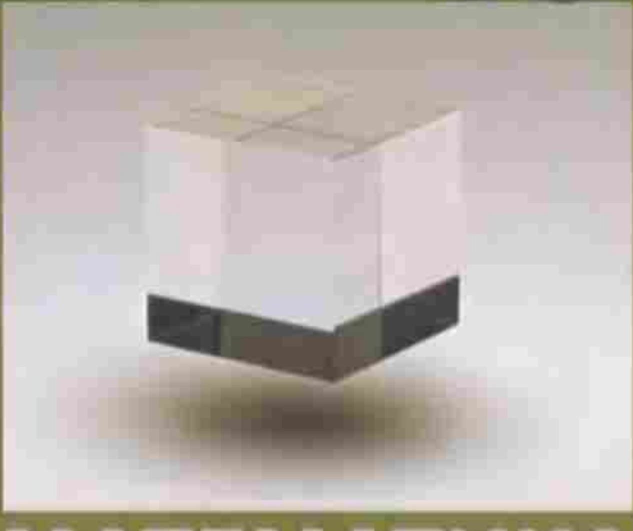
10

М. И. Шабунин
А. А. Прокофьев



МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

БИНОМ

М. И. Шабунин, А. А. Прокофьев

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Учебник для 10 класса

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2007

УДК 373.167.1:51(075.3)
ББК 22.1я721.6
Ш12

Шабунин М. И.

Ш12 Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень : учебник для 10 класса / М. И. Шабунин, А. А. Прокофьев. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 424 с. : ил.

ISBN 978-5-94774-452-1

Учебник для 10 класса является частью учебно-методического комплекта для старших классов школ с углубленным изучением математики. Представлены разделы: элементы математической логики, числовые множества, рациональные функции и графики, многочлены и системы уравнений, комплексные числа, степенная, показательная и логарифмическая функции, тригонометрические формулы, предел и непрерывность функции.

Каждый параграф учебника содержит теоретический материал, примеры с решениями и упражнения для самостоятельной работы.

Для учащихся классов физико-математического и естественно-научных профилей.

УДК 373.167.1:51(075.3)
ББК 22.1я721.6

Учебное издание

Шабунин Михаил Иванович
Прокофьев Александр Александрович

МАТЕМАТИКА. АЛГЕБРА. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Учебник для 10 класса

Ведущий редактор *М. Стригунова*
Художник *Ф. Инфантэ*
Художественный редактор *О. Лапко*
Корректор *Е. Клитина*
Оригинал-макет подготовлен *О. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано в печать 28.06.07. Формат 60×90/16.
Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 26,5. Тираж 3000 экз. Заказ 2549

БИНОМ. Лаборатория знаний
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

Отпечатано в полиграфической фирме «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3

ISBN 978-5-94774-452-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник является первой частью курса «Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень», предназначенной для преподавания в 10-х классах в объеме 6 часов в неделю. Полный комплект материалов по данному курсу включает учебники для 10-го и 11-го классов, методические пособия и дидактические материалы, соответствующие каждому учебнику, а также задачник для 10–11 классов.

В первой главе данного учебника изучаются элементы математической логики. Эта глава закладывает основы логической культуры учащихся, необходимой для освоения фундаментальных понятий и теории курса математики.

Главы «Числовые множества», «Алгебраические уравнения и неравенства» и «Системы алгебраических уравнений» предназначены для более глубокого изучения разделов математики, входящих в программу основной школы, изучаемых учащимися в 7–9-х классах. Большее внимание уделено решению алгебраических уравнений и неравенств, а также систем алгебраических уравнений с использованием графических методов. В учебнике широко представлены методы решения систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными (правило Крамера, метод Гаусса), а также рассмотрены различные методы решения нелинейных систем уравнений с двумя неизвестными.

Отдельная глава посвящена рациональным функциям и способам построения их графиков.

В главе «Тригонометрические формулы» введены основные понятия и формулы тригонометрии, рассмотрены различные способы преобразования тригонометрических выражений и доказательств тождеств.

Глава «Комплексные числа» помещена перед главой «Многочлены от одной переменной», что дает возможность в дальнейшем находить разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители.

В главе «Предел и непрерывность функции», в отличие от обычных учебников по математике, введены понятия точных граней числового множества и определены основные операции с действительными числами. В параграфе «Предел последовательности» широко представлены методы вычисления пределов, сформулированы и частично доказаны свойства сходящихся последовательностей, доказана теорема о пределе монотонной последовательности. В параграфе «Предел функции» сформулированы два эквивалентных определения предела функции в точке (с помощью последовательности и окрестности), рассмотрены свойства функций, непрерывных в точке и на отрезке.

В заключительной главе «Степенная, показательная и логарифмическая функции» большое внимание уделено определению показательной функции. В классах с углубленным изучением математики это особенно важно для более глубокого понимания операции возведения положительного действительного числа в действительную степень. Рассмотрены свойства степенной, показательной и логарифмической функций, а также различные методы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

В каждой главе представлено достаточное количество разобранных примеров, помогающих учащимся лучше усвоить теоретический материал и познакомиться с различными методами решений и доказательств. Кроме этого в каждом параграфе дается необходимое количество задач для самостоятельного решения в порядке повышения их сложности. Часть примеров и задач взята из вариантов выпускных экзаменов для классов с углубленным изучением предмета и вариантов вступительных испытаний в вузы, предъявляющих повышенные требования к математической подготовке поступающих (МФТИ, МГУ, СПГУ, НГУ, МВТУ, МИЭТ и др.). Задачи на повторение, а также вопросы и задания для самоконтроля учащихся, структурированные по главам, приведены в задачнике.

Начало решения примеров отмечено знаком △, окончание — знаком ▲, начало доказательства обозначается ○, окончание — знаком ●. К задачам, номера которых помечены звездочкой, в ответах даются указания к решению.

М. И. Шабунин

А. А. Прокофьев

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

§1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. Высказывания

При изучении различных дисциплин (математики, физики, биологии, истории и т. д.), а также в повседневной жизни мы постоянно встречаемся с различными утверждениями и предложениями.

Рассмотрим несколько предложений, обозначив их большими латинскими буквами:

$A \equiv$ {число 1568 делится на 4},

$B \equiv$ {число 317 делится на 6},

$C \equiv$ {число 3 — единственный корень уравнения $x^2 = 9$},

$D \equiv \{x + 7 = 13\}$,

$E \equiv$ {который час?},

$F \equiv$ {в записи числа $\sqrt{2}$ в виде бесконечной десятичной дроби $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ на 1 000 000-м месте после запятой стоит цифра 6},

$G \equiv$ {1 января 2020 года дневная температура в Москве будет 5–10 градусов ниже нуля},

$H \equiv$ {Земля — единственная обитаемая планета во Вселенной},

$M \equiv$ {число $1 + 2^{2^5} = 4294967297$ — простое},

$N \equiv$ {число 111^{333} делится на 37}.

Среди этих утверждений (предложений) есть истинные (A, N), есть ложные (B, C, M). Утверждение M принадлежит французскому математику П. Ферма (1601–1665), но в 1732 г. Л. Эйлер доказал, что оно ложно.

Все перечисленные утверждения (A, B, C, M, N) являются либо истинными, либо ложными. Такие утверждения называют *высказываниями*.

Утверждение D содержит букву x, оно является истинным при $x = 6$ и ложным при других значениях x. Пока не указано, чему равен x, нельзя сказать, истинно оно или ложно.

Предложение E не является высказыванием, так как лишена смысла постановка вопроса о том, истинно оно или ложно.

Утверждение F — высказывание: вопрос о его истинности принципиально может быть решен, но требует огромного количества вычислений.

Наконец, утверждения G и H также являются высказываниями, хотя в настоящее время установить их истинность или ложность нет возможности.

Итак, всякое высказывание является либо истинным, либо ложным (*закон исключенного третьего*); никакое высказывание не может быть одновременно истинным или ложным (*закон противоречия*); утверждение, о котором невозможно однозначно решить вопрос, истинно оно или ложно, высказыванием не является.

Понятие высказывания является исходным понятием математической логики.

Перейдем к рассмотрению пяти основных логических операций. Высказывания будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита.

2. Операция отрицания

Из всякого высказывания A можно получить новое высказывание, *отрицая* его, т. е. утверждая, что высказывание A не имеет места, не выполняется. *Отрицание высказывания* A обозначается через $\overline{A}$ (или через $\neg A$). Запись $\overline{A}$ читается как «отрицание высказывания A» или, короче, «не A».

Отрицание высказывания можно получить, сказав: «утверждение A места не имеет» или «A не выполняется». Однако в ряде случаев отрицание можно получить еще проще. Если, например, высказывание A выражается простым предложением с одним сказуемым, то для получения его отрицания $\overline{A}$ нужно лишь добавить к сказуемому частицу «не». Приведем примеры высказываний и их отрицаний:

1) $A \equiv \{$число 53 делится на 7$\}$, $\overline{A} \equiv \{$число 53 не делится на 7$\}$;
2) $B \equiv \{5 > 6\}$ (т. е. пять больше шести), $\overline{B} \equiv \{5 \leqslant 6\}$ (т. е. пять не больше шести);
3) $C \equiv \{$29 (есть) простое число$\}$, $\overline{C} \equiv \{$29 не (есть) простое число$\}$.

Рассмотрим теперь вопрос об истинности высказываний A и $\overline{A}$. Если высказывание A *истинно* (т. е. то, что утверждается в этом высказывании, действительно имеет место), то высказывание $\overline{A}$, утверждающее, что A места не имеет, *ложно*. Итак, если A истинно, то $\overline{A}$ ложно. Наоборот, если A ложно, то высказывание $\overline{A}$ (как раз и утверждающее, что A места не имеет) *истинно*. Итак, если A ложно, то $\overline{A}$ истинно.

Мы видим, что *каково бы ни было высказывание A, из двух высказываний A, $\overline{A}$ одно является истинным, а другое ложным.*

Например, из высказываний, приведенных в пп. 1–3, $\overline{A}$, $\overline{B}$, C истинны, а A, B, $\overline{C}$ ложны.

Самый простой прием образования отрицания заключается, как мы отмечали, в том, что к сказуемому добавляется частица «не». Например:

$A \equiv \{111$ делится на $3\}$,

$\overline{A} \equiv \{111$ не делится на $3\}$.

Однако этот простой прием будет неприменим, если само высказывание уже является отрицательным, т. е. уже содержит частицу «не» перед сказуемым. Рассмотрим, например, высказывание

$B \equiv \{18$ не делится на $7\}$.

Для образования отрицания $\overline{B}$ мы уже не может добавить еще одно отрицание к сказуемому (т. е. не можем сказать: «18 не не делится на 7»). Поэтому отрицание приходится формулировать так:

$\overline{B} \equiv \{$высказывание «18 не делится на 7» места не имеет$\}$.

Но что означает это утверждение? Оно означает, что 18 *делится* на 7, т. е. отрицание $\overline{B}$ можно проще сформулировать так:

$\overline{B} \equiv \{18$ делится на $7\}$.

Таким образом, если в некотором высказывании B перед сказуемым уже стоит отрицательная частица «не», то для образования отрицания $\overline{B}$ достаточно отбросить частицу «не».

Нахождение правильной формулировки отрицания $\overline{A}$ в том случае, когда высказывание A содержит слова «все» («любой», «каждый») или «хотя бы один» («найдется», «существует»), может вызвать некоторые затруднения. Обратимся к примерам.

Пример 1. Сформулировать высказывание $\overline{A}$, если

$A \equiv \{$каждое простое число p нечетно$\}$.

Δ Многие формулируют $\overline{A}$ в виде

$B \equiv \{$каждое простое число четно$\}$.

Это неверная формулировка: A и B являются высказываниями, и оба они ложны ($p = 2$ — простое четное число).

Правильной будет каждая из следующих формулировок:

$\overline{A} \equiv \{$не каждое простое число нечетно$\}$,

$\overline{A} \equiv \{$найдется (существует) простое число, которое четно$\}$,

$\overline{A} \equiv \{$хотя бы одно простое число четно$\}$. ▲

Пример 2. Сформулировать высказывание $\overline{A}$, если

$A \equiv \{$каждое из чисел p, q, r делится на $13\}$.

Δ $\overline{A} \equiv \{$не каждое из чисел p, q, r делится на 13$\}$ или $\overline{A} \equiv \{$хотя бы одно из чисел p, q, r не делится на 13$\}$. ▲

Пример 3. Сформулировать высказывание $\overline{A}$, если

$A \equiv \{$найдется треугольник, в котором три медианы не пересекаются в одной точке$\}$,

Δ $\overline{A} \equiv \{$во всяком треугольнике три медианы пересекаются в одной точке$\}$.

Высказывание $\overline{A}$ является истинным, а A — ложным. ▲

Эти примеры позволяют сделать следующие выводы:

Если высказывание A начинается со слов «все», «каждый», «любой», то для получения отрицания $\overline{A}$ надо либо, ничего не меняя, поставить отрицание «не» перед этими словами, либо же поставить отрицание «не» после этих слов, но тогда эти слова непременно надо заменить на «хотя бы один», «найдется», «существует», а утверждение (свойство), которое следует за этими словами, — его отрицанием (в примере 1 — «четно» вместо «нечетно», а в примере 2 — «не делится» вместо «делится»).

Верно и обратное: если в начале высказывания A стоят слова «найдется», «существует», «хотя бы один», а за ними — некоторое свойство P (в примере 3 — «медианы не пересекаются в одной точке»), то в формулировке отрицания $\overline{A}$ эти слова заменяются на «любой», «каждый», «всякий», а свойство P — на $\overline{P}$ (в примере 3 это «медианы пересекаются в одной точке» — отбрасывается «не»).

Пусть теперь A — произвольное высказывание. Его отрицание $\overline{A}$ также является высказыванием. Значит, можно рассматривать и его отрицание, т. е. высказывание $\overline{\overline{A}}$. Оно называется *двойным отрицанием* высказывания A. Его можно сформулировать словами так: *утверждение о том, что высказывание A не выполняется, места не имеет*. Но это по смыслу ничем не отличается от утверждения о справедливости самого высказывания A.

Более точно, *двойное отрицание $\overline{\overline{A}}$ истинно в том и только в том случае, если истинно само высказывание A* (т. е. если A истинно, то и $\overline{\overline{A}}$ истинно, а если A ложно, то и $\overline{\overline{A}}$ ложно).

Это правило называется *законом отрицания отрицания*.

3. Конъюнкция двух высказываний

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, которое является истинным в случае, когда истинны оба высказывания A и B, и ложным во всех остальных случаях. Эта операция обозначается символом $A \wedge B$ (читается «A и B»).

Приведем примеры.

1) $A \equiv$ {число 36 делится на 3}, $B \equiv$ {число 36 делится на 4},
$A \wedge B \equiv$ {число 36 делится на 3 и делится на 4} — истинное высказывание.

2) $A \equiv$ {число 2 — простое}, $B \equiv$ {число 2 — четное},
$A \wedge B \equiv$ {число 2 — простое и четное} — истинное высказывание.

4. Дизъюнкция двух высказываний

Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \vee B$ (читается «A или B»), которое истинно в тех случаях, когда истинно хотя бы одно из высказываний A или B, и ложно, если ложны оба высказывания A и B.

Например, если $A \equiv \{12 > 9\}$, $B \equiv \{3 > 9\}$, то $A \vee B \equiv \{12 > 9$ или $3 > 9\}$ — истинное высказывание, так как A — истинное высказывание.

Если $A \equiv \{8 < 10\}$, $B \equiv \{8 = 10\}$, то $A \vee B \equiv \{8 \leqslant 10\}$ — истинное высказывание.

Итак, высказывание $A \vee B$ ложно только в том случае, если ложны оба высказывания A, B. Заметим, что операция $\vee$ не вполне точно описывается связкой «или», употребляющейся в обычной речи. В разговорной речи связка «или» чаще всего имеет разделительный оттенок, т. е. употребляется в смысле «либо-либо». Возьмем, например, фразу «Я уезжаю, но за рукописью зайдет моя жена или сын». Здесь, скорее всего, имеется в виду, что зайдет либо жена, либо сын; возможность, что они зайдут оба вместе, не предусматривается. Так дело обстоит в разговорной речи. В математической логике, напротив, операция $\vee$ не имеет разделительного смысла, т. е. $A \vee B$ означает, что либо имеет место A (но не B), либо имеет место B (но не A), либо же (и в этом отличие) имеют место A и B совместно. В устной речи операцию $\vee$ лучше называть дизъюнкцией, но можно также говорить «или», помня, однако, что это логическое «или» не имеет разделительного смысла.

5. Эквиваленция двух высказываний

Эквиваленцией высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \sim B$ (читается «A эквивалентно B»), которое истинно, если оба высказывания A и B истинны или оба ложны, и ложно, если одно из этих высказываний истинно, а другое ложно.

Например, если $A \equiv \{2 < 5\}$, $B \equiv \{3 < 8\}$, то $A \sim B$ — истинное высказывание, а если $A \equiv \{4 > 9\}$, $B \equiv \{7 > 5\}$, то $A \sim B$ — ложное высказывание.

Вместо слова «эквивалентно» используются также слова «в том и только в том случае», «тогда и только тогда».

6. Импликация

Импликацией высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \Rightarrow B$ (читается «если A, то B» или «из A следует B», «A влечет за собой B»), которое ложно лишь в том случае, когда A истинно, а B ложно.

Обратим внимание на то, что импликация не вполне соответствует обычному пониманию слова «следует», так как в случае, когда A — ложное высказывание, утверждение $A \Rightarrow B$ считается истинным при любом высказывании B. Другими словами, из неверного высказывания следует все, что угодно.

В частности, если $A \equiv \{2^2 = 5\}$, $B \equiv \{4^2 = 17\}$, то $A \Rightarrow B$ — истинное высказывание.

Пример 4. Даны два ложных высказывания: $A \equiv \{$число 3 — делитель числа 19$\}$, $B \equiv \{$27 — простое число$\}$. Выяснить смысл высказываний $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \sim B$, $A \Rightarrow B$ и установить, какие из них истинны, а какие ложны.

△ 1) $\overline{A} \equiv$ {число 3 не является делителем числа 19} — истинно;
2) $\overline{B} \equiv$ {27 — не простое (составное) число} — истинно;
3) $A \vee B \equiv$ {число 3 — делитель числа 19 или 27 — простое число} — ложно;
4) $A \wedge B \equiv$ {число 3 — делитель числа 19 и 27 — простое число} — ложно;
5) $A \sim B \equiv$ {число 3 — делитель числа 19 тогда и только тогда, когда 27 — простое число} — истинно;
6) $A \Rightarrow B \equiv$ {если число 3 — делитель числа 19, то 27 — простое число} — истинно. ▲

7. Алгебра высказываний

С помощью рассмотренных пяти логических операций можно, исходя из первоначального набора высказываний, строить новые, более сложные высказывания.

Истинность или ложность сложного высказывания можно установить, используя приведенную ниже сводную таблицу истинности логических операций. В этой таблице буква «И» означает, что соответствующее высказывание истинно, а буква «Л» — что оно ложно.

Таблица 1

A	$\overline{A}$	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \sim B$	$A \Rightarrow B$
И	Л	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	Л	И
Л	И	Л	Л	Л	И	И

Пример 5. Используя табл. 1, составить таблицы истинности для высказываний $\overline{A} \vee B$ и $\{A \Rightarrow B\} \sim \{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\}$.

△ 1)

Таблица 2

A	$\overline{A}$	B	$\overline{A} \vee B$
И	Л	И	И
И	Л	Л	Л
Л	И	И	И
Л	И	Л	И

Сравнивая таблицу истинности для $\overline{A} \vee B$ и таблицу истинности для $A \Rightarrow B$ (см. табл. 1), видим, что эти таблицы одинаковы. Такие высказывания называют *равносильными* и соединяют знаком равенства. Итак, $\{\overline{A} \vee B\} = \{A \Rightarrow B\}$.

2)

Таблица 3

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$	$\{A \Rightarrow B\} \sim \{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\}$
И	И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И

Из табл. 3 следует, что высказывание $\{A \Rightarrow B\} \sim \{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\}$ истинно при любом наборе значений истины и лжи для высказываний A и B. Такие высказывания называют *тождественно истинными* и обозначают буквой J. Итак, $\{\{A \Rightarrow B\} \sim \{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\}\} = J$.

Заметим, что этот результат следует из совпадения третьего и шестого столбцов табл. 3. Это совпадение означает, что высказывания $A \Rightarrow B$ и $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ равносильны. ▲

Равносильность высказываний можно устанавливать, используя приведенные ниже законы логических высказываний (они проверяются с помощью таблиц истинности), подобно тому как в элементарной алгебре в тождественных преобразованиях применяются законы коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и т. д.

Законы алгебры высказываний:

1) коммутативность: $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$;
2) ассоциативность: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$, $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$;
3) дистрибутивность: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
4) законы де Моргана: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$, $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

Кроме того, справедливы следующие равенства:

$$\overline{\overline{A}} = A, \qquad A \vee A = A, \qquad A \wedge A = A,$$
$$A \vee \overline{A} = J, \qquad A \vee J = J, \qquad A \wedge J = A.$$

Если L — тождественно ложное высказывание, то

$$A \vee L = A, \quad A \wedge \overline{A} = L, \quad A \wedge L = L, \quad \overline{J} = L, \quad \overline{L} = J.$$

Пример 6. Доказать законы де Моргана:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}, \tag{1}$$
$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}. \tag{2}$$

$\triangle$ Составим таблицу истинности для всех высказываний, фигурирующих в формулах (1) и (2):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
И	И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л	И
Л	Л	И	И	Л	И	Л	И	И	И

Сравнивая восьмой и девятый столбцы этой таблицы, получаем равносильность (1). Аналогично из сравнения шестого и десятого столбцов таблицы следует равносильность (2). ▲

Замечание. Приведенные законы алгебры высказываний описывают свойства дизъюнкции, конъюнкции и отрицания и ничего не говорят об остальных двух операциях — эквиваленции и импликации.

Это можно объяснить тем, что пять основных логических операций не являются независимыми (одни из них могут быть выражены через другие). В частности,

$$\{A \Rightarrow B\} \equiv \{\overline{A} \vee B\},$$
$$\{A \sim B\} \equiv \{(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})\}.$$

Первое из этих равенств было установлено в примере 5, второе можно получить, составив таблицы истинности обеих частей этого равенства.

Задачи

1. Сформулировать отрицания следующих высказываний:
   $A \equiv \{57$ — четное число$\}$;
   $B \equiv \{\sqrt{3}$ — рациональное число$\}$;
   $C \equiv \{\pi - 3{,}14$ — положительное число$\}$;
   $D \equiv \{$хотя бы одно из чисел 333 222, 112 делится на 37$\}$.
   Указать, какие из этих высказываний истинные, а какие ложные.
2. Даны два высказывания:
   $A \equiv \{$число 6 — делитель числа 132$\}$,
   $B \equiv \{49$ — простое число$\}$.
   Выяснить, какие из высказываний $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \wedge B$, $\overline{A \wedge B}$, $A \vee B$, $\overline{A \vee B}$, $\overline{A} \wedge \overline{B}$, $\overline{A} \vee \overline{B}$, $A \sim B$, $A \Rightarrow B$ истинны, а какие ложны.
3. По мишени произведено три выстрела. Пусть $A_k \equiv \{$мишень поражена при k-м выстреле$\}$, $k = 1, 2, 3$. Установить, что означают следующие высказывания:
   1) $A_1 \vee A_2 \vee A_3$;
   2) $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$;
   3) $(A_1 \wedge \overline{A}_2 \wedge \overline{A}_3) \vee (\overline{A}_1 \wedge A_2 \wedge \overline{A}_3) \vee (\overline{A}_1 \wedge \overline{A}_2 \wedge A_3)$;
   4) $(A_1 \wedge A_2) \vee (A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_3)$.
4. Доказать равносильность:
   1) $\{A \sim B\} = \{(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})\}$; 2) $\{A \sim B\} = \{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\}$;
   3) $(A \wedge B \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{A}) \vee (B \wedge A \wedge \overline{A}) = L$;
   4) $\overline{(A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge \overline{C})} = (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

Ответы

1. $\overline{A} \equiv \{57$ — нечетное число$\}$, $\overline{B} \equiv \{\sqrt{3}$ — иррациональное число$\}$, $\overline{C} \equiv \{\pi - 3{,}14$ — неположительное число (отрицательное или нуль)$\}$, $\overline{D} \equiv \{$ни одно из чисел 333 222, 112 не делится на 37$\}$. Высказывания C и D истинные, а высказывания A и B ложные. **2.** $\overline{A}$ — ложно, $\overline{B}$ — истинно, $A \wedge B$ — ложно, $\overline{A \wedge B}$ — истинно, $A \vee B$ — истинно, $\overline{A \vee B}$ — ложно, $\overline{A} \wedge \overline{B}$ — ложно, $\overline{A} \vee \overline{B}$ — истинно, $A \sim B$ — ложно, $A \Rightarrow B$ — ложно. **3.** 1) Есть хотя бы одно попадание; 2) все три выстрела попали в цель; 3) мишень поражена одним и только одним выстрелом; 4) есть по крайней мере два попадания.

§ 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ. ЗНАКИ ОБЩНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЯ

1. Неопределенные высказывания (предикаты) и операции над ними

Рассмотрим следующие утверждения:

$$A(x) \equiv \{x^2 = 4\}, \quad B(x) \equiv \{x < 5\}, \quad C(n) \equiv \{n \text{ — простое число}\},$$
$$\text{где } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Эти утверждения не являются высказываниями, так как их истинность или ложность можно установить только при подстановке вместо x или n конкретных числовых значений. Так, утверждение $A(x)$ является истинным при $x=2$ и $x=-2$ и ложным при других значениях x. Утверждение $B(x)$ истинно, например, при $x=4$ и ложно при $x=6$. Утверждение $C(n)$ истинно при $n=3$, $n=5$ и ложно при $n=4$, $n=9$ и т. д.

Такие утверждения называют *неопределенными высказываниями* или *предикатами*.

На предикаты естественным образом переносятся рассмотренные в § 1 определения логических операций. Будем считать, что предикаты определены на множестве M.

Отрицанием предиката $A(x)$, заданного на множестве M, называется предикат (он обозначается $\overline{A}(x)$), который определен на множестве M и обращается в истинное высказывание для тех и только тех элементов множества M, для которых $A(x)$ — ложное высказывание.

Для каждого предиката $A(x)$ множество M разбивается на два подмножества M_1 и M_2 ($M_1 \cup M_2 = M$): на M_1 предикат $A(x)$ является истинным высказыванием (это множество называют *множеством истинности* предиката $A(x)$), а на множестве M_2 предикат $A(x)$ — ложное высказывание (M_2 является множеством истинности предиката $\overline{A(x)}$).

Заметим, что множества M_1 и M_2 могут оказаться и пустыми. Например, множество истинности предиката $A(x) \equiv \{x^2 < 4\}$ — интервал $(-2; 2)$, а множество истинности предиката $A(x) \equiv \{x^2 - x + 1 = 0\}$, где $x \in \mathbb{R}$, пусто.

Дизъюнкцией предикатов $A(x)$ и $B(x)$ (она обозначается $A(x) \vee B(x)$) называется предикат, обращающийся в ложное высказывание для тех и только тех элементов множества M, для которых оба предиката $A(x)$ и $B(x)$ являются ложными высказываниями.

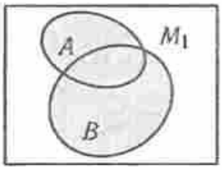


Рис. 1

Пусть A и B — множества истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$ соответственно. Тогда множество M_1 — множество истинности дизъюнкции $A(x) \vee B(x)$ — является объединением множеств A и B (на рис. 1 множество M_1 закрашено).

Пример 1. Рассмотрим следующие неопределенные высказывания, заданные на множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел:

$A(x) \equiv \{x$ — составное число$\}$,
$B(x) \equiv \{x$ — нечетное число$\}$.

Найти множество истинности предиката $A(x) \vee B(x)$.

Δ С помощью дизъюнкции мы получаем неопределенное высказывание $A(x) \vee B(x)$. Если a — четное число, большее двух, то высказывание $A(a) \vee B(a)$ истинно (поскольку a — составное число и, значит, $A(a)$ истинно); если a — нечетное число, то высказывание $A(a) \vee B(a)$ также истинно. Наконец, высказывание $A(2) \vee B(2)$ ложно: 2 не является ни составным, ни нечетным числом. Итак, высказывание $A(x) \vee B(x)$ истинно при $x \neq 2$ и ложно при $x = 2$, т. е. оно равносильно высказыванию

$$C(x) \equiv \{x \neq 2\}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. На множестве всевозможных четырехугольников Q с вершинами A, B, C, D рассмотрим следующие два неопределенных высказывания:

$M(Q) \equiv \{AB \parallel CD\}$,
$N(Q) \equiv \{AD \parallel BC\}$.

Что означает высказывание $M(Q) \vee N(Q)$?

$\triangle$ Высказывание $M(Q) \vee N(Q)$ означает, что стороны *хотя бы из одной* пары противоположных сторон четырехугольника параллельны друг другу, т. е. это высказывание равносильно следующему:

$P(Q) \equiv \{$четырехугольник Q — трапеция или параллелограмм$\}$. $\blacktriangle$

Конъюнкцией предикатов $A(x)$ и $B(x)$ (она обозначается $A(x) \wedge B(x)$) называется предикат, обращающийся в истинное высказывание для тех и только тех элементов множества M (на нем определены предикаты $A(x)$ и $B(x)$), для которых оба предиката являются истинными высказываниями.

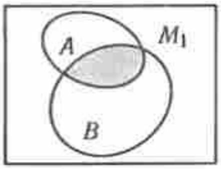


Рис. 2

На рис. 2 множество M_1 истинности предиката $A(x) \wedge B(x)$ отмечено закрашенной областью (A и B — множества истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$ соответственно).

Например, если $A(x) \equiv \{x^2 - x - 2 = 0\}$, $B(x) = \{x^2 - 1 = 0\}$, то множество истинности предиката $A(x) \wedge B(x)$ — число $x = -1$.

Пример 3. Пусть $M(Q)$ и $N(Q)$ — неопределенные высказывания, указанные в примере 2. Что означает высказывание $M(Q) \wedge N(Q)$?

$\triangle$ Высказывание $M(Q) \wedge N(Q)$ означает, что противоположные стороны четырехугольника Q попарно параллельны, т. е. это высказывание равносильно следующему:

$L(Q) \equiv \{$четырехугольник Q — параллелограмм$\}$. $\blacktriangle$

Замечание. Полученные в разд. 7 формулы для отрицаний конъюнкции и дизъюнкции двух высказываний (законы де Моргана) остаются в силе и для предикатов, т. е.

$$\overline{A(x) \wedge B(x)} = \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)},$$
$$\overline{A(x) \vee B(x)} = \overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}.$$

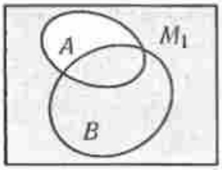


Рис. 3

Импликацией предикатов $A(x)$ и $B(x)$ (она обозначается $A(x) \Rightarrow B(x)$) называется предикат, обращающийся в ложное высказывание для тех и только тех элементов множества M, для которых $A(x)$ — истинное, а $B(x)$ — ложное высказывание (на рис. 3 множество M_1 истинности предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ закрашено).

Пример 4. Рассмотрим следующее хорошо известное утверждение: если произведение ab равно нулю, то хотя бы один из сомножителей a, b равен нулю.

Записать это утверждение логическими знаками.

△ Рассмотрим следующие неопределенные высказывания:

$M(a) \equiv \{a = 0\}$,
$N(a, b) \equiv \{ab = 0\}$.

Тогда сформулированное утверждение можно записать так:

$$N(a, b) \Rightarrow \{M(a) \vee M(b)\}.$$

Иначе говоря, для любых чисел a и b из того, что истинно высказывание $N(a, b)$ (т. е. $ab = 0$), вытекает, что справедливо хотя бы одно из двух высказываний $M(a)$, $M(b)$ (т. е. обращается в нуль хотя бы одно из чисел a, b). ▲

2. Знаки общности и существования

Если на множестве M задан предикат $A(x)$, то особый интерес представляет рассмотрение следующих утверждений:

1) неопределенное высказывание истинно *для всех* элементов множества M;

2) неопределенное высказывание $A(x)$ истинно *хотя бы для одного* элемента из множества M, т. е. существует элемент $x_0 \in M$ такой, что $A(x_0)$ — истинное высказывание.

В математике такие утверждения записывают кратко с помощью специальных знаков (*кванторов*): *знака общности* $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова *All* — все) и знака существования $\exists$ (перевернутая первая буква английского слова *Exists* — существует).

Знак $\forall$ заменяет слова: все, всякий, любой, каждый; знак $\exists$ заменяет слова: существует, найдется, хотя бы один.

Сформулированные выше утверждения 1 и 2 с помощью знаков $\forall$ и $\exists$ можно записать так:

1) $\forall x \in M \rightarrow A(x)$ или $(\forall x \in M)\ A(x)$; здесь знак «$\rightarrow$» заменяет слова «справедливо (высказывание)»
2) $\exists x_0 \in M\colon A(x_0)$ или $(\exists x_0 \in M)\ A(x_0)$; здесь знак «:» заменяет слова «такой, что».

Если перед неопределенным высказыванием стоит знак $\forall$ или знак $\exists$, то каждое такое утверждение либо истинно, либо ложно, и поэтому оно является высказыванием. Обратимся к примерам.

Пример 5. Пусть

$$A(\triangle) \equiv \left\{\text{в треугольнике } ABC \text{ угол } B \text{ равен } \frac{\pi}{6}\right\}$$

— предикат, заданный на множестве M всех треугольников $\triangle$, вершины которых мы обозначили буквами A, B, C.

Сформулировать утверждения $\forall \triangle \in M \to A(\triangle)$ и $\exists \triangle_0 \colon A(\triangle_0)$.

$\triangle$ 1) $\forall \triangle \in M \to A(\triangle) \equiv \left\{\text{во всяком треугольнике } ABC \text{ угол } B \text{ равен } \frac{\pi}{6}\right\}$ — ложное высказывание;

2) $\exists \triangle_0 \in M \colon A(\triangle_0) \equiv \left\{\text{существует треугольник } \triangle_0\text{, в котором угол } B \text{ равен } \frac{\pi}{6}\right\}$ — истинное высказывание. ▲

Пример 6. Пусть $A(p) \equiv \{p \text{ — нечетное число}\}$ — предикат, заданный на множестве M всех простых чисел.

Сформулировать утверждения $\forall p \in M \to A(p)$ и $\exists p_0 \in M \colon A(p_0)$.

$\triangle$ 1) $\forall p \in M \to A(p) \equiv \{\text{каждое простое число } p \text{ — нечетное}\}$ — ложное высказывание: число 2 является простым и четным;

2) $\exists p_0 \in M \colon A(p_0) \equiv \{\text{существует простое число } p_0\text{, являющееся нечетным}\}$ — истинное высказывание. ▲

Замечание. Чтобы убедиться в истинности высказывания $\forall x \in M \to A(x)$, необходимо убедиться в справедливости утверждения $A(x)$ для всех элементов множества M, на котором определен предикат $A(x)$. В том случае, когда множество M содержит конечное число элементов, можно попытаться для каждого из них убедиться в истинности утверждения $A(x)$ (это так называемый метод проб или метод перебора).

Чтобы доказать ложность высказывания $\forall x \in M \to A(x)$, достаточно указать *только один* элемент $x \in M$, для которого $A(x)$ ложно.

Пример 7. Пусть $A(x) \equiv \{\text{число } n^2+n+41 \text{ простое}\}$ — предикат, заданный на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Установить, истинно или ложно высказывание $\forall n \in \mathbb{N} \to A(n)$.

$\triangle$ Можно показать, что $A(n)$ — простое число для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что $n < 40$. Если $n = 40$, то $A(n) = 41^2$ — составное число. Следовательно, высказывание $\forall n \in \mathbb{N} \to A(n)$ ложно. ▲

Пример 8. Пусть $A(n) \equiv \{$число $n^3 + 5n$ делится на $6\}$ — неопределенное высказывание, заданное на множестве $\mathbb{N}$. Выяснить, истинно или ложно высказывание $\forall n \in \mathbb{N} \to A(n)$.

$\triangle$ Легко проверить, что высказывания $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$ истинны. Тот же результат будет получаться, если мы будем продолжать проверку дальше. Но проверкой для отдельных значений n мы не можем установить истинность высказывания $\forall n \in \mathbb{N} \to A(n)$.

Доказательство истинности высказывания $\forall n \in \mathbb{N}$ можно провести, например, следующим образом. Мы имеем

$$n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = n(n^2 - 1) + 6n = (n-1)n(n+1) + 6n.$$

Но из трех последовательных чисел $n-1$, n, $n+1$ обязательно одно делится на 3 и одно или два делятся на 2. Следовательно, произведение их делится на 6. Таким образом, и сумма $(n-1)n(n+1) + 6n = n^3 + 5n$ при любом натуральном n делится на 6. Но это и означает истинность высказывания $\forall n \in \mathbb{N} \to A(n)$. $\blacktriangle$

Пример 9. Пусть $A(n) \equiv \{n^3 - 14n^2 + 49n - 1 < 0\}$ — неопределенное высказывание, заданное на множестве $\mathbb{N}$. Установить, истинно или ложно высказывание $\exists n \in \mathbb{N}\colon A(n)$.

$\triangle$ Пусть $f(n) = n^3 - 14n^2 + 49n - 1$, тогда $f(1) = 35$, $f(2) = 49$, $f(3) = 47$, $f(4) = 35$. Поэтому высказывание $A(n)$ ложно при $n = 1, 2, 3, 4$.

Отсюда, однако, не следует, что высказывание $\{\exists n \in \mathbb{N}\colon A(n)\}$ ложно, т. е. что не найдется натурального n, для которого высказывание $A(n)$ истинно.

Вычислив $f(n)$ при $n = 5, 6, 7$, получаем $f(5) = 19$, $f(6) = 5$, $f(7) = -1$. Следовательно, высказывание $A(7)$ истинно и поэтому истинным является высказывание $\exists n \in \mathbb{N}\colon A(n)$.

Заметим, что метод проб является далеко не наилучшим для проверки истинности высказывания $\exists n \in \mathbb{N}\colon A(n)$, где $A(n)$ — некоторое неопределенное высказывание. Ведь «благоприятное» значение n (для которого $A(n)$ истинно) может встретиться где-то очень далеко от начальных значений, и нахождение этого n методом проб будет мучительной работой. А может случиться, что высказывание $A(n)$ ложно для всех n, и тогда метод проб вообще ни к чему не приведет. Поэтому более предпочтительным является общее рассуждение. Например, в рассматриваемом случае можно было рассуждать так:

$$f(n) = n^3 - 14n^2 + 49n - 1 = n(n^2 - 14n + 49) - 1 = n(n-7)^2 - 1.$$

Отсюда видно, что при $n = 7$ многочлен $f(n)$ принимает значение -1.

Итак, высказывание $A(7)$ истинно, а потому истинно и высказывание $\exists n \in \mathbb{N}\colon A(n)$. $\blacktriangle$

Пример 10. Пусть $A(n) \equiv \{$число n^2+2n+3 делится на $7\}$. Выяснить, истинно ли высказывание $\exists n \in \mathbb{N}\colon A(n)$.

$\triangle$ Пусть $f(n)=n^2+2n+3$, тогда $f(1)=6$, $f(2)=11$, $f(3)=18$, $f(4)=27$, и поэтому высказывания $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ ложны.

Легко проверить таким же образом, что ложны и высказывания $A(5)$, $A(6)$, $A(7)$, $A(8)$, $A(9)$, $A(10)$. Возникает гипотеза (т. е. предположение), что $A(n)$ ложно для любого n, т. е. что высказывание $\exists n \in \mathbb{N}\colon A(n)$ ложно. Однако доказать это методом проб невозможно, это можно установить только с помощью общего рассуждения. Вот как можно провести это рассуждение.

Всякое натуральное число n можно записать в виде $n=7k+q$, где q принимает одно из значений 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Здесь k — частное от деления числа n на 7, а q — остаток. Подставив это представление числа n в многочлен, получим

$$\begin{aligned} f(n) = n^2+2n+3 &= (7k+q)^2+2(7k+q)+3 = \\ &= (49k^2+14kq+14k)+(q^2+2q+3) = \\ &= 7(7k^2+2kq+2k)+q^2+2q+3. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что число n^2+2n+3 имеет тот же остаток от деления на 7, что и число q^2+2q+3 (так как их разность делится на 7). Значит, число n^2+2n+3 в том и только том случае делится на 7, если на 7 делится число q^2+2q+3, где q — остаток от деления числа n на 7. Но q может принимать лишь 7 значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вычисляя значения многочлена q^2+2q+3 при этих значениях q, мы получаем числа 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51. Ни одно из этих чисел не делится на 7. Значит, ни при каком натуральном n число n^2+2n+3 не делится на 7, т. е. при любом натуральном n высказывание $A(n)$ ложно. Тем самым доказано, что $\{\exists n \in \mathbb{N}\colon A(n)\}$ — ложное высказывание. $\blacktriangle$

3. Построение отрицаний высказываний, содержащих знаки общности и существования

Пример 11. Сформулировать отрицания утверждений $\forall p \in M \to A(p)$ и $\exists p_0 \in M\colon A(p_0)$, указанных в примере 6.

$\triangle$ 1) Отрицание первого из этих утверждений можно получить двумя способами:

$\overline{\forall p \in M \to A(p)} \equiv \{$не каждое простое число является нечетным$\} \equiv$

$\equiv \{$существует (найдется) простое число, которое является четным$\}$.

2) Аналогично

$$\overline{\exists p_0 \in M\colon A(p_0)} \equiv \{\text{не существует простого нечетного числа}\} \equiv$$
$$\equiv \{\text{все простые числа являются четными}\}. \quad \blacktriangle$$

Сформулируем правила построения отрицаний для высказываний, содержащих знаки общности и существования.

Пусть $A(x)$ — некоторое неопределенное высказывание, заданное на множестве M. Тогда высказывание $\forall x \in M \to A(x)$ означает, что для любого $x \in M$ имеет место $A(x)$, а высказывание $\exists x_0 \in M\colon A(x_0)$ означает, что найдется элемент $x_0 \in M$, для которого имеет место $A(x_0)$.

1°. Отрицание высказывания $\forall x \in M \to A(x)$ можно образовать двумя способами:

1) можно поставить знак отрицания (черту) над всем высказыванием:

$$\overline{\forall x \in M \to A(x)};$$

2) можно записать отрицание высказывания $\forall x \in M \to A(x)$ в виде

$$\exists x_0 \in M\colon \overline{A(x_0)},$$

т. е. заменить знак общности на знак существования $\exists$, а высказывание $A(x)$ — на его отрицание $\overline{A(x)}$ (и знак «$\to$» знаком «: »). Это означает, что в множестве M найдется (хотя бы один) элемент x_0, для которого не выполняется $A(x)$.

2°. Отрицание высказывания $\exists x_0 \in M\colon A(x_0)$ также можно образовать двумя способами:

1) можно поставить знак отрицания над всем высказыванием:

$$\overline{\exists x_0 \in M\colon A(x_0)};$$

2) можно записать отрицание в виде

$$\forall x \in M \to \overline{A(x)},$$

т. е. заменить знак $\exists$ на знак $\forall$, а высказывание $A(x)$ — на его отрицание (и знак «: » знаком «$\to$»).

Итак, для построения отрицания вторым способом (его называют позитивным) для высказываний, содержащих знак $\forall$ или знак $\exists$, следует знак общности заменить знаком существования, а знак существования — знаком общности и, кроме того, заменить высказывание $A(x)$ на его отрицание $\overline{A(x)}$ (а также поменять «: » на «$\to$» и наоборот).

Равносильность двух способов построения отрицания следует из равенств

$$\overline{\forall x \in M \to A(x)} = \exists x_0 \in M: \overline{A(x_0)}, \qquad (1)$$

$$\overline{\exists x_0 \in M: A(x_0)} = \forall x \in M \to \overline{A(x)}. \qquad (2)$$

Равенство (1) означает, что $A(x)$ истинно не для всех $x \in M$ тогда и только тогда, когда существует $x_0 \in M$, для которого $A(x_0)$ ложно.

Равенство (2) означает, что не существует $x_0 \in M$, для которого $A(x_0)$ истинно, тогда и только тогда, когда $A(x)$ ложно для всех $x \in M$.

Пример 12. Пусть задано числовое множество X и число q. Записать с помощью кванторов высказывание A и его отрицание, если

$A \equiv$ {все элементы x множества X удовлетворяют условию $x < q$}.

Δ Здесь $A \equiv \{\forall x \in X \to x < q\}$. Знак «$\to$» при этом заменяет слова «выполняется (неравенство)». Пусть A не имеет места, т. е. *не все* элементы x множества X удовлетворяют условию. Это означает, что найдется (существует) такой элемент $x_0 \in X$, для которого неравенство $x < q$ не выполняется, т. е. справедливо противоположное неравенство $x_0 \geqslant q$. Запишем $\overline{A}$ с помощью кванторов:

$\overline{A} \equiv \{\exists x_0 \in X: x_0 \geqslant q\}$. ▲

Пример 13. Пусть X — числовое множество. Рассмотрим высказывание

$A \equiv$ {существует число $q > 0$ такое, что все элементы x из множества X удовлетворяют условию $|x| \geqslant q$}.

Записать с помощью кванторов высказывания A и $\overline{A}$.

Δ Здесь $A \equiv \{\exists q > 0: \forall x \in X \to |x| \geqslant q\}$.

Пусть A не выполняется, т. е. не существует числа $q > 0$ такого, чтобы для любого $x \in X$ имело место неравенство $|x| \geqslant q$. Это означает, что для любого $q > 0$ неравенство $|x| \geqslant q$ не может выполняться для каждого $x \in X$. Иначе говоря, существует такой элемент $x = x_q \in X$ (он зависит, вообще говоря, от q), для которого неравенство $|x| \geqslant q$ не выполняется, т. е. справедливо неравенство $|x_q| < q$. Запишем $\overline{A}$ с помощью кванторов:

$\overline{A} \equiv \{\forall q > 0 \quad \exists x_q \in X: |x_q| < q\}$. ▲

Примеры 12 и 13 показывают, что

Отрицание утверждения A, содержащего кванторы $\forall$, $\exists$ и свойство P (в данных примерах это неравенства $x < M$ и $|x| \geqslant M$), получается из A заменой в нем $\forall$ на $\exists$, $\exists$ на $\forall$ и свойства P — на его отрицание.

Задачи

1. На множестве M, состоящем из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, задано неопределенное высказывание

$A(x) \equiv \{x$ — нечетное число$\}$.

Выяснить, какие из высказываний $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$, $A(6)$, $A(7)$ являются истинными, а какие ложными.

2. На множестве M, состоящем из чисел 1, 2, ..., 10, задано неопределенное высказывание

$B(x) \equiv \{x$ является делителем числа $60\}$.

Выяснить, какие из высказываний $B(1)$, $B(2)$, $B(3)$, $B(4)$, $B(5)$, $B(6)$, $B(7)$, $B(8)$, $B(9)$, $B(10)$ являются истинными, а какие ложными.

3. На множестве M, состоящем из чисел 3, 4, 5, 6, 7, 8, задано два неопределенных высказывания

$K(x) \equiv \{x$ — простое число$\}$,
$L(x) \equiv \{x$ — нечетное число$\}$.

Выяснить: совпадают ли эти высказывания на множестве M и на множестве, состоящем из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

4. Сформулировать отрицания следующих высказываний:

$A \equiv \{$при каждом $a > 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет действительный корень$\}$,
$B \equiv \{$при любом действительном a уравнение $x^2 = a$ имеет действительный корень$\}$,
$C \equiv \{$существует квадратное уравнение, не имеющее действительных корней$\}$,
$D \equiv \{$каждые два треугольника подобны между собой$\}$,
$E \equiv \{$хотя бы одно из произвольных двух чисел a, b делится на $3\}$.

Установить, какие из высказываний A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, C, $\overline{C}$, D, $\overline{D}$, E, $\overline{E}$ истинны, а какие ложны.

5. Рассмотрим три неопределенных высказывания, заданные на множестве $\mathbb{R}$:

$A(x) \equiv \{x$ — целое число$\}$,
$B(x) \equiv \{x^2 - 3x$ — целое неотрицательное число$\}$,
$C(x) \equiv \{x + \frac{1}{x}$ — целое положительное число$\}$.

Найти все значения x, при которых одно и только одно из этих высказываний является ложным.

6. Рассмотрим четыре неопределенных высказывания, заданных на множестве всех упорядоченных пар натуральных чисел m, n:

$A(m,n) \equiv \{m+1$ делится на $n\}$,
$B(m,n) \equiv \{m = 2n + 5\}$,
$C(m,n) \equiv \{m + n$ делится на $3\}$,
$D(m,n) \equiv \{m + 7n$ — простое число$\}$.

Найти все пары чисел (m,n), для которых одно и только одно из этих четырех высказываний ложно.

7. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X. Тогда эта функция называется *ограниченной на множестве* X, если существует число $C>0$ такое, что для всех $x \in X$ справедливо неравенство $|f(x)|<C$. Используя логические символы $\forall$, $\exists$, сформулировать (в позитивном смысле) утверждение: функция $f(x)$ является неограниченной на множестве X.
8. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *строго возрастающей на этом отрезке*, если для любых точек x_1, x_2 из этого отрезка таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. Используя логические символы, сформулировать утверждение: функция $f(x)$ не является строго возрастающей на отрезке $[a, b]$.

Ответы

1. Высказывания $A(1)$, $A(3)$, $A(5)$, $A(7)$ истинны, а высказывания $A(2)$, $A(4)$, $A(6)$ ложны. **2.** Высказывания $B(1)$, $B(2)$, $B(3)$, $B(4)$, $B(5)$, $B(6)$ истинны, остальные высказывания ложны. **3.** На множестве M совпадают, а на множестве M_1 нет. **4.** $\overline{A} \equiv$ {существует (хотя бы одно) $a>0$, при котором уравнение $x^2=a$ не имеет действительных корней}, A истинно, $\overline{A}$ ложно; $\overline{B} \equiv$ {существует действительное число a, для которого уравнение $x^2=a$ не имеет действительных корней}, B ложно, $\overline{B}$ истинно; $\overline{C} \equiv$ {корни любого квадратного уравнения действительны}, C истинно, $\overline{C}$ ложно; $\overline{D} \equiv$ {существуют два треугольника, которые не являются подобными между собой}, D ложно, $\overline{D}$ истинно; $\overline{E} \equiv$ {существуют два числа a, b, ни одно из которых не делится на 3}, E ложно, $\overline{E}$ истинно. **5.** При $x=2$ и при $x=\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **6.** (9;2) и (17;6). **7.** {Функция $f(x)$ не ограничена на множестве X} $\equiv \{\forall C>0 \ \exists x_C \in X\colon \ |f(x_C)| \geqslant C\}$. **8.** {Функция $f(x)$ не является строго возрастающей на отрезке $[a; b]$} $\equiv \{\exists \tilde{x}_1 \in [a, b] \ \exists \tilde{x}_2 \in [a, b]\colon \tilde{x}_1<\tilde{x}_2$ и $f(\tilde{x}_1) \geqslant f(\tilde{x}_2)\}$.

§3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1. Необходимые условия. Достаточные условия

В каждой теореме, как правило, можно выделить условие и заключение, которые являются некоторыми неопределенными высказываниями $A(x)$ и $B(x)$, так, что с использованием логических операций и кванторов формулировку теоремы можно записать в виде

$$\forall x \ \{A(x) \Rightarrow B(x)\}, \quad x \in M.$$

Обратимся к примерам.

Рассмотрим теорему: «Во всяком треугольнике против равных сторон лежат равные углы». Здесь речь идет о двух неопределенных высказываниях

$A(\triangle) \equiv$ {в треугольнике ABC стороны AB и BC равны},
$B(\triangle) \equiv$ {в треугольнике ABC угол A равен углу C},

заданных на множестве всех треугольников.

Теорема утверждает, что для *любого* треугольника из истинности $A(\triangle)$ следует истинность $B(\triangle)$, т. е.

$$\forall \triangle \{A(\triangle) \Rightarrow B(\triangle)\}.$$

Здесь $A(\triangle)$ — условие теоремы, $B(\triangle)$ — ее заключение.

Рассмотрим теорему Пифагора. Для произвольного треугольника $\triangle$ обозначим через A, B, C его вершины, а через a, b, c — противолежащие им стороны. Положим

$$A(\triangle) \equiv \left\{\angle C = \frac{\pi}{2}\right\},$$
$$B(\triangle) \equiv \{c^2 = a^2 + b^2\}.$$

Теорема Пифагора утверждает, что

$$\forall \triangle \{A(\triangle) \Rightarrow B(\triangle)\},$$

т. е. в любом треугольнике, для которого истинно $A(\triangle)$, истинно и $B(\triangle)$.

Рассмотрим еще одну теорему: диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Условие этой теоремы — $A(Q) \equiv$ {четырехугольник Q с вершинами A, B, C, D — ромб, т. е. $AB = BC = CD = DA$}, а заключение — $B(Q) \equiv$ {диагонали четырехугольника Q взаимно перпендикулярны, т. е. $AC \perp BD$}.

Эта теорема означает, что

$$\forall Q \{A(Q) \Rightarrow B(Q)\},$$

т. е. для любого четырехугольника верно утверждение: если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

Пусть справедлива теорема, в которой условием и заключением являются высказывания A и B соответственно, тогда эту теорему кратко выражают в виде $A \Rightarrow B$, или, в более полной записи, в виде

$$\forall x \{A(x) \Rightarrow B(x)\}.$$

Теорему $A \Rightarrow B$ также выражают одной из следующих формулировок:

B — *необходимое условие* для A,
A — *достаточное условие* для B.

Всякое высказывание, которое следует из A, называют *необходимым условием* для A, а всякое высказывание, из которого следует A, называется *достаточным условием* для A.

Теорему $A \Rightarrow B$ можно выразить каждой из следующих формулировок:

B является необходимым условием для A;
A может иметь место только в том случае, если справедливо B.

Пример 1. Рассмотрим высказывания:

$A(x) \equiv$ {натуральное число x делится на 4},
$B(x) \equiv$ {последняя цифра числа x четна}.

Выяснить, верны ли теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

$\triangle$ Теорема $A \Rightarrow B$ верна, так как B — необходимое условие для A (для делимости числа x на 4 необходимо, чтобы его последняя цифра была четной); та же теорема $A \Rightarrow B$ означает, что A — достаточное условие для B (для четности числа x достаточно, чтобы оно делилось на 4).

В данном случае достаточное условие A содержит больше требований, чем нужно для справедливости высказывания B (например, 26 не делится на 4, хотя его последняя цифра — четная).

Теорема $B \Rightarrow A$ неверна (из четности последней цифры числа x не следует, что это число делится на 4). ▲

Пример 2. Рассмотрим неопределенные высказывания:

$A(a, b) \equiv$ {каждое из натуральных чисел a, b делится на 3},
$B(a, b) \equiv$ {сумма $a + b$ делится на 3}.

Выяснить, верны ли теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

$\triangle$ Здесь заключение $A \Rightarrow B$ справедливо, т. е. A есть достаточное условие для B, а B есть необходимое условие для A. Иными словами,

для делимости суммы $a + b$ на 3 достаточно, чтобы каждое из слагаемых a, b делилось на 3;
для того чтобы каждое из слагаемых делилось на 3, необходимо, чтобы сумма делилась на 3.

Теорема $B \Rightarrow A$ неверна: из делимости суммы $a + b$ на 3 не следует, что каждое из чисел a, b делится на 3 (сумма чисел 2 и 4 делится на 3, а каждое из чисел 2 и 4 не делится на 3). ▲

Замечание. Рассмотрим следующие неопределенные высказывания:

$A(Q) \equiv$ {четырехугольник Q — параллелограмм},
$B(Q) \equiv$ {диагонали четырехугольника Q перпендикулярны},

заданные на множестве всех четырехугольников Q.

Тогда запись $A(Q) \Rightarrow B(Q)$ есть неопределенное высказывание, а запись

$$\exists Q\colon A(Q) \Rightarrow B(Q) \tag{1}$$

означает, что существует параллелограмм с перпендикулярными диагоналями (ромб) — это истинное высказывание. Заменив в последней записи знак $\exists$ на знак $\forall$, получим ложное высказывание

$$\forall Q\ \{A(Q) \Rightarrow B(Q)\}, \tag{2}$$

так как диагонали *любого* параллелограмма не являются перпендикулярными, хотя существуют параллелограммы с перпендикулярными диагоналями.

Таким образом, формулируя теорему вида (1) или (2), надо отдавать себе отчет в том, о какой теореме идет речь (знаки $\exists$ и $\forall$ меняют смысл теоремы).

2. Обратная и противоположная теоремы. Необходимые и достаточные условия

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — неопределенные высказывания, заданные на множестве M. Тогда высказывания

$$\forall x \in M \quad \{A(x) \Rightarrow B(x)\}, \tag{3}$$

$$\forall x \in M \quad \{B(x) \Rightarrow A(x)\} \tag{4}$$

могут оказаться либо истинными, либо ложными. Каждое из них выражает некоторую теорему, эти теоремы называют *обратными друг другу*.

Иногда одну из них называют *прямой*, а другую — *обратной*. Из этого определения следует, что, поменяв местами в формулировке некоторой теоремы условие и заключение (оставив при этом без изменения разъяснительную часть), получим формулировку теоремы, обратной исходной.

Из двух взаимно обратных теорем либо обе верны, либо только одна верна, либо обе неверны. Обратимся к примерам.

Пример 3. Рассмотрим неопределенные высказывания

$A(Q) \equiv$ {четырехугольник Q — ромб},
$B(Q) \equiv$ {диагонали четырехугольника Q взаимно перпендикулярны},

заданные на множестве всех четырехугольников Q.
Выяснить, верны ли теоремы

$$\forall Q \in M \quad \{A(Q) \Rightarrow B(Q)\}, \tag{5}$$

$$\forall Q \in M \quad \{B(Q) \Rightarrow A(Q)\}. \tag{6}$$

$\triangle$ Теорему (5) можно сформулировать так: если четырехугольник Q является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Эта теорема верна. Теорема (6) имеет следующий вид: если диагонали четырехугольника (любого) взаимно перпендикулярны, то он является ромбом. Эта теорема неверна. $\blacktriangle$

Пример 4. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ рассматриваются неопределенные высказывания:

$A(n) \equiv$ {натуральное число $n > 9$ делится на 4},
$B(n) \equiv$ {двузначное число, выраженное последними двумя цифрами числа n, делится на 4}.

Выяснить, верны ли теоремы ($n > 9$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{A(n) \Rightarrow B(n)\}, \tag{7}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{B(n) \Rightarrow A(n)\}. \tag{8}$$

△ Теорема (7) имеет следующую формулировку: если натуральное число $n > 9$ делится на 4, то двузначное число, выраженное последними двумя цифрами числа n, также делится на 4.

Теорему (8) можно сформулировать так: если двузначное число, выраженное последними двумя цифрами числа n, делится на 4, то и само число n делится на 4.

Обе эти теоремы верны. ▲

Таким образом, иногда из двух взаимно обратных теорем (3) и (4) верна только одна (пример 3), иногда же (пример 4) верны обе. Конечно, могут оказаться неверными обе эти теоремы (этот случай не представляет интереса).

Будем записывать коротко теоремы (3) и (4) в виде $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Пусть справедливы обе эти теоремы (прямая и обратная). Тогда пишут

$$A \Longleftrightarrow B \tag{9}$$

и говорят, что каждое из высказываний A и B является *необходимым и достаточным условием* для другого.

Для утверждения (9) используются также следующие формулировки:

для справедливости A необходимо и достаточно, чтобы имело место B;

A имеет место в том и только в том случае, если выполняется B;

A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо B.

Все эти формулировки выражают один и тот же факт $A \Longleftrightarrow B$, и в каждой из них высказывания A и B можно поменять местами. Иными словами, если A есть необходимое и достаточное условие для B, то и B есть необходимое и достаточное условие для A.

Так, полученное в примере 4 утверждение можно сформулировать следующим образом:

для делимости числа $n > 9$ на 4 необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 двузначное число, выраженное последними двумя цифрами числа n.

Замечание. Термин «достаточное условие» часто заменяют словом «признак». Так, вместо того чтобы сказать «достаточное условие», иногда говорят «признак».

Признаки равенства треугольников — это тоже признаки в этом смысле, причем эти признаки также являются необходимыми и достаточными. Например, возьмем третий признак. То, что для равенства двух треугольников *необходимо* равенство соответственных сторон, ясно из самого определения понятия равенства треугольников. *Достаточность* этого условия как раз и доказывается в рассматриваемой теореме. Иными словами, третий признак доказывается в школе как достаточное условие равенства треугольников, но необходимость этого условия также очевидна. Итак, третий признак есть необходимое и достаточное условие равенства треугольников.

Перейдем к понятию противоположной теоремы.

Теоремы

$$\forall x \in M \quad \{A(x) \Rightarrow B(x)\}, \tag{10}$$

$$\forall x \in M \quad \{\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}\} \tag{11}$$

называются *взаимно противоположными*.

Таким образом, формулировку теоремы (11), противоположной теореме (10), можно получить, заменив условие и заключение исходной теоремы (10) их отрицаниями.

Пример 5. Пусть на множестве M всех многоугольников Q заданы предикаты

$A(Q) \equiv$ {многоугольник Q — четырехугольник},
$B(Q) \equiv$ {сумма внутренних углов многоугольника Q равна 2π}.

Рассмотрим теорему

$$\forall Q \in M \quad \{A(Q) \Rightarrow B(x)\}. \tag{12}$$

Сформулировать теорему, противоположную теореме (12).

$\triangle$ Противоположную к (12) теорему

$$\forall Q \in M \quad \{\overline{A(Q)} \Rightarrow \overline{B(Q)}\}$$

можно сформулировать так: если многоугольник Q не является четырехугольником, то сумма его внутренних углов не равна 2π. Эта теорема верна. $\blacktriangle$

Заметим, что всякая теорема (10) порождает не только противоположную теорему (11), но также обратную теорему

$$\forall x \in M \quad \{B(x) \Rightarrow A(x)\} \tag{13}$$

и теорему, противоположную обратной:

$$\forall x \in M \quad \{\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}\}. \tag{14}$$

Пример 6. Сформулировать теорему, противоположную к теореме (5) (пример 3), и теорему, противоположную обратной теореме (6).

$\triangle$ Противоположная теорема

$$\forall Q \in M \quad \{\overline{A(Q)} \Rightarrow \overline{B(Q)}\}$$

означает, что если произвольный четырехугольник Q не ромб, то его диагонали не перпендикулярны (эта теорема неверна).

Теорема, противоположная обратной:

$$\forall Q \in M \quad \{\overline{B(Q)} \Rightarrow \overline{A(Q)}\},$$

формулируется так: если диагонали произвольного четырехугольника не перпендикулярны друг другу, то этот четырехугольник не является ромбом (эта теорема верна). ▲

В примерах 3 и 6 прямая теорема и противоположная обратной оказались истинными, а обратная и противоположная — ложными. Это не случайное совпадение. Справедливо следующее утверждение:

прямая теорема и теорема, противоположная обратной, либо обе истинны, либо обе ложны, т. е. имеет место равносильность

$$\{\forall x \in M \quad A(x) \Rightarrow B(x)\} = \{\forall x \in M \quad \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}\}.$$

Этот факт лежит в основе так называемого метода доказательства «от противного»: вместо теоремы $\{\forall x \in M\ A(x) \Rightarrow B(x)\}$ доказывают теорему $\{\forall x \in M\ \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}\}$, противоположную обратной.

Метод доказательства от противного обычно применяют в следующей форме: для доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ предполагают истинным высказывание $\overline{B}$ и пытаются вывести отсюда справедливость высказывания $\overline{A}$. Если это удается (т. е. если доказана теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, противоположная обратной), то исходная теорема $A \Rightarrow B$ также считается доказанной. Примеры доказательства от противного в большом числе имеются в школьных учебниках геометрии.

Пример 7. Пусть квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, принимает положительные значения при всех $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что $D = b^2 - 4ac < 0$.

△ Предположим, что условие $D < 0$ не выполняется, тогда $D \geqslant 0$. В этом случае $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (нули функции $y = ax^2 + bx + c$), откуда следует, что $y = 0$ при $x = x_1$ и $x = x_2$ ($x_1 = x_2$ при $D = 0$). Это противоречит тому, что $y > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $D < 0$. ▲

3. Принцип полной дизъюнкции

Теорема. *Пусть $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$ и $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$ — неопределенные высказывания, заданные на некотором множестве M и обладающие следующими тремя свойствами:*

1) *всегда (т. е. для любого элемента x множества M) имеет место хотя бы одно из высказываний $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$;*
2) *справедливы теоремы $A_1(x) \Rightarrow B_1(x)$, $A_2(x) \Rightarrow B_2(x)$, ..., $A_n(x) \Rightarrow B_n(x)$;*
3) *высказывания $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$ взаимно исключают друг друга, т. е. (для произвольно взятого элемента x) если одно из них истинно, то все остальные обязательно ложны.*

Тогда все обратные теоремы $B_1(x) \Rightarrow A_1(x)$, $B_2(x) \Rightarrow A_2(x)$, ..., $B_n(x) \Rightarrow A_n(x)$ *также справедливы.*

○ В самом деле, пусть высказывание $B_1(x)$ истинно. Высказывание $A_2(x)$ при этом не может быть истинным, так как иначе в силу 2 было бы истинным и $B_2(x)$, а это в силу 3 невозможно. Так же показывается, что не могут быть истинными высказывания $A_3(x)$, ..., $A_n(x)$. Но если все высказывания $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$ ложны, то в силу 1 должно быть истинным высказывание $A_1(x)$. Итак, если истинно $B_1(x)$, то истинно и $A_1(x)$, т. е. имеет место теорема $B_1(x) \Rightarrow A_1(x)$. Так же доказывается и справедливость теорем $B_2(x) \Rightarrow A_2(x)$, ..., $B_n(x) \Rightarrow A_n(x)$.

Заметим еще, что при указанных в теореме условиях всегда имеет место хотя бы одно из высказываний $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$, а высказывания $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$ взаимно исключают друг друга. ●

Эта теорема носит название *принципа полной дизъюнкции.*

Обратимся к примерам.

Пример 8. Рассмотрим следующие неопределенные высказывания (заданные на множестве T всех треугольников):

$A_1 \equiv \{$угол A — острый$\}$,
$A_2 \equiv \{$угол A — прямой$\}$,
$A_3 \equiv \{$угол A — тупой$\}$,
$B_1 \equiv \{a^2 < b^2 + c^2\}$,
$B_2 \equiv \{a^2 = b^2 + c^2\}$,
$B_3 \equiv \{a^2 > b^2 + c^2\}$.

Доказать, что $B_1 \Rightarrow A_1$, $B_2 \Rightarrow A_2$, $B_3 \Rightarrow A_3$.

△ Из теоремы косинусов следует, что

$$A_1 \Rightarrow B_1, \quad A_2 \Rightarrow B_2, \quad A_3 \Rightarrow B_3.$$

Все условия, указанные в приведенной выше теореме, выполняются, и поэтому, согласно принципу полной дизъюнкции, верны обратные теоремы. В частности, теорема $B_1 \Rightarrow A_1$ утверждает, что если квадрат некоторой стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других сторон, то угол, лежащий против этой стороны, — острый. ▲

Пример 9. Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \tag{15}$$

с действительными коэффициентами и обозначим через D его дискриминант: $D = b^2 - 4ac$. Рассмотрим, далее, следующие неопределенные высказывания (заданные на множестве всех уравнений вида (15)):

$A_1 \equiv \{D > 0\}$,
$A_2 \equiv \{D < 0\}$,

$A_3 \equiv \{D=0\}$,
$B_1 \equiv$ {корни уравнения (15) действительны и различны},
$B_2 \equiv$ {уравнение (15) не имеет действительных корней},
$B_3 \equiv$ {уравнение (15) имеет один корень (кратности два)}.
Доказать, что $B_1 \Rightarrow A_1$, $B_2 \Rightarrow A_2$, $B_3 \Rightarrow A_3$.

△ И здесь, как легко видеть, выполняются условия, указанные в приведенной выше теореме. Следовательно, верны не только прямые теоремы $A_1 \Rightarrow B_1$, $A_2 \Rightarrow B_2$, $A_3 \Rightarrow B_3$, но и обратные: $B_1 \Rightarrow A_1$, $B_2 \Rightarrow A_2$, $B_3 \Rightarrow A_3$. Например, первая из этих обратных теорем гласит: если корни уравнения (15) действительны и различны, то $D > 0$. ▲

4. Метод математической индукции

Индукция (лат. *inductio* — наведение) — переход от частного к общему; дедукция (лат. *deductio* — вывод) — переход от общего к частному.

Метод математической индукции применяется в различных областях математики (арифметике, алгебре и теории чисел, в математическом анализе, геометрии и т. д.) для доказательства формул, неравенств, теорем и, в общем случае, для доказательства истинности некоторого утверждения, зависящего от $n \in \mathbb{N}$, для всех значений $n \geqslant n_0$.

Утверждение может быть истинным в целом ряде частных случаев и в то же время ложным в общем случае. Приведем примеры.

Пример 10. П. Ферма в XVII в. предполагал, что все числа вида $2^{2^n}+1$ — простые. Так, для $n=1, 2, 3, 4$ получается: $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$. Однако Л. Эйлер в XVIII в. показал, что число $2^{2^5}+1=4294967297$ делится на 641.

Пример 11. Г. В. Лейбниц в XVII в. проверив, что n^3-n делится на 3, n^5-n делится на 5, n^7-n делится на 7, предположил, что число n^k-n делится на k, если k — нечетно. Однако сам скоро заметил, что n^9-n не при всех $n \in \mathbb{N}$ делится на 9. В общем случае имеет место теорема:

число вида n^p-n делится на p, если p — простое.

Метод математической индукции позволяет в поисках общего закона проверить возникающие при этом гипотезы, отбрасывать ложные и формулировать истинные.

Пусть $A(n)$ — предикат, заданный на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Нужно установить, является ли истинным высказывание $\forall n \in \mathbb{N} \to A(n)$, т. е. справедливо ли утверждение $A(n)$ для любого натурального n. Непосредственная проверка этого утверждения для каждого $n \in \mathbb{N}$ невозможна, так как множество $\mathbb{N}$ бесконечно.

Истинность высказывания $\forall n \in \mathbb{N} \to A(n)$ часто удается доказать *методом математической индукции*. Этот метод основан на так называемом *принципе математической индукции*, который состоит в следующем.

Утверждение $A(n)$ считается истинным для всех значений $n \in \mathbb{N}$, если выполняются следующие условия:

1) утверждение $A(n)$ истинно при $n = 1$;
2) из предположения, что $A(n)$ истинно при $n = k$ (k — *любое* натуральное число) следует, что оно истинно и при $n = k + 1$.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства.

Если требуется доказать справедливость утверждения $A(n)$ для всех натуральных значений n, то сначала проверяют истинность высказывания $A(1)$, а затем, считая истинным высказывание $A(k)$, доказывают истинность высказывания $A(k+1)$. Если доказательство верно для каждого $k \in \mathbb{N}$, то в соответствии с принципом математической индукции утверждение $A(n)$ является верным для всех значений n.

Пример 12. Доказать, что при всех значениях $n \in \mathbb{N}$ число $A(n) = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ делится на 11.

$\triangle$ Число $A(1) = 6^2 + 3^3 + 3 = 66$ делится на 11. Предположим, что $A(k)$ делится на 11, и докажем, что из этого вытекает, что $A(k+1) = 6^{2(k+1)} + 3^{k+3} + 3^{k+1}$ также делится на 11. Так как $A(k+1) = (33+3)6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k = 33 \cdot 6^{2k} + 3(6^{2k} + 3^{k+2} + 3k) = 33 \cdot 6^{2k} + 3A(k)$, а числа 33 и $A(k)$ делятся на 11, то и число $A(k+1)$ делится на 11. $\blacktriangle$

Замечание. При доказательстве истинности высказывания $A(k)$ нередко вместо номера k пишут n.

Пример 13. Доказать, что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{16}$$

$\triangle$ При $n = 1$ равенство (16) является верным ($1 = 1$). Докажем, что из предположения о том, что верно равенство (16) следует справедливость равенства

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \tag{17}$$

полученного из (16) заменой n на $n+1$.

Прибавляя к обеим частям равенства (16) слагаемое $(n+1)^2$, имеем

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \tag{18}$$

Преобразуем правую часть соотношения (18):

$$\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Таким образом, равенство (17) является верным, и поэтому формула (16) доказана для любого $n\in\mathbb{N}$. ▲

Задачи

1. Рассмотрим два высказывания:

$A\equiv$ {число x равно нулю},
$B\equiv$ {произведение xy равно нулю}.

Выяснить, верны ли теоремы $A\Rightarrow B$ и $B\Rightarrow A$. Сформулировать соответствующую теорему, используя термины «необходимо», «достаточно».

2. Рассмотрим два высказывания:

$A\equiv\{a^2\neq 0\}$, $B\equiv\{a>0\}$.

Верны ли теоремы $A\Rightarrow B$ и $B\Rightarrow A$? Сформулировать соответствующую теорему, используя термины «необходимо», «достаточно».

3. Рассмотрим два высказывания:

$A\equiv$ {треугольник $\triangle$ — равнобедренный},
$B\equiv$ {две медианы треугольника $\triangle$ равны между собой}.

Верны ли теорема $A\Rightarrow B$ и обратная к ней теорема $B\Rightarrow A$?

4. Рассмотрим два высказывания:

$A\equiv$ {функция $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ постоянна в ее области определения},
$B\equiv\{ad=bc\}$.

Верны ли теоремы $A\Rightarrow B$ и $B\Rightarrow A$?

5. Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме Пифагора.

6. Выяснить, какие из приведенных ниже шести теорем верны и какие из них являются по отношению друг к другу обратными, противоположными.

1) Если каждое из слагаемых делится на 11, то и сумма делится на 11.
2) Если ни одно из слагаемых не делится на 11, то и сумма не делится на 11.
3) Если хотя бы одно из слагаемых делится на 11, то и сумма делится на 11.
4) Если сумма делится на 11, то и каждое из слагаемых делится на 11.
5) Если сумма не делится на 11, то ни одно из слагаемых не делится на 11.
6) Если сумма не делится на 11, то хотя бы одно из слагаемых не делится на 11.

7. Используя метод математической индукции, доказать, что при каждом $n\in\mathbb{N}$ верны равенства:

1) $1\cdot 2+2\cdot 5+\dots+n(3n-1)=n^2(n+1)$;

2) $1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$; 3) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

8. Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$

1) число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ делится на 19;
2) число $n(2n^2 - 3n + 1)$ делится на 6;
3) число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

9. Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right)\left(1 - \frac{4}{25}\right)\ldots\left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}.$$

Ответы

1. Теорема $A \Rightarrow B$ верна, теорема $B \Rightarrow A$ неверна. Для того чтобы произведение xy было равно нулю, достаточно, чтобы число x было равно нулю. Иначе: для того чтобы число x было равно нулю, необходимо, чтобы произведение xy было равно нулю. **2.** Теорема $A \Rightarrow B$ неверна, теорема $B \Rightarrow A$ верна. Для выполнения условия $a^2 \neq 0$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a > 0$. Иначе: для справедливости неравенства $a > 0$ необходимо выполнение условия $a^2 \neq 0$. **3.** Обе теоремы верны. **4.** Обе теоремы верны. **5.** Если в треугольнике со сторонами a, b, c и соответствующими им углами A, B, C справедливо равенство $c^2 = a^2 + b^2$, то $\angle C = \frac{\pi}{2}$. Для доказательства можно воспользоваться либо теоремой косинусов, либо третьим признаком равенства треугольников. **6.** Теоремы 1 и 6 верны, а теоремы 2, 3, 4, 5 неверны. Теоремы 1 и 4 обратны друг к другу, теоремы 2 и 5 обратны друг к другу. Теоремы 2 и 3, а также теоремы 4 и 6 противоположны друг к другу.

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

§1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. Основные понятия

Понятие *множества* относится к первоначальным понятиям, не подлежащим определению. Считается, что множество задается свойством, обладание которым делает объект принадлежащим к этому множеству. Предметы (объекты), составляющие множество, называются его *элементами*. Множества обычно обозначаются большими буквами $A, B, X, \ldots$. Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$ означает, что множество A состоит из элементов $a, b, c, \ldots$. То, что a является элементом множества A, записывается так: $a \in A$ ($\in$ — знак принадлежности) и читается *«a принадлежит множеству A»* или *«a входит в множество A»*. Запись $a \notin A$ означает, что a не является элементом множества A.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называют *конечным*, в противном случае — *бесконечным*. Множество, не содержащее элементов, называют *пустым множеством* и обозначают символом $\varnothing$.

Множества A и B *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов. В этом случае пишут $A = B$.

Если любой элемент множества A принадлежит множеству B, то множество A называется *подмножеством* множества B, что обозначается $A \subset B$ ($\subset$ — знак включения) и читается *«множество A содержится в множестве B»* (*«A включено в B»*) или *«множество B содержит множество A»*. Справедливо утверждение $A \subset A$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Полагают, что $\varnothing$ является подмножеством любого множества.

Замечание. Иногда для обозначения включения множеств используют обозначение $A \subseteq B$, а если A строго содержится в B (т. е. A содержится в B и $A \neq B$), то пишут $A \subset B$.

За некоторыми особенно часто встречающимися множествами закреплены стандартные обозначения. Это знакомые вам из курса алгебры основной школы числовые множества: $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — всех целых чисел, $\mathbb{Q}$ — всех рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — всех действительных (вещественных) чисел; а также множество $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел, с которым вы познакомитесь чуть позже. Для этих множеств справедливы включения

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Также используются обозначения $\mathbb{Q}_+$ и $\mathbb{Q}_-$ — множества всех положительных и отрицательных рациональных чисел и соответственно $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ — множества всех положительных и отрицательных действительных чисел.

Любую совокупность действительных чисел называют *числовым множеством*.

Кроме того, напомним, что действительные числа изображаются точками координатной прямой. *Координатная* (или *числовая*) *прямая* — это всякая прямая, на которой выбраны: направление, принимаемое за положительное; точка — начало отсчета и единица измерения — масштабный отрезок, длина которого принимается равной единице (рис. 1). Координатная прямая обычно изображается горизонтально, положительное направление указывается стрелкой, начало отсчета обозначается буквой O. Точка O разбивает координатную прямую на два луча, один из которых имеет положительное направление и называется *положительным лучом*, другой — *отрицательным*.

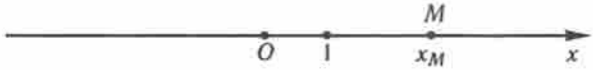


Рис. 1

Число, изображением которого на координатной прямой является точка M, называется *координатой* точки M. Координата начальной точки равна нулю. Координата произвольной точки M, лежащей на положительном луче, равна длине отрезка OM: $x_M = OM$. Если же точка лежит на отрицательном луче, ее координата равна длине отрезка OM, взятого со знаком минус: $x_M = -OM$. Вся координатная прямая имеет обозначение Ox.

Расстояние между двумя точками M_1 и M_2 координатной прямой равно абсолютной величине разности их координат x_1 и x_2: $M_1M_2 = |x_1 - x_2|$ (рис. 2).

Рис. 2

Пусть a и b — действительные числа и $a < b$. В приведенной ниже таблице даны названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых *числовыми промежутками*. Каждый из числовых промежутков определяется как множество действительных чисел, удовлетворяющих определенным неравенствам.

