , donner l'expression du système discret associé à la méthode de Galerkin (dont les inconnues sont les valeurs de  $u_h$  aux neuds  $ih$ , pour  $i = 1, \dots, N-1$ ). Montrer qu'il coïncide avec un schéma aux différences finies où le terme de convection  $u'$  est discrétisé par une différence centrée. Comment cela se relie-t-il avec les problèmes numériques observés ?

## Partie 2. Méthodes de stabilisation

8. Dans le cas 1D, montrer que la méthode est stable au sens  $L^\infty$  lorsque  $h$  est suffisamment petit vis à vis de  $\varepsilon > 0$ . Montrer numériquement en 1D qu'il est en fait suffisant de raffiner le maillage uniquement dans la région où la solution varie fortement. On pourra essayer de mettre en oeuvre un tel raffinement de maillage local en 2D à l'aide de la commande "adaptmesh" de Freefem. Dans la suite, on va chercher à obtenir des méthodes stables sans raffinement de maillage global ou local.

9. Dans le cas 1D, avec  $a = 1$ , une solution possible est de résoudre un problème discret perturbé : trouver  $u_h \in V_h$  tel que pour tout  $v_h \in V_h$

$$(\varepsilon + \beta_h) \int_0^1 u'_h v'_h + \int_0^1 u'_h v_h = \int_0^1 f v_h.$$

avec  $\beta_h$  une “viscosité numérique” choisie de manière adéquate. Pour préciser le choix de  $\beta_h$ , on le cherche sous la forme

$$\beta_h = \lambda h.$$

Montrer qu’il existe une valeur  $\lambda$  pour laquelle le système obtenu correspond à un schéma aux différences finies où le terme de convection  $u'$  est discrétisé par une différence décentrée amont. Etudier numériquement avec  $f = 1$  cette méthode de stabilisation pour les valeurs de  $\varepsilon$  et  $h$  étudiées précédemment et pour diverses valeurs de  $\lambda$ .

**10.** En dimension 2, étudier numériquement avec  $a = (1, 1)$  et  $f = 1$  les méthodes de viscosité numérique fondées sur les formulations

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_{\Omega} (a \cdot \nabla u_h) v_h + \beta_h \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h,$$

et

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_{\Omega} (a \cdot \nabla u_h) v_h + \beta_h \int_{\Omega} (a \cdot \nabla u_h)(a \cdot \nabla v_h) = \int_{\Omega} f v_h,$$

**11.** On propose à présent la formulation suivante : pour tout  $v_h \in V_h$

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_{\Omega} (a \cdot \nabla u_h) v_h + \beta_h \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (-\varepsilon \Delta u_h + (a \cdot \nabla u_h) - f)(a \cdot \nabla v_h) = \int_{\Omega} f v_h.$$

On a noté ici  $\mathcal{T}_h$  l’ensemble des triangles de la triangulation associée à  $V_h$ . Expliquer en quoi cette formulation (dite SUPG “Streamline Upwind Petrov-Galerkin”) est plus consistante avec l’équation que les deux formulations précédentes. Que peut-on dire du terme  $\Delta u_h$  dans le cas des éléments  $P_1$  ? Etudier numériquement le comportement de cette méthode avec  $a = (1, 1)$  et  $f = 1$

**12.** Afin de comparer précisément les différentes formulations numériques en 2D, montrer que pour  $f = 1$ ,  $a = (1, 0)$  et avec des conditions aux limites différentes de celles de Dirichlet, la solution 2D exacte  $u(x, y)$  est explicitement déterminée comme la solution 1D en la variable  $x$ . A l’aide de cette solution comparer numériquement les différentes méthodes de stabilisation pour les valeurs de  $\varepsilon$  et  $h$  étudiées précédemment et pour diverses valeurs de  $\lambda$ .