Таблица числовых промежутков

Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$[a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
Интервал от a до b (открытый промежуток)	$(a; b)$	$a < x < b$
Полуинтервал от a до b (открытый слева промежуток)	$(a; b]$	$a < x \leqslant b$
Полуинтервал от a до b (открытый справа промежуток)	$[a; b)$	$a \leqslant x < b$
Числовой луч от a до $+\infty$	$[a; +\infty)$	$x \geqslant a$
Открытый числовой луч от a до $+\infty$	$(a; +\infty)$	$x > a$
Числовой луч от $-\infty$ до a	$(-\infty; a]$	$x \leqslant a$
Открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$(-\infty; a)$	$x < a$

Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел обозначается также $(-\infty; +\infty)$ и называется *числовой прямой*.

Имея в виду интерпретацию действительных чисел на числовой оси, действительные числа иногда называют точками. Например, вместо «*число* 2 *принадлежит отрезку* $[1; 3]$» говорят «*точка* 2 *лежит на отрезке* $[1; 3]$» или «*точка* 2 *принадлежит отрезку* $[1; 3]$» и записывают $2 \in [1; 3]$.

Задание множеств. Утверждение $P(x)$, зависящее от переменной x, определяет некоторое множество посредством условия, согласно которому элементами множества являются такие и только такие элементы a, для которых $P(a)$ есть истинное высказывание. Символическая запись $A = \{x | P(x)\}$ означает, что множество A состоит из тех и только тех элементов x, для которых выполняется условие $P(x)$.

Пример 1. Записать символически и перечислением элементов множество, элементами которого являются:

1) все натуральные четные числа, делящиеся на 3;
2) все целые числа, квадрат которых меньше 25.

△ 1) $\{x | x = 6k,\ k \in \mathbb{N}\} = \{6, 12, 18, \ldots\}$;

2) $\{x | x \in \mathbb{Z}$ и $x^2 < 25\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. ▲

2. Операции над множествами

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением множеств* A и B (обозначается $A \cup B$ или $A + B$, читается «*объединение* A и B») (рис. 3). Используя логическую символику, определение объединения множеств можно записать так:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

При этом не исключается, что элемент x принадлежит обоим множествам.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением множеств* A и B (обозначается $A \cap B$ или AB, читается «*пересечение* A и B») (рис. 4). Используя логическую символику, определение пересечения множеств можно записать так:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Два множества называются *непересекающимися*, если $A \cap B = \varnothing$.

Множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется *разностью множеств* A и B (обозначается $A \backslash B$) (рис. 5). Используя логическую символику, определение разности множеств A и B можно записать так:

$$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Если $A \subset B$, то разность $B \backslash A$ называется дополнением множества A до множества B и обозначается $\overline{A_B}$.

Часто оказывается, что рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого основного, или *универсального множества* U (рис. 6). Множество элементов универсального множества U, не принадлежащих множеству A, называется *дополнением множества* A до множества U или просто дополнением и обозначается $\overline{A}$. Символически это записывается так:

$$\overline{A} = \{x | x \notin A\}.$$

Непосредственно из данных определений следуют равенства

1) $A \cup \varnothing = A$; 2) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 3) $\overline{\varnothing} = U$;

4) $\overline{U} = \varnothing$; 5) $\overline{\overline{A}} = A$; 6) $A \cup U = U$;

7) $A \cap U = A$; 8) $\overline{A} \cup A = U$; 9) $\overline{A} \cap A = \varnothing$.

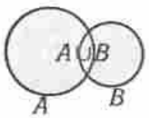


Рис. 3

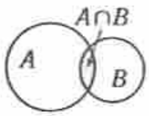


Рис. 4

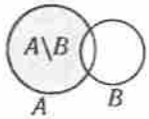


Рис. 5

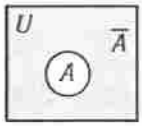


Рис. 6

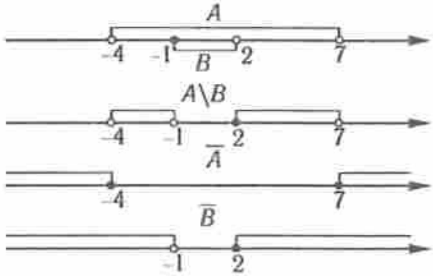


Рис. 7

Схематические изображения множеств и операций над ними, представленные на рис. 3–6, называются *диаграммами Эйлера—Венна*.

Пример 2. Пусть множество $A = (-4; 7)$, а множество $B = [-1; 2)$ (см. рис. 7). Найти и изобразить на числовой прямой множества $A \cup B$, $A \cap B$, $B \backslash A$, $A \backslash B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

$\triangle$ Поскольку $B \subset A$, то $A \cup B = A = (-4; 7)$ и $A \cap B = B = [-1; 2)$, $B \backslash A = \varnothing$, $A \backslash B = (-4; -1) \cup [2; 7)$,

$$\overline{A} = (-\infty; -4] \cup [7; +\infty),$$
$$\overline{B} = (-\infty; -1) \cup [2; +\infty), \quad \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A}.$$

Найденные множества изображены на рис. 7. ▲

Понятия объединения и пересечения, данные для двух множеств, могут быть распространены и на случай любого числа множеств.

Объединением конечного числа множеств A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ называют множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_i. Это множество обозначают $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ или $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Пересечением конечного числа множеств A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно всем множествам A_i. Это множество обозначают $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ или $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Прямым произведением (или *декартовым произведением*) *множеств* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество элементов вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (упорядоченных строчек), где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\ldots$, $a_n \in A_n$. Прямое произведение обозначается $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Пусть, например, $X = \{a, b\}$, $Y = \{p, q, r\}$. Тогда

$$X \times Y = \{(a,p),\ (a,q),\ (a,r),\ (b,p),\ (b,q),\ (b,r)\}.$$

Свойства операций над множествами. Для любых множеств выполняются следующие равенства:

Коммутативность	1. $A \cup B = B \cup A$; 2. $A \cap B = B \cap A$;
Ассоциативность	3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; 4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
Дистрибутивность одной операции относительно другой	5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; 6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
Идемпотентность	7. $A \cup A = A$; 8. $A \cap A = A$;
Законы де Моргана	9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; 10. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Доказывать приведенные выше свойства (иначе говоря равенства) или какие-либо другие можно двумя способами: с помощью *таблицы истинности* и *методом эквивалентных переходов*.

Метод доказательства равенств с помощью таблицы истинности. Таблица истинности для введенных выше операций над множествами заполняется следующим образом. У произвольного элемента x имеется четыре разных возможности: 1) $x \notin A$ и $x \notin B$; 2) $x \notin A$ и $x \in B$; 3) $x \in A$ и $x \notin B$; 4) $x \in A$ и $x \in B$.

Заполняем первые два столбца таблицы, ставя в клеточку число 1, если элемент принадлежит соответствующему множеству, и 0, если не принадлежит. Далее в соответствии с определением каждой из операций, задающей новое множество, заполняем столбцы для $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, получая таким образом соответствующий этой операции *столбец значений*.

Таблица истинности

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \backslash B$	$B \backslash A$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0

Подобную таблицу значений можно построить для любого множества, полученного с помощью введенных операций над некоторым конечным числом множеств. Например, для трех множеств A, B и C таблица будет содержать 8 строк.

Говорят, что две операции задают одинаковые множества, если совпадают их столбцы значений.

Метод эквивалентных переходов. При доказательстве равенства (или совпадения) двух множеств этим методом, выполняя поэтапные переходы в соответствии с определениями соответствующих операций, показывают, что если элемент принадлежит левой части доказываемого равенства, то он принадлежит и правой части, и наоборот.

Пример 3. Доказать двумя способами (с помощью таблицы истинности и методом эквивалентных переходов) равенство (закон де Моргана)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Δ 1) Заполним следующую таблицу и сравним столбцы значений для множеств $\overline{A \cup B}$ и $\overline{A} \cap \overline{B}$.

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

Так как столбцы совпадают, то множества в обеих частях доказываемого равенства также совпадают.

2) Докажем равенство $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Рассмотрим произвольный элемент x:

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}\right) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Следовательно, выполняя переходы слева направо, можно показать, что если $x \in \overline{A \cup B}$, то $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Аналогично, выполняя переходы справа налево, убеждаемся, что если $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, то $x \in \overline{A \cup B}$. Это означает, что множества, стоящие в обеих частях равенства, состоят из одних и тех же элементов, т. е. совпадают. ▲

Замечание. На практике достаточно воспользоваться одним из приведенных выше методов.

3. Формула включений и исключений

Наряду с методом математической индукции, формула (принцип) включений и исключений является важным математическим инструментом. Она позволяет, зная число элементов в каждом из данных конечных множеств, найти число элементов другого множества, составленного из данных множеств с помощью операций объединения и пересечения.

Пусть A — конечное множество. Обозначим через $|A|$ число его элементов, т. е. если множество A содержит n элементов, то $|A| = n$.

Пусть множества A_1 и A_2 состоят из конечного числа элементов. Введем обозначение $A_{12} = A_1 \cap A_2$. Легко убедиться, что

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_{12}|. \tag{1}$$

Это одна из важнейших формул комбинаторики, которую называют *формулой сложения*. С ее помощью можно получить формулу для количества элементов в объединении любого числа множеств.

Например, для трех множеств (обозначая $A_{ij} = A_i \cap A_j$, где $i = 1,\ 2$; $j = 2,\ 3$; $i \neq j$, $A_{123} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$):

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| = |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_{23}| - |A_{12} \cup A_{13}|.$$

Учитывая, что $A_{12} \cap A_{13} = A_{123}$, окончательно получаем

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_{12}| - |A_{13}| - |A_{23}| + |A_{123}|. \tag{2}$$

Полученная формула, как и формула (1), является частным случаем общей ***формулы включений и исключений*** для n конечных множеств $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$.

Пример 4. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников читал книги a, b и c. Результаты опроса оказались таковы: книгу a читали 25 учащихся, книгу b — 22, книгу c — также 22. Книги a или b читали 33 ученика, a или c — 32, b или c — 31. Все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих книг?

△ Обозначим через A, B и C множества учащихся, прочитавших книгу a, b, c соответственно. Дано $|A| = 25$, $|B| = |C| = 22$, $|A \cup B| = 33$, $|A \cup C| = 32$, $|B \cup C| = 31$, $|A \cap B \cap C| = 10$. Так как $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, то

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 25 + 22 - 33 = 14.$$

Аналогично имеем

$$|A \cap C| = |A| + |C| - |A \cup C| = 25 + 22 - 32 = 15; |B \cap C| = |B| + |C| - |B \cup C| = 13.$$

Тогда число учащихся, прочитавших хотя бы одну книгу, будет равно

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 25 + 22 + 22 - 14 - 15 - 13 + 10 = 37.$$

Следовательно, число учащихся, не прочитавших ни одной из этих книг, равно

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = 40 - |A \cup B \cup C| = 3.$$

Далее найдем число учащихся, прочитавших по одной книге. Так, число учащихся, прочитавших только книгу a, равно

$$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 25 - 14 - 15 + 10 = 6;$$

только книгу b

$$|B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 22 - 14 - 13 + 10 = 5,$$

только книгу c

$$|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 22 - 15 - 13 + 10 = 4.$$

Отсюда число учащихся, прочитавших лишь одну книгу (из этих трех), равно $6 + 5 + 4 = 15$.

Ответ. Только одну книгу прочли 15 учащихся; ни одной — 3. ▲

Можно сформулировать *принцип включения и исключения в общем виде.*

Пусть имеется n объектов и $n(\alpha)$ из них обладают свойством α; через $n(\beta)$, $n(\gamma)$, ... обозначим соответственно количества объектов, обладающих свойствами $\beta, \gamma, \ldots$; через $n(\alpha;\beta)$, $n(\beta;\gamma)$, ..., $n(\alpha;\beta;\gamma)$, ... — число объектов, обладающих свойствами, указанными в скобках. Тогда число объектов, которые не обладают ни одним из свойств α, β, $\gamma, \ldots$, равно

$$n - \underbrace{\{n(\alpha) + n(\beta) + n(\gamma) + \ldots\}}_{\text{обладающие одним свойством}} + \underbrace{\{n(\alpha;\beta) + n(\alpha;\gamma) + \ldots\}}_{\text{обладающие двумя свойствами}} - \underbrace{\{\quad n(\alpha;\beta;\gamma) + \ldots \quad\}}_{\text{обладающие тремя свойствами}} + \ldots . \tag{3}$$

Пример 5. Каждая сторона треугольника ABC разделена на 5 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B и C не могут быть их вершинами), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC и никакие две вершины не лежат на одной стороне треугольника ABC?

△ Пусть $n(a)$, $n(b)$ и $n(c)$ — количество треугольников, у которых одна сторона параллельна BC, AC и AB соответственно. Аналогично обозначим количества $n(a;b)$, $n(a;c)$, $n(b;c)$ и $n(a;b;c)$ треугольников, у которых две и три стороны параллельны соответствующим сторонам данного треугольника.

Тогда общее число n треугольников равно 4^3 и $n(a) = n(b) = n(c) = 4^2$, $n(a;b) = n(a;c) = n(b;c) = 4$, $n(a;b;c) = 0$. Из формулы (3) получаем, что искомое число равно

$$n - n(a) - n(b) - n(c) + n(a;b) + n(a;c) + n(b;c) - n(a;b;c) = \\ = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 0 = 28.$$

Ответ. 28. ▲

Иногда при решении подобных задач можно при некоторых дополнительных условиях обойтись без применения формул включения и исключения, а использовать таблицы, аналогичные рассмотренным выше таблицам истинности.

Пример 6. В соревнованиях по легкой атлетике норматив II разряда по прыжкам в высоту выполнили 82% от числа участников, по прыжкам в длину — 65% и в тройном прыжке — 70%. Оказалось, что каждый участник выполнил норматив хотя бы по двум дисциплинам. Спортсмены, выполнившие норматив по всем дисциплинам, мечтают стать мастерами спорта. Какой процент участников собирается стать мастерами спорта, и какой — не выполнил норму II разряда в прыжках в длину?

$\triangle$ Пусть число участников равно n. Множество всех участников в соответствии с условиями задачи разбивается на четыре подмножества, отвечающие строкам следующей таблицы.

Выполнили норму по прыжкам в высоту	Выполнили норму по прыжкам в длину	Выполнили норму в тройном прыжке	
+	+	–	x
+	–	+	y
–	+	+	z
+	+	+	t

Обозначим количество участников, не выполнивших норматив II разряда в тройном прыжке, через x, по прыжкам в длину — через y, по прыжкам в высоту — через z, и количество участников, выполнивших норматив по всем дисциплинам, — через t. Тогда в соответствии с условиями задачи составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+t=0{,}82n, \\ x+z+t=0{,}65n, \\ y+z+t=0{,}7n, \\ x+y+z+t=n. \end{cases}$$

Отсюда получаем $t=0{,}17n$, а $y=0{,}35n$.

Ответ. 17% и 35%. $\blacktriangle$

Задачи

1. Записать символически множество, элементами которого являются:
1) все целые числа, делящиеся на 7;
2) все неотрицательные числа, отличные от 2 и 3;
3) все целые числа, дающие остаток 1 при делении на 5;
4) все целые числа, являющиеся полными квадратами;
5) все точки отрезка $[a;b]$;
6) решения уравнения $|x|-x=0$;
7) все точки координатной плоскости, находящиеся на расстоянии r от начала координат.

2. Установить, верны ли следующие утверждения:

1) $3 \in \{x \mid x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0\}$; 2) $2 \in \left\{x \,\middle|\, \dfrac{x^3 - 3x^2}{3 - 4x} \geqslant 0\right\}$;

3) $2 \in \left\{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = \dfrac{2n+2}{3n-5}\right\}$; 4) $\varnothing \in \varnothing$;

5) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; 6) $\{1, 2, 3\} \in \mathbb{N}$; 7) $[0; 1] \subset [-2; 2]$.

3. Выписать все подмножества множества M:
1) $M = \{1, 2\}$; 2) $M = \{1, 2, 3\}$; 3) $M = \{a, b, c, d\}$.

4. Определить число всех подмножеств множества, содержащего n элементов, если:
1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $n = 3$; 4) $n = 4$; 5) $n = k$.

5. Установить, верны ли следующие утверждения:

1) $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$; 2) $\{-3, -2, 2, 3\} \subset \{x \mid x^5 - 13x^3 + 36x = 0\}$;

3) $\{x \mid x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0\} \subset \{-3, -2, 0, 3\}$; 4) $\varnothing \subseteq \varnothing$;

5) $\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} \subseteq \{x \mid x^2 - 9 \leqslant 0\}$.

6. Изобразить с помощью диаграмм Эйлера—Венна множества A, B, C, удовлетворяющие следующим условиям:
1) $A \subset B$ и $B \subset C$; 2) $A \subset B, B \subset C$ и $A \backslash B = \varnothing$;
3) $A \subset B, B \subset C$ и $C = A \cup B$; 4) $A \subset B, B \subset C$ и $A \cap B \neq \varnothing$;
5) $A \cap B \neq \varnothing, A \cap C \neq \varnothing$, $B \cap C \neq \varnothing$ и $A \cap B \cap C \neq \varnothing$;
6) $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$ и $B \cap C \neq \varnothing$.

7. Для данных множеств A и B найти и изобразить на числовой прямой множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.
1) $A = (-3; 3]$, $B = [0; 5]$; 2) $A = (-2; 2]$, $B = [-4; 6)$.

8. Для данных множеств A и B определить, что представляет собой множество $A \cap B$, если
1) A — множество всех целых чисел, делящихся на 2; B — множество всех целых чисел, делящихся на 7;
2) A — множество всех целых чисел, делящихся на 30; B — множество всех целых чисел, делящихся на 45.

9. Для данных множеств точек X и Y определить, что представляет собой множество $X \times Y$, если
1) $X = [-3; 3]$ — отрезок на оси Ox, $Y = [0; 5]$ — отрезок на оси Oy;
2) $X = [0; 1] \cup [2; 3]$ — на оси Ox, $Y = [0; 1] \cup [2; 3]$ — на оси Oy;
3) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$.

10. Доказать следующие свойства операций:
1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; 2) $\overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}$;
3) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$; 4) $A \backslash (A \cap B) = (A \cup B) \backslash B$;
5) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$; 6) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

11. Доказать следующие утверждения:
1) Если $A \subset B$, то $A \backslash C \subset B \backslash C$; 2) если $C \subset A$ и $D \subset B$, то $D \backslash A \subset B \backslash C$.

12. Привести примеры множеств, показывающие, что следующие утверждения неверны:
1) если $A \cup C \subset B \cup C$, то $A \subset B$; 2) если $A \cap C \subset B \cap C$, то $A \subset B$;
3) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash (A \backslash C)$; 4) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \backslash C)$.

13. 1) Для каждого $x \in A$ положим $M_x = A \setminus \{x\}$. Найти пересечение всех множеств M_x.

2) Даны два разбиения множества M на непересекающиеся подмножества: $M = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ и $M = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$. Будут ли образовывать разбиение множества M всевозможные подмножества $A_i \cap B_j$, $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant k)$?

14. Упростить следующие выражения:

1) $A \cap (A \cup B)$; 2) $(A \cap B) \cap (B \cap A)$;

3) $(A \cap B) \cup (B \cap A)$; 4) $(A \cup B) \cap (B \cup A)$.

15. Для данных множеств $A = \{x \mid x = 3n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 5n-2,\ n \in \mathbb{N}\}$ и $C = \{x \mid x = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}\}$ определить, что представляет собой множество D, если

1) $D = A \cap B \cap C$; 2) $D = (A \cap B) \cup C$.

16. 1) В лагере 400 детей. Из них 210 умеют плавать, 300 умеют кататься на велосипеде, 170 умеют плавать и кататься на велосипеде. Сколько детей не умеют ни плавать, ни кататься на велосипеде?

2) В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский и 23 знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского?

17. 1) При голосовании в городскую думу в бюллетене в списке из трех кандидатов требовалось оставить не более одного. При подведении итогов оказалось, что кандидатов A и B вычеркнули 60% избирателей, кандидатов B и C — 80% избирателей, а кандидатов A и C — 70% избирателей. Какой процент избирателей проголосовал против всех кандидатов и какой кандидат набрал наибольшее количество голосов?

2) При голосовании в городскую думу в бюллетене в списке из трех кандидатов требовалось оставить не более двух. При подведении итогов оказалось, что кандидата A вычеркнули 37% избирателей, кандидата B — 43%, кандидата C — 55%; при этом 50% избирателей оставили в бюллетене одного кандидата. Какой процент избирателей проголосовал против всех кандидатов?

18. 1) Каждый из учеников класса в каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли A, B и C видели соответственно 25, 12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе? Сколько из них видели спектакли A и B, A и C, B и C?

2) Из 54 спортсменов спортивной школы в соревнованиях по бегу принял участие 31 человек, по плаванию — 28 и часть спортсменов участвовала в соревнованиях по велокроссу. Определить, сколько спортсменов участвовало в соревнованиях по велокроссу, если известно, что 4 человека из-за травм пропустили все соревнования, 20 спортсменов участвовали в соревнованиях только по одному виду спорта, 12 — в беге и велокроссе, 15 — в беге и плавании и 13 — в плавании и велокроссе. Сколько спортсменов приняло участие в соревнованиях по всем трем видам спорта?

19. 1) Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике — 48 абитуриентов, по физике — 37, по русскому языку — 42, по математике или физике — 75, по математике или русскому языку — 66, по всем трем предметам — 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

2) В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся. Им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. Результаты проверки представлены в таблице. Известно также, что ни одной задачи не решили трое. Сколько учащихся решило все три задачи? Сколько учащихся решило ровно две задачи?

Решены задачи	Количество решивших
по алгебре	20
по геометрии	18
по тригонометрии	18
по алгебре и геометрии	7
по алгебре и тригонометрии	8
по геометрии и тригонометрии	9

20. 1) Множества A, B и C состоят из некоторых трехзначных натуральных чисел. Элементами множества A являются числа, кратные 3; множества B — числа, кратные 5, и множества C — числа, кратные 7. Определить $|A\cup B|$, $|B\cup C|$, $|A\cup C|$ и $|A\cup B\cup C|$.

2) Пусть A — некоторое подмножество множества натуральных чисел. Причем каждый элемент множества A — число, кратное или 2, или 3, или 5. Найти количество элементов в множестве A, если среди них имеется: 70 чисел, кратных 2; 60 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратных 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15, и 20 чисел, кратных 30.

21. Каждая сторона треугольника ABC разделена на 7 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B и C не могут быть их вершинами), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC и никакие две вершины не лежат на одной стороне треугольника ABC?

22. 1) На столе площади 1 кв. ед. лежат три журнала, площади которых S_1, S_2, S_3 не меньше 0,5 кв. ед. Каково наименьшее значение площади пересечения, которое могут гарантированно иметь два журнала при произвольном их расположении?

2) (*Задача Л. Кэрролла.*) В ожесточенных битвах более 70% повредили глаз, 75% — ухо, 80% — руку, 85% — ногу. Каково наименьшее количество повредивших глаз, ухо, руку и ногу одновременно?

Ответы

1. 1) $\{x|x=7n,\ n\in\mathbb{Z}\}$; 2) $\{x|x\geqslant 0, x\neq 2, x\neq 3,\ x\in\mathbb{Z}\}$; 3) $\{x|x=5n+1,\ n\in\mathbb{Z}\}$; 4) $\{x|x=n^2,\ n\in\mathbb{Z}\}$; 5) $\{x|a\leqslant x\leqslant b,\ x,a,b\in\mathbb{R}\}$; 6) $\{x|x\in\mathbb{R}, |x|-x=0\}$; 7) $\left\{(x,y)|x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}, x^2+y^2=r^2\right\}$. **2.** 1) да; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет; 7) да. **3.** 1) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$; 2) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$; 3) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$. **4.** 1) $2^1=2$; 2) $2^2=4$; 3) $2^3=8$; 4) $2^4=16$; 5) 2^k. **5.** 1) да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет. **7.** 1) $A\cup B=(-3;5]$, $A\cap B=[0;3]$, $A\backslash B=(-3;0)$, $B\backslash A=(3;5]$, $\overline{A}=(-\infty;-3]\cup(3;+\infty)$, $\overline{B}=(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$, $\overline{A}\cap\overline{B}=(-\infty;-3]\cup(5;+\infty)$; 2) $A\cup B=[-4;6)$, $A\cap B=(-2;2]$, $A\backslash B=\varnothing$,

$B\backslash A = [-4;-2] \cup (2;6)$, $\overline{A} = (-\infty;-2] \cup (2;+\infty)$, $\overline{B} = (-\infty;-4) \cup [6;+\infty)$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B}$. **8.** 1) $\{x | x = 14k,\ k \in \mathbb{Z}\}$; 2) $\{x | x = 90k, k \in \mathbb{Z}\}$. **9.** 1) $X \times Y = \{(x,y) | x \in [-3;3], y \in [0;5]\}$ — прямоугольник на координатной плоскости; 2) $X \times Y = \{(x,y) | x \in [0;1] \cup [2;3], y \in [0;1] \cup [2;3]\}$ — четыре квадрата на координатной плоскости; 3) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ — множество всех точек координатной плоскости. **12.** 1) $\varnothing$; 2) да. **13.** 1) $\varnothing$; 2) да. **14.** 1) A; 2) $A \cap B$; 3) $A \cap B$; 4) $A \cup B$. **15.** 1) $\{x | x = 14k,\ k \in \mathbb{N}\}$; 2) $\{x | x = 90k,\ k \in \mathbb{N}\}$. **16.** 1) 60; 2) 8. **17.** 1) 55%, кандидат B; 2) 15%. **18.** 1) 30, 7, 18 и 5; 2) 26 и 5. **19.** 1) Хотя бы одну пятерку — 94; только одну — 65 абитуриентов; 2) 5 решило все три задачи и 14 решило ровно две. **20.** 1) Множества трехзначных натуральных чисел A, B и C состоят из чисел: элементами множества A являются числа, кратные 3; B — кратные 5 и C — кратные 7. Определить $|A \cup B| = 440$, $|B \cup C| = 314$, $|A \cup C| = 395$, и $|A \cup B \cup C| = 515$. 2) 125. **21.** 125. **22.** 1) Имеется два журнала, которые пересекаются по площади не менее $\frac{1}{6}$ кв. ед.; 2) наименьшее количество — 10%.

§ 2. НАТУРАЛЬНЫЕ, ЦЕЛЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Рациональные числа

Числа, применяемые при счете (1, 2, 3, 4, 5, ...), называются *натуральными*. Множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел, упорядоченных в строго определенной последовательности, называют натуральным рядом чисел или просто *натуральным рядом*.

Так как на множестве $\mathbb{N}$ не всегда выполнима операция вычитания, то это привело к необходимости расширения множества натуральных чисел. Вводятся число 0 — *нуль* и *целые отрицательные числа* $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$. Иначе, множество целых чисел $\mathbb{Z}$ — множество чисел вида $\pm n$, где n — натуральное число или нуль.

В свою очередь на множестве $\mathbb{Z}$ не всегда выполнима операция деления без остатка, поэтому это множество расширяют, вводя множество *рациональных чисел*.

Рациональным числом называют число вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Заметим, что одно и то же рациональное число можно представить различными дробями, которые получаются из несократимой дроби умножением ее числителя и знаменателя на одно и то же целое число, отличное от нуля. Например $\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{-15}{-35}$ и т. д. Множество рациональных чисел обозначают буквой $\mathbb{Q}$. В частности, любое целое число a является рациональным, так как его можно записать в виде $a = \frac{a}{1}$. Например, $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$ и т. д.

Пусть $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{p_1}{q_1}$ — два рациональных числа. Тогда правило упорядочения этих чисел определяется следующим образом:

1) если $pq_1 = qp_1$, то $a = b$;
2) если $pq_1 > qp_1$, то $a > b$;
3) если $pq_1 < qp_1$, то $a < b$.

Сумма и произведение рациональных чисел a и b определяются соответственно равенствами

$$a + b = \frac{pq_1 + qp_1}{qq_1}, \quad ab = \frac{pp_1}{qq_1}.$$

Рациональное число $a = \frac{p}{q}$ считается положительным, если $p > 0$, и отрицательным, если $p < 0$. При $p = 0$ дробь называется *нулевой*.

Операции сложения и умножения рациональных чисел обладают следующими свойствами:

коммутативность: $a + b = b + a$, $ab = ba$;
ассоциативность: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$;
дистрибутивность: $a(b + c) = ab + ac$;
для любого рационального числа a справедливы равенства: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$.

Операции вычитания и деления вводятся как обратные соответственно к операциям сложения и умножения:

для любых рациональных чисел a и b существует и притом единственное число x такое, что

$$b + x = a;$$

это число называется *разностью* чисел a и b и обозначается $a - b$; в частности, разность $0 - b$ обозначается $-b$;
если $b \neq 0$, то существует единственное число y такое, что

$$by = a;$$

это число называется *частным* чисел a и b и обозначается $\frac{a}{b}$.

Отметим также основные свойства неравенств для рациональных чисел:

1) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;
2) если $a > b$, то $a + c > b + c$ при любом c;
3) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;
4) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;
5) если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

В множестве $\mathbb{Q}$ можно не только выполнять четыре арифметические операции, но и решать уравнения и системы уравнений первой степени. Однако даже простейшие квадратные уравнения $x^2 = a$, где $a \in \mathbb{N}$, не всегда разрешимы в множестве $\mathbb{Q}$. В частности, уравнение $x^2 = 2$ не имеет решений в множестве рациональных чисел.

Таким образом, уже проблема решения простых уравнений типа $x^2 = a$, $x^3 = a$, где $a \in \mathbb{N}$, приводит к необходимости расширения множества рациональных чисел путем добавления к нему новых элементов, называемых иррациональными числами. Делается это следующим образом.

2. Бесконечные десятичные дроби и их приближения

Десятичной дробью называется дробь, у которой знаменатель представляет собой натуральную степень числа 10.

Такую дробь можно записать в следующей форме: выписать в строку цифры числителя и отделить запятой справа столько из них, сколько нулей содержится в знаменателе. При этом если числитель меньше знаменателя, то перед запятой надо поставить нуль.

Бесконечная десятичная дробь имеет вид $\pm a_0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, где a_0 — натуральное число или нуль, a_i — цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Представление числа в виде бесконечной десятичной дроби *однозначно* во всех случаях, за исключением такого, когда все цифры, начиная с некоторой, равны 0 или все цифры, начиная с какой-либо, равны 9, например $3{,}250000\ldots = 3{,}249999\ldots$. Для того чтобы запись была однозначной, обычно запрещают использование записей, в которых все цифры, начиная с некоторой, равны 9.

Бесконечные десятичные дроби, в которых одна или несколько цифр неизменно повторяются в одной и той же последовательности, называются *периодическими десятичными дробями*.

Совокупность повторяющихся цифр называется *периодом* этой дроби.

При сокращенной записи периодической десятичной дроби пишут только один период и при этом период заключают в скобки. Так, например, вместо $2{,}3636\ldots$ пишут $2{,}(36)$; вместо $0{,}08333\ldots$ пишут $0{,}08(3)$; вместо $0{,}5232232\ldots$ пишут $0{,}5(232)$.

Отметим для дальнейшего, что в результате умножения десятичной дроби на число 10^n запятая сдвигается на n разрядов вправо.

Пусть число x — чистая периодическая дробь $x = 0{,}(b_1\ldots b_m)$, содержащая m цифр в периоде. После умножения этого числа на 10^m получим

$$10^m \cdot x = b_1\ldots b_m{,}(b_1\ldots b_m) = b_1\ldots b_m + 0{,}(b_1\ldots b_m) = b_1\ldots b_m + x.$$

Отсюда находим, что $(10^m - 1)\cdot x = b_1\ldots b_m$ или $x = \dfrac{b_1\ldots b_m}{10^m - 1} = \dfrac{b_1\ldots b_m}{\underbrace{99\ldots99}_{m \text{ девяток}}}$.

Сформулируем правило:

Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно записать числителем ее период, а знаменателем — число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде.

Пусть теперь число $x = n, a_1 \ldots a_k(b_1 \ldots b_m)$ — смешанная периодическая десятичная дробь, в которой до первого периода следует k цифр и период содержит m цифр. Умножив x на 10^k, получим $10^k \cdot x = na_1 \ldots a_k, (b_1 \ldots b_m)$, а при умножении на 10^{m+k} получим $10^{m+k} \cdot x = na_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_m, (b_1 \ldots b_m)$. Разность этих двух чисел дает целое число $10^{m+k} \cdot x - 10^k \cdot x = na_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_m - na_1 \ldots a_k$. Тогда x можно будет выразить как отношение двух целых чисел, т. е. как обыкновенную дробь:

$$x = \frac{na_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_m - na_1 \ldots a_k}{10^k \cdot (10^m - 1)}.$$

Сформулируем правило:

Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а знаменателем написать число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде, и со столькими нулями в конце, сколько цифр между запятой и периодом.

Например, $8{,}3(27) = \frac{8327 - 83}{990} = \frac{8244}{990} = \frac{458}{55} = 8\frac{18}{55}$.

3. Иррациональные числа

Всякое *рациональное* число можно представить десятичной конечной или бесконечной *периодической* десятичной дробью, и наоборот, периодическая дробь — рациональное число. Но существуют бесконечные непериодические десятичные дроби, например

$$0{,}101100111000111\ldots,$$

где после k единиц и k нулей следуют $k+1$ единица и $k+1$ нуль и т. д.

Иррациональным числом называют каждое такое число, которое может быть выражено в виде *бесконечной непериодической дроби*.

Пример 1. Доказать, что следующие числа являются иррациональными:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

△ 1) Предположим, что число $\sqrt{2}$ — рациональное. Запишем его в виде несократимой дроби $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Тогда имеем: $\frac{m^2}{n^2} = 2$ или $m^2 = 2n^2$. Получили, что квадрат числа m — четное число. Квадрат нечетного числа — нечетное число. Тогда из равенства $m^2 = 2n^2$ следует, что m — четное число, т. е. $m = 2k$. Заменяя

m на $2k$, получаем равенство $4k^2=2n^2$ или $n^2=2k^2$, т. е. $n=2l$. Но тогда дробь $\frac{m}{n}=\frac{2k}{2l}$ — сократима. Полученное противоречие доказывает, что $\sqrt{2}$ не является иррациональным числом, т. е. оно иррационально.

2) Допустим, что число $\alpha=\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$ — рациональное. Тогда $\sqrt[3]{3}=\alpha-\sqrt{2}$. Возводя обе части последнего равенства в куб, получим
$$3=\alpha^3-3\alpha^2\sqrt{2}+6\alpha-2\sqrt{2},$$
отсюда
$$\sqrt{2}\left(3\alpha^2+2\right)=\alpha^3+6\alpha-3 \text{ или } \sqrt{2}=\frac{\alpha^3+6\alpha-3}{3\alpha^2+2}.$$

Так как α — рациональное, то и правая часть последнего равенства — рациональное число, что противоречит доказанному в предыдущем пункте.

3) Допустим, что число $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — рациональное. Тогда $\alpha-\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получим
$$\alpha^2-2\alpha\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{15}+5 \text{ или } \frac{\alpha^2}{2}-3=\alpha\sqrt{2}+\sqrt{15}.$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получим
$$\frac{\alpha^4}{4}-3\alpha^2+9=2\alpha^2+2\alpha\sqrt{30}+15 \text{ или } \sqrt{30}=\frac{\frac{\alpha^4}{4}-5\alpha^2-6}{2\alpha}\ (\alpha\neq 0).$$

В силу нашего предположения правая часть последнего равенства — рациональное число, но, пользуясь тем же приемом, что и в п. 1, легко доказать, что число $\sqrt{30}$ — иррациональное. Получили противоречие. ▲

4. Действительные числа

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь вида
$$\pm a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots\ . \tag{1}$$
Эта дробь определяется заданием знака $+$ или $-$, целого неотрицательного числа и последовательности десятичных знаков $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots$ (множество десятичных знаков состоит из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Всякую дробь вида (1) будем называть *действительным числом*. Если перед дробью (1) стоит знак $+$, его обычно опускают и пишут
$$a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots\ . \tag{2}$$
Число вида (2) будем называть *неотрицательным действительным числом*, а в случае, когда хотя бы одно из чисел $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots$

отлично от нуля, — *положительным действительным числом*. Число вида

$$-a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots, \tag{3}$$

где хотя бы одно из чисел a_0, a_1, $a_2, \ldots$, $a_n, \ldots$ отлично от нуля, будем называть *отрицательным действительным числом*.

Если $a = a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, а $b = -a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$, то число b называют противоположным числу a, а число a — противоположным числу b.

Замечание. Дроби вида $a_0,a_1a_2\ldots\ a_k9999\ldots$ использовать запрещается, а если они возникают в процессе вычислений, их заменяют на $a_0,a_1a_2\ldots(a_k+1)000\ldots$ (здесь $a_k \neq 9$), например $3{,}279999\ldots = 3{,}280000\ldots$.

Множество всех десятичных дробей вида (1) называют *множеством действительных* (*вещественных*) *чисел* и обозначают символом $\mathbb{R}$, а его подмножество, состоящее из непериодических бесконечных десятичных дробей, — множеством *иррациональных чисел* и обозначают буквой $\mathbb{I}$.

Десятичные приближения действительных чисел. Поставим в соответствие неотрицательному действительному числу (2) конечные десятичные дроби

$$\underline{\alpha}_n = a_0,a_1\ldots a_n \text{ и } \overline{\alpha}_n = a_0,a_1\ldots a_n + \frac{1}{10^n}$$

и будем их называть *n-ми десятичными приближениями числа* $\alpha = a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ соответственно *с недостатком и избытком*. Если же α — число вида (3), то для него *n-е десятичные приближения с избытком и недостатком* определяются соответственно равенствами

$$\overline{\alpha}_n = -a_0,a_1\ldots a_n \text{ и } \underline{\alpha}_n = -a_0,a_1\ldots a_n - \frac{1}{10^n}\,.$$

Пример 2. Выписать десятичные приближения с недостатком и избытком чисел $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

$\triangle$ С помощью микрокалькулятора находим $\sqrt{2} = 1{,}41421135623\ldots$ и $-\sqrt{2} = -1{,}41421135623\ldots$. Далее представим результат в виде таблицы.

	$\sqrt{2} = 1{,}41421135623\ldots$		$-\sqrt{2} = -1{,}41421135623\ldots$	
n	с недостатком	с избытком	с недостатком	с избытком
1	1,4	1,5	−1,5	−1,4
2	1,41	1,42	−1,42	−1,41
3	1,414	1,415	−1,415	−1,414
4	1,4142	1,4143	−1,4143	−1,4142
5	1,41421	1,41422	−1,41422	−1,41421
10	1,4142113562	1,4142113563	−1,4142113563	−1,4142113562

В данном примере мы ограничились $n = 10$. $\blacktriangle$

Десятичные приближения далее будут использованы при определении арифметических операций на множестве $\mathbb{R}$.

Сравнение действительных чисел. Два неотрицательных действительных числа

$$\alpha = a_0{,}a_1 \ldots a_n \ldots \quad \text{и} \quad \beta = b_0{,}b_1 \ldots b_n \ldots$$

называют *равными* и пишут $\alpha = \beta$, если $a_0 = b_0$ и $a_k = b_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В частности, $\alpha = 0$, если $a_0 = 0$, и $a_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Дадим определение соотношений $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$. Говорят, что число α меньше числа β, и пишут $\alpha < \beta$, если либо $a_0 < b_0$, либо $a_0 = b_0$ и существует такой номер n, что $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{n-1} = b_{n-1}$, но $a_n < b_n$.

Аналогично, говорят, что число α больше числа β, и пишут $\alpha > \beta$, если либо $a_0 > b_0$, либо $a_0 = b_0$, и существует такой номер n, что $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{n-1} = b_{n-1}$, но $a_n > b_n$.

Из определения равенства $\alpha = \beta$ и неравенств $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$ следует, что для любых неотрицательных действительных чисел α и β выполняется одно из трех условий: $\alpha = \beta, \alpha < \beta, \alpha > \beta$.

Отметим, что для любого неотрицательного действительного числа α справедливо неравенство $\alpha \geqslant 0$.

Пример 3. Сравнить числа π, $\sqrt{10}$ и 3,14(15).

$\triangle$ Так как $\pi = 3{,}14159\ldots$, $\sqrt{10} = 3{,}16227\ldots$ и $3{,}14(15) = 3{,}141515\ldots$, то у данных чисел совпадают целые части и цифры десятых, а цифра сотых у числа $\sqrt{10}$ больше, чем у числа π и 3,14(15). Следовательно, $\sqrt{10} > \pi$ и $\sqrt{10} > 3{,}14(15)$. Далее, у чисел π и 3,14(15) совпадают первые четыре цифры после запятой, а пятая больше у числа π. Следовательно, $\pi > 3{,}14(15)$. В итоге имеем $3{,}14(15) < \pi < \sqrt{10}$. $\blacktriangle$

Назовем модулем действительного числа α действительное число, обозначаемое символом $|\alpha|$, представленное той же бесконечной десятичной дробью, что и число α, но взятое со знаком $+$. Таким образом, если

$$\alpha = \pm a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n \ldots, \quad \text{то} \quad |\alpha| = +a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n \ldots,$$

откуда следует, что $|\alpha|$ — неотрицательное действительное число при любом α.

Данное определение можно записать в следующей форме:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geqslant 0; \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Замечание. Число $|\alpha|$ называют также *абсолютной величиной* числа α.

Введем теперь правило сравнения двух действительных чисел α и β для случая, когда хотя бы одно из этих чисел отрицательно.

Если α — неотрицательное, а β — отрицательное число, то считают, что $\alpha > \beta$.

Если α и β отрицательны ($\alpha < 0, \beta < 0$), то будем считать, что:

1) $\alpha = \beta$, если $|\alpha| = |\beta|$,
2) $\alpha < \beta$, если $|\beta| < |\alpha|$.

Таким образом, правило сравнения сформулированы для любых действительных чисел.

Замечание 1. Легко убедиться, что сформулированное правило сравнения действительных чисел в применении к рациональным числам, записанным в виде бесконечных десятичных дробей, приводит к тому же результату, что и правило сравнения рациональных чисел, представленных в виде отношения целых чисел.

Замечание 2. Из определения сравнения действительных чисел следует, что при любом $k \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения:

$$\underline{\alpha}_k \leqslant \alpha < \overline{\alpha}_k; \quad \text{и} \quad \overline{\alpha}_k - \underline{\alpha}_k = \frac{1}{10^k}.$$

Эти неравенства означают, что для любого $k \in \mathbb{N}$ действительное число α заключено между двумя рациональными числами $\underline{\alpha}_k$ и $\overline{\alpha}_k$, разность между которыми равна $\frac{1}{10^k}$.

При заданном числе a и натуральном числе n число $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$ называется *n-й степенью числа a*. Число a (повторяющийся множитель) называется *основанием степени*, число n (показывающее, сколько раз повторяется множитель) — *показателем степени*.

Первой степенью числа a является само число $a^1 = a$. Вторую степень $a^2 = a \cdot a$ называют еще *квадратом числа a* (или a в квадрате), а третью степень $a^3 = a \cdot a \cdot a$ — *кубом числа a* (или a в кубе).

Для любых положительных чисел a и b, натуральных чисел n и m справедливы следующие равенства:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $m > n$, $a \neq 0$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$; 4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Определим теперь *степень с произвольным целым показателем*. Считаем, что значение 0^0 не определено, а при $a \neq 0$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Для степени с произвольным целым показателем сохраняются все отмеченные выше свойства 1–5; при этом в свойстве 2 требование $m > n$ становится необязательным.

Вычисления с действительными числами. Обычно на практике в качестве суммы и произведения действительных чисел берут числа, полученные в результате соответствующих операций над десятичными приближениями этих чисел. Определение суммы и произведения действительных чисел будет дано в гл. IX.

Основоположники анализа, развивавшие и применявшие анализ в течение столетий, считали очевидным, что с действительными числами можно работать, пользуясь обычными правилами алгебры, справедливыми для рациональных чисел, т. е. свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, а также правилами сравнения, правилами раскрытия скобок и т. д.

Пример 4. Упростить выражение

$$\left(\frac{a-4}{a^2+4a}+\frac{a+4}{a^2-4a}\right)\cdot\frac{a^3}{a^2+16}-\frac{32}{a^2-16}.$$

$$\triangle\quad \left(\frac{a-4}{a^2+4a}+\frac{a+4}{a^2-4a}\right)\cdot\frac{a^3}{a^2+16}-\frac{32}{a^2-16}=$$

$$=\left(\frac{a-4}{a(a+4)}+\frac{a+4}{a(a-4)}\right)\cdot\frac{a^3}{a^2+16}-\frac{32}{a^2-16}=\left(\frac{(a-4)^2+(a+4)^2}{a(a+4)(a-4)}\right)\cdot\frac{a^3}{a^2+16}-\frac{32}{a^2-16}=$$

$$=\frac{2\,\cancel{(a^2+16)}}{\cancel{a}(a^2-16)}\cdot\frac{a^{\cancel{3}2}}{\cancel{(a^2+16)}}-\frac{32}{a^2-16}=\frac{2a^2-32}{a^2-16}=\frac{2\,\cancel{(a^2-16)}}{\cancel{(a^2-16)}}=2. \quad ▲$$

Пример 5. Вычислить приближенно значения выражений $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

△ С помощью микрокалькулятора находим

$$\sqrt{2}=1{,}41421135623\ldots,\qquad \sqrt{3}=1{,}7320508075\ldots .$$

Вычисления с точностью до единицы дают следующий результат:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}4+1{,}7=3{,}1\approx 3 \ \text{ и } \ \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\approx 1{,}4\cdot 1{,}7=2{,}38\approx 2;$$

с точностью до одной десятой:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}41+1{,}73=3{,}14\approx 3{,}1$$

и

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\approx 1{,}41\cdot 1{,}73=2{,}4398\approx 2{,}4;$$

с точностью до одной сотой:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}414+1{,}732=3{,}146\approx 3{,}15$$

и

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\approx 1{,}414\cdot 1{,}732=2{,}449048\approx 2{,}45$$

и т. д. ▲

Геометрическое истолкование действительных чисел. Рассмотрим прямую линию с отмеченными на ней точками 0 и 1 и назовем ее *числовой прямой.*

Покажем, что каждой точке P этой прямой можно сопоставить некоторое действительное число. Пусть данная точка P лежит справа от нуля (рис. 8). Найдем сначала наибольшее целое число a_0 такое, что либо точка P совпала с точкой a_0, либо точка P лежит справа от точки a_0 и слева от точки a_0+1. Если P совпала с точкой a_0, то ей соответствует натуральное число a_0.

Рис. 8

Далее отрезок прямой, заключенный между точками a_0 и a_0+1, делим на десять частей. Считаем, что точкам деления соответствуют рациональные числа $a_0,1$; $a_0,2$; ... $a_0,9$. Теперь находим цифру a_1, наибольшую из цифр 1, ..., 9 такую, что либо точка P совпала с точкой a_0,a_1, либо точка P лежит справа от точки a_0,a_1 и слева от точки $a_0,a_1+\frac{1}{10}$. В случае совпадения точке P соответствует рациональное число a_0,a_1.

Далее отрезок прямой, заключенный между точками a_0,a_1 и $a_0,a_1+\frac{1}{10}$, делим на десять частей и аналогично предыдущему находим цифру a_2 и т. д. В итоге при увеличении k получаем либо некоторое конечное рациональное число $\alpha=a_0,a_1a_2\ldots a_k$, либо бесконечную десятичную дробь $\alpha=a_0,a_1a_2\ldots a_k\ldots$.

Полученное число α назовем *координатой* точки P.

Будем считать, что

1) две различные точки P и Q, лежащие справа от нуля, имеют различные координаты;
2) каждое действительное число $\alpha>0$ является координатой некоторой точки прямой, лежащей справа от нуля.

Обозначим через O точку с координатой 0 и каждой точке Q, лежащей слева от нуля, поставим в соответствие число $-\alpha$, где α — координата точки P, лежащей справа от нуля и такой, что отрезки QO и OP равны.

Таким образом, каждой точке прямой соответствует единственное действительное число, причем каждое действительное число оказывается координатой единственной точки прямой, т. е. *устанавливается взаимно однозначное соответствие между действительными числами и точками прямой.*

Следует отметить, что это соответствие зависит от выбора двух точек с координатами 0 и 1, т. е. от выбора начала координат (точки O) и масштаба.

Рассмотренную выше прямую обычно называют *числовой прямой*.

Отметим *геометрический смысл абсолютной величины* действительного числа α. Число $|\alpha|$ равно *расстоянию* между началом координат и точкой, изображающей на числовой оси число α. Абсолютная величина разности двух действительных чисел $|\alpha-\beta|$ равна расстоянию между точками числовой оси, изображающими данные числа α и β.

Целая и дробная части числа. *Целой частью* $[x]$ действительного числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

Из определения следует, что для любого действительного числа x его целая часть удовлетворяет неравенствам $x-1<[x]\leqslant x$. Например, $[2{,}7]=2$, $[0{,}7]=0$, $[-0{,}7]=-1$, $[-2{,}7]=-3$.

Целая часть обладает рядом важных свойств:

1) если p — целое число, то $[x+p]=[x]+p$;
2) для любых целых x, y справедливо неравенство $[x+y]\geqslant[x]+[y]$;
3) если $[x]=[y]$, то $|x-y|<1$;
4) если n — целое число, $n\neq 0$, то $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$;
5) для любого действительного числа x имеем $[[x]]=[x]$;
6) если $x<y$, то $[x]\leqslant[y]$.

Пример 6. Решить уравнение $\left[\dfrac{5+6x}{8}\right]=\dfrac{15x-7}{5}$.

$\triangle$ Введем замену $t=\dfrac{15x-7}{5}$, где $t\in\mathbb{Z}$, тогда $x=\dfrac{5t+7}{15}$. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$\left[\frac{10t+39}{40}\right]=t.$$

По определению целой части $\alpha-1<[\alpha]\leqslant\alpha$. Следовательно,

$t\leqslant\dfrac{10t+39}{40}<t+1$ или $40t\leqslant 10t+39<40t+40$ или $0\leqslant-30t+39<40$.

Отсюда $-\dfrac{1}{30}<t\leqslant\dfrac{39}{30}$. С учетом того, что t — целое число, получаем, что $t=0$ или $t=1$.

Если $t=0$, то $x=\dfrac{7}{15}$; если $t=1$, то $x=\dfrac{4}{5}$.

Ответ. $\dfrac{7}{15}$; $\dfrac{4}{5}$. ▲

Дробной частью $\{x\}$ действительного числа x называют разность $x-[x]$. Из определения следует, что для любого действительного числа x его дробная часть удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \{x\} < 1$.

Например,

$$\{2{,}7\} = 2{,}7 - [2{,}7] = 2{,}7 - 2 = 0{,}7, \tag{4}$$

$$\{0{,}7\} = 0{,}7 - [0{,}7] = 0{,}7 - 0 = 0{,}7, \tag{5}$$

$$\{-0{,}7\} = -0{,}7 - [-0{,}7] = -0{,}7 - (-1) = 0{,}3, \tag{6}$$

$$\{-2{,}7\} = -2{,}7 - [-2{,}7] = -2{,}7 - (-3) = 0{,}3. \tag{7}$$

Задачи

1. Следующие рациональные числа записать в виде конечных или периодических бесконечных десятичных дробей:

1) $\frac{5}{7}$; 2) $\frac{13}{400}$; 3) $-\frac{17}{63}$; 4) $-\frac{1870}{1496}$; 5) $\frac{39}{625}$.

2. Обратить в обыкновенные следующие дроби:

1) $0,(25)$; 2) $0,(243)$; 3) $-1,(7)$; 4) $5,23(36)$.

3. Вычислить:

1) $(0,(23) + 0,(37)) \cdot 33$; 2) $0,(2) : 0,(123) \cdot 41$;

3) $(0,(32) - 0,(23)) : 0,(25)$; 4) $\frac{0,(12) + 0,(3)}{0,(21) + 0,(39)} + 0,(2) : 0,(8)$.

4. Вычислить:

1) $2,(54) : 0,3(18)$; 2) $121 \cdot 0,(45)$; 3) $66 \cdot (0,1(6) + 0,(45))$;

4) $0,375 \cdot \sqrt{1,(7)}$; 5) $88 \cdot 0,08(3) \cdot 0,(27)$.

5. Доказать, что период десятичной дроби, выражающей число $\frac{m}{n}$, не может быть длиннее, чем $n-1$.

6. Число α иррациональное. Доказать, что число $\frac{1}{\alpha}$ также иррациональное.

7. Приведите пример:

1) двух иррациональных чисел, сумма которых рациональна;

2) двух различных иррациональных чисел, произведение которых рационально.

8. Пусть числа α и β иррациональны, а число r рационально. Выяснить, какие из следующих чисел являются рациональными:

1) $\alpha+\beta$; 2) $\alpha\beta$; 3) $\alpha+r$; 4) αr;

5) $\sqrt{\alpha}$; 6) $\sqrt{r}$; 7) $\sqrt{\alpha+\beta}$; 8) $\sqrt{\alpha+r}$.

9. Доказать, что следующие числа являются иррациональными:

1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$;

4) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$; 5) $\sqrt[3]{3}$; 6) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$.

10. Доказать, что следующие числа являются иррациональными:

1) $0{,}121122111222\ldots$; 2) $2{,}123456789101112\ldots$

11. Пусть a, b и c — целые числа. При каком условии уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет рациональные корни?

12. Пусть n — любое целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < n < 73$. Записать рациональное число $\frac{n}{73}$ в виде бесконечной десятичной дроби

$\frac{n}{73} = 0,a_1a_2a_3\ldots$. Доказать, что в этой записи не содержится двух рядом стоящих одинаковых цифр.

13. Существует ли:

1) наименьшее действительное число, большее 0,37;
2) наибольшее действительное число, меньшее 0,37?

14. 1) Каково наименьшее действительное число, большее 0,37, в десятичную запись которого не входит цифра 9?
2) Каково наибольшее действительное число, меньшее 0,37, в десятичную запись которого не входят цифры 0, 1, 2?

15. Все десятичные приближения числа α по недостатку, начиная с некоторого, совпадают. Рациональным или иррациональным числом является α?

16. Вычислить с ошибкой, не превышающей ε:

1) $6,(3)\cdot 0,9(81)$, $\varepsilon = 10^{-2}$; 2) $0,7(14)\cdot 0,27(16)$, $\varepsilon = 10^{-4}$;
3) $\frac{3,(6)}{2,(17)}$, $\varepsilon = 10^{-2}$; 4) $\frac{101,(1)}{2,9(15)}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

17. Найдите (не пользуясь микрокалькулятором) приближения с точностью до 0,1 следующих иррациональных чисел:

1) $\frac{1}{4-\sqrt{15}}$; 2) $\sqrt{246}$; 3) $\sqrt[3]{5}$; 4) $\sqrt[5]{7}$.

18. Найти первые три цифры десятичного разложения числа $\frac{0,1234\ldots31}{0,3130\ldots21}$ (где в числителе стоят после запятой выписанные подряд числа 1, 2, 3, ..., 31, а в знаменателе — числа 31, 30, ..., 2, 1).

19. Вычислить k знаков после запятой десятичного числа:

1) $\frac{1}{1+10^{-100}}$, где $k = 200$; 2) $\sqrt{1-10^{-100}}$, где $k = 100$.

20. Доказать, что между любыми двумя неравными действительными числами содержится:

1) рациональное число; 2) иррациональное число.

21. Записать с помощью знака модуля следующие неравенства:

1) $-5 < x < 5$; 2) $-3 < x < 7$; 3) $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$; 4) $4 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 9$.

22. Упростить выражения:

1) $2+2x+|1-2x|$; 2) $3x-|2-3x|$; 3) $\frac{|3x+6|}{3x+6}$;
4) $\frac{|x^2+4x+3|}{x^2+4x+3}$; 5) $|7x-14|-|7x-21|$; 6) $|18-9x|-|9x-9|$.

23. Упростить выражения:

1) $||2x-3|-1|+2x$; 2) $|2-|4+3x||-3x$.

24. Упростить выражения:

1) $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}$; 2) $\left(\frac{x-1}{2x+2}-\frac{x+1}{2x-2}\right):\frac{x}{4-4x^2}$;
3) $\frac{2x}{x+1}+\left(\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{3}{x^2-1}\right):\frac{3}{x^2-2x+1}$; 4) $\left(\frac{x+3}{x^2-3x}+\frac{x-3}{x^2+3x}\right)\cdot\frac{9x-x^3}{x^2+9}$;
5) $\left(x-\frac{x^3+8}{2x+x^2}\right)\cdot\frac{x}{(x-2)^2}+\frac{2}{2-x}$; 6) $\left(\frac{x^3+1}{x^2-1}+\frac{3x}{x-1}\right)\cdot\left(1-\frac{2x}{x+1}\right)^2$;
7) $\frac{(x+3)^2}{x}:\left(\frac{x^3-27}{x^2-3x}-x\right)-\frac{x}{3}$.

25. Упростить выражения:

1) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$; 2) $\left(\dfrac{1}{(a+b)^{-2}}-\dfrac{a^3-b^3}{a-b}\right)\cdot(ab)^{-1}$;

3) $\left(\dfrac{a^3+b^3}{a+b}-ab\right):\left(\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\right)^2$; 4) $\left(\dfrac{ab}{a-b}+a\right)\cdot\left(\dfrac{ab}{a+b}-b\right):\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}$.

26. Упростить выражения:

1) $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$;

2) $\dfrac{3a^2+2ab-b^2}{2a^2+3ab+b^2}-\dfrac{a^2-4ab+3b^2}{2a^2-ab-b^2}$.

27. Вычислить значение выражения $\dfrac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\dfrac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$ при $p=0{,}78$, $q=\dfrac{7}{25}$.

28. Найти целую часть числа $\dfrac{1}{\alpha}$, где $\dfrac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$.

29. Доказать следующие утверждения:

1) если $x\notin\mathbb{Z}$, то $[x]+[-x]=-1$; 2) $[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[2x]$;

3) если $[x+y]=[x]+[y]$ и $[-x-y]=[-x]+[-y]$, то $x\in\mathbb{Z}$.

30. Решить уравнения:

1) $[6x]=5$; 2) $[x]+[2x]+[3x]=0$;

3) $[2x+2]=[3x]$; 4) $\left[\dfrac{x-3}{2}\right]=\left[\dfrac{x-2}{3}\right]$.

31. Решить уравнения:

1) $\{x\}^2-\dfrac{3}{4}\{x\}+\dfrac{1}{8}=0$; 2) $\{x\}^2-4{,}5\{x\}+2=0$.

Ответы

1. 1) 0,714285(714285); 2) 0,0325; 3) $-0{,}269841(269841)$; 4) $-1{,}25$; 5) 0,0624. **2.** 1) $\dfrac{25}{99}$; 2) $\dfrac{9}{37}$; 3) $-1\dfrac{7}{9}$; 4) $5\dfrac{257}{1100}$. **3.** 1) 20; 2) 74; 3) 3,6; 4) 1. **4.** 1) 8; 2) 55; 3) 41; 4) 0,5; 5) 2. **13.** 1) Нет; 2) нет. **14.** 1) 0,36(8); 2) 0,37(3). **15.** Число α рациональное. **16.** 1) 6,218; 2) 0,19397; 3) 1,688; 4) 34,68468. **17.** 1) 7,87; 2) 15,68; 3) 1,7; 4) 1,48. **18.** 0,394. **19.** 1) $0,\underbrace{99\ldots99}_{100\text{ цифр}}\underbrace{00\ldots00}_{100\text{ цифр}}\ldots$; 2) $0,\underbrace{99\ldots99}_{100\text{ цифр}}\ldots$ **21.** 1) $|x|<5$; 2) $|x-2|<5$; 3) $2\leqslant|x|\leqslant 3$; 4) $\dfrac{1}{3}\leqslant|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

22. 1) 3, если $x<0{,}5$; $4x+1$, если $x\geqslant 0{,}5$; 2) $6x-2$, если $x<\dfrac{2}{3}$; 2, если $x\geqslant\dfrac{2}{3}$; 3) -1, если $x<-2$; 1, если $x>-2$; 4) 1, если $x<2$ или $x>1$; -1, если $-3<x<-1$; 5) -7, если $x<2$; $14x-35$, если $2\leqslant x<3$, 7, если $x\geqslant 3$; 6) 9, если $x<1$; $-18x+27$, если $1\leqslant x<2$; -9, если $x\geqslant 2$; **23.** 1) 2, если $x<1$; $4x-2$, если $1\leqslant x<1{,}5$; 4, если $1{,}5\leqslant x<2$; $4x-4$, если $x\geqslant 2$; 2) $-6-6x$, если $x<-2$; 6, если $-2\leqslant x<-\dfrac{4}{3}$; $-6x-2$, если $-\dfrac{4}{3}\leqslant x<-\dfrac{2}{3}$; 2, если $x\geqslant-\dfrac{2}{3}$. **24.** 1) $\dfrac{24}{5y-2x}$; 2) 8; 3) 2; 4) -2; 5) 0; 6) $x-1$; 7) 1. **25.** 1) $-\dfrac{ab}{(a+b)^2}$; 2) 1;

3) 1; 4) 1. **26.** 1) 0; 2) $\frac{2a+2b}{2a+b}$. **27.** 0,5. **28.** $\left[\frac{1}{\alpha}\right]=1$. **30.** 1) $\frac{5}{6}\leqslant x<1$; 2) $0\leqslant x<\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant\frac{7}{3}$; 4) $x\in[1;2)\cup[3;7)\cup[8;9)$. **31.** 1) $\frac{1}{2}+n$, $\frac{1}{4}+n$, где $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{1}{2}+n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

§ 3. СТЕПЕНИ И КОРНИ

В предыдущем параграфе была определена степень с натуральным и целым показателем действительного числа a^n, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$.

1. Корень n-й степени из действительного числа

Чтобы ввести степень с рациональным показателем, определим понятие арифметического корня n-й степени из положительного числа.

Определение. *Арифметическим корнем степени* $n\in\mathbb{N}$ из положительного числа a называется положительное число b такое, что $b^n=a$.

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначают $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\frac{1}{n}}$; число n называют *показателем корня*, а число a, стоящее под знаком корня, — *подкоренным выражением*. По определению корня $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$. Квадратный корень обозначают $\sqrt{a}$.

Для любых положительных чисел a и b, натуральных чисел n, m и k справедливы следующие свойства арифметического корня:

1°. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$. 2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$. 3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$.

4°. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$. 5°. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[m\cdot n]{a^{m+n}}$. 6°. $\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$.

7°. Если $0<a<b$, то $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

Корнем степени n из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

При четном n существуют два корня n-й степени из любого положительного числа a; корень n-й степени из числа 0 равен нулю; корней четной степени из отрицательных чисел не существует.

При нечетном n существует корень n-й степени из любого числа a и притом только один; справедливо равенство $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.

Корень второй степени из числа называют *квадратным корнем*, а показатель 2 корня при записи опускают. Корень третьей степени называют *кубическим корнем*.

Для любого действительного a справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a|, & \text{если } n=2k,\\ a, & \text{если } n=2k+1.\end{cases}$$

К перечисленным выше свойствам 1°–7° арифметического корня добавим свойства корня четной степени.

8°. Если $ab \geqslant 0$, то $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}$; если $a < 0$ и $b < 0$, то $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{-a} \cdot \sqrt[2n]{-b}$.

Пример 1. Упростить выражение $\sqrt{a^2 - 4a + 4}$.

$$\triangle \quad \sqrt{a^2 - 4a + 4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2| = \begin{cases} a-2, & \text{если } a \geqslant 2, \\ 2-a, & \text{если } a < 2. \end{cases} \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. Представить выражение $\sqrt{x^2 - 3x - 4}$ в виде произведения двух корней.

$\triangle$ Так как $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$, то выражение $\sqrt{x^2 - 3x - 4}$ определено при $x \geqslant 4$ и $x \leqslant -1$.

а) Если $x \geqslant 4$, то $\sqrt{x^2 - 3x - 4} = \sqrt{(x-4)(x+1)} = \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+1}$;

б) если $x \leqslant -1$, то $\sqrt{x^2 - 3x - 4} = \sqrt{(4-x)(-x-1)} = \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{-(x+1)}$. $\blacktriangle$

Пример 3. Упростить выражение $A = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-2x+1}}$.

$\triangle$ Заметим, что

$\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$, а $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$,

откуда получаем, что $A = \dfrac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$. Так как

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geqslant -1, \\ -x-1, & \text{если } x < -1, \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \geqslant 1, \\ -x+1, & \text{если } x < 1, \end{cases}$$

то рассмотрим выражение A на трех промежутках: $x < -1$, $-1 \leqslant x < 1$ и $x \geqslant 1$.

а) Если $x < -1$, то $A = \dfrac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|} = \dfrac{-x-1+x-1}{-x-1-x+1} = \dfrac{-2}{-2x} = \dfrac{1}{x}$;

б) если $-1 \leqslant x < 1$, то $A = \dfrac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|} = \dfrac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \dfrac{2x}{2} = x$;

в) если $x \geqslant 1$, то $A = \dfrac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|} = \dfrac{x+1-x+1}{x+1+x-1} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$.

Итак, $A = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x < -1 \text{ или } x \geqslant 1, \\ x, & \text{если } -1 \leqslant x < -1. \end{cases}$ $\blacktriangle$

Пример 4. Упростить выражение $\sqrt[4]{16x^4y^8z^{12}}$, где $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\triangle \quad \sqrt[4]{16x^4y^8z^{12}} = \\ = 16^{\frac{1}{4}}|x|^{\frac{4}{4}} \cdot |y|^{\frac{8}{4}} \cdot |z|^{\frac{12}{4}} = 2|x| \cdot |y|^2 \cdot |z|^3 = 2|xz|z^2y^2. \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Вычислить $\sqrt[3]{((2-\sqrt{7})^2)^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{7}$.

$\triangle$ Так как $(a^2)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(a^2\right)^3}=\sqrt{a^6}=\sqrt{\left(a^3\right)^2}=|a^3|=|a|^3$, то

$$\sqrt[3]{((2-\sqrt{7})^2)^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{7}=\sqrt[3]{|2-\sqrt{7}|^3}-\sqrt{7}=$$
$$=|2-\sqrt{7}|-\sqrt{7}=\sqrt{7}-2-\sqrt{7}=-2. \qquad \blacktriangle$$

Пример 6. Вычислить $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

$\triangle$ $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}=$
$$=\sqrt{4+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}-\sqrt{4-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}=$$
$$=\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=$$
$$=\left|2+\sqrt{5}\right|-\left|2-\sqrt{5}\right|=2+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)=4. \qquad \blacktriangle$$

Справедливы следующие формулы, которые называют *формулами сложных радикалов*:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \qquad (1)$$

и

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \qquad (2)$$

Решим пример 6, используя эти формулы.

$\triangle$ Из формулы (1) получаем

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{9+\sqrt{80}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-80}}{2}}+\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-80}}{2}}=\sqrt{5}+2.$$

Аналогично, используя формулу (2), находим

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{9-\sqrt{80}}=\sqrt{5}-2.$$

Значит, $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2-\left(\sqrt{5}-2\right)=4.$ $\blacktriangle$

Иррациональность в знаменателе дроби. Рассмотрим приемы, используемые при освобождении знаменателей дроби от иррациональности.

1) При преобразовании дробей вида $\dfrac{A}{a+c\sqrt{b}}$, $\dfrac{A}{\sqrt{a}+c\sqrt{b}}$ числитель и знаменатель дроби умножаются на $a-c\sqrt{b}$ или $\sqrt{a}-c\sqrt{b}$ соответственно, т. е. на *сопряженное иррациональное выражение*.

2) При преобразовании дробей вида $\dfrac{A}{a \pm c\sqrt[3]{b}}$, $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a} \pm c\sqrt[3]{b}}$ числитель и знаменатель, рассматриваемый как сумма (разность), умножаются на неполный квадрат разности (суммы) для получения суммы (разности) кубов.

3) При преобразовании дробей вида $\dfrac{A}{\sqrt{a} \pm c\sqrt[3]{b}}$ можно, например, используя рекомендации пункта 1, сначала освободиться в знаменателе от $\sqrt{a}$, а далее использовать рекомендации пункта 2.

Пример 7. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}.$$

△ Обозначим $\sqrt[3]{2} = a$, тогда $a^3 = 2$, $A = \dfrac{1}{1 + a + 2a^2} = \dfrac{1}{a^2 + (1 + a + a^2)}$. Умножая числитель и знаменатель полученной дроби на $a - 1$ и применяя формулу разности кубов, запишем A в следующем виде:

$$A = \frac{a-1}{a^2(a-1) + (a^3 - 1)} = \frac{a-1}{3 - a^2} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3 - \sqrt[3]{4}}.$$

Снова применяя формулу разности кубов, получаем

$$A = \frac{(\sqrt[3]{2} - 1)(9 + 3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16})}{(3 - \sqrt[3]{4})(9 + 3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16})} = \frac{7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 3}{23}. \qquad ▲$$

2. Степень с рациональным показателем

Пусть a — действительное число ($a > 0$) и $r = \dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, по определению, число $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ называется *рациональной степенью* $r = \dfrac{m}{n}$ действительного числа a ($a > 0$), т. е.

$$a^r = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Рациональная степень числа a также записывается в виде

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Можно доказать, что выражение a^r не зависит от представления числа r в виде отношения $\dfrac{m}{n}$, т. е. при $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$ выполняется равенство

$$\left(\sqrt[n_1]{a}\right)^{m_1} = \left(\sqrt[n_1]{a}\right)^{m_1}.$$

Для любых рациональных чисел r и s и любых чисел $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ справедливы следующие свойства степени с рациональным показателем:

1°. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. **2°.** $a^r : a^s = a^{r-s}$. **3°.** $(a^r)^s = a^{rs}$.

4°. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$. **5°.** $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

6°. Пусть $0<a<b$. Тогда $a^r<b^r$ при $r>0$ и $a^r>b^r$ при $r<0$.

○ Пусть $r=\frac{m}{n}$ — положительное рациональное число, тогда $m,n\in\mathbb{N}$. По свойству степени с натуральным показателем имеем $a^m<b^m$, а из свойства корня следует, что $\sqrt[n]{a^m}<\sqrt[n]{b^m}$, т. е. $a^r<b^r$. Если же $r<0$, то $-r>0$, и $a^{-r}<b^{-r}$. Отсюда получаем, что $\frac{1}{a^r}<\frac{1}{b^r}$ или $a^r>b^r$. ●

7°. Если $a>1$, то $a^r>1$ при $r>0$ и $0<a^r<1$ при $r<0$. Если $0<a<1$, то $a^r>1$ при $r<0$ и $0<a^r<1$ при $r>0$.

○ Пусть $a>1$. Рассмотрим два случая:

а) $r=\frac{m}{n}>0$, тогда $m,n\in\mathbb{N}$. В этом случае $a^m>1$ и $\sqrt[n]{a^m}>1$, т. е. $a^r>1$.

б) $r=\frac{m}{n}<0$, тогда $-m,n\in\mathbb{N}$. В этом случае $a^{-m}>1$ или $0<a^m<1$, но тогда и $0<\sqrt[n]{a^m}<1$, т. е. $0<a^r<1$.

Аналогично доказываются два случая при $0<a<1$. ●

8°. Пусть $r>s$. Тогда $a^r>a^s$ при $a>1$ и $a^r<a^s$ при $0<a<1$.

○ Из неравенства $r>s$ следует $r-s>0$. Тогда по свойству 7° при $a>1$ выполняется неравенство $a^{r-s}>1$. Умножив обе части последнего неравенства на положительное число a^s, получим $a^r>a^s$.

Аналогично, в случае $0<a<1$ получаем $0<a^{r-s}<1$. Отсюда следует, что $a^r<a^s$. ●

Пример 8. При всех допустимых значениях переменных упростить выражение

$$A=\frac{ab^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{\left(1-\sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}+1\right)^2-\sqrt[3]{a}\right)\left(b^{\frac{1}{3}}+1\right)}+\sqrt[3]{ab}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-\frac{1}{3}}\right).$$

△ Преобразуем первую дробь. Ее числитель равен:

$$ab^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{b^2}-a+1=b^{\frac{2}{3}}(a-1)-(a-1)=(b^{\frac{2}{3}}-1)(a-1)=$$

$$=\left((b^{\frac{1}{3}})^2-1^2\right)\left((\sqrt[3]{a})^3-1^3\right)=(b^{\frac{1}{3}}-1)(b^{\frac{1}{3}}+1)(\sqrt[3]{a}-1)((\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}+1).$$

Знаменатель равен $(1-b^{\frac{1}{3}})((\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}+1)(b^{\frac{1}{3}}+1)$. Следовательно, первое слагаемое равно $1-\sqrt[3]{a}$. Второе слагаемое равно:

$$\sqrt[3]{ab}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-\frac{1}{3}}\right)=\sqrt[3]{ab}\cdot\frac{b^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}}=b^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{a}.$$

Следовательно, $A=1-\sqrt[3]{a}+b^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{a}=1+b^{\frac{1}{3}}$. ▲

3. Степень с действительным показателем

Степень с действительным показателем вводится следующим образом. Пусть b — действительное число, записанное в виде бесконечной десятичной дроби. Рассмотрим $\{b_k\}$ — последовательность десятичных приближений k-го порядка с недостатком для числа b. Тогда предел последовательности $\{a^{b_k}\}$ обозначается a^b и представляет собой действительную степень b числа a (определение понятия предела последовательности будет дано в гл. IX).

Из определения числа a^b вытекает справедливость следующих свойств степени с действительным показателем ($x, y \in \mathbb{R}$).

1°. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. **2°.** $a^x : a^y = a^{x-y}$. **3°.** $(a^x)^y = a^{xy}$.

4°. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$. **5°.** $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $(b \neq 0)$.

6°. Пусть $0 < a < b$. Тогда $a^x < b^x$ при $x > 0$ и $a^x > b^x$ при $x < 0$.

7°. Если $a > 1$, то $a^x > 1$ при $x > 0$ и $0 < a^x < 1$ при $x < 0$. Если $0 < a < 1$, то $a^x > 1$ при $x < 0$ и $0 < a^x < 1$ при $x > 0$.

8°. Пусть $x > y$. Тогда $a^x > a^y$ при $a > 1$ и $a^x < a^y$ при $0 < a < 1$.

Следствие. Если $a > 0, a \neq 1$, то равенство $a^x = a^y$ имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$.

Пример 9. Сравнить числа: 1) 7^{30} и 4^{40}; 2) 2^π и π^2.

△ 1) Имеем $7^{30} = (7^3)^{10} = 343^{10}$ и $4^{40} = (4^4)^{10} = 256^{10}$. Так как $343 > 256$, то из свойств степеней следует, что $343^{10} > 256^{10}$ или $7^{30} > 4^{40}$.

2) Так как $3{,}2 > \pi$, то $2^\pi < 2^{3,2} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{5}} < 8 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 8 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Так как $2^{\frac{1}{2}} < 1{,}44$, то $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} < (1{,}44)^{\frac{1}{2}} = 1{,}2$. Значит $2^\pi < 8 \cdot 1{,}2 = 9{,}6$.

Так как $\pi > 3{,}1$, то $\pi^2 > 3{,}1^2 = 9{,}61$. Следовательно, $\pi^2 > 9{,}61 > 9{,}6 > 2^\pi$. ▲

Пример 10. Упростить выражение $A = \dfrac{a^3 - 3a^2 + 4 + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}}{a^3 + 3a^2 - 4 + (a^2 - 4)\sqrt{a^2 - 1}}$, если $a \geqslant 1$.

△ Так как

$$a^3 - 3a^2 + 4 = a^3 - 4a^2 + a^2 + 4 = a^2(a+1) - 4(a^2 - 1) =$$
$$= (a+1)(a^2 - 4a + 4) = (a+1)(a-2)^2$$

и, аналогично,

$$a^3 + 3a^2 - 4 = (a-1)(a+2)^2,$$

то

$$A = \frac{(a-2)((a+1)(a-2) + (a+2)\sqrt{a^2-1})}{(a+2)((a-1)(a+2) + (a-2)\sqrt{a^2-1})}.$$

Так как $a \geqslant 1$, то $\sqrt{a^2-1}=\sqrt{a-1}\sqrt{a+1}$, и поэтому

$$A=\frac{(a-2)\sqrt{a+1}(\sqrt{a+1}(a-2)+(a+2)\sqrt{a-1})}{(a+2)\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1}(a+2)+(a-2)\sqrt{a+1})}=\frac{a-2}{a+2}\sqrt{\frac{a+1}{a-1}},$$

где $a \neq 1$ и $a \neq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Последнее ограничение следует из условия

$$\sqrt{a+1}(a-2)+(a+2)\sqrt{a-1} \neq 0.$$

Итак, $A=\frac{a-2}{a+2}\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$, если $a>1$, $a \neq \frac{2}{\sqrt{3}}$. ▲

Задачи

1. Вычислить:

1) $\sqrt[12]{25^6\cdot(0{,}027)^4}$; 2) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}+(0{,}027)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $\left(\sqrt[4]{32\cdot\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt[12]{2^5}}$;

4) $0{,}5\cdot\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{3}}-\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$; 5) $2\cdot\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[3]{62{,}5}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{25}}-\frac{\sqrt[3]{0{,}25}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

2. Упростить выражение:

1) $\left(\frac{\sqrt[5]{x^2}\cdot x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{10}{3}}$; 2) $\left(\frac{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}\right)^{\frac{24}{17}}$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[12]{a^{11}}}$; 4) $\frac{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[5]{a}}\cdot\sqrt[6]{a^4\cdot\sqrt[5]{a}}$;

5) $\left(2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{2}{3}}\right)^3\cdot\left(8p^{\frac{1}{4}}q^3\right)^{-\frac{2}{3}}$; 6) $\left(4c^{\frac{1}{2}}d^{-\frac{1}{3}}\right)^2\cdot\left(8c^{-\frac{3}{2}}d^{-2}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

3. Вычислить значение выражения:

1) $\frac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\frac{a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{7}{4}}}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$, если $a=\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$, $b=\sqrt[3]{15}$;

2) $\sqrt[11]{\left(\left(a^4b^5\right)^{\frac{5}{3}}\left(\sqrt{a^3b^5}\right)^4\right)^3}:a^{\frac{5}{11}}$, если $a=\sqrt[3]{4}, b=\sqrt[5]{2}$.

4. Представить в виде произведения корней выражение:

1) $\sqrt{x^2-x-6}$; 2) $\sqrt{2x^2-5x-3}$; 3) $\sqrt{-x^2+3x+4}$.

5. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{1}{1-4\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

6. Сократить дроби:

1) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$; 2) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; 3) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 4) $\frac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$.

7. Упростить выражение:

1) $\left(\dfrac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}:\sqrt{x}}+\dfrac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{u-25u^{-1}}{u^{\frac{1}{2}}-5u^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2u+7+5u^{-1}}{u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}}$; 3) $\dfrac{36z-z^{-1}}{6z^{\frac{2}{3}}+z^{-\frac{1}{3}}}+\dfrac{2z+7+5z^{-1}}{2z^{\frac{2}{3}}+5z^{-\frac{1}{3}}}$;

4) $\dfrac{m^{\frac{4}{3}}-27m^{\frac{1}{3}}n}{m^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}\right)$.

8. Освободиться от радикалов:

1) $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+3xy+9y^2}$; 2) $\sqrt{x^4+6x^2+9}$;

3) $\sqrt{a^4-8a^3b+16a^2b^2}$; 4) $\sqrt{4+\dfrac{8}{a}+\dfrac{4}{a^2}}$.

9. Упростить выражение:

1) $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}$;

2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

10. Вычислить, не пользуясь калькулятором:

1) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$;

3) $\left((1-\sqrt{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}-5\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{5}+\left(\sqrt[6]{(\sqrt{5}-3)^2}\right)^3$.

11. Вычислить, не пользуясь калькулятором:

1) $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{80}+\sqrt[3]{25}}\right)^3$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$;

3) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$; 4) $\sqrt{5}+\sqrt{6\sqrt{14-6\sqrt{5}}-4}$.

12. Сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[5]{5}$; 2) $3^{\sqrt{3}}$ и $(\sqrt{3})^3$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$;

4) $(\sqrt{3})^{\pi}$ и $\pi^{\sqrt{3}}$; 5) $2^{\sqrt{3}}$ и $3^{\sqrt{2}}$.

13. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{2}{2-\sqrt[3]{3}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$;

4) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$; 5) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$.

14. Упростить выражение и вычислить его значение при заданных значениях переменных:

1) $\dfrac{a^2+a-2}{a^4-3a^3}\cdot\left(\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right)-\dfrac{2}{a^4}$, если $a=\sqrt[3]{2}$;

2) $\dfrac{1-b}{\sqrt{b}}x^2-2x+\sqrt{b}$, если $x=\dfrac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}$;

3) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}\cdot\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$, если $a=1-\sqrt{2}, b=1+\sqrt{2}$.

4) $\dfrac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}$, если $a=5-\sqrt{21}$, $b=5+\sqrt{21}$.

15. Упростить выражения:

1) $\sqrt{4m^8+12n^{-2}+9m^{-8}n^{-4}}-2m^4$; 2) $\sqrt{p^4+10q^{-4}+25p^{-4}q^{-8}}-5p^{-2}q^{-4}$;

3) $\sqrt{9a^{-\frac{1}{2}}b+6b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{9a^{-\frac{1}{2}}b+12b^{\frac{1}{2}}+4a^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

16. Упростить выражения:

1) $\dfrac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$, если $0<x<2$;

3) $\dfrac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}$, если $x<-3$;

4) $\dfrac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}$, если $x>3$.

17. Упростить выражения:

1) $\sqrt{\dfrac{a-16\sqrt{ab}+100b}{\sqrt{a}-6\sqrt[4]{ab}+10\sqrt{b}}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b}$;

2) $\sqrt{\dfrac{16a-72\sqrt{ab}+b}{4\sqrt{a}-8\cdot\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}+5\sqrt{b}}-2\cdot\sqrt[4]{a}-2\cdot\sqrt[4]{b}$.

Ответы

1. 1) 1,5; 2) 8,6481; 3) 3; 4) 6; 5) 20,5. **2.** 1) $\sqrt{x}$; 2) x^2; 3) $\sqrt{a}$; 4) a^2; 5) $2p^{\frac{4}{3}}$; 6) $8c^{\frac{3}{2}}$. **3.** 1) 3; 2) 8. **4.** 1) $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+2}$ при $x\geqslant 3$; $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{-x-2}$ при $x\leqslant -2$; 2) $\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-3}$ при $x\geqslant 3$; $\sqrt{-2x-1}\cdot\sqrt{3-x}$ при $x\leqslant -0{,}5$; 3) $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x+1}$. **5.** 1) $-\dfrac{1+4\sqrt{5}}{79}$; 2) $-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; 3) $\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 4) $\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{6}}{12}$. **6.** 1) $\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$; 2) $(a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b)^{-1}$; 3) $\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}$; 4) $\sqrt[4]{b}-a\sqrt{a}$. **7.** 1) $-\sqrt{x}$; 2) $-\sqrt{u}$; 3) $7\sqrt[3]{z}$; 4) $m^{\frac{2}{3}}$. **8.** 1) $|0{,}5x+3y|$; 2) x^2+3; 3) $|a^2-4ab|$; 4) $\dfrac{2|a+1|}{|a|}$. **9.** 1) $1-2\sqrt{x-2}$, если $2\leqslant x<6$; -3, если $x\geqslant 6$; 2) 3, если $1\leqslant x<5$; $2\sqrt{x-1}-1$, если $x\geqslant 5$. **10.** 1) $3-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}-2$; 3) -7; 4) 3. **11.** 1) 5; 2) 0,6; 3) 3; 4) 3. **12.** 1) $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$; 2) $3^{\sqrt{3}}>(\sqrt{3})^3$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $(\sqrt{3})^{\pi}<\pi^{\sqrt{3}}$; 5) $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$. **13.** 1) $1{,}6+0{,}8\cdot\sqrt[3]{3}+0{,}4\cdot\sqrt[3]{9}$; 2) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}$; 3) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+1+\dfrac{\sqrt[6]{32}+\sqrt[6]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\left(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4\right)$;

5) $\frac{\sqrt[3]{30}}{3}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{15}\right)$. **14.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{196}$; 4) 0,25. **15.** 1) $3m^{-4}n^{-2}$; 2) p^2; 3) $-a^{\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{6x}$. **16.** 1) $\sqrt{x}$, если $x > \frac{2}{3}$; $-\sqrt{x}$, если $0 < x < \frac{2}{3}$; 2) $-\sqrt{x}$; 3) $-\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$; 4) $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$. **17.** 1) 0; 2) 0.

§ 4. ЛОГАРИФМЫ

1. Определение логарифма

Рассмотрим уравнение

$$3^x = 243.$$

Записав это уравнение в виде $3^x = 3^5$ и используя свойства степени, получим $x = 5$. В этом случае правую часть уравнения удалось представить в виде степени с основанием 3.

Однако при решении уравнения

$$3^x = 40$$

его правая часть не приводится к виду 3^α, где $\alpha \in \mathbb{Q}$. Чтобы уметь решать подобные уравнения, вводится понятие логарифма.

Рассмотрим уравнение

$$a^x = b, \tag{1}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Корень уравнения (1) называется логарифмом числа b по основанию a.

Определение. *Логарифмом положительного числа b по основанию a*, где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени c, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b = c$.

Операция логарифмирования, заключающаяся в нахождении логарифма числового, алгебраического или иного выражения, определена при $a > 0, a \neq 1$, $b > 0$, так как при $a = 1$ выражение a^x тождественно равно 1 и при $b \neq 1$ значение x не определено, а при $a = b = 1$ соответствующему уравнению удовлетворяет любое число x.

Например, $\log_3 9 = 2$, так как $3^2 = 9$; $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, так как $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $\log_5 5 = 1$, так как $5^1 = 1$; $\log_7 1 = 0$, так как $7^0 = 1$.

Итак, по определению, имеет место равенство

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0.$$

Это равенство называется *основным логарифмическим тождеством*.

Например, $2^{\log_2 5}=5$, $4^{\log_4 0{,}75}=0{,}75$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}} 12}=12$.

Существование корня уравнения (1) для любых действительных чисел a и b таких, что $a>0, a\neq 1, b>0$, является глубоким фактом, доказываемым в курсах математического анализа.

На основании этого факта докажем, что уравнение (1) имеет единственный корень.

○ Для доказательства воспользуемся следующим свойством степени: если $a>1$, то $a^x>a^y$ при $x>y$; если $0<a<1$, то $a^x<a^y$ при $x>y$.

Из этого свойства следует, что уравнение $a^x=b$ при $a>0$, $a\neq 1$ может иметь не более одного решения. Допустим, что существует два различных числа x, y такие, что $a^x=a^y=b$. Пусть для определенности $x>y$. Тогда при $a>1$ получаем $a^x>a^y$, что противоречит равенству двух этих выражений. Аналогично, при $0<a<1$ имеем $a^x<a^y$, что также противоречит предположению. Следовательно, значение $\log_a b$ единственно. ●

Пример 1. Вычислить $\log_9 243$.

△ Обозначим $\log_9 243=x$. По определению логарифма $9^x=243$. Так как $9=3^2$, а $243=3^5$, то $(3^2)^x=3^5$ или $3^{2x}=3^5$, откуда $2x=5$, $x=2{,}5$. ▲

Пример 2. Вычислить $\sqrt{2}^{\,2+\log_2 5}$.

△ Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество, находим

$$\sqrt{2}^{\,2+\log_2 5}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2+\log_2 5}=2^{1+\frac{1}{2}\log_2 5}=2\cdot\left(2^{\log_2 5}\right)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{5}. \quad ▲$$

Пример 3. Решить уравнение $\log_2(3-2x)=3$.

△ По определению логарифма $2^3=3-2x$. Отсюда $x=-2{,}5$. ▲

Пример 4. Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение $\log_{2x}\dfrac{3-2x}{x+1}$.

△ Логарифм определен, если основание удовлетворяет условиям $2x>0$ и $2x\neq 1$, а выражение под знаком логарифма положительно, т. е. $\dfrac{3-2x}{x+1}>0$. Решая последнее неравенство, находим $-1<x<1{,}5$. Учитывая ограничения для основания $x>0$, $x\neq 0{,}5$, окончательно получаем $x\in(0;0{,}5)\cup(0{,}5;1{,}5)$. ▲

Пример 5. Решить уравнение:

1) $3^{2x}+6\cdot 3^x-27=0$; 2) $\log_5^2 x-8\log_5 x=-7$.

△ 1) Пусть $t=3^x$. Получаем уравнение $t^2+6t-27=0$, корнями которого являются числа 3 и -9.

Вернемся к переменной x. Из уравнения $3^x=3$, или $3^x=3^1$, получаем $x=1$.

Уравнение $3^x=-9$ решений не имеет, так как $3^x>0$ для всех x.

2) Аналогично предыдущему введем обозначение $t=\log_5 x$. Получаем уравнение $t^2-8t+7=0$, корнями которого являются числа 1 и 7.

Вернемся к переменной x. Из уравнения $\log_5 x=1$ получаем $x=5$, а из уравнения $\log_5 x=7$ следует $x=5^7$.

Ответ. 1) 1; 2) 5 и 5^7. ▲

2. Свойства логарифмов

При любом $a>0$ $(a\neq 1)$ справедливы следующие свойства.

1°. $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$, $x>0$, $y>0$.

2°. $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$, $x>0$, $y>0$.

3°. $\log_a x^p=p\log_a x$, $\quad x>0$;
если $p=\pm 2n$, $n\in\mathbb{N}$, то $\log_a x^p=p\log_a |x|$, $x\neq 0$.

4°. $\log_{a^p} x=\frac{1}{p}\log_a x$, $\quad x>0$, $\quad p\neq 0$;
если $p=\pm 2n$, $n\in\mathbb{N}$, то $\log_{a^p} x=\frac{1}{p}\log_{|a|} x$, $x>0$, $p\neq 0$.

5°. $\log_a 1=0$.

6°. $\log_a a=1$;

7°. $\log_a x_1>\log_a x_2$, если $a>1$, $x_1>x_2>0$,
и $\log_a x_1>\log_a x_2$, если $0<a<1$, $0<x_1<x_2$.

Докажем свойства 1°–4° и свойство 7°.

○ Свойство 1°. Для доказательства воспользуемся основным логарифмическим тождеством $x=a^{\log_a x}$, $y=a^{\log_a y}$. Перемножая эти два равенства, получим

$$xy=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}=a^{\log_a x+\log_a y}.$$

По определению логарифма из равенства $xy=a^{\log_a x+\log_a y}$ следует, что

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y.$$

Свойство 2°. Аналогично предыдущему, получаем

$$\frac{x}{y}=\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}=a^{\log_a x-\log_a y},$$

следовательно, по определению $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.

Свойство 3°. Из тождества $x=a^{\log_a x}$ получаем $x^p=\left(a^{\log_a x}\right)^p=$ $=a^{p\log_a x}$. Следовательно, по определению $\log_a x^p=p\log_a x$.

Если же p — четно, выражение x^p имеет смысл как при положительном значении числа x, так и при отрицательном. В этом случае $x^p = |x|^p$. Тогда $\log_a x^p = \log_a |x|^p = p\log_a |x|$, $x \neq 0$.

Свойство 4°. Из тождества $x = (a^p)^{\log_{a^p} x} = a^{p\log_{a^p} x}$ по определению логарифма получаем $\log_a x = p\log_{a^p} x$. Из этого равенства следует $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x$, где $x > 0$, $p \neq 0$.

Свойство 7°. Пусть $a > 1$ и $x_1 > x_2 > 0$. Используя основное логарифмическое тождество, условие $x_1 > x_2$ можно переписать в виде $a^{\log_a x_1} > a^{\log_a x_2}$. Из этого неравенства по свойству степени с основанием $a > 1$ следует, что $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

Пусть $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$. Записывая условие $x_1 < x_2$ в виде $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ и используя свойство степени с основанием $0 < a < 1$, получаем $\log_a x_1 > \log_a x_2$. ●

Приведем примеры задач, при решении которых используются свойства логарифмов.

Пример 6. Вычислить $A = \dfrac{\log_2 6 + \log_2 20 - \log_2 15}{\log_3 4\sqrt{2} - \log_3 20\sqrt{6} + \log_3 15\sqrt{3}}$.

△ Используя свойства 1° и 2°, преобразуем числитель и знаменатель выражения:

$$\log_2 6 + \log_2 20 - \log_2 15 = \log_2(6\cdot 20) - \log_2 15 = \log_2 \frac{120}{15} = \log_2 8 = 3;$$

$$\log_3 4\sqrt{2} - \log_3 20\sqrt{6} + \log_3 15\sqrt{3} = \log_3 \frac{4\sqrt{2}}{20\sqrt{6}} + \log_3 15\sqrt{3} =$$

$$= \log_3 \frac{15\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \log_3 3 = 1.$$

В итоге получаем, что $A = 3$. ▲

Пример 7. Вычислить $\log_{32} 128$.

△ Так как $32 = 2^5$, а $128 = 2^7$, то $\log_{32} 128 = \log_{2^5} 2^7$. Применяя свойства 3° и 4°, получаем $\log_{2^5} 2^7 = \frac{1}{5}\log_2 2^7 = \frac{7}{5}\log_2 2 = \frac{7}{5}$. ▲

Пример 8. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c $(c \neq 1)$ имеет место равенство $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

△ Так как $\log_c\left(a^{\log_c b}\right) = \log_c b \cdot \log_c a$ и $\log_c\left(b^{\log_c a}\right) = \log_c a \cdot \log_c b$, то логарифмы чисел, стоящих в левой и правой частях доказываемого равенства, равны, а значит, равны и сами числа, т. е. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$. ▲

Пример 9. Сравнить числа $\log_2 5$ и $\log_3 7$.

△ Подберем число, которое больше одного логарифма и меньше другого. Так как $\log_2 x > \log_2 y$, если $x > y > 0$, то $2 = \log_2 4 < \log_2 5$. Аналогично, $2 = \log_3 9 > \log_3 7$. Значит, $\log_2 5 > \log_3 7$. ▲

Пример 10. Доказать, что число $\log_2 3$ — иррациональное.

$\triangle$ Предположим, что число $r = \log_2 3$ — рациональное, т. е. $r = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда по определению логарифма $2^{\frac{m}{n}} = 3$, т. е. $2^m = 3^n$. Но левая часть последнего равенства — четное число, а правая — нечетное. Следовательно, последнее равенство неверно. Значит r — иррационально. $\blacktriangle$

3. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода

Для логарифмов различных чисел составлены специальные таблицы (таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляются и с помощью микрокалькулятора. В обоих случаях находятся только так называемые десятичные или натуральные логарифмы.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число ($e \approx 2{,}72$), и пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Когда основание a фиксировано, говорят о системе логарифмов по основанию a.

Имеет место формула

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad x > 0,\ b > 0,\ b \neq 1, \quad a > 0,\ a \neq 1, \tag{2}$$

которая называется *формулой перехода к другому основанию.*

Соответственно множитель $\frac{1}{\log_b a}$ называют *модулем перехода* (перевода) от основания a к основанию b. Из формулы (2), в частности, следует, что достаточно знать значения только десятичных или натуральных логарифмов, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию, поскольку

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} \ \text{ и } \ \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Докажем справедливость формулы (2).

$\circ$ Из равенства $x = a^{\log_a x}$ получаем $\log_b x = \log_b \left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \cdot \log_b a$. Из этого равенства следует доказываемая формула

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1. \qquad \bullet$$

Из этой формулы можно получить следующие формулы:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \ \text{ или } \ \log_a b \cdot \log_b a = 1; \tag{3}$$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c. \tag{4}$$

Приведем примеры, при решении которых используются формула перехода к другому основанию и свойства логарифмов.

Пример 11. Вычислить $A = \log_5 15 \cdot (2 - \log_{15} 45)$.

$\triangle$ Так как $2 = 2 \cdot \log_{15} 15 = \log_{15} 225$, то, используя свойства логарифмов, находим $A = \log_5 15 \cdot (\log_{15} 225 - \log_{15} 45) = \log_5 15 \cdot \log_{15} \frac{225}{45} = \log_5 15 \cdot \log_{15} 5 = 1$. $\blacktriangle$

Пример 12. Сравнить числа $\log_{11} 12$ и $\log_{12} 13$.

$\triangle$ Представим данные числа следующим образом:

$\log_{11} 12 = \log_{11}\left(11 \cdot \frac{12}{11}\right) = 1 + \log_{11}\left(1 + \frac{1}{11}\right)$, $\log_{12} 13 = 1 + \log_{12}\left(1 + \frac{1}{12}\right)$.

Так как $1 + \frac{1}{12} < 1 + \frac{1}{11}$, то $\log_{12}\left(1 + \frac{1}{12}\right) < \log_{12}\left(1 + \frac{1}{11}\right) = \dfrac{\log_{11}\left(1 + \frac{1}{11}\right)}{\log_{11} 12}$.

Поскольку $\log_{11} 12 > \log_{11} 11 = 1$, то $\log_{12}\left(1 + \frac{1}{12}\right) < \log_{11}\left(1 + \frac{1}{11}\right)$. Следовательно, $\log_{12} 13 < \log_{11} 12$. $\blacktriangle$

Пример 13. Упростить выражение $\log_{y\sqrt{x}}\left(x\sqrt{y}\right)$, если $\log_{xy^2} x = a$.

$\triangle$ Из условия следует, что $x > 0$, $y > 0$. Рассмотрим два случая.

1) $x = 1$. При этом $y^2 \neq 1$, иначе выражение $\log_{xy^2} x$ теряет смысл. Получим $\log_y \sqrt{y} = \frac{1}{2}$.

2) $x \neq 1$. Переходя к логарифмам с основанием x, получим

$$a = \log_{xy^2} x = \frac{\log_x x}{\log_x xy^2} = \frac{1}{1 + 2\log_x y}.$$

Отсюда $1 + 2\log_x y = \frac{1}{a}$ (деление на a возможно, так как $a \neq 0$ при $x \neq 1$) и $\log_x y = \frac{1-a}{2a}$. Переходя к основанию x, получим

$$\log_{y\sqrt{x}} x\sqrt{y} = \frac{\log_x x\sqrt{y}}{\log_x y\sqrt{x}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\log_x y}{\frac{1}{2} + \log_x y} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-a}{2a}}{\frac{1}{2} + \frac{1-a}{2a}} = \frac{3a+1}{2}.$$

Следовательно, $\log_{y\sqrt{x}}\left(x\sqrt{y}\right) = \frac{3a+1}{2}$ при $x \neq 1$, и $\log_{y\sqrt{x}}\left(x\sqrt{y}\right) = \frac{1}{2}$ при $x = 1$, $y \neq 1$. $\blacktriangle$

Задачи

1. Найти логарифмы чисел по основанию 3:

$1,\ 3,\ 9,\ 81,\ 729,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{243},\ \sqrt[5]{3},\ 9\sqrt[3]{3},\ \frac{1}{3\sqrt{3}},\ \frac{1}{27\sqrt[4]{3}},\ \frac{27}{\sqrt[3]{243}}.$

2. Вычислить:

1) $\log_6 216$; 2) $\log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}}$; 3) $\log_7 \frac{1}{49\sqrt{7}}$; 4) $\log_{13} \frac{1}{13\sqrt{13}}$;

5) $\log_{128} 64$; 6) $\log_{243} 81$; 7) $\log_{125} 625$; 8) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[4]{3}}$;

9) $\sqrt{\log^2_{\sqrt{5}} \frac{1}{125}}$; 10) $\sqrt{\log^2_{\sqrt{11}} \frac{1}{121}}$.

3. Вычислить:

1) $5^{\log_5 4}$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{\frac{3}{5}} 16}$; 3) $3^{2\log_3 7}$; 4) $7^{2\log_{49} 4}$;

5) $8^{\log_2 9}$; 6) $3^{\log_{\frac{1}{3}} 25}$; 7) $25^{-2\log_5 3}$; 8) $4^{\log_{16} 81}$.

4. Вычислить:

1) $\log_3 \log_2 8$; 2) $\log_2 \log_5 625$; 3) $3\log_{64} \log_{10} 100$;

4) $\frac{1}{2}\log_{25} \log_2 32$; 5) $3\log_3 \log_6 216 + \log_{0,5} 2$; 6) $2\log_4 \log_{16} 256 - \log_{\sqrt{2}} 16$.

5. Решить уравнения:

1) $2^x = 7$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 2$; 3) $5^x = \frac{4}{3}$; 4) $7^{x-3} = 2$; 5) $3^{2x+3} = 4$.

6. Решить уравнения:

1) $\log_3 x = 6$; 2) $\log_{0,5} x = 3$; 3) $\log_3(2x+3) = 3$;

4) $\log_5(3x-2) = -2$; 5) $\log_3 \frac{1}{x+1} = 2$.

7. Вычислить:

1) $3^{1+\log_3 4} + 2^{\log_2 3 - 2} \cdot 5^{\log_5 4}$; 2) $2^{2-2\log_4 3} + 5^{2\log_5 \frac{2}{\sqrt{3}}+1}$;

3) $7^{\log_{49} 9+1} - 3^{2\left(\log_{81} 3 + \frac{1}{4}\right)}$.

8. Выяснить, при каких значениях x выражение имеет смысл:

1) $\log_5(36 - x^2)$; 2) $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6)$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(3 - 7x + 2x^2)$; 4) $\log_2 \frac{3-2x}{3x+1}$.

9. Решить уравнения:

1) $5^{2x} + 5^x - 12 = 0$; 2) $16^x - 4^x - 6 = 0$;

3) $8\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 30 = 0$; 4) $\left(\frac{1}{81}\right)^x - 5\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 = 0$.

10. Решить уравнения:

1) $\log^2_2 x - 3\log_2 x = 4$; 2) $\log^2_2 x + \frac{3}{2}\log_2 x = 1$;

3) $\log^2_7 x + 2,5\log_7 x - 1,5 = 0$; 4) $\log^2_3 x + 5\log_3 x + 6 = 0$.

11. Вычислить:

1) $\log_2 \frac{1}{4\sqrt{2}} - \log_3\left(\frac{\sqrt[4]{3\sqrt{3}}}{9}\right) + \log_4\left(\frac{\sqrt[3]{16}}{64\sqrt{2}}\right) + \log_5\left(\frac{125}{\sqrt[3]{25\sqrt{5}}}\right)$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} + \log_{\sqrt[3]{2}} 8 - \log_{\frac{1}{6}} \sqrt[4]{216} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt[4]{64\sqrt{2}}$.

3) $\left(3\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{128}} - \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{32} + \log_{\frac{3}{16}} \frac{3\sqrt{3}}{64}\right) : \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{8}$.

12. Вычислить:

1) $\frac{1-\log_{54} 2}{\log_{54} 3}$; 2) $\frac{2\log_{162} 4}{\log_{162} 3}$; 3) $\frac{\log_{2\sqrt{15}} 2}{1-\log_{60} 15}$; 4) $\frac{\log_{6\sqrt{2}} 2\sqrt{2}}{1-\log_{72} 9}$.

13. Вычислить:

1) $\log_3 2 \cdot \log_8 3$; 2) $\log_4 3 \cdot \log_3 16$; 3) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{15} 16$.

14. Расположить числа в порядке возрастания:

1) $\log_5 4$, $\log_{0,5} 5$, $\log_{25} 3$; 2) $\log_6 5$, $\log_{0,6} 6$, $\log_{36} 4$.

15. Определить знак числа:

1) $\log_2(1 - \log_7 3)$; 2) $\log_2(1 + \log_7 0,5)$;

3) $\log_4 \dfrac{1 + \log_2 5}{3}$; 4) $\log_3 ((\log_4 7 + 1) \cdot 0,4)$.

16. Сравнить числа:

1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$ и 1; 2) $2,5^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ и $0,4^{-0,5}$.

17. Решить уравнения:

1) $\log_3 x = 4\log_9 2 - 2\log_{\frac{1}{3}} 7$; 2) $\log_5 x - 2\log_{\frac{1}{5}} x = 6$;

3) $\log_3 x = 3\log_{27} 125 - 6\log_{\frac{1}{9}} 2$; 4) $\log_{16} x^2 + \log_{\sqrt{2}} x = 5$.

18. Доказать, что число r — иррациональное:

1) $r = \log_3 5$; 2) $r = \log_6 72$.

19. Сравнить числа:

1) $\log_5 3$ и $\dfrac{2}{3}$; 2) $\log_2 5$ и $\dfrac{7}{3}$; 3) $\log_8 5$ и $\log_6 5$; 4) $\log_7 29$ и $\log_6 13$.

20. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\log_a \sqrt{a^2-1} \cdot \log^2_{\frac{1}{a}} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2} \sqrt{a^2-1} \cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}}$; 2) $\dfrac{1 - \log_{\frac{1}{a}} b^{-2} + \log^2_a b}{\left(1 - \log_{\sqrt{a}} b + \log^2_a b\right)^{\frac{1}{2}}}$.

21. Вычислить:

1) $5^{\log_{\frac{1}{5}} 0,5} + \log_{\sqrt{2}} \dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{10+2\sqrt{21}}$;

2) $7^{\log_{\sqrt{7}} 2} + \log_{\sqrt{3}} \dfrac{27}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{7+2\sqrt{10}}$.

22. Известно, что $\lg 2 \approx 0,301$, $\lg 3 \approx 0,477$, $\lg 7 \approx 0,845$. Найти приближенное значение:

1) $\lg 5$; 2) $\log_3 5$; 3) $\log_2 3$; 4) $\log_5 0,125$; 5) $\log_{0,3} 4,9$.

23. Вычислить:

1) $\dfrac{2\log_2 5}{\log_4 25} - \dfrac{\log_3 4}{2\log_9 2}$; 2) $\dfrac{\log_5 2}{\log_5 6} + \dfrac{\log_4 3}{\log_4 6}$;

3) $\dfrac{4}{\log_2 100} + \log_{\sqrt{10}} 5$; 4) $\dfrac{4}{\log_3 225} + \log_{\sqrt{15}} 5$.

24. Выразить данный логарифм через a и b:

1) $\log_{200} 900$, если $a = \log_5 2$, $b = \log_5 3$;
2) $\log_{90} 16$, если $a = \lg 5$, $b = \lg 3$;
3) $\log_{300} 360$, если $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$;
4) $\log_{350} 140$, если $a = \log_5 2$, $b = \log_7 5$.

25. Вычислить:

1) $\dfrac{\log_3 216}{\log_8 3} - \dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$; 2) $\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2} - \dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$;

3) $\dfrac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \dfrac{\log_5 750}{\log_6 5}$; 4) $\dfrac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \dfrac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$.

26. Найти значения выражений:

1) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{b}$, если $\log_b 27 = a$; 2) $\log_4 \sqrt[3]{a}$, если $\log_a 32 = b$;

3) $\log_a (b^3 a)$, если $\log_b a = 6$; 4) $\log_b (a^7 b^3)$, если $\log_a b = 14$.

27. Вычислить:

1) $3^{\lg^2 5} - 5^{\lg 3 \lg 5}$; 2) $3^{\lg 2} - 2^{\lg 3}$;

3) $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$; 4) $A^{\frac{\lg(\lg A)}{\lg A}}$.

28. Доказать формулы:

1) $\dfrac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$;

2) $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, $b \neq 1$, $c \neq 1$, $d \neq 1$.

29. Найти значения выражений:

1) $\log_{\frac{y}{x}} y$, если $\log_{xy}(x^2 y) = a$; 2) $\log_{xy^2} xy$, если $\log_x y - \log_y x = \dfrac{3}{2}$;

3) $x^6 - y^5$, если $\log_{\frac{x}{y}} x = 2 \log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} x$; 4) xy^2, если $\log_{xy} y = 2 \log_x y$.

30. Сравнить числа:

1) $\log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_5 \dfrac{1}{3}$ и -2; 2) $\log_7 11 + \log_{11} 7$ и 2;

3) $2^{\log_3 5}$ и $5^{\log_3 2}$; 4) $4^{\log_5 7}$ и $7^{\log_5 4}$.

31. Упростить выражения:

1) $\dfrac{\log_a b + \log_a \left(b^{0,5 \log_b a^2}\right)}{\log_a b + \log_{ab} b} \cdot \dfrac{\log_{ab} b \cdot \log_a b}{b^{2 \log_b \log_a b} - 1}$,

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $ab \neq 1$;

2) $\left(\lg^2 a - \lg^2 b\right) : \sqrt{\lg^2 ab - \lg a^2 \cdot \lg b^2}$;

3) $\sqrt{6 \cdot (\log_b a \cdot \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b} - \log_a b$ при $a > 1$.

Ответы

1. 0, 1, 2, 4, 6, -1, -3, -5, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{3}$, $-1{,}5$, $-\frac{13}{4}$, $\frac{4}{3}$. **2.** 1) 3; 2) 5; 3) $-2{,}5$; 4) $-2{,}5$; 5) $\frac{6}{7}$; 6) $\frac{4}{5}$; 7) $\frac{4}{3}$; 8) $-2{,}5$; 9) 6; 10) 4. **3.** 1) 4; 2) 16; 3) 49; 4) 4; 5) 729; 6) $\frac{1}{25}$; 7) $\frac{1}{81}$; 8) 9. **4.** 1) 1; 2) 2; 3) 0,5; 4) 0,25; 5) 2; 6) -7. **5.** 1) $\log_2 7$; 2) $\log_{\frac{3}{4}} 2$; 3) $\log_5 \frac{4}{3}$; 4) $\log_7 2 + 3$; 5) $\frac{\log_3 4 - 3}{2}$. **6.** 1) 3^6; 2) $\frac{1}{8}$; 3) 12; 4) $\frac{17}{25}$; 5) $-\frac{8}{9}$. **7.** 1) 15; 2) 8; 3) 18. **8.** 1) $-6<x<6$; 2) $x<2$, $x>3$; 3) $x<0{,}5$, $x>3$; 4) $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$. **9.** 1) $\log_5 3$; 2) $\log_4 3$; 3) $x_1 = \log_{\frac{1}{5}} 4$, $x_2 = \log_{\frac{1}{5}} 60$; 4) $\log_{\frac{1}{9}} 6$.

10. 1) $x_1=16$, $x_2=0{,}5$; 2) $x_1=4$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $x_1=\frac{1}{343}$, $x_2=\sqrt{7}$; 4) $x_1=\frac{1}{8}$, $x_2=\frac{1}{4}$. **11.** 1) $-\frac{25}{24}$; 2) 2; 3) $\frac{4}{3}$. **12.** 1) 3; 2) 8; 3) 1; 4) 1. **13.** 1) $\frac{1}{3}$. Указание. Внести первый множитель как показатель степени в логарифм. 2) 2; 3) 4. Указание. Вносить последовательно последний множитель в логарифм предпоследнего. **14.** 1) $\log_{0,5}5$, $\log_{25}3$, $\log_5 4$; 2) $\log_{0,6}6$, $\log_{36}4$, $\log_6 5$. **15.** 1) Минус; 2) минус; 3) плюс; 4) минус. **16.** 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)}>1$; 2) $2{,}5^{\frac{\sqrt{5}}{6}}<0{,}4^{-0{,}5}$. **17.** 1) 196; 2) 25; 3) 1000; 4) 4. **19.** 1) $\log_5 3>\frac{2}{3}$; 2) $\log_2 5<\frac{7}{3}$; 3) $\log_6 5>\log_8 5$; 4) $\log_7 29>\log_6 13$. **20.** 1) $\log_a(a^2-1)$; 2) $\log_a\frac{a}{b}$, если $a>1$ и $0<b<a$ или $0<a<1$ и $a<b$; $\log_a\frac{b}{a}$, если $1<a<b$ или $0<b<a<1$. **21.** 1) 6; 2) 10. **22.** 1) 0,699; 2) 1,465; 3) 1,585; 4) $-1{,}292$; 5) 3,231. **23.** 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 2. **24.** 1) $\frac{2+2(a+b)}{2+3a}$; 2) $\frac{4(1-a)}{1+2b}$; 3) $\frac{3+2a+ab}{2+2ab+a}$. Указание. Используйте формулу $ab=\log_2 3\cdot\log_3 5=\log_2 5$. 4) $\frac{1+b+2ab}{1+2b+ab}$. **25.** 1) -2; 2) -3; 3) 2; 4) 3. **26.** 1) a^{-1}; 2) $\frac{5}{6b}$; 3) 1,5; 4) 3,5. **27.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $\lg A$. **29.** 1) $\frac{2-a}{3-2a}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0, если $x\neq 1$; $1-y^5$, если $x=1$ $(y>0, y\neq 1)$; 4) 1, если $y\neq 1$; x, если $y=1$ $(x>0, x\neq 1)$. **30.** 1) $\log_{\frac{1}{3}}5+\log_5\frac{1}{3}<-2$; 2) $\log_7 11+\log_{11}7>2$; 3) числа равны; 4) числа равны. **31.** 1) $(\log_a b-1)^{-1}$; 2) $\lg ab$, если $a>b>0$; $-\lg ab$, если $0<a<b$; 3) $3-2\log_a b$, если $0<b<a^3$; -3, если $b\geqslant a^3$, $a>0$, $a\neq 1$.

§ 5. СУММИРОВАНИЕ

1. Арифметическая прогрессия

1) *Арифметическая прогрессия* — числовая последовательность $\{a_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для данной последовательности числом d, т. е.

$$a_{n+1}=a_n+d.$$

Число d называется *разностью* арифметической прогрессии, число a_1 — *первым ее членом*, а число a_n — *общим ее членом*.

Иногда рассматривается не вся последовательность, являющаяся арифметической прогрессией, а лишь ее первые несколько членов. В этом случае говорят о *конечной арифметической прогрессии*.

2) Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

3) Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т. е. при $k\geqslant 2$ справедливо равенство

$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}.$$

4) Пусть S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии, т. е. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Тогда S_n выражается формулой
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Пример 1. Разность арифметической прогрессии равна 4, сумма первых ее семи членов равна 105. Найти первый и десятый члены этой прогрессии.

△ Так как $d = 4$, то по формуле $S_7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7$ получим
$$105 = \frac{2a_1 + 24}{2} \cdot 7 = 7(a_1 + 12).$$
Отсюда $a_1 + 12 = 15$, $a_1 = 3$. Тогда $a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \cdot 4 = 39$. ▲

Пример 2. Сумма первых n членов арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, равна половине суммы следующих n членов. Найти отношение суммы первых $3n$ членов этой прогрессии к сумме ее первых n членов.

△ По условию задачи $2S_n = S_{2n} - S_n$. Получаем $3S_n = S_{2n}$ или
$$3 \cdot \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(2n-1)}{2} \cdot 2n.$$
Отсюда следует
$$2a_1 = d(n+1).$$
Подставляя $2a_1$ в искомое отношение, получим
$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{2a_1 + d(3n-1)}{2a_1 + d(n-1)} \cdot 3 = \frac{d(n+1) + d(3n-1)}{d(n+1) + d(n-1)} \cdot 3 = 6. \quad ▲$$

Пример 3. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 4.

△ Так как $100 = 7 \cdot 14 + 2$, то первым трехзначным числом, дающим в остатке 4, будет 102. Следующим будет 109, затем 116 и т. д. Ясно, что эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 7$.

Так как $1000 = 7 \cdot 142 + 6$, то последним трехзначным числом, удовлетворяющим условию задачи, будет 998.

Найдем количество членов. Имеем $998 = 102 + 7(n-1)$, отсюда $n = 129$. Наконец, искомая сумма равна
$$102 + 109 + \ldots + 998 = \frac{102 + 998}{2} \cdot 129 = 70\,950. \quad ▲$$

Пример 4. Пусть S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии. Доказать, что
$$S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n.$$

△ Так как $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, $S_{n+2} = S_n + a_{n+1} + a_{n+2}$, то $3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n = S_n + 3a_{n+2}$. С другой стороны, $S_{n+3} = S_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = S_n + 3a_{n+2}$. Следовательно, левая и правая части исходного соотношения равны. ▲

2. Геометрическая прогрессия

1) *Геометрическая прогрессия* — числовая последовательность $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ненулевых чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же ненулевое число:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Число q называется ***знаменателем*** геометрической прогрессии, число b_1 — ***первым ее членом***, а число b_n — ***общим ее членом***.

2) Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

3) Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению его соседних членов, т. е. при $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}.$$

Если $b_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, т. е. $b_1 > 0$ и $q > 0$, то

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}},$$

т. е. каждый член такой геометрической прогрессии равен среднему геометрическому его соседних членов.

4) Пусть S_n — сумма первых n членов геометрической прогрессии, т. е. $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Тогда S_n выражается формулой

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ если } q \neq 1, \text{ и } S_n = nb_1 \text{ при } q = 1.$$

Пример 5. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 30, а сумма следующих четырех членов равна 480. Найти первый член прогрессии.

$\triangle$ Пусть b_1 — первый член, а q — знаменатель данной прогрессии. Тогда

$$S_4 = b_1 \frac{1-q^4}{1-q} = 30.$$

Следующие четыре члена b_1q^4, b_1q^5, b_1q^6, b_1q^7 образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1q^4 и знаменателем q, тогда

$$b_1q^4 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 480.$$

Отсюда получаем

$$b_1q^4 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = q^4 \cdot S_4 = 480 \text{ или } q^4 = 16,$$

т. е. $q = 2$ или $q = -2$. Если $q = 2$, то $b_1 = 2$, а если $q = -2$, то $b_1 = -6$. $\blacktriangle$

Пример 6. Найти сумму $3+33+333+\ldots+\underbrace{33\ldots33}_{n\text{ цифр}}$.

$\triangle$ Пусть $A=3+33+333+\ldots+\underbrace{33\ldots33}_{n\text{ цифр}}=3\cdot(1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ цифр}})$.

Заметим, что

$$\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ цифр}}=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots99}_{n\text{ цифр}}=\frac{1}{9}\cdot(10^n-1).$$

Тогда $A=3\cdot\left(\frac{10-1}{9}+\frac{100-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}\right)=\frac{10+100+\ldots+10^n-n}{3}$.

Учитывая, что $10+100+\ldots+10^n=10\cdot\frac{1-10^n}{1-10}=\frac{10^{n+1}-10}{9}=\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ цифр}}0$,

получаем $A=\dfrac{\overbrace{11\ldots11}^{n\text{ цифр}}0-n}{3}$. ▲

Пример 7. Сумма первых 7 членов геометрической прогрессии равна A, четвертый ее член равен B. Найти сумму обратных величин первых 7 членов прогрессии.

$\triangle$ По условию $b_4=b_1q^3=B$, $S_7=\frac{b_1(q^7-1)}{q-1}=A$.

Выразим через A и B сумму обратных величин:

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_7}=\frac{1}{b_1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^7}{1-\frac{1}{q}}=\frac{1}{b_1}\cdot t\frac{q^7-1}{q-1}\cdot\frac{1}{q^6}=$$

$$=\frac{b_1(q^7-1)}{q-1}\cdot\frac{1}{b_1^2q^6}=A\cdot\frac{1}{(b_1q^3)^2}=\frac{A}{B^2}. \qquad ▲$$

3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой по абсолютной величине меньше 1, называется *бесконечно убывающей геометрической* прогрессией. В этом случае (т. е. при условии $|q|<1$) существует *сумма всех членов прогрессии* $S=b_1+b_2+b_3+\ldots$. Она определяется как *число, к которому стремится сумма* $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ *первых ее* n *членов при бесконечном возрастании* n. Формула суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеет вид

$$S=\frac{b_1}{1-q}\quad(|q|<1).$$

Пример 8. В круг радиуса R вписан квадрат, в этот квадрат вписан круг, затем в круг снова квадрат и т. д. Найти сумму площадей всех кругов.

$\triangle$ Как показывают несложные расчеты, радиус второго круга равен

$$R\cos\frac{\pi}{4} = R\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Радиус третьего круга равен $R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ и т. д. Следовательно, площади вложенных кругов равны

$$S_0 = \pi R^2, \quad S_1 = \pi R^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \quad S_2 = \pi R^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4, \quad S_3 = \pi R^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6, \ldots,$$

т. е. образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$ и первым членом $b_1 = \pi R^2$. Поэтому сумма площадей кругов равна

$$\frac{b_1}{1-q} = \frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi R^2. \qquad \blacktriangle$$

Пример 9. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 2, а сумма их квадратов равна 1. Найти сумму кубов всех членов прогрессии.

$\triangle$ По условию $\frac{b_1}{1-q} = 2$, $\frac{b_1^2}{1-q^2} = 1$. Решив эту систему, получим $b_1 = \frac{4}{5}$, $q = \frac{3}{5}$. Теперь вычислим сумму кубов:

$$b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots = \frac{b_1^3}{1-q^3} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^3}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{32}{49}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 10. Решить неравенство $x + x^3 + x^5 + \ldots < \frac{3}{8}$.

$\triangle$ Для того чтобы существовала сумма, стоящая в левой части неравенства, должно быть выполнено условие $|q| < 1$. В нашем случае оно принимает вид $x^2 < 1$, т. е. $-1 < x < 1$. Теперь применим формулу суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Получим $\frac{x}{1-x^2} < \frac{3}{8}$. Так как $1 - x^2 > 0$, то можно умножить обе части неравенства на $1 - x^2$. Получим $8x < 3 - 3x^2$. Решение этого неравенства есть $-3 < x < \frac{1}{3}$. Учитывая, что $-1 < x < 1$, получим окончательный ответ: $-1 < x < \frac{1}{3}$. $\blacktriangle$

Замечание. При $x = 0$, строго говоря, мы не можем считать последовательность x, x^3, $x^5, \ldots$ геометрической прогрессией (в определении прогрессии есть условие $q \neq 0$). Однако сумму бесконечного числа слагаемых, все из которых равны 0, естественно считать также равной 0. Поэтому $x = 0$ мы считаем одним из решений данного неравенства.

4. Суммирование. Формулы суммы (разности) n-х степеней

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — заданные числа, то их сумма обозначается $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

где k называют *индексом суммирования*.

Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, а операция суммирования обладает свойством линейности, т. е. для любых чисел α и β справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Справедливо равенство

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_{k+m},$$

которое показывает, что если индекс суммирования увеличивается на m единиц, то пределы суммирования ($m+1$ и $m+p$) уменьшаются на m единиц.

В частности,

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}.$$

Пример 11. Вычислить сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)$.

$\triangle$
$$S = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) =$$
$$= a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \ldots + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_1. \quad \blacktriangle$$

Пример 12. Вычислить сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{49} \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$.

$\triangle$ Так как $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3}\right)$, то

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{49} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{101}\right) = \frac{98}{2 \cdot 3 \cdot 101} = \frac{49}{303}. \quad \blacktriangle$$

Пример 13. Вычислить сумму $S=\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

$\triangle$ $S=\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$. Рассмотрим тождество

$$(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1.$$

Полагая в этом тождестве $x=1,\ 2,\ldots,n$ и складывая почленно получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$, то, используя результат примера 11, получаем

$$(n+1)^3-1=3S+\frac{3}{2}n(n+1)+n,$$

откуда

$$S=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 14. Доказать, что для любого натурального $n\geqslant 2$ справедливы равенства

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-2})= \\ =(a-b)\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}b^{k-1}, \tag{1}$$

$$a^{2n+1}-b^{2n+1}=(a-b)(a^{2n}+a^{2n-1}b+\ldots+ab^{2n-1}+b^{2n})= \\ =(a-b)\sum_{k=1}^{2n+1}a^{2n+1-k}b^{k-1}, \tag{2}$$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n})= \\ =(a+b)\sum_{k=1}^{2n+1}a^{2n+1-k}(-1)^{k-1}b^{k-1}. \tag{3}$$

$\triangle$ Воспользуемся методом математической индукции. При $n=2$ равенство (1) является верным: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Покажем, что если справедливо равенство (1), то является верным и равенство, получаемое из (1) заменой n на $n+1$.

Воспользуемся тем, что

$$a^{n+1}-b^{n+1}=a^{n+1}-ab^n+ab^n-b^{n+1}=a(a^n-b^n)+b^n(a-b).$$

Отсюда, используя формулу (1), получаем

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k}b^{k-1} + b^n\right) = \\ = (a-b)\sum_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k}b^{k-1}. \qquad (4)$$

Так как равенство (4) можно получить из равенства (1) заменой n на $n+1$, то формула (1), согласно методу математической индукции, верна при любом $n \geqslant 2$.

Заменив в формуле (1) n на $2n+1$, получим равенство (2), а из равенства (2) можно получить равенство (3), заменив b на $-b$. ▲

5. Бином Ньютона

Вам знакомы формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ и } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Эти формулы являются частным случаем общей формулы, которая будет доказана в этом разделе.

Теорема. При любых a, b и при любом $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n, \qquad (5)$$

где

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k. \qquad (6)$$

Правую часть формулы (5) называют *разложением степени бинома*, числа C_n^k — *биномиальными коэффициентами*, слагаемое $C_n^k a^{n-k}b^k$ — $(k+1)$-*м членом разложения бинома.*

В сокращенной форме формулу (5) можно записать в виде

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k.$$

○ Воспользуемся методом математической индукции. При $n=1$ формула (5) верна, так как ее правая часть равна левой: $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = a+b$.

Предполагая справедливым равенство (5), докажем, что верна формула

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k. \qquad (7)$$

Умножая обе части равенства (5) на $(a+b)$, получаем

$$(a+b)^{n+1}=A_n+B_n,$$

$$A_n=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k,$$

$$B_n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1}=\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k+b^{n+1}.$$

Следовательно,

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right) a^{n+1-k} b^k+b^{n+1}. \qquad (8)$$

Сравнивая правые части равенств (7) и (8), заключаем, что для доказательства формулы (7) достаточно доказать, что

$$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k. \qquad (9)$$

Используя соотношения (6), находим

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=C_{n+1}^k.$$

Равенство (9) доказано, и поэтому справедливо равенство (7). Итак, формула (5) верна при любом $n \in \mathbb{N}$. ●

Формулу (5) можно записать в виде

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k, \text{ где } 0!=1.$$

Из соотношений (6) следует также, что $C_n^k=C_n^{n-k}$.

Общий член разложения. Обычно для общего члена разложения степени бинома вводится обозначение T_{k+1}, т. е. $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$. При этом нижний индекс $k+1$ обозначает порядковый номер члена разложения, считая слева направо. Целесообразность такого порядкового номера определена тем, что при изменении k от 0 до n получаются все члены разложения. Так,

1-й член T_1 получается при $k=0$, т. е. $T_1=T_{0+1}=C_n^0 a^{n-0} b^0=a^n$;

2-й член T_2 получается при $k=1$, т. е. $T_2=T_{1+1}=C_n^1 a^{n-1} b^1$;

. . . .

m-й член T_m равен $T_m=T_{(m-1)+1}=C_n^{m-1} a^{n-(m-1)} b^{m-1}$;

. . . .

$(n+1)$-й член $T_{n+1}=C_n^n a^{n-n} b^n=b^n$.

Пример 15. Найти 8-й член разложения степени бинома $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[7]{2}}\right)^{16}$.

$\triangle$ $T_8=T_{7+1}=C_{16}^7\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^{16-7}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{2}}\right)^7=\frac{16!}{7!\cdot 9!}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^9\left(\frac{1}{\sqrt[7]{2}}\right)^7=45760.$ $\blacktriangle$

Пример 16. Найти не зависящий от x член разложения степени бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{12}$.

$\triangle$ Используя формулу общего члена разложения, получим

$$T_{k+1}=C_{12}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{12-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_{12}^k x^{\frac{12-k}{3}}x^{-k}=C_{12}^k x^{\frac{12-k}{3}-k}.$$

Для того чтобы член не зависел от x, требуется, чтобы показатель степени у x равнялся нулю, т. е. $\frac{12-k}{3}-k=0$. Последнее равенство возможно только при $k=3$. Следовательно, член разложения T_4 не зависит от x и $T_4=C_{12}^3$. $\blacktriangle$

Пример 17. Вычислить сумму $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k$.

$\triangle$
$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot 1^{n-k}\cdot 1^k=(1+1)^n=2^n.$$

Полученная формула представляет собой одно из свойств биномиальных коэффициентов. $\blacktriangle$

Пример 18. Вычислить сумму $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$.

$\triangle$ Используя равенство

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k+1)k!}=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(k+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1},$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^k=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$ $\blacktriangle$

Задачи

1. Найти сумму:

1) $1+2+\ldots+n$; 2) $2+4+\ldots+(2n+2)$;

3) $1+3+5+\ldots+(2n+1)$; 4) $3+8+13+\ldots+(5n+3)$.

2. Найти сумму:

1) $100^2-99^2+98^2-\ldots+2^2-1^2$;

2) $2^2-4^2+6^2-8^2+\ldots+(4n-2)^2-(4n)^2$.

3. Найти разность арифметической прогрессии, если сумма первых 100 ее членов на 50 больше, чем сумма следующих за ними 100 членов.

4. 1) Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, кратных 7, начиная с 7, чтобы их сумма была равна 252?

2) Найти сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 2.

3) Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, каждое из которых кратно 7 и не превосходит 353.

5. Решить уравнение:

1) $2+5+8+\ldots+(3n+2)=155,\ n\in\mathbb{N};$

2) $(x+1)+(x+5)+(x+9)+\ldots+(x+37)=152.$

6. 1) Арифметическая прогрессия состоит из 105 членов. Сумма членов с нечетными номерами на 1 больше суммы остальных членов. Найти 53-й член прогрессии.

2) Сумма членов арифметической прогрессии с 8-го по 26-й на 99 больше суммы членов с 38-го по 59-й. Найти 248-й член прогрессии.

7. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найти a_{12}, если $a_{20}=3a_9$.

8. В арифметической прогрессии 15 членов. Сумма первого и последнего членов равна 1. Найти сумму всех членов прогрессии с четными номерами.

9. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если при всех натуральных n выполняется равенство $S_{3n}=2S_n+7n^2+4n$.

10. Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых семи членов отличается от суммы следующих семи членов менее чем на 400, а сумма первых шести членов превышает более чем на 3 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

11. Доказать, что если $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, S_n — сумма первых n ее членов, то справедливы равенства:

1) $S_{3n}=3\,(S_{2n}-S_n)\,;$ 2) $\dfrac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\dfrac{m-n}{m+n};$

3) $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n};$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$

12. Найти число n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, если первый ее член равен 3, n-й член равен 96 и сумма n членов равна 189.

13. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии равна 24, а сумма следующих восьми членов равна 36. Найти сумму членов с семнадцатого по двадцать четвертый.

14. Найти сумму квадратов первых n членов геометрической прогрессии, если число b_1 — первый ее член, а число q $(q^2\neq 1)$ — ее знаменатель.

15. В геометрической прогрессии $\dfrac{b_{18}+b_{19}}{b_6+b_7}=13$. Найти отношение суммы первых ее двадцати четырех членов к сумме первых ее двенадцати членов.

16. 1) Знаменатель геометрической прогрессии равен $\sqrt{3}$. При каком натуральном n сумма первых $2n$ членов этой прогрессии будет в 82 раза больше суммы первых n ее членов?

2) Первый член геометрической прогрессии равен 2, а ее знаменатель равен 3. Найти наименьшее натуральное n, при котором сумма первых n членов прогрессии больше 1000.

17. Решить уравнение $1 + x + x^2 + \ldots + x^{109} = 0$.

18. В геометрической прогрессии первый член равен 0,5. Сумма первых шести членов в 8 раз превосходит сумму обратных величин этих же членов. Найти знаменатель прогрессии.

19. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Определить знаменатель прогрессии.

20. Для геометрической прогрессии $\{b_n\}$ известно, что:

1) $b_1b_2 = \dfrac{5}{127}$, а $b_7b_8 = \dfrac{320}{127}$. Вычислить сумму $b_1b_2 + b_2b_3 + \ldots + b_7b_8$.

2) $b_1b_2 = 2^{\frac{2}{9}} - 1$, а $b_9b_{10} = 4 - 2^{\frac{16}{9}}$. Вычислить сумму $b_1b_2 + b_2b_3 + \ldots + b_9b_{10}$.

21. Пусть n положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ составляют геометрическую прогрессию. Выразить произведение $\Pi = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ через $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ и $T = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n}$.

22. Доказать тождество
$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1})$.

23. Найти сумму:

1) $2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{22\ldots22}_{n\ \text{цифр}}$; 2) $7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{77\ldots77}_{n\ \text{цифр}}$;

3) $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n\ \text{цифр}} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1\ \text{цифра}} - \underbrace{66\ldots6}_{n\ \text{цифр}}}$.

24. Доказать, что если $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия, S_n — сумма первых n ее членов, то справедливы равенства:

1) $b_2 + b_4 + \ldots + b_{2n} = \dfrac{q}{1+q} \cdot S_{2n}$; 2) $\dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{S_n}{b_1b_n}$;

3) $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

25. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой второй член равен $\dfrac{5}{3}$, а знаменатель $\dfrac{2}{3}$.

26. Найти сумму:

1) $\dfrac{48}{5} + \dfrac{48}{5^2} + \ldots + \dfrac{48}{5^n} + \ldots$;

2) $(2 - \sqrt{3}) + (7 - 4\sqrt{3}) + (26 - 15\sqrt{3}) + \ldots$.

27. Известно, что $\{b_n\}$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = A$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = B$. Выразить через A и B следующие суммы:

1) $b_1 + b_3 + b_5 + \ldots$; 2) $b_1 + \dfrac{b_2}{2} + \dfrac{b_3}{2^2} + \dfrac{b_4}{2^3} + \ldots$;

3) $b_1 - b_2 + b_3 - \ldots$; 4) $b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_4 + \ldots$;

5) $b_1b_2 + b_3b_4 + b_5b_6 + \ldots$.

28. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равен 16, а сумма всех членов равна 25. Вычислить сумму $\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{b_3} + \ldots$.

29. В круг радиуса R вписан квадрат, в него — круг, затем в новый круг — снова квадрат и т. д. Найти сумму площадей и сумму периметров квадратов.

30. Решить уравнения:

1) $\frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 + \ldots = 3{,}5$; 2) $x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \frac{1}{6}$;

3) $2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = \frac{1}{9}$.

31. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член в 4 раза больше суммы всех ее последующих членов.

32. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

33. Найти сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех ее членов, стоящих на четных местах, в три раза меньше суммы всех ее членов, стоящих на нечетных местах, и сумма первых пяти членов этой прогрессии равна 484.

34. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 3, а сумма всех членов равна 10. Найти сумму квадратов членов прогрессии.

35. Сумма первых 10 членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 2, а сумма следующих 10 членов равна 1. Найти сумму всех членов прогрессии.

36. Даны две бесконечно убывающие геометрические прогрессии, у которых первые члены одинаковы, а знаменатели отличаются лишь знаком. Известно, что суммы членов прогрессии равны S_1 и S_2. Найти сумму квадратов членов любой из прогрессий.

37. Запишите в виде суммы следующие выражения:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2k-1}$; 2) $\sum\limits_{k=2}^{n} (k - k^3)$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$; 5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

38. Запишите следующие суммы с помощью знака $\sum$:

1) $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{298}$; 2) $2 + 5 + 10 + 17 + \ldots + 362$;

3) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{20\cdot 21\cdot 22}$; 4) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$;

5) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

39. Вычислить сумму:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1)$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$; 5) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$; 6) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$;

7) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2$; 8) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$; 9) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$;

10) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

40. Вычислить биномиальные коэффициенты:

1) C_5^2; 2) C_{14}^3; 3) C_{12}^7; 4) C_{20}^{10}; 5) C_{50}^{45}.

41. Доказать свойства биномиальных коэффициентов:

1) $C_n^0 = C_n^n$; 2) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

3) $C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n-(k-1)}{k}$; 4) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

42. Найти сумму биномиальных коэффициентов, если известно, что:

1) степень бинома равна 9;

2) биномиальный коэффициент третьего члена равен 45.

43. Решить уравнения:

1) $\frac{C_{n+1}^2}{C_n^3} = \frac{4}{5}$; 2) $\frac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}} = \frac{2}{3}$; 3) $C_n^3 + C_n^4 = 11 \cdot C_{n+1}^2$.

44. Решить неравенства:

1) $C_{13}^n < C_{13}^{n+2}$; 2) $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leqslant 100$; 3) $2 \cdot C_n^5 > 11 \cdot C_{n-2}^3$.

45. Написать формулу разложения степени бинома:

1) $(1+x)^5$; 2) $(a-b)^6$; 3) $(x+y)^7$; 4) $(a-b)^8$.

46. Найти член разложения степени бинома:

1) $\left(x + x^{-4}\right)^{10}$, не содержащий x; 2) $\left(x + x^{-2}\right)^{12}$, не содержащий x;

3) $\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x^2}\right)^{11}$, содержащий x^2.

47. Найти члены разложения, не содержащие иррациональности в разложении степени бинома $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{3}\right)^{24}$.

48. Сколько рациональных членов содержится в разложении степени бинома $\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

49. Вычислить сумму:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)C_n^k$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)C_n^k$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k}$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{k-1}$; 5) $\sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^k C_n^k$, $m < n$.

50. Доказать равенства:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} kC_n^k = 0$.

Ответы

1. 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) $(n+1)(n+2)$; 3) $(n+1)^2$; 4) $\frac{5n^2+11n+6}{2}$. **2.** 1) 5050; 2) $-8n^2-4n$. **3.** $-0{,}005$. **4.** 1) 8; 2) 981; 3) 8190. **5.** 1) 9; 2) $-3{,}8$. **6.** 1) 1; 2) -33. **7.** 17. **8.** 3,5. **9.** $a_1=5$; $d=2$. **10.** 44. **12.** 6. **13.** 54. **14.** $b_1^2\cdot\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}$. **15.** 14. **16.** 1) 8; 2) 7. **17.** -1. **18.** 2. **19.** 2. **20.** 1) 5; 2) 3. **21.** $H=\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}$. **23.** 1) $\frac{2}{81}\left(10^{n+1}-10-9n\right)$; 2) $\frac{7}{81}\left(10^{n+1}-10-9n\right)$; 3) $\underbrace{66\ldots6}_{n-1\text{ цифра}}7$. **25.** 7,5. **26.** 1) 12; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **27.** 1) $\frac{A^2+B}{2A}$; 2) $\frac{4AB}{A^2+3B}$; 3) $\frac{B}{A}$; 4) $B\cdot\frac{A^2-B}{A^2+B}$; 5) $\frac{B}{2}\frac{A^4-B^2}{A^4+B^2}$. **28.** 10. **29.** $4R^2$, $8R(\sqrt{2}+1)$. **30.** 1) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{20}$. **31.** 0,2. **32.** $b_1=12$, $q=-2$ или $b_1=6, q=-0{,}5$. **33.** 486. **34.** $\frac{300}{17}$. **35.** 4. **36.** S_1S_2. **37.** 1) $-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$; 2) $2-8+3-27+\ldots+n-n^3$; 3) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{20\cdot21}$; 4) $-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}$; 5) $\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. **38.** 1) $\sum\limits_{k=1}^{100}\frac{1}{3k-2}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{19}(k^2+1)$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$; 4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$; 5) $\sum\limits_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right)$. **39.** 1) n^2; 2) n^3; 3) $\frac{n}{n+1}$; 4) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$; 5) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$. Указание. $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$. 6) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right)$; 7) $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$; 8) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; 9) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$; 10) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. **40.** 1) 10; 2) 364; 3) 792; 4) 341088; 5) 2118760. **42.** 1) $2^9=512$; 2) $2^{10}=1024$. **43.** 1) $n=7$; 2) $n=4$; 3) $n=13$. **44.** 1) $n\in\{0;1;2;3;4;5\}$; 2) $n\in\{2;3;4;5;6;7;8;9\}$; 3) $n\geqslant12$, $n\in\mathbb{N}$. **45.** 1) $(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$; 2) $(a-b)^6=$ $=a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$; 3) $(x+y)^7=$ $=x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$; 4) $(a-b)^8=$ $=a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^2b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$. **46.** 1) $T_3=C_{10}^2=45$; 2) $T_5=C_{12}^4$; 3) $T_4=C_{11}^3=165a^{-5}x^2$. **47.** $C_{24}^{14}\cdot3^2\cdot2^3$. **48.** T_{4n+1}, $0\leqslant n\leqslant25$. **49.** 1) $(n+2)2^{n-1}$; 2) $(n-2)2^{n-1}+1$; 3) 2^{2n-1}; 4) 2^{2n-1}; 5) $(-1)^mC_{n-1}^m$.

§6. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. Определения

Все действительные числа разбиваются на положительные числа, отрицательные числа и число нуль. Для того чтобы указать, что число a положительно, пользуются записью $a > 0$.

Напомним, что сумма и произведение положительных чисел также являются положительными числами. Далее, если число a отрицательно, то число $-a$ — положительно (и наоборот).

По определению неравенство $a > b$ (или, что то же самое, $b < a$) имеет место в том и только в том случае, если $a - b > 0$, т. е. если число $a - b$ положительно.

Рассмотрим, в частности, неравенство $a < 0$. Что означает это неравенство? Согласно приведенному выше определению, оно означает, что $0 - a > 0$, т. е. $-a > 0$, или, иначе, что число $-a$ положительно. Но это имеет место в том и только в том случае, если число a отрицательно. Итак, неравенство $a < 0$ означает, что число a отрицательно.

Часто используется также запись $a \geqslant b$ (или, что то же самое, $b \leqslant a$). Запись $a \geqslant b$, по определению, означает, что либо $a > b$, либо $a = b$.

Если рассматривать запись $a \geqslant b$ как высказывание, то в обозначениях гл. I можно записать

$$(a \geqslant b) \Leftrightarrow [(a > b) \vee (a = b)].$$

Неравенства вида $a > b$, $a < b$ будем называть *строгими*, а неравенства вида $a \geqslant b$, $a \leqslant b$ — *нестрогими*. Неравенства $a > b$ и $c > d$ (или $a < b$ и $c < d$) будем называть неравенствами *одинакового смысла*, а неравенства $a < b$ и $c > d$ — неравенствами *противоположного смысла*. Отметим, что эти два термина (неравенства одинакового и противоположного смысла) относятся лишь к форме записи неравенств, а не к самим фактам, выражаемым этими неравенствами. Так, по отношению к неравенству $a < b$ неравенство $c < d$ является неравенством того же смысла, а в записи $d > c$ (означающей то же самое) — неравенством противоположного смысла.

Наряду с неравенствами вида $a > b$, $a \geqslant b$ употребляются так называемые *двойные* неравенства, т. е. неравенства вида $a < c < b$, $a \leqslant c < b$, $a < c \leqslant b$, $a \leqslant c \leqslant b$. По определению запись

$$a < c < b$$

означает, что имеют место оба неравенства:

$$a < c \quad \text{и} \quad c < b.$$

Аналогичный смысл имеют неравенства $a \leqslant c \leqslant b$, $a \leqslant c < b$, $a < c \leqslant b$.

Двойное неравенство $a < c < b$ в обозначениях гл. I можно в эквивалентной форме записать так:

$$(a < c < b) \Leftrightarrow (a < c) \wedge (c < b),$$

а двойное неравенство $a \leqslant c \leqslant b$ можно записать в следующем виде:

$$(a \leqslant c \leqslant b) \Leftrightarrow [(a < c) \vee (a = c)] \wedge [(c < b) \vee (c = b)].$$

Перейдем теперь к изложению основных свойств и правил действий над неравенствами.

2. Основные свойства неравенств

Всюду в п. 2 буквы a, b, c обозначают *действительные* числа, а n означает *натуральное* число.

1°. *Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (транзитивность).*

○ Так как по условию $a > b$ и $b > c$, то числа $a - b$ и $b - c$ положительны и, следовательно, число $a - c = (a - b) + (b - c)$, как сумма положительных чисел, также является положительным. Это означает, по определению, что $a > c$. ●

2°. *Если $a > b$, то при любом c имеет место неравенство $a + c > b + c$.*

○ Так как $a > b$, то число $a - b$ положительно. Следовательно, число $(a + c) - (b + c) = a - b$ также является положительным, т. е. $a + c > b + c$. ●

3°. *Если $a + b > c$, то $a > c - b$, т. е. любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.*

Доказательство вытекает из свойства 2° (достаточно к обеим частям неравенства $a + b > c$ прибавить число $-b$).

4°. *Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$, т. е. при сложении двух неравенств одного и того же смысла получается неравенство того же смысла.*

○ В силу определения неравенства достаточно показать, что разность $(a + c) - (b + d)$ положительна. Эту разность можно записать следующим образом:

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d).$$

Так как по условию числа $a - b$ и $c - d$ положительны, то $(a + c) - (b + d)$ также есть число положительное. ●

Следствие. Из свойств 2° и 4° вытекает следующее правило вычитания неравенств: если $a > b$, $c > d$, то $a - d > b - c$ (для доказательства достаточно к обеим частям неравенства $a + c > b + d$ прибавить число $-c - d$).

5°. *Если $a > b$, то при $c > 0$ имеем $ac > bc$, а при $c < 0$ имеем $ac < bc$.* Иначе говоря, при умножении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется (т. е. получается неравенство того же смысла), а при умножении на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный (т. е. получается неравенство противоположного смысла).

○ Если $a > b$, то $a - b$ есть число положительное. Следовательно, знак разности $ac - bc = (a - b)c$ совпадает со знаком числа c: если c — положительное число, то и разность $ac - bc$ положительна и потому $ac > bc$, а если $c < 0$, то эта разность отрицательна и потому $bc - ac$ положительно, т. е. $bc > ac$. ●

6°. *Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$, т. е. если все члены двух неравенств одинакового смысла положительны, то при почленном умножении этих неравенств получается неравенство того же смысла.*

○ Имеем $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d)$. Так как $c > 0$, $b > 0$, $a - b > 0$, $c - d > 0$, то $ac - bd > 0$, т. е. $ac > bd$. ●

Замечание. Из доказательства видно, что условие $d > 0$ в формулировке свойства 6° несущественно: для справедливости этого свойства достаточно, чтобы были выполнены условия $a > b > 0$, $c > d$, $c > 0$. Если же (при выполнении неравенств $a > b$, $c > d$) числа a, b, c не будут все положительными, то неравенство $ac > bd$ может не выполняться. Например, при $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, $d = -3$ имеем $a > b$, $c > d$, но неравенство $ac > bd$ (т. е. $-4 > -3$) не выполнено. Таким образом, требование положительности чисел a, b, c в формулировке свойства 6° существенно.

Выше мы доказали несколько свойств неравенств, записанных с помощью знака $>$ (больше). Однако все эти свойства можно было бы формулировать с помощью знака $<$ (меньше), так как неравенство $b < a$ означает, по определению, то же самое, что и неравенство $a > b$. Кроме того, как это нетрудно проверить, доказанные выше свойства сохраняются и для нестрогих неравенств. Например, свойство 1° для нестрогих неравенств будет иметь следующий вид: если $a \geqslant b$ и $b \geqslant c$, то $a \geqslant c$.

7°. *Если $a \geqslant b > 0$ и $c > d > 0$, то $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ (деление неравенств).*

○ Имеем

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac - bd}{cd}.$$

Числитель дроби, стоящей в правой части, положителен (см. свойства 5° и 6°), знаменатель также положителен. Следовательно, $\frac{a}{d} - \frac{b}{c} > 0$. Этим свойство 7° доказано. ●

Замечание. Отметим важный частный случай правила 7°, получающийся при $a = b = 1$: если члены неравенств положительны, то при переходе к обратным величинам получаем неравенство *противоположного* смысла. Легко проверить, что это правило сохраняется и в том случае, когда $c<d$, $d<0$. Таким образом, если $c>d$ и $cd>0$, то $\frac{1}{c}<\frac{1}{d}$. Если же $c>d$, но $cd<0$ (т. е. $c>0$, $d<0$), то $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}$.

8°. *Если $a>b\geqslant 0$, то $a^n>b^n$ при любом $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.*

○ Воспользуемся формулой

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})=(a-b)\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}b^{k-1},$$

доказанной в примере 14 §5 настоящей главы. Так как $a-b>0$ и $a>0$, а в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n}a^{n-k}b^{k-1}$ первое слагаемое положительно, и остальные неотрицательны, то $a^n-b^n>0$, т. е. $a^n>b^n$. ●

9°. *Если $a>b$, то $a^{2n+1}>b^{2n+1}$ при любом $n\in\mathbb{N}$.*

○ Воспользуемся доказанной в §5 (пример 14) формулой $a^{2n+1}-b^{2n+1}=(a-b)(a^{2n}+b\cdot a^{2n-1}+\dots+ab^{2n-1}+b^{2n})=$ $=(a-b)\sum_{k=1}^{2n+1}a^{2n+1-k}b^{k-1}$.

Если $a>0$, $b>0$ и $a>b$, то $a^{2n+1}>b^{2n+1}$ по доказанному выше свойству 8°.

Если $a<0$, $b<0$ и $a>b$, то $-b>-a$, где $-a>0$, $-b>0$.

Отсюда следует, что $(-b)^{2n+1}>(-a)^{2n+1}$, $-b^{2n+1}>-a^{2n+1}$,

$$b^{2n+1}<a^{2n+1},\quad \text{т. е.}\quad a^{2n+1}>b^{2n+1}.$$

Пусть, наконец, $b\leqslant 0$, $a>0$, тогда $a>b$ и $a^{2n+1}>b^{2n+1}$, так как $a^{2n+1}>0$, $b^{2n+1}\leqslant 0$. Итак, если a и b — произвольные действительные числа такие, что $a>b$, то $a^{2n+1}>b^{2n+1}$ при любом $n\in\mathbb{N}$. ●

10°. *Если $a>b>0$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ при любом $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.*

○ Докажем это свойство методом от противного. Предположим, что $\sqrt[n]{b}\geqslant\sqrt[n]{a}$, тогда по свойству 8° ($\sqrt[n]{b}>0$, $\sqrt[n]{a}>0$) получаем $b\geqslant a$, что противоречит условию ($a>b$). ●

Замечание. Свойство 10° остается в силе и в случае, когда $a>b\geqslant 0$.

11°. *Если a, b — произвольные действительные числа такие, что $a>b$, то $\sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[2n+1]{b}$ при любом $n\in\mathbb{N}$.*

Это свойство, как и свойство 10°, можно доказать методом от противного, используя свойство 9°.

12°. Неравенство $a^{2n}>b^{2n}$, где $n\in\mathbb{N}$, имеет место в том и только в том случае, когда $|a|>|b|$.

○ Так как $t^{2n}=|t|^{2n}$, то неравенство $a^{2n}>b^{2n}$ можно записать в виде $|a|^{2n}>|b|^{2n}$, откуда, применяя свойство 10°, получаем $|a|>|b|$.

Обратно, если $|a| > |b|$, то по свойству 8° $|a|^{2n} > |b|^{2n}$, откуда $a^{2n} > b^{2n}$. В частности, неравенство $a^2 > b^2$ справедливо тогда и только тогда, когда $|a| > |b|$. ●

Объединяя свойства 8° и 10°, получаем следующее утверждение: *если a, b — положительные числа и $a > b$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и, обратно, из неравенства $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ следует, что $a > b$.*

В этом случае говорят, что неравенства $a > b$ и $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, где $a > 0$, $b > 0$, *равносильны*, и пишут

$$\{a > b\} \Leftrightarrow \{\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}\} \quad \text{при} \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Аналогично, из свойств 9° и 11° следует, что для любых действительных чисел a и b и при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\{\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}\} \Leftrightarrow \{a > b\} \Leftrightarrow \{a^{2n+1} > b^{2n+1}\}.$$

3. Некоторые важные неравенства

1) *Для произвольных действительных чисел a и b справедливо неравенство*

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab, \tag{1}$$

причем знак равенства в формуле (1) *имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.*

○ В силу определения неравенства достаточно показать, что разность между левой и правой частями неравенства (1) есть неотрицательное число. Эта разность равна

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Так как квадрат любого действительного числа есть число неотрицательное, то $(a - b)^2 \geqslant 0$, и неравенство (1) доказано. Из доказательства видно, что равенство в соотношении (1) имеет место в том и только в том случае, если $a = b$. ●

Замечание. Справедливо и более сильное неравенство

$$a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|, \tag{2}$$

вытекающее из неравенства $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$.

2) *Если a и b — действительные числа одного знака (т. е. $ab > 0$), то*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \tag{3}$$

причем знак равенства в формуле (3) *имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.*

○ Для доказательства неравенства (3) достаточно умножить обе части неравенства (1) на положительное число $\frac{1}{ab}$. ●

3) *Если* $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$, *то*

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \tag{4}$$

т. е. среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. Знак равенства в неравенстве (4) *имеет место в том и только том случае, когда* $a=b$.

○ Неравенство (4) следует из очевидного неравенства $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Приведем геометрическое доказательство неравенства (4). Для этого воспользуемся тем, что перпендикуляр CD (см. рис. 9), опущенный из вершины прямого угла C треугольника ABC на гипотенузу AB, есть среднее геометрическое проекций его катетов на гипотенузу.

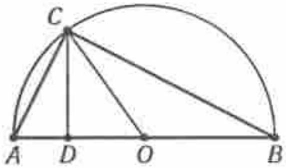


Рис. 9

Пусть O — центр окружности, построенной на AB как на диаметре, $AD=a$, $DB=b$; тогда $CD=\sqrt{ab}$, $OC=\frac{a+b}{2}$. Так как $OC \geqslant CD$, то $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причем равенство в этом соотношении имеет место только при $a=b$. ●

4) *Неравенство*

$$|a|<b, \quad b>0, \tag{5}$$

равносильно двойному неравенству

$$-b<a<b. \tag{6}$$

Аналогично,

$$\{|a| \leqslant b, b>0\} \Leftrightarrow \{-b \leqslant a \leqslant b\}. \tag{7}$$

○ Дадим геометрическое доказательство этого утверждения, пользуясь тем, что $|a|$ — расстояние от точки O начала отсчета на числовой прямой до точки A, изображающей число a (см. рис. 10).

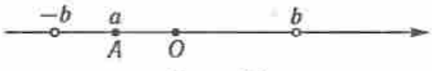


Рис. 10

Неравенство (5) означает, что расстояние от точки A до точки O меньше b, и поэтому число a принадлежит интервалу $(-b,b)$, т. е. справедливо неравенство (6). Обратно, из неравенства (6) следует неравенство (5). Тем же способом доказывается утверждение (7). ●

5) *Для любых действительных чисел a и b справедливы неравенства*

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{8}$$

○ Чтобы доказать правое неравенство (8), запишем очевидные неравенства

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Складывая их, получаем неравенство

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|,$$

которое в силу утверждения (7) равносильно неравенству

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{9}$$

Докажем левое неравенство (8). Используя неравенство (9), получаем

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|,$$

откуда

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|, \text{ или } |a| - |b| \leqslant |a - b|. \tag{10}$$

Аналогично

$$|b| = |(b - a) + a| \leqslant |b - a| + |a| = |a - b| + |a|,$$

откуда находим

$$|a - b| \geqslant |b| - |a|, \quad |a| - |b| \geqslant -|a - b|. \tag{11}$$

Из неравенств (10) и (11) имеем

$$-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b|,$$

а это неравенство в силу утверждения (7) равносильно следующему:

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|.$$

Заменив здесь b на $-b$ и учитывая, что $|-b| = |b|$, получаем

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b|,$$

т. е. левое неравенство (8) доказано. ●

Замечание. Применяя метод математической индукции, можно доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

4. Примеры

Рассмотрим несколько типичных примеров на доказательство неравенств. Заметим, что общего метода доказательства неравенств не существует. Иногда нужный результат можно получить, исходя из определения, т. е. из рассмотрения разности между левой и правой частями неравенства; иногда полезным оказывается использование некоторого известного неравенства или оценка левой и правой частей неравенства.

Пример 1. Доказать, что для любых действительных чисел a и b имеет место неравенство $a^4+b^4 \geqslant a^3b+ab^3$.

$\triangle$ Разность между левой и правой частями неравенства можно записать так:

$$a^4+b^4-(a^3b+ab^3)=a^3(a-b)-b^3(a-b)=$$
$$=(a-b)(a^3-b^3)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2).$$

Эта разность неотрицательна, так как

$$(a-b)^2 \geqslant 0, \quad a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqslant 0. \qquad \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать, что при любом целом $n>1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n+1}<2.$$

$\triangle$ В рассматриваемом примере достаточно грубо оценить левую часть неравенства. Заметим, что сумма двух последних слагаемых левой части неравенства не превосходит $\frac{1}{n}$, так как

$$\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}.$$

Каждое из оставшихся слагаемых левой части неравенства меньше $\frac{1}{n}$, а количество этих слагаемых равно $2n-1$. Следовательно,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n+1}<(2n-1)\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=2. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c имеет место неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac.$$

$\triangle$ Используя неравенство (1) из предыдущего раздела, запишем следующие неравенства:

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$
$$b^2+c^2 \geqslant 2bc,$$
$$c^2+a^2 \geqslant 2ac.$$

Сложив эти неравенства, а затем разделив обе части полученного неравенства на 2, приходим к нужному неравенству. $\blacktriangle$

Пример 4. Доказать, что если a, b, c — положительные числа, то

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant a+b+c.$$

$\triangle$ Используя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух положительных чисел (см. (4), разд. 3), запишем неравенство:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right) \geqslant \sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}}=c.$$

Аналогично

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geqslant a,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right)\geqslant b.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c. \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Доказать, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, то

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc.$$

△ Снова используя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел, получаем

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},$$

$$b+c\geqslant 2\sqrt{bc},$$

$$a+c\geqslant 2\sqrt{ac}.$$

Перемножив эти неравенства, докажем требуемое неравенство. ▲

Пример 6. Доказать, что если a, b, c — неотрицательные числа, то

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc.$$

△ Используя тождество

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

и неравенство примера 3, получаем нужное неравенство. ▲

Замечание. Полагая $a^3=x$, $b^3=y$, $c^3=z$, получаем неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического трех неотрицательных чисел

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}.$$

Пример 7. Доказать, что для любых действительных чисел a_k, b_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ справедливо неравенство Коши—Буняковского

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right). \tag{12}$$

△ Если $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, то в (12) имеет место равенство. Пусть хотя бы одно из чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n отлично от нуля, тогда $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0$. Рассмотрим квадратный трехчлен относительно x:

$$ax^2+2bx+c=\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2,$$

где
$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Так как $(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + 2bx + c$ неположителен: $4b^2 \leqslant 4ac$. Следовательно,
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \qquad \blacktriangle$$

Пример 8. Доказать, что если $x \geqslant -1$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство Бернулли
$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx. \qquad (13)$$

$\triangle$ Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение (13) верно $(1 + x = 1 + x)$. Докажем, что если верно неравенство (13), то является верным и неравенство
$$(1 + x)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1)x. \qquad (14)$$
Умножив обе части верного неравенства (13) на $1 + x$, где $1 + x \geqslant 0$, получим верное неравенство
$$(1 + x)^{n+1} \geqslant (1 + nx)(1 + x),$$
где $(1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n + 1)x$, так как $nx^2 \geqslant 0$. Таким образом, при $x \geqslant -1$ справедливо неравенство (14), и поэтому неравенство (13) является верным при любом $n \in \mathbb{N}$. $\blacktriangle$

Пример 9. Доказать, что если положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют условию
$$x_1 x_2 \ldots x_n = 1, \qquad (15)$$
то справедливо неравенство
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n. \qquad (16)$$

$\triangle$ Воспользуемся методом математической индукции. Утверждение верно при $n = 1$: если $x_1 = 1$, то $x_1 \geqslant 1$. Пусть неравенство верно при всех m таких, что $1 \leqslant m \leqslant n - 1$. Докажем, что оно верно и при $m = n$.

Если все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны единице, то неравенство (16) является верным. Если хотя бы одно из этих чисел больше единицы, то из равенства (15) следует, что хотя бы одно из оставшихся чисел меньше единицы. Пусть для определенности $x_n > 1$, $x_{n-1} < 1$; тогда $(x_n - 1)(1 - x_{n-1}) > 0$, откуда следует, что
$$x_n + x_{n-1} - x_{n-1}x_n > 1. \qquad (17)$$

Согласно предположению индукции для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, y_{n-1}$ таких, что

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-2} y_{n-1} = 1, \tag{18}$$

выполняется неравенство

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + y_{n-1} \geqslant n - 1. \tag{19}$$

Полагая

$$y_{n-1} = x_{n-1} x_n, \tag{20}$$

в силу (19) получаем

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} x_n \geqslant n - 1. \tag{21}$$

Складывая неравенства (17) и (21), приходим к неравенству (16), справедливому для любых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые (см. (18) и (20)) удовлетворяют условию (15). ▲

Задачи

1. Доказать, что для любых действительных чисел a и b справедливы неравенства:

1) $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + a + b$; 2) $5a^2 - 6ab + 5b^2 \geqslant 0$;

3) $16a^2 + 25b^2 \geqslant 4ab$; 4) $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geqslant (a^3 + b^3)^2$.

2. Доказать, что если $-2 \leqslant \alpha \leqslant 2$, то для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство $a^2 + \alpha ab + b^2 \geqslant 0$.

3. Пусть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, $b + c = a + d$. Доказать, что $bc > ad$.

4. Пусть a и b — произвольные положительные числа. Средним гармоническим этих чисел называется число $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, а средним квадратическим — число $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$. Докажите следующие неравенства, связывающие средние величины:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

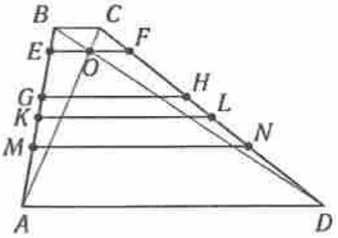


Рис. 11

Покажите, что можно дать следующую геометрическую иллюстрацию этих неравенств (см. рис. 11). Пусть $ABCD$ — трапеция, основания которой $AD = a$, $BC = b$; O — точка пересечения диагоналей. Тогда:

1) среднее арифметическое $\dfrac{a+b}{2}$ двух чисел a и b равно длине средней линии трапеции KL;

2) среднее геометрическое $\sqrt{ab}$ этих чисел равно длине отрезка GH, который параллелен основаниям и обладает тем свойством, что трапеции $BCHG$ и $GHDA$ подобны;

3) среднее гармоническое $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ равно длине отрезка EF, который параллелен основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей;
4) среднее квадратическое равно длине отрезка MN, который параллелен основаниям и разбивает трапецию $ABCD$ на две равновеликие трапеции.

5. Пусть $a \leqslant \alpha \leqslant b$, $a \leqslant \beta \leqslant b$. Доказать, что $|\alpha-\beta| \leqslant b-a$.

6. Доказать, что для любых положительных чисел a и b выполняются неравенства:

1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+1 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$;

2) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

7. Пусть a и b — любые неотрицательные числа, $n \in \mathbb{N}$. Доказать неравенства:
1) $a^n + b^n \leqslant (a+b)^n$;
2) $(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n)$.

8. Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c справедливы неравенства:

1) $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant |a|+|b|+|c|$; 2) $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$.

9. Пусть a, b, c — произвольные неотрицательные числа. Доказать неравенства:
1) $(a+b+c)^3 \leqslant 9(a^3+b^3+c^3)$; 2) $a^4+b^4+c^4 \leqslant abc(a+b+c)$.

10. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c имеют место неравенства:

1) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geqslant 9$; 2) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

11. Пусть действительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a+b+c=6$. Доказать, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant 12$.

12. Доказать, что если $|b| < \dfrac{|a|}{2}$, то $\dfrac{1}{|a-b|} < \dfrac{2}{|a|}$.

13. Доказать неравенство $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$.

14. Доказать неравенство $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k+1)^2} < \dfrac{1}{4}$.

15. Доказать, что если $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$, то справедливо неравенство $\sqrt{n} < 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

16. Доказать, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a+b+c=0$, то $ab+bc+ca \leqslant 0$.

17. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b, c, d имеет место неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

18. Пусть действительные числа a, b, c удовлетворяют условиям $a+b \geqslant c$, $c \geqslant 0$. Доказать, что $a^4+b^4 \geqslant \dfrac{c^4}{8}$.

19. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо неравенство $\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$.

ФУНКЦИИ

§1. ЛИНЕЙНАЯ, КВАДРАТИЧНАЯ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИИ

1. Линейная функция и ее график

Функцию вида

$$y = kx + b, \tag{1}$$

где k и b — заданные числа, называют *линейной*. Линейная функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$, а ее график — прямая линия, параллельная прямой $y = kx$ (см. рис. 1) и пересекающая ось Oy в точке $(0, b)$.

В уравнении (1) число k называют *угловым коэффициентом* прямой. Такое название связано с тем, что $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между прямой и осью Ox (угол отсчитывается от положительного направления оси Ox).

Пусть прямая l проходит через точку (x_0, y_0), тогда из (1) следует, что

$$y_0 = kx_0 + b. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) получаем *уравнение прямой, проходящей через точку* (x_0, y_0) *и имеющей угловой коэффициент* k:

$$y = y_0 + k(x - x_0). \tag{3}$$

Если y_1 и y_2 — значения линейной функции $y = kx + b$ при $x = x_1$ и $x = x_2$, то $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$, откуда

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1). \tag{4}$$

Пусть $x_2 > x_1$ и $k > 0$, тогда из равенства (4) следует, что $y_2 > y_1$, т. е. большему значению x линейной функции $y = kx + b$ соответствует большее значение y. Такую функцию называют *возрастающей*.

Аналогично, если $k < 0$ и $x_2 > x_1$, то $y_2 < y_1$. Такую функцию называют *убывающей*. Итак, линейная функция $y = kx + b$ является возрастающей при $k > 0$ и убывающей при $k < 0$.

Если $k = 0$, то $y = b$. Графиком этой функции является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0; b)$.

Для построения графика линейной функции $y = kx + b$ достаточно найти две точки графика и провести через них прямую линию.

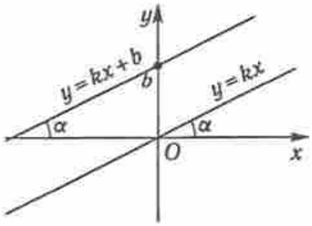


Рис. 1

Если $k \neq 0$, $b \neq 0$, то можно взять точки $(0;b)$ и $\left(-\frac{b}{k};0\right)$, в которых прямая $y=kx+b$ пересекает оси координат.

Например, прямая $y=-\frac{2}{3}x+2$ (см. рис. 2) проходит через точки $(3;0)$ и $(0;2)$. Пусть $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ — две точки, принадлежащие графику линейной функции $y=kx+b$, тогда $y_1=kx_1+b$, $y_2=kx_2+b$, откуда

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k. \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что изменение y_2-y_1 линейной функции пропорционально изменению x_2-x_1 аргумента (переменной) x.

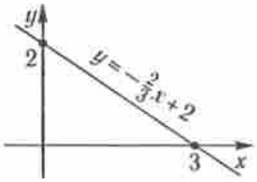


Рис. 2

Если $x>0$, $y>0$ и $k>0$, то зависимость между переменными x и y, выражаемую формулой $y=kx$, обычно называют *прямой пропорциональной зависимостью*, а k — *коэффициентом пропорциональности*.

Так, формулой $S=vt$, где S — путь, t — время, описывается равномерное движение со скоростью v $(S(0)=0)$.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы соответственно уравнениями

$$y=k_1x+b_1, \tag{6}$$

$$y=k_2x+b_2. \tag{7}$$

Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда $k_1=k_2$.

Если $k_1 \neq k_2$, то прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке M, координаты которой удовлетворяют системе (6), (7). Прямые l_1 и l_2, пересекаясь, образуют две пары равных углов. *Углом φ между прямыми l_1 и l_2* называют наименьший из этих углов. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\alpha_1}\right|=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ. \tag{8}$$

Замечание. Формула (8) следует из тригонометрической формулы $\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\alpha_1}$, которая будет получена в § 5, гл. V. Здесь она приводится без вывода.

Если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то $\varphi=90^\circ$ и $\operatorname{tg}\varphi$ не существует. Это означает, что знаменатель дроби (8) обращается в ноль: $k_1k_2+1=0$, откуда при $k_1 \neq 0$ получаем

$$k_2=-\frac{1}{k_1}. \tag{9}$$

Если $k_1=0$, то $\operatorname{tg}\varphi=k_2$, а прямой, которая перпендикулярна прямой $y=b_1$, является любая прямая вида $x=a$, т. е. прямая, параллельная оси Oy. Условие $k_1k_2+1=0$ является необходимым и достаточным условием перпендикулярности прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями (6) и (7), если $k_1k_2 \neq 0$.

Пример 1. Написать уравнение прямой l, которая параллельна прямой $y = 2x - 3$ и проходит через точку $A(3; 9)$.

△ Так как угловой коэффициент прямой l равен 2, то ее уравнение имеет вид (3), где $y_0 = 9$, $x_0 = 3$, откуда $y = 9 + 2(x - 3)$ или

$$y = 2x + 3. \qquad ▲$$

Пример 2. Написать уравнение прямой l, проходящей через точки $A\left(-1; -\frac{9}{2}\right)$ и $B(4; 3)$.

△ Подставляя координаты точек A и B в уравнение $y = kx + b$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{9}{2} = -k + b, \\ 3 = 4k + b, \end{cases}$$

откуда находим $5k = 3 + \frac{9}{2}$, $k = \frac{3}{2}$, $b = 3 - 4k = -3$. Следовательно, уравнение прямой l можно записать в виде $y = \frac{3}{2}x - 3$. ▲

Замечание. Угловой коэффициент k прямой l можно найти, используя формулу (5), а затем воспользоваться формулой (3), где (x_0, y_0) — координаты точки A или точки B.

Пример 3. Прямая l_1 проходит через точки $A(-2; 4)$ и $B(1; -2)$. Написать уравнение прямой l_2, перпендикулярной прямой l_1 и проходящей через точку $(3; -4)$.

△ Угловой коэффициент k_1 прямой l_1 находим по формуле (5):

$$k_1 = \frac{-2 - 4}{1 - (-2)} = -2,$$

а угловой коэффициент k_2 прямой l_2 — по формуле (9):

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}.$$

Используя формулу (3), где $k = \frac{1}{2}$, $x_0 = 3$, $y_0 = -4$, находим уравнение прямой l_2:

$$y = -4 + \frac{1}{2}(x - 3) \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}. \qquad ▲$$

Пример 4. Найти угол φ между прямыми $y = -\frac{x}{2} + 5$ и $y = \frac{x}{3} + 1$.

△ Применяя формулу (8), где $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{3}$, получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1, \quad \text{откуда} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}. \qquad ▲$$

2. Квадратичная функция и ее график

График квадратичной функции. Функцию

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — заданные действительные числа и $a \neq 0$, называют *квадратичной*.

Рассмотрим сначала квадратичную функцию при $b = 0$, $c = 0$, т. е. функцию $y = ax^2$.

Эта функция определена на всей числовой прямой. Ее график симметричен относительно оси ординат, так как $a(-x_0)^2 = ax_0^2$. Такую функцию называют *четной*. Если $a > 0$, то $ax^2 > 0$ при $x \neq 0$, т. е. $y > 0$ при $x \neq 0$; если $x = 0$, то $y = 0$. Таким образом, график функции $y = ax^2$, где $a > 0$ при $x \neq 0$ расположен выше оси Ox и проходит через начало координат (см. рис. 3)

Если $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_2 > x_1$, то $x_2^2 > x_1^2$ и $ax_2^2 > ax_1^2$ при $a > 0$. Следовательно, функция $y = ax^2$, где $a > 0$, является возрастающей при $x > 0$. Так как график функции $y = ax^2$ симметричен относительно оси Oy, то функция $y = ax^2$, $a > 0$, убывает при $x < 0$. На рис. 4 изображены графики функций $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$.

Если $a < 0$, то график функции $y = ax^2$ расположен ниже оси Ox при $x \neq 0$ и проходит через точку O (см. рис. 5).

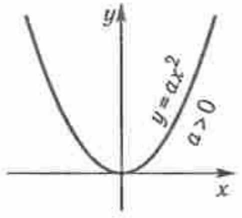


Рис. 3

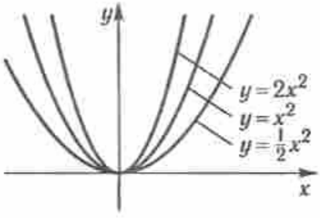


Рис. 4

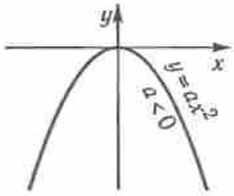


Рис. 5

График функции $y = ax^2$ при любом $a \neq 0$ называют *параболой*. Так как этот график лежит в верхней полуплоскости при $a > 0$ и в нижней при $a < 0$, то говорят, что при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

Обратимся к квадратичной функции общего вида, т. е. к функции

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Преобразуем *квадратный трехчлен* $ax^2 + bx + c$, выделив полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Таким образом,

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}, \qquad (10)$$

или

$$y = a(x-x_0)^2 + y_0,$$

где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Отсюда следует, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль оси Ox на x_0 и вдоль оси Oy на y_0. Поэтому график функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, симметричен относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$, параллельной оси Oy и проходящей через *вершину* $A(x_0; y_0)$ *параболы*. Прямую $x = -\frac{b}{2a}$ называют *осью симметрии параболы*.

Знак числа a определяет направление ветвей параболы: при $a > 0$ ветви направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ можно построить, используя следующую схему:

1) найти координаты вершины $A(x_0; y_0)$ параболы, пользуясь формулами $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a} = c - \frac{b^2}{4a}$ (здесь $D = b^2 - 4ac$) или применяя метод выделения полного квадрата;

2) построить ось параболы;

3) найти точки пересечения параболы с осью Oy и осью Ox (найти корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$);

4) нарисовать эскиз графика функции, используя найденные точки и учитывая роль знака числа a.

Для более точного изображения параболы можно найти координаты нескольких ее точек.

Пример 5. Построить графики функций:

1) $y = x^2 - 2x + 5$; 2) $y = x(4-x)$.

△ 1) Так как $y = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4$, то вершиной параболы является точка $A(1;4)$, а ветви параболы направлены вверх. Ось Oy парабола пересекает в точке $(0;5)$. График функции $y = x^2 - 2x + 5$ изображен на рис. 6.

2) Парабола $y = x(4-x)$ пересекает ось Ox в точках $(0;0)$ и $(4;0)$, ось параболы проходит через середину отрезка $[0;4]$

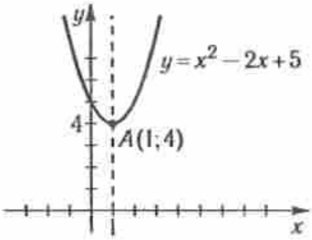


Рис. 6

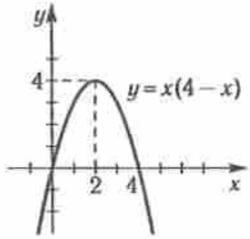


Рис. 7

параллельно оси Oy. Поэтому абсцисса вершины $x_0 = 2$, а ордината вершины $y_0 = y(2) = 4$. Ветви параболы направлены вниз. График функции $y = x(4 - x)$ изображен на рис. 7. ▲

Обратимся к формуле (10). Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и обозначают буквой D, т. е. $D = b^2 - 4ac$. Поэтому формулу (10) можно записать так:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a(x - x_0)^2 + y_0. \tag{11}$$

Если $a > 0$, то ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, а самая нижняя точка параболы — ее вершина $A(x_0; y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = -\frac{D}{4a}$ (см. рис. 8). Ордината y_0 вершины является наименьшим значением квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$, т. е. $y_{\min} = y_0 = -\frac{D}{4a}$.

Если $a < 0$, то вершина $A(x_0; y_0)$ параболы является самой верхней точкой, а ордината y_0 вершины — наибольшее значение функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a < 0$, т. е. $y_{\max} = y_0 = -\frac{D}{4a}$ (см. рис. 9).

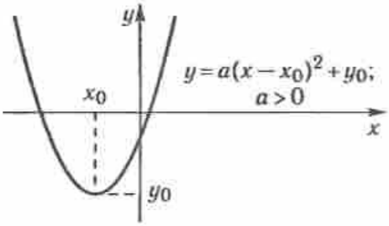


Рис. 8

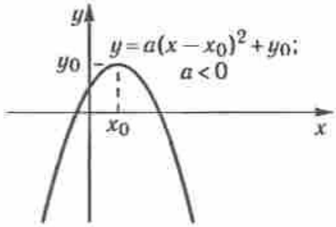


Рис. 9

Пусть $a > 0$ и $D < 0$, тогда $y_0 = -\frac{D}{4a} > 0$, и поэтому парабола $y = ax^2 + bx + c$ располагается выше оси Ox, т. е. если $a > 0$ и $D < 0$, то $y > 0$ при всех x (см. рис. 10).

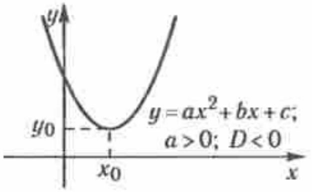


Рис. 10

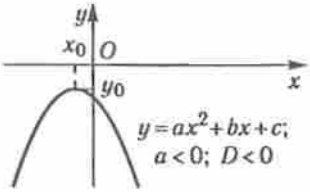


Рис. 11

Аналогично, если $a<0$ и $D<0$, то $y<0$ при всех x (см. рис. 11).

Пример 6. Определить знаки чисел a, b, c, если парабола $y=ax^2+bx+c$ расположена так, как указано на рис. 12.

△ Ветви параболы направлены вверх, и поэтому $a>0$. Из рис. 12 видно, что абсцисса x_0 вершины A параболы отрицательна, т. е. $x_0=-\frac{b}{2a}<0$, откуда следует, что $b>0$, так как $a>0$.

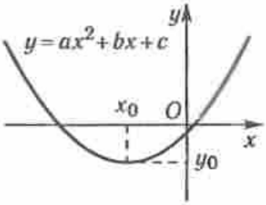


Рис. 12

Наконец, $c<0$, поскольку $c=y(0)$ — ордината точки, в которой парабола пересекает ось Oy.

Ответ. $a>0$, $b>0$, $c<0$. ▲

Пример 7. Определить знак коэффициента a квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если $y(-1)<2$, $y(1)>-3$, $y(3)<-8$.

△ По условию $y(-1)=a-b+c$, $y(1)=a+b+c$, $y(3)=9a+3b+c$. Исключая b и c из системы

$$\begin{cases} a-b+c=y(-1), \\ a+b+c=y(1), \\ 9a+3b+c=y(3), \end{cases}$$

получаем $8a=y(-1)-2y(1)+y(3)$, откуда

$$a=\frac{1}{8}(y(-1)-2y(1)+y(3))<\frac{1}{8}(2+6-8)=0, \quad \text{т. е.} \quad a<0. \quad ▲$$

Пример 8. Вершиной параболы $y=ax^2+bx+c$ является точка $A(2;-3)$, а абсцисса одной из точек пересечения параболы с осью Ox равна 5. Найти a, b, c.

△ Уравнение параболы можно записать в виде

$$y=a(x-2)^2+m.$$

Так как $y=-3$ при $x=2$, то $m=-3$. Кроме того, $y=0$ при $x=5$, т. е. $0=a(5-2)^2-3$, откуда $a=\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$y=\frac{1}{3}(x-2)^2-3=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}, \quad \text{т. е.} \quad a=\frac{1}{3}, b=-\frac{4}{3}, c=-\frac{5}{3}. \quad ▲$$

Исследование квадратичной функции. В этом разделе мы докажем несколько результатов относительно промежутков, на которых квадратичная функция сохраняет знак.

Теорема 1. *Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то при всех $x \in \mathbb{R}$ знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком числа a, т. е. $y > 0$ при $a > 0$ и $y < 0$ при $a < 0$.*

○ Запишем формулу (10) в виде

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}\right]. \qquad (12)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (12), положительно при любом значении x, так как $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, $-D > 0$, $a^2 > 0$. Следовательно, при $D < 0$ знак квадратичной функции совпадает со знаком числа a: если $a > 0$, то $y > 0$, а если $a < 0$, то $y < 0$ (рис. 13, 14). ●

Теорема 2. *Если $D = 0$, то при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = -\frac{b}{2a}$, знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком числа a; при $x = -\frac{b}{2a}$ квадратичная функция обращается в нуль.*

○ Если $D = 0$, то формула (12) принимает вид

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \qquad (13)$$

Из формулы (13) следует, что при $x = -\frac{b}{2a}$ квадратичная функция обращается в нуль. Если $x \neq -\frac{b}{2a}$, то $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$, и потому при $x \neq -\frac{b}{2a}$ знак y совпадает со знаком числа a (рис. 15, 16). ●

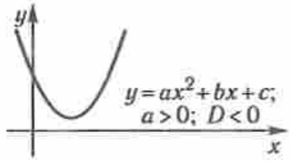


Рис. 13

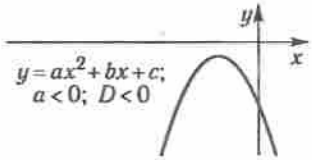


Рис. 14

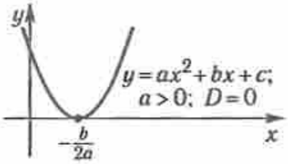


Рис. 15

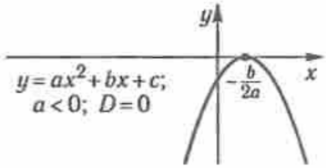


Рис. 16

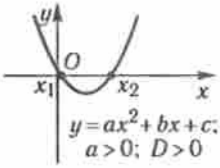


Рис. 17

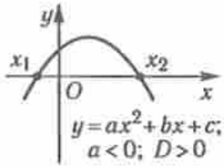


Рис. 18

Теорема 3. *Если* $D > 0$, *то знак квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$:

совпадает со знаком числа a для всех x, лежащих вне отрезка $[x_1, x_2]$, *где* x_1, x_2 — *корни уравнения*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{14}$$

такие, что $x_1 < x_2$;

противоположен знаку числа a при всех x таких, что $x_1 < x < x_2$.

○ Если $D > 0$, то из равенства (12), записанного в виде

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right],$$

следует, что $y = 0$ при

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}. \tag{15}$$

Числа x_1, x_2, определяемые формулой (15), являются корнями уравнения (14), а квадратный трехчлен представляется в виде

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

и поэтому

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{16}$$

Пусть $x_1 < x_2$, тогда если $x < x_1$, то $x < x_2$, и тогда $x - x_1 < 0$, $x - x_2 < 0$, откуда $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Аналогично, если $x > x_2$, то $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Поэтому при $x < x_1$ и при $x > x_2$ справедливо неравенство $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, и из формулы (16) следует, что для всех x, лежащих вне отрезка $[x_1, x_2]$, где x_1 и x_2 — корни уравнения (14) такие, что $x_1 < x_2$, знак y совпадает со знаком числа a.

Если $x_1 < x < x_2$, то $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. В этом случае знак y противоположен знаку числа a. Наконец, если $x = x_1$ и $x = x_2$, то $y = 0$ (рис. 17, 18). ●

Результат исследования квадратичной функции можно сформулировать в следующем, удобном для запоминания виде:

Функция $y = ax^2 + bx + c$ при всех x сохраняет знак коэффициента a, за исключением лишь случая, когда корни x_1 и x_2 действительны ($D \geqslant 0$) и число x удовлетворяет неравенствам $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Теорема 4. *Квадратичная функция*

$$y = ax^2 + bx + c$$

принимает положительные значения при всех $x \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда*

$$D = b^2 - 4ac < 0 \quad \text{и} \quad a > 0. \tag{17}$$

○ Достаточность следует из теоремы 1. В самом деле, если $D < 0$, то по теореме 1 знак y совпадает со знаком числа a, т. е. $y > 0$ при $a > 0$ и $y < 0$ при $a < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Докажем необходимость, т. е. покажем, что если $y > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то выполняется условие (17). Предположим, что условие $D < 0$ не выполняется. Тогда $D \geqslant 0$, и поэтому квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 ($x_1 = x_2$ при $D = 0$), т. е.

$$y(x_1) = y(x_2) = 0,$$

что противоречит условию ($y > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$). Итак, $D < 0$ и по теореме 1 имеем $a > 0$. ●

Следствие. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения при всех $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда

$$a < 0, \quad D = b^2 - 4ac < 0.$$

○ Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться тем, что функция $y = -ax^2 - bx - c$ удовлетворяет условиям теоремы 4. ●

3. Дробно-линейная функция и ее график

Функцию вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{18}$$

где a, b, c, d — заданные числа такие, что $c \neq 0$, $ad \neq bc$, называют *дробно-линейной*.

Если $c = 0$, то y — линейная функция ($d \neq 0$), а если $ad = bc$, то $y = \mathrm{const}$ при $x \neq -\frac{d}{c}$.

Дробно-линейная функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = -\frac{d}{c}$.

Рассмотрим сначала функцию вида

$$y = \frac{k}{x}, \quad k \neq 0. \tag{19}$$

График этой функции называют гиперболой.

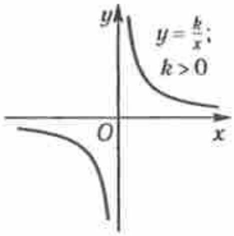


Рис. 19

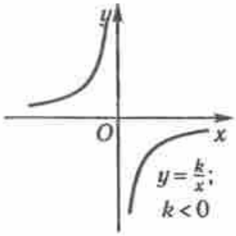


Рис. 20

1) Если в формуле (19) $k>0$, то $y>0$ при $x>0$ и $y<0$ при $x<0$. Поэтому при $k>0$ гипербола располагается в первом и третьем квадрантах (см. рис. 19).

Если $k>0$ и $x>0$, то при увеличении x величина y уменьшается, т. е. функция $y=\frac{k}{x}$, $k>0$ является убывающей при $x>0$.

Если x неограниченно увеличивается (стремится к бесконечности), то $\frac{k}{x}$ становится сколь угодно малым (стремится к нулю). Это означает, что при больших значениях x гипербола «прижимается» к оси Ox. Прямую $y=0$ (ось Ox) называют *горизонтальной асимптотой* графика функции при $x\to\infty$ (при x, стремящемся к бесконечности).

Если $x>0$ и $x\to 0$ (x стремится к нулю), то $y>0$ и $y\to\infty$. Это означает, что график функции $y=\frac{k}{x}$ «прижимается» к оси Oy. Прямую $x=0$ (ось Oy) называют *вертикальной асимптотой* графика функции $y=kx$ при $x\to 0$.

Отметим еще, что если точка $(x_0;y_0)$ принадлежит графику функции $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$, то точка $(-x_0;-y_0)$ также принадлежит этому графику, так как из равенства $y_0=\frac{k}{x_0}$ следует равенство $-y_0=\frac{k}{-x_0}$. Но точки $M_0(x_0;y_0)$ и $M_0'(-x_0;-y_0)$ симметричны относительно начала координат.

Поэтому график функции $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$, расположен симметрично относительно начала координат. Функцию, обладающую этим свойством, называют *нечетной*. Итак, $y=\frac{k}{x}$ — нечетная функция.

Так как функция $y=\frac{k}{x}$, $k>0$ убывает при $x>0$ и является нечетной, то она является убывающей и при $x<0$.

2) Если $k<0$, то график функции $y=\frac{k}{x}$ расположен во втором и четвертом квадрантах (см. рис. 20). В этом случае функция является возрастающей при $x<0$ и при $x>0$.

Точка (0;0) является центром симметрии графика функции $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$.

3) Обратимся к дробно-линейной функции общего вида (18). Преобразуем правую часть равенства (18), выделив слагаемое, не зависящее от x:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}. \tag{20}$$

Полагая

$$A=\frac{a}{c},\quad B=\frac{bc-ad}{c^2},\quad x_0=-\frac{d}{c}, \tag{21}$$

запишем равенство (20) в виде

$$y=A+\frac{B}{x-x_0}. \tag{22}$$

Из формулы (22) следует, что график дробно-линейной функции (18) можно получить сдвигом гиперболы $y=\frac{B}{x}$ на $|x_0|$ единиц вдоль оси Ox и на $|A|$ единиц вдоль оси Oy (направление сдвига зависит от знаков чисел x_0 и A, x_0 — корень уравнения $cx+d=0$; запоминать формулы (21) нет необходимости). Точка $(x_0;A)$ — центр симметрии графика функции (22), а прямые $x=x_0$ и $y=A$ — его асимптоты.

Пример 9. Построить график функции

$$y=\frac{3x+2}{2x+3}.$$

$\triangle$ Так как $y=\dfrac{3\left(x+\frac{3}{2}\right)+2-4{,}5}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}=1{,}5-\dfrac{1{,}25}{x+1{,}5}$, то график данной функции можно получить из графика функции $y=-\frac{1{,}25}{x}$ (рис. 21, пунктирные кривые) сдвигом вдоль оси Ox на 1,5 так, что точка $(-1{,}5;1{,}5)$ — центр симметрии графика, а прямые $x=-1{,}5$ и $y=1{,}5$ — его асимптоты. График пересекает ось Ox в точке $\left(-\frac{2}{3};0\right)$, а ось Oy — в точке $\left(0;\frac{2}{3}\right)$, и изображен на рис. 21 сплошными линиями. ▲

Пример 10. Построить график функции

$$y=\frac{13-4x}{2x-5}.$$

$\triangle$ Так как $y=\dfrac{-2(2x-5)+3}{2x-5}=-2+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{x-\frac{5}{2}}$, то прямые $x=\frac{5}{2}$ и $y=-2$ — асимптоты графика функции, $\left(\frac{5}{2};-2\right)$ — центр его сим-

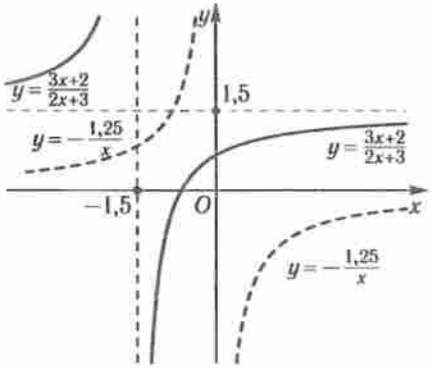


Рис. 21

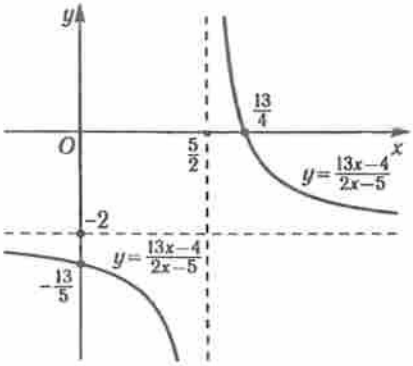


Рис. 22

метрии, а $\left(\frac{13}{4};0\right)$ и $\left(0;-\frac{13}{5}\right)$ — точки пересечения графика с осями координат (см. рис. 22). ▲

Задачи

1. Написать уравнение прямой, если эта прямая:
1) проходит через точку $(-1;2)$ и параллельна прямой $y=3x-4$;
2) пересекает координатные оси в точках $(0;-3)$ и $(4;0)$;
3) проходит через точки $(-2;8)$ и $(1;-1)$.

2. Найти координаты точки пересечения прямых:
1) $y=1$ и $y=-2x+3$; 2) $y=3x-4$ и $y=-5x+12$.

3. Найти значение k, при котором прямая $y=kx-2$:
1) проходит через точку пересечения прямых $y=5x-6$ и $y=-x+12$;
2) параллельна прямой, проходящей через точки $(0;-3)$ и $(2;0)$;
3) параллельна прямой, проходящей через точки $(-1;-3)$ и $(-3;5)$.

4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;3)$ и перпендикулярной прямой, которая проходит через точки $(-3;5)$ и $(1;3)$.

5. Построить график функции:
1) $y=2x^2+4x+7$; 2) $y=x(2-x)$.

6. Найти a, b и c, если точка A — вершина параболы $y=ax^2+bx+c$, проходящей через точку B:
1) $A\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, $B(0;3)$; 2) $A(1;4)$, $B(0;3)$.

7. Найти множество значений функции:
1) $y=-x^2+2x+5$; 2) $y=2x^2-x+4$.

8. Найти все значения c, при которых график функции $y=-x^2-4x+c$:
1) лежит ниже оси Ox;
2) имеет с осью Ox единственную общую точку;
3) пересекает ось Ox в двух точках;
4) пересекает ось Ox в двух точках, расположенных по разные стороны от точки $(0;0)$.

9. Найти коэффициенты a, b, c квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если $y(-1)=10$, $y(2)=7$, $y(5)=40$.

10. Определить знак коэффициента a квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если $y(-1)<1$, $y(1)>-1$, $y(3)<-5$.

11. Построить график функции:

1) $y=\frac{3x-4}{2x+3}$; 2) $y=\frac{5x+6}{2-3x}$.

12. Найти коэффициенты k, b, c дробно-линейной функции $y=k\frac{x-b}{x-c}$, если:

1) график функции проходит через точку $(-3;0)$, а прямые $x=-1$ и $y=2$ — асимптоты этого графика;

2) график функции проходит через точку $\left(0;-\frac{3}{2}\right)$, а прямые $x=-2$ и $y=3$ — асимптоты этого графика.

Ответы

1. 1) $y=3x+5$; 2) $y=\frac{3}{4}x-3$; 3) $y=-3x+2$. **2.** 1) $(2;1)$; 2) $(2;2)$. **3.** 1) $k=\frac{5}{9}$; 2) $k=\frac{3}{2}$; 3) $k=-1$. **4.** $y=2x-3$. **6.** 1) $a=2$, $b=-1$, $c=3$; 2) $a=-1$, $b=2$, $c=3$. **7.** 1) $(-\infty;6]$; 2) $\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$. **8.** 1) $c<-4$; 2) $c=-4$; 3) $c>-4$; 4) $c>0$. **9.** $a=-2$, $b=-3$, $c=5$. **10.** $a<0$. **11.** 1) Прямые $x=-\frac{3}{2}$ и $y=\frac{3}{2}$ — асимптоты графика, который проходит через точки $\left(0;-\frac{4}{3}\right)$ и $\left(\frac{4}{3};0\right)$; 2) прямые $x=\frac{2}{3}$ и $y=-\frac{5}{3}$ — асимптоты графика, который проходит через точки $(0;3)$ и $\left(-\frac{6}{5};0\right)$. **12.** 1) $k=2$, $b=-3$, $c=-1$; 2) $k=3$, $b=1$, $c=-2$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ЧИСЛОВЫМ ФУНКЦИЯМ

1. Область определения, множество значений

Определение. Пусть даны множества действительных чисел X и Y. *Функциональной зависимостью* (*функцией*) называется закон, по которому каждому значению величины $x\in X$, называемой *аргументом*, ставится в соответствие некоторое (единственное) число $y=f(x)$ из множества Y.

В математике словом «функция» называют и закон (правило) соответствия f, и величину $f(x)$.

Вместо букв x, f, y можно взять другие буквы, например функция может быть записана в виде $y=\varphi(t)$ или $z=F(x)$.

Множество X называется *областью определения функции* (обозначается $D(f)$ или D_f).

Например, функция $f(x)=\sqrt{2x-5}$ определена при $x \geqslant 2{,}5$, т. е. $D(f)=[2{,}5;+\infty)$, а для функции $\frac{3x}{x-5}$ имеем $D(f)=(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$.

Если число a принадлежит области определения функции f, то говорят, что *функция f определена в точке a*. Для того чтобы указать значение функции в фиксированной точке a, используется такая запись: $f(a), y(a), f(x)|_{x=a}$.

Укажем, например, значения функции $y=\sqrt{2x-5}$ в некоторых точках:

$$y(2{,}5)=0, \quad y(3)=1, \quad y(10)=\sqrt{15}.$$

Множеством значений $E(f)$ числовой функции f называется множество всех $a \in \mathbb{R}$, для которых существует хотя бы одно $x \in D(f)$ такое, что $f(x)=a$. Можно сказать иначе: E_f состоит из тех значений a, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы одно решение.

Число x_0 из области определения функции $y=f(x)$ называется *нулем функции*, если $f(x_0)=0$.

Например, числа -2 и 2 являются нулями квадратичной функции $y=x^2-4$.

2. Основные способы задания функций

1) *Аналитический* — задание функции формулой $y=f(x)$, показывающей способ вычисления значения функции по соответствующему значению аргумента. Если при этом ничего не говорится об области определения, то считается, что функция определена на множестве тех значений аргумента, для каждого из которых аналитическое выражение имеет смысл. Множество всех таких значений аргумента иногда называется *естественной областью определения функции*.

Следует подчеркнуть, что одна и та же функция может задаваться разными аналитическими выражениями (формулами). Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ называются *тождественно равными* или просто равными *на множестве* M, если они определены на множестве M и для каждого x_0, принадлежащего M, справедливо числовое равенство $f(x_0)=g(x_0)$. В этом случае пишут $f(x)\equiv g(x)$, $x \in M$. Примером функций, тождественно равных на множестве всех действительных чисел, могут служить функции $f(x)=\sqrt{x^2}$ и $g(x)=|x|$.

Пример 1. Доказать, что функции $f(x)=3x$ и $g(x)=|x-1|+|2x+1|$ совпадают на множестве $[1;+\infty)$.

$\triangle$ Если $x \geqslant 1$, то $x-1 \geqslant 0$ и $2x+1>0$, и поэтому $|x-1|=x-1$ и $|2x+1|=2x+1$. Следовательно, $|x-1|+|2x+1|=x-1+2x+1=$ $=3x$. $\blacktriangle$

Пример 2. Выяснить, на каком множестве равны функции $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ и $g(x)=x+1$.

$\triangle$ Заметим, что $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, и на всей области определения $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$, т. е. $f(x)=g(x)$ при всех $x\neq 1$. Следовательно, $f(x)=g(x)$ на любом множестве, не содержащем 1. $\blacktriangle$

В случае задания функции формулой возникает задача нахождения области определения (имеется в виду естественной области определения) функции. Если функция f представляет собой сумму, разность, произведение функций f_1 и f_2, то ее область определения состоит из тех значений x, которые принадлежат областям определения всех функций, т. е. $D(f)=D(f_1)\cap D(f_2)$. Если же функция $f=\frac{f_1}{f_2}$, то $D(f)=(D(f_1)\cap D(f_2))\setminus\{x|f_2(x)=0\}$, т. е. из множества $D(f_1)\cap D(f_2)$ необходимо удалить нули знаменателя.

Пример 3. Найти область определения функции

$$y=\frac{x-4}{3x+6}+\sqrt{9-x^2}.$$

$\triangle$ Для функции $f_1(x)=\frac{x-4}{3x+6}$ естественной областью определения является множество тех значений аргумента, для которых знаменатель дроби не обращается в нуль, т. е. $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$. Функция $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ определена на множестве тех значений x, для которых $9-x^2\geqslant 0$, т. е. $D_g=[-3;3]$. Следовательно, $D(y)=D(f)\cap D(g)=[-3;-2)\cup(-2;3]$.

Ответ. $D(y)=[-3;2)\cup(-2;3]$. $\blacktriangle$

При аналитическом способе задания функция может быть задана *явно*, когда дано выражение y через x, т. е. формула имеет вид $y=f(x)$, *неявно*, когда x и y связаны между собой уравнением вида $F(x,y)=0$, а также *параметрически*, когда соответствующие друг другу значения x и y выражены через третью переменную величину t, называемую *параметром*.

Например, два равенства $x=2t$, $y=3t^2+4$ определяют параметрически через параметр t функцию $y=0{,}75x^2+4$.

Пример 4. Найти множество значений функции $y(x)=\frac{x^2-x+2}{x^2+1}$.

$\triangle$ Для каждого действительного числа a решим уравнение

$$\frac{x^2-x+2}{x^2+1}=a. \qquad (1)$$

Уравнение (1) равносильно уравнению
$$(a-1)x^2+x+(a-2)=0. \tag{2}$$
При $a=1$ получаем уравнение $x-1=0$, имеющее решение, следовательно, $1 \in E(y)$. При $a \neq 1$ необходимым и достаточным условием того, что уравнение (2) имеет действительные корни, является условие $D=-4a^2+12a-7 \geqslant 0$, т. е. при $\frac{3-\sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. Так как $a=1$ принадлежит полученному отрезку, заключаем, что функция $y(x)$ принимает все значения из отрезка $\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}; \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$ и только их.

Ответ. $E(y)=\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}; \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$. ▲

Возможно задание функции разными аналитическими выражениями на различных участках. Например,
$$f(x)=\begin{cases} x^2-2, & \text{если } x<-1,\\ 2x+1, & \text{если } -1 \leqslant x<1,\\ 2-x^2, & \text{если } x \geqslant 1\end{cases}$$
или *функция Дирихле*
$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q},\\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}.\end{cases}$$

Кроме аналитического способа иногда функциональную зависимость задают парами чисел $(x, f(x))$, показывающих, что значению величины $x \in X$, ставится в соответствие число $f(x)$ из множества Y. При этом используют один из двух способов.

2) *Табличный* — указание значений функции от соответствующих значений аргумента. Способ применяется в тех случаях, когда область определения функции *дискретна*, т. е. состоит из конечного числа значений. В виде таблиц записывают результаты экспериментального исследования каких-либо процессов. При этом способе значения независимой переменной выписываются в определенном порядке x_1, $x_2, \ldots, x_n$, а рядом с ними указываются соответствующие им значения функции y_1, $y_2, \ldots$, y_n. Например,

x_1	x_2	x_3	x_4	...
y_1	y_2	y_3	y_4	...

Для значений аргумента, не содержащихся в таблице, значения функции обычно находят приближенно.

Этот способ задания функции дает возможность определить конкретные значения функции сразу, без каких-либо дополнительных вычислений, но не дает наглядного представления об изменении функции в зависимости от аргумента.

3) *Графический.* Графическим способом задания функции пользуются в тех случаях, когда он становится единственно доступным и наиболее удобным. Например, в технике, физике и т. д. Хотя этот способ является наглядным, однако он не позволяет точно определить числовые значения аргумента и функции, поскольку по чертежу значения y, отвечающие данным значениям x, находятся приближенно.

Графиком Γ_f *функции* $y=f(x)$ с областью определения $D(f)$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy вида $(x, f(x))$, $x \in D(f)$.

Графиком функции может быть кривая, прямая или множество отдельных точек. Изображение графика функции на координатной плоскости дает наглядное представление о свойствах и поведении функции.

Не всякая кривая на плоскости является графиком некоторой функции. Для того чтобы кривая была графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы вертикальные прямые (т. е. прямые, заданные уравнением $x=x_0$) пересекали кривую не более чем в одной точке.

3. Сложная функция

Пусть заданы две функции $y=f(x)$ и $x=g(t)$, причем область определения функции f содержит множество значений функции g. Тогда каждому числу t из области определения функции g соответствует значение $x=g(t)$, принадлежащее области определения функции f, а ему, в свою очередь, соответствует число $y=f(x)$. Таким образом, каждому числу t из области определения функции g ставится в соответствие единственное число y из множества значений функции f, а это означает, что на области определения функции g задана функция, которую называют либо *сложной функцией*, либо *суперпозицией* (*композицией*) *функций*. При этом пишут $y=f(g(t))$.

Пример 5. Представить функцию $y=\sqrt{2x^3+3}$ как суперпозицию других функций.

△ Заметим, что задача имеет бесконечно много решений. Приведем лишь одно из них. Рассмотрим функции $g(x)=2x^3+3$ и $f(x)=\sqrt{x}$. Тогда $y=\sqrt{2x^3+3}=f(g(x))$. ▲

Задачи

1. Являются ли на множестве M тождественно равными функции:

1) $y=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}$ и $y=-2x$, $M=[-1;1]$;

2) $y=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}-1$ и $y=x^2$, $M=(1;+\infty)$?

2. Найти область определения функций:

1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$; 2) $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{3+x}$; 3) $y=\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{1-x}}$.

3. Найти область определения и множество значений функций:

1) $y=x^2+2x+3$; 2) $y=\sqrt{x^2+2x+3}$; 3) $y=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$;

4) $y=-x^2+4x+5$; 5) $y=\sqrt[3]{-x^2+4x+5}$.

4. Найти множество значений функций:

1) $y=x-\sqrt{x}$; 2) $y=|x-2|+|x-3|$;

3) $y=|x-2|-|x-3|$; 4) $y=2x-|x-2|+|9-4x|$;

5) $y=x^2-x+2+\dfrac{1}{x^2-x+2}$; 6) $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$.

5. Дана функция $y(x)=x^2$. Найти:

1) $y(-x)$; 2) $y(x-1)$; 3) $y\left(\frac{1}{x}\right)$; 4) $y(\sqrt{x})$; 5) $2y(x)$;

6) $y^2(1-x)$; 7) $\sqrt{y(x)}$; 8) $y\,(y(x))$; 9) $y\,(2y(3x))$.

6. Дана функция $y(x)=\frac{1}{x}$. Найти:

1) $y(3x)$; 2) $y\,(3(x+2))$; 3) $4y\,(3(x+2))$;

4) $2-4y\,(3(x+2))$; 5) $2-4y\,(3(|x|+2))$; 6) $y(|x|)$;

7) $y(|2x|)$; 8) $y\,(|2(x-2)|)$; 9) $y\,(|2(x-2)|)-2$;

10) $|y\,(|2(x-2)|-2)|$.

7. Найти $f\,(g(x))$, $f\,(f(x))$, $g\,(f(x))$, $g\,(g(x))$, если:

1) $f(x)=2x-1$, $g(x)=x^3$; 2) $f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=\sqrt{x}$.

8. Решить уравнение:

1) $f(2x+3)=4f(x-2)$, если $f(x)=-x^2+4x-3$;

2) $f(x-3)=f(2x-2)-f(2x+2)$, если $f(x)=-x^2-4x-3$.

9. Дана функция $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Решить неравенство $f(x+3)<2f(3x+5)$.

10. Представить функции в виде суперпозиции других функций:

1) $f(x)=(2x-3)^2+1$; 2) $f(x)=2\sqrt{1-3x}+3$; 3) $f(x)=|1-|x||$.

11. Для функции $f(x)=2x-3$ найти $f\,(f(x))$, $f\,(f\,(f(x)))$.

12. Известно, что $f(x+3)=2f(x)-5$ при всех x. Выразить $f(x+6)$ и $f(x+9)$ через $f(x)$.

Функциональные уравнения

13*. Найти функцию $f(x)$, если известно, что:

1) $f(x+1)=x^2+2x+2$; 2) $f(2-x)=8+4x-x^2$.

14*. Найти какую-либо функцию $f(x)$, удовлетворяющую тождествам:

1) $f(f(x))=x^2$ $(x\geqslant 0)$; 2) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$;

3) $f\left(3x-\frac{1}{x}\right)=9x^2+\frac{1}{x^2}-1$ $(x\neq 0)$.

15.* Найти все функции $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

1) $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x,\ x\neq 0$; 2) $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x,\ x\in(-1;1)$;

3) $f(x)+xf(2-x)=1$.

Ответы и указания

1. 1) Да; 2) да. **2.** 1) $[0;1]$; 2) $(-\infty;-3)\cup(-3;0]$; 3) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **3.** 1) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=[2;+\infty)$; 2) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=\left[\sqrt{2};+\infty\right)$; 3) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=(0;0{,}5]$; 4) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=(-\infty;9]$; 5) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=(-\infty;\sqrt[3]{9}]$. **4.** 1) $[-0{,}25;+\infty)$; 2) $[1;+\infty)$; 3) $[-1;1]$; 4) $[3{,}75;+\infty)$; 5) $\left[\frac{65}{28};+\infty\right)$; 6) $\left[3-\sqrt{5};3+\sqrt{5}\right]$. **5.** 1) x^2; 2) x^2-2x+1; 3) $\frac{1}{x^2}$; 4) x; 5) $2x^2$; 6) $(1-x)^4$; 7) $|x|$; 8) x^4; 9) $324x^4$. **6.** 1) $\frac{1}{3x}$; 2) $\frac{1}{3x+6}$; 3) $\frac{4}{3x+6}$; 4) $2-\frac{4}{3x+6}$; 5) $\frac{6|x|+8}{3|x|+6}$; 6) $\frac{1}{|x|}$; 7) $\frac{1}{2|x|}$; 8) $\frac{1}{|2x-4|}$; 9) $\frac{1}{|2x-4|}-2$; 10) $\left|\frac{1}{|2x-4|}-2\right|$. **7.** 1) $f(g(x))=2x^3-1$; $f(f(x))=4x-3$; $g(f(x))=(2x-1)^3$; $g(g(x))=x^9$; 2) $f(g(x))=(\sqrt{x}+1)^2$; $f(f(x))=(x^2+2x+2)^2$; $g(f(x))=|x+1|$; $g(g(x))=\sqrt[4]{x}$. **8.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $-1, -13$. **9.** $(-\infty;-4)\cup(-2;+\infty)$. **11.** $f(f(x))=4x-9$, $f(f(f(x)))=8x-21$. **12.** $f(x+6)=4f(x)-15$, $f(x+9)=8f(x)-35$. **13.** 1) $f(x)=x^2+1$. Указание. Сделать замену $x+1=t$; 2) $f(x)=12-x^2$. **14.** 1) $f(x)=x^{\sqrt{2}}$. Указание. Искать решение в виде $f(x)=x^{\alpha}$; 2) $f(x)=x^2-2$. Указание. Сделать замену $x+\frac{1}{x}=t$; 3) $f(x)=x^2+5$. **15.** 1) $\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}$. Указание. Подставить $\frac{1}{x}$ вместо x; 2) $\frac{4x+5}{3-3x}$. Указание. Сделать замену $\frac{x+1}{x-2}=t$; 3) $f(x)=\frac{1}{1-x}$ при $x\neq 1$, $f(1)=\frac{1}{2}$. Указание. Подставить $2-x$ вместо x.

§ 3. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

1. Понятие непрерывности функции

Окрестностью точки $x_0\in\mathbb{R}$ называется любой интервал $(a;b)$, содержащий x_0, т. е. $x_0\in(a;b)$. Например, интервалы $(0{,}5;0{,}7)$ и $(-0{,}5;1)$ являются окрестностями точки $x_0=0{,}6$.

Пусть задана функция $y=f(x)$, которая определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Дадим аргументу функции некоторое изменение (*приращение*) Δx, такое что $x_0+\Delta x\in(a;b)$. Тогда значение функции изменится на величину $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, называемую *приращением функции*.

Если малое приращение аргумента Δx влечет за собой малое приращений функции Δy, то говорят, что функция $y=f(x)$ является *непрерывной в точке* x_0.

Замечание. Числа Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными. Приращение называют *малым*, если оно неограниченно близко к нулю, т. е. его абсолютную величину можно сделать меньше любого числа вида 10^{-n}, где $n \in \mathbb{N}$.

Данное «определение» является скорее описательным и недостаточно строгим. Точное определение понятия непрерывности будет дано позже.

Пример 1. Показать, что всякая линейная функция $y = kx + b$ является непрерывной в каждой точке области определения.

Δ Действительно, рассмотрим произвольное значение x_0 и дадим ему некоторое приращение Δx. Тогда приращение функции равно

$$\Delta y = k(x_0 + \Delta x) + b - kx_0 - b = k \cdot \Delta x,$$

т. е. малое приращение аргумента Δx влечет за собой малое приращение функции Δy. ▲

Точки, в которых нарушается условие непрерывности функции, называются *точками разрыва*.

Пример 2. Показать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна (т. е. не является непрерывной) в каждой точке своей области определения.

Δ Действительно, рассмотрим произвольное значение x_0. Если $x_0 \in \mathbb{Q}$, то в качестве приращения Δx возьмем любое достаточно малое иррациональное число. При этом число $x_0 + \Delta x$ иррационально. Тогда приращение функции $\Delta y = -1$, т. е. не является малым.

Пусть теперь $x \notin \mathbb{Q}$. Возьмем некоторое число x_1, такое что $|x_1 - x_0|$ — малое число. Тогда на отрезке $[x_1; x_0]$, если $x_1 < x_0$, или отрезке $[x_0; x_1]$, если $x_1 > x_0$, возьмем какое-нибудь рациональное число r. Беря в качестве приращения Δx разность $r - x_0$, т. е. $|\Delta x| = |r - x_0| < |x_1 - x_0|$ — малое число, получим $r = x_0 + \Delta x$. В этом случае приращение функции $\Delta y = 1$, т. е. не является малым.

Следовательно, функция $D(x)$ является разрывной в каждой точке своей области определения. ▲

Функция называется *кусочно-линейной*, если числовую прямую можно разбить на промежутки ненулевой длины, внутри каждого из которых эта функция линейна. Приведем примеры кусочно-линейных функций.

$$1)\ y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

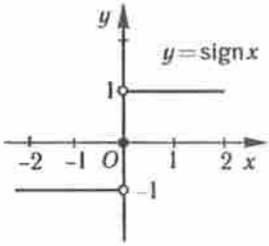


Рис. 23

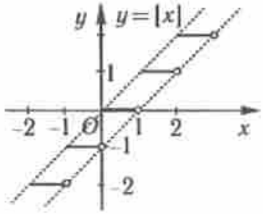


Рис. 24

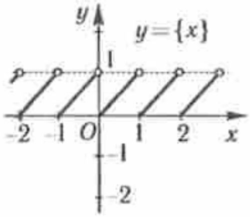


Рис. 25

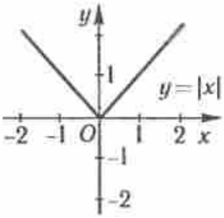


Рис. 26

Функция $y = \operatorname{sign} x$ — знак числа x. График этой функции изображен на рис. 23.

2) $y = [x]$ — ***целая часть*** числа x. Функция ставит в соответствие каждому числу x наибольшее целое число, не превосходящее x. График этой функции изображен на рис. 24.

3) $y = \{x\} = x - [x]$ — *дробная часть* числа x. График этой функции изображен на рис. 25.

4) $y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Функция $y = |x|$ — модуль числа x. График этой функции изображен на рис. 26.

Приведенные функции определены при всех $x \in \mathbb{R}$. Функция $y = |x|$ дает пример непрерывной функции на всей области определения, функция $y = \operatorname{sign} x$ непрерывна в каждой точке своей области определения, кроме $x = 0$, а функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$ непрерывны во всех точках, кроме точек, имеющих целочисленное значение, т. е. кроме $x \in \mathbb{Z}$.

2. Четные и нечетные функции

Множество X точек числовой оси называется *симметричным относительно начала координат* (точки O), если для любого числа $x \in X$ число $(-x)$ также принадлежит множеству X.

Функция $y=f(x)$, заданная на множестве X, называется *четной*, если выполнены следующие условия:

- множество X симметрично относительно начала координат;
- для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x)=f(x)$.

Примерами четных функций могут служить следующие функции: $y=x^4, y=|x|,\ y=\frac{x^2}{x^2+1},\ y=\sqrt{9-x^2}$.

Функция $y=f(x)$, заданная на множестве X, называется *нечетной*, если выполнены следующие условия:

- множество X симметрично относительно начала координат;
- для любого $x \in X$ справедливо равенство $f(-x)=-f(x)$.

Примерами нечетных функций могут служить следующие функции: $y=x^3,\ y=\frac{x}{x^2+1},\ y=\sqrt[5]{x},\ y=\frac{1}{x}$.

Свойства четных и нечетных функций. Справедливы следующие утверждения.

1) Если $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции, заданные на одном и том же множестве X, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x)\neq 0)$ являются четными функциями на множестве X.

2) Если $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, заданные на одном и том же множестве X, то функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ являются нечетными функциями на множестве X, а функции $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (если $g(x)\neq 0$ на X) являются четными функциями на X.

3) Если четная функция $f(x)$ и нечетная функция $g(x)$ заданы на одном и том же множестве X, то функция $f(x)\cdot g(x)$ — нечетная функция на X.

4) График четной функции симметричен относительно оси Oy. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

○ Действительно, если функция $y=f(x)$ четная, то для любого $x \in D(f)$ точки $(x;f(x))$ и $(-x;f(x))$, симметричные относительно оси Oy, принадлежат графику функции f. Следовательно, ось ординат является осью симметрии графика четной функции.

Если же функция $y=f(x)$ нечетная, то для любого $x \in D(f)$ точки $(x;f(x))$ и $(-x;-f(x))$, симметричные относительно точки O, принадлежат графику функции f. Следовательно, начало координат является центром симметрии графика нечетной функции. ●

Отметим, что существуют функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными. Например, $\frac{1}{1+x}$, x^2+x+1. Для первой из них не выполнено условие симметрии естественной области определения относительно начала координат. Вторая функция определена при любом значении аргумента, поэтому условие симметрии для нее выполнено. Но можно указать такие значения x, для которых не выполнено условие $f(-x)=-f(x)$ (например, $f(-1)\neq -f(1)$), а также такие значения x, для которых не выполнено условие $f(-x)=f(x)$ (например, $f(-2)\neq f(2)$). Заметим, что при доказательстве, к примеру, того факта, что функция не является четной, ссылка на то, что выражения $f(-x)$ и $f(x)$ «разные», поэтому $f(-x)\neq f(x)$, ничего не доказывает хотя бы потому, что разные по внешнему виду выражения могут задавать одну и ту же функцию.

Таким образом, чтобы опровергнуть условие $f(-x)=f(x)$, нужно доказать существование значения x, для которого это условие не выполнено.

Функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, называются функциями *общего вида*.

Пример 3. Исследовать на четность и нечетность функции:

$$f_1(x)=x^4-2x^2+4; \qquad f_2(x)=x^3+x;$$

$$f_3(x)=x^3+x+5; \qquad f_4(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}.$$

△ Функции $f_1(x), f_2(x)$ и $f_3(x)$ определены на множестве $\mathbb{R}$.

Функция $f_1(x)$ является четной, так как

$$f_1(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+4=x^4-2x^2+4=f_1(x)$$

для любого $x\in\mathbb{R}$. Функция $f_2(x)$ является нечетной, так как

$$f_2(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-f_2(x)$$

для любого $x\in\mathbb{R}$. Функция $f_3(x)$ не является ни четной, ни нечетной, так как $f_3(-1)=3$, а $f_3(1)=7$, т. е. $f_3(-1)\neq f_3(1)$ и $f_3(-1)\neq -f_3(1)$.

У функции $f_4(x)$ область определения $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ симметрична относительно начала координат.

Далее, для любого x справедлива следующая цепочка равенств:

$$f_4(-x)=\frac{1}{1-(-x)}+\frac{1}{1+(-x)}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=f_4(x).$$

Так как область определения данной функции симметрична относительно начала координат и $f_4(-x)=f_4(x)$ для любого x из области определения, то она является четной. ▲

Пример 4. Доказать, что каждая функция $f(x)$, имеющая симметричную относительно начала координат область определения, представима в виде суммы четной и нечетной функций.

$\triangle$ Рассмотрим две функции $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ и $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Их области определения совпадают с областью определения исходной функции f. Очевидно, что $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f_1(x) + f_2(x)$. Первое слагаемое — четная функция, а второе — нечетная.

Из полученных формул следует, что искомое представление всегда существует. $\blacktriangle$

Пример 5. Представить в виде суммы четной и нечетной функций следующие функции:

$$f_1(x) = x^3 + 6x^2 + 2x + 4; \quad f_2(x) = \frac{x+2}{1-x^2} + x + 1.$$

$\triangle$ Функция $f_1(x)$ определена для любого $x \in \mathbb{R}$ и

$$f_1(x) = \left(x^3 + 2x\right) + \left(6x^2 + 4\right),$$

где $x^3 + 2x$ — нечетная функция, а $6x^2 + 4$ — четная.

У функции $f_2(x)$ область определения $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ симметрична относительно начала координат. Используя формулы, выписанные в предыдущем примере, получим:

$$f_2(x) = \frac{f_2(x) + f_2(-x)}{2} + \frac{f_2(x) - f_2(-x)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{x+2}{1-x^2} + x + 1 + \frac{-x+2}{1-(-x)^2} - x + 1}{2} + \frac{\frac{x+2}{1-x^2} + x + 1 - \frac{-x+2}{1-(-x)^2} + x - 1}{2} =$$

$$= \frac{3-x^2}{1-x^2} + \frac{2x-x^3}{1-x^2},$$

где $\frac{3-x^2}{1-x^2}$ — четная функция, а $\frac{2x-x^3}{1-x^2}$ — нечетная функция. $\blacktriangle$

3. Монотонные функции

Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется *возрастающей* (соответственно *убывающей*) на множестве $M \subseteq X$, если для любых x_1 и x_2 из множества M таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Функция $y = f(x)$, $x \in X$, называется *неубывающей* (соответственно *невозрастающей*) на множестве $M \subseteq X$, если для любых x_1 и x_2 из множества M таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Функция, обладающая одним из перечисленных свойств (является возрастающей, убывающей, невозрастающей или неубывающей) на множестве $M \subseteq X$, называется *монотонной* на M.

При исследовании функций и построении их графиков важно найти промежутки, на которых функции возрастают или убывают. Такие промежутки называют *промежутками монотонности функции*. В задачах, отвечая на вопрос о промежутках монотонности функций, следует указывать максимально возможные промежутки возрастания и убывания функций.

Пример 6. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$.

$\triangle$ Отметим, что $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$. Составим разность $y(x_1) - y(x_2)$. Имеем

$$\frac{2}{1-x_1^2} - \frac{2}{1-x_2^2} = \frac{2\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{\left(1-x_1^2\right)\left(1-x_2^2\right)}.$$

Область определения исходной функции

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

Соответственно рассмотрим три промежутка.

1) Пусть $x_1 < x_2 < -1$. Тогда $x_1^2 - x_2^2 > 0$, $1 - x_1^2 < 0$, $1 - x_2^2 < 0$. Следовательно, $y(x_1) - y(x_2) > 0$ на промежутке $(-\infty; -1)$, т. е. функция убывает.
2) Пусть $-1 < x_1 < x_2 < 1$. Тогда $1 - x_1^2 > 0$, $1 - x_2^2 > 0$. При этом $x_1^2 - x_2^2 > 0$, если $-1 < x_1 < x_2 \leqslant 0$, и $x_1^2 - x_2^2 < 0$, если $0 \leqslant x_1 < x_2 < 1$. Следовательно, $y(x_1) - y(x_2) > 0$ на $(-1; 0]$, т. е. функция убывает на этом промежутке, и $y(x_1) - y(x_2) < 0$ на $[0; 1)$, т. е. функция возрастает на этом промежутке.
3) Пусть $1 < x_1 < x_2$. Тогда $x_1^2 - x_2^2 < 0$, $1 - x_1^2 < 0$, $1 - x_2^2 < 0$. Следовательно, $y(x_1) - y(x_2) < 0$ на промежутке $(1; +\infty)$, т. е. функция возрастает.

Итак, данная функция на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0]$ убывает, а на промежутках $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$ возрастает. ▲

Замечание. Если функция $y = f(x)$ является монотонной на множествах M_1 и M_2, то на их объединении она может и не быть монотонной. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на каждом из множеств $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но она не является убывающей на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В самом деле, например, возьмем $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Тогда $x_1 < x_2$, но $f(x_1) = -1 < 1 = f(x_2)$.

Свойства монотонных функций. Справедливы следующие утверждения.

1) Сумма двух убывающих (возрастающих) функций f и g на множестве M есть убывающая (возрастающая) функция на множестве M.

2) **Теорема** (*о корне*). Пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке M, число a — любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень в промежутке M.

○ Пусть $f(x)$ возрастает на промежутке M. По условию существует такое $x_0 \in M$, что $f(x_0)=a$. Докажем, что x_0 — единственный корень уравнения $f(x)=a$.

Допустим, что существует $x_1 \in M$ и $f(x_1)=a$. Тогда или $x_0 > x_1$, или $x_1 > x_0$. Однако из определения возрастающей функции на промежутке M следует, что если $x_0 > x_1$, то $f(x_0) > f(x_1)$, если же $x_1 > x_0$, то $f(x_1) > f(x_0)$. Это противоречит равенству $f(x_0)=f(x_1)=a$. Следовательно, сделанное предположение неверно и в промежутке M других корней уравнения $f(x)=a$, кроме x_0, нет.

В случае убывающей функции $f(x)$ доказательство аналогично. ●

3) Пусть $y=f(x)$ — монотонная на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении a уравнение $f(x)=a$ имеет не более одного корня.

4. Наибольшее и наименьшее значения функций

Ограниченность функций. Функция $y=f(x)$, определенная на множестве X, называется:

- *ограниченной снизу* на данном множестве, если существует такое число A, что $A \leqslant f(x)$ для любого $x \in X$;
- *ограниченной сверху* на данном множестве, если существует такое число B, что $B \geqslant f(x)$ для любого $x \in X$;
- *ограниченной на данном множестве*, если существует такое число M, что $M \geqslant |f(x)|$ для любого $x \in X$. Легко видеть, что ограниченность — это ограниченность сверху и снизу.
- *неограниченной на данном множестве*, если для любого числа $M>0$ найдется $x_M \in X$, такой, что $|f(x_M)| \geqslant M$. Если же при выполнении этого условия множество $X=D(f)$, то в этом случае говорят, что *функция f не ограничена*.

Пример 7. Исследовать на ограниченность функции:

$$f_1(x)=x^4-2x^2+4; \quad f_2(x)=\{x\};$$

$$f_3(x)=x^3+x; \quad f_4(x)=\frac{1}{x^2-2x+3}.$$

△ Функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ и $f_4(x)$ определены на множестве $\mathbb{R}$.

Функция $f_1(x)$ является ограниченной снизу числом 3, так как

$$f_1(x)=x^4-2x^2+4=(x^2-1)^2+3 \geqslant 3$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

Функция $f_2(x)$ является ограниченной снизу и сверху, так как $0 \leqslant \{x\} < 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Функция $f_3(x)$ не является ограниченной ни снизу, ни сверху, так как $|f_3(x)| = |x| \cdot (x^2+1) \geqslant |x|$, т. е. принимает по модулю сколь угодно большие значения.

Функция $f_4(x)$ ограниченна снизу и сверху, так как

$$f_4(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} = \frac{1}{(x-1)^2 + 2},$$

а знаменатель $(x-1)^2 + 2 \geqslant 2$. Следовательно, $0 < \frac{1}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{1}{2}$, т. е. для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства $0 < f_4(x) \leqslant 0{,}5$. ▲

Пример 8. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ не ограничена.

△ Функция $\frac{1}{x^2}$ определена при всех $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Пусть M — любое положительное число. Положим $x_M = \frac{1}{\sqrt{2M}}$. Тогда $f(x_M) = 2M > M$. Следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ не ограничена. ▲

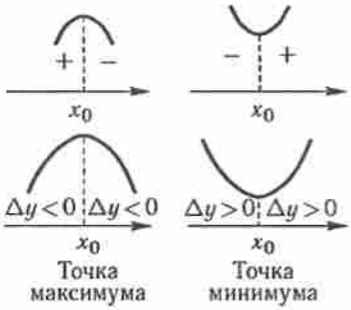


Рис. 27

Экстремумы функции. Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность $\mathcal{U} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что $f(x_0) > f(x)$ при всех $x \in \mathcal{U}$, кроме $x = x_0$.

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность $\mathcal{U} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что $f(x_0) < f(x)$ при всех $x \in \mathcal{U}$, кроме $x = x_0$ (рис. 27).

Точки максимума и минимума функции $f(x)$ называются *точками экстремума* и обозначаются $x_{\max}$ и $x_{\min}$ соответственно.

Замечание. Иногда, для того чтобы подчеркнуть, что неравенства $f(x_0) \geqslant f(x)$ для точки максимума или $f(x_0) \leqslant f(x)$ для точки минимума функции $f(x)$ выполняются лишь в некоторой окрестности x_0, эту точку называют *точкой локального максимума* (или *локального минимума*) или *точкой локального экстремума*.

Экстремумом функции $f(x)$ называется ее значение в точке локального максимума или минимума. Такие значения называются, соответственно, *максимумом* и *минимумом функции* и обозначаются $y_{\max}$ и $y_{\min}$.

Сформулируем достаточные условия локального экстремума.

Достаточное условие локального максимума. Если функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$, возрастает на некотором промежутке $(x_0 - \delta; x_0] \in D(f)$ и убывает на некотором промежутке $[x_0; x_0 + \delta) \subset D(f)$, то точка x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$.

Достаточное условие локального минимума. Если функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$, убывает на некотором промежутке $(x_0 - \delta; x_0] \in D(f)$ и возрастает на некотором промежутке $[x_0; x_0 + \delta) \subset D(f)$, то точка x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$.

Если существует точка x_0 из множества $M \subseteq D(f)$ такая, что при любом x из множества M имеет место неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0),$$

то говорят, что функция $y = f(x)$ на множестве M принимает свое *наименьшее* значение $y = f(x_0)$, которое обозначают $y_{\text{наим}}$. Если же в точке x_0 имеет место неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0),$$

то говорят, что функция $y = f(x)$ на множестве M принимает свое *наибольшее* значение $y = f(x_0)$, которое обозначают $y_{\text{наиб}}$.

Если функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, то наименьшее значение она принимает в точке $x = a$, а наибольшее — в точке $x = b$, если же она убывает на этом отрезке, то наоборот: наибольшее значение она принимает в точке $x = a$, а наименьшее — в точке $x = b$.

Функция может и не иметь на множестве наибольшего (наименьшего) значения, но если наибольшее (наименьшее) значение функции на множестве существует, то оно единственно. Заметим, что точек x_0, в которых оно принимается, может быть несколько.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}.$$

Δ Найдем множество значений данной функции. Для этого найдем все такие значения a, для которых имеет решение уравнение

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1} = a. \tag{1}$$

Так как $x^2 + 1 \neq 0$, то, домножая обе части уравнения (1) на $x^2 + 1$ и приводя подобные, получим

$$(1 - a)x^2 - 2x + (2 - a) = 0. \tag{2}$$

При $a = 1$ решением уравнения (2) служит $x = 0{,}5$. При $a \neq 1$ необходимым и достаточным условием того, что уравнение (2) имеет действительные корни, является выполнение неравенства

$$D = -4a^2 + 12a - 4 \geqslant 0.$$

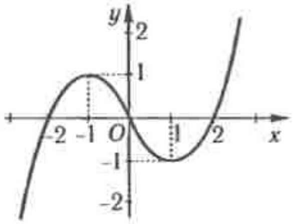


Рис. 28

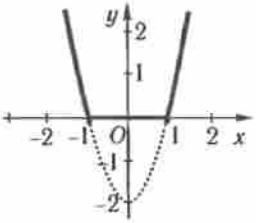


Рис. 29

Отсюда следует, что уравнение (2) при $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $a \neq 1$, имеет два различных или совпадающих корня x_1 и x_2, причем $y(x_1) = y(x_2) = a$. Кроме того, $a = 1$ принадлежит выписанному промежутку. Следовательно, функция принимает все значения из отрезка $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ и только их. Поэтому $y_{\text{наим}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $y_{\text{наиб}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Найдем значения x, в которых достигаются найденные наибольшее и наименьшее значения функции. Из формулы для корней уравнения (2) следует, что при $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ числа $x_1 = x_2 = \frac{4}{3-\sqrt{5}} = 3+\sqrt{5}$, а при $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ числа $x_1 = x_2 = \frac{4}{3+\sqrt{5}} = 3-\sqrt{5}$.

Значит, $y_{\text{наим}} = y(3+\sqrt{5}) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $y_{\text{наиб}} = y(3-\sqrt{5}) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. ▲

Пример 10. Постройте график функции $y = f(x)$. Укажите промежутки возрастания и убывания, а также точки экстремумов функции, если

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{при } x < 0, \\ x^2 - 2x, & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

△ График данной функции изображен на рис. 28. Функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $[-1; 1]$. Точки экстремумов: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 1$. ▲

Пример 11. Постройте график функции $y = f(x)$. Укажите промежутки возрастания и убывания, а также точки экстремумов функции, если

$$f(x) = x^2 - 1 + |x^2 - 1|.$$

△ Заметим, что $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| < 1, \\ 2x^2 - 2, & \text{при } |x| \geqslant 1. \end{cases}$

График данной функции изображен на рис. 29. Функция убывает на промежутке $(-\infty; -1]$, возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и является постоянной на промежутке $[-1; 1]$. Точки $x = -1$ и $x = 1$

являются точками минимума, причем $f(-1)=f(1)=0$. Любая точка x_0 из интервала $(-1;1)$ является одновременно как точкой минимума, так и точкой максимума, так как $f(x)=f(x_0)$ для любого x из интервала $(-1;1)$, который является окрестностью точки $x_0 \in (-1;1)$. ▲

5. Периодические функции

Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T>0$, называемое периодом, что для каждого $x \in D(f)$:

1) точки $x+T$ и $x-T$ принадлежат области определения функции;
2) $f(x)=f(x+T)$.

Если T — период функции, то ее периодом будет также и число kT, $k \in \mathbb{Z}$. Наименьший из положительных периодов периодической функции (если он существует) называется ее *основным* (*главным*) *периодом*.

В качестве примера рассмотрим следующие функции:

а) $y=\{x\}=x-[x]$ — «дробная часть x». Ее основной период $T=1$;

б) функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \in \mathbb{Q},\\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q},\end{cases}$$

в качестве периода имеет любое рациональное число, но основного периода не имеет;

в) $y=C$, где C — постоянная, в качестве периода имеет любое положительное действительное число, но основного периода не имеет.

Свойства периодических функций. Справедливы следующие утверждения.

1) Если точка x_0 принадлежит области определения $D(f)$ периодической функции $f(x)$ с периодом T, то $D(f)$ принадлежат и все точки x_0+nT, $n \in \mathbb{Z}$. Область определения периодической функции содержит сколь угодно большие по абсолютной величине положительные и отрицательные числа.

2) Периодическая функция принимает каждое свое значение в бесконечном числе значений аргумента, среди которых есть сколь угодно большие по абсолютной величине положительные и отрицательные числа. Периодическая функция не может быть возрастающей или убывающей на всей области определения.

3) Если для периодической функции $f(x)$ с периодом T на некотором отрезке $[\alpha;\alpha+T]$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant M$, то это неравенство выполняется при всех значениях аргумента.

Периодическая функция $f(x)$, определенная и непрерывная на всей числовой прямой, ограничена.

4) Положительные числа T_1 и T_2 *соизмеримы*, если $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2} \in \mathbb{Q}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. В этом случае существует такое $T_0 > 0$, что $T_1 = n_1 T_0$, $T_2 = n_2 T_0$. Назовем *наименьшим общим кратным* $\text{НОК}(T_1, T_2)$ таких чисел величину $T = \text{НОК}(n_1, n_2) \cdot T_0$.

Теорема. *Пусть $T_1 > 0$ — период функции $f(x)$, а $T_2 > 0$ — период функции $g(x)$, причем T_1 и T_2 соизмеримы. Если существуют значения x, принадлежащие одновременно $D(f)$ и $D(g)$, то функция $h(x) = f(x) + g(x)$ — периодическая, имеющая периодом число $T = \text{НОК}(T_1, T_2)$.*

○ Если $T = \text{НОК}(T_1, T_2)$, то существуют такие целые числа k и m, что $T = kT_1$ и $T = mT_2$. Пусть x — любое значение из $D(h)$. Тогда

$$h(x+T) = f(x+T) + g(x+T) =$$
$$= f(x+kT_1) + g(x+mT_2) = f(x) + g(x) = h(x).$$ ●

Замечание 1. Любое число вида nT, где $n \in \mathbb{N}$, будет являться периодом функции $h(x)$.

Замечание 2. В данной теореме утверждается лишь, что T — наименьшее общее кратное соизмеримых отрезков T_1 и T_2 — является одним из периодов. Однако может оказаться, что функция $h(x) = f(x) + g(x)$ будет иметь периоды, меньшие T. Например, $f(x) = \{x\}$, $g(x) = 1 - \{x\}$, $h(x) = 1$.

Замечание 3. Верны аналогичные теоремы для произведения и частного периодических функций $f(x)$ и $g(x)$.

Пример 12. Пусть 2π — период функции $f(x)$, а $0{,}6\pi$ — период функции $g(x)$. Найти один из периодов функции $f(x) + g(x)$.

△ Отрезки длины $T_1 = 2\pi$ и $T_2 = 0{,}6\pi$ соизмеримы, так как их отношение $\frac{T_1}{T_2} = \frac{10}{3}$ есть рациональное число. Это означает, что существует такое $T_0 > 0$, что $T_1 = 10 \cdot T_0$, $T_2 = 3 \cdot T_0$. В данном случае $T_0 = \frac{\pi}{5}$. Тогда число $T = \text{НОК}(3, 10) \cdot T_0 = 30 \cdot T_0 = 6\pi$ является периодом функции $f(x) + g(x)$. ▲

Пример 13. Найти главный (основной) период функции $f(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\}$.

△ Докажем, что число $T = 2$ — главный период данной функции. Действительно, число $T = 2$ — ее период, так как $D(f) = \mathbb{R}$, и для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f(x+2) = \left\{\frac{x+2}{2}\right\} = \left\{\frac{x}{2} + 1\right\} = \left\{\frac{x}{2}\right\} = f(x)$.

Покажем, что никакое число T_1, $0 < T_1 < 2$, не может являться периодом функции $f(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\}$. Предположим, что такое число существует. Тогда для любого x имеет место равенство $\left\{\frac{x}{2}\right\} = \left\{\frac{x}{2} + \frac{T_1}{2}\right\}$. В частности, при $x = 0$ имеем $0 = \left\{\frac{T_1}{2}\right\}$. Но так как $0 < T_1 < 2$, то $0 < \frac{T_1}{2} < 1$ и $\left\{\frac{T_1}{2}\right\} = \frac{T_1}{2}$, т. е. $T_1 = 0$. Это значит, что никакое число T_1, $0 < T_1 < 2$, периодом данной функции не является. Следовательно, число 2 — основной период. ▲

Задачи

1. Определить, какие из функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y = x^2 - x^4$; 2) $y = x^3 - x^5$; 3) $y = x^3 - x^2$;
4) $y = (x-3)^3$; 5) $y = (2-x)^3 - (2+x)^3$; 6) $y = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}}}$;
7) $y = 3\sqrt{x}$; 8) $y = \sqrt{2|x| - 1}$; 9) $y = |4x - 3|$;
10) $y = |x-2| - 3|x| + |x+2|$; 11) $y = [|4x|]$; 12) $y = \operatorname{sign}(2x-1)$;
13) $y = \operatorname{sign}|2x|$.

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции. Что можно сказать о функциях $\varphi_1(x) = f(x) + g(x)$, $\varphi_2(x) = f(x)g(x)$, $\varphi_3(x) = f(g(x))$, $\varphi_4(x) = xf(x) + |g(x)|$?

3. Известно, что $f(x)$ — четная функция, а $g(x)$ — нечетная. Что можно сказать о функциях $\varphi_1(x) = f(x + g(x))$, $\varphi_2(x) = f(x)g(x)$, $\varphi_3(x) = g(f(x))$, $\varphi_4(x) = xf(x) + g(x)$?

4. Доказать, что если $f(x)$ — произвольная функция, а $g(x)$ — четная, то $f(g(x))$ — четная функция.

5. Доказать, что если $f(x)$ — нечетная функция и $f(0)$ существует, то $f(0) = 0$.

6. Представить функцию в виде суммы четной и нечетной функций:

1) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x + 4$; 2) $f(x) = \dfrac{x^4 + x}{x^2 + x + 1}$;
3) $f(x) = |2x+1| - 2|x-1|$; 4) $f(x) = \operatorname{sign}(x^2 + x)$.

7. Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — функции, каждая из которых либо четная, либо нечетная. Доказать, что:

1) функция $|f_1(x)| + \ldots + |f_n(x)|$ четная;
2) функция $f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ нечетная, если количество нечетных функций $f_i(x)$ нечетное, и четная, если это количество четное;
3) функция $f_1(f_2(f_3(\ldots(f_n(x))\ldots)))$ четная, если хотя бы одна из функций $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ четная, и нечетная, если все функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ нечетные.

8. Найти все четные и все нечетные функции:

1) среди линейных функций $f(x) = ax + b$;
2) среди квадратичных функций $f(x) = ax^2 + bx + c$.

9. Вычислить $f(-3)$, если известно, что $f(3)=2$, а функция $f(x)+x^2$ нечетная.

10. Вычислить $f(4)$, если известно, что $f(-4)=9$, а функция $(x+1)f(x)$ четная.

11. Найти, какой формулой определяется функция $f(x)$ при $x<0$, и решить уравнение $f(x)=3$, если известно, что при $x>0$ функция $f(x)$ задана формулой $f(x)=-x^2+4x$, и кроме того, известно, что:
1) $f(x)$ — нечетная; 2) $f(x)$ — четная.

12. Найти промежутки возрастания и убывания функций:
1) $y=2-x-x^2$; 2) $y=3x^2+12x+1$; 3) $y=\dfrac{3}{3-x}$;
4) $y=\dfrac{4x+3}{4x+1}$; 5) $y=2-\sqrt{1+2x}$; 6) $y=3-|x+1|$;
7) $y=\{x\}$; 8) $y=[x]$.

13. Построить график функции $y=f(x)$. Указать промежутки возрастания и убывания, если:
1) $f(x)=\begin{cases}8-(x+6)^2, & \text{при } x<-6,\\ |x^2-6|x|+8|, & \text{при } x\geqslant -6;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}-x-4, & \text{при } x<-1,\\ (x-2)|x|, & \text{при } x\geqslant -1\end{cases}$

14. Доказать, что сумма возрастающих функций является возрастающей. Верно ли, что:
1) сумма убывающих функций — убывающая функция;
2) произведение возрастающих функций — возрастающая функция;
3) произведение положительных возрастающих функций — возрастающая функция?

15. Что можно сказать о функции $f(g(x))$, если:
1) f и g — возрастающие функции;
2) f — возрастающая, а g — убывающая функции;
3) f и g — убывающие функции?

16. Пусть $f(x)$ — функция, определенная на промежутке $[-1;4)$ и убывающая на этом промежутке. Известно, что $f(2)=5$. Решить неравенство $f(x)>5$.

17. Найти точки экстремумов и экстремумы функции:
1) $f(x)=2-|x|$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$; 3) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$;
4) $f(x)=\dfrac{3|x|+1}{x-1}$; 5) $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{при } x\leqslant \frac{13}{7},\\ -x^2+7x-12, & \text{при } x>\frac{13}{7}.\end{cases}$

18. Найти наименьшее и наибольшее значения функции:
1) $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$; 2) $y=\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$;
3) $y=\sqrt{2+x-x^2}$; 4) $y=\sqrt{2x^4-6x^2+7}$.

19. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезках:
1) $y=2+x-x^2$, $x\in[-1;3]$; 2) $y=4+\dfrac{1}{x-3}$, $x\in[0;2]$;
3) $y=\dfrac{3-3x}{2-3x}$, $x\in[1;4]$.

20. Найти наименьшее и наибольшее значения выражения $f(x,y)=x^2+\dfrac{6}{y}$, если $x\in\left[-2;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, а $y\in[-3;-1]$.

21. Являются ли периодическими функциями:
1) сумма n периодических функций;
2) произведение n периодических функций?

22. Число T является основным периодом функции $f(x)$. Доказать, что число $T_1 = \frac{T}{|k|}$ является основным периодом функции $f(kx)$, где $k \neq 0$.

23. Доказать, что каждая из следующих функций является периодической, и найти ее основной период:
1) $y=\{2x+1\}$; 2) $y=2\{x+1\}$; 3) $y=\frac{\{7x+1\}}{\{0{,}5x+1\}}$; 4) $y=\frac{\{3x+1\}+7}{\{0{,}3x+1\}+2}$.

24. Доказать утверждение: если f — периодическая функция, то какова бы ни была функция g, функция $h=g(f(x))$ является периодической функцией.

25. Пусть f — периодическая функция, а g — непериодическая. Является ли периодической функция $h=f(g(x))$?

26. Докажите, что функция f, $D(f)=\mathbb{R}$, является периодической с периодом T_1, если для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено условие:
1) $f(x+T)=\frac{1}{f(x)}$, $T>0$; $T_1=2T$; 2) $f(x+T)=\frac{1}{1-f(x)}$, $T>0$; $T_1=3T$.

27. Числа 2π и $0{,}8\pi$, соответственно, являются периодами функций $f(x)$ и $g(x)$. Найти один из периодов функции:
1) $f(3x)$; 2) $y=f\left(\frac{x}{3}\right)$; 3) $y=f(x)+g(x)$;
4) $y=f(3x)+g(2x)$; 5) $y=f\left(\frac{x}{3}\right)-g\left(\frac{x}{2}\right)$.

28. Вычислить значения $f(2)$, $f(1{,}5)$, $f\left(-13\frac{1}{6}\right)$ функции $y=f(x)$, если известно, что она имеет период $T=1$ и на промежутке $[0;1)$ задана формулой:
1) $y=x^2-x$; 2) $y=x^3+x^2$.

29. Известно, что $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2 и $f(x)=x^2-3x$ при $-1<x\leqslant 1$. Написать формулу для $f(x)$ на промежутке $(3;5]$.

30. Пусть $f(x)$ — нечетная периодическая функция с периодом 6 и $f(x)=x^3-3x^2$ при $x\in[0;3]$. Написать формулу для $f(x)$ на отрезке $[9;12]$.

31*. Известно, что равенство $f(x+2)=-f(x)$ выполняется для всех $x\in\mathbb{R}$. Доказать, что функция $f(x)$ является периодической с периодом 4.

32*. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая для всех x равенству $f(x)=f(2-|x|)$. Доказать, что $f(x)$ — четная периодическая функция.

33*. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая для всех x равенству $f(x+T)=f(x)+a$. Доказать, что функция $f(x)$ является суммой периодической и линейной функций.

34. Доказать, что следующие функции не являются периодическими:
1) $y=x^2$; 2) $y=|2x+1|$.

35. Известно, что функция $y=f(x)$ является нечетной и периодической с периодом 1. Найти $f(-8{,}3)$, если известно, что $f(2{,}3)=2$.

36. Функция $y=f(x)$ определена для всех $x\in\mathbb{R}$ и является нечетной периодической с периодом 4. На промежутке $0\leqslant x\leqslant 2$ ее значения вычисляются по формуле $f(x)=1-|x-1|$. Решить уравнение

$$2f(x)\cdot f(x-8)+5f(x+12)+2=0.$$

37*. Функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \mathbb{R}$ и не равная 1 ни при каком значении x, удовлетворяет равенству $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Найти $f(2000)$, если $f(2) = 3$.

38. Функция $f(x)$, определенная при всех значениях x и не равная 0 ни при каком значении x, удовлетворяет равенству $f(x+4) = \frac{f(x)-1}{f(x)}$. Найти $f(2004)$, если $f(8) = 5$.

39*. Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет равенству $f(x+3) = x+5-f(x)$, а при $x \in [0,3]$ задается формулой $f(x) = 1 + 6{,}5x - x^2$. Найти $f(100)$.

40*. Известно, что $f(x)$ — нечетная периодическая функция с периодом 6 и $f(x) = x^2 - 3x$ при $x \in [0;3]$. Вычислить сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$.

41. Пусть $f(x)$ — функция с периодом 5 и $f(x^2) = 3x^4 - x^6$ при $x \in [0; \sqrt{5}]$. Вычислить $f(-2)$.

Ответы

1. Функции под номерами 1), 8), 10) являются четными; функции под номерами 2), 5), 6), 7), 13) являются нечетными. **2.** φ_1 и φ_3 — нечетные функции, φ_2 и φ_4 — четные. **3.** φ_1 и φ_3 — четные функции, φ_2 и φ_4 — нечетные. **6.** 1) $f(x) = (x^4+6x^2+4) - (3x^3-2x)$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4+x}{x^2+x+1} + \frac{x^4-x}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4+x}{x^2+x+1} - \frac{x^4-x}{x^2-x+1}\right)$; 3) $f(x) = \frac{1}{2}(|2x+1| - 2|x-1| + |1-2x| - 2|x+1|) + \frac{1}{2}(|2x+1| - 2|x-1| - |1-2x| + 2|x+1|)$; 4) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sign}(x^2+x) + \operatorname{sign}(x^2-x)\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sign}(x^2+x) - \operatorname{sign}(x^2-x)\right)$. **8.** 1) Четная при $a=0$, нечетная при $b=0$; 2) четная при $b=0$, нечетных нет (если $a \neq 0$). **9.** -20. **10.** $-5{,}4$. **11.** 1) $f(x) = x^2+4x$ при $x<0$, $x = -2-\sqrt{7}$, $x=1, x=3$; 2) $f(x) = -x^2-4x$ при $x<0$; $x = \pm 1, x = \pm 3$. **12.** 1) Возрастает на $(-\infty; -0{,}5]$, убывает на $[-0{,}5; +\infty)$; 2) возрастает на $[-2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$; 3) возрастает на интервалах $(-\infty; 3)$ и $(3; +\infty)$; 4) убывает на интервалах $(-\infty; -0{,}25)$ и $(-0{,}25; +\infty)$; 5) убывает на $[-0{,}5; +\infty)$; 6) возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; +\infty)$; 7) возрастает на каждом промежутке $[k; k+1)$, где $k \in \mathbb{Z}$; 8) функция $y = [x]$ является неубывающей на $\mathbb{R}$, но участков возрастания у нее нет, так как на каждом промежутке $[k; k+1)$, где $k \in \mathbb{Z}$, функция принимает постоянные значения. **14.** 1) Да; 2) нет; 3) да. **15.** 1) Возрастающая; 2) убывающая; 3) возрастающая. **16.** $[-1; 2)$. **17.** 1) $x_{max} = 0$, $y_{max} = 2$; 2) $x_{max} = -2{,}5$, $y_{max} = -4$; 3) $x_{max} = 1$, $y_{max} = 1$; $x_{min} = -1$, $y_{min} = -1$; 4) $x_{max} = 0$, $y_{max} = -1$; 5) $x_{max} = 0$, $y_{max} = 1$; $x_{min} = \frac{13}{7}$, $y_{min} = -\frac{120}{49}$; $x_{min} = 3{,}5$, $y_{min} = 0{,}25$. **18.** 1) $y_{наиб} = y\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $y_{наим} = y\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $y_{наиб} = y\left(-1+\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $y_{наим} = y\left(-1-\sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; 3) $y_{наиб} = y(0{,}5) = 1{,}5$, $y_{наим} = y(-1) = y(2) = 0$; 4) $y_{наим} = y\left(\sqrt{1{,}5}\right) = y\left(-\sqrt{1{,}5}\right) = \sqrt{2{,}5}$, наибольшего значения нет. **19.** 1) $y_{наим} = -4$; $y_{наиб} = 2{,}25$; 2) $y_{наим} = 3$; $y_{наиб} = \frac{8}{3}$; 3) $y_{наим} = 0$; $y_{наиб} = 0{,}9$. **20.** $f_{наим} = -6$, $f_{наиб} = 2$. **21.** Сумма и произведение будут периодической функцией, если периоды всех функций соизмеримы.

25. Не обязательно. Например, $y=\{x^2\}$. **27.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) 6π; 3) 4π; 4) 2π; 5) 24π. **28.** 1) $f(2)=0$, $f(1{,}5)=-\frac{1}{4}$, $f\left(-\frac{79}{6}\right)=-\frac{5}{36}$; 2) $f(2)=0$, $f(1{,}5)=-\frac{1}{8}$, $f\left(-\frac{79}{6}\right)=-\frac{25}{256}$. **29.** $(x-4)^2-3(x-4)$. **30.** $(x-12)^3+3(x-12)^2$. **31.** Указание. Выразить $f(x+4)$ через $f(x)$. **32.** Указание. Четность $f(x)$ очевидна. Далее доказать равенство $f(x+2)=f(x)$ для $x\leqslant 0$, затем для $x>0$. **33.** Указание. Доказать, что функция $\varphi(x)=f(x)-ax$ — периодическая с периодом T. **35.** -2. **36.** $x_1=4n-1{,}5$, $x_2=4n-0{,}5$, $n\in\mathbb{Z}$. **37.** 0,5. Указание. Доказать, что $f(x)$ — периодическая функция. **38.** 0,8. **39.** 45. Указание. Выразить $f(x+6)$ через $f(x)$. **40.** -2. Указание. Убедиться в том, что $f(k)+f(k+1)+\ldots+f(k+5)=0$ при всех k. **41.** 18.

§4. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Определение

Пусть задана числовая функция $y=f(x)$, $x\in D(f)$. Тогда каждому $x_0\in D(f)$ соответствует единственное число $y_0=f(x_0)\in E(f)$. Нередко приходится по заданному значению функции y_0 находить соответствующее значение аргумента, т. е. решать относительно x уравнение

$$f(x)=y_0,\quad y_0\in E(f). \tag{1}$$

Это уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений. Решениями уравнения (1) являются абсциссы всех точек, в которых прямая $y=y_0$ пересекает график функции $y=f(x)$.

Например, если $f(x)=x^2$, то уравнение

$$x^2=y_0,\quad y_0>0,$$

имеет два решения: $x_1=\sqrt{y_0}$ и $x_2=-\sqrt{y_0}$. Если же $f(x)=\{x\}$, то уравнение

$$\{x\}=y_0,\quad 0\leqslant y_0<1,$$

имеет бесконечно много решений вида $x_k=k+y_0, k\in\mathbb{Z}$.

Однако существуют функции, для которых уравнение (1) при каждом $y_0\in E(f)$ разрешимо однозначно, т. е. имеет единственное решение $x_0\in D(f)$. Этим свойством обладают, например, следующие функции:

а) $f(x)=5x+2,\quad D(f)=\mathbb{R}$;

б) $f(x)=x^3+2,\quad D(f)=\mathbb{R}$;

в) $f(x)=\frac{1}{x},\quad D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Если функция f такова, что каждое свое значение $y_0\in E(f)$ она принимает только при одном значении $x_0\in D(f)$, то такую функцию называют *обратимой*. В этом случае уравнение

$$f(x)=y$$

можно при любом $y\in E(f)$ однозначно разрешить относительно x, т. е. каждому $y\in E(f)$ поставить в соответствие единственное значение

$x \in D(f)$. Это соответствие определяет функцию, которую называют *обратной к функции* f и обозначают символом f^{-1}.

Заметим, что прямая $y = y_0$ для каждого значения $y_0 \in E(f)$ пересекает график обратимой функции $y = f(x)$ в единственной точке (x_0, y_0), где $f(x_0) = y_0$.

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции буквой x, а ее значение — буквой y, обратную к f функцию записывают в виде

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

Для упрощения записи вместо символа f^{-1} будем употреблять букву g.

Отметим следующие свойства, которые показывают, как связаны данная функция и обратная к ней:

1) если g — функция, обратная к f, то и f — функция, обратная к g; при этом

$$D(g) = E(f), \quad E(g) = D(f),$$

т. е. область определения функции g совпадает с множеством значений функции f и наоборот;

2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство

$$g(f(x)) = x,$$

а для любого $x \in E(f)$ справедливо равенство

$$f(g(x)) = x;$$

3) график функции $y = g(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

○ Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. $b = f(a)$. Из существования обратной функции следует, что $a = f^{-1}(b)$. Значит, точка $M_1(b; a)$ принадлежит графику обратной функции $y = f^{-1}(x)$. Верно и обратное утверждение.

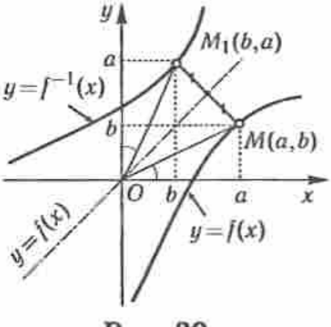


Рис. 30

Покажем, что точки $M(a; b)$ и $M_1(b; a)$ симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Пусть $a \neq b$, т. е. точки M и M_1 не совпадают. Тогда очевидно, что $OM_1 = OM$, и прямая $y = x$ делит пополам угол в равнобедренном $\Delta\, OMM_1$. Значит, она перпендикулярна отрезку MM_1 и делит его пополам. Следовательно, точки $M(a; b)$ и $M_1(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$. ●

4) если нечетная функция обратима, то обратная к ней функция также является нечетной.

2. Достаточное условие существования обратной функции

Если функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X, то для нее существует обратная функция, и она возрастает (убывает) на множестве значений данной функции.

○ Пусть функция $y=f(x)$, например, возрастает на множестве X. То есть при $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует $y_1 < y_2$, где $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Так как обратный переход однозначен, то отсюда следует, что $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ и если $y_1 < y_2$, то $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Аналогично рассматривается случай убывающей функции. ●

Способ нахождения обратной функции состоит в следующем.

Чтобы найти функцию, обратную монотонной функции $y=f(x)$, нужно поменять местами буквы x и y, т. е. написать $x=f(y)$, и из полученного равенства, как из уравнения, найти y. Это и даст обратную функцию $y=f^{-1}(x)$.

Пример 1. Функция $f(x)=x^2$ отображает всю числовую ось $(-\infty;+\infty)$ на полуось $[0;+\infty)$. Однако это отображение не является взаимно однозначным, так как, например, $f(2)=f(-2)$. Поэтому функция $y=x^2$ не имеет обратной функции.

Пример 2. Функция $f(x)=x^2$, $x \geqslant 0$ (т. е. функция предыдущего примера, у которой область определения сокращена до полуоси $[0;+\infty)$), осуществляет взаимно однозначное отображение множества $[0;+\infty)$ на себя. Следовательно, существует обратная функция $g\colon [0;+\infty) \to [0;+\infty)$. Это функция $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

Замечание. Данные примеры показывают, что некоторые функции обратной функции не имеют, если их рассматривать на всей области определения, и имеют обратную функцию, если область определения сузить (например, для функции x^2 взять $[0;+\infty)$). Часто в качестве сужения области определения берут *интервал монотонности* функции $f(x)$.

Пример 3. Сузить $D(f)$ так, чтобы функция $f(x)=x^2-3x$ имела обратную. Написать формулу обратной функции.

△ Функция $f(x)=x^2-3x$ убывает на промежутке $(-\infty;1{,}5]$ и возрастает на $[1{,}5;+\infty)$, поэтому сужение может быть осуществлено двумя способами.

1) Рассмотрим функцию $f_1(x)=x^2-3x$, $x \leqslant 1{,}5$. Решив уравнение $x^2-3x=y$, или $x^2-3x-y=0$, найдем его корни $x_{1,2} = \frac{(3 \pm \sqrt{9+4y})}{2}$. Так как $x \leqslant 1{,}5$, то $x=\frac{(3-\sqrt{9+4y})}{2}$. Таким образом, $f_1^{-1}(y)=\frac{(3-\sqrt{9+4y})}{2}$, следовательно, $f_1^{-1}(x)=\frac{(3-\sqrt{9+4x})}{2}$.

2) Теперь рассмотрим функцию $f_2(x)=x^2-3x$, $x\geqslant 1{,}5$. Рассуждая аналогично, получим $f_2^{-1}(x)=\dfrac{(3+\sqrt{9+4x})}{2}$. ▲

Пример 4. Найти обратную функцию $f^{-1}(x)$ для $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+2}$.

△ Решим относительно x уравнение $y=\dfrac{x-1}{3x+2}$. Имеем:

$$x-1=3xy+2y;\quad x-3xy=2y+1;\quad x(1-3y)=2y+1.$$

Если $1-3y=0$, т. е. $y=\dfrac{1}{3}$, то последнее соотношение превращается в неверное равенство $0=\dfrac{5}{3}$. Поэтому можно записать $x=\dfrac{2y+1}{1-3y}$, следовательно, $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{1-3x}$. ▲

Задачи

1. Определить, для каких из следующих функций существует обратная функция. Написать формулу обратной функции:

1) $f(x)=3x-5$; 2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$; 3) $f(x)=x^3+3x^2+3x$;

4) $f(x)=x^2+x, x\geqslant 0$; 5) $f(x)=x^2+x, x<0$.

2. При каких соотношениях между числами a, b, c, d функция $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ обратна самой себе?

3. На какое множество отображает функция f множество A, если:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$, $A=(3;5]$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{4-x}$, $A=[-4;5)$;

3) $f(x)=x^2-x-2$, $A=[0;3]$?

4. Доказать, что если функции f и g имеют обратные, то $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$ (здесь символ $\circ$ обозначает композицию функций).

5. Пусть $f(x)$ — функция, для которой существует обратная функция $f^{-1}(x)$. Что можно сказать о функции $f^{-1}(x)$, если:
1) функция $f(x)$ нечетная; 2) $f(x)$ — возрастающая;
3) $f(x)$ — убывающая?

6*. Какие из следующих функций имеют обратные функции:

1) $f(x)=x+x^3$; 2) $f(x)=x-x^3$; 3) $f(x)=x|x|$?

7. Для следующих функций $f(x)$ написать формулу обратной функции $f^{-1}(x)$ и указать ее область определения:

1) $f(x)=\sqrt[3]{2x+7}$; 2) $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+5}$; 3) $f(x)=\sqrt{3-2x}+1$.

8. Пусть $g(x)$ — функция, обратная к функции $f(x)=x+x^5$. Вычислить $g(34)$.

9. Пусть $g(x)$ — функция, обратная к функции $f(x)$. Выразить через $g(x)$ функцию, обратную к функции $f(ax+b)$ $(a\neq 0)$.

10*. Написать формулу обратной функции $f^{-1}(x)$ для функции $f(x)=2x-|x+1|$.

Ответы

1. 1) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$; 2) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$; 3) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$; 4) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}$; 5) функция не имеет обратной функции. **2.** Либо $a=-d$, либо $b=c=0$, $a=d$. **3.** 1) $(2{,}5;+\infty)$; 2) $(-1;2]$; 3) $[-2{,}25;4]$. **5.** 1) $f^{-1}(x)$ нечетная; 2) $f^{-1}(x)$ — возрастающая; 3) $f^{-1}(x)$ — убывающая. **6.** Функции примеров 1 и 3 имеют обратные, так как являются возрастающими; 2) функция $f(x)=x-x^3$ обратной не имеет, так как не является взаимно однозначной ($f(0)=f(1)$). **7.** 1) $f^{-1}(x)=\frac{(x-7)^3}{2}$, $-\infty<x<+\infty$; 2) $f^{-1}(x)=\frac{5x+2}{1-3x}$, $x\neq\frac{1}{3}$; 3) $f^{-1}(x)=\frac{3-(x-1)^2}{2}$, $x\geqslant 1$. **8.** 2. **9.** $\frac{g(x)-b}{a}$. **10.** $f^{-1}(x)=\frac{2x+1+|x+2|}{3}$. Указание. Сначала получить формулы для $f^{-1}(x)$ при $x\geqslant-2$ и $x\leqslant-2$, а затем подобрать α, β, γ так, чтобы $f^{-1}(x)=\alpha x+\beta+\gamma|x+2|$.

§5. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

В настоящем параграфе рассматриваются функции, графики которых могут быть построены методом элементарных преобразований (перечень их приведен ниже). Допускается построение по нескольким точкам графиков основных элементарных функций, изучаемых в школе, вид которых известен: линейной (достаточно двух точек); квадратичной (достаточно указать вершину и еще две точки); дробно-линейной функций $y=\frac{a}{x}$; а также функций, с которыми вы познакомитесь позже: степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических.

Приступая к построению графика функции $y=f(x)$, необходимо выяснить, можно ли ее график построить либо на всей области определения, либо на некоторых ее участках путем элементарных преобразований графика какой-либо элементарной функции, график которой построен.

1. Элементарные (геометрические) преобразования графиков

Пусть график функции $y=f(x)$ уже построен. Перечислим преобразования графика, которые называются *элементарными*.

1) График функции $y=f(x+a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Ox на a единиц влево, если $a>0$, и на $(-a)$ вправо, если $a<0$ (рис. 31).

2) График функции $y=f(x)+a$ получается из графика функции $y=f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на a единиц вверх при $a>0$ и на $(-a)$ вниз при $a<0$ (рис. 32).

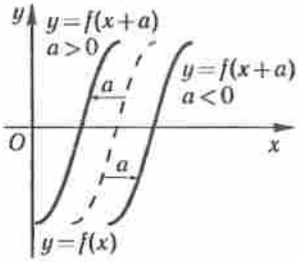


Рис. 31

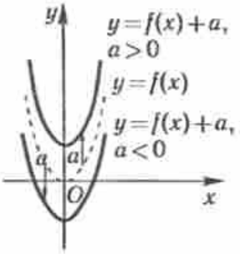


Рис. 32

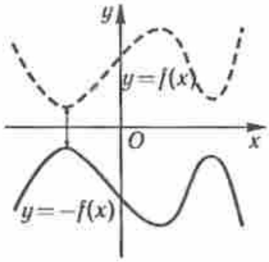


Рис. 33

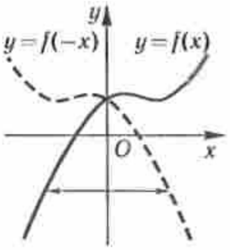


Рис. 34

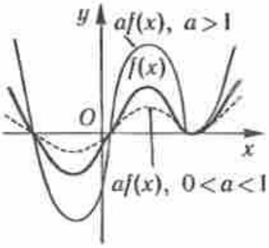


Рис. 35

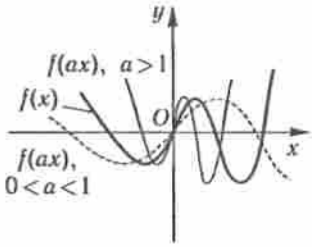


Рис. 36

3) График функции $y=-f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ зеркальным отражением относительно оси Ox (рис. 33).

4) График функции $y=f(-x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ зеркальным отражением относительно оси Oy (рис. 34).

5) График функции $y=af(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ увеличением (при $a>1$) или уменьшением (при $0<a<1$) масштаба по оси ординат относительно того, что был у графика $y=f(x)$. При $a>1$ график растягивается, а при $0<a<1$ сжимается к оси абсцисс (рис. 35). При $a<0$ график функции $y=af(x)$ получается зеркальным отражением относительно оси Ox графика функции $y=|a|\cdot f(x)$.

6) График функции $y=f(ax)$ получается из графика функции $y=f(x)$ уменьшением (при $a>1$) или увеличением (при $0<a<1$) масштаба по оси абсцисс относительно того, что был у графика $y=f(x)$. При $a>1$ график функции $y=f(ax)$ получается сжатием в a раз к оси ординат (вдоль оси абсцисс), а при $0<a<1$ растяжением графика $y=f(x)$ в $\frac{1}{a}$ от оси ординат (вдоль оси абсцисс); см. рис. 36. При $a<0$ график функции $y=f(ax)$ получается зеркальным отражением относительно оси Oy графика функции $y=f(|a|x)$.

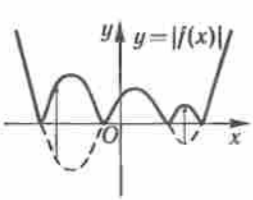


Рис. 37

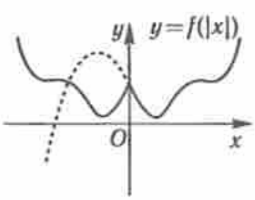


Рис. 38

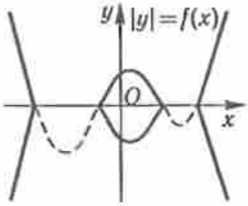


Рис. 39

7) График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ с использованием определения модуля функции

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{при } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ часть графика функции $y = f(x)$, расположенную выше оси Ox, нужно оставить без изменения, а часть, лежащую ниже оси Ox, нужно зеркально отразить относительно этой оси (рис. 37).

8) При построении графика функции $y = f(|x|)$ нужно часть графика функции $y = f(x)$, расположенную справа относительно оси Oy, т. е. при $x \geqslant 0$, оставить без изменения, а часть графика функции $y = f(x)$, расположенную слева относительно оси Oy, т. е. при $x \leqslant 0$, заменить зеркальным отражением относительно оси Oy части графика функции $y = f(x)$ для $x \geqslant 0$ (рис. 38).

Рассмотренные геометрические преобразования графиков функций могут комбинироваться между собой. Так, построение графика функции $y = Af(ax + b) + B$ по графику функции $y = f(x)$ может быть проведено по одной из двух схем.

При первой схеме:

$$f(x) \mapsto Af(x) \mapsto Af(ax) \mapsto Af\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right) \mapsto$$
$$\mapsto Af\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right) + B \equiv Af(ax + b) + B.$$

При второй схеме:

$$f(x) \mapsto f(ax) \mapsto Af(ax) \mapsto Af(ax) + B \mapsto Af\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right) + B \equiv Af(ax + b) + B.$$

Замечание. Иногда требуется построение графика соответствия $|y| = f(x)$. Для этого часть графика функции $y = f(x)$, расположенную выше оси Ox, нужно оставить без изменений и также зеркально отразить ее относительно оси Ox, а часть графика функции $y = f(x)$, расположенную ниже оси Ox, удалить (рис. 39).

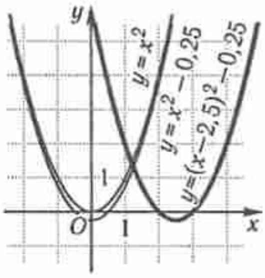


Рис. 40

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Построить график функции $y = x^2 - 5x + 6$.

$\triangle$ Квадратный трехчлен $x^2 - 5x + 6$ после выделения полного квадрата можно записать в виде $(x-2{,}5)^2 - 0{,}25$. Тогда построение графика функции можно осуществить по следующей схеме (рис. 40):

$$x^2 \mapsto x^2 - 0{,}25 \mapsto (x-2{,}5)^2 - 0{,}25 \equiv x^2 - 5x + 6. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Записать цепочку преобразований для построения графика функции $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

$\triangle$ Выполним преобразования: $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$. Следовательно, график функции $y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$ можно получить из графика функции $y = \frac{1}{x}$ путем геометрических преобразований по следующей схеме: $\frac{1}{x} \mapsto \frac{3}{x} \mapsto -\frac{3}{x} \mapsto -\frac{3}{x+1} \mapsto -3\frac{1}{x+1} + 2 \equiv \frac{2x-1}{x+1}$. $\blacktriangle$

Пример 3. Построить график функции $y = \left|-x^2 + 2|x| + 3\right|$.

$\triangle$ Запишем функцию в виде $y = \left|-|x|^2 + 2|x| + 3\right|$. Построение ее графика проведем по схеме

$$-x^2 + 2x + 3 \mapsto -|x|^2 + 2|x| + 3 \mapsto \left|-|x|^2 + 2|x| + 3\right|$$

(см. рис. 41). $\blacktriangle$

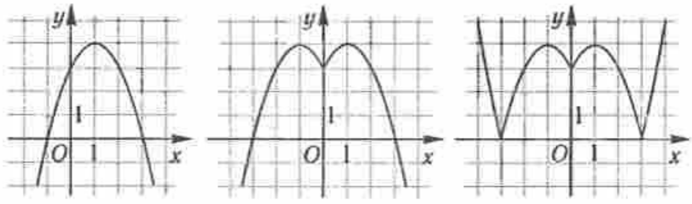


Рис. 41

Пример 4. Построить график функции $y = |x+1| - |x| + 3$.

$\triangle$ Разобьем область определения функции y на три промежутка: $(-\infty; -1]$, $(-1; 0]$ и $(0; +\infty)$ (рис. 42). При $x \in (-\infty; -1]$ имеем $|x| = -x$, $|x+1| = -(x+1)$, откуда $y = -(x+1) - (-x) + 3 = 2$. При $x \in (-1; 0]$ получаем $|x+1| = x+1$, $|x| = -x$, откуда $y = (x+1) - (-x) + 3 = 2x + 4$. При $x \in (0; +\infty)$ будем иметь $|x+1| = x+1$, $|x| = x$, а значит,

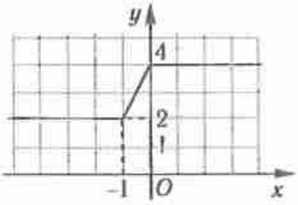


Рис. 42

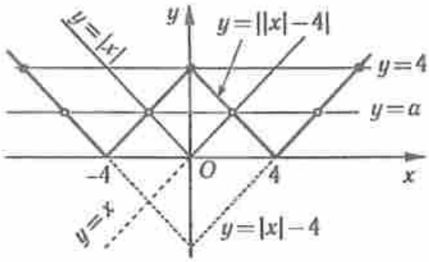


Рис. 43

$y=(x+1)-x+3=4$. Следовательно, построение графика функции $y=|x+1|-|x|+3$ сводится к построению графика функции

$$y=\begin{cases} 2, & x\in(-\infty;-1], \\ 2x+4, & x\in(-1;0], \\ 4, & x\in(0;+\infty). \end{cases} \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Построить график функции $f(x)=\big||x|-4\big|$ и с его помощью определить множество значений, принимаемых функцией в двух, трех и более точках; а также определить максимальное число корней уравнения $f(x)=a$.

$\triangle$ С помощью элементарных преобразований

$$x\mapsto|x|\mapsto|x|-4\mapsto\big||x|-4\big|$$

строим график данной функции (рис. 43).

Проводя прямые $y=a$, убеждаемся, что при $a<0$ точек пересечения с графиком функции $f(x)=\big||x|-4\big|$ нет; при $a=0$ — две точки; при $0<a<4$ — четыре; при $a=4$ — три; при $a>4$ — две.

Ответ. $E_f=[0;+\infty)$; значение 0 принимается в двух точках; каждое значение из интервала (0;4) принимается в четырех точках; значение 4 — в трех точках; все остальные — при двух различных значениях x. Максимальное число корней уравнения $\big||x|-4\big|=a$ равно четырем. $\blacktriangle$

2. Центральный поворот и гомотетия

Рассмотрим также два частных случая преобразования графиков функций.

Поворот графика относительно точки. Рассмотрим семейство прямых вида $y-y_0=k(x-x_0)$. Все они получены друг из друга поворотом на некоторый угол относительно точки $(x_0;y_0)$ (*центр поворота*).

Например, прямые семейства $y-2=k(x+1)$ переходят друг в друга преобразованием поворота с центром в точке $A(-1;2)$.

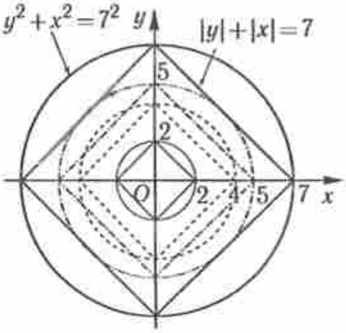


Рис. 44

Гомотетия. С помощью этого преобразования строится семейство кривых, получаемых из некоторой данной кривой гомотетией с центром в начале координат.

Например, уравнения вида $|x|+|y|=a$ или $x^2+y^2=a^2$ задают такие семейства кривых.

Пример 6. Изобразить кривые, задаваемые уравнениями $|x|+|y|=a$ и $x^2+y^2=a^2$ при значениях параметра $a=2;\ 4;\ 5;\ 7$.

$\triangle$ Построим кривую, заданную уравнением $|x|+|y|=a$. Ясно, что значение a должно быть положительно, иначе равенство не имеет смысла. Рассмотрим уравнение в каждой из четвертей (рис. 44):

$$|x|+|y|=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+y=a, & \text{если } x\geqslant 0 \text{ и } y\geqslant 0,\\ -x+y=a, & \text{если } x<0 \text{ и } y\geqslant 0,\\ -x-y=a, & \text{если } x<0 \text{ и } y<0,\\ x-y=a, & \text{если } x\geqslant 0 \text{ и } y<0. \end{array}\right.$$

Кривой, отвечающей второму уравнению $x^2+y^2=a^2$, является окружность радиуса a с центром в начале координат.

Уравнения $|x|+|y|=a$ и $x^2+y^2=a^2$ задают два семейства кривых, в каждом из которых кривые семейства являются *гомотетичными* (центр гомотетии — точка $O(0;0)$) квадратами в первом случае и окружностями — во втором. Из построенных рисунков видно, что при увеличении a квадраты и окружности увеличиваются. $\blacktriangle$

Задачи

1. Построить графики функций:

1) $y=x^2-4$; 2) $y=2x^2+6x+2{,}5$; 3) $y=-2x^2+6x+2{,}5$.

2. Построить графики функций:

1) $y=x^2+5x+6$; 2) $y=x^2+5|x|+6$;

3) $y=\left|x^2+5x+6\right|$; 4) $y=\left|x^2+5|x|+6\right|$.

3. Построить график функции $f(x)=|x^2-5|x|+4|$ и с его помощью определить множество значений, принимаемых функцией в двух, трех и более точках; а также определить максимальное число корней уравнения $f(x)=a$.

Построить графики функций (**4**–**15**):

4. 1) $f(x)=|x^2-2x-8|-2x+8$; 2) $f(x)=|3+2x-x^2|-3+2x$.

5. 1) $y=\begin{cases} 2x+1, & \text{если } x<-1,\\ x+2, & \text{если } 1\leqslant x<3,\\ -3x+4, & \text{если } x\geqslant 3; \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} -2x+1, & \text{если } x<-2,\\ x+7, & \text{если } -2\leqslant x<3,\\ 3x-4, & \text{если } x\geqslant 3. \end{cases}$

6. $y=\dfrac{1}{4x+3}$. **7.** $y=\dfrac{1}{|x-2|}$. **8.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **9.** $y=\dfrac{5-4x}{2x-1}$.

10. 1) $y=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1}, & \text{если } x\leqslant 1,\\ -2x+2, & \text{если } x>1;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x^2-6x, & \text{если } x\leqslant 6,\\ \dfrac{x-5}{x-6}, & \text{если } x>6;\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}x^2-5x, & \text{если } x\leqslant 5,\\ \dfrac{6x}{3x-15}, & \text{если } x>5.\end{cases}$

11. $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{x+4}$. **12.** $y=1-\sqrt{-3x}$. **13.** $y=\sqrt{8-2x}$.

14. $y=\left|2-\sqrt{2x+9}\right|$. **15.** $y=2-\sqrt{|2x+9|}$.

16. Определить графически количество корней уравнения $\sqrt{1-|x|}=a$ в зависимости от значений параметра a.

Построить графики функций, предварительно преобразовав выражения **(17–23)**:

17. $y=\sqrt{x^2}$. **18.** $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$. **19.** $y=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4x+3}$.

20. $y=\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+6x+9}$. **21.** $y=\dfrac{|2x-3|}{x-1}$. **22.** $y=\dfrac{6x}{|x+3|-|x-3|}$.

23. 1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{|x+2|-|1-2x|}$; 2) $f(x)=\dfrac{3x^2+14x+8}{|2x+3|-|x-1|}$.

24. На рис. 45 изображен график функции $y=f(x)$. Построить графики функций:

1) $y=f(2x)$; 2) $y=f(-x)$;
3) $y=f(0{,}5x)$; 4) $y=f(x+3)$;
5) $y=f(|x|)$; 6) $y=f(|x+1|)$;
7) $y=f(2x+3)$; 8) $y=|f(x)|$.

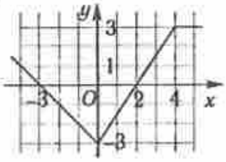


Рис. 45

25. На рис. 46 изображен график функции $y=f(x)$, заданной на $[-5;5]$. Построить графики функций:

1) $y=f(2x)$; 2) $y=f(-x)$;
3) $y=f(0{,}5x)$; 4) $y=f(x-2)$;
5) $y=f(|x|)$; 6) $y=|f(x)-2|$;
7) $y=f(|x+2|)$.

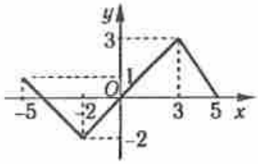


Рис. 46

26. Путем элементарных преобразований графика функции $y=f(x)$ постройте график функции:

1) $y=-2f(1-0{,}5x)+3$, если $f(x)=\begin{cases}-2x-4, & \text{при } x\leqslant -1,\\ x-1, & \text{при } -1<x\leqslant 3,\\ 2, & \text{при } x>3;\end{cases}$

2) $y=3f(1-2x)-4$, если $f(x)=\begin{cases}-2x-5, & \text{при } x\leqslant -2,\\ -1, & \text{при } -2<x<3,\\ 0{,}5x-2{,}5, & \text{при } x\geqslant 3.\end{cases}$

На координатной плоскости построить множество точек, координаты (x,y) которых удовлетворяют следующим условиям **(27–36)**:

27. $y^2-4x^2=0$. **28.** $2x^2+5xy-2y^2=0$. **29.** $2x-5y\leqslant 10$.

30. $y\leqslant -x^2+4x-4$. **31.** $|y|+y=|x|+x$.

32. 1) $\dfrac{(y-1)^4}{(x+4)^8}=1$; 2) $\dfrac{(y-x)^4}{(x^2-2)^4}=1$.

33. 1) $x^2 - 2y^2 = y^4 + 2y^2 + 4$; 2) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$.
34. 1) $(|x| - 2)(y + 1) \geqslant 0$; 2) $|y| < 2|x + 1| - 3$.
35. $x^2 + y^2 \leqslant 4(x - y - 1)$. **36.** $xy \leqslant 1$, $y \leqslant x + 2$, $y \geqslant x - 2$.
37. Построить графики функций:
1) $y = |||x| - 2| - 1|$; 2) $y = |||x| - 1| - 2|$.
38. Построить графики функций:
1) $y = (2x + 1) \cdot \dfrac{|(x+1)\cdot(x+2)|}{x+1}$; 2) $y = (x - 1) \cdot \dfrac{|(x+2)\cdot(2x+3)|}{x+2}$.

Изобразить множество точек, заданных уравнением (**39–41**):
39. $|y + x| = x + 3$. **40.** $|x - y| + |x + y| = 2$. **41.** $||x| - |y|| = a$.
42. Для каждого значения параметра a решить уравнение:
1) $|x + 3| - a|x - 1| = 4$; 2) $a|x + 3| + 2|x + 4| = 2$.
43. Определить в зависимости от значений параметра количество решений системы уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Построить графики следующих функций (**44–47**):
44. 1) $y = \min(x, x^2)$; 2) $y = \max\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$.
45. 1) $y = \operatorname{sign}\left(\dfrac{x^2 - 25}{9 - x^2}\right)$; 2) $y = \operatorname{sign}\left(\dfrac{x^2 - 5x - 6}{6 + 5x - x^2}\right)$.
46. 1) $y = [3 - 0{,}5x]$; 2) $y = \left[x^{-1}\right]$; 3) $y = \{3 - 0{,}5x\}$; 4) $y = \left\{x^{-1}\right\}$.
47. 1) $y = [0{,}25x + 2]$; 2) $y = \left[(x+1)^2\right]$; 3) $y = \{0{,}25x + 2\}$; 4) $y = \left\{(x+1)^2\right\}$
48. При каких значениях параметра a:
1) площадь треугольника, получающегося при пересечении прямой $y = a(x + 2)$ и графика функции $y = 2|x - 1|$, равна 1,2;
2) один из треугольников, образованных при пересечении прямой $y = ax + 2$ и графика функции $y = |x + 2| - |x - 2|$, имеет площадь, равную 51,2?
49*. График какой функции получится, если график функции $f(x)$ отразить симметрично:
1) относительно прямой $x = a$; 2) относительно прямой $y = b$?
50*. Написать уравнение кривой, которая получится, если график функции:
1) $y = \sqrt{2x - 3}$ отразить симметрично относительно прямой $x = -1$;
2) $y = x^2 + 2x$ отразить симметрично относительно прямой $y = 3$.
51*. Пусть $f(x)$ — функция, имеющая обратную функцию $y = f^{-1}(x)$. Определить, график какой функции получится, если график функции $y = f(x)$:
1) отразить симметрично относительно прямой $y = x$;
2) отразить симметрично относительно прямой $y = -x$;
3) отразить симметрично относительно прямой $y = x + 2$;
4) повернуть на 90° вокруг начала координат (против часовой стрелки);
5) повернуть на 90° вокруг точки $(a; b)$.
52. Написать уравнение кривой, которая получится, если график функции:
1) $y = \dfrac{x+1}{3x-2}$ отразить симметрично относительно прямой $y = -x$;
2) $y = \sqrt[3]{2x + 5}$ повернуть на 90° вокруг начала координат;
3) $y = x^3$ повернуть на 90° вокруг точки $(2; -3)$.

Ответы

2. 1) См. рис. 47; 2) см. рис. 48; 3) см. рис. 49; 4) см. рис. 50. **3.** $E_f=[0;+\infty)$; значение 0 принимается в четырех точках; каждое значение из интервала $(0;2{,}25)$ — в восьми; значение 2,25 — в шести; каждое значение из интервала $(2{,}25;4)$ — в четырех; значение 4 — в трех; все остальные — при двух различных значениях x. Максимальное число корней уравнения $\left|x^2-5|x|+4\right|=a$ равно восьми. **4.** 1) $f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & \text{если } x\in(-\infty;-2)\cup(4;+\infty),\\ -x^2+16, & \text{если } -2\leqslant x\leqslant 4;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x^2-6, & \text{если } x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty),\\ -x^2+4x, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$ **6.** См. рис. 51.

7. См. рис. 52. **8.** См. рис. 53. **9.** См. рис. 54. **10.** 1) См. рис. 55. **11.** См. рис. 56. **12.** См. рис. 57. **13.** См. рис. 58. **14.** См. рис. 59. **15.** См. рис. 60. **16.** При $a=1$ один корень; при $a\in[0;1)$ — два корня. При всех остальных значениях параметра a решений нет. **17.** $y=|x|$.

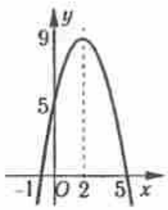


Рис. 47

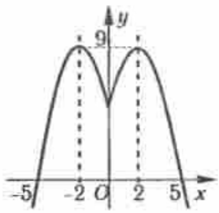


Рис. 48

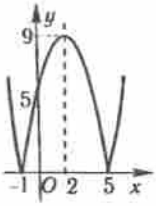


Рис. 49

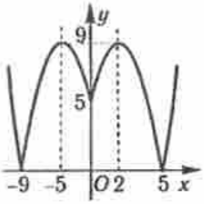


Рис. 50

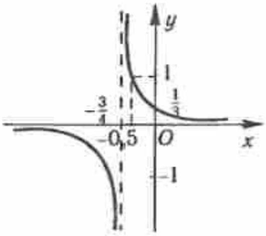


Рис. 51

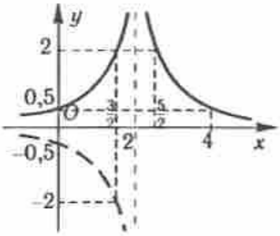


Рис. 52

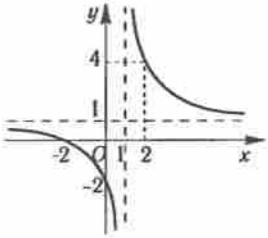


Рис. 53

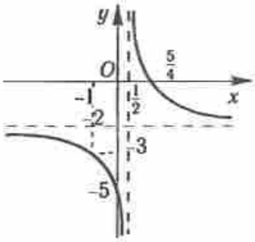


Рис. 54

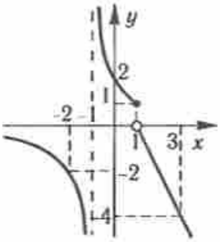


Рис. 55

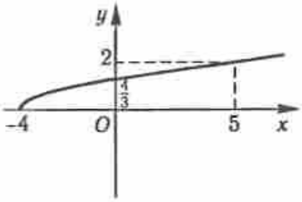


Рис. 56

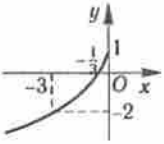


Рис. 57

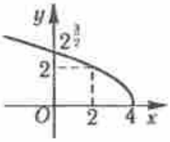


Рис. 58

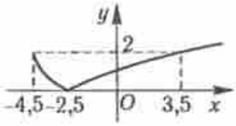


Рис. 59

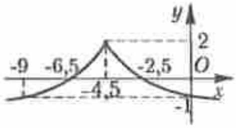


Рис. 60

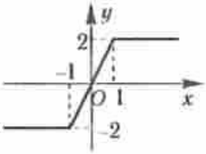


Рис. 61

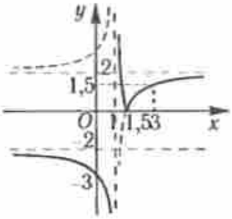


Рис. 62

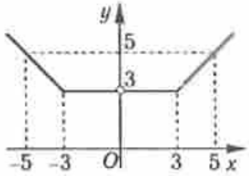


Рис. 63

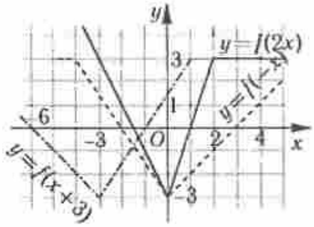


Рис. 64

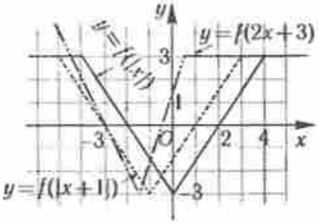


Рис. 65

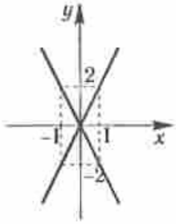


Рис. 66

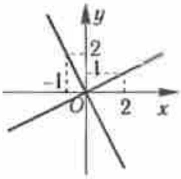


Рис. 67

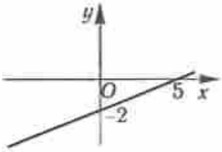


Рис. 68

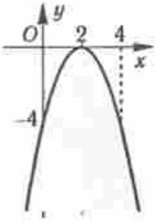


Рис. 69

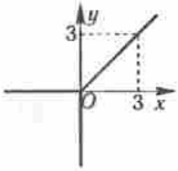


Рис. 70

18. $y=x^2+x+1$, $D(y)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **19.** $y=\frac{x+2}{x-1}$, $D(y)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **20.** См. рис. 61.

21. См. рис. 62. **22.** См. рис. 63. **23.** 1) $f(x)=\begin{cases} -3x-1, & x\in(-\infty;-2], \\ -x+3, & x\in(-2;0{,}5], \\ 3x+1, & x\in(0{,}5;3)\cup(3;+\infty); \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} -3x-2, & x\in(-\infty;-1{,}5], \\ x+4, & x\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};1\right], \\ 3x+2, & x\in(1;+\infty). \end{cases}$ **24.** См. рис. 64, 65.

26. 1) $y=\begin{cases} -1, & x\in(-\infty;-4), \\ x+3, & x\in[-4;4), \\ -2x+15, & x\in[4;+\infty); \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} 12x-25, & x\in[1{,}5;+\infty), \\ -7, & x\in[-1;1{,}5), \\ -3x-10, & x\in(-\infty;-1). \end{cases}$

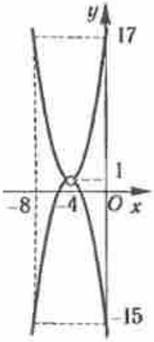


Рис. 71

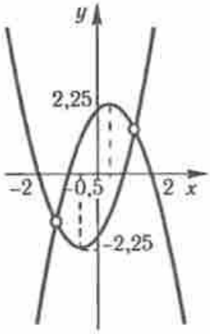


Рис. 72

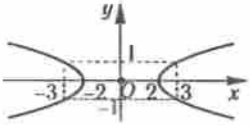


Рис. 73

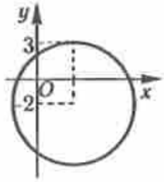


Рис. 74

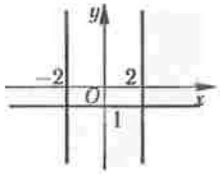


Рис. 75

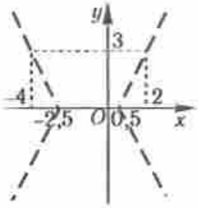


Рис. 76

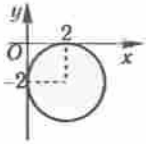


Рис. 77

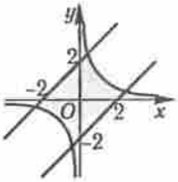


Рис. 78

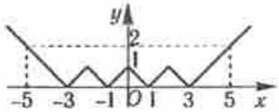


Рис. 79

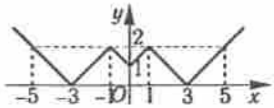


Рис. 80

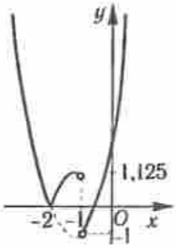


Рис. 81

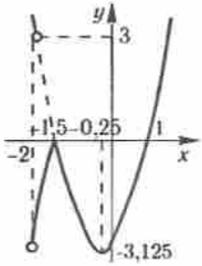


Рис. 82

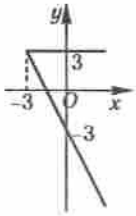


Рис. 83

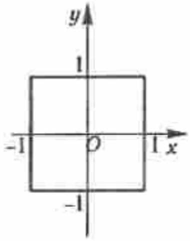


Рис. 84

27. См. рис. 66. **28.** См. рис. 67. **29.** См. рис. 68. **30.** См. рис. 69. **31.** См. рис. 70. **32.** 1) См. рис. 71; 2) см. рис. 72. **33.** 1) См. рис. 73; 2) см. рис. 74. **34.** 1) См. рис. 75; 2) см. рис. 76. **35.** См. рис. 77. **36.** См. рис. 78. **37.** 1) см. рис. 79; 2) См. рис. 80. **38.** 1) См. рис. 81; 2) см. рис. 82. **39.** См. рис. 83. **40.** См. рис. 84. **41.** См. рис. 85.

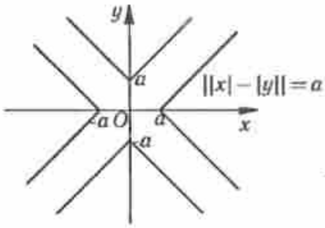


Рис. 85

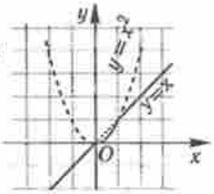


Рис. 86

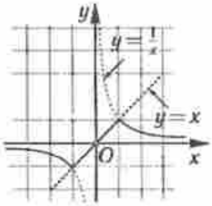


Рис. 87

42. 1) Если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $x=1$; если $a \in (-1; 1)$; то $x=1$ или $x=\frac{7+a}{a-1}$; если $a=-1$, то $-3 \leqslant x \leqslant 1$; если $a=1$, то $x \geqslant 1$; 2) если $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, то $x=-3$; если $a \in (-2; 2)$, то $x=-3$ или $x=-\frac{3a+10}{a+2}$; если $a=-2$, то $x \geqslant -3$; если $a=2$, то $-4 \leqslant x \leqslant -3$. **43.** Если $a<2$ или $a>2\sqrt{2}$, то решений нет; если $2<a<2\sqrt{2}$, то восемь решений; если $a=2$ или $a=2\sqrt{2}$, то четыре решения. **44.** 1) См. рис. 87; 2) см. рис. 86. **48.** 1) $a=0{,}5$; 2) $a=\frac{1}{3}$, $a=1-\frac{8}{\sqrt{69}}$. **49.** 1) $y=f(2a-x)$. У к а з а н и е. Формулы симметрии относительно прямой $x=a$ выглядят так: $(x; y) \to (2a-x; y)$; 2) $y=2b-f(x)$. У к а з а н и е. Формулы симметрии относительно прямой $y=b$: $(x; y) \to (x; 2b-y)$. **50.** 1) $y=\sqrt{-7-2x}$; 2) $y=6-2x-x^2$. **51.** 1) $y=f^{-1}(x)$; 2) $y=-f^{-1}(-x)$. У к а з а н и е. Отразить сначала относительно прямой $y=x$, а затем относительно начала координат; 3) $y=f^{-1}(x+2)+2$. У к а з а н и е. Сделать сначала отражение относительно прямой $y=x$, а затем сдвиг на вектор $\overrightarrow{(-2; 2)}$; 4) $y=f^{-1}(-x)$. У к а з а н и е. Воспользоваться формулами поворота: $x'=-y$, $y'=x$; 5) $y=f^{-1}(-x+a-b)-a+b$. **52.** 1) $y=\frac{-2x+1}{3x+1}$; 2) $y=-\frac{1}{2}(x+5)^3$; 3) $y=-\sqrt[3]{x+1}-5$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§1. УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. Основные понятия, относящиеся к уравнениям

Пусть на некотором числовом множестве M определены функции $f(x)$ и $g(x)$. Рассмотрим равенство

$$f(x) = g(x). \tag{1}$$

Когда говорят, что равенство (1) есть уравнение, то это означает, что равенство (1) рассматривается как неопределенное высказывание, при одних значениях истинное, при других — ложное, и ставится задача — найти значения x, при которых это неопределенное высказывание становится истинным. Функцию $f(x)$ при этом называют левой частью уравнения (1), а функцию $g(x)$ — правой частью.

Рассмотрим подробно основные понятия, связанные с уравнениями.

Число a называется *корнем* (или *решением*) уравнения (1), если обе части уравнения (1) определены при $x=a$ и равенство $f(a)=g(a)$ является верным. Следовательно, каждый корень уравнения (1) принадлежит множеству, которое является пересечением (общей частью) областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Это множество называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) уравнения (1) или *областью определения уравнения*.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Если в условиях задачи не указано, на каком множестве нужно решить уравнение, то решение следует искать на ОДЗ этого уравнения.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M и равенство (1) верно для каждого $x \in M$. Тогда говорят, что это равенство является *тождеством* на множестве M. Например, равенства

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1), \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

являются тождествами на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, а равенство

$$\sqrt{x^2} = x$$

является верным лишь на множестве неотрицательных чисел.

В процессе решения часто приходится преобразовывать уравнения, заменяя их более простыми. Какие-либо общие рекомендации по поводу преобразования уравнений дать невозможно. Однако есть правило, которое не следует забывать:

Нельзя выполнять преобразования, которые приводят к потере корней.

Назовем преобразование уравнения (1) *допустимым*, если при этом преобразовании не происходит потери корней.

Уравнение

$$f_1(x) = g_1(x) \tag{2}$$

называется *следствием* уравнения (1), если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2) (при этом уравнение (2) может иметь и другие корни).

Уравнения (1) и (2) называются *равносильными* (*эквивалентными*), если каждое из этих уравнений является следствием другого. Иными словами, уравнения (1) и (2) равносильны, если каждый корень уравнения (1) есть корень уравнения (2) и обратно, каждый корень уравнения (2) есть корень уравнения (1). Уравнения, не имеющие корней, считаются равносильными.

Например, уравнение $x^2 = x + 6$ равносильно уравнению $x^2 - x - 6 = 0$, а уравнение $x^2 = 1$ — следствие уравнения $\sqrt{x} = 1$.

Если уравнения (1) и (2) равносильны, то пишут

$$\{f(x) = g(x)\} \Longleftrightarrow \{f_1(x) = g_1(x)\} \quad \text{или } (1) \Longleftrightarrow (2),$$

а если уравнение (2) является следствием уравнения (1), то пишут

$$\{f(x) = g(x)\} \Rightarrow \{f_1(x) = g_1(x)\} \quad \text{или } (1) \Rightarrow (2).$$

Отметим, что если исходное уравнение с помощью допустимых преобразований заменено другим, причем в процессе преобразований хотя бы один раз уравнение заменялось на неравносильное ему следствие, то *проверка* найденных *корней* с помощью подстановки в исходное уравнение *является обязательной*.

Если же при каждом преобразовании уравнение заменялось на равносильное, то проверка не нужна (не следует путать проверку с контролем вычислений).

Рассмотрим еще одно понятие, связанное с решением уравнений. Будем говорить, что уравнение (1) *равносильно совокупности уравнений*

$$f_1(x) = g_1(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x), \tag{3}$$

если выполнены следующие условия:

1) каждый корень уравнения (1) является корнем по крайней мере одного из уравнений (3);

2) любой корень каждого из уравнений (3) является корнем уравнения (1).

При выполнении указанных условий множество корней уравнения (1) является объединением множеств корней уравнений (3).

Например, уравнение $(x^2-4)(x^2-x-2)=0$, равносильное совокупности уравнений $x^2-4=0$, $x^2-x-2=0$, имеет корни $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-1$.

Если уравнение записано в виде

$$f(x)\varphi(x)=0, \tag{4}$$

то каждое решение этого уравнения является решением по крайней мере одного из уравнений

$$f(x)=0, \quad \varphi(x)=0. \tag{5}$$

Однако нельзя утверждать, что любой корень каждого из уравнений (5) есть корень уравнения (4).

Например, если $f(x)=x\sqrt{2-x}$, $\varphi(x)=x^2-4x$, то $x=4$ — корень уравнения $\varphi(x)=0$, но число 4 не является корнем уравнения (4), так как функция $f(x)$ не определена при $x=4$.

Таким образом, в общем случае нельзя утверждать, что уравнение (4) равносильно совокупности уравнений (5). Чтобы решить уравнение (4), достаточно найти корни уравнений $f(x)=0$ и $\varphi(x)=0$, а затем отбросить те, которые не входят в ОДЗ уравнения (4), т. е. не принадлежат множеству, на котором определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. В ОДЗ уравнения (4) это уравнение равносильно совокупности уравнений (5). Справедливо более общее утверждение:

если функция $f(x)$ определена при всех x таких, что $\varphi(x)=0$, а функция $\varphi(x)$ определена при всех x таких, что $f(x)=0$, то уравнение (4) *равносильно совокупности уравнений* (5).

В этом случае для обозначения совокупности уравнений иногда используют знак $\left[\vphantom{\frac{a}{b}}\right.$ и пишут

$$f(x)\varphi(x)=0 \iff \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ \varphi(x)=0. \end{array}\right.$$

2. Наиболее важные приемы преобразования уравнений

1°. *Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую*, т. е. переход от уравнения

$$f(x)=\varphi(x)+g(x) \tag{6}$$

к уравнению

$$f(x)-\varphi(x)=g(x). \tag{7}$$

Указанное преобразование приводит к равносильному уравнению, т. е. (6) $\iff$ (7).

6—2549

В частности,

$$\{f(x)=g(x)\} \iff \{f(x)-g(x)=0\}.$$

Заметим, что здесь речь идет только о переносе членов уравнения из одной части в другую без последующего приведения подобных членов (если таковые имеются).

2°. *Приведение подобных членов*, т. е. переход от уравнения

$$f(x)+\varphi(x)-\varphi(x)=g(x) \tag{8}$$

к уравнению

$$f(x)=g(x). \tag{9}$$

Справедливо следующее легко проверяемое утверждение:

для любых функций $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ уравнение (9) *является следствием уравнения* (8), *т. е.* (8) $\Rightarrow$ (9).

Переход от уравнения (8) к уравнению (9) является допустимым преобразованием, при котором потеря корней невозможна, но могут появиться посторонние корни. Все сказанное остается в силе при замене уравнения (8) уравнением

$$f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x).$$

Таким образом, при приведении подобных членов, а также при отбрасывании одинаковых слагаемых в левой и правой частях уравнения получится уравнение, являющееся следствием исходного уравнения.

Например, если в левой и правой частях уравнения $x^2+\frac{1}{x^2}=x+\frac{1}{x^2}$ отбросить одинаковые слагаемые $\frac{1}{x^2}$, то получится уравнение $x^2=x$, являющееся следствием исходного: второе уравнение имеет корни $x_1=0$ и $x_2=1$, а первое — единственный корень $x=1$.

Отметим еще, что если ОДЗ уравнения (9) содержится в области определения функции $\varphi(x)$, то уравнения (8) и (9) равносильны.

3°. *Умножение обеих частей уравнения на одну и ту же функцию*, т. е. переход от уравнения (9) к уравнению

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x). \tag{10}$$

Справедливы следующие утверждения:

1) *если ОДЗ уравнения* (9), *т. е. пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$, содержится в области определения функции $\varphi(x)$, то уравнение* (10) *является следствием уравнения* (9);

2) *если функция $\varphi(x)$ определена и отлична от нуля в ОДЗ уравнения* (9), *то уравнения* (9) *и* (10) *равносильны.*

Заметим, что в общем случае переход от уравнения (10) к уравнению (9) недопустим: этот переход может привести к потере корней.

При решении уравнения вида (10) обычно заменяют его равносильным уравнением
$$[f(x)-g(x)]\varphi(x)=0,$$
затем находят корни уравнений $f(x)-g(x)=0$ и $\varphi(x)=0$ и, наконец, проверяют, какие из этих корней удовлетворяют уравнению (10).

4°. *Возведение обеих частей уравнения в натуральную степень*, т. е. переход от уравнения
$$f(x)=g(x) \tag{11}$$
к уравнению
$$[f(x)]^n=[g(x)]^n, \quad n\in\mathbb{N}, \quad n\geqslant 2. \tag{12}$$

Справедливы следующие утверждения:

1) *при любом* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, *уравнение* (12) *является следствием уравнения* (11);
2) *если* $n=2k+1$ *(n — нечетное число), то уравнения* (11) *и* (12) *равносильны; это следует из формулы* (3), *пример* 14, §5, *гл. II*;
3) *если* $n=2k$ *(n — четное число), то уравнение* (12) *равносильно уравнению*
$$|f(x)|=|g(x)|, \tag{13}$$
а уравнение (13) *равносильно совокупности уравнений*
$$f(x)=g(x), \quad f(x)=-g(x). \tag{14}$$

В частности, уравнение
$$[f(x)]^2=[g(x)]^2 \tag{15}$$
равносильно совокупности уравнений (14). Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают значения одного знака (например, $f(x)\geqslant 0$ и $g(x)\geqslant 0$) в ОДЗ уравнения (11), то уравнение (15) равносильно уравнению (11).

Более общим, чем переход к уравнению (12), является переход от уравнения (11) к уравнению
$$\varphi(f(x))=\varphi(g(x)), \tag{16}$$
где $\varphi(t)$ — некоторая заданная функция.

Заметим, что в общем случае такой переход недопустим. В том случае, когда пересечение множеств значений функций $f(x)$ и $g(x)$ содержится в области определения функции $\varphi(t)$, уравнение (16) является следствием уравнения (11). Если, кроме того, известно, что $\varphi(t)$ — строго возрастающая или строго убывающая функция, то уравнения (11) и (16) равносильны.

Задачи

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M. Рассмотрим уравнения $f(x)=g(x)$ и $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{g(x)}$.
   1) Равносильны ли эти уравнения на множестве M?
   2) Если не равносильны, то при каких дополнительных условиях они равносильны?
   3) Какое из уравнений есть следствие другого?
2. Ответить на те же вопросы, что и в задаче 1, для уравнений
   1) $f(x)=g(x)$ и $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$;
   2) $f(x)=g(x)$ и $f^3(x)=g^3(x)$;
   3) $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=\varphi(x)$ и $\sqrt{f(x)g(x)}=\varphi(x)$, предполагая, что функция $\varphi(x)$ определена на множестве M.

Ответы

1. 1) В общем случае уравнения неравносильны; 2) если хотя бы одна из функций $f(x)$, $g(x)$ отлична от нуля на множестве M, то эти уравнения равносильны; 3) первое уравнение есть следствие второго. 2. 1) В общем случае уравнения неравносильны; если хотя бы одна из функций $f(x)$, $g(x)$ принимает неотрицательные значения на множестве M, то уравнения равносильны, первое уравнение — следствие второго; 2) уравнения равносильны; 3) в общем случае неравносильны; если функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают неотрицательные значения на множестве M, то уравнения равносильны, второе уравнение — следствие первого.

§2. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

1. Квадратные уравнения

Уравнение

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

где a, b, c — заданные действительные числа, $a\neq 0$, x — неизвестное, называют *квадратным*.

Приведем основные утверждения (теоремы), связанные с корнями квадратного уравнения (1).

1°. Квадратное уравнение (1):

а) имеет два действительных и различных корня x_1 и x_2, определяемых по формулам

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{2}$$

если дискриминант D квадратного уравнения (1) положителен, т. е. $D=b^2-4ac>0$;

б) имеет единственный корень $x=-\frac{b}{2a}$ (кратности два), если $D=0$;

в) не имеет действительных корней, если $D<0$.

2°. Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (1), то

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{3}$$

Для приведенного квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0 \tag{4}$$

формулы Виета (3) принимают вид

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q. \tag{5}$$

3°. *Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения* (1), *то для любого $x\in\mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \tag{6}$$

При выводе формул (2) используется *метод выделения полного квадрата*, т. е. следующее преобразование квадратного трехчлена:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}. \tag{7}$$

Равенство (7) можно записать в виде

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]. \tag{8}$$

Формулы Виета (3) следуют из равенств (2), а для доказательства тождества (6) достаточно преобразовать его левую часть, используя соотношения (3).

Справедливо утверждение, обратное утверждению 1°.

4°. *Если квадратное уравнение* (1) *имеет два действительных и различных корня, то $D>0$; если уравнение* (1) *имеет единственный корень, то $D=0$; если уравнение* (1) *не имеет действительных корней, то $D<0$.*

Используя термины «необходимость» и «достаточность», можно объединить утверждения 1° и 4° и сформулировать следующее утверждение: *для того чтобы квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имело два действительных различных корня, имело один действительный корень, не имело действительных корней, необходимо и достаточно выполнение соответственно условий $D>0$, $D=0$, $D<0$, где $D=b^2-4ac$.*

5°. Обратная теорема Виета: если a, b, c, x_1, x_2 — такие числа, что справедливы равенства (3), то x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (1).

Утверждение 4° можно доказать, используя метод доказательства от противного и утверждение 1°, а справедливость теоремы, обратной теореме Виета, следует из равенства (8).

Пример 1. Пусть $p^2-4q \geqslant 0$, $q \neq 0$, а x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (4). Выразить через p и q следующие суммы:

1) $S_1 = x_1^2 + x_2^2$; 2) $S_2 = x_1^3 + x_2^3$; 3) $S_3 = \dfrac{x_1^3}{x_2} + \dfrac{x_2^3}{x_1}$.

△ 1) Используя тождество $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ и формулы (5), получаем $S_1 = p^2-2q$.

2) Применяя формулу для суммы кубов, находим

$$S_2 = (x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2] = -p(p^2-3q) = 3pq-p^3.$$

3) Так как $S_3 = \dfrac{x_1^4+x_2^4}{x_1x_2}$, где

$$x_1^4+x_2^4 = (x_1^2+x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = S_1^2 - 2q^2 = p^4-4p^2q+2q^2,$$

то

$$S_3 = \frac{p^4}{q} - 4p^2 + 2q.$$ ▲

Пример 2. Сократить дробь $S = \dfrac{9x^2-9x+2}{6x^2-7x+2}$.

△ Применив формулы (2), найдем корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $9x^2-9x+2=0$. Имеем

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{18},$$

откуда $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. По формуле (6) получаем

$$9x^2-9x+2 = 9\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

Аналогично, решив уравнение $6x^2-7x+2=0$, находим его корни $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$; поэтому

$$6x^2-7x+2 = 6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Итак,

$$S = \frac{9\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3x-1}{2x-1}.$$ ▲

Пример 3. Найти все значения r, при которых уравнение

$$x^2 + (4+r)x + 5 + 2r = 0:$$

1) имеет равные корни; 2) имеет корни, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку.

△ 1) Уравнение имеет равные корни (единственный корень кратности два) тогда и только тогда, когда когда

$$D = (4+r)^2 - 4(5+2r) = r^2 - 4 = 0,$$

т. е. при $r = -2$ и $r = 2$.

2) В этом случае (при условии, что $D \geqslant 0$) сумма корней равна нулю и поэтому $4 + r = 0$, откуда $r = -4$. ▲

2. Уравнения, сводящиеся к квадратным

Биквадратное уравнение, т. е. уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

сводится к квадратному заменой $x^2 = t$.

К квадратному уравнению сводится уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0), \tag{9}$$

которое называют *возвратным*.

Заметим, что число $x = 0$ не является корнем уравнения (9), поскольку $a \neq 0$. Следовательно, разделив обе его части на x^2, получим уравнение

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0, \tag{10}$$

равносильное исходному. Сведем уравнение (10) к квадратному, полагая $x + \frac{1}{x} = t$. Так как $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, то получаем квадратное уравнение

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0. \tag{11}$$

Пример 4. Решить уравнение $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.

△ Полагая $x^2 = t \geqslant 0$, получаем уравнение $9t^2 + 8t - 1 = 0$, имеющее корни $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{9}$. Если $t = \frac{1}{9}$, то $x^2 = \frac{1}{9}$, откуда $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. ▲

Пример 5. Решить уравнение $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$.

△ Это уравнение является возвратным, поэтому, полагая $x + \frac{1}{x} = t$, согласно формуле (11) получаем уравнение $t^2 - 2 + 2t - 1 = 0$, откуда находим $t_1 = -3$, $t_2 = 1$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $x + \frac{1}{x} = -3$, $x + \frac{1}{x} = 1$. Первое из них равносильно уравнению $x^2 + 3x + 1 = 0$, имеющему корни $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $x_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. ▲

Задачи

1. Не находя корни x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 3x - 6 = 0$, вычислить:
1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $x_1^3 + x_2^3$; 3) $x_1^4 + x_2^4$; 4) $x_1^6 + x_2^6$.

2. Сократить дробь:
1) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$; 2) $\frac{6x^2 + x - 2}{10x^2 + x - 2}$.

3. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найти p и q, если числа $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ — корни уравнения $x^2 - px + pq = 0$.

4. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, а $S_n = x_1^n + x_2^n$. Доказать, что $S_{n+1} + pS_n + qS_{n-1} = 0$.

5. Даны уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Доказать, что по крайней мере одно из них имеет действительные корни, если $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$.

Решить уравнение (**6**–**9**):

6. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.
7. $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$.
8. $(x^2 - 2x)^2 - 2x^2 + 4x - 3 = 0$.
9. $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 2) = 12$.

Ответы

1. 1) $\frac{33}{4}$; 2) $\frac{135}{8}$; 3) $\frac{801}{16}$; 4) $\frac{21681}{64}$. **2.** 1) $\frac{x-3}{x+1}$; 2) $\frac{3x+2}{5x-3}$. **3.** $p = -2$, $q = -1$; $p = 1$, q — любое. **6.** $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. **7.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_4 = \sqrt{\frac{3}{2}}$. **8.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. **9.** $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

§ 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК МОДУЛЯ

1. Иррациональные уравнения

Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным уравнением, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1) если показатель радикала — четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательным; при этом значение радикала также является неотрицательным;

2) если показатель радикала — нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак радикала совпадает со знаком подкоренного выражения.

Рассмотрим уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x). \tag{1}$$

Если $g(x) < 0$, то уравнение (1) не имеет корней, так как левая часть уравнения (1) не может принимать отрицательные значения ни при каких значениях x.

Если же $g(x) \geqslant 0$, то при возведении обеих частей уравнения (1) в квадрат получим равносильное уравнение. Таким образом, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = [g(x)]^2, & (2) \\ g(x) \geqslant 0. & (3) \end{cases}$$

Замечание. При решении уравнения (1) нет необходимости предварительно находить ОДЗ левой части (1), решая неравенство $f(x) \geqslant 0$, которое может оказаться довольно сложным. Достаточно найти корни уравнения (2) и, не прибегая к непосредственной подстановке этих корней в уравнение (1), выяснить, какие из найденных корней удовлетворяют неравенству (3). Эти корни, и только они, являются корнями уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^3 + 6x^2 + 9} = x + 3.$$

△ При $x < -3$ уравнение не имеет корней, а при $x \geqslant -3$ оно равносильно каждому из уравнений

$$x^3 + 6x^2 + 9 = x^2 + 6x + 9, \quad x^3 + 5x^2 - 6x = 0,$$

$$x(x^2 + 5x - 6) = 0, \quad x(x+6)(x-1) = 0.$$

Полученное уравнение имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -6$. Условию $x \geqslant -3$ удовлетворяют только корни x_1 и x_2.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. ▲

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4.$$

△ Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем уравнение

$$2x + 1 + x - 3 + 2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} = 16,$$

равносильное исходному уравнению, так как обе его части неотрицательны.

Приведя подобные члены и перенося слагаемые из одной части уравнения в другую, получаем уравнение

$$2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3}=3(6-x).$$

Возводя обе части получившегося уравнения в квадрат и приводя подобные члены, приходим к уравнению

$$x^2-88x+336=0,$$

которое является следствием исходного.

Это уравнение имеет корни $x_1=4$, $x_2=84$, из которых только корень x_1 удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ. $x=4$. ▲

В рассмотренном примере можно было сначала перенести один из радикалов в правую часть уравнения (метод *уединения радикала*), а затем возвести обе части полученного уравнения в квадрат.

Воспользуемся этим приемом при решении следующего примера.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+4x-23}-\sqrt{x^2+2x-8}=1.$$

△ Применив метод уединения радикала, получим уравнение

$$\sqrt{2x^2+4x-23}=1+\sqrt{x^2+2x-8},$$

равносильное исходному.

Заметим, что нет необходимости находить ОДЗ уравнения, но следует обратить внимание на подкоренные выражения. Если ввести новое неизвестное (выполнить замену переменной), полагая $t=\sqrt{x^2+2x-8}$, то $2x^2+4x-23=2t^2-7$, и уравнение примет вид

$$\sqrt{2t^2-7}=t+1.$$

Возводя обе части полученного уравнения в квадрат, имеем

$$2t^2-7=t^2+2t+1, \quad \text{или} \quad t^2-2t-8=0,$$

откуда $t_1=-2$, $t_2=4$.

Так как $t\geqslant 0$, то $\sqrt{x^2+2x-8}=4$, $x^2+2x-24=0$, $x_1=-6$, $x_2=4$. Числа x_1 и x_2 являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1=-6$, $x_2=4$. ▲

В примерах 1–3 был использован метод *возведения обеих частей уравнения в квадрат*. Иногда применяются другие приемы, которые могут оказаться более эффективными.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3+\sqrt{2x+5}}+\sqrt{x+7+3\sqrt{2x+5}}=7\sqrt{2}.$$

$\triangle$ Положим $\sqrt{2x+5}=t$; тогда $x=\dfrac{t^2-5}{2}$, и исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{\frac{t^2+1}{2}+t}+\sqrt{\frac{t^2+9}{2}+3t}=7\sqrt{2}.$$

Полученное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14,$$
$$\sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(t+3)^2}=14,$$
$$|t+1|+|t+3|=14.$$

Так как $t\geqslant 0$, то $|t+1|=t+1$, $|t+3|=t+3$ и полученное уравнение можно записать в виде $t+1+t+3=14$, $t=5$, т. е. $\sqrt{2x+5}=5$, откуда $x=10$.

О т в е т. $x=10$. ▲

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{12-2x}}=\frac{5}{2}.$$

$\triangle$ Полагая $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}=u$, преобразуем уравнение к виду

$$u+\frac{1}{u}=\frac{5}{2} \quad \text{или} \quad 2u^2-5u+2=0.$$

Это уравнение имеет корни $u_1=2$, $u_2=\frac{1}{2}$. Если $u=2$, то $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}=2$, откуда $\dfrac{12-2x}{x-1}=8$, $x=2$. Если $u=\frac{1}{2}$, то $\dfrac{12-2x}{x-1}=\dfrac{1}{8}$, откуда $x=\dfrac{97}{17}$.

Оба найденных корня являются корнями исходного уравнения, так как в процессе решения было использовано (наряду с заменой неизвестного) только возведение обеих частей уравнения в куб. При таком преобразовании уравнение заменяется на равносильное ему.

О т в е т. $x_1=2$, $x_2=\dfrac{97}{17}$. ▲

2. Уравнения, содержащие знак модуля

При решении уравнений, содержащих знак модуля, используются следующие утверждения:

1) $|a|=\begin{cases} a & \text{при } a\geqslant 0,\\ -a & \text{при } a<0;\end{cases}$

2) $\sqrt{a^2}=|a|$;

3) если x_1 и x_2 — произвольные точки числовой оси, то расстояние между ними равно $|x_1-x_2|$.

Пример 6. Решить уравнение
$$|x-5|=|x+1|.$$
$\triangle$ Так как $|x-5|$ и $|x+1|=|x-(-1)|$ — это расстояния от искомой точки x до точек 5 и -1 соответственно, то искомая точка x находится на одинаковом расстоянии от точек 5 и -1. Таким образом, точка x — середина отрезка $[-1, 5]$ и поэтому $x=\frac{-1+5}{2}=2$.

Ответ. $x=2$. $\blacktriangle$

Пример 7. Решить уравнение
$$x^2-2x-3=3|x-1|.$$
$\triangle$ Полагая $t=x-1$, получаем уравнение
$$t^2-4=3|t|.$$
Это уравнение не меняется при замене t на $-t$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $t \geqslant 0$. В этом случае имеем уравнение $t^2-3t-4=0$, откуда $t=4$ (так как $t \geqslant 0$), $x_1=5$. Числу $t=-4$ соответствует корень $x_2=-4+1=-3$.

Ответ. $x_1=5$, $x_2=-3$. $\blacktriangle$

Пример 8. Решить уравнение
$$|x^2+x-1|+|x^2+x-3|=6.$$
$\triangle$ Положим $x^2+x=t$; тогда исходное уравнение примет вид
$$|t-1|+|t-3|=6.$$
Решить полученное уравнение — значит найти все такие точки числовой оси Ot (см. рис. 1), для которых сумма расстояний от каждой из них до точек 1 и 3 равна 6. Заметим, что искомые точки лежат вне отрезка $[1;3]$, так как сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна 2.

Рис. 1

Пусть M_1 — искомая точка, лежащая правее точки 3; r — расстояние от точки M_1 до точки 3, s — сумма расстояний от точки M_1 до точек 3 и 1. Тогда $s=r+r+2=6$, откуда $r=2$, а точке M_1 соответствует число $t_1=3+2=5$. Аналогично, корнем уравнения является точка $t_2=-1$, находящаяся левее точки 1 на расстоянии 2.

Таким образом, задача сводится к решению уравнений $x^2-x=-1$ и $x^2-x=5$. Первое из них не имеет действительных корней, а второе имеет два корня.

Ответ. $x_1=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$. $\blacktriangle$

Пример 9. Решить уравнение

$$|x^2+x|+|x+2|=x^2-2.$$

$\triangle$ Стандартный метод решения этого уравнения — запись его без знаков модуля на промежутках

$$x<-2, \quad -2\leqslant x<-1, \quad -1\leqslant x<0, \quad x\geqslant 0.$$

Приведем другое решение, заметив, что правая часть $x^2-2=x^2+x-(x+2)$ равна разности выражений, стоящих под знаками модуля в левой части. При этом воспользуемся неравенством $|a-b|\leqslant|a|+|b|$, причем знак равенства здесь имеет место лишь в следующих случаях: $a=0$, $b=0$, $ab<0$.

Кроме того, уравнение может иметь решения только в случае, когда его правая часть неотрицательна: $x^2\geqslant 2$, т. е. $|x|\geqslant\sqrt{2}$.

Итак, $|x^2-2|\leqslant|x^2+x|+|x+2|$. Это неравенство превращается в равенство, если $x^2+x=0$, т. е. при $x=0$ и $x=-1$. Эти значения не удовлетворяют уравнению, так как в этом случае условие $|x|\geqslant\sqrt{2}$ не выполнено.

Аналогично, если $x+2=0$, то $x=-2$ — корень исходного уравнения. Наконец, корнями уравнения являются решения неравенства $(x^2+x)(x+2)=x(x+1)(x+2)<0$, удовлетворяющие условию $|x|\geqslant\sqrt{2}$. Это условие выполняется, если $x<-2$.

Ответ. $x\leqslant-2$. ▲

Задачи

Решить уравнения (1–13):

1. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$.

2. $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}=-1$.

3. $\sqrt{2x^2-8x+25}-\sqrt{x^2-4x+13}=2$.

4. $\sqrt{2x^2-8x+49}-\sqrt{x^2-4x+21}=4$.

5. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=3\sqrt{3x-5}$.

6. $\sqrt{x-3}+2\sqrt{x}=\sqrt{2(x+3)}$.

7. $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}}=4$.

8. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

9. $2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9}=1$.

10. $\sqrt[3]{x+5}-2\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[6]{25-x^2}$.

11. $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$.

12. $\sqrt[4]{78+x}+\sqrt[4]{259-x}=7$.

13. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt{2}$.

14. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}$$

имеет решение, и решить это уравнение.

Решить уравнение (15–24):

15. $|x-\sqrt{x}-2|+|\sqrt{x}+6-x|=7$.

16. $|3\sqrt{x}+2-x|+|x-3\sqrt{x}+3|=9$.

17. $|x-4|=|x+3|$.

18. $|2x+3|=|2x-7|$.

19. $x^2-4x-4=2|x-2|$.

20. $|x^2+x+1|+|x^2+x-3|=6$.

21. $|x^3-3x^2+x|=x-x^3$. **22.** $|x^2-x|+|x+1|=x^2-2x-1$.
23. $\sqrt{x-1}+|x-2|=|x-3|$. **24.** $5\sqrt{1+|x^2-1|}=3+|5x+3|$.

Ответы

1. $x=18$. **2.** $x=20$. **3.** $x_1=6$, $x_2=-2$. **4.** $x_1=-6$, $x_2=10$. **5.** $x=2$. **6.** $x=3$. **7.** $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$. **8.** $x=-1$. **9.** $x_1=0$, $x_2=2$. **10.** $x=\frac{63}{13}$. **11.** $2\leqslant x\leqslant 7$. **12.** $x_1=3$, $x_2=178$. **13.** $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$, $x_5=-\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$. **14.** $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 8$, $x=\frac{a^2}{4}$. **15.** $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\frac{17+\sqrt{33}}{2}$. **16.** $x=16$. **17.** $x=\frac{1}{2}$. **18.** $x=1$. **19.** $x_1=-2$, $x_2=6$. **20.** $x_1=-\frac{1+\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$. **21.** $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$. **22.** $x\leqslant -1$. **23.** $x=2$. **24.** $x\leqslant -1$, $x=\frac{1}{5}$.

§ 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. Основные понятия, связанные с решением неравенств

Если на числовом множестве M определены функции $f(x)$ и $g(x)$ и ставится задача *решить неравенство*

$$f(x)<g(x), \tag{1}$$

то это означает, что требуется найти *все значения* $x\in M$, *при подстановке которых в неравенство* (1) *получается верное числовое неравенство.*

Каждое такое значение x называется *решением* неравенства, а совокупность всех решений — *множеством решений* этого неравенства.

Из этого определения следует, что каждое решение неравенства (1) принадлежит множеству, которое является пересечением (общей частью) областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Это множество называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) неравенства (1).

Неравенство вида (1) называют *строгим* в отличие от неравенства

$$f(x)\leqslant g(x), \tag{2}$$

которое называют *нестрогим.*

Множество решений неравенства (2) можно получить, объединив множество решений неравенства (1) с множеством решений уравнения $f(x)=g(x)$.

При решении неравенств, как и при решении уравнений, широко используется понятие равносильности.

Неравенство (1) и неравенство

$$f_1(x)<g_1(x) \tag{3}$$

называют *равносильными на множестве* M, если множества решений этих неравенств совпадают, т. е. каждое решение неравенства (1), принадлежащее множеству M, является решением неравенства (3) и, обратно, каждое решение неравенства (3), принадлежащее множеству M, является решением неравенства (1). Если неравенства (1) и (3) не имеют решений, то эти неравенства считаются равносильными.

Сформулируем основные утверждения, связанные с понятием равносильности.

1°. *Неравенства*

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad -f(x) > -g(x)$$

равносильны на любом числовом множестве.

2°. *Если функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены на множестве M, то неравенства*

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$

равносильны на множестве M.

3°. *Если функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определены на множестве M и $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in M$, то неравенства*

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$$

равносильны на множестве M.

Применяя утверждения 1° и 3° к линейным неравенствам, т. е. к неравенствам вида

$$ax < b, \quad a \neq 0, \tag{4}$$

получаем:

а) *если $a > 0$, то неравенство (4) равносильно неравенству $x < \frac{b}{a}$, т. е. решениями неравенства (4) являются все числа из промежутка $\left(-\infty, \frac{b}{a}\right)$ и только эти числа;*

б) *если $a < 0$, то неравенство (4) равносильно неравенству $x > \frac{b}{a}$, т. е. множество решений неравенства (4) — промежуток $\left(\frac{b}{a}, +\infty\right)$.*

4°. *Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ для всех $x \in M$, то неравенства*

$$f(x) < g(x) \quad \text{и} \quad \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{g(x)}$$

равносильны на множестве M.

5°. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M, то неравенство*

$$f^2(x) < g^2(x) \tag{5}$$

равносильно неравенству

$$|f(x)| < |g(x)|$$

на этом множестве.

В случае когда $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ для всех $x \in M$, неравенство (5) равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Для неравенств, как и для уравнений, вводятся понятия «система неравенств» и «совокупность неравенств».

Число $x = a$ называется *решением системы неравенств*

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x), \\ f_2(x) < g_2(x), \end{cases} \qquad (6)$$

если это число является решением *каждого* неравенства системы (6). Пусть E_1 и E_2 — множества решений соответственно первого и второго неравенств системы (6), тогда множество E решений системы (6) является пересечением множеств E_1 и E_2, т. е. $E = E_1 \cap E_2$.

Число $x = a$ называется *решением совокупности неравенств*

$$f_1(x) < g_1(x), \quad f_2(x) < g_2(x), \qquad (7)$$

если это число является решением *хотя бы одного* из неравенств (7). Пусть E_1 и E_2 — множества решений соответственно первого и второго неравенств совокупности (7), тогда множество E решений совокупности неравенств (7) является объединением множеств E_1 и E_2, т. е. $E = E_1 \cup E_2$.

Понятие равносильности переносится на системы и совокупности неравенств. Говорят, что неравенство (1) *равносильно системе неравенств* (6), если это неравенство и система (6) имеют одни и те же решения или не имеют решений.

Неравенство (1) называют *равносильным совокупности неравенств* (7), если выполняются следующие условия:

1) каждое решение неравенства (1) является решением по крайней мере одного из неравенств (7);
2) любое решение каждого из неравенств (7) является решением неравенства (1).

При решении неравенств часто используются следующие утверждения.

6°. *Неравенство*

$$f(x)g(x) > 0$$

равносильно совокупности следующих двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

7°. *Неравенство*

$$f(x)g(x) < 0$$

равносильно совокупности следующих двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \textit{и} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Справедливость утверждений 1°–7° следует из свойств числовых неравенств (гл. II, §6).

Пример 1. Решить неравенства $(x-1)^2 < 9$ и $(x-1)^2 > 9$.

△ 1) Неравенство $(x-1)^2 < 9$ равносильно следующему: $|x-1| < 3$. Так как модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа, то решение данного неравенства сводится к нахождению точек x числовой прямой, которые удалены от точки 1 на расстояние, не превосходящее 3. Такими точками являются точки интервала $(-2,4)$.

2) Неравенству $|x-1| > 3$, которое равносильно неравенству $(x-1)^2 > 9$, удовлетворяют все точки числовой прямой, расстояние от которых до точки 1 больше 3.

Это точки, лежащие вне отрезка длины 6 с центром в точке 1, т. е. точки, лежащие вне отрезка $[-2,4]$. Таким образом, множество решений исходного неравенства — объединение промежутков $(-\infty,-2)$ и $(4,+\infty)$.

Ответ.

1) $-2 < x < 4$; 2) $x < -2$, $x > 4$. ▲

Пример 2. Решить неравенство $|x-1| < |x+3|$.

△ Первый способ. Так как обе части неравенства неотрицательны, то при возведении их в квадрат получается равносильное неравенство

$$x^2 - 2x + 1 < x^2 + 6x + 9.$$

Это неравенство равносильно неравенству $-8x < 8$, откуда $x > -1$.

Второй способ. Решение данного неравенства сводится к нахождению точек x числовой прямой, которые расположены ближе к точке 1, чем к точке -3. Такими точками являются все точки, лежащие справа от точки -1 — середины отрезка $[-3,1]$, т. е. точки из промежутка $(-1;+\infty)$.

Ответ. $x > -1$. ▲

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} (x+1)^2 > 1, \\ (x-1)^2 < 16. \end{cases}$$

△ Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} |x+1| > 1, \\ |x-1| < 4. \end{cases}$$

Множество E_1 решений первого неравенства этой системы состоит из точек числовой прямой (см. рис. 2), лежащих вне отрезка $[-2,0]$, т. е. E_1 — объединение промежутков $(-\infty,-2)$ и $(0,+\infty)$.

Множество E_2 решений второго неравенства — интервал длины 8 с центром в точке 1, т. е. $E_2 = (-3{,}5)$.

Множество E решений исходной системы — общая часть (пересечение) множеств E_1 и E_2 (см. рис. 2).

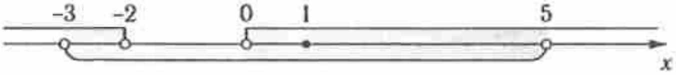


Рис. 2

Следовательно, множество E — объединение интервалов $(-3,-2)$ и $(0,5)$.

Ответ. $-3 < x < -2$, $0 < x < 5$. ▲

2. Квадратные неравенства и сводящиеся к ним

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — заданные числа, причем $a \neq 0$, x — неизвестное. Тогда неравенства вида

$$f(x) > 0, \quad f(x) < 0, \quad f(x) \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant 0$$

называют *квадратными неравенствами* или *неравенствами второй степени*, причем первые два из этих неравенств называют *строгими*, остальные — *нестрогими*.

Перейдем к нахождению решений квадратных неравенств. Ограничимся рассмотрением строгих неравенств и заметим, что всякое строгое квадратное неравенство можно привести к одному из следующих видов:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{при} \quad a > 0, \tag{8}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{при} \quad a > 0. \tag{9}$$

Из теорем 1–4 (гл. III, §1 разд. 2) следует, что:

1) если $D = b^2 - 4ac < 0$, то решениями неравенства (8) являются все действительные числа, а неравенство (9) не имеет решений;
2) если $D = 0$, то решениями неравенства (8) являются все действительные значения x, кроме $x = -\frac{b}{2a}$, а неравенство (9) не имеет решений;

3) если $D>0$, то решениями неравенства (8) являются все числа x такие, что $x<x_1$ или $x>x_2$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, такие, что $x_1<x_2$, т. е. все значения x, лежащие вне отрезка $[x_1, x_2]$; решениями неравенства (9) являются числа x такие, что $x_1<x<x_2$, т. е. все значения x из интервала (x_1, x_2).

Пример 4. Решить неравенство:

1) $x^2+5x+7>0$; 2) $6x-9 \geqslant x^2$;
3) $2x^2+x-6>0$; 4) $3x^2-8x-3 \leqslant 0$.

△ 1) Неравенство $x^2+5x+7>0$ равносильно неравенству $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, а его решениями являются все значения $x \in \mathbb{R}$.

2) Неравенство $6x-9 \geqslant x^2$ равносильно неравенству $(x-3)^2 \leqslant 0$ и имеет единственное решение $x=3$.

3) Уравнение $2x^2+x-6=0$ имеет корни $x_1=-2$, $x_2=\frac{3}{2}$, а решения неравенства $2x^2+x-6>0$ — все числа x, лежащие вне отрезка $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$, т. е. все значения x такие, что $x<-2$, а также $x>\frac{3}{2}$.

4) Уравнение $3x^2-8x-3=0$ имеет корни $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=3$, а решения неравенства $3x^2-8x-3 \leqslant 0$ — все числа x из отрезка $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$, т. е. $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3$. ▲

Пример 5. Решить неравенство $x^4-10x^2+9>0$.

△ Полагая $x^2=t$, получаем неравенство $t^2-10t+9>0$, равносильное неравенству $(t-1)(t-9)>0$, откуда находим $t<1$, $t>9$. Поэтому множество решений исходного неравенства — объединение множеств решений неравенств $x^2<1$ и $x^2>9$, которые равносильны неравенствам $|x|<1$ и $|x|>3$ соответственно.

Ответ. $x<-3$, $-1<x<1$, $x>3$. ▲

Пример 6. Найти все значения r, при которых неравенство

$$(r^2-1)x^2+2(r-1)x+2>0$$

верно для всех $x \in \mathbb{R}$.

△ Если $r=1$, то неравенство справедливо $(2>0)$. Если $r=-1$, то неравенство имеет вид $-4x+2>0$ и не является верным для всех $x \in \mathbb{R}$ (например, число $x=1$ не является решением этого неравенства).

Пусть $r^2-1\neq 0$, т. е. $r\neq 1$ и $r\neq -1$. Тогда задачу можно сформулировать так: найти все значения r, при которых квадратичная функция

$$y=(r^2-1)x^2+2(r-1)x+2$$

принимает положительные значения для всех $x\in\mathbb{R}$.

По теореме 4 § 1 гл. III это имеет место тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, а коэффициент при x^2 положителен, т. е. для всех r, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases}4(r-1)^2-8(r^2-1)<0,\\ r^2-1>0.\end{cases}$$

Первое неравенство равносильно каждому из неравенств $r^2+2r-3>0$, $(r+3)(r-1)>0$, а его решения — значения r такие, что $r<-3$ или $r>1$.

Второе неравенство справедливо при $r<-1$ и $r>1$.

Следовательно, решениями системы являются значения r такие, что $r<-3$ или $r>1$.

Ответ. $r<-3$, $r\geqslant 1$. ▲

Пример 7. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1}\leqslant a$$

верно для всех значений x.

△ Так как дискриминант квадратного трехчлена $4x^2-2x+1$ отрицателен, а старший коэффициент положителен, то $4x^2-2x+1>0$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Умножая обе части исходного неравенства на $4x^2-2x+1$, получаем равносильное неравенство

$$8x^2-4x+3\leqslant a(4x^2-2x+1),$$

которое можно записать в виде

$$(8-4a)x^2+(2a-4)x+3-a\leqslant 0.$$

Это неравенство не является верным для всех $x\in\mathbb{R}$ при $a=2$.

Если $a\neq 2$, то неравенство является квадратным и справедливо для всех $x\in\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $a>2$ и

$$D=4(a-2)^2-16(2-a)(3-a)=4(a-2)(10-3a)\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $10-3a\leqslant 0$, т. е. $a\geqslant\frac{10}{3}$.

Ответ. $a\geqslant\frac{10}{3}$. ▲

Пример 8. Найти все значения a, при которых неравенство

$$(x^2-a)(2x+8-a)\geqslant 0$$

верно для всех значений $x\in[-1,1]$.

$\triangle$ Пусть неравенство является верным для каждого $x\in[-1,1]$. Тогда оно верно при $x=0$ и $x=1$. Подставляя эти значения в левую часть неравенства, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a(a-8)\geqslant 0,\\ (a-1)(a-10)\geqslant 0.\end{cases}$$

Первому неравенству системы удовлетворяют значения $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 8$, второму — значения $a\leqslant 1$ и $a\geqslant 10$, откуда следует, что множество решений системы — совокупность промежутков

$$a\leqslant 0,\quad a\geqslant 10.$$

Найденные условия являются необходимыми (искомыми значениями a могут быть только такие значения, которые содержатся в промежутках $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 10$).

Покажем, что эти условия являются достаточными. Пусть $a\leqslant 0$ и $x\in[-1,1]$; тогда $x^2-a\geqslant 0$, $2x+8-a>0$ и, значит, исходное неравенство — верное.

Пусть $a\geqslant 10$ и $x\in[-1,1]$; тогда $x^2-a<0$, $2x+8-a\leqslant 0$, и поэтому исходное неравенство справедливо.

Ответ. $a\leqslant 0$, $a\geqslant 10$. ▲

Пример 9. Решить неравенство $|x^2+x-6|>2-x$.

$\triangle$ Первый способ. Число $x=2$ не является решением данного неравенства, а при $x>2$ неравенство справедливо: его левая часть неотрицательна при всех $x\in\mathbb{R}$, а правая отрицательна.

Если $x<2$, то исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$x^2+x-6>2-x \quad \text{и} \quad x^2+x-6<-2+x.$$

Эти неравенства равносильны неравенствам

$$(x+4)(x-2)>0 \quad \text{и} \quad (x+2)(x-2)<0$$

соответственно.

Решив систему

$$\begin{cases} x<2,\\ (x+4)(x-2)>0,\end{cases}$$

получаем $x<-4$.

Аналогично, из системы

$$\begin{cases} x<2,\\ (x+2)(x-2)<0\end{cases}$$

следует, что $-2 < x < 2$. Итак, множество решений данного неравенства — объединение промежутков $x < -4$, $-2 < x < 2$, $x > 2$.

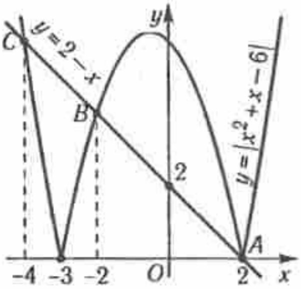


Рис. 3

Второй способ. Построим графики функций $y = |x^2 + x - 6|$ и $y = 2 - x$ (см. рис. 3)

Эти графики имеют общую точку $A(2;0)$. Две другие общие точки получим, найдя отрицательные корни уравнений $6 - x^2 - x = 2 - x$ и $x^2 + x - 6 = 2 - x$. Такими корнями являются $x = -2$ и $x = -4$. При $x < -4$, $-2 < x < 2$ и $x > 2$ график функции $y = |x^2 + x - 6|$ лежит выше графика функции $y = 2 - x$.

Ответ. $x < -4$, $-2 < x < 2$, $x > 2$. ▲

3. Рациональные неравенства. Метод интервалов

Пример 10. Решить неравенство $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x - 8} > 0$.

△ Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, преобразуем неравенство к виду

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x-4)} > 0. \qquad (10)$$

Заметим, что линейная функция $x - a$ меняет знак при переходе через точку a, причем правее точки a эта функция положительна, а левее точки a — отрицательна.

Отметив на числовой оси точки -3, -2, 1, 4, которые являются нулями (корнями) многочленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби (10), разобьем числовую ось на пять промежутков (см. рис. 4)

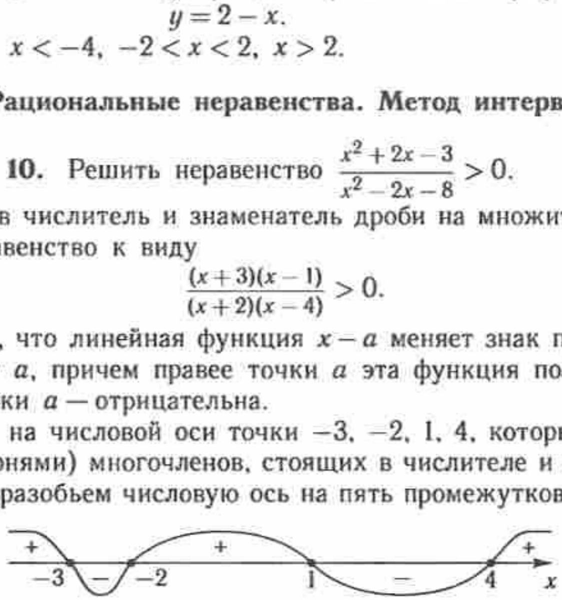


Рис. 4

На самом правом промежутке ($x > 4$) дробь (10) положительна, так как все множители в числителе и знаменателе этой дроби положительны при $x > 4$.

При переходе через каждую из отмеченных точек один и только один из этих множителей меняет знак, и поэтому знак дроби каждый раз меняется. Учитывая это, расставим знаки дроби (10). Итак, множество решений — объединение интервалов $(-\infty, -3)$, $(-2, 1)$ и $(4, +\infty)$.

Ответ. $x < -3$, $-2 < x < 1$, $x > 4$. ▲

Рассмотренный способ решения неравенств называется *методом интервалов*. Он применяется обычно при решении рациональных неравенств, т. е. неравенств вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leqslant 0, \tag{11}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Пример 11. Решить неравенство

$$1 + \frac{2}{x+2} \leqslant \frac{7}{8-x}. \tag{12}$$

Δ Преобразуем неравенство (12) к стандартному виду (11):

$$1 + \frac{2}{x+2} + \frac{7}{x-8} \leqslant 0,$$

$$\frac{(x+2)(x-8) + 2(x-8) + 7(x+2)}{(x+2)(x-8)} \leqslant 0,$$

$$\frac{x^2+3x-18}{(x+2)(x-8)} \leqslant 0,$$

$$\frac{(x+6)(x-3)}{(x+2)(x-8)} \leqslant 0. \tag{13}$$

Неравенство (13) равносильно неравенству (12). Отметив на числовой оси точки -6, -2, 3, 8 (см. рис. 5), определим знаки рациональной функции, стоящей в левой части неравенства (13).

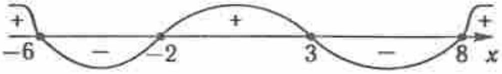


Рис. 5

Заметим, что числа -6 и 3 являются решениями неравенства (13), а числа -2 и 8 не принадлежат множеству решений.

Ответ. $-6 \leqslant x < -2$, $3 \leqslant x < 8$. ▲

Пример 12. Решить неравенство

$$\frac{(2x^2-3x-9)(x-1)^5}{(3x-7)(x-2)^2(2x^2-5x+4)} \geqslant 0.$$

Δ Квадратный трехчлен $2x^2-3x-9$ имеет корни $x = -\frac{3}{2}$ и $x = 3$. Поэтому $2x^2-3x-9 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-3)$. Квадратный трехчлен $2x^2-5x+4$ принимает положительные значения при всех $x \in \mathbb{R}$, так как его дискриминант $D = 25-32 < 0$, а старший коэффициент положителен.

Обозначим левую часть неравенства через $P(x)$. Функция $P(x)$ не определена при $x = \frac{7}{3}$ и $x = 2$ и меняет знак при переходе через точки

$-\frac{3}{2}$, 1, $\frac{7}{3}$ и 3. Числа $-\frac{3}{2}$, 1 и 3 (корни уравнения $P(x)=0$) являются решениями данного неравенства. Строгое неравенство $P(x)>0$ при $x \neq 2$ равносильно неравенству $\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-3)>0$. Применяя метод интервалов (см. рис. 6), находим все решения исходного неравенства с учетом того, что числа $-\frac{3}{2}$, 1 и 3 принадлежат множеству решений неравенства, а число 2 не принадлежит этому множеству.

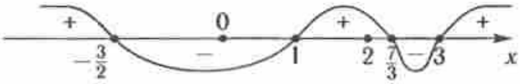


Рис. 6

Ответ. $x \leqslant -\frac{3}{2}$, $1 \leqslant x < 2$, $2 < x < \frac{7}{3}$, $x \geqslant 3$. ▲

Пример 13. Решить неравенство

$$\frac{x^2-8|x|+12}{x^2-6x+9}<0.$$

△ Рассмотрим два случая: 1) $x \leqslant 0$; 2) $x > 0$.

1) Если $x \leqslant 0$, то $|x|=-x$ и неравенство примет вид

$$\frac{x^2+8x+12}{x^2-6x+9}<0.$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$\frac{(x+6)(x+2)}{(x-3)^2}<0.$$

Отсюда находим $-6<x<-2$.

2) Если $x>0$, то исходное неравенство (при условии $x \neq 3$) равносильно неравенству $(x-6)(x-2)<0$, откуда получаем $2<x<3$, $3<x<6$.

Ответ. $-6<x<-2$, $2<x<3$, $3<x<6$. ▲

4. Расположение корней квадратного трехчлена на числовой оси

Пусть квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ имеет корни x_1 и x_2, $x_0=-\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы $y=ax^2+bx+c$, M и K — заданные числа.

Справедливы следующие утверждения, связанные с расположением точек x_1 и x_2 на числовой оси.

1°. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше M ($x_1 < M$, $x_2 < M$), необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} < M, \\ af(M) > 0, \end{cases} \tag{14}$$

где $f(M) = aM^2 + bM + c$ — значение трехчлена при $x = M$ (рис. 7 и 8).

В частности, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ ($M = 0$) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ ab > 0, \\ ac > 0. \end{cases} \tag{15}$$

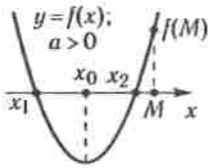


Рис. 7

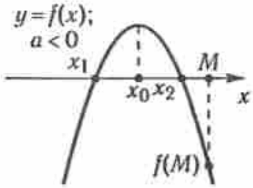


Рис. 8

2°. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше M ($x_1 > M$, $x_2 > M$), необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > M, \\ af(M) > 0 \end{cases} \tag{16}$$

(*рис.* 9 *и* 10).

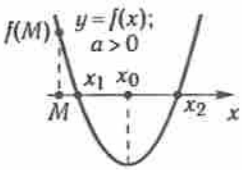


Рис. 9

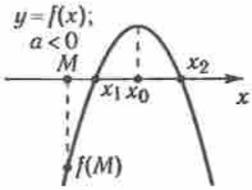


Рис. 10

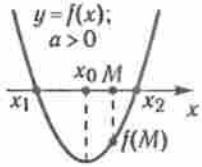


Рис. 11

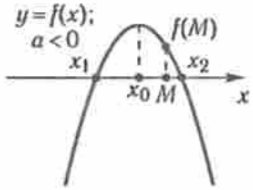


Рис. 12

В частности, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ ab < 0, \\ ac > 0. \end{cases} \tag{17}$$

3°. *Для того чтобы число M было расположено между корнями квадратного трехчлена $(x_1 < M < x_2)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$af(M) < 0 \tag{18}$$

(*рис.* 11 *и* 12).

4°. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена лежали в интервале $(K; M)$, т. е. $K < x_1 < M$, $K < x_2 < M$, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \geqslant 0, \\ K < -\frac{b}{2a} < M, \\ af(M) > 0, \\ af(K) > 0 \end{cases} \tag{19}$$

(*рис.* 13 *и* 14).

Заметим, что в условиях (19) *последние два неравенства можно заменить одним неравенством*

$$f(K)f(M) > 0.$$

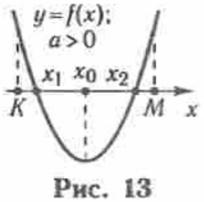


Рис. 13

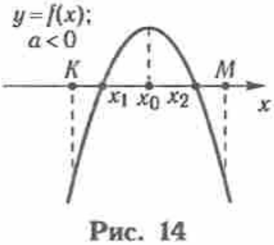


Рис. 14

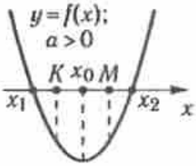


Рис. 15

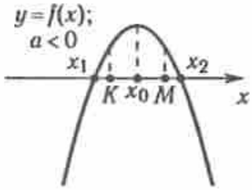


Рис. 16

5°. *Для того чтобы отрезок* $[K;M]$ *лежал в интервале* (x_1,x_2), *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{cases} af(K)<0, \\ af(M)<0 \end{cases} \tag{20}$$

(*рис.* 15 *и* 16).

Ограничимся доказательством утверждения 1°. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни x_1 и x_2 тогда и только тогда, когда

$$D=b^2-4ac\geqslant 0. \tag{21}$$

Эти корни удовлетворяют условиям $x_1<M$, $x_2<M$ тогда и только тогда, когда

$$x_1-M<0, \quad x_2-M<0. \tag{22}$$

Неравенства (22) выполняются в том и только в том случае, когда, наряду с условием (21), справедливы неравенства

$$\begin{cases} (x_1-M)+(x_2-M)<0, \\ (x_1-M)(x_2-M)>0. \end{cases} \tag{23}$$

Используя формулы Виета

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

получим систему неравенств

$$\begin{cases} -\frac{b}{a}<2M, \\ \frac{c}{a}+M\frac{b}{a}+M^2>0, \end{cases}$$

в которой второе неравенство равносильно неравенству $af(M)>0$.

Итак, корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c удовлетворяют условиям $x_1<M$, $x_2<M$ тогда и только тогда, когда коэффициенты a, b, c удовлетворяют системе неравенств (14).

Аналогично доказываются утверждения 2°–5°, связанные с расположением корней квадратного трехчлена.

Пример 14. Найти все значения r, при которых корни уравнения

$$(r-1)x^2-2rx+r+3=0 \qquad (24)$$

положительны.

$\triangle$ Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ положительны тогда и только тогда, когда выполняются условия (17). Для уравнения (24) при $r\neq 1$ эти условия записываются в виде:

$$\begin{cases} 4r^2-4(r-1)(r+3)\geqslant 0,\\ -2r(r-1)<0,\\ (r-1)(r+3)>0. \end{cases} \qquad (25)$$

Первые два неравенства системы (25) равносильны соответственно неравенствам

$$2r-3\leqslant 0, \quad r(r-1)>0. \qquad (26)$$

Первое из неравенств (26) справедливо при $r\leqslant\frac{3}{2}$ (см. рис. 17), второе — при $r<0$, а также при $r>1$. Решениями третьего неравенства системы (25) являются значения r такие, что $r<-3$ или $r>1$. Таким образом, если $r\neq 1$, то множество решений системы (25) — объединение промежутков $(-\infty,-3)$ и $\left(1,\frac{3}{2}\right]$.

Рис. 17

Если $r=1$, то уравнение (24) примет вид $-2x+4=0$, откуда $x=2$, т. е. корень уравнения (24) при $r=1$ положителен.

Ответ. $r<-3,\ 1\leqslant r\leqslant\frac{3}{2}$. ▲

Пример 15. Найти все значения r, при которых квадратный трехчлен

$$f(x)=rx^2-(r+1)x+2$$

имеет действительные корни x_1 и x_2 такие, что $-1<x_1<1$, $-1<x_2<1$.

$\triangle$ В силу утверждения 4° искомые значения r являются решениями системы неравенств (19), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} (r+1)^2-8r\geqslant 0,\\ -1<\frac{r+1}{2r}<1,\\ r(2r+3)>0,\\ r>0. \end{cases}$$

Эта система равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} r^2-6r+1\geqslant 0, \\ r>0, \\ r>1; \end{cases} \qquad \begin{cases} (r-(3+2\sqrt{2}))(r-(3-2\sqrt{2}))\geqslant 0, \\ r>1. \end{cases}$$

Так как $3-2\sqrt{2}<1$, то в результате получаем $r\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

Ответ. $r\geqslant 3+2\sqrt{2}$. ▲

5. Иррациональные неравенства

Иррациональными называют неравенства, в которых неизвестное или рациональная функция от неизвестного содержатся под знаками радикалов.

При решении иррационального неравенства следует сначала найти его ОДЗ, т. е. все значения неизвестного, при которых обе части неравенства определены (имеют смысл).

Иррациональное неравенство обычно сводят к рациональному, возводя обе его части в натуральную степень. Так как при этой операции может получиться неравенство, неравносильное исходному, то следует установить, при каких значениях неизвестного левая и правая части заданного неравенства принимают положительные или отрицательные значения.

Если обе части неравенства неотрицательны на некотором множестве, то при возведении их в натуральную степень получится неравенство, равносильное исходному на этом множестве.

Пример 16. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+x-2}>\sqrt{3}-\frac{7}{4}.$$

△ Множество E допустимых значений (ОДЗ неравенства) определяется условием $x^2+x-2\geqslant 0$, откуда находим $x\leqslant -2$, $x\geqslant 1$. При всех $x\in E$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая часть — отрицательное число, так как $3<\frac{49}{16}$. Следовательно, все значения $x\in E$, и только эти значения являются решениями неравенства.

Ответ. $x\leqslant -2$, $x\geqslant 1$. ▲

Пример 17. Решить неравенство

$$\sqrt{6-x-x^2}<\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

△ Заметим, что $\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{1}{2\sqrt{3}}<0$, поскольку $\frac{2}{25}<\frac{1}{12}$, а левая часть неравенства неотрицательна. Поэтому данное неравенство не имеет решений.

Ответ. Нет решений. ▲

Пример 18. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+4x-5} < 10-2x. \qquad (27)$$

△ Первый способ. Область E допустимых значений неравенства определяется условием

$$x^2+4x-5 \geqslant 0,$$

откуда следует, что множество E — объединение промежутков $(-\infty,-5]$ и $[1,+\infty)$. Числа из множества E, и только они, могут быть решениями.

Заметим, что левая часть исходного неравенства неотрицательна при всех $x \in E$, а правая часть меняет знак при переходе через точку $x=5$. Поэтому следует рассмотреть два возможных случая: $x<5$ и $x \geqslant 5$.

1) Если $x \geqslant 5$, то $10-2x \leqslant 0$, и исходное неравенство не имеет решений, так как его левая часть неотрицательна.
2) Если $x<5$ и $x \in E$, то обе части исходного неравенства определены и неотрицательны, поэтому оно равносильно неравенству

$$x^2+4x-5 < (10-2x)^2,$$

которое равносильно неравенству

$$3x^2-44x+105>0.$$

Так как уравнение

$$3x^2-44x+105=0 \qquad (28)$$

имеет корни $x_{1,2} = \dfrac{22 \pm \sqrt{484-315}}{3} = \dfrac{22 \pm 13}{3}$, т. е. $x_1=3$, $x_2=\dfrac{35}{3}$, то множество E_1 решений неравенства $3x^2-44x+105>0$ — объединение интервалов $(-\infty,3)$ и $\left(\dfrac{35}{3};+\infty\right)$. Условиям $x<5$ и $x \in E_1$ удовлетворяют значения x из промежутков $(-\infty,-5]$ и $[1,3)$.

Замечание. Рассуждения, приведенные при решении неравенства примера 18, дают основания утверждать, что неравенство

$$\sqrt{\varphi(x)} < g(x)$$

равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Второй способ. Построим графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, где $f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}$, $g(x)=10-2x$ (см. рис. 18).

Решить неравенство (27) — это значит найти все значения $x \in E$, при которых график функции $f(x)$ лежит ниже графика функции $g(x)$.

Абсциссы точек пересечения этих графиков — корни уравнения $f(x) = g(x)$. Следствием последнего уравнения служит уравнение $f^2(x) = g^2(x)$, т. е. уравнение $x^2 + 4x - 5 = (10 - 2x)^2$, которое равносильно уравнению (28). Из рисунка видно, что прямая $y = 10 - 2x$ пересекает график функции $y = f(x)$ только в точке A, абсцисса x_0 которой — корень уравнения (28), принадлежащий отрезку $[1, 5]$, т. е. $x_0 = x_1 = 3$. Заметим, что корень x_2 уравнения (28) — это корень уравнения $-f(x) = g(x)$, т. е. абсцисса точки B, в которой прямая $y = 10 - 2x$ пересекает график функции $y = -f(x)$.

Из рисунка заключаем, что график функции $f(x)$ лежит ниже графика функции $g(x)$ на промежутках $(-\infty, -5]$ и $[1, 3)$.

Ответ. $x \leqslant -5$, $1 \leqslant x < 3$. ▲

Пример 19. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} > x - 2.$$

△ Область E допустимых значений данного неравенства определяется условием $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$, а множество решений последнего неравенства — объединение промежутков $(-\infty, -1]$ и $[3, +\infty)$. Левая часть исходного неравенства неотрицательна при всех $x \in E$, а правая часть меняет знак при переходе через точку $x = 2$. Поэтому следует рассмотреть два возможных случая: $x < 2$ и $x \geqslant 2$.

1) Если $x < 2$, то $x - 2 < 0$, а левая часть неравенства неотрицательна при всех $x \in E$. В этом случае все значения x такие, что $x \in E$ и $x < 2$, т. е. $x \in (-\infty, -1]$ являются решениями неравенства.
2) Пусть $x \geqslant 2$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 2x - 3 > (x - 2)^2$, откуда $x > \frac{7}{2}$. В этом случае числа из промежутка $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ являются решениями исходного неравенства.

Замечание 1. Метод решения неравенства, использованный в примере 19, основан на том, что неравенство

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Замечание 2. Решение неравенства в примере 19 можно получить, построив эскизы графиков функций $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ и $y = x - 2$ (см. рис. 19). Тогда решение сводится к нахождению корня уравнения

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 2)^2.$$

Ответ. $x \leqslant -1$, $x > \frac{7}{2}$. ▲

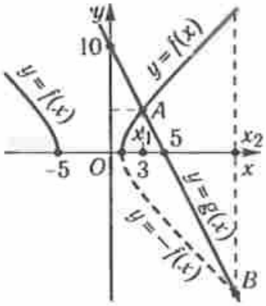


Рис. 18

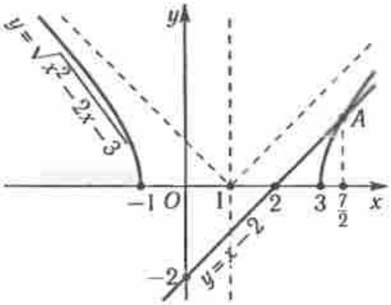


Рис. 19

Пример 20. Решить неравенство

$$\sqrt{9-\sqrt{76-12x^3}}<3-x.$$

$\triangle$ Пусть E — область определения неравенства. Тогда E — множество решений системы неравенств

$$\begin{cases}76-12x^3\geqslant 0,\\ 76-12x^3\leqslant 81,\end{cases}$$

откуда следует, что $E=\left[-\sqrt[3]{\frac{5}{12}},\sqrt[3]{\frac{19}{3}}\right]$. Так как $3>\sqrt[3]{\frac{19}{3}}$, то на множестве E правая часть неравенства положительна и исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$9-\sqrt{76-12x^3}<(3-x)^2,$$

$$x(6-x)<\sqrt{76-12x^3}. \qquad (29)$$

1) Значения $x\in E$ такие, что $x(6-x)\leqslant 0$, т. е. числа $x\in\left[-\sqrt[3]{\frac{5}{12}},0\right]$ — решения исходного неравенства, так как в этом случае левая часть неравенства (29) неположительна, а правая принимает положительные значения.

2) Пусть $x\in\left(0,\sqrt[3]{\frac{19}{3}}\right]$, тогда неравенство (29) равносильно каждому из неравенств

$$x^4-12x^3+36x^2<76-12x^3,$$

$$x^4+36x^2-76=(x^2+38)(x^2-2)<0,$$

$$x^2<2,$$

откуда $0<x<\sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2}<\sqrt[3]{\frac{19}{3}}$, то множество решений неравенства (29) — интервал $(0,\sqrt{2})$.

Ответ. $-\sqrt[3]{\frac{5}{12}}\leqslant x<\sqrt{2}$. ▲

Пример 21. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{|x^2-7x+6|-|x^2-x-2|} \geqslant 0.$$

Δ Так как неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно каждому из неравенств $f^2(x) > g^2(x)$, $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) > 0$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -x^2+x+6 \geqslant 0, \\ (2x^2-8x+4)(-6x+8) > 0. \end{cases} \tag{30}$$

Квадратный трехчлен $-x^2+x+6$ имеет корни -2 и 3, корнями квадратного трехчлена x^2-4x+2 являются числа $x_1 = 2-\sqrt{2}$ и $x_2 = 2+\sqrt{2}$, а система (30) равносильна системе

$$\left\{ \begin{aligned} &(x+2)(x-3) \leqslant 0, && (31) \\ &(x-x_1)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-x_2) < 0, && (32) \end{aligned} \right.$$

где $-2 < x_1 < \frac{4}{3} < 3 < x_2$ (см. рис. 20).

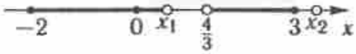


Рис. 20

Множество E_1 решений неравенства (31) — отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Множество E_2 решений неравенства (32), определяемое методом интервалов, является объединением интервалов $x < x_1$ и $\frac{4}{3} < x < x_2$, а множество решений системы (31), (32) — пересечение множеств E_1 и E_2.

Ответ. $-2 \leqslant x < 2-\sqrt{2}$, $\frac{4}{3} < x \leqslant 3$. ▲

Пример 22. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^3-22x^2+40x}}{x-4} \geqslant 3x-10.$$

Δ ОДЗ неравенства определяется условиями

$$3x^3-22x^2+40x = 3x\left(x-\frac{10}{3}\right)(x-4) \geqslant 0, \quad x \neq 4,$$

откуда

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}, \quad x > 4.$$

Обозначим $f(x) = 3\left(x-\frac{10}{3}\right)(x-4)$.

7—2549

а) Пусть $x>4$, тогда $f(x)>0$. В этом случае исходное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств

$$\sqrt{xf(x)} \geqslant f(x), \quad \sqrt{x} \geqslant \sqrt{f(x)}, \quad x \geqslant f(x),$$

$$3x^2-23x+40=3\left(x-\frac{8}{3}\right)(x-5) \leqslant 0,$$

откуда, учитывая условие $x>4$, получаем $4<x \leqslant 5$.

б) Пусть $0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$, тогда $x-4<0$, $f(x) \geqslant 0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{xf(x)} \leqslant f(x)$. Значение $x=\frac{10}{3}$ является решением этого неравенства, а если $0 \leqslant x<\frac{10}{3}$, то $f(x)>0$, и неравенство примет вид

$$3x^2-23x+40=3\left(x-\frac{8}{3}\right)(x-5) \geqslant 0,$$

откуда, с учетом условия $0 \leqslant x<\frac{10}{3}$, получаем $0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3}$.

Ответ. $0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3}$, $x=\frac{10}{3}$, $4<x \leqslant 5$. ▲

Пример 23. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{x^2+9x-162}{x-2}}>9-|x|.$$

△ Так как $x^2+9x-162=(x+18)(x-9)$, то ОДЗ неравенства — совокупность двух промежутков $-18 \leqslant x<2$, $x \geqslant 9$.

а) Если $-18 \leqslant x<-9$ или $x>9$, то левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому указанные значения x являются решениями исходного неравенства. Число $x=-9$ также является решением этого неравенства, а число $x=9$ не есть решение неравенства.

б) Пусть $-9<x<0$, тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $\frac{x^2+9x-162}{x-2}>(x+9)^2$, $x^2+9x-162<(x^2+18x+81)(x-2)$, $x^3+15x^2+36x>0$, $x(x+12)(x+3)>0$, откуда, с учетом условия $-9<x<0$, находим $-9<x<-3$.

в) Пусть $0 \leqslant x<2$, тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $\sqrt{\frac{(x+18)(9-x)}{2-x}}>(9-x)$, $\sqrt{\frac{x+18}{2-x}}>\sqrt{9-x}$, $\frac{x+18}{2-x}>9-x$, $x^2-12x<0$, откуда с учетом условия $0 \leqslant x<2$, получаем $0<x<2$.

Ответ. $-18 \leqslant x<-3$, $0<x<2$, $x>9$. ▲

Задачи

Выяснить, являются ли равносильными на множестве $\mathbb{R}$ неравенства (1–16):

1. $x^2 < 2 - x$ и $x^2 + x - 2 < 0$.

2. $4 - x^2 + 3x \geqslant 0$ и $(x-4)(x+1) \leqslant 0$.

3. $x^2 > 0$ и $x > 0$.

4. $x - 1 > 0$ и $(x-1)(x^2+4) > 0$.

5. $2x^2 < -1$ и $-(1+3x^2) > 0$.

6. $\sqrt{x^2+1} > 1$ и $x > 0$.

7. $x^2 > x$ и $x^2 + \dfrac{1}{x-2} > x + \dfrac{1}{x-2}$.

8. $x^2 > 4$ и $x^4 > 16$.

9. $\dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{x^4+1}$ и $x^2 > x^4$.

10. $\sqrt{x^2} < 1$ и $x < 1$.

11. $(x-1)^2 < 4$ и $-1 < x < 3$.

12. $|x+1| < |x-1|$ и $x < 0$.

13. $\dfrac{1}{(x+4)^2} > \dfrac{1}{(x+2)^2}$ и $(x+4)^2 < (x+2)^2$.

14. $\dfrac{x-2}{x^2(x-5)} < 0$ и $(x-2)(x-5) < 0$.

15. $x^3 < 8$ и $x < 2$.

16. $\dfrac{x-3}{x+1} \geqslant 0$ и $(x-3)(x+1) \geqslant 0$.

Решить неравенство (17–20):

17. $(x+2)^2 < 9$.

18. $(x+3)^2 > 4$.

19. $|x+2| > |x-4|$.

20. $|2x+3| < |2x-5|$.

Решить систему неравенств (21–22):

21. $\begin{cases} 2x - 7 < 0, \\ |x+1| > 3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} (x+2)^2 > 4, \\ (x-1)^2 < 36. \end{cases}$

Решить неравенство (23–30):

23. $x^2 + 7 < 4x$.

24. $4x^2 + 1 \geqslant 4x$.

25. $9x^2 - 12x + 4 \leqslant 0$.

26. $2x^2 - 7x + 7 > 0$.

27. $5x + 6 \geqslant 6x^2$.

28. $x^2 - x - 2 > 0$.

29. $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$.

30. $4x^2 - 37x^2 - 2 > 0$.

Решить неравенство (31–34):

31. $|2x+3| < x+7$.

32. $|3x+1| > 5 - 4x$.

33. $|x+2| \geqslant |1-2x|$.

34. $|x+2| < |x-1| + x - \dfrac{3}{2}$.

35. Найти все значения r, при которых неравенство $rx^2 + 2(r+2)x + 2r + 4 < 0$ справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$.

36. Найти все значения a, при которых для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство:

1) $\dfrac{8x^2 - 20x + 16}{4x^2 - 10x + 7} \leqslant a$; 2) $\dfrac{3x^2 - 4x + 8}{9x^2 - 12x + 16} \geqslant a$.

37. Найти все значения a, при которых для всех $x \in \mathbb{R}$ является верным двойное неравенство: $-3 < \dfrac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$.

Решить неравенство (38–45):

38. $|x^2 + 2x - 3| > x$.

39. $|x^2 + x + 1| \leqslant |x^2 + 3x + 4|$.

40. $|x^2 + 5x| < 6$.

41. $x^2 - |x| > 2$.

42. $|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 20$.

43. $|x^2 + 2x - 3| + 3(x+1) < 0$.

44. $|x^2 - x - 6| > x + 3$.

45. $|x^2 - 2|x| - 3| < 2$.

Решить неравенство (46–60):

46. $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 8x + 7} > 0$.

47. $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 12} \leqslant 0$.

48. $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 3} < 0$.

49. $\dfrac{9}{x+1}+1<\dfrac{14}{x-1}$. **50.** $\dfrac{5-4x}{3x^2-x-4}<4$. **51.** $\dfrac{17-42x}{5x^2-7x+2}>6$.

52. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{2x^2-5x-3}>0$. **53.** $\dfrac{x^4-8x^2-9}{x^3-1}\leqslant 0$. **54.** $\left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|>2$.

55. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2+6x+9}<0$. **56.** $\dfrac{|x+3|}{|x+2|-1}\geqslant 1$. **57.** $\dfrac{|1+2x|}{x^2+x-2}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

58. $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6}\geqslant 2$. **59.** $\dfrac{x^2-|x|-12}{x+3}\leqslant 2x$. **60.** $\dfrac{|x+3|+x}{x+2}\geqslant 1$.

61. Найти все значения r, при которых вершины двух парабол $y=x^2-2(r+1)x+1$ и $y=rx^2-x+r$ лежат по разные стороны от прямой $y=\dfrac{3}{4}$.

62. Найти все значения a, при которых вершины двух парабол $y=x^2+4ax-a$ и $y=-ax^2+4x+a+2$ лежат по одну сторону от прямой $y=-3$.

63. Найти все значения b, при которых квадратный трехчлен $x^2+2bx+4b$ имеет действительные корни x_1 и x_2 такие, что $x_1>-1$, $x_2>-1$.

64. Найти все значения b, при которых квадратный трехчлен x^2-bx+2 имеет действительные корни, принадлежащие интервалу $(0,3)$.

65. Найти все значения b, при которых квадратный трехчлен $x^2-2bx-1$ имеет действительные корни x_1 и x_2 такие, что $|x_1|<2$, $|x_2|<2$.

Решить неравенство (**66–83**):

66. $\sqrt{x^2-3x+2}<2x-5$. **67.** $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

68. $\sqrt{x^2+x-12}>6-x$. **69.** $\dfrac{\sqrt{7x-x^2-10}}{x-3}\geqslant 0$.

70. $\sqrt{3x^2+8x-3}>\dfrac{1+2x}{3}$. **71.** $\sqrt{2x^2+7x-4}>x-\dfrac{1}{4}$.

72. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x-1}$. **73.** $\sqrt{x+3}<\sqrt{7-x}+\sqrt{10-x}$.

74. $\sqrt{x^2-5x+6}<1+\sqrt{x^2-x+1}$. **75.** $\sqrt{x^2-4x+3}<1+\sqrt{x^2+2x+2}$.

76. $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-6x+5|-|x^2-2x-3|}\leqslant 0$. **77.** $\dfrac{\sqrt{-x^2-6x-5}}{|x^2+x-2|-|x^2+7x+6|}\geqslant 0$.

78. $\dfrac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$. **79.** $\dfrac{1}{2-\sqrt{x^2+3x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+7}}$.

80. $\sqrt{\dfrac{500+30x-2x^2}{2x+5}}>10-|x|$. **81.** $\sqrt{\dfrac{x^2+30x-675}{x-3}}>15-|x|$.

82. $\dfrac{\sqrt{3x^3-27x^2+60x}}{x-5}\geqslant 3x-12$. **83.** $\dfrac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6}\geqslant 2x-10$.

Ответы

1. Да. **2.** Да. **3.** Нет. **4.** Да. **5.** Да. **6.** Нет. **7.** Нет. **8.** Да. **9.** Да. **10.** Нет. **11.** Да. **12.** Да. **13.** Нет. **14.** Нет. **15.** Да. **16.** Нет. **17.** $-5<x<1$. **18.** $x<-5$, $x>-1$. **19.** $x>1$. **20.** $x<\frac{1}{2}$. **21.** $x<-4$, $2<x<\frac{7}{2}$. **22.** $-5<x<-4$, $0<x<7$. **23.** Нет решений. **24.** $x\neq\frac{1}{2}$. **25.** $x=\frac{2}{3}$. **26.** $x\in\mathbb{R}$. **27.** $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$. **28.** $x<-1$, $x>2$. **29.** $x<-2$, $x>2$. **30.** $-3<x<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x<3$. **31.** $-\frac{10}{3}<x<4$. **32.** $x>\frac{4}{7}$. **33.** $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 3$.

34. $x > \frac{9}{2}$. **35.** $r < -3$. **36.** 1) $a \geqslant \frac{14}{3}$; 2) $a \leqslant \frac{1}{3}$. **37.** $-1 < a < 2$. **38.** $x < \frac{\sqrt{21}-3}{2}$, $x > \frac{\sqrt{13}-1}{2}$. **39.** $x \geqslant -\frac{3}{2}$. **40.** $-6 < x < -3$, $-2 < x < 1$. **41.** $x < -2$, $x > 2$. **42.** $x < -\frac{1}{2}$, $x \geqslant 5$. **43.** $-5 < x < -2$. **44.** $x < 1-\sqrt{10}$, $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, $x > 1+\sqrt{10}$. **45.** $-(1+\sqrt{6}) < x < -(1+\sqrt{2})$, $1+\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{6}$. **46.** $x < 1$, $x > 7$. **47.** $-4 < x \leqslant -2$, $1 \leqslant x < 3$. **48.** $-1 < x < -\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2} < x < 2$. **49.** $-3 < x < -1$, $1 < x < 8$. **50.** $x < -\frac{\sqrt{7}}{2}$, $-1 < x < \frac{\sqrt{7}}{2}$, $x > \frac{4}{3}$. **51.** $-\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{2}{5}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} < x < 1$. **52.** $-\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 3$. **53.** $x \leqslant -3$, $1 < x \leqslant 3$. **54.** $x < -1$, $-1 < x < -\frac{3}{4}$. **55.** $-5 < x < -3$, $-3 < x < -2$, $2 < x < 5$. **56.** $x < -3$, $x > -1$. **57.** $x \leqslant -5$, $-2 < x < 1$, $x \geqslant 4$. **58.** $-2 < x \leqslant -\frac{3}{2}$. **59.** $x > -3$. **60.** $-5 \leqslant x \leqslant -2$, $x \geqslant -1$. **61.** $-\frac{3}{2} < r < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4} < r < 0$, $r > 1$. **62.** $-\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4} < a < 0$, $a > 1$. **63.** $-\frac{1}{2} < b \leqslant 0$. **64.** $2\sqrt{2} \leqslant a < \frac{11}{3}$. **65.** $-\frac{3}{4} \leqslant b \leqslant \frac{3}{4}$. **66.** $x > \frac{17+\sqrt{13}}{6}$. **67.** $x \geqslant 4$. **68.** $x > \frac{48}{13}$. **69.** $3 < x \leqslant 5$, $x = 2$. **70.** $x \leqslant 3$, $x > \frac{30\sqrt{2}-34}{23}$. **71.** $x \leqslant -4$, $x > \frac{\sqrt{290}-15}{4}$. **72.** $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$. **73.** $-3 \leqslant x < 6$. **74.** $\frac{7-\sqrt{13}}{6} < x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$. **75.** $\frac{1-\sqrt{17}}{8} < x \leqslant 1$, $x \geqslant 3$. **76.** $1 \leqslant x < 2$, $2+\sqrt{3} < x \leqslant 6$. **77.** $-5 \leqslant x < -2-\sqrt{2}$, $-\frac{4}{3} < x \leqslant -1$. **78.** $x < -1$, $x = 0$, $x > 4$. **79.** $x < -4$, $x = -3$, $x > 1$. **80.** $x < -10$, $-\frac{5}{2} < x < 0$, $\frac{5}{2} < x \leqslant 25$. **81.** $-45 \leqslant x < -5$, $0 < x < 3$, $x > 15$. **82.** $0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$, $x = 4$, $5 < x \leqslant 6$. **83.** $0 \leqslant x \leqslant 4$, $x = 5$, $6 < x \leqslant \frac{15}{2}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

§1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ. ГРАДУСНАЯ И РАДИАННАЯ МЕРЫ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

1. Тригонометрическая окружность

Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в начале прямоугольной системы координат Oxy. Окружность радиуса 1 называют *единичной окружностью.* Пусть луч OP_α составляет угол α с положительным направлением оси Ox. Будем считать угол α *положительным*, если луч OP_α получен из луча OP_0 (рис. 1) поворотом в направлении, противоположном движению часовой стрелки, и *отрицательным*, если поворот осуществлялся в направлении по ходу часовой стрелки. В дальнейшем будем говорить, что точка P_α получена из точки P_0 поворотом вдоль окружности на угол α.

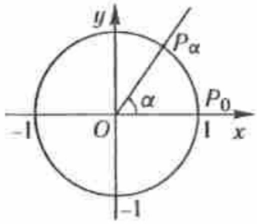


Рис. 1

Тригонометрической окружностью (*тригонометрическим кругом*) называют окружность (круг) радиуса 1 с выбранными началом отсчета P_0 для измерения углов и направлением обхода.

2. Градусная и радианная меры угла

Существует несколько способов измерения угловых величин (углов, дуг). Как правило, за единицу измерения принимают некоторый определенный угол и с его помощью измеряют другие углы. Так, например, в технике за единицу измерения углов принят *полный оборот*, в мореплавании используется *румб*, равный $\frac{1}{32}$ части полного оборота, в артиллерии *большое деление угломера*, равное $\frac{1}{60}$ полного оборота.

В геометрии более трех тысяч лет используют градусную систему измерения (меру) углов. В градусной системе единицами измерения служат *градус*, *минута*, *секунда*. Под одним градусом 1° понимают $\frac{1}{360}$ часть полного оборота. Таким образом, полный оборот составляет 360°. Градус, минута и секунда связаны, соответственно, следующими соотношениями:

$$1^\circ = 60', \quad 1' = 60''.$$

Рассматривая поворот луча OP_0 относительно точки O (рис. 1), отметим, что он будет совпадать с лучом OP_α каждый раз после того, как он сделает сначала k полных оборотов, а потом еще повернется в том же направлении на угол α. Следовательно, существует бесконечно много углов с начальной стороной OP_0 и конечной OP_α, и все они записываются формулой

$$360^\circ \cdot k + \alpha, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

В связи с развитием техники и необходимостью использования в расчетах современных математических методов возникла новая универсальная система измерения угловых величин — радианная. В этой системе для измерения угловых величин и для обозначения единицы системы измерения используется *радиан* (1 рад).

Рассмотрим окружность радиуса R и отметим на ней дугу P_0P_1 длины R и угол P_0OP_1 (рис. 2).

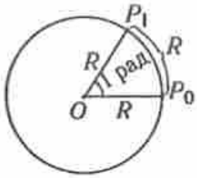


Рис. 2

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется *углом в один радиан*.

Связь между градусной и радианной системами измерения описывается следующим образом. При повороте луча OP_0 точка P_α движется по окружности, описывая дугу P_0P_α. Эта дуга может быть выражена в градусах формулой $360^\circ \cdot k + \alpha$, где $k \in \mathbb{Z}$, или в радианах длиной дуги l. Поскольку длина окружности радиуса 1 равна 2π рад и ей соответствует 360°, а дуга длины l рад соответствует углу $360^\circ \cdot k + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, то из пропорции

$$\frac{l}{2\pi} = \frac{360^\circ \cdot k + \alpha,}{360^\circ}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

следует, что

$$l = 2\pi k + \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Найдем градусную меру угла в 1 радиан. Так как дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной R стягивает угол в π раз меньший, т. е. $1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17'$.

Пусть угол содержит α радиан, тогда его градусная мера равна:

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha\right)^\circ \quad (1)$$

(*формула перевода радианной меры угла в градусную*);

Пример 1. Найти градусную меру угла, равного:

1) $\frac{3\pi}{4}$ рад; 2) $\frac{7\pi}{12}$ рад.

△ По формуле (1) находим:

1) $\frac{3\pi}{4} \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4}\right)^\circ = 135^\circ$; 2) $\frac{7\pi}{12} \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{7\pi}{12}\right)^\circ = 105^\circ$. ▲

Найдем радианную меру угла в $1°$. Так как угол $180°$ равен π рад, то $1° = \frac{\pi}{180}$ рад.

Пусть угол содержит α градусов, тогда его радианная мера равна:

$$\alpha° = \left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha\right) \text{ рад} \quad \text{(формула перевода градусной меры угла в радианную).} \qquad (2)$$

Пример 2. Найти радианную меру угла, равного:
1) $15°$; 2) $144°$.

△ По формуле (2) находим:

1) $15° = \left(\frac{\pi}{180} \cdot 15\right)$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад; 2) $x = \left(\frac{\pi}{180} \cdot 144\right)$ рад $= \frac{4\pi}{5}$ рад. ▲

Замечание. Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад стягивает дугу длиной, равной радиусу R, то угол в α рад стягивает дугу длиной

$$l = \alpha R. \qquad (3)$$

Следовательно, радианная мера центрального угла равна отношению длины стягивающей его дуги к радиусу окружности:

$$\frac{\alpha R}{R} = \alpha.$$

Пример 3. Конец минутной стрелки Кремлевских курантов движется по окружности радиуса $R \approx 3{,}06$ м. Какой путь проходит конец стрелки за 20 мин?

△ За 20 мин стрелка поворачивается на угол $\frac{2\pi}{3}$ рад. По формуле (3) при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ рад находим:

$$l = \frac{2\pi}{3} R \approx \frac{2 \cdot 3{,}14}{3} \cdot 3{,}06 \text{ м} \approx 6{,}4 \text{ м}. \qquad ▲$$

Замечание. Наиболее простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности $R = 1$. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, т. е. $l = \alpha$. Этим объясняется удобство применения радианной меры измерения углов в математике, физике, механике и т. д.

Следует также отметить, что недостаток радианной меры заключается в том, что величина многих углов в этом случае выражается иррациональным числом. Например, прямой угол $\frac{\pi}{2} = 1{,}570796\ldots$ радиан. Для упрощения записи значения многих углов записывают в долях числа π. Например, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{12}$, $1{,}2\pi$, $-0{,}33\pi$ и т. д.

Задачи

1. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:
1) 315°; 2) -240°; 3) 210°; 4) 135°; 5) 120°; 6) 75°;
7) -72°; 8) 18°; 9) 15°; 10) -6°; 11) 1°.

2. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:
1) $-\frac{7\pi}{4}$; 2) $\frac{4\pi}{3}$; 3) $-\frac{20\pi}{3}$; 4) $\frac{13\pi}{15}$; 5) $-\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{4\pi}{5}$;
7) $\frac{4\pi}{15}$; 8) $\frac{5\pi}{36}$; 9) $\frac{\pi}{20}$; 10) $\frac{\pi}{15}$; 11) $-\frac{13\pi}{180}$.

3. Вычислить угловую скорость (в радианах в час) вращения
1) часовой стрелки; 2) минутной стрелки.

4. Определить в градусах величину угла, на который повернулась минутная стрелка часов, и определить путь, который проходит ее конец, движущийся по окружности радиуса 2 см, за:
1) 5 мин; 2) 18 мин; 3) 1 ч 15 мин; 4) 3 ч 24 мин.

5. Радиус окружности равен 1,5 см. Найти:
1) градусную и радианную меры угла, стягиваемого дугой окружности длиной 4;
2) длину дуг окружности, стягивающих углы величиной 135° и $\frac{7\pi}{6}$.

6. Колесо автомобиля радиуса 0,5 м вращается с постоянной скоростью $\frac{80}{3}$ рад/с.
1) Какое расстояние проедет автомобиль за 1 минуту?
2) За какое время автомобиль проедет путь, равный 12 км?

7. При полном обороте зубчатого колеса другое колесо совершает два полных оборота в противоположном направлении. На какой угол повернется второе колесо, если первое повернулось на: 1)330°; 2)900°; 3) 1550°?

8. Выразить углы правильного n-угольника в градусах и радианах, если:
1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=5$; 4) $n=8$; 5) $n=12$.

9. Углы треугольника относятся между собой как $2:3:4$. Выразить углы этого треугольника:
1) в градусах; 2) в радианах.

10. Определить градусную и радианную меры углов четырехугольника, если они относятся как $7:8:9:12$.

11. Каждый из следующих углов представить в виде суммы $360^\circ \cdot k + \alpha$, где $k \in \mathbb{Z}$ и α — неотрицательный угол, меньший 360°:
1) 760°; 2) 510°; 3) -980°; 4) 1080°;
5) 3780°; 6) -750°; 7) -1250°; 8) -1040°.

12. Вывести формулу площади кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад $(0 < \alpha < \pi)$.

13. Заполнить таблицу для сектора:

Угол, °	30					
Угол, рад		$\frac{\pi}{5}$			22	
Радиус, см	2		10	5		
Длина дуги, см		2	5			10
Площадь сектора, см^2				50	25	50

Ответы

1. 1) $\frac{7\pi}{4}$; 2) $-\frac{4\pi}{3}$; 3) $\frac{7\pi}{6}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $\frac{5\pi}{12}$; 7) $-\frac{2\pi}{5}$; 8) $\frac{\pi}{10}$; 9) $\frac{\pi}{12}$; 10) $-\frac{\pi}{30}$; 11) $\frac{\pi}{180}$. **2.** 1) $-345°$; 2) $240°$; 3) $-1200°$; 4) $156°$; 5) $-120°$; 6) $-144°$; 7) $48°$; 8) $25°$; 9) $9°$; 10) $12°$; 11) $-13°$. **3.** 1) 2π рад/час; 2) $\frac{\pi}{30}$ рад/час. **4.** 1) $30°$ и $\frac{\pi}{3}$ см; 2) $108°$ и $\frac{6\pi}{5}$ см; 3) $450°$ и 5π см; 4) $1224°$ и $\frac{26\pi}{3}$ см. **5.** 1) $\left(\frac{540}{\pi}\right)^{\circ}$ или 3 рад; 2) $\frac{9\pi}{8}$ см и $\frac{7\pi}{4}$ см. **6.** 1) 800 м; 2) 15 мин. **7.** 1) $-660°$; 2) $-1800°$; 3) $-3100°$. **8.** 1) $60°$ или $\frac{\pi}{3}$; 2) $90°$ или $\frac{\pi}{2}$; 3) $108°$ или $\frac{3\pi}{5}$; 4) $135°$ или $\frac{3\pi}{4}$; 5) $150°$ или $\frac{5\pi}{6}$. **9.** 1) $40°, 60°, 80°$; 2) $\frac{2\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}$. **10.** $70°, 80°, 90°, 120°$ или $\frac{7\pi}{18}, \frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$. **11.** 1) $2\cdot 360° + 40°$; 2) $360° + 150°$; 3) $-3\cdot 360° + 100°$; 4) $3\cdot 360°$; 5) $10\cdot 360° + 180°$; 6) $-3\cdot 360° + 330°$; 7) $-4\cdot 360° + 190°$; 8) $-3\cdot 360° + 40°$. **12.** $\frac{R^2}{2}\cdot\alpha$.

§ 2. КООРДИНАТЫ ТОЧЕК ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ОКРУЖНОСТИ

1. Координаты точек на тригонометрической окружности

Использование радианной меры при измерении углов позволяет для каждой точки P_α тригонометрической окружности указать длину дуги P_0P_α. Это дает возможность определить отображение множества действительных чисел $\mathbb{R}$ на единичную окружность, т. е. поставить в соответствие каждой точке P_α действительное число. Это можно осуществить следующим образом.

Сначала множество действительных чисел $\mathbb{R}$ отображают на координатную прямую. За единицу длины на координатной прямой принимается радиус окружности. Затем, вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P_0, «наматывают» ее на тригонометрическую окружность так, что начало координат на прямой переходит в начало отсчета углов на окружности. При этом луч, на котором отложены положительные числа, наматывается в положительном направлении, а луч, на котором отложены отрицательные числа, наматывается в отрицательном направлении (рис. 3). При этом точки координатной прямой переходят соответственно в точки окружности. Таким образом, *каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.*

Поскольку после полного оборота числам вида α и $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, соответствует одна и та же точка тригонометрической окружности, считается, что все они изображаются на окружности одной точкой. В итоге получается, что множество $\mathbb{R}$ разбивается

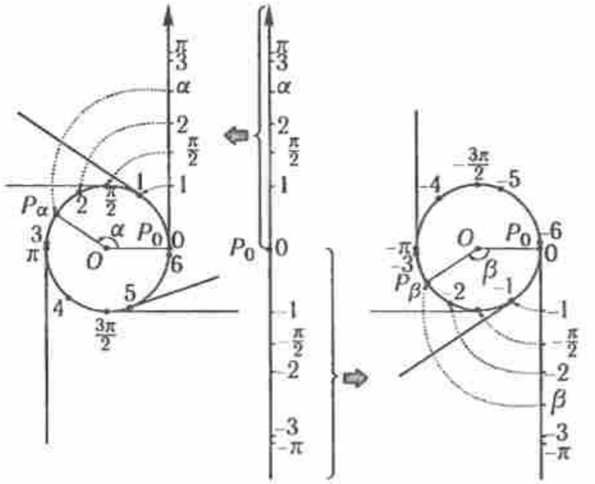


Рис. 3

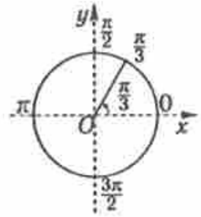


Рис. 4

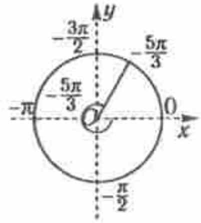


Рис. 5

на промежутки $[2\pi n; 2\pi(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $\alpha \in [2\pi n; 2\pi(n+1))$, то числу α ставят в соответствие точку P_α такую, что дуга P_0P_α, пробегаемая в положительном направлении, имеет длину $\alpha - 2\pi n$, если $\alpha > 0$ (рис. 4), а дуга $P_\alpha P_0$, пробегаемая в отрицательном направлении, имеет длину $\alpha - 2\pi(n+1)$, если $\alpha < 0$ (рис. 5). При этом на тригонометрической окружности вместо точки P_α обычно отмечают число α.

Отметим некоторые свойства приведенного отображения.

1°. Числам α и β соответствует одна и та же точка тригонометрической окружности тогда и только тогда, когда разность $\alpha - \beta$ кратна 2π, т. е. $\alpha - \beta = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2°. Точки, соответствующие противоположным числам α и $-\alpha$, симметричны относительно прямой OP_0, где точка P_0 — начало отсчета углов на окружности, а O — центр окружности.

3°. Точки, соответствующие числам α и $\alpha + \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, диаметрально противоположны, т. е. симметричны относительно центра окружности.

Пример 1. Описать взаимное расположение на тригонометрической окружности точек, соответствующих числам:

1) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{9\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{9\pi}{4}$.

△ 1) Так как $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, т. е. $\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$, то этим числам соответствует одна точка.

2) Числа $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$ противоположны, поэтому соответствующие им точки симметричны относительно оси Ox.
3) Так как $\frac{7\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$, то соответствующие им точки диаметрально противоположны.
4) Так как $-\frac{9\pi}{4}=-3\pi+\frac{3\pi}{4}$, то точки, соответствующие числам $-\frac{9\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$, диаметрально противоположны. ▲

2. Координаты точек единичной окружности в декартовой системе координат

Определим в декартовой системе координат Oxy координаты некоторых точек окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

Пример 2. Рассмотрим случаи, когда луч OP_α составляет с положительным направлением оси Ox углы:

1) 0; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{2}$.

△ 1) Если $\alpha=0$, то точка P_α совпадает с точкой $P_0=(1;0)$.
2) Пусть $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Найдем координаты точки P_α. Для этого опустим перпендикуляр $P_\alpha P$ из этой точки на ось Ox. Рассмотрим прямоугольный треугольник $OP_\alpha P$ (рис. 6). Поскольку координаты точки P_α численно равны длинам катетов этого треугольника, то остается найти длины $P_\alpha P$ и OP. Гипотенуза OP_α равна радиусу окружности, т. е. равна 1. Катет $P_\alpha P$ лежит против угла $\frac{\pi}{6}$, поэтому $P_\alpha P=\frac{1}{2}$. По теореме Пифагора для треугольника $OP_\alpha P$ получим $OP=\sqrt{OP_\alpha^2-OP^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $P_\alpha=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.
3) Пусть $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Как и в предыдущем случае, опустим перпендикуляр $P_\alpha P$ из точки P_α на ось Ox. Соответственно, катеты прямоугольного равнобедренного треугольника $OP_\alpha P$ (рис. 7) с гипотенузой 1 равны $P_\alpha P=OP=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $P_\alpha=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

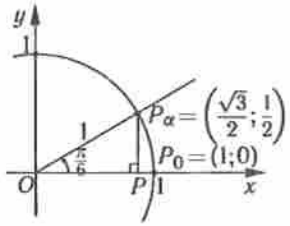


Рис. 6

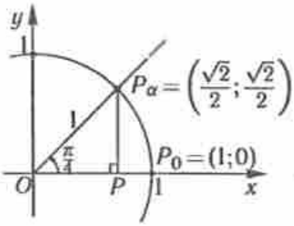


Рис. 7

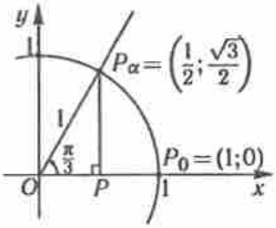


Рис. 8

4) Пусть $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Аналогично предыдущим случаям получаем $P_\alpha=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (рис. 8).

5) Если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то точка $P_\alpha=(0;1)$. ▲

Задачи

1. Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P_0=(1;0)$ на угол:

1) 3π; 2) $\frac{3\pi}{2}$; 3) $-3{,}5\pi$; 4) $-270°$; 5) $1080°$; 6) $-90°$.

2. Построить лучи OP_α, образующие с осью абсцисс заданные углы, и определить координаты точки P_α на тригонометрической окружности, если угол равен:

1) $60°$; 2) $210°$; 3) $300°$; 4) $1080°$;
5) $3780°$; 6) $-150°$; 7) $-250°$; 8) $-1040°$.

На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P_0=(1;0)$ на заданный угол (**3**–**4**):

3. 1) $\frac{\pi}{4}\pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{6}\pm 4\pi$; 3) $0{,}25\pi\pm 3\pi$; 4) $\frac{\pi}{3}\pm 5\pi$.

4. 1) $\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}$.

5. Вычислить координаты точек P_α единичной окружности, если луч OP_α составляет с положительным направлением оси Ox углы:

1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) π; 5) $\frac{7\pi}{6}$; 6) $\frac{3\pi}{2}$;
7) $\frac{7\pi}{4}$; 8) $\frac{11\pi}{6}$; 9) $-\frac{\pi}{3}$; 10) $-\frac{\pi}{2}$; 11) $-\frac{3\pi}{4}$; 12) $-\pi$.

6. Найти все углы, на которые нужно повернуть точку $P_0=(1;0)$, чтобы получить точку с заданными координатами:

1) $(1;0)$; 2) $(-1;0)$; 3) $(0;1)$; 4) $(0;-1)$.

7. Найти число x, где $0\leqslant x<2\pi$, и целое число k, такие, чтобы выполнялось равенство $a=x+2\pi k$, если:

1) $a=13{,}2\pi$; 2) $a=9\frac{2}{7}\pi$; 3) $a=\frac{13}{2}\pi$; 4) $a=-\frac{19}{3}\pi$.

8. Две точки с координатами $A=(0;1)$ и $B=(1;0)$ начинают двигаться по окружности единичного радиуса с центром в начале координат в одном направлении. Точка A за каждую минуту описывает дугу в 60°, а точка B — дугу в 42°. Через сколько минут после начала движения произойдет первое, второе, k-е совпадение точек?

9. Две точки с координатами $A=(0;1)$ и $B=(1;0)$ начинают двигаться по окружности единичного радиуса с центром в начале координат в разных направлениях. Точка A движется в отрицательном направлении, описывая в каждую минуту дугу в 20°, а точка B — в положительном направлении, описывая в каждую минуту дугу в 25°. Через сколько минут после начала движения произойдет первое, второе, k-е совпадение точек?

Ответы

1. 1) $(-1;0)$; 2) $(0;-1)$; 3) $(0;1)$; 4) $(0;1)$; 5) $(1;0)$; 6) $(0;-1)$. **2.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{7\pi}{6}$; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 4) 6π; 5) 21π; 6) $-\frac{5\pi}{6}$; 7) $-\frac{25\pi}{18}$; 8) $-\frac{52\pi}{9}$. **5.** 1) $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; 4) $(-1;\ 0)$; 5) $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $(0;-1)$; 7) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; 9) $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 10) $(0;-1)$; 11) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 12) $(-1;0)$. **6.** 1) $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **7.** 1) $x=1{,}2\pi,\ k=6$; 2) $x=\frac{9}{7}\pi,\ k=4$; 3) $x=\frac{\pi}{2},\ k=3$; 4) $x=\frac{5\pi}{3},\ k=-4$. **8.** Первое совпадение произойдет через 5 минут; второе — через 25 минут; k-е — через $(20k-15)$ минут. **9.** Первое совпадение произойдет через 6 минут; второе — через 14 минут; k-е — через $(8k-2)$ минут.

§ 3. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС

1. Определения и основные свойства

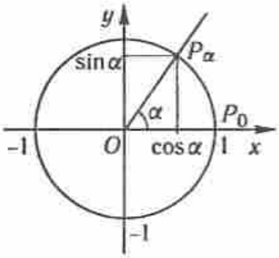


Рис. 9

Определение. Ордината точки P_α единичной окружности (рис. 9), полученной при повороте точки $P_0=(1;0)$ на угол α, называется *синусом* угла α (обозначается $\sin\alpha$), а абсцисса — *косинусом* угла α (обозначается $\cos\alpha$).

Отметим некоторые *свойства синуса и косинуса* угла.

1°. Поскольку для любого угла α ордината и абсцисса точки P_α не могут быть меньше -1 и больше 1, то для любого угла α справедливы двойные неравенства $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1$ и $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant1$.

2°. Так как углам, имеющим противоположные значения α и $-\alpha$, соответствуют точки, симметричные относительно оси Ox, то ординаты этих точек имеют противоположные значения, а абсциссы совпадают, т. е.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad \text{и} \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

3°. Так как углам, имеющим значения α и $\alpha+\pi$, соответствуют диаметрально противоположные точки окружности, то ординаты и абсциссы этих точек имеют противоположные значения, т. е.

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \quad \text{и} \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha.$$

4°. Так как углам, разность значений которых кратна 2π, соответствует одна и та же точка окружности, то

$$\sin\alpha = \sin(\alpha+2\pi n), \quad n\in\mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \cos(\alpha+2\pi n), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Определение. *Тангенсом* угла α называется отношение $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Котангенсом угла α называется отношение $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha\neq\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Отметим некоторые *свойства тангенса и котангенса* угла.

1°. а) Для любого угла $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

○ $$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$ ●

б) Для любого угла $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, справедливо равенство $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Это свойство доказывается аналогично предыдущему.

2°. а) Для любого угла $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha-\pi) = \operatorname{tg}(\alpha+\pi),$$

○ $$\operatorname{tg}(\alpha-\pi) = \frac{\sin(\alpha-\pi)}{\cos(\alpha-\pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

и

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$ ●

б) Для любого угла $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha-\pi) = \operatorname{ctg}(\alpha+\pi).$$

Это свойство доказывается аналогично предыдущему.

3°. а) Для любого угла $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

○ Из равенства $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \frac{\sin(\alpha + \pi n)}{\cos(\alpha + \pi n)}$ следует, что при четных n, т. е. при $n = 2k$, имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \frac{\sin(\alpha + 2\pi k)}{\cos(\alpha + 2\pi k)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$

а при нечетных n, т. е. при $n = 2k + 1$,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi(2k+1)) = \frac{\sin(\alpha + \pi + 2\pi k)}{\cos(\alpha + \pi + 2\pi k)} = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha. \quad ●$$

б) Для любого угла $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Это свойство доказывается аналогично предыдущему.

Из определения тангенса и котангенса следует, что для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливы тождества

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Отрезок $[-1; 1]$ оси ординат называют *линией синусов*; отрезок $[-1; 1]$ оси абсцисс — *линией косинусов* (рис. 10).

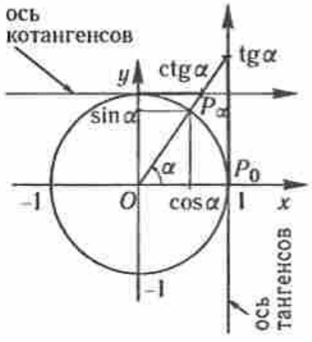


Рис. 10

Легко проверить, что прямая OP_α при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, пересекает прямую $x = 1$ в точке с координатами $(1; \operatorname{tg}\alpha)$, а при $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, пересекает прямую $y = 1$ в точке с координатами $(\operatorname{ctg}\alpha; 1)$. Поэтому прямую $x = 1$ называют *осью (линией) тангенсов*, а прямую $y = 1$ — *осью (линией) котангенсов* (рис. 10). Положительное и отрицательное направления на оси тангенсов и оси котангенсов выбирают так, чтобы они совпадали с направлением оси ординат и оси абсцисс соответственно.

2. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса в различных четвертях

Оси системы координат Oxy делят тригонометрическую окружность на четыре части (*четверти*) (рис. 11). При этом говорят, что

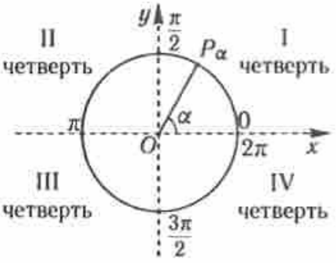


Рис. 11

все углы $\alpha \in \left(2\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежат I четверти,

все углы $\alpha \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежат II четверти,

все углы $\alpha \in \left(2\pi n + \pi; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежат III четверти,

все углы $\alpha \in \left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}; 2\pi n + 2\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежат IV четверти.

Пусть точка P_α движется по единичной окружности. Знаки абсциссы и ординаты точки P_α, соответственно знаки синуса и косинуса угла α, определяются тем, в какой четверти окажется точка. Так,

а) если точка находится в первой четверти, то ее абсцисса и ордината положительны, т. е. $\cos\alpha > 0$ и $\sin\alpha > 0$, если α — угол I четверти;

б) если точка находится во второй четверти, то ее абсцисса отрицательна, а ордината положительна, т. е. $\cos\alpha < 0$ и $\sin\alpha > 0$, если α — угол II четверти;

в) если точка находится в третьей четверти, то ее абсцисса и ордината отрицательны, т. е. $\cos\alpha < 0$ и $\sin\alpha < 0$, если α — угол III четверти;

г) если точка находится в четвертой четверти, то ее абсцисса положительна, а ордината отрицательна, т. е. $\cos\alpha > 0$ и $\sin\alpha < 0$, если α — угол IV четверти.

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, если $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ имеют одинаковые знаки, т. е. в I и III четвертях. Аналогично, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, если $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ имеют разные знаки, т. е. во II и в IV четвертях.

На рис. 12 представлены знаки значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса в различных четвертях.

Пример 1. Определить знак выражения

$$\frac{\cos 10 \cdot \sin 6 - \operatorname{tg} 9}{\cos\left(-\sqrt{2}\right) \cdot \sin\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg}(-4)}.$$

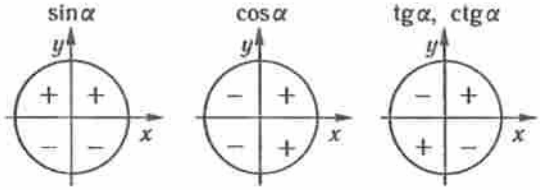


Рис. 12

△ Так как $3\pi < 10 < 3{,}5\pi$, то угол, равный 10 рад, принадлежит III четверти и $\cos 10 < 0$. Так как $2{,}5\pi < 6 < 2\pi$, то угол, равный 6 рад, принадлежит IV четверти, поэтому $\sin 6 < 0$ и $\cos 10 \cdot \sin 6 > 0$. Так как $2{,}5\pi < 9 < 3\pi$, то угол, равный 9 рад, принадлежит II четверти и $\operatorname{tg} 9 < 0$. Значит, $\cos 10 \cdot \sin 6 - \operatorname{tg} 9 > 0$.

Так как $-\frac{\pi}{2} < -\sqrt{2} < 0$, то угол, равный $-\sqrt{2}$ рад, принадлежит IV четверти и $\cos\left(-\sqrt{2}\right) > 0$. Далее, $\frac{\pi}{2} < \sqrt{3} < \pi$ и $-\frac{3\pi}{2} < -4 < -\pi$. Поэтому углы, равные $\sqrt{3}$ и -4 рад, принадлежат II четверти. Следовательно, $\sin\sqrt{3} > 0$ и $\operatorname{ctg}(-4) < 0$. Значит, $\cos\left(-\sqrt{2}\right) \cdot \sin\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg}(-4) < 0$. Окончательно получаем

$$\frac{\cos 10 \cdot \sin 6 - \operatorname{tg} 9}{\cos\left(-\sqrt{2}\right) \cdot \sin\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg}(-4)} < 0. \qquad \blacktriangle$$

Таблица значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса для некоторых углов. Используя результаты разд. 2, § 2 настоящей главы, можно составить следующую таблицу.

Угол α в градусах	0	30	45	60	90
Угол α в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.
$\operatorname{ctg}\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Пример 2. Решить уравнение:

1) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2x\right) = 1$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, если $270° < x < 360°$.

$\triangle$ 1) На тригонометрической окружности имеется единственная точка, которой соответствуют углы с синусом, равным 1. Все они отличаются от $\frac{\pi}{2}$ на $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\frac{3\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $x = -\frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) По условию $270° < x < 360°$. Следовательно, x — угол IV четверти. Так как $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то и $\cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, все углы в IV четверти, удовлетворяющие условию задачи, задаются формулой $-30° + 360° \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$. Искомым является $x = 330°$. $\blacktriangle$

Пример 3. Найти множество значений выражения $y = \cos^2\frac{x}{2} + \sqrt{-\sin^2 2x}$.

$\triangle$ Выражение имеет смысл, если $-\sin^2 2x \geqslant 0$, т. е. когда $\sin 2x = 0$. Это возможно, если $2x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. при $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Найдем значения $y = \cos^2\frac{x}{2}$ при $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Возможны два случая: k — четное и k — нечетное число.

Если k — четное, т. е. $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $y = \cos^2\left(\frac{2n}{4}\pi\right) = \cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. Данное выражение принимает значение 0, когда n — нечетное число, и 1, когда n — четное. Если k — нечетное, т. е. $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, то $y = \cos^2\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right) = \cos^2\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Следовательно, данное выражение при допустимых значениях x может принимать значения из множества $\{0; \frac{1}{2}; 1\}$. $\blacktriangle$

Задачи

1. Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если:

1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{11\pi}{5} < \alpha < \frac{12\pi}{5}$; 4) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\frac{5\pi}{4}$.

2. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P_0 = (1; 0)$ на угол:

1) 1; 2) 2; 3) −2,75; 4) 3,2; 5) −4,2; 6) 5,2; 7) 6,4.

3. Найти значение x, при котором выполняются указанные условия:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, если $-90° < x < 90°$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, если $90° < x < 270°$;

3) $\cos x = -\frac{1}{2}$, если $360° < x < 540°$; 4) $\sin x = -\frac{1}{2}$, если $-270° < x < -90°$.

4. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Определить знак числа:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\cos(\pi + \alpha)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; 6) $\sin(\pi + \alpha)$.

5. Определить знак выражения:

1) $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{11\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{6\pi}{5}$; 2) $\left(\cos\frac{9\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}\right)\cdot\sin\frac{12\pi}{7}$;

3) $(\sin 2{,}5-\cos 2{,}7)\cdot\cos 3{,}6$; 4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{9\pi}{8}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$.

6. Вычислить без таблиц и калькулятора:

1) $\dfrac{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\cos(-\pi)-\sin\frac{\pi}{4}}$; 2) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{2}-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^2}$.

7. Решить уравнение:

1) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=-1$; 2) $\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=1$;

3) $\cos(\pi+x)=-1$; 4) $\sin(x-\pi)=1$.

8. Выяснить в какой четверти находится точка, соответствующая углу α, если

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=-\sqrt{2}$;

3) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$; 4) $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$.

9. Доказать, что числа $\sin x$ и $\cos x$ имеют:

1) разные знаки, если x удовлетворяет неравенству $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-11x+30}<0$;

2) одинаковые знаки, если x удовлетворяет неравенству $\dfrac{2-3x-2x^2}{2x^2+3x-9}<0$.

10. Найти множество значений выражения:

1) $y=\sin^2\frac{x}{4}+\sqrt{-\sin^2 3x}$; 2) $y=\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{-\cos^2 3x}$.

Ответы

1. 1) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$; 2) $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$; 3) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$; 4) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$. **2.** 1) I четверть; 2) II четверть; 3) III четверть; 4) III четверть; 5) II четверть; 6) IV четверть; 7) I четверть. **3.** 1) $-30°$ и $30°$; 2) $240°$; 3) $480°$; 4) $-150°$. **4.** 1) Плюс; 2) минус; 3) минус; 4) минус; 5) плюс; 6) минус. **5.** 1) Плюс; 2) плюс; 3) минус; 4) минус. **6.** 1) $-\sqrt{2}$; 2) $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$. **7.** 1) $-\frac{7\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **8.** 1) III четверть; 2) IV четверть; 3) I четверть; 4) II четверть. **10.** 1) $0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{2\pm\sqrt{3}}{4}; 1$; 2) $\frac{1}{2}; \frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ

Выражения, содержащие обозначения sin, cos, tg и ctg, называются *тригонометрическими выражениями*.

Равенство тригонометрических выражений, справедливое для всех допустимых значений входящих в него переменных (т. е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл), называется *тригонометрическим тождеством*, а задачи на доказательство таких равенств называются задачами на доказательство тождеств.

Выражения, стоящие в левой и правой частях тождества, называются *тождественно равными*, а переход от данного выражения к тождественно равному называется *тождественным преобразованием*.

1. Основное тригонометрическое тождество и его следствия

Теорема. Для любого угла α справедливо равенство (*основное тригонометрическое тождество*)

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{1}$$

○ Пусть дан некоторый угол α. Тогда соответствующая ему точка тригонометрической окружности P_α имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$. Длина отрезка OP_α, где точка $O = (0; 0)$, равна радиусу окружности. Квадрат расстояния между точками O и P_α, заданными своими координатами, равен сумме квадратов разностей одноименных координат, т. е.

$$(\cos\alpha - 0)^2 + (\sin\alpha - 0)^2 = 1^2 \text{ или } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \quad ●$$

Основное тригонометрическое тождество равносильно следующим равенствам:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \tag{2}$$

и

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha. \tag{3}$$

Равенство (2) равносильно равенству $|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, из которого получаем

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \text{ если } \alpha \text{ — угол I или IV четверти},$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \text{ если } \alpha \text{ — угол II или III четверти}.$$

Равенство (3) равносильно равенству $|\sin\alpha| = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, из которого получаем

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \text{ если } \alpha \text{ — угол I или II четверти},$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \text{ если } \alpha \text{ — угол III или IV четверти}.$$

Пример 1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{9}{41}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

△ Так как α принадлежит IV четверти, а в четвертой четверти $\sin\alpha$ принимает отрицательные значения, то

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{9^2}{41^2}} = -\sqrt{\frac{41^2 - 9^2}{41^2}} = -\sqrt{\frac{(41+9)(41-9)}{41^2}} = -\sqrt{\frac{1600}{41^2}} = -\frac{40}{41}. \quad ▲$$

Пример 2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

$\triangle$ Так как α принадлежит II или III четверти, а в этих четвертях $\cos\alpha$ принимает отрицательные значения, то

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\sqrt{\frac{15}{4^2}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Известно, что $\sin\alpha = 0{,}6$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

$\triangle$ Поскольку $\cos\alpha < 0$ при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Соответственно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{3}{4}$. $\blacktriangle$

Пример 4. Найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

$\triangle$ Имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$. Отсюда $\sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha$, $1-\cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$. Так как $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, то $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Наконец,

$$\sin\alpha = 2\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \qquad \blacktriangle$$

Кроме равенств (2) и (3), связывающих значения синуса и косинуса одного и того же угла, из основного тригонометрического тождества могут быть получены два следствия, устанавливающие связь тангенса и косинуса, а также котангенса и синуса одного и того же угла.

Следствие 1. Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливо тождество

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{4}$$

$\circ$ Используя формулу (1), получаем

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad \bullet$$

Равенство (4) при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, равносильно равенству $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Равенство (4) при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, также равносильно равенству $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Следствие 2. Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливо тождество

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{5}$$

Равенство (5) при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, равносильно равенству $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Кроме того равенство (5) при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, равносильно равенству $\operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Пример 5. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{9}{41}$ и $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

△ Так как α принадлежит III четверти, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{-\sqrt{1-\left(-\frac{9}{41}\right)^2}}{-\frac{9}{41}} = \frac{-\frac{40}{41}}{-\frac{9}{41}} = \frac{40}{9}. \qquad ▲$$

Пример 6. Вычислить $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ и $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

△ Так как α принадлежит II четверти, то

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}. \qquad ▲$$

Пример 7. Вычислить $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

△
$$\frac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\operatorname{tg}^3\alpha+1} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\left(\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)}{\operatorname{tg}^3\alpha+1} = \frac{2\cdot\left(2^2+1\right)}{2^3+1} = \frac{10}{9}. \qquad ▲$$

Пример 8. Найти $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ и $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

△ 1) Так как $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, то $\sin\alpha\cos\alpha = -\dfrac{3}{8}$.

Пользуясь формулой для суммы кубов, получим

$$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha = (\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{8}\right) = -\frac{11}{16}.$$

2) Используя тождество

$$1 = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 = \sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha,$$

находим $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1 - 2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 2\cdot\dfrac{9}{64} = \dfrac{23}{32}$. ▲

2. Доказательство тригонометрических тождеств

Для доказательства тригонометрических тождеств, как правило, используют те же способы, что и при доказательстве алгебраических тождеств: преобразование левой части к правой; преобразование правой части к левой; преобразование левой и правой частей к одному и тому же выражению; установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю. Обычно при доказательстве тригонометрических тождеств или упрощении выражений допустимые значения углов не устанавливают, если это не требуется в условии задачи.

Пример 9. Доказать тождество $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

△ Используя формулу суммы кубов и основное тригонометрическое тождество, в левой части доказываемого равенства получим

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=$$
$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha. \quad \blacktriangle$$

Пример 10. Доказать тождество $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}$.

△ Преобразуем числитель и знаменатель правой части доказываемого равенства:

$$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{\cos 3\beta}{\sin 3\beta}=\frac{\sin 2\alpha\cdot\sin 3\beta+\cos 2\alpha\cdot\cos 3\beta}{\cos 2\alpha\cdot\sin 3\beta},$$
$$\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 3\beta}{\cos 3\beta}=\frac{\cos 2\alpha\cdot\cos 3\beta+\sin 2\alpha\cdot\sin 3\beta}{\sin 2\alpha\cdot\cos 3\beta}.$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}=\frac{\left(\dfrac{\sin 2\alpha\cdot\sin 3\beta+\cos 2\alpha\cdot\cos 3\beta}{\cos 2\alpha\cdot\sin 3\beta}\right)}{\left(\dfrac{\cos 2\alpha\cdot\cos 3\beta+\sin 2\alpha\cdot\sin 3\beta}{\sin 2\alpha\cdot\cos 3\beta}\right)}=\frac{\sin 2\alpha\cdot\cos 3\beta}{\cos 2\alpha\cdot\sin 3\beta}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}. \quad \blacktriangle$$

Пример 11. Доказать тождество $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

△ Преобразуем левую и правую части доказываемого равенства:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$
$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны. ▲

3. Упрощение тригонометрических выражений

При упрощении тригонометрических выражений обычно последовательно заменяют все выражение или его отдельные части на тождественно равные. Упрощение считается завершенным, если в итоге получается выражение более простого вида, не допускающее дальнейшего упрощения.

Пример 12. Упростить выражение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$.

$$\triangle\quad \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}-\frac{\cancel{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cancel{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}}=$$

$$=\cos\alpha\cdot\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\sin\alpha=0.\quad\blacktriangle$$

Пример 13. Упростить выражение

$$A=\cos\alpha\cdot\left(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)\cdot\left(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right).$$

$$\triangle\quad A=\cos\alpha\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+1+\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha-1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\left((\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1^2\right)=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha.\quad\blacktriangle$$

Пример 14. Упростить выражение $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$.

$\triangle$ Так как

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\quad \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

то

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}{1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=\frac{2}{3}.\quad\blacktriangle$$

Задачи

1. Выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt2}{3}$ и $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt3}{3}$; 2) $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ и $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$;

3) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt3}{5}$ и $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{23}}{5}$; 4) $\sin\alpha=-\dfrac{8}{17}$ и $\cos\alpha=-\dfrac{15}{17}$.

2. Выяснить, какие значения может принимать:

1) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt3}{5}$; 2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt3}{5}$;

3) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt3}{2}$; 4) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\sqrt{0{,}19}$.

3. Вычислить:

1) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4. Известно, что $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}5$. Найти значение выражения:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$.

5. Упростить выражения:

1) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$; 2) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

3) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$; 4) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

5) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$; 6) $\left(1 + \sin^2\alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

6. Доказать тождества:

1) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \sin\alpha + \cos\alpha$;

3) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$; 4) $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$;

5) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

7. Найти численное значение выражения:

1) $\frac{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$;

2) $\frac{4\sin\alpha - 3\cos\alpha}{(2\sin\alpha - \cos\alpha) \cdot \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

8. Выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

9. Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = a$. Найти

1) $\sin\alpha - \cos\alpha$; 2) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.

10. Найти численное значение выражения:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$;

2) $\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 5$.

11. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = b$. Найти значение выражения:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha$.

12. Упростить выражение:

1) $\sin^2\alpha \cdot \left(1 + \sin^{-1}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha\right) \cdot \left(1 - \sin^{-1}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha\right)$;

2) $2\left(\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) - \left(\sin^8\alpha + \cos 8\alpha\right)$;

3) $\sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}}$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4) $\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

13. Доказать тождество:

1) $\sin^3\alpha\cdot(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

2) $\dfrac{2(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}-\dfrac{2(1+\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1}{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

3) $\dfrac{\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\pi<\alpha<2\pi$.

Ответы

1. 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) да. **2.** 1) $\frac{\sqrt{13}}{5}$ и $-\frac{\sqrt{13}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{22}}{5}$ и $-\frac{\sqrt{22}}{5}$; 3) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 4) 0,9 и −0,9. **3.** 1) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{12}{5}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{12}$; 3) $\sin\alpha=-\frac{7}{25}$, $\cos\alpha=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{24}{7}$; 4) $\sin\alpha=$ $=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$. **4.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) $\frac{5}{16}$. **5.** 1) 1; 2) 2; 3) $\cos^2\alpha$; 4) 1; 5) $\cos^2\alpha$; 6) $-\sin^2\alpha$. **7.** 1) $-\frac{10}{3}$; 2) $-\frac{25}{8}$. **8.** 1) Да; 2) нет. **9.** 1) $\sqrt{2-a^2}$ или $-\sqrt{2-a^2}$; 2) $\frac{5-3a^2}{2}$; 3) $\frac{2a}{a^2-1}$. **10.** 1) 7; 2) 28. **11.** 1) b^2+2; 2) b^3+3b. **12.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) 1; 3) $-\frac{2}{\cos\alpha}$; 4) $-\frac{2}{\sin\alpha}$.

§5. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Пусть даны некоторые углы α и β. Угол $(\alpha-\beta)$ называется *разностью* этих углов, а угол $(\alpha+\beta)$ — их *суммой*.

1. Косинус разности и косинус суммы углов

1) **Теорема.** *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \tag{1}$$

○ Пусть на плоскости дана прямоугольная система координат Oxy и единичная окружность (рис. 13, *а*). Пусть α и β — произвольные положительные углы и в системе координат Oxy лучи OP_α и OP_β составляют углы α и $(-\beta)$ с положительным направлением оси Ox, соответственно.

В системе координат Oxy точки P_α и P_β имеют координаты: $P_\alpha=(\cos\alpha;\sin\alpha)$ и $P_\beta=(\cos\beta;-\sin\beta)$. Длина отрезка $P_\alpha P_\beta$, координаты концов которого известны, в системе координат Oxy выражается формулой

$$P_\alpha P_\beta=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2}.$$

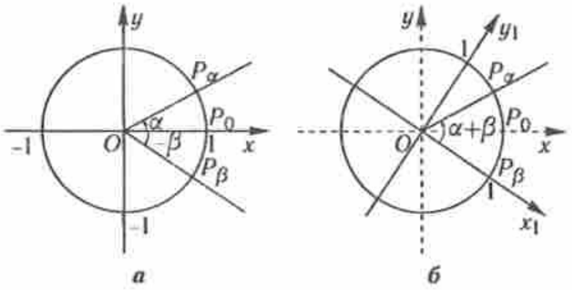


Рис. 13

Следовательно,

$$(P_\alpha P_\beta)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 =$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \quad (2)$$
$$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta.$$

Введем новую прямоугольную систему координат Ox_1y_1 с началом в точке O, направив ось Ox_1 вдоль луча OP_β, а ось Oy_1 перпендикулярно ей (рис. 13, *б*). В системе координат Ox_1y_1 точки P_α и P_β имеют координаты: $P_\alpha = (\cos(\alpha+\beta); \sin(\alpha+\beta))$ и $P_\beta = (1; 0)$. Длина отрезка $P_\alpha P_\beta$, координаты концов которого известны, в системе координат Ox_1y_1 выражается формулой

$$P_\alpha P_\beta = \sqrt{(\cos(\alpha+\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha+\beta) - 0)^2}.$$

Следовательно,

$$(P_\alpha P_\beta)^2 = (\cos(\alpha+\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha+\beta) - 0)^2 =$$
$$= \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos(\alpha+\beta). \quad (3)$$

Поскольку квадрат расстояния между двумя фиксированными точками плоскости, вычисленный в двух разных прямоугольных системах координат, есть одно и то же число, то можем приравнять правые части формул (2) и (3)

$$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta,$$

получим выражение для косинуса суммы двух углов:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad ●$$

2) Для любых углов α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \quad (4)$$

○ Так как $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$, то, применив формулу (1) и пользуясь тем, что $\cos(-\beta)=\cos\beta$ и $\sin(-\beta)=-\sin\beta$ для любого угла β, получим

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \quad ●$$

2. Формулы для дополнительных углов

Два угла α и β называются *дополнительными углами*, если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

Для дополнительных углов имеют место формулы:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \text{ и } \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \tag{5}$$

○
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\cos\alpha. \quad ●$$

Пример 1. Вычислить значение выражения $A=\sin^2\frac{\pi}{13}+\sin^2\frac{11\pi}{26}$.

△ Так как $\frac{\pi}{13}+\frac{11\pi}{26}=\frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{11\pi}{26}=\cos\frac{\pi}{13}$, поэтому

$$A=\sin^2\frac{\pi}{13}+\cos^2\frac{\pi}{13}=1. \quad ▲$$

3. Синус суммы и синус разности углов

1) Для любых углов α и β справедлива формула

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \tag{6}$$

○ Используя формулы (4) и (5), получим

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \quad ●$$

2) Для любых углов α и β справедлива формула

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \tag{7}$$

○ Используя формулу (6), получим

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \quad ●$$

4. Тангенс суммы и тангенс разности углов

1) Для любых углов α и β таких, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, и $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \qquad (8)$$

○ Используя формулы (1) и (6), получим

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$
$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{\cos\alpha\cos\beta(1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \quad ●$$

2) Для любых углов α и β таких, что $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, и $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \qquad (9)$$

5. Котангенс суммы и котангенс разности углов

1) Для любых углов α и β таких, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, и $\alpha + \beta \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, справедлива формула

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}. \qquad (10)$$

○ Используя формулы (1) и (6), получим

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} =$$
$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta - 1)}{\sin\alpha\sin\beta(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}. \quad ●$$

2) Для любых углов α и β таких, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, и $\alpha - \beta \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, справедлива формула

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (11)$$

6. Использование формул сложения

Все полученные формулы могут быть сведены в следующую таблицу.

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$
$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$	$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$

Пример 2. Найти численное значение выражения:

1) $\sin\frac{\pi}{12}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$;

3) $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=\frac{40}{41}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

$\triangle$ 1) Так как $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, то

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

2) Так как $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$, то, пользуясь формулой для $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$ и $\beta=\frac{\pi}{6}$, получим $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}}=$ $=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

3) По формуле тангенса суммы получим

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

Так как $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то $\sin\alpha<0$ и поэтому

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{40^2}{41^2}}=-\frac{\sqrt{41^2-40^2}}{41}=-\frac{9}{41}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-9+40}{40+9}=\frac{31}{49}$. ▲

Пример 3. Найти значение выражения $A=\frac{\sqrt{3}}{\cos 290^\circ}+\frac{1}{\sin 250^\circ}$.

$\triangle$ Заметим, что

$\cos 290^\circ=\cos(270^\circ+20^\circ)=\cos 270^\circ\cdot\cos 20^\circ-\sin 270^\circ\cdot\sin 20^\circ=\sin 20^\circ$,
$\sin 250^\circ=\sin(270^\circ-20^\circ)=\sin 270^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 270^\circ\cdot\sin 20^\circ=-\cos 20^\circ$.

Тогда

$$A=\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}+\frac{1}{-\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ-\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=4\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=$$
$$=\frac{4(\sin 20^\circ\cos 60^\circ-\cos 20^\circ\sin 60^\circ)}{\sin 40^\circ}=\frac{4\sin(20^\circ-60^\circ)}{\sin 40^\circ}=-4.$$ ▲

Пример 4. Найти значение выражения

$$A = \sin(\alpha - \beta) - 2\cos\alpha\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right), \text{ если } \alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}.$$

$\triangle$ Так как $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -\sin\beta$, то

$$A = \sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \blacktriangle$$

Задачи

1. Вычислить:

1) $\cos 15^\circ$; 2) $\sin 105^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 75^\circ$;
4) $\cos 23^\circ \cos 37^\circ - \sin 23^\circ \sin 37^\circ$; 5) $\sin 19^\circ \cos 26^\circ + \cos 19^\circ \sin 26^\circ$;
6) $\cos 37^\circ \cos 23^\circ - \cos 53^\circ \cos 67^\circ$; 7) $\cos 107^\circ \sin 28^\circ - \cos 28^\circ \cos 17^\circ$;
8) $\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{13\pi}{9}$; 9) $\sin\frac{7\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$.

2. Вычислить:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = \frac{9}{41}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3. Упростить выражение:

1) $\cos\left(\frac{2\pi}{7} + \alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{7} + \alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right)$;
2) $\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

4. Вычислить:

1) $\dfrac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$; 2) $\dfrac{\sin 50^\circ \cos 12^\circ - \sin 40^\circ \cos 78^\circ}{\cos 68^\circ - \sqrt{3}\sin 68^\circ}$;
3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15^\circ - \frac{1}{2}\sin 15^\circ$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 75^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 75^\circ$;
5) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 105^\circ - \frac{1}{2}\cos 75^\circ$.

5. Вычислить:

1) $\operatorname{tg} 42^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 48^\circ$;
2) $\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 31^\circ \cdot \cos 58^\circ - \operatorname{ctg} 59^\circ \cdot \sin 32^\circ$;
4) $\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 77^\circ - \operatorname{ctg} 11^\circ \cdot \sin 88^\circ \cdot \operatorname{ctg} 79^\circ$.

6. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$; 2) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta - 1}$;
3) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha = 8\operatorname{ctg}8\alpha$.

7. Решить уравнения:

1) $\cos 6x \cdot \cos 5x + \sin 6x \cdot \sin 5x = -1$; 2) $\sin 4x \cdot \cos 3x - \cos 4x \cdot \sin 3x = -1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \cos x = -1$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = -1$.

8. Вычислить:

1) $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, и $\sin\beta = \frac{15}{17}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, и $\sin\beta = -\frac{5}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, и $\cos\beta = \frac{8}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

9. Вычислить:

1) $\sin(\alpha-\beta) - 2\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)$, если $\alpha+\beta = \frac{2\pi}{3}$;

2) $\cos(\alpha+\beta) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cdot\sin\alpha$, если $\alpha-\beta = \frac{3\pi}{4}$;

3) $\sin\alpha\cdot\cos(\pi-\beta) - \cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)$, если $\alpha+\beta = -\frac{\pi}{4}$.

10. Вычислить:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

2) $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\frac{1}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

11. Решить уравнения:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cdot\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cdot\sin x = \frac{1}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cdot\sin x = 0$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{1}{2}$;

4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = -\frac{1}{4}$.

Ответы

1. 1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) 1; 9) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** 1) $\frac{\sqrt{6}-3}{6}$; 2) $-\frac{4+\sqrt{2}}{6}$; 3) $-\frac{1}{7}$; 4) $-\frac{49}{31}$. **3.** 1) 0; 2) $\cos\alpha$. **4.** 1) 1; 2) $-0{,}5$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 4) 0. **7.** 1) $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $2\pi+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **8.** 1) $-\frac{13}{85}$ и $\frac{77}{85}$; 2) $\frac{16}{65}$; 3) $-\frac{77}{8}$. **9.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.** 1) $-4\sqrt{5}$; 2) $-\frac{7}{24}$; 3) $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$. **11.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, πn, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) πn, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

§ 6. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Напомним, что при повороте точки $P_0 = (1; 0)$ на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, на тригонометрической окружности получается та же самая точка, что и при повороте на угол α. Следовательно, справедливы формулы:

$$\begin{gathered} \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha, \\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{1}$$

Также имеют место формулы, которые называют *формулами приведения*. *Формулами приведения для синуса* называют следующие шесть формул:

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, && \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \\ &\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, && \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \\ &\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha, && \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

○ Для доказательства этих формул достаточно воспользоваться формулами сложения для синуса. Так, например,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 1 \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot 0 = \cos\alpha,$$

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin\pi \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\pi = 0 \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot (-1) = -\sin\alpha.$$

●

Следующие шесть формул называют *формулами приведения для косинуса*:

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, && \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha, \\ &\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, && \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \\ &\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha, && \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Формулы (1)–(3) справедливы при любых значениях α.

Пример 1. Вычислить:

1) $\sin 1200°$; 2) $\cos(-840°)$; 3) $\cos\frac{17\pi}{4}$.

△ 1) Используя формулы (1), (2) и таблицу значений тригонометрических функций, получим

$$\sin 1200° = \sin(3 \cdot 360° + 120°) = \\ = \sin(120°) = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) Аналогично получаем с применением формул (1) и (3), что

$$\cos(-840°) = \cos(-3 \cdot 360° + 240°) = \\ = \cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

3) $\cos\frac{17\pi}{4} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ ▲

Аналогично вычисление тангенса и котангенса любого угла может быть сведено к вычислению тангенса и котангенса острого угла. Используя формулы (1)–(3) и определение тангенса и котангенса, получаем формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha+\pi k) &= \operatorname{tg}\alpha, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ \operatorname{ctg}(\alpha+\pi k) &= \operatorname{ctg}\alpha, \quad k\in\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

Следующие четыре формулы называют *формулами приведения для тангенса и котангенса*:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

△ Для доказательства этих формул достаточно воспользоваться формулами (2) и (3) и определением тангенса и котангенса. Так, например,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha. \qquad ▲$$

Формулы (5) имеют место при всех допустимых значениях α.

Для того чтобы записать любую из формул (2), (3) и (5), можно применять следующее *мнемоническое правило*.

---

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2) Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, то синус меняется на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот. Если же угол равен $\pi\pm\alpha$, то замены не происходит.

Например, воспользуемся этим правилом для вычисления

1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

△ 1) Во-первых, при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ получаем $\pi<\frac{3\pi}{2}-\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Синус в III четверти отрицателен, поэтому в правой части нужно поставить знак «−». Во-вторых, синус нужно заменить на косинус. Следовательно, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

2) При $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ получаем $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\alpha<\pi$. Тангенс во II четверти отрицателен, поэтому в правой части нужно поставить знак «−». И во-вторых, тангенс нужно заменить на котангенс. Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$. ▲

Пример 2. Вычислить $\sin 960^\circ \cdot \cos 495^\circ \cdot \operatorname{tg}(-840^\circ)$.

$\triangle$ Используя формулы (1)–(3) и (5), получим:

$$\sin 960^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + (180^\circ + 60^\circ)) =$$
$$= \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos 495^\circ = \cos(360^\circ + (90^\circ + 45^\circ)) = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\operatorname{tg}(-840^\circ) = \operatorname{tg}(-3\cdot 360^\circ + (180^\circ + 60^\circ)) =$$
$$= \operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Следовательно, $\sin 960^\circ \cdot \cos 495^\circ \cdot \operatorname{tg}(-840^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. ▲

Задачи

1. Вычислить, используя формулы приведения:
1) $\cos 150^\circ$; 2) $\sin 135^\circ$; 3) $\operatorname{ctg}(-135^\circ)$; 4) $\cos 120^\circ$;
5) $\cos 225^\circ$; 6) $\sin(-210^\circ)$; 7) $\operatorname{tg}(315^\circ)$; 8) $\operatorname{tg}(-150^\circ)$.

2. Вычислить, используя формулы приведения:
1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{11\pi}{6}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$; 4) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$;
5) $\cos\frac{7\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 7) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

3. Вычислить, используя формулы приведения:
1) $\sin 585^\circ \cdot \cos(-930^\circ)\cdot \operatorname{ctg} 510^\circ$; 2) $\sin(-570^\circ)\cdot\cos 870^\circ \cdot \operatorname{tg} 945^\circ$;
3) $\sin 1020^\circ \cdot \cos 675^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-1050^\circ)$; 4) $\sin 660^\circ \cdot \cos(-855^\circ)\cdot \operatorname{ctg} 600^\circ$.

4. Вычислить, используя формулы приведения:
1) $\sin 412^\circ + \operatorname{tg} 1099^\circ \cdot \cos 52^\circ$; 2) $\sin 772^\circ + \operatorname{tg} 199^\circ \cdot \cos 412^\circ$;
3) $\cos 566^\circ + \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \sin 566^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 186^\circ \cdot \cos 438^\circ - \sin 438^\circ$.

5. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi+\alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$;

3) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$;

4) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

6. Доказать тождество:
1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 0$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = 0$;

3) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=0$; 4) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=0$;

5) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=0$; 6) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.

7. Решить уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=1$; 2) $\sin(\pi-x)-\sin(\pi+x)=2$;

3) $\sin(3x+3\pi)\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin 2x\cos 3x=1$;

4) $\sin\left(5x-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2x+4\pi)-\sin(5x+\pi)\sin 2x=0$.

8. Доказать, что вычисление значений синуса, косинуса и тангенса любого угла можно свести к вычислению их значений для угла, заключенного в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Ответы

1. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) -1; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) -1; 8) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\sqrt{3}$; 7) $-\frac{1}{2}$; 8) 1. **3.** 1) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **4.** 1) 1; 2) 1; 3) -1; 4) 1. **5.** 1) 1; 2) 1. **7.** 1) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

§7. ФОРМУЛЫ КРАТНЫХ УГЛОВ

1. Формулы двойных и тройных углов

Пусть дан некоторый угол α. Рассмотрим угол $n\alpha$, где n — любое натуральное число, большее 1. Формулы (1) и (6) из §5 позволяют вывести формулы для вычисления $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а формулы (8) и (10) из §5 позволяют вывести формулы для вычисления $\operatorname{tg} n\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg} n\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$. В частности, если в формулах (1), (6), (8) и (10) из §5 положить $\beta=\alpha$, получим *формулы двойных углов*:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{1}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha},\ \text{где}\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\ \text{и}\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2},\ k,m\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2},\ \text{где}\ \alpha\neq\frac{\pi k}{2},\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{4}$$

С использованием полученных формул двойных углов и вышеперечисленных формул тригонометрических функций суммы выводятся *формулы тройных углов*.

Имеют место формулы:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \tag{5}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \tag{6}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

В качестве примера выведем формулы для $\sin 3\alpha$ и $\operatorname{tg} 3\alpha$.

○ 1) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$

$$= 2\cos^2\alpha\sin\alpha + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\sin\alpha =$$

$$= 2\left(1 - \sin^2\alpha\right)\sin\alpha + \left(1 - 2\sin^2\alpha\right)\sin\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

2) Учтем, что $\operatorname{tg} 3\alpha$ определен при $3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{3}{\cos^2\alpha} - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{4 - \frac{3}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{3\operatorname{tg}\alpha\left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right) - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{4 - 3\left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right)} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha},$$

где $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$ ●

Пример 1. Вычислить значение $A = \sin 3\alpha + \cos 3\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}2$.

△ Используя формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$, получим:

$$A = \sin 3\alpha + \cos 3\alpha = 3(\sin\alpha - \cos\alpha) - 4\left(\sin^3\alpha - \cos^3\alpha\right) =$$

$$= 3(\sin\alpha - \cos\alpha) - 4(\sin\alpha - \cos\alpha)\left(\sin^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha\right) =$$

$$= (\sin\alpha - \cos\alpha)(3 - 4(1 + \sin\alpha\cdot\cos\alpha)).$$

Из равенства $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}2$ следует $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 0{,}04$. Отсюда находим $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}48$. Следовательно,

$$A = 0{,}2\cdot(-1 - 4\cdot 0{,}48) = 0{,}2\cdot(-2{,}92) = -0{,}584.$$ ▲

Пример 2. Вычислить $\sin 18°$.

△ Обозначив $\alpha = 18°$, из тождества $\sin 36° = \cos 54°$ получим $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$ или $2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Так как $\cos\alpha \neq 0$, то можно сократить обе части этого равенства на $\cos\alpha$. Тогда, используя основное тригонометрическое тождество, придем к уравнению $4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$. Решая это уравнение относительно $\sin\alpha$, найдем $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ или $\sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$. Так как в I четверти $\sin\alpha > 0$, то второе значение — посторонний корень. Следовательно,

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Вычислить $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$.

$\triangle$ Умножая и деля данное выражение на $\sin\frac{\pi}{5}\neq 0$, а далее, используя дважды формулу (1) и формулу приведения $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, получим:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 4. Вычислить $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}$.

$\triangle$ Согласно результату примера 2, имеем $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, откуда

$$\cos\frac{\pi}{5} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{10} = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4};$$

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5} + \left(4\cos^3\frac{\pi}{5} - 3\cos\frac{\pi}{5}\right) = 4\cos^3\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\left(2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\left(2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - 1\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2}. \qquad \blacktriangle$$

2. Формулы понижения степени

Из соотношений

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

следуют *формулы понижения степени*:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \tag{9}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \tag{10}$$

Пример 5. Вычислить $A = \sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$.

△ Используя формулы понижения степени, получим

$$A = \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{5\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{7\pi}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\cos^2\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(4+2\cdot\frac{1+\cos\frac{\pi}{2}}{2}+2\cdot\frac{1+\cos\frac{3\pi}{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$ ▲

Пример 6. Выразить через $\cos 4\alpha$:

1) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$; 2) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$; 3) $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha$.

△ 1) Используя основное тригонометрическое тождество, формулу для $\sin 2\alpha$ и формулу понижения степени, получим

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2} = 1 - \frac{1-\cos 4\alpha}{4} = \frac{3+\cos 4\alpha}{4}.$$

2) Используя формулу суммы кубов и предыдущий результат, получим

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha\right) =$$

$$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= 1 - \frac{3\sin^2 2\alpha}{4} = 1 - \frac{3(1-\cos 4\alpha)}{8} = \frac{5+3\cos 4\alpha}{8}.$$

3) Аналогично находим

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = \left(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha\right)^2 + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha =$$

$$= \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)^2 - \frac{\sin^2 2\alpha}{8} =$$

$$= \cos^2 2\alpha - \frac{\sin^4 2\alpha}{16} = \frac{1+\cos 4\alpha}{4} - \frac{(1-\cos 4\alpha)^2}{32} =$$

$$= \frac{1+\cos 4\alpha}{2} - \frac{1}{32}\left(\cos^2 4\alpha + 2\cos 4\alpha + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\cos^2 4\alpha + 14\cos 4\alpha + 17\right).$$ ▲

Пример 7. Найти $\cos 6\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

△ Используя формулу косинуса двойного угла, находим

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{3}.$$

Используя формулу косинуса тройного угла, получим
$$\cos 6\alpha = 4\cos^3 2\alpha - 3\cos 2\alpha = 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{27}. \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Вычислить:

1) $2\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$; 2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

3) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,15^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\,15^\circ}$; 4) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$.

2. Вычислить: 1) $\cos 18^\circ$; 2) $\cos 36^\circ$; 3) $\sin 42^\circ$; 4) $\cos 42^\circ$.

3. Вычислить:

1) $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$; 3) $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$; 4) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$.

4. Вычислить:

1) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; 2) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$;

3) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

4) $\mathrm{tg}\,2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

5. Найти численное значение выражения:

1) $8\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right)$; 2) $8\cos\frac{\pi}{17}\cdot\left(2\cos^2\frac{\pi}{34} - 1\right) + \cos\frac{19\pi}{17}$;

3) $\sin\frac{\pi}{11}\cdot\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{24}\right) - \sin\frac{9\pi}{22}\cdot\cos\frac{9\pi}{22}$;

4) $2\left(1 - \sin\frac{13\pi}{28}\right)\cdot\left(1 + \sin\frac{25\pi}{38}\right) + \cos\frac{6\pi}{19}$.

6. Вычислить: 1) $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}$.

7. Упростить выражение:

1) $\sin 2\alpha + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2$; 2) $\dfrac{\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha}{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)}$;

3) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$; 4) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

8. Вычислить:

1) $\left(\dfrac{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}\right)^2$; 2) $\left(\dfrac{1 - \mathrm{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{1 + \mathrm{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}\right)^2$;

3) $\dfrac{16\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\left(1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)^2}$; 4) $\dfrac{\mathrm{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)}{\left(1 + \mathrm{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)^2}$.

9. Вычислить:

1) $\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\cos 3\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

3) $\mathrm{tg}\,3\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\,3\alpha$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{1}{3}$.

10. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-1;$ 2) $\dfrac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha;$

3) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha;$ 4) $\dfrac{1-\sin\alpha-\cos 2\alpha+\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$

11. Выразить через $\sin 2\alpha$:

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha;$ 2) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha;$ 3) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha.$

12. Найти:

1) $\cos 4\alpha$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2};$ 2) $\cos 6\alpha$, если $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3};$

3) $\cos 6\alpha$, если $\sin 2\alpha=\frac{1}{5}$, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right);$ 4) $\cos 12\alpha$, если $\sin 3\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

13. Решить уравнение:

1) $\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2};$ 2) $\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0;$

3) $3\sin x=\sin 2x;$ 4) $\cos^2\frac{x}{2}=\cos x.$

Ответы

1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{2}$. **2.** 1) $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$; 2) $\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+5\sqrt{2}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$; 3) $\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$; 4) $\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$. **3.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** 1) $-0{,}96$; 2) $\frac{161}{289}$; 3) $\frac{120}{169}$; 4) $-\frac{120}{119}$. **5.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 4) 1. **6.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$. **7.** 1) 1; 2) 1; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $2\cos\alpha$. **8.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $8+4\sqrt{3}$; 4) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. **9.** 1) $\frac{23}{27}$; 2) $-\frac{11}{16}$; 3) $-\frac{11}{2}$; 4) $-\frac{13}{9}$. **11.** 1) $1-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}$; 2) $1-\frac{3\sin^2 2\alpha}{4}$; 3) $1-\sin^2 2\alpha+\frac{\sin^4 2\alpha}{8}$. **12.** 1) $-\frac{1}{8}$; 2) $\frac{25}{27}$; 3) $\frac{42\sqrt{6}}{125}$; 4) $-\frac{7}{9}$. **13.** 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $x=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

§ 8. ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННЫХ УГЛОВ

Пусть дан угол α. Угол $\frac{\alpha}{2}$ называют *половинным углом*. Поскольку угол α является двойным углом по отношению к углу $\frac{\alpha}{2}$, то из формул понижения степени вытекают следующие равенства:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \quad \text{(формула квадрата косинуса половинного угла)}, \qquad (1)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \quad \text{(формула квадрата синуса половинного угла)}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \text{(формула квадрата тангенса половинного угла)}. \qquad (3)$$

Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \textit{(формула тангенса половинного угла)}. \qquad (4)$$

○ Так как $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$ и $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$. Поэтому справедливы равенства

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \quad ●$$

Аналогично может быть доказано, что для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Пример 1. Найти:

1) $\sin\frac{\pi}{8}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$.

△ 1) Из формулы (2) следует $\sin^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$.

С учетом того, что $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, получаем $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2) Используя формулу (4), получим

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{4}} = \frac{2+\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}-1. \quad ▲$$

Формулы универсальной тригонометрической подстановки. Имеют место формулы, выражающие синус, косинус, тангенс и котангенс угла через тангенс половинного угла.

Для любого угла α такого, что $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливы равенства

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (5)$$

Эти формулы называют *формулами универсальной тригонометрической подстановки*.

○ Докажем первую из формул:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \quad ●$$

Вторая формула доказывается аналогично, а третья следует из двух первых.

Пример 2. Вычислить $\cos 12\alpha$, если $\operatorname{tg} 3\alpha = 3$.

△ $$\operatorname{tg} 6\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 3\alpha} = \frac{2\cdot 3}{1-3^2} = -\frac{3}{4}.$$

Далее, $\cos 12\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 6\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 6\alpha} = \dfrac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \dfrac{7}{25}$. ▲

Задачи

1. Вычислить значение данного выражения через значение выражения от удвоенного угла:

1) $\sin^2 25^\circ$; 2) $\cos^2(22^\circ 30')$; 3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2. Найти численное значение выражения:

1) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$; 2) $1-2\sin^2\frac{5\pi}{12}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15^\circ$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cos^2(22^\circ 30')$.

3. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = 0{,}6$ и $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$;

2) $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

4. Упростить выражение:

1) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 3) $\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$;

4) $(1-\cos 2\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\alpha$; 5) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}$.

5. Доказать тождества:

1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 1+\sin\alpha$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\sin\alpha$;

3) $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$; 4) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg} 2\alpha - 4\operatorname{tg} 4\alpha = 8\operatorname{ctg} 8\alpha$.

6. Найти:

1) $\cos 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$. 2) $\cos 12\alpha$, если $\sin 3\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Вычислить:

1) $\sin^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\cos^4\frac{7\pi}{16}$;

2) $\sin^4\frac{\pi}{24}-\cos^4\frac{5\pi}{16}-\cos^4\frac{13\pi}{16}+\sin^4\frac{13\pi}{24}$.

8. Найти сумму $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}$, если $\cos x = \frac{a}{b+c}$, $\cos y = \frac{b}{c+a}$, $\cos z = \frac{c}{a+b}$, $a+b+c \neq 0$.

9. Решить уравнения:

1) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$; 3) $1+\cos\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $1+\cos 8x=2\cos 4x$; 5) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=1$; 6) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x=1$.

Ответы

1. 1) $\frac{1-\cos 50^\circ}{2}$; 2) $\frac{1+\cos 45^\circ}{2}$; 3) $\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}=\frac{1+\sin 2\alpha}{2}$; 4) $\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{2}=\frac{1+\sin 2\alpha}{2}$. **2.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 1; 4) -1. **3.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{0{,}2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{0{,}9}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{2}$; 3) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{2}$. **4.** 1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}2\alpha$; 5) $\cos 4\alpha$. **6.** 1) $\frac{7}{25}$; 2) $-\frac{7}{9}$. **7.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$. **8.** 1. **9.** 1) $2\pi n$, $\pi+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $4\pi n, \pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $2\pi+4\pi n$, $4\pi+8\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

§ 9. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ В СУММЫ

1) Для любых углов α и β справедливы формулы

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}, \tag{1}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \tag{2}$$

○ При всех α и β имеют место тождества

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Складывая и вычитая соответственно левые и правые части этих равенств, получаем при сложении формулу (1), называемую *формулой преобразования произведения косинусов в сумму*, а при вычитании — формулу (2), называемую *формулой преобразования произведения синусов в сумму*. ●

2) Для любых углов α и β справедливы формулы

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \tag{3}$$

○ При всех α и β имеют место тождества

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Складывая соответственно левые и правые части этих равенств, получаем формулу (3), называемую *формулой преобразования произведения синуса одного угла на косинус другого в сумму.* ●

Полученные формулы могут быть сведены в следующую таблицу.

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$
$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$
$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$

Пример 1. Вычислить:

1) $18\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4\cos 80^\circ}-\cos 20^\circ$.

△ 1) Используя формулу (2), а затем формулу $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, получим:

$$18\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=18\cdot\frac{\cos\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=$$

$$=9(\cos\alpha-\cos 2\alpha)=9\left(\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1\right)=9\left(\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{9}+1\right)=10.$$

2) Приводя к общему знаменателю и используя формулу (1), получим:

$$\frac{1}{4\cos 80^\circ}-\cos 20^\circ=\frac{1-4\cos 80^\circ\cdot\cos 20^\circ}{4\cos 80^\circ}=$$

$$=\frac{1-4\cdot\frac{1}{2}(\cos(80^\circ+20^\circ)+\cos(80^\circ-20^\circ))}{4\cos 80^\circ}=\frac{1-2\cos 100^\circ-2\cos 60^\circ}{4\cos 80^\circ}=$$

$$=\frac{-2\cos 100^\circ}{4\cos 80^\circ}=\frac{-\cos(180^\circ-80^\circ)}{2\cos 80^\circ}=\frac{\cos 80^\circ}{2\cos 80^\circ}=\frac{1}{2}.$$ ▲

Пример 2. При каких значениях x выражение

$$y=\cos\left(\frac{\pi}{5}+2x\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}-2x\right)$$

принимает наибольшее и наименьшее значения?

△ Используя формулу (1), получим

$$y=\cos\left(\frac{\pi}{5}+2x\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}-2x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)\right).$$

Так как при всех значениях x справедливо двойное неравенство $-1\leqslant\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)\leqslant 1$, а $\cos\frac{3\pi}{5}$ — фиксированное число, то наибольшее значение рассматриваемое выражение примет тогда, когда

$\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)=1$, т. е. при $4x-\frac{\pi}{5}=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Соответственно, наименьшее значение выражение примет тогда, когда $\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)=-1$. Отсюда получаем, что $4x-\frac{\pi}{5}=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. ▲

Пример 3. Доказать тождество

$$\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha. \tag{4}$$

△ Пусть A — левая часть доказываемого равенства. Используя формулу произведения косинусов, получим

$$\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{\cos(60^\circ-\alpha+60^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha-60^\circ-\alpha)}{2}=$$
$$=\frac{\cos 120^\circ+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\cos 2\alpha\right).$$

Тогда $A=\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\cos 2\alpha\right)=-\frac{1}{4}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

Так как $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{2}$, то

$$A=-\frac{1}{4}\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos 3\alpha=\frac{1}{4}\cos 3\alpha. \qquad ▲$$

Замечание. Аналогичные формулы справедливы для синусов, тангенсов и котангенсов:

$$\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha, \tag{6}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}3\alpha. \tag{7}$$

Пример 4. Вычислить

$$A=\sin 5^\circ\cdot\sin 55^\circ\cdot\sin 65^\circ.$$

△ Заметим, что при $\alpha=5^\circ$ получаем левую часть формулы (5). Следовательно,

$$A=\frac{1}{4}\sin 15^\circ=\frac{\sin(45^\circ-30^\circ)}{4}=\frac{\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}. \quad ▲$$

Для решения следующего примера используется тот же прием, что и при решении примера 3 в §7. Только теперь он применяется для преобразования суммы тригонометрических выражений.

Пример 5. Вычислить сумму $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

$\triangle$ Умножая и деля данное выражение на $2\sin\frac{\pi}{7}$, а затем используя формулу (3), получим

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}. \quad \blacktriangle$$

Задачи

1. Преобразовать произведение в сумму:

1) $\cos 10^\circ\cdot\cos 40^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}$; 3) $\sin 18^\circ\cdot\sin 32^\circ$;

4) $\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}$; 5) $\sin(x+\alpha)\cdot\cos(x-\alpha)$; 6) $\cos(2x+\alpha)\cdot\cos(2x-\alpha)$.

2. Вычислить:

1) $\frac{1}{2\sin 50^\circ}+2\sin 10^\circ$; 2) $\frac{1}{2\sin 80^\circ}-2\cos 20^\circ$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}-4\sin 110^\circ$.

3. Вычислить:

1) $\cos 5^\circ\cdot\cos 55^\circ\cdot\cos 65^\circ$; 2) $\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 20^\circ\cdot\operatorname{tg} 40^\circ\cdot\operatorname{tg} 60^\circ\cdot\operatorname{tg} 80^\circ$; 4) $\sin^2 70^\circ\cdot\sin^2 50^\circ\cdot\sin^2 10^\circ$.

4. Вычислить:

1) $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{9}$; 2) $\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$.

5. Доказать тождества:

1) $-4\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos 3x$;

2) $4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3x$.

6. Доказать тождества:

1) $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cdot\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha$;

2) $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin(\gamma-\beta)+\sin\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-\gamma)=$ $=\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\beta-\gamma)\cdot\sin(\gamma-\alpha)$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{24}-x\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{18}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}+x\right)$.

8. Решить уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{24}-x\right)=\frac{1}{4}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$;

3) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2 x=0$.

Ответы

1. 1) $\frac{\cos 30^\circ+\cos 50^\circ}{2}$; 2) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{24}+\cos\frac{11\pi}{24}\right)$; 3) $\frac{\cos 14^\circ-\cos 50^\circ}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{10}-\cos\frac{7\pi}{10}\right)$; 5) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 2x}{2}$; 6) $\frac{\cos 2\alpha\cdot\cos 4x}{2}$. **2.** 1) 1; 2) -1;

3) -2. **3.** 1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$; 2) $\frac{3}{16}$; 3) 3; 4) $\frac{1}{64}$. **4.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 0. **7.** 1) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$, $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+1}{8}$, $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-1}{8}$. **8.** 1) $\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) πn, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

§10. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

1) Для любых углов α и β справедливы формулы

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (1)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (2)$$

○ Для любых углов x и y справедлива формула (1) предыдущего параграфа:

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}.$$

Преобразуем эту формулу к виду

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cdot\cos x\cdot\cos y. \qquad (3)$$

Обозначая $\alpha=x+y$ и $\beta=x-y$, получим $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$. После замены в равенстве (3) углов x и y на их выражения через α и β получим

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Аналогично из формулы (2) §9 выводится формула (2). ●

Формула (2) может быть преобразована к виду

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Формула (1) называется *формулой преобразования суммы косинусов в произведение*, а формула (2) — *формулой преобразования разности косинусов в произведение*.

2) Для любых углов α и β справедливы формулы

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (4)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (5)$$

Вывод формул (4) и (5) из формулы (3) §9 аналогичен выводу формул (1) и (2). Формула (4) называется *формулой преобразования суммы синусов в произведение*, а формула (5) — *формулой преобразования разности синусов в произведение*.

Полученные формулы могут быть сведены в таблицу.

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Пример 1. Вычислить $\frac{\sin 3^\circ\cdot\cos 3^\circ}{\sin 54^\circ-\sin 66^\circ}$.

△ Используя формулу разности синусов и формулу синуса двойного угла, получим

$$\frac{\sin 3^\circ\cdot\cos 3^\circ}{\sin 54^\circ-\sin 66^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 6^\circ}{2\sin\left(\frac{54^\circ-66^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{54^\circ+66^\circ}{2}\right)}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 6^\circ}{\sin(-6^\circ)\cos 60^\circ}=-\frac{1}{2}.\quad ▲$$

Пример 2. Преобразовать сумму в произведение:

1) $S_1=\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha$;
2) $S_2=\sin 4\alpha+\sin 6\alpha+\sin 8\alpha+\sin 10\alpha$.

△ 1) Используя формулу разности косинусов и разности синусов, получим

$$S_1=(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)+(\cos 5\alpha-\cos 3\alpha)=$$
$$=2\sin 3\alpha\cdot\sin\alpha-2\sin 4\alpha\cdot\sin\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cdot(\sin 3\alpha-\sin 4\alpha)=-4\sin\alpha\cdot\cos\frac{7\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

2) По аналогии с предыдущим пунктом, получим

$$S_2=(\sin 4\alpha+\sin 6\alpha)+(\sin 8\alpha+\sin 10\alpha)=$$
$$=2\sin 5\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin 9\alpha\cdot\cos\alpha=$$
$$=2\cos\alpha\cdot(\sin 5\alpha+\sin 9\alpha)=4\cos\alpha\cdot\sin 7\alpha\cdot\cos 2\alpha.\quad ▲$$

Пример 3. Вычислить $A=\sin\frac{\pi}{11}\cdot\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{22}\right)-\sin\frac{9\pi}{22}\cdot\cos\frac{9\pi}{22}$.

△ Используя формулу $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, получаем

$$A=\sin\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{\pi}{11}-\sin\frac{9\pi}{22}\cos\frac{9\pi}{22}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{11}-\frac{1}{2}\sin\frac{9\pi}{11}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{2\pi}{11}-\frac{9\pi}{11}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{2\pi}{11}+\frac{9\pi}{11}}{2}=-\sin\frac{7\pi}{22}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0.\quad ▲$$

Пример 4. Преобразовать сумму в произведение

$$S=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2(\alpha+\beta).$$

$\triangle$ Используя равенство $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ и формулу суммы косинусов, получаем

$$S = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} - \sin^2(\alpha+\beta) = \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + 1 - \sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos(\alpha+\beta)\cdot(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta). \quad \blacktriangle$$

Пример 5. Доказать равенство

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

$\triangle$ Пусть S — левая часть доказываемого тождества. Преобразуем S, используя формулы суммы и разности синусов. Имеем:

$$S = (\sin\alpha + \sin\beta) + (\sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)) =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\left(\gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right).$$

Далее, используя формулу разности косинусов, получим

$$S = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}. \quad \blacktriangle$$

Пример 6. Доказать тождество

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(n\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$\triangle$ Пусть $S_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha$. Умножим S_n на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ и воспользуемся формулой (2). Получим

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S_n = \sin\alpha\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} + \sin 2\alpha\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} + \ldots + \sin n\alpha\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2} + \ldots$$
$$\ldots + \cos\left(\frac{n-3}{2}\alpha\right) - \cos\left(\frac{n-1}{2}\alpha\right) + \cos\left(\frac{n-1}{2}\alpha\right) - \cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right).$$

Заметим, что в полученной сумме взаимно уничтожаются все слагаемые, кроме первого и последнего. Поэтому

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S_n = \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) = 2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}.$$

Если $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$, то из последнего равенства находим

$$S_n = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \quad \blacktriangle$$

Замечание. Для доказательства данного тождества можно воспользоваться методом математической индукции по n.

Метод вспомогательного угла. При решении некоторых задач, например при исследовании гармонических колебаний, приходится иметь дело с выражением $a\sin\alpha+b\cos\alpha$, называемым *тригонометрическим двучленом*. Пусть хотя бы одно из чисел a,b не равно нулю, $\alpha\in\mathbb{Z}$. Тогда $a^2+b^2\neq 0$. Умножив и разделив тригонометрический двучлен на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\alpha\right).$$

Рассмотрим точку $M=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Эта точка лежит на окружности радиуса 1. Поэтому существует угол φ такой, что

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{6}$$

Тогда

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cdot\sin\alpha+\sin\varphi\cdot\cos\alpha)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$

где φ определяется формулами (6).

Приведенный метод, применяемый при преобразовании выражения $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ к виду $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, называется *методом вспомогательного угла*.

Замечание. Выражение $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ может быть также преобразовано к виду

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\varphi_1\cdot\sin\alpha+\cos\varphi_1\cdot\cos\alpha)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi_1),$$

где $\cos\varphi_1=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Так, например:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\alpha\right)=$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right), \tag{7}$$
$$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\alpha\right)=$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right). \tag{8}$$

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значения тригонометрического двучлена $a\sin\alpha+b\cos\alpha$, если хотя бы одно из чисел a, b не равно нулю, $\alpha\in\mathbb{Z}$.

Δ Поскольку $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, а $-1\leqslant\sin(\alpha+\varphi)\leqslant 1$, то отсюда следует, что наибольшее значение $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ равно $\sqrt{a^2+b^2}$, а наименьшее значение равно $-\sqrt{a^2+b^2}$. ▲

Пример 8. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

$\triangle$ Используя формулы (7) и (8), получим

$$\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}-(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right). \qquad \blacktriangle$$

Отметим полезные равенства, которые могут пригодиться при выполнении тригонометрических преобразований:

$$1+\sin 2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\cos 2\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Задачи

1. Вычислить:

1) $\dfrac{\cos 51^\circ-\cos 39^\circ}{\sin 66^\circ-\sin 54^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 34^\circ+\cos 26^\circ}{\sin 64^\circ+\sin 56^\circ}$;

3) $\dfrac{\cos 74^\circ+\cos 46^\circ}{\cos^2 7^\circ-\sin^2 7^\circ}$; 4) $\dfrac{\sin 84^\circ+\sin 36^\circ}{\sin^2 12^\circ-\cos^2 12^\circ}$.

2. Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)$.

3. Записать в виде произведения:

1) $\sin 68^\circ+\sin 66^\circ+\sin 64^\circ+\sin 62^\circ$; 2) $\cos 12^\circ+\cos 42^\circ+\cos 72^\circ+\cos 102^\circ$.

4. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$;

3) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)^2+(\cos 2\alpha+\cos 4\beta)^2=4\cos^2\alpha$.

5. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$.

6. Преобразовать в произведение введением вспомогательного угла:
1) $1+\sqrt{2}\sin\alpha$; 2) $\sin^2\alpha-0{,}75$; 3) $\sqrt{3}\sin x-\cos x$; 4) $\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

7. Преобразовать в произведение введением вспомогательного угла:
1) $1+\sin x+\cos x$; 2) $1-\cos x+\sin x$;
3) $1-\sin x-\cos x$; 4) $1-\sin x+\cos x$.

8. Вычислить:
1) $\mathrm{tg}\,9^\circ-\mathrm{tg}\,27^\circ-\mathrm{tg}\,63^\circ+\mathrm{tg}\,81^\circ$;
2) $\mathrm{tg}\,10^\circ\cdot\mathrm{tg}\,20^\circ+\mathrm{tg}\,20^\circ\cdot\mathrm{tg}\,60^\circ+\mathrm{tg}\,60^\circ\cdot\mathrm{tg}\,10^\circ$;
3) $\sin^2 11^\circ+\cos^2 19^\circ+\cos^2 41^\circ$;
4) $\cos^2 20^\circ\cdot\cos^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ\cdot\cos^2 80^\circ+\cos^2 80^\circ\cdot\cos^2 20^\circ$.

9. Решить уравнение:
1) $\cos 4x\cdot\cos 2x=\cos 5x\cdot\cos x$; 2) $\sin 5x\cdot\sin x=\sin 7x\cdot\sin 3x$.

10. Доказать тождества:
1) $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cdot\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha$;
2) $\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{6}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$.

11. Доказать тождества:
1) $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,3\alpha+\mathrm{ctg}\,3\alpha=\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$;
2) $\mathrm{tg}\,3\alpha-\mathrm{tg}\,2\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{tg}\,3\alpha\cdot\mathrm{tg}\,2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$;
3) $\mathrm{tg}\,\alpha+2\,\mathrm{tg}\,2\alpha+4\,\mathrm{tg}\,4\alpha+8\,\mathrm{tg}\,8\alpha=\mathrm{ctg}\,\alpha$.

12. Доказать тождества:
1) $\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 12\alpha+\cos 14\alpha=4\cos\alpha\cdot\cos 5\alpha\cdot\cos 8\alpha$;
2) $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos 3\alpha+\sin 3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$;
3) $\cos 11\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+\cos 5\alpha=8\cos\alpha\cdot\cos^3 5\alpha$;
4) $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\beta$.

13. Доказать, что справедливо равенство:
1) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, если $\sin\frac{x}{2}\neq 0$;
2) $\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\ldots+\sin(2n-1)x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n-1)x}=\mathrm{tg}\,nx$.

Ответы

1. 1) $-\sqrt{2}$; 2) 1; 3) 1; 4) $-\sqrt{3}$. **2.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\sqrt{2}\cos\beta$; 3) $\sqrt{2}\sin\alpha$; 4) $\sin\beta$. **3.** 1) $4\sin 65^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 1^\circ$; 2) $2\sqrt{3}\cos 57^\circ\cdot\cos 15^\circ$. **6.** 1) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. **7.** 1) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}$; 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; 3) $-2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$; 4) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}$. **8.** 1) 4; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{9}{16}$. **9.** 1) πn, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{8}$, $n\in\mathbb{Z}$.

§ 11. АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС ЧИСЛА

1. Арксинус

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то *арксинусом числа* a называется такое число t из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, т. е. $\sin t = a$ (рис. 14). Арксинус числа a обозначают $\arcsin a$.

Замечание. Название возникло от латинского *arcus* — дуга. Соответственно, $\arcsin a$ — дуга, синус которой равен a.

Из данного определения следует, что

$$\sin(\arcsin a) = a, \text{ если } |a| \leqslant 1, \tag{1}$$

$$\arcsin(\sin t) = t, \text{ если } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \tag{2}$$

Пример 1. Вычислить $\arcsin(\sin\alpha)$, если:

1) $\alpha = \frac{13\pi}{3}$; 2) $\alpha = \pi^2$.

△ 1) Число $\frac{13\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, но $\frac{13\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$ и $\sin\frac{13\pi}{3} = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

2) Так как $3\pi < \pi^2 < 3\pi + \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} < 3\pi - \pi^2 < 0$. Используя равенство $\sin(3\pi - \pi^2) = \sin\pi^2$, получаем $\arcsin(\sin\pi^2) = \arcsin(\sin(3\pi - \pi^2)) = 3\pi - \pi^2$. ▲

2. Арккосинус

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то *арккосинусом числа* a называется такое число t из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a, т. е. $\cos t = a$ (рис. 15). Арккосинус числа a обозначают $\arccos a$.

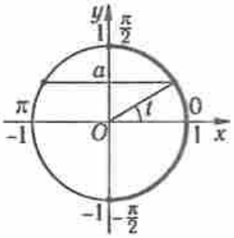


Рис. 14

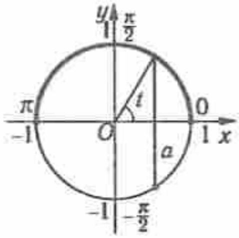


Рис. 15

Из определения следует, что

$$\cos(\arccos a) = a, \text{ если } |a| \leqslant 1, \tag{3}$$

$$\arccos(\cos t) = t, \text{ если } t \in [0; \pi]. \tag{4}$$

Пример 2. Вычислить $\arccos(\cos\alpha)$, если
1) $\alpha = \frac{9\pi}{8}$; 2) $\alpha = 6$.

△ 1) Число $\frac{9\pi}{8} \notin [0; \pi]$, но $\frac{9\pi}{8} = \pi + \frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{9\pi}{8} = \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{8}\right) = \cos\frac{7\pi}{8}$, а число $\frac{7\pi}{8} \in [0; \pi]$. Поэтому $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{8}\right) = \arccos\left(\cos\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{7\pi}{8}$.

2) Так как $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$, то $-2\pi < -6 < -\frac{3\pi}{2}$ и $0 < 2\pi - 6 < \frac{\pi}{2}$, $\cos(2\pi - 6) = \cos 6$. Поэтому $\arccos(\cos 6) = \arccos(\cos(2\pi - 6)) = 2\pi - 6$. ▲

3. Арктангенс

Определение. *Арктангенсом числа* $a \in \mathbb{R}$ называется такое число t из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, т. е. $\operatorname{tg} t = a$ (рис. 16). Арктангенс числа a обозначают $\operatorname{arctg} a$.

Из определения следует, что

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a \text{ для любого } a \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t, \text{ если } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \tag{6}$$

4. Арккотангенс

Определение. *Арккотангенсом числа* $a \in \mathbb{R}$ называется такое число $t \in (0; \pi)$, что $\operatorname{ctg} t = a$ (рис. 17). Арккотангенс числа a обозначают $\operatorname{arcctg} a$.

Из определения следует, что

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a \text{ для любого } a \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t, \text{ если } t \in (0; \pi). \tag{8}$$

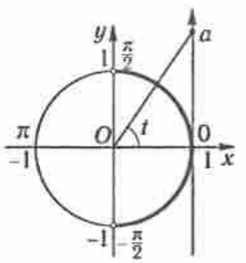


Рис. 16

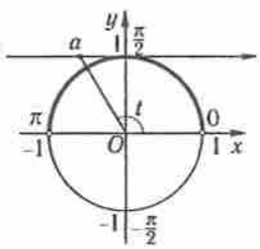


Рис. 17

Пример 3. Вычислить:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{5}\right)$.

△ 1) Так как $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8} = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{3\pi}{8}.$$

2) Используя равенство $\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{5} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}$ и учитывая, что $-\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$, получаем $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{5}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}$. ▲

Таблица значений $\arcsin a$ и $\arccos a$

a	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Таблица значений $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arcctg} a$

a	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Основные тождества

$\arcsin(-x) = -\arcsin x, x \in [-1; 1]$	$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, x \in [-1; 1]$
$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, x \in \mathbb{R}$
$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1; 1]$	$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$

Пример 4. Вычислить

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arcctg} 0.$$

△ $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arcctg} 0 =$

$= \frac{\pi}{4} + \left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg} 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$ ▲

Пример 5. Доказать, что для любого $x \in [-1; 1]$

1) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$; 2) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

$\triangle$ 1) Обозначим $\arccos(-x) = y$, тогда по определению имеем:

$$-x = \cos y \quad \text{и} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi,$$

откуда $x = -\cos y = \cos(\pi - y)$ и $0 \leqslant \pi - y \leqslant \pi$.

Из соотношения $x = \cos(\pi - y)$ следует, что $\pi - y = \arccos x$. Отсюда получаем доказываемое равенство

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

2) Обозначим $\arcsin x = z$, тогда по определению арксинуса имеем:

$$\sin z = x \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2},$$

или

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = x \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant -z \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Прибавляя к обеим частям последнего неравенства по $\frac{\pi}{2}$, получим $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - z \leqslant \pi$, т. е. число $\frac{\pi}{2} - z \in [0; \pi]$, а потому соотношение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = x$ можно записать следующим образом: $\frac{\pi}{2} - z = \arccos x$, откуда $z + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, или $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. ▲

5. Метод вспомогательного треугольника

Пример 6. Доказать, что для любого $0 < a < 1$ справедливы равенства

$$\arcsin a = \arccos\sqrt{1 - a^2} = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

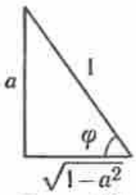


Рис. 18

$\triangle$ Рассмотрим прямоугольный треугольник («вспомогательный треугольник») с гипотенузой, равной 1, и катетом, равным a (рис. 18). Другой его катет равен $\sqrt{1 - a^2}$. Пусть φ — угол, противолежащий катету длины a (рис. 18). Тогда $\sin\varphi = a$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - a^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$ и $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$.

В соответствии с определениями: $\varphi = \arcsin a$, так как $\sin\varphi = a$ и $0 < a < 1$; $\varphi = \arccos\sqrt{1 - a^2}$, так как $\cos\varphi = \sqrt{1 - a^2}$, $0 < \sqrt{1 - a^2} < 1$. Аналогично, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$ и $\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$.

Следовательно, верны следующие равенства:

$$\varphi = \arcsin a = \arccos\sqrt{1 - a^2} = \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}. \quad ▲$$

Замечание. Если число a рационально и $a = \frac{p}{q}$, то в качестве «вспомогательного» берется треугольник, в котором один из катетов равен p, а гипотенуза равна q.

Аналогично доказывается, что для любого $a>0$ справедливы равенства
$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arcctg}\frac{1}{a} = \arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Замечание. В этом случае строится вспомогательный треугольник, у которого один катет равен 1, а другой a.

Пример 7. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

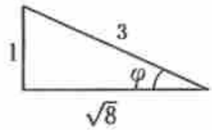


Рис. 19

$\triangle$ Рассмотрим треугольник с катетом 1 и гипотенузой 3 (рис. 19). Тогда $\sin\varphi=\frac{1}{3}$ и $\varphi=\arcsin\frac{1}{3}$. Соответственно, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{8}}$ и $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{8}}$. Значит,
$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\sqrt{8}}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 8. Вычислить $A=\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{8}{15}-\arccos\frac{15}{17}\right)$.

$\triangle$ Пусть $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$, $\beta=\arccos\frac{15}{17}$. Тогда $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\cos\beta=\frac{15}{17}$. Воспользуемся формулой
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$
Так как $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$, $\sin\beta>0$, то
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2}}=\frac{15}{17},$$
$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17},\quad \sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}.$$
Следовательно, $A=\sin(\alpha-\beta)=\frac{8}{17}\cdot\frac{15}{17}-\frac{15}{17}\cdot\frac{8}{17}=0$. $\blacktriangle$

Пример 9. Доказать, что $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\frac{3\pi}{4}$.

$\triangle$ Пусть $\alpha=\operatorname{arctg}2$, $\beta=\operatorname{arctg}3$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\operatorname{tg}\beta=3$. Имеем $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{2+3}{1-2\cdot3}=-1$. Оценим значения α и β сверху и снизу. Так как $2>1$, то $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}$. Аналогично $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$. Так как $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-1$, то $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$. $\blacktriangle$

Задачи

1. Найти численное значение выражения:

1) $\arcsin 0+\arccos 0-\operatorname{arctg}0-\operatorname{arcctg}0$;

2) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\operatorname{arcctg}(-1)$;

3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

4) $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{4\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)$;

5) $\arcsin\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\frac{\pi}{3}\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\operatorname{arcctg}(-1)\right)$;

7) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

2. Найти численное значение выражения:

1) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)$; 2) $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}\right)$.

3. Доказать:

1) $\arcsin(-a)=-\arcsin a$ для любого $a\in[-1;1]$;

2) $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$ для любого $a\in\mathbb{R}$;

3) $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}$ для любого $a\in\mathbb{R}$.

4. Упростить:

1) $\sin(\arccos a)$; 2) $\cos(\operatorname{arctg} a)$; 3) $\sin(\operatorname{arcctg} a)$;
4) $\operatorname{tg}(\arcsin a)$; 5) $\operatorname{ctg}(\arccos a)$; 6) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)$.

5. Упростить:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3\right)$; 2) $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$; 3) $\sin(\arcsin 3+\operatorname{arcctg}4)$;

4) $\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; 5) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}-\arccos\frac{2}{3}\right)$.

6. Упростить:

1) $\arccos(\cos 3)$; 2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}3)$; 3) $\arcsin(\sin 10)$; 4) $\arccos(\sin 5)$;
5) $\arcsin(\cos 113^\circ)$; 6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}307^\circ)$; 7) $\arccos(\sin 274^\circ)$.

7. Решить уравнения:

1) $2\arcsin^2 x-\arcsin x-6=0$; 2) $\arcsin^2 x-2\arcsin x-3=0$;

3) $\arccos^2 x-8\arccos x+15=0$; 4) $\arccos^2 x-\arccos x-6=0$;

5) $\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}-4\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-5=0$; 6) $3\operatorname{arcctg}^2 x-4\operatorname{arcctg} x+\pi^2=0$;

7) $4\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{x+3}=\pi$; 8) $\arccos x-\arcsin x=\frac{\pi}{6}$.

8. Доказать или опровергнуть равенства:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{1}{7}=\arccos\frac{3\sqrt{3}}{14}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$;

3) $\arccos\frac{15}{17}-\arcsin\frac{4}{5}-\arccos\frac{36}{85}=\frac{\pi}{2}$; 4) $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\frac{3\pi}{4}$.

Ответы

1. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; 5) $-\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 7) -1. **2.** 1) $-\frac{2\pi}{5}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{8}$. **4.** 1) $\sqrt{1-a^2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$; 4) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$; 5) $\frac{1}{a}$. **5.** 1) $\frac{\sqrt{10}-1}{3}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{7}{\sqrt{170}}$; 4) $-\frac{5}{13}$; 5) $\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$; 6) $\pi-3$. **6.** 1) 3; 2) $3-\pi$; 3) $3\pi-10$; 4) $\frac{5\pi}{2}-5$; 5) $-\frac{23\pi}{180}$; 6) $-\frac{37\pi}{180}$; 7) $\frac{44\pi}{45}$. **7.** 1) $-\sin\frac{3}{2}$; 2) $-\sin 1$; 3) $\cos 3$; 4) $\cos 3$; 5) $-3\operatorname{tg}1$; 6) $\sqrt{3}$; 7) 2; 8) 0,5.

Глава VI

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ОПЕРАЦИИ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

1. Введение

Решение многих задач математики, физики и практики сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому исследование алгебраических уравнений является одним из важнейших вопросов математики. Стремление сделать уравнения разрешимыми — одна из главных причин расширения понятия числа.

На множестве рациональных чисел разрешимы алгебраические уравнения первой степени, т. е. уравнения вида $ax+b=0$ (где $a \neq 0$ и b — рациональные числа). Однако алгебраические уравнения степени выше первой могут не иметь рациональных корней. Например, такими являются уравнения $x^2=2$, $x^3=5$. Необходимость решения таких уравнений явилась одной из причин введения иррациональных чисел. Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. Множество действительных чисел является расширением множества рациональных чисел.

Однако и действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое алгебраическое уравнение. Например, квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом не имеет действительных корней. Простейшее из них — уравнение $x^2+1=0$.

Введем новое число i, которое будем считать корнем уравнения $x^2+1=0$, т. е. будем считать, что для числа i выполнено равенство $i^2+1=0$. Далее, попытаемся расширить множество действительных чисел так, чтобы в новом числовом множестве содержались все действительные числа и число i и чтобы в новом множестве были выполнены операции сложения и умножения. Для этого нужно договориться, что мы будем понимать под суммой, произведением и равенством новых чисел. Ясно, что в это множество новых чисел нужно включить произведение bi и сумму $a+bi$ для любых действительных чисел a и b.

2. Определение комплексного числа

Комплексными числами называют упорядоченные пары (a, b) действительных чисел a и b, для которых следующим образом определены понятие равенства и операции сложения и умножения.

Обозначим комплексное число (a, b) буквой z, т. е. положим $z = (a, b)$. Пусть $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$. Два комплексных числа z_1 и z_2 считаются *равными* тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, т. е.

$$\{(a_1, b_1) = (a_2, b_2)\} \iff \{a_1 = a_2\} \wedge \{b_1 = b_2\}.$$

Сумма и произведение комплексных чисел z_1 и z_2 обозначаются соответственно $z_1 + z_2$ и $z_1 z_2$ и определяются формулами

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \tag{1}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) следуют соотношения

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0), \quad (a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1 a_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами вида $(a, 0)$ совпадают с операциями над действительными числами. Поэтому комплексное число вида $(a, 0)$ отождествляют с действительным числом a, т. е. полагают $(a, 0) = a$.

Среди комплексных чисел особую роль играет число $(0, 1)$, которое называют *мнимой единицей* и обозначают i, т. е.

$$i = (0, 1).$$

Вычислив произведение i на i по формуле (2), получим

$$i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

т. е. $i^2 = -1$. Используя формулы (1), (2), для произвольного действительного числа b находим

$$ib = (0, 1)(b, 0) = (0, b), \quad (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib.$$

Следовательно, любое комплексное число $z = (a, b)$ можно записать в виде $a + ib$, т. е.

$$z = a + ib. \tag{3}$$

Запись комплексного числа $z = (a, b)$ в виде (3) называют *алгебраической формой комплексного числа*.

В записи (3) число a называют *действительной частью комплексного числа* и обозначают $\operatorname{Re} z$, а число b — мнимой частью и обозначают $\operatorname{Im} z$, т. е.

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b.$$

Если $a=0$, т. е. $z=ib$, то такое комплексное число называют *чисто мнимым*.

Здесь и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, в записи $a+ib$ числа a и b считаются действительными.

Множество комплексных чисел обозначают буквой $\mathbb{C}$.

Пример 1. Найти действительные числа x и y, если

$$4x+3yi=8-12i.$$

$\triangle$ Из определения равенства двух комплексных чисел следует, что $4x=8$, $3y=-12$, откуда $x=2$, $y=-4$. $\blacktriangle$

Пример 2. Найти действительные числа x и y из равенства

$$x+2y+i(x-y)=1+4i.$$

$\triangle$ По определению равенства комплексных чисел

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ x-y=4, \end{cases}$$

откуда находим $x=3$, $y=-1$. $\blacktriangle$

Запишем формулы (1)–(2) в виде

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i, \tag{4}$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i. \tag{5}$$

Из формул (4) и (5) следует, что сложение и умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам действий с многочленами, заменяя i^2 на -1.

Например, равенство (5) можно получить так:

$$z_1z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2+ia_1b_2+ia_2b_1+i^2b_1b_2=$$
$$=a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+a_2b_1).$$

Поэтому нет необходимости запоминать формулы (4) и (5).

Пример 3. Найти произведение $z=(2-3i)(1+2i)$.

$\triangle$ $$z=2\cdot1+2\cdot2i-3i\cdot1-3i(2i)=8+i.$$ $\blacktriangle$

3. Свойства операций сложения и умножения

Действия сложения и умножения комплексных чисел обладают такими же свойствами, как и соответствующие действия над действительными числами.

1°. Переместительное свойство (*коммутативность*):

$$z_1+z_2=z_2+z_1, \quad z_1z_2=z_2z_1.$$

2°. Сочетательное свойство (*ассоциативность*):

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3), \quad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$$

3°. Распределительное свойство (*дистрибутивность*):

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

○ Докажем, например, свойство 3°. Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ и $z_3=a_3+b_3i$. Доказать, что

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3. \tag{6}$$

Преобразуем левую часть равенства (6):

$$z_1(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)(a_2+a_3+(b_2+b_3)i)=$$
$$=a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)+(b_1(a_2+a_3)+a_1(b_2+b_3))i=$$
$$=a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)i.$$

Преобразуем правую часть равенства (6):

$$z_1z_2+z_1z_3=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)=$$
$$=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)i+a_1a_3-b_1b_3+(a_1b_3+b_1a_3)i=$$
$$=a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)i.$$

Следовательно, равенство (6) выполняется. ●

Аналогично доказываются свойства 1° и 2°.

Заметим, что числа $0=0+0i$ и $1=1+0i$ на множестве комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и на множестве действительных чисел, а именно:

$$z+0=z, \quad z\cdot 1=z.$$

Задачи

1. Найти x, если действительная часть комплексного числа z равна нулю:
1) $z=x-3+4i$; 2) $z=3x+2-5i$; 3) $z=5x-4+2i$; 4) $z=2+3x-3i$.

2. Найти y, если мнимая часть комплексного числа z равна нулю:
1) $z=2-3yi$; 2) $z=4+(3y-4)i$; 3) $z=1+(2y+1)i$; 4) $z=5+(2-5y)i$.

3. Найти сумму комплексных чисел:
1) $(2-3i)+(3-2i)$; 2) $3i+(4-3i)$;
3) $-4+5i+(4-5i)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}i\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}i\right)$.

4. Найти произведение комплексных чисел:
1) $(2-3i)(2+3i)$; 2) $(4+5i)(2-i)$; 3) $(4-5i)(2+7i)$; 4) $\left(\frac{1}{2}+i\right)\left(\frac{3}{4}+2i\right)$.

5. Выполнить действия:
1) $3i(1-i)+2i(1+i)$; 2) $\frac{1}{2}(4+2i)+\frac{1}{3}i(3-9i)$;
3) $2i(1-2i)+2i(1+i)$; 4) $5+(5-i)(1+i)$.

Ответы

1. 1) 3; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $-\frac{2}{3}$. **2.** 1) 0; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{5}$. **3.** 1) $5-5i$; 2) 4; 3) 0; 4) $\frac{2}{3}i$. **4.** 1) 13; 2) $13+6i$; 3) $43+18i$; 4) $-\frac{13}{8}+\frac{7}{4}i$. **5.** 1) $1+5i$; 2) $5+2i$; 3) $2+4i$; 4) $11+4i$.

§ 2. КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫЕ ЧИСЛА. МОДУЛЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ОПЕРАЦИИ ВЫЧИТАНИЯ И ДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Комплексно-сопряженные числа

Сопряженным с числом $z = a + bi$ называется комплексное число $a - bi$, которое обозначается $\overline{z}$, т. е.

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi. \qquad (1)$$

Например, $\overline{3 + 5i} = 3 - 5i$, $\overline{-2 - 3i} = -2 + 3i$, $\overline{i} = -i$.

Отметим, что $\overline{a - bi} = a + bi$, поэтому для любого комплексного числа z имеет место равенство

$$\overline{(\overline{z})} = z.$$

Равенство $\overline{z} = z$ справедливо тогда и только тогда, когда z — действительное число.

○ Пусть $z = a + bi$. Тогда $\overline{z} = a - bi$, и равенство $a + bi = a - bi$ по определению равенства комплексных чисел справедливо тогда и только тогда, когда $b = -b$, т. е. $b = 0$, а это и означает, что $z = a + bi = a + 0i = a$ — действительное число. ●

Из определения (1) следует, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2.$$

2. Модуль комплексного числа

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$, обозначаемое через $|z|$, т. е.

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (2)$$

Например, $|6 + 8i| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, $|1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

Из формулы (2) следует, что $|z| \geqslant 0$ для любого комплексного числа z, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$, т. е. когда $a = 0$ и $b = 0$.

Докажем, что *для любого комплексного числа z справедливы формулы*

$$|z| = |\overline{z}|, \quad z\overline{z} = |z|^2.$$

○ Пусть $z = a + bi$. Тогда $\overline{z} = a - bi$, и по определению модуля

$$|\overline{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Найдем произведение:

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2. \quad ●$$

9—2549

3. Вычитание комплексных чисел

Комплексное число $(-1)z$ называется *противоположным* комплексному числу z и обозначается $-z$.

Если $z=a+bi$, то $-z=-a-bi$. Например, $-(3-5i)=-3+5i$. Для любого комплексного числа z выполняется равенство

$$z+(-z)=0.$$

Вычитание комплексных чисел вводится как операция, обратная сложению: для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует, и притом только одно, число z, такое, что

$$z+z_2=z_1, \tag{3}$$

т. е. уравнение (3) имеет только один корень. Число $z=z_1+(-z_2)$ обычно обозначают $z=z_1-z_2$ и называют *разностью* чисел z_1 и z_2.

Если $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, то разность z_1-z_2 имеет следующий вид:

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i. \tag{4}$$

Формула (4) показывает, что разность комплексных чисел можно находить по правилам действий с многочленами.

Пример 1. Найти разность $z=(1+2i)-(-3+4i)$.

△ $$z=1-(-3)+(2-4)i=4-2i.$$ ▲

4. Деление комплексных чисел

Делением называется действие, обратное умножению. Это значит, что *частным* двух комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2\neq0$, называется такое число z, которое удовлетворяет уравнению $zz_2=z_1$; частное двух комплексных чисел z_1 и z_2 обозначается через $z_1:z_2$ или $\frac{z_1}{z_2}$. Другими словами, запись $z=\frac{z_1}{z_2}$ означает, по определению, то же самое, что и запись $zz_2=z_1$.

Докажем, что *уравнение $z_2z=z_1$ для любых комплексных чисел z_1 и $z_2\neq0$ имеет только один корень, и найдем этот корень.*

○ Умножив обе части уравнения на $\overline{z}_2$, получим $zz_2\overline{z}_2=z_1\overline{z}_2$, т. е.

$$z|z_2|^2=z_1\overline{z}_2.$$

Полученное уравнение равносильно данному, так как $z_2\neq0$ и потому $\overline{z}_2\neq0$. Умножив обе его части на действительное число $\frac{1}{|z|^2}$ (заметим, что $|z_2|^2\neq0$, так как $z_2\neq0$), получим $z=\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$. Итак, частное комплексных чисел z_1 и $z_2\neq0$ можно найти по формуле

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}. \tag{5}$$

●

Если $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то формулу (5) можно представить в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i. \qquad (6)$$

Нет необходимости запоминать формулу (6). Нужно только знать, что она получается умножением и числителя, и знаменателя дроби $\dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ на число $a_2 - b_2 i$, сопряженное с ее знаменателем $a_2 + b_2 i$.

Пример 2. Вычислить:

1) $\dfrac{5 - 2i}{3 + 4i}$; 2) $\dfrac{(1 + 2i)(1 - i)}{3 - i}$; 3) $\left(\dfrac{1 + i^{27}}{1 + i^{125}}\right)^{11}$.

△ 1) $\dfrac{5 - 2i}{3 + 4i} = \dfrac{(5 - 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{15 - 26i + 8i^2}{25} = \dfrac{7}{25} - \dfrac{26}{25} i$;

2) $\dfrac{(1 + 2i)(1 - i)}{3 - i} = \dfrac{(3 + i)^2}{10} = \dfrac{8 + 6i}{10} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5} i$;

3) $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^{4n+k} = i^k$ $(n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, 2, 3)$,
$i^{27} = i^{24+3} = i^3 = -i$, $i^{125} = i^{124+1} = i$;

$$\left(\frac{1 + i^{27}}{1 + i^{125}}\right)^{11} = \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^{11} = \left(\frac{(1 - i)(1 - i)}{2}\right)^{11} = \left(\frac{-2i}{2}\right) = (-i)^{11} = i. \ ▲$$

Пример 3. Доказать, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

△ Используя свойство комплексно-сопряженных чисел, получаем

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} =$$
$$= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) + (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 2 z_1 \overline{z}_1 + 2 z_2 \overline{z}_2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

▲

Задачи

1. Найти разность комплексных чисел:

1) $(3 + 4i) - (3 + 2i)$; 2) $(3 - 5i) - (-2 + 4i)$;

3) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{3})i - (\sqrt{5} - 4\sqrt{3})i$; 4) $(\sqrt{3} - \sqrt{2}i) - (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}i)$.

2. Найти частное комплексных чисел:

1) $\dfrac{-1 - i}{-1 + i}$; 2) $\dfrac{2 + 3i}{2 - 3i}$; 3) $\dfrac{1 + 2i}{3 - 2i}$; 4) $\dfrac{-5 - 3i}{-7 - 2i}$.

3. Вычислить:

1) $\dfrac{(2 - 3i)(3 - 2i)}{1 + i}$; 2) $\dfrac{(3 - i)(1 + 3i)}{2 - i}$; 3) $\dfrac{3 - 4i}{(1 + i)(2 - i)}$; 4) $\dfrac{2 - 3i}{(1 - i)(3 + i)}$;

5) $\dfrac{5}{1 + 2i} + \dfrac{5}{2 - i}$; 6) $\dfrac{3}{2 - 3i} + \dfrac{3}{2 + 3i}$; 7) $\dfrac{1 + i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{1 + i}$; 8) $\dfrac{2 - 3i}{2 + i} + \dfrac{2 + 3i}{2 - i}$.

4. Выполнить действия:

1) $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$; 2) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

3) $\dfrac{(3-4i)^2(1-i)^2}{(4+3i)^2}+\dfrac{1}{i^9}$; 4) $\left(\dfrac{1-i^{13}}{1-i^{19}}\right)^3$.

5. Решить уравнение:

1) $z^2+3|z|=0$; 2) $z^2+2|z|=1$; 3) $z^2+|z|^2=0$; 4) $z^2+z|z|+|z|^2=0$.

6. Доказать, что комплексное число $\dfrac{1-z}{1+z}$ является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $|z|=1$, $z\neq-1$.

Ответы

1. 1) $2i$; 2) $5-9i$; 3) $\sqrt{5}+7\sqrt{3}i$; 4) $-2\sqrt{3}+\sqrt{2}i$. **2.** 1) i; 2) $-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$; 3) $-\frac{23}{13}+\frac{2}{3}i$; 4) $\frac{41}{53}+\frac{11}{53}i$. **3.** 1) $-\frac{13}{2}-\frac{13}{2}i$; 2) $\frac{4}{5}+\frac{22}{5}i$; 3) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$; 4) $0{,}7-0{,}4i$; 5) $3-i$; 6) $\frac{12}{13}$; 7) 0; 8) $\frac{2}{5}$. **4.** 1) $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$; 2) $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$; 3) $-4-i$; 4) i. **5.** 1) $0,\ 3i,\ -3i$; 2) $\sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2},\ i,\ -i$; 3) $bi,\ b\in\mathbb{R}$; 4) $C\pm\sqrt{3}Ci,\ C\in\mathbb{R}$ — любое.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Комплексная плоскость

Действительные числа геометрически изображаются точками числовой прямой. Комплексное число $a+bi$ определено как пара действительных чисел. Поэтому естественно изображать комплексные числа точками плоскости.

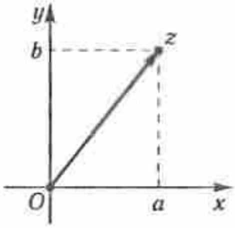


Рис. 1

Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Условимся комплексное число $a+bi$ изображать точкой плоскости с координатами $(a;b)$ (см. рис. 1). Иначе говоря, на оси абсцисс будем откладывать действительные части комплексных чисел, а на оси ординат — мнимые. При этом действительные числа будут изображаться точками оси абсцисс, которую называют поэтому *действительной осью*, а чисто мнимые числа — точками оси ординат, которую называют *мнимой осью*.

Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a,b) поставлено в соответствие число $a+bi$. Таким образом, соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством всех точек плоскости взаимно однозначное. Поэтому в дальнейшем мы не будем различать понятия комплексного числа и точки плоскости и будем говорить, например, «точка $z = 1 - i$», «треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, z_3» и т. п.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*.

Отметим, что точки z и $-z$ симметричны друг другу относительно точки 0 (начала координат), а точки z и $\bar{z}$ симметричны друг другу относительно действительной оси (см. рис. 2).

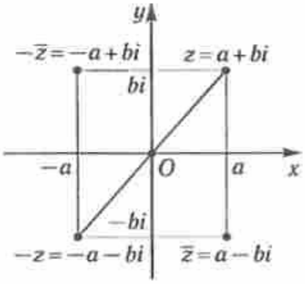


Рис. 2

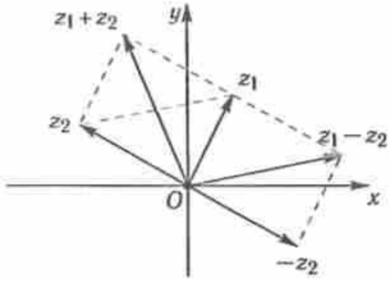


Рис. 3

Комплексное число $z = a + bi$ можно изображать вектором с началом в точке 0 и концом в точке z (см. рис. 1). Этот вектор будем обозначать той же буквой z. Число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов z_1 и z_2 (см. рис. 3), а вектор $z_1 - z_2$ можно построить как сумму векторов z_1 и $-z_2$.

2. Геометрический смысл модуля комплексного числа

Пусть $z = a + bi$, тогда по определению модуля $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Это означает, что $|z|$ есть расстояние от точки 0 до точки z (длина вектора z).

Выясним геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел z_1 и z_2. Из рис. 3 видно, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е. равно $|z_1 - z_2|$. Это же утверждение следует из того, что $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$, где $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Итак, $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2.

Пример 1. Дать геометрическое описание множества всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

1) $|z - z_0| = R$, где z_0 — заданная точка, $R > 0$;
2) $1 < |z - 1| < 2$;
3) $|z - i| = |z + i|$.

△ 1) Условию $|z - z_0| = R$, где $R > 0$, z_0 — заданное комплексное число, удовлетворяют все точки, расстояние от которых до точки z_0 равно R, т. е. точки, лежащие на окружности радиуса R с центром в точке z_0.

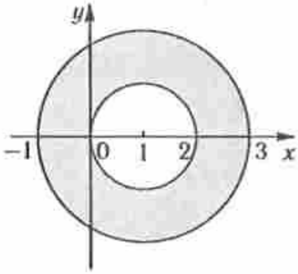


Рис. 4

2) Условию $|z - 1| < 2$ удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга радиуса 2 с центром в точке $z = 1$, а условию $|z - 1| > 1$ — точки, лежащие вне круга радиуса 1 с центром в точке $z = 1$.

Оба этих условия выполняются для точек, лежащих между окружностями $|z - 1| = 1$ и $|z - 1| = 2$ (см. рис. 4).

3) Условию $|z - i| = |z + i|$ удовлетворяют те и только те точки, которые равноудалены от точек i и $-i$, т. е. все точки действительной оси. ▲

Пример 2. Показать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливы неравенства

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{1}$$

△ Рассмотрим треугольник с вершинами 0, z_1 и $z_1 + z_2$ (см. рис. 3). Длины его сторон раны $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$. Поэтому неравенства (1) выражают известные из геометрии свойства длин сторон треугольника. ▲

Задачи

1. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнениям:
1) $|z+1|=2$; 2) $|z-1+i|=4$; 3) $|z-2|=|z+2i|$; 4) $|z+1+i|=|z-1+i|$.

2. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству:
1) $|z+i|<2$; 2) $|z-2+3i|>3$; 3) $2<|z+1-i|<4$; 4) $2\leqslant|z+2i|\leqslant 5$.

3. Решить систему уравнений:
1) $|z + i| = |z + 1 - i| = |z - 3 - 2i|$;

2) $\begin{cases} |z+1| = |z+2|, \\ 3|z+3| = 5|z+2i|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (1-i)\bar{z} = (1+i)z, \\ |z^2 + 51i| = 1. \end{cases}$

4. Доказать, что система уравнений $\begin{cases} |z-1+i| = \sqrt{2}, \\ |z+1-i| = 3\sqrt{3} \end{cases}$ не имеет решений.

5. На комплексной плоскости точки z_1, z_2, z_3 — вершины треугольника. Найти точку пересечения медиан треугольника.

6. На комплексной плоскости точки z_1, z_2, z_3 — последовательные вершины параллелограмма. Найти его четвертую вершину z_4.

Ответы

1. 1) Окружность радиуса 2 с центром -1; 2) окружность радиуса 4 с центром $1-i$; 3) прямая $y=-x$; 4) прямая $x=0$. **2.** 1) Внутренность круга радиуса 2 с центром $-i$; 2) внешность круга радиуса 3 с центром $2-3i$; 3) кольцо (без границы) между окружностями радиусов 2 и 4 с общим центром в точке $-1+i$; 4) кольцо (вместе с его границей) между окружностями радиусов 2 и 5 с общим центром в точке $-2i$. **3.** 1) $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}i$; 2) $-\frac{3}{2}-\frac{17}{4}i$, $-\frac{3}{2}-2i$; 3) $5-5i$, $-5+5i$, $\sqrt{26}-\sqrt{26}i$, $-\sqrt{26}+\sqrt{26}i$. **5.** $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$. **6.** $z_4=z_1+z_3-z_2$.

§ 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

1. Аргумент комплексного числа

Аргументом комплексного числа $z\neq 0$ называется угол между действительной осью и вектором z, отсчитываемый от положительного направления действительной оси (см. рис. 5).

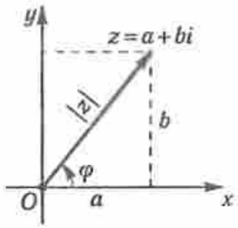


Рис. 5

Если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, если по часовой — отрицательной.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом комплексного числа $z=a+bi$, пишут $\varphi=\arg z$ или $\varphi=\arg(a+bi)$.

Для числа $z=0$ аргумент не определяется. Поэтому во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, будем считать, что $z\neq 0$.

Связь между действительной и мнимой частями комплексного числа $z=a+bi$ и его модулем $r=|z|$ и аргументом φ выражается следующими формулами:

$$\begin{cases} a=r\cos\varphi, \\ b=r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \tag{2}$$

Аргумент комплексного числа $z=a+bi$ $(z\neq 0)$ можно найти, решив систему (2). Эта система имеет бесконечно много решений вида $\varphi=\varphi_0+2k\pi$, где $k\in\mathbb{Z}$, φ_0 — одно из решений системы (2), т. е. аргумент комплексного числа определяется неоднозначно.

Для нахождения аргумента φ комплексного числа $z = a + bi$ (при $a \neq 0$) можно использовать уравнение

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \tag{3}$$

которое является следствием системы (2).

При решении уравнения (3) нужно учитывать, в какой четверти находится точка $z = a + bi$.

Пример 1. Найти все аргументы комплексного числа z: 1) $z = -3i$; 2) $z = -1 + i\sqrt{3}$.

△ 1) Точка $-3i$ лежит на отрицательной части мнимой оси. Один из аргументов этого числа равен $-\frac{\pi}{2}$, а множество всех аргументов имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) По формуле (3) находим $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$. Так как точка $-1 + i\sqrt{3}$ лежит во второй четверти, то один из аргументов равен $\frac{2\pi}{3}$, а множество всех аргументов имеет вид $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ▲

2. Запись комплексного числа в тригонометрической форме

Из равенств (1) следует, что если $z \neq 0$, то $z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, т. е.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{4}$$

Запись комплексного числа z в виде (4), где $r > 0$, называют *тригонометрической формой комплексного числа* z.

Обратно, если имеет место равенство (4), где $r > 0$, то $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Итак, любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в тригонометрической форме (4).

Необходимо усвоить, что не всякая запись комплексного числа через тригонометрические функции является тригонометрической формой этого числа. Например, для числа $1 + i$ запись

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

есть тригонометрическая форма этого числа. Но запись в виде

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

или

$$1 + i = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

не является тригонометрической формой числа $1 + i$.

Пример 2. Записать в тригонометрической форме комплексное число z:

1) $z=-1+i$; 2) $z=\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}$; 3) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$.

△ 1) Так как точка $-1+i$ лежит во второй четверти, то, применяя формулу (3), находим $\operatorname{tg}\varphi=-1$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. Учитывая, что $|-1+i|=\sqrt{2}$, получаем

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

2) Точка z лежит в четвертой четверти, и $|z|=1$. Применяя формулы приведения, имеем $\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{5\pi}{14}\right)$, $-\cos\frac{\pi}{7}=\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right)$. Следовательно,

$$\sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}=\cos\left(-\frac{5\pi}{14}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right).$$

3) Так как $1+\cos\frac{10\pi}{9}=2\cos^2\frac{5\pi}{9}>0$, $\sin\frac{10\pi}{9}=2\sin\frac{5\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}<0$, то точка z лежит в четвертой четверти, а ее аргумент заключен между $\frac{3\pi}{2}$ и 2π. Имеем $z=2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$, где $\cos\frac{5\pi}{9}<0$, и поэтому полученная запись не является тригонометрической формой. Преобразуем:

$$z=-2\cos\frac{5\pi}{9}\left(-\cos\frac{5\pi}{9}-i\sin\frac{5\pi}{9}\right)=$$
$$=-2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\left(\pi+\frac{5\pi}{9}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{5\pi}{9}\right)\right),$$

т. е. $z=-2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$.

Так как $-2\cos\frac{5\pi}{9}>0$, то эта запись является тригонометрической формой комплексного числа z. ▲

Замечание. Для двух комплексных чисел

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

записанных в тригонометрической форме, равенство $z_1=z_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $r_1=r_2$ и $\varphi_1=\varphi_2+2k\pi$, где k — некоторое целое число.

3. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Формула Муавра

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 записаны в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2). \tag{5}$$

Вычислим произведение этих чисел. Из равенств (5) получаем:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned}$$

Итак,

$$z_1z_2 = r_1[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \tag{6}$$

Запись (6) — тригонометрическая форма комплексного числа z_1z_2, так как $r_1r_2 > 0$.

Равенство (6) означает, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Более точная формулировка такова:

Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

Вычислим частное $\frac{z_1}{z_2}$, считая, что $z_2 \neq 0$. Используя правило деления комплексных чисел, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)], \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что

Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

Из формулы (6) следует, что

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi,$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Вообще для любого $n \in \mathbb{N}$ (и далее для $n \in \mathbb{Z}$) справедлива формула

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \tag{8}$$

которую называют *формулой Муавра*.

Для доказательства равенства (8) следует использовать метод математической индукции.

Из равенства (8) получаем формулу возведения в целую степень n комплексного числа z, записанного в тригонометрической форме (4):

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Пример 3. Представить комплексное число $(1-i)^8$ в алгебраической форме, т. е. в виде $a+bi$.

$\triangle$ Модуль комплексного числа $1-i$ равен $\sqrt{2}$, а аргумент равен $\frac{7\pi}{4}$. Следовательно, по формуле (9) имеем

$$(1-i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos 14\pi + i\sin 14\pi) = 16. \qquad \blacktriangle$$

Пример 4. Вычислить $\frac{(1+i\sqrt{3})^9}{(1-i)^8}$.

$\triangle$ Так как

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \quad 1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

то, применяя формулу (9), находим $(1+i\sqrt{3})^9 = 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -2^9$, $(1-i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)) = 2^4$.

Следовательно,

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^9}{(1-i)^8} = \frac{-2^9}{2^4} = -32. \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = \frac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

$\triangle$ Так как

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad 1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

то

$$(1+i)^9 = (\sqrt{2})^9\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^9\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$(1-i\sqrt{3})^6 = 2^6\left[\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right] = 2^6.$$

Следовательно,

$$z = \frac{2^4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2^6} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right). \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Найти все аргументы комплексного числа:
1) 4; 2) -5; 3) $2i$; 4) $-5i$; 5) $-\sqrt{3}-i$; 6) $-2+2i$.

2. Записать в тригонометрической форме комплексное число:
1) $\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$; 2) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; 3) $\frac{1+i}{1-i}$;
4) $-2+2i\sqrt{3}$; 5) $1-\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$; 6) $\left(\frac{i\sqrt{3}+1}{i-1}\right)^6$.

3. Записать в алгебраической форме комплексное число z:
1) $z=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; 2) $z=(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^8$;
3) $z=\left(\frac{i^{12}+\sqrt{3}\cdot i^9}{4}\right)^5$; 4) $z=\frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$.

4. Записать в тригонометрической форме комплексное число z:
1) $z=(\sqrt{3}-i)^{100}$; 2) $z=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$;
3) $z=\frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n\in\mathbb{N}$; 4) $z=\left[\sin\frac{6\pi}{5}+i\left(1+\cos\frac{6\pi}{5}\right)\right]^5$.

5. Найти число с наименьшим положительным аргументом среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию:
1) $|z+1-i|=1$; 2) $|z+3-\sqrt{3}i|\leqslant\sqrt{3}$.

6. Доказать равенство $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$, где $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $n\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответы

1. 1) $2k\pi$; 2) $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.** 1) $\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$; 3) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; 4) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 5) $2\sin\frac{2\pi}{5}+\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)$; 6) $8\left(\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$. **3.** 1) 2; 2) 1024; 3) $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$; 4) -2. **4.** 1) $1=\cos 0+i\sin 0$; 2) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; 3) $2(\cos 0+i\sin 0)$, если n — четное, $2(\cos\pi+i\sin\pi)$, если n — нечетное; 4) $-32\cos^5\frac{3\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **5.** 1) i; 2) $-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

§5. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Уравнения вида $z^2 = c$, $c \in \mathbb{C}$

Рассмотрим уравнение

$$z^2 = a + bi. \tag{1}$$

1) Если $b=0$, то уравнение (1) имеет один корень при $a=0$, два действительных корня $z_1 = \sqrt{a}$ и $z_2 = -\sqrt{a}$ при $a > 0$ и не имеет действительных корней при $a < 0$.

Однако уравнение $z^2 = -1$, не имея действительных корней, имеет два комплексных корня $z_1 = i$, $z_2 = -i$, так как уравнение $z^2 = -1$ можно записать в виде $z^2 - i^2 = 0$.

Аналогично, уравнение $z^2 = a$, где $a < 0$, записанное в виде $z^2 - i^2|a| = (z - i\sqrt{|a|})(z + i\sqrt{|a|}) = 0$, имеет два корня $z_1 = i\sqrt{|a|}$ и $z_2 = -i\sqrt{|a|}$.

Условимся один из этих корней (например, $z_1 = i\sqrt{|a|}$) обозначать символом $\sqrt{a}$, тогда второй корень равен $-\sqrt{a}$. При таком соглашении для любого $a \in \mathbb{R}$ корни уравнения

$$z^2 = a \tag{2}$$

можно находить по формуле

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{a}. \tag{3}$$

2) Пусть $b \neq 0$. Покажем, что и в этом случае уравнение (1) имеет два корня, которые являются взаимно противоположными числами.

Пусть $z = u + iv$, где $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$. Тогда $(u+iv)^2 = a + bi$, откуда

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ 2uv = b. \end{cases} \tag{4}$$

Найдем действительные решения системы (4). Из второго уравнения этой системы находим $v = \frac{b}{2u}$ и подставляем найденное значение v в первое уравнение. Получаем биквадратное уравнение

$$4u^4 - 4au^2 - b^2 = 0,$$

имеющее лишь два действительных корня

$$u_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{и} \quad u_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}.$$

Если $u = u_1$, то $v = v_1 = \dfrac{b}{2u_1} = \dfrac{b}{\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}+a)}} = \dfrac{b}{|b|}\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$.

Так как $\frac{b}{|b|} = \operatorname{sign} b$, то $v_1 = \operatorname{sign} b \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$.

Если $u = u_2 = -u_1$, то $v = v_2 = -v_1$.

Таким образом, уравнение (1) при $b \neq 0$ имеет два различных корня

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\operatorname{sign} b \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right). \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что если $b \geqslant 0$, то

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \tag{6}$$

а если $b < 0$, то

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right). \tag{7}$$

Пример 1. Решить уравнение $z^2 = 12 - 5i$.

Δ По формуле (7), в которой $a = 12$, $b = -5$, находим $\sqrt{a^2+b^2} = 13$, $\sqrt{a^2+b^2} + a = 25$, $\sqrt{a^2+b^2} - a = 1$,

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{25}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

т. е.

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(5 - i), \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-5 + i). \qquad \blacktriangle$$

2. Квадратные уравнения общего вида

Рассмотрим уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{8}$$

Пусть a, b, c — действительные числа и $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Тогда корни квадратного уравнения (8) определяются формулами

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{9}$$

для получения которых уравнение (8) представляется в виде

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{10}$$

Если $D < 0$, то правую часть формулы (10) можно записать в виде

$$i^2\left(\frac{\sqrt{-D}}{2a}\right)^2 = i^2\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2,$$

а корни уравнения (8), как и корни уравнения $z^2 = a$, где $a < 0$, можно находить по формуле

$$z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a} \tag{11}$$

или по формуле (9).

Из формулы (11) следует, что в случае, когда коэффициенты квадратного уравнения являются действительными числами, его корни комплексно сопряжены.

Если $a \neq 0$, a, b, c — комплексные числа, то и в этом случае для решения уравнения (8) можно пользоваться формулами (9), так как уравнение (8) при любых комплексных a, b, c $(a \neq 0)$ представляется в виде (10).

При этом для нахождения значений выражения $\sqrt{b^2 - 4ac}$ следует применять формулу (5).

Заметим еще, что для квадратного уравнения (8) с комплексными коэффициентами справедлива теорема Виета: если z_1 и z_2 — корни квадратного уравнения (8), то

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}. \tag{12}$$

Верна также теорема, обратная теореме Виета: если z_1, z_2 — такие комплексные числа, что справедливы равенства (12), то эти числа являются корнями квадратного уравнения (8).

Пример 2. Решить уравнение

$$z^2 + 6z + 58 = 0.$$

$\triangle$ По формуле (9) находим $z_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 58} = -3 \pm \sqrt{-49} = -3 \pm 7i$, т. е. $z_1 = -3 + 7i$, $z_2 = -3 - 7i$. ▲

Пример 3. Решить уравнение

$$z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0.$$

$\triangle$ Применяя формулу (9), получаем

$$z_{1,2} = \frac{5 + i \pm \sqrt{(5 + i)^2 - 4(8 + i)}}{2} = \frac{5 + i \pm \sqrt{-8 + 6i}}{2}.$$

По формуле (6) находим один из корней уравнения $w^2 = -8 + 6i$:

$$\sqrt{-8 + 6i} = \sqrt{\frac{\sqrt{(-8)^2 + 6^2} - 8}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{(-8)^2 + 6^2} + 8}{2}} = 1 + 3i.$$

Следовательно, $z_{1,2} = \dfrac{5 + i \pm (1 + 3i)}{2}$, откуда

$$z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = 2 - i.$$ ▲

Пример 4. Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень $z_1 = -2 + 5i$.

$\triangle$ Так как коэффициенты уравнения действительны, то второй корень z_2 этого уравнения равен $z_2 = -2 - 5i$. По теореме, обратной теореме Виета, корни z_1, z_2 уравнения $z^2 + pz + q = 0$ и его коэффициенты связаны равенствами

$$z_1 + z_2 = -p, \quad z_1 z_2 = q.$$

Так как $z_1 + z_2 = -4$, $z_1 z_2 = 29$, то искомое квадратное уравнение записывается в виде

$$z^2 + 4z + 29 = 0. \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Разложить на множители многочлен $z^2 - 18z + 97$.

$\triangle$ Запишем уравнение $z^2 - 18z + 97 = 0$ в виде $z^2 - 18z + 81 = -16$ или $(z - 9)^2 = -16$, откуда находим его корни z_1 и z_2. Это числа

$$z_1 = 9 + 4i \quad \text{и} \quad z_2 = 9 - 4i.$$

Тогда $z^2 - 18z + 97 = (z - z_1)(z - z_2) = (z - 9 - 4i)(z - 9 + 4i)$. $\blacktriangle$

Задачи

1. Решить уравнение:

1) $z^2 = -4$; 2) $9z^2 + 25 = 0$; 3) $z^3 = 1$;

4) $z^4 - 81 = 0$; 5) $z^2 = 3 - 4i$; 6) $z^2 = 21 + 20i$.

2. Решить уравнение:

1) $z^2 + 2z + 4 = 0$; 2) $z^2 - 6z + 25 = 0$; 3) $z^2 - z + 1 - i = 0$;

4) $z^2 - (2 + 2i)z + 3 + 6i = 0$; 5) $z^2 - iz + 1 + 3i = 0$; 6) $z^2 - 7z + 16 + 2i = 0$.

3. Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень z_1, если:

1) $z_1 = 2 - 3i$; 2) $z_1 = -5 + 2i$; 3) $z_1 = -1 + \sqrt{2}i$; 4) $z_1 = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$.

4. Разложить на множители многочлен $P(z)$, если:

1) $P(z) = z^2 + 6z + 34$; 2) $P(z) = 2z^2 + 4z + 5$;

3) $P(z) = 25z^2 + 50z + 26$; 4) $P(z) = -z^2 + 10z - 26$;

5) $P(z) = z^2 + (3i - 1)z - i - 2$; 6) $P(z) = z^2 + (3i - 1)z + 1 + 4i$.

Ответы

1. 1) $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$; 2) $z_1 = \frac{5}{3}i$, $z_2 = -\frac{5}{3}i$; 3) $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $z_{1,2} = \pm 3$, $z_{3,4} = \pm 3i$; 5) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = i - 2$; 6) $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = -5 - 2i$. **2.** 1) $z_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$; 2) $z_{1,2} = 3 \pm 4i$; 3) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -i$. 4) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 3i$; 5) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + 2i$; 6) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 - 2i$. **3.** 1) $z^2 - 4z + 13 = 0$; 2) $z^2 + 10z + 29 = 0$; 3) $z^2 + 2z + 3 = 0$; 4) $z^2 + 2\sqrt{3}z + 15 = 0$. **4.** 1) $(z + 3 + 5i)(z + 3 - 5i)$; 2) $2\left(z + 1 + i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(z + 1 - i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; 3) $(z + 1 - 0{,}2i)(z + 1 + 0{,}2 \cdot i)$; 4) $-(z - 5 + i)(z - 5 - i)$; 5) $(z + i)(z - 1 + 2i)$; 6) $(z - 1 + i)(z + 1 - 2i)$.

§ 6. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

1. Определение

Как и для действительных чисел, *корнем n-й степени из комплексного числа* z, где $n \in \mathbb{N}$, называют такое комплексное число w, что $w^n = z$. Корень n-й степени из z обозначают $\sqrt[n]{z}$.

Согласно этому определению, каждое решение уравнения $w^n = z$ является корнем степени n из числа z. Покажем, что из любого комплексного числа z можно извлечь корень n-й степени, причем если $z \neq 0$, то $\sqrt[n]{z}$ принимает n различных значений.

Если $w = 0$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ уравнение $z^n = w$ имеет единственное решение. Если $w \neq 0$, то $z \neq 0$, и тогда z и w можно записать в тригонометрической форме. Пусть $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Будем искать w в виде

$$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r и ρ — модули комплексных чисел z и w, α и φ — их аргументы.

Тогда уравнение $w^n = z$ примет вид

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha). \tag{1}$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π, то из равенства (1) следует, что

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \alpha + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

откуда получаем

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, все решения уравнения $w^n = z$ имеют вид

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Если в формуле (2) параметр k принимает значения $0, 1, \ldots, n-1$, то этим значениям k соответствуют различные значения w. Действительно, аргумент числа w_k получается из аргумента числа w_{k-1} добавлением величины $\frac{2\pi}{n}$, причем

$$\arg w_{n-1} = \arg w_0 + \frac{2\pi(n-1)}{n}, \quad \text{где} \quad \frac{2\pi(n-1)}{n} < 2\pi.$$

Если $k = n$, то $\arg w_n = \arg w_0 + 2\pi$, и поэтому $w_n = w_0$. Аналогично $w_{n+1} = w_1$ и т. д.

Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого комплексного числа $z \neq 0$ существует n различных значений корня n-й степени из z. Если $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, то эти значения выражаются формулой (2), где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Заметим, что точки w_k лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$, причем аргументы соседних точек отличаются на $\frac{2\pi}{n}$ и поэтому точки w_k делят окружность на n равных частей. Это означает, что точки w_k являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$.

2. Примеры

Пример 1. Найти все значения $\sqrt[4]{1+i}$.

Δ Здесь $z = 1+i$, $|z| = r = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4} = \alpha$, $w^4 = 1+i$, $n = 4$, и по формуле (2) находим

$$w_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4} + i\,\mathrm{sign}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Точки w_k располагаются в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[8]{2}$ (см. рис. 6):

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$ ▲

Пример 2. Решить уравнение

$$z^6 = -1.$$

Δ Применяя формулу (2) при $r = 1$, $n = 6$, $\alpha = \pi$, получаем

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Точки, соответствующие числам z_k, располагаются на комплексной плоскости в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в точке $z = 0$ (см. рис. 7). ▲

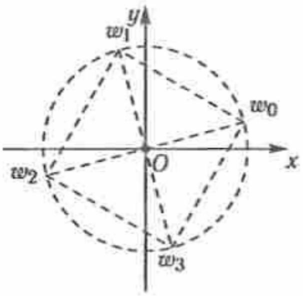


Рис. 6

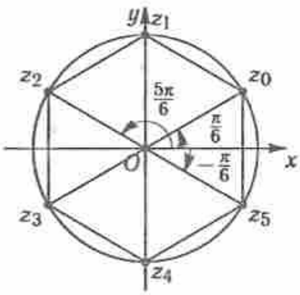


Рис. 7

Задачи

1. Найти все значения корня:

1) $\sqrt[4]{-16}$; 2) $\sqrt{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$; 4) $\sqrt[6]{-64}$.

2. Найти все корни уравнения:

1) $z^3=-1$; 2) $z^3=8i$; 3) $z^5=1$;

4) $z^8=1+i$; 5) $z^4+1=0$; 6) $z^5=1+\sqrt{3}i$.

3. Найти все корни уравнения и записать их в тригонометрической форме:

1) $z^3=1$; 2) $z^5=-1$; 3) $z^3=-4+\sqrt{48}i$; 4) $z^4=-1-\sqrt{3}i$.

Ответы

1. 1) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)=$ $=\frac{\sqrt[6]{2}}{4}(-\sqrt{6}-\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}))$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)=\frac{\sqrt[6]{2}}{4}(-\sqrt{6}-\sqrt{2}-$ $-i(\sqrt{6}+\sqrt{2}))$; 4) $\sqrt{3}+i$, $2i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $\sqrt{3}-i$. **2.** 1) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2i$; 3) $\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$; 4) $\sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{8k+1}{32}\pi+i\sin\frac{8k+1}{32}\pi\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, 6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 7) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$. **3.** 1) $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; 2) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+$ $+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$; 3) $2\left(\cos\frac{2(3k+1)\pi}{9}+i\sin\frac{2(3k+1)\pi}{9}\right)$, $k=0, 1,$ 2; 4) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{(3k+2)\pi}{6}+i\sin\frac{(3k+2)\pi}{6}\right)$, $k=0, 1, 2, 3$.

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Определения и понятие равенства многочленов

Определение. *Многочленом* (*полиномом*) от одной переменной x называется выражение вида

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — числовые коэффициенты, $a_0 \neq 0$.

Число n называется *степенью* многочлена $P(x)$. Форма (1) называется *канонической* или *стандартной записью многочлена n-й степени*. Слагаемое a_0x^n называется *старшим членом* многочлена $P(x)$, a_0 — *старшим коэффициентом*, а a_n — его *свободным членом*. Многочлен $P(x) = a_0$, где $a_0 \neq 0$ — заданное число, называют *многочленом нулевой степени*. Многочлен $P(x) = 0$ называют *нулевым многочленом*.

Для обозначения многочленов используются также и другие буквы: $Q(x)$, $T(x)$, $R(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $f(x)$ и т. д. Если хотят подчеркнуть, что степень многочлена равна n, вместо $P(x)$ пишут $P_n(x)$. Например, $Q_4(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$, $P_5(x) = 3x^5 + 2x^2 + 5$, $T_3(x) = x^3 - 2x + 1$.

Выражения вида ax^k, где a — действительное, а k — неотрицательное целое число, называют *одночленом* (*мономом*). Одночлены одинаковой степени называют *подобными*.

Значением $P(c)$ *многочлена* $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n$ в точке c (при $x = c$) называется число $P(c) = a_0c^n + \ldots + a_kc^{n-k} + \ldots + a_n$.

Замечание. Отметим, что $P(0) = a_n$, а $P(1) = a_0 + \ldots + a_k + \ldots + a_n$.

Два многочлена считаются *равными*, если они составлены в канонической записи из одинаковых одночленов, т. е.

$$a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n = b_0x^n + \ldots + b_kx^{n-k} + \ldots + b_n$$

в том и только том случае, если $a_i = b_i$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Соответственно из определения следует, что равные многочлены имеют одинаковую степень и для любого числа c значения многочленов при $x = c$ совпадают.

2. Арифметические действия над многочленами

Сумма, разность и произведение двух многочленов также являются многочленами.

Пусть даны многочлены

$$P(x) = a_0 x^n + \ldots + a_k x^{n-k} + \ldots + a_n$$

и

$$Q(x) = b_0 x^m + \ldots + b_k x^{m-k} + \ldots + b_{m-1} x + b_m.$$

Суммой многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ (пусть $m \leqslant n$) называется многочлен, полученный сложением одночленов, составляющих слагаемые, и приведением подобных членов, т. е.

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) = \\ &= (a_0 x^n + \ldots + a_k x^{n-k} + \ldots + a_n) + (b_0 x^m + \ldots + b_k x^{m-k} + \ldots + b_m) = \\ &= a_0 x^n + \ldots + a_{n-m-1} x^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} (a_{n-i} + b_{m-i}) x^i. \end{aligned}$$

Произведением многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ называется многочлен, составленный из произведений всех членов первого сомножителя на все члены второго:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) = \\ &= (a_0 x^n + \ldots + a_k x^{n-k} + \ldots + a_n) \cdot (b_0 x^m + \ldots + b_k x^{m-k} + \ldots + b_m) = \\ &= (a_0 b_0) x^{n+m} + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x^{n+m-1} + \ldots + a_n b_m = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^{n+m-k}, \end{aligned}$$

где коэффициент c_k при x^{n+m-k} равен

$$\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0,$$

если считать, что $a_i = 0$ при $i > n$ и $b_j = 0$ при $j > m$.

Если произведение двух многочленов равно нулю, то хотя бы один из этих многочленов равен нулю.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что операции сложения и умножения многочленов обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, т. е.

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x), \quad (P(x) + Q(x)) + R(x) = P(x) + (Q(x) + R(x)),$$
$$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x), \quad (P(x) \cdot Q(x)) \cdot R(x) = P(x) \cdot (Q(x) \cdot R(x)),$$
$$P(x) \cdot (Q(x) + R(x)) = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x).$$

Пример 1. Найти неизвестные коэффициенты, при которых будет выполняться следующее равенство:

$$8x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 1 = (2x + 3)(ax^3 + bx^2 + cx - 1) - 7x^3 + 4.$$

$\triangle$ Перемножая многочлены в правой части равенства и приводя подобные, получим

$$\begin{aligned}8x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 1 &= \\ &= 2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 - 2x + 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx - 3 - 7x^3 + 4 = \\ &= 2ax^4 + (2b + 3a - 7)x^3 + (2c + 3b)x^2 + (3c - 2)x + 1.\end{aligned}$$

Из определения равенства многочленов следует

$$\begin{cases} 2a = 8, \\ 2b + 3a - 7 = -1, \\ 2c + 3b = -5, \\ 3c - 2 = 4. \end{cases}$$

Отсюда получаем $a = 4$, $b = -3$, $c = 2$. $\blacktriangle$

Вычесть из многочлена $P(x)$ многочлен $T(x)$ — это значит найти такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = Q(x) + T(x)$. Многочлен $Q(x)$ называют *разностью многочленов* $P(x)$ и $T(x)$. Для любых двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$ существует и притом только один многочлен $Q(x)$, являющийся их разностью. Он записывается в виде $Q(x) = P(x) - T(x)$.

Особое место в теории многочленов занимает деление одного многочлена на другой.

Пусть заданы многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ и ненулевой многочлен $T(x)$. Если существует такой многочлен $Q(x)$, что для всех x выполняется равенство

$$P(x) = T(x) \cdot Q(x), \tag{2}$$

то говорят, что многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $T(x)$ или $T(x)$ *делит* $P(x)$, а формулу (2) называют *формулой деления многочленов*, многочлен $Q(x)$ называют *частным*.

Простые примеры показывают, что один многочлен делится на другой не всегда. Например, многочлен $x^2 + 2$ не делится на многочлен $x + 1$. Действительно, в противном случае имело бы место равенство $x^2 + 2 = (x + 1) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. Но при $x = -1$ левая часть этого равенства принимает значение 3, а правая — значение 0. Следовательно, написанное соотношение не может иметь места ни при каком $Q(x)$.

Итак, в множестве многочленов деление осуществимо не всегда. Однако имеет место более общая операция, называемая *деление с остатком*.

Пусть заданы многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ и ненулевой многочлен $T(x)$ степени $m \geqslant 1$, где $m \leqslant n$. Говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$ с остатком, если найдутся такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, что для всех x выполняется равенство

$$P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x), \tag{3}$$

где многочлен $Q(x)$ — (*неполное*) *частное*, степень которого $k = n - m$; а $R(x)$ — *остаток*, степень которого $p < m$.

Тождественное равенство (3) называют *формулой деления многочленов с остатком*.

Если остаток $R(x) = 0$, то говорят, что многочлен $P(x)$ *делится нацело* на многочлен $T(x)$.

Пример 2. Разделить многочлен $P(x) = 9x - 5 - 17x^2 + 6x^4 + 5x^3$ на многочлен $T(x) = 4x - 5 + 3x^2$.

Δ Приведем многочлены $P(x)$ и $T(x)$ к стандартному виду:

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5 \text{ и } T(x) = 3x^2 + 4x - 5.$$

Старший член многочлена $P(x)$ есть $6x^4$, а старший член полинома $T(x)$ есть $3x^2$, следовательно, старший член частного равен $\frac{6x^4}{3x^2} = 2x^2$. Тогда

$$P(x) - 2x^2 T(x) = -3x^3 - 7x^2 + 9x - 5 = M(x).$$

Степень $M(x)$ больше степени $T(x)$, поэтому продолжим процесс деления. Деля старший член многочлена $M(x)$ на старший член полинома $T(x)$, получим $-x$. Вычитая из $M(x)$ многочлен $(-x)T(x)$, получим

$$M(x) - (-x)T(x) =$$
$$= (-3x^3 - 7x^2 + 9x - 5) - (-3x^3 - 4x^2 + 5x) = -3x^2 + 4x - 5 = S(x).$$

Степень многочлена $S(x)$ равна степени многочлена $T(x)$, деля старший член многочлена $S(x)$ на старший член полинома $T(x)$, получим -1. Далее:

$$S(x) - (-1)T(x) = (-3x^2 + 4x - 5) - (-1)(3x^2 + 4x - 5) = 8x - 10 = R(x).$$

Степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$. Значит этот многочлен — остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$.

В данном примере получаем, что частное $Q(x) = 2x^2 - x - 1$, остаток $R(x) = 8x - 10$ и

$$6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + 4x - 5)(2x^2 - x - 1) + (8x - 10). \quad \blacktriangle$$

Для деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$ с остатком можно применять следующий алгоритм:

1) расположить делимое и делитель по убывающим степеням x;
2) разделить старший член делимого на старший член делителя и полученный одночлен сделать первым членом частного;
3) первый член частного умножить на делитель, результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;
4) чтобы получить следующий член частного, нужно с первым остатком поступить так, как поступали с делимым в пунктах 2 и 3.

Эту процедуру следует продолжать до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю, или остаток, степень которого меньше степени делителя.

Сформулируем и докажем две теоремы о делении многочленов с остатком.

Теорема 1. *Для любых многочленов $P(x)$ и $T(x)$, где $T(x) \neq 0$, существует пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ таких, что выполняется равенство $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$, причем либо степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$, либо $R(x) = 0$.*

○ Возможны несколько случаев.

1) Многочлен $P(x) = 0$ и $T(x)$ — любой отличный от нуля многочлен. Тогда многочлены $Q(x) = 0$ и $R(x) = 0$ удовлетворяют условиям теоремы.
2) $P(x) \neq 0$ и степень многочлена $T(x)$ больше степени многочлена $P(x)$. Тогда многочлены $Q(x) = 0$ и $R(x) = P(x)$ удовлетворяют условиям теоремы.
3) $P(x) \neq 0$ и $T(x) = c$, где c — константа, отличная от нуля. Тогда многочлены $Q(x) = \frac{P(x)}{c}$ и $R(x) = 0$ удовлетворяют условиям теоремы.
4) Пусть, наконец, $P(x)$ имеет степень n, где $n \geqslant 1$, а $T(x)$ имеет степень m, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда
$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$T_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$
где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Найдем многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Для этого построим вспомогательную последовательность многочленов $Q_{n_k}(x)$ следующим образом. Положим
$$Q_{n_1}(x) = P_n(x) - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}T_m(x).$$

Тогда либо $Q_{n_1}(x)=0$, либо $Q_{n_1}(x)=a_0^{(1)}x^{n_1}+a_1^{(1)}x^{n_1-1}+\ldots+a_{n_1-1}^{(1)}x+a_{n_1}^{(1)}$, причем $a_0^{(1)}\neq 0$ и степень n_1 многочлена $Q_{n_1}(x)$ меньше n. Если $n_1<m$ или $Q_{n_1}(x)=0$, то многочлены $Q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ и $R(x)=Q_{n_1}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Если же $n_1\geqslant m$, то делаем следующий шаг, т. е. берем

$$Q_{n_2}(x)=Q_{n_1}(x)-\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m}T_m(x).$$

Тогда либо $Q_{n_2}(x)=0$, либо $n>n_1>n_2$ и

$$Q_{n_2}(x)=a_0^{(2)}x^{n_2}+a_1^{(2)}x^{n_2-1}+\ldots+a_{n_2-1}^{(1)}x+a_{n_2}^{(1)},$$

причем $a_0^{(2)}\neq 0$.

Если $n_2<m$ или $Q_{n_2}(x)=0$, то многочлены $Q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m}$ и $R(x)=Q_{n_2}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Если же $n_2\geqslant m$, то делаем следующий шаг.

Поскольку на каждом шаге степень многочлена $Q_{n_k}(x)$ уменьшается: $n>n_1>n_2>\ldots$, то на некотором k-м шаге число n_k станет меньше m или $Q_{n_k}(x)=0$ и процесс закончится. В результате получим

$$P_n(x)=\left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_0^{(k-1)}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}\right)\cdot T_m(x)+Q_{n_k}(x).$$

Тогда многочлены $Q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_0^{(1)}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_0^{(k-1)}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}$ и $R(x)=Q_{n_k}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. ●

Теорема 2. *Пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1, единственна.*

○ Предположим, что существует две пары многочленов $Q(x)$, $R(x)$ и $q(x)$, $r(x)$ таких, что выполняются равенства $P(x)=T(x)\cdot Q(x)+R(x)$ и $P(x)=T(x)\cdot q(x)+r(x)$, причем степени многочленов $R(x)$ и $r(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$.

Из равенства многочленов в левых частях равенств следует, что

$$T(x)\cdot Q(x)+R(x)=T(x)\cdot q(x)+r(x)$$

или

$$T(x)\cdot(Q(x)-q(x))=r(x)-R(x). \tag{4}$$

Если правая часть последнего равенства тождественно равна нулю, т. е. $r(x)-R(x)=0$, то и $Q(x)-q(x)=0$, так как по условию теоремы $T(x)\neq 0$. Следовательно, имеет место единственность.

Предположим, что $r(x)-R(x)\neq 0$. Так как степень многочлена $r(x)-R(x)$ не выше степени каждого из них, то она меньше степени многочлена $T(x)$. С другой стороны, степень многочлена $T(x) \cdot (Q(x) - q(x))$ либо больше, либо равна степени многочлена $T(x)$. Следовательно, степени многочленов в левой и правой частях равенства (4) не совпадают, что противоречит определению равенства многочленов. Получили противоречие. Значит, $r(x) - R(x) = 0$, а в этом случае единственность уже доказана. ●

Кроме приведенного выше алгоритма для определения коэффициентов многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ на практике обычно используют один из следующих методов: *метод неопределенных коэффициентов* или *способ деления многочленов «уголком»*.

3. Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода неопределенных коэффициентов заключается в следующем. Пусть требуется поделить многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

на многочлен

$$T_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

где $n \geqslant m$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — известные числа, причем $a_0 \neq 0$.

Представим частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$ в виде:

$Q(x) = c_0x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \ldots + c_{n-m}$ и $R(x) = d_0x^{m-1} + d_1x^{m-2} + \ldots + d_{m-1}$,

где коэффициенты c_i и d_j пока не определены и $c_0 \neq 0$.

Потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$P_n(x) = T_m(x) \cdot Q(x) + R(x). \tag{5}$$

Перемножая и складывая многочлены в правой части равенства (5) и приравнивая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x в левой и правой частях (5), получим $n+1$ равенство, для определения $n+1$ коэффициента $c_0, c_1, \ldots, c_{n-m}, d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$.

Пример 3. Пусть $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5$, а $T(x) = 3x^2 + 4x - 5$. Найти многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ и степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $T(x)$.

Δ Положим $Q(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$ и $R(x) = d_0x + d_1$. Запишем равенство

$$6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + 4x - 5) \cdot (c_0x^2 + c_1x + c_2) + (d_0x + d_1).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим:

$$6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5 = 3c_0x^4 + (4c_0 + 3c_1)x^3 +$$
$$+ (-5c_0 + 4c_1 + 3c_2)x^2 + (-5c_1 + 4c_2 + d_0)x + (-5c_2 + d_1).$$

По определению равенства многочленов получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3c_0 = 6, \\ 4c_0 + 3c_1 = 5, \\ -5c_0 + 4c_1 + 3c_2 = -11, \\ -5c_1 + 4c_2 + d_0 = 9, \\ -5c_2 + d_1 = -5. \end{cases}$$

Отсюда находим $c_0 = 2$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $d_0 = 0$, $d_1 = 0$. Следовательно, $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ и $R(x) = 0$. ▲

4. Метод деления многочленов «уголком»

Теоретическим обоснованием и фактически изложением способа деления многочленов «уголком» является доказательство теоремы 1. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 4. Разделить «уголком» многочлен

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5$$

на многочлен $T(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

△ Условие данного примера совпадает с условием примера 2, только многочлены даны в стандартном виде.

Описанная в доказательстве теоремы 1 процедура деления многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$ (см. также пример 2) может быть реализована в виде *деления многочленов «уголком»*.

$$\begin{array}{r|l}
\text{Делимое} \rightarrow \; -\,6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5 & 3x^2 + 4x - 5 \quad \leftarrow \text{Делитель} \\
6x^4 + 8x^3 - 10x^2 \phantom{{} + 9x - 5} & \overline{2x^2 - x - 1} \quad \leftarrow \text{Частное} \\
\hline
-\,-3x^3 - 7x^2 + 9x \phantom{{} - 5} & \\
-3x^3 - 4x^2 + 5x \phantom{{} - 5} & \\
\hline
-\,-3x^2 + 4x - 5 & \\
-3x^2 - 4x + 5 & \\
\hline
8x - 10 & \leftarrow \text{Остаток}
\end{array}$$

В данном примере получаем $Q(x) = 2x^2 - x - 1$, $R(x) = 8x - 10$ и

$$6x^4 + 5x^3 - 17x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + 4x - 5)(2x^2 - x - 1) + (8x - 10). \; ▲$$

5. Свойства делимости многочленов

1°. Если многочлен $P(x)$ делится (нацело) на многочлен $T(x)$, а многочлен $T(x)$ делится (нацело) на многочлен $M(x)$, то многочлен $P(x)$ делится на многочлен $M(x)$.

Например, многочлен $256x^4-81$ делится на многочлен $16x^2-9$, а многочлен $16x^2-9$ делится на многочлен $4x+3$, поэтому многочлен $256x^4-81$ делится на многочлен $4x+3$.

2°. Если многочлены $P(x)$ и $T(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, то многочлены $P(x)+T(x)$ и $P(x)-T(x)$ делятся на многочлен $M(x)$, а многочлен $P(x)\cdot T(x)$ делится на многочлен $M^2(x)$.

Например, каждый из многочленов x^3+1 и x^2-x-2 делится на многочлен $x+1$, поэтому многочлен x^3+x^2-x-1 делится на $x+1$, многочлен $(x^3+1)(x^2-x-2)=x^5-x^4-2x^3+x^2-x-2$ делится на многочлен $(x+1)^2=x^2+2x+1$.

Пример 5. Не проводя деления многочленов, найти остаток от деления многочлена $P(x)=x^{50}+x^{25}+4$ на многочлен $T(x)=x^2-1$.

$\triangle$ Используя теорему о делении многочленов, запишем

$$P_{50}(x)=Q_{48}(x)\cdot T(x)+R_1(x),\ \text{где } R_1(x)=ax+b.$$

Из равенства $x^{50}+x^{25}+4=Q_{48}(x)\cdot\left(x^2-1\right)+ax+b$ найдем a и b, подставив значения x, равные 1 и -1. Получим систему уравнений

$$\begin{cases}1^{50}+1^{25}+4=Q_{48}(1)\cdot\left(1^2-1\right)+a+b,\\ (-1)^{50}+(-1)^{25}+4=Q_{48}(-1)\cdot\left((-1)^2-1\right)-a+b\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}6=a+b,\\ 4=-a+b.\end{cases}$$

Отсюда получаем $a=1, b=5$. Значит, искомый остаток равен $x+5$. ▲

Многочлен вида $ax+b$, где $a\neq 0$, называется *линейным двучленом*.

Пример 6. Некоторый многочлен при делении на двучлен $3x-2$ дает в остатке 2, а при делении на двучлен $x+2$ дает в остатке -10. Найти остаток от деления этого многочлена на $(3x-2)(x+2)$.

$\triangle$ Пусть многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям задачи. Тогда запишем равенства

$$P(x)=Q(x)\cdot(3x-2)+2, \tag{6}$$

$$P(x)=S(x)\cdot(x+2)-10. \tag{7}$$

Соответственно при делении $P(x)$ на $T(x)=(3x-2)(x+2)$ будет иметь место равенство

$$P(x)=M(x)\cdot((3x-2)(x+2))+R(x), \tag{8}$$

где $R(x)=ax+b$. Найдем значения a и b.

Из равенства (6) при $x=\frac{2}{3}$ получаем $P\left(\frac{2}{3}\right)=Q\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3\cdot\frac{2}{3}-2\right)+2$ или $P\left(\frac{2}{3}\right)=2$. Из равенства (7) при $x=-2$ получаем $P(-2)=$ $=S(-2)\cdot(-2+2)-10$ или $P(-2)=-10$. Соответственно, подставляя в соотношение (8) значения $x=\frac{2}{3}$ и $x=-2$, получаем систему уравнений для нахождения a и b:

$$\begin{cases} P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}a+b=2, \\ P(-2)=-2a+b=-10. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $a=4{,}5$, $b=-1$, т. е. остаток $R(x)=4{,}5x-1$. ▲

6. Алгоритм Евклида

Наибольшим общим делителем двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$ называется многочлен наибольшей степени среди многочленов, делящих нацело $P(x)$ и $T(x)$. Наибольший общий делитель двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$ обозначают НОД $(P(x),\ T(x))$.

Отметим, что наибольший общий делитель двух многочленов определяется с точностью до числового множителя.

Находят наибольший общий делитель двух многочленов тем же способом, который используется для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел, — *алгоритмом Евклида*:

$$\begin{aligned} P(x)&=T(x)\cdot Q_1(x)+R_1(x), \\ T(x)&=R_1(x)\cdot Q_2(x)+R_2(x), \\ R_1(x)&=R_2(x)\cdot Q_3(x)+R_3(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{k-2}(x)&=R_{k-1}(x)\cdot Q_k(x)+R_k(x), \\ R_{k-1}(x)&=R_k(x)\cdot Q_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Здесь индекс у многочленов означает их порядковый номер, а не их степень. На каждом шаге степень многочлена, являющегося остатком, меньше степени делителя. Последний отличный от нуля остаток $R_k(x)$ и будет искомым наибольшим общим делителем многочленов $P(x)$ и $T(x)$.

Два многочлена называются *взаимно простыми*, если они не имеют общих делителей, кроме констант. В этом случае пишут НОД $(P(x),\ T(x))=1$.

Наименьшее общее кратное многочленов $P(x)$ и $T(x)$ — многочлен наименьшей степени, который делится нацело на многочлены $P(x)$ и $T(x)$. Наименьшее общее кратное двух многочленов $P(x)$ и $T(x)$ обозначают НОК $(P(x),\ T(x))$.

Отметим, что наименьшее общее кратное двух многочленов определяется с точностью до числового множителя.

Для многочленов $P(x)$ и $T(x)$ их наибольший делитель НОД$(P(x),\ T(x))$ и наименьшее общее кратное НОК$(P(x),\ T(x))$ удовлетворяют равенству

$P(x)\cdot Q(x)=\lambda\cdot$НОД$(P(x),\ T(x))\cdot$НОК$(P(x),\ T(x))$, где число $\lambda\neq 0$.

Пример 7. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное многочленов $T(x)=x^3+6x^2+5x-12$ и $P(x)=x^4+2x^3-5x^2-4x+6$.

$\triangle$ Используя алгоритм Евклида, получим:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-5x^2-4x+6 & x^3+6x^2+5x-12 \\ \cline{2-2}
-\ x^4+6x^3+5x^2-12x & x-4 \\ \cline{1-1}
-4x^3-10x^2+8x+6 & \\
-\ -4x^3-24x^2-20x+48 & \\ \cline{1-1}
14x^2+28x-42 &
\end{array}
$$

Следовательно,

$$P(x)=(x-4)T(x)+14x^2+28x-42. \tag{9}$$

Теперь делим $T(x)$ на первый остаток $14x^2+28x-42$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+6x^2+5x-12 & 14x^2+28x-42 \\ \cline{2-2}
-\ x^3+2x^2-3x & \frac{1}{14}x+\frac{2}{7} \\ \cline{1-1}
4x^2+8x-12 & \\
-\ 4x^2+8x-12 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Следовательно,

$$T(x)=\left(\frac{1}{14}x+\frac{2}{7}\right)(14x^2+28x-42). \tag{10}$$

Вынося в частном в (10) общий множитель 14, получаем

$$\text{НОД}\,(P(x),\ T(x))=x^2+2x-3.$$

Тогда $T(x)=(x+4)(x^2+2x-3)$, $P(x)=(x^2-8x+30)(x^2+2x-3)$ и

$$\text{НОД}\left(x+4,\ x^2-8x+30\right)=1.$$

Следовательно,

$$\text{НОК}\,(P(x),\ T(x))=(x+4)\left(x^2-8x+30\right)\left(x^2+2x-3\right). \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Найти значение выражения $\dfrac{P(1)-P(-1)}{10}$, если

1) $P(x)=1+2x+3x^2+\ldots+11x^{10}$; 2) $P(x)=3+5x+7x^2+\ldots+27x^{12}$.

2. Для данных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ найти значение выражения $\frac{Q(x)}{P(x)} - P(x)$ при $x = x_0$, если:

1) $P(x) = x^4 - 6x^2 + 9$, $Q(x) = (x^4 - 9)^2$, $x_0 = 0{,}5$;
2) $P(x) = x^4 + 4x^2 + 4$, $Q(x) = (x^4 - 4)^2$, $x_0 = -0{,}5$.

3. Представить многочлен $P(x)$ в каноническом виде:

1) $P(x) = (1 + 3x + 2x^2) + (1 + 4x + 2x^2) + (1 + 5x + 2x^2) + \ldots + (1 + 17x + 2x^2)$;
2) $P(x) = (2 + 3x + x^2) + (2 + 5x + x^2) + (2 + 7x + x^2) + \ldots + (2 + 27x + x^2)$;
3) $P(x) = 7 + 6\sum\limits_{k=0}^{1} x^k + 5\sum\limits_{k=0}^{2} x^k + \ldots + \sum\limits_{k=0}^{6} x^k$;
4) $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{3} x^k \cdot \sum\limits_{m=0}^{3} (-x)^m$.

4. Доказать тождества:

1) $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$;
2) $x^{2n+1} + 1 = (x + 1)(x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \ldots - x + 1)$;
3) $x^{2n} - a^{2n} = (x + a) \cdot \sum\limits_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^{2n-1-k} a^k$;
4) $x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x + a) \cdot \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k x^{2n-k} a^k$.

5. Найти числа a, b и c, при которых справедливы следующие равенства:

1) $3x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x + 2 = (x + 1)\left(ax^3 + bx^2 - x + c\right)$;
2) $2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 6 = (x^2 + x + 2)(2x^3 + ax^2 + bx + c)$.

6*. Найти значение многочлена $P(x)$ при $x = x_0$, если:

1) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 19$, $x_0 = -2 - \sqrt[3]{11}$;
2) $P(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 29$, $x_0 = -3 - \sqrt[3]{2}$.

7*. В многочлене $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ коэффициенты a, b, c, d, e, f могут принимать значения 0 или 1. Найти числа a, b, c, d, e, f, при которых:

1) $P(2) = 40$; 2) $P(2) = 42$.

8. Используя метод неопределенных коэффициентов, найти частное и остаток при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$:

1) $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x - 4$, $T(x) = 2x + 3$;
2) $P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 12x$, $T(x) = 3x - 2$;
3) $P(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 1$, $T(x) = x^2 + 2x + 2$;
4) $P(x) = 8x^4 - 4x^3 - 16x^2 - 4x + 9$, $T(x) = 2x^2 - x - 1$.

9. Используя способ деления «уголком», найти частное и остаток при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $T(x)$:

1) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $T(x) = x - 1$;
2) $P(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10$, $T(x) = x - 2$;
3) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6x + 7$, $T(x) = x^2 - x + 3$;
4) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 7$, $T(x) = x^2 + 2x + 5$.

10. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

1) $f(x) = x^3 + x - 2$, $g(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$;
2) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$;
3) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.

11. 1) Некоторый многочлен при делении на двучлен $x - 1$ дает в остатке 3, а при делении на двучлен $x + 2$ дает в остатке -7. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x - 1)(x + 2)$.

2) Некоторый многочлен при делении на двучлен $2x - 1$ дает в остатке 4, а при делении на двучлен $x + 1$ дает в остатке -5. Найти остаток от деления этого многочлена на $(2x - 1)(x + 1)$.

12. Найти многочлен наименьшей степени, дающий в остатке:

1) $2x$ при делении на $(x - 1)^2$ и $3x$ при делении на $(x - 2)^3$;
2) $x^2 + x + 1$ при делении на $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 7$ и $2x^2 + 2$ при делении на $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 13x - 10$.

13. Найти наименьшее общее кратное многочленов $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ и $x^3 - x^2 - x - 2$.

Ответы

1. 1) 6; 2) 18. **2.** 1) 3; 2) 2. **3.** 1) $30x^2 + 150x + 15$; 2) $13x^2 + 195x + 36$; 3) $x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 21x + 28$; 4) $-x^6 - x^4 + x^2 + 1$. **5.** 1) $a = 3, b = 4, c = 2$; 2) $a = 3$, $b = -2$, $c = 3$. **6.** 1) 0. Указание. $P(x) = (x + 2)^3 + 11$; 2) 0. **7.** 1) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, $e = 0$, $f = 0$. Указание. Из условия $P(2) = 40$ или $32a + 16b + 8c + 4d + 2e + f = 40$ следует, что f — четно, т. е. равно 0 и т. д.; 2) $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, $e = 1$, $f = 0$. **8.** 1) $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $R = -7$; 2) $Q(x) = 2x^2 + 4$, $R = 8$; 3) $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $R(x) = x - 3$; 4) $Q(x) = 4x^2 - 6$, $R(x) = 2x + 3$. **9.** 1) $Q(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3, R = 5$; 2) $Q(x) = 3x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 10x - 33$, $R = -76$; 3) $Q(x) = x^2 + 4x - 4$, $R(x) = -2x + 19$; 4) $Q(x) = x^2 + x - 2$, $R(x) = 3x + 17$. **10.** 1) $x^2 + x + 2$; 2) 1; 3) $x^3 + 1$. **11.** 1) $\frac{10}{3}x - \frac{1}{3}$; 2) $6x + 1$. **12.** 1) $4x^4 - 27x^3 + 66x^2 - 65x$; 2) $\frac{1}{3}(x^4 - 2x^3 + x^2 + 13x - 4)$. **13.** $\left(x^3 + 4x^2 + 4x + 3\right) \cdot (x - 2)$.

§ 2. СХЕМА ГОРНЕРА

1. Схема Горнера

Рассмотрим деление многочлена $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n$ $(a_0 \neq 0,\ n \geqslant 1)$ на двучлен $x - c$. Разделив с остатком, получим

$$P(x) = (x - c)Q(x) + R, \tag{1}$$

где неполное частное — многочлен

$$Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

степени $n - 1$, а остаток R — число.

Из равенства (1) следует

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})(x-c)+R=$$
$$=b_0x^n+(b_1-cb_0)x^{n-1}+(b_2-cb_1)x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+(b_{n-1}+cb_{n-2})x+(R-cb_{n-1}).$$

По определению равенства многочленов

$$b_0=a_0,\ b_1=cb_0+a_1,\ \ldots,\ b_{n-1}=cb_{n-2}+a_{n-1},\ R=cb_{n-1}+a_0.$$

Такая цепочка для вычисления коэффициентов b_i и R записывается в виде таблицы, заполняемой слева направо.

Коэффициенты делимого $P(x)$

	a_0	a_1	$\ldots$	a_k	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
Число c	$\underbrace{a_0}_{=b_0}$	$\underbrace{cb_0+a_1}_{=b_1}$	$\ldots$	$\underbrace{cb_{k-1}+a_k}_{=b_k}$	$\ldots$	$\underbrace{cb_{n-2}+a_{n-1}}_{=b_{n-1}}$	$\underbrace{cb_{n-1}+a_0}_{=R}$

Коэффициенты частного $Q(x)$ Остаток R

Эта таблица называется *схемой Горнера*.

В первой строке этой таблицы записываются последовательно коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ многочлена $P(x)$. Слева во второй строке стоит число c, а далее в клетках строки последовательно идут коэффициенты многочлена-частного $Q(x)$ и остаток R. Вторая строка заполняется по следующему правилу:

В первую клетку надо записать число a_0 из первой клетки первой строки. Во вторую клетку надо записать число a_1 из второй клетки первой строки и прибавить к нему произведение числа c на предшествующий элемент (число $b_0=a_0$) второй строки. Каждая следующая клетка второй строки заполняется аналогичным образом: к стоящему над ней числу первой строки прибавляется произведение числа c на предшествующее число второй строки.

Пример 1. Найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)=2x^5-5x^3-8x+2$ на двучлен $x-3$.

$\triangle$ Воспользуемся для решения схемой Горнера. Заполним таблицу

Коэффициенты делимого $P(x)$

	2	0	-5	0	-8	2
3	2	$2\cdot3+0=6$	$3\cdot6-5=13$	$3\cdot13+0=39$	$3\cdot39-8=109$	$3\cdot109+2=329$

c Коэффициенты частного $Q(x)$ Остаток R

10—2549

Получаем частное $Q(x) = 2x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 39x + 109$ и остаток $R = 329$, т. е. $P(x) = \left(2x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 39x + 109\right)(x-3) + 329$. ▲

Отметим некоторые следствия из полученной выше схемы.

Следствие 1. Если $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и c — рациональные числа, то $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ и R — также рациональные числа.

Следствие 2. Если a_0, $a_1, \ldots$, a_n, c — целые числа, то b_0, $b_1, \ldots$, b_{n-1} и R — также целые.

Следствие 3. Многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $x - x_0$ тогда и только тогда, когда его значение при $x = x_0$ равно нулю, т. е. $P(x_0) = 0$.

2. Разложение многочлена по степеням двучлена

Для любого многочлена $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n$ $(a_0 \neq 0$, $n \geqslant 1)$ и любого числа c можно написать разложение $P(x)$ по степеням двучлена $(x-c)$:

$$P(x) = d_0(x-c)^n + \ldots + d_k(x-c)^{n-k} + \ldots + d_n.$$

Для формулировки алгоритма нахождения коэффициентов d_0, $d_1, \ldots$, d_n этого разложения выпишем следующую цепочку равенств:

$$P(x) = (x-c)\left[\underbrace{d_0(x-c)^{n-1} + \ldots + d_{n-1}}_{Q_{n-1}(x)}\right] + d_n,$$

$$Q_{n-1}(x) = (x-c)\left[\underbrace{d_0(x-c)^{n-2} + \ldots + d_{n-2}}_{Q_{n-2}(x)}\right] + d_{n-1},$$

$$Q_{n-2}(x) = (x-c)\left[\underbrace{d_0(x-c)^{n-3} + \ldots + d_{n-3}}_{Q_{n-3}(x)}\right] + d_{n-2},$$

. . . .

$$Q_2(x) = (x-c)\left[\underbrace{d_0(x-c) + d_1}_{Q_1(x)}\right] + d_2,$$

$$Q_1(x) = (x-c)\underbrace{d_0}_{Q_0(x)} + d_1,$$

$$Q_0(x) = d_0.$$

Тогда алгоритм нахождения коэффициентов $d_n,\ d_{n-1},\ldots,\ d_1,\ d_0$ состоит в следующем:

---

1) разделить с остатком $P(x)$ на двучлен $x-c$; в остатке получится d_n, а в частном многочлен $Q_{n-1}(x)$;
2) разделить с остатком $Q_{n-1}(x)$ на двучлен $x-c$; в остатке получится d_{n-1}, а в частном многочлен $Q_{n-2}(x)$;
3) далее выполняем деление до тех пор, пока в частном не получится число; полученный на последнем шаге остаток будет равен d_1, а частное даст $d_0 = a_0$.

Все вычисления в этом алгоритме удобно проводить по схеме Горнера.

Пример 2. Разложить по степеням двучлена $x+2$ многочлен $P(x) = 3x^4 - 5x^3 - 8x + 2$.

$\triangle$ Воспользуемся для решения схемой Горнера. Заполним таблицу

	3	-5	0	-8	2
-2	3	$(-2)\cdot 3-5=-11$	$(-2)\cdot(-11)+0=22$	$(-2)\cdot 22-8=-52$	$(-2)\cdot(-52)+2=\mathbf{106}$
	3	$(-2)\cdot 3-11=-17$	$(-2)\cdot(-17)+22=56$	$(-2)\cdot 56-52=\mathbf{-164}$	
	3	$(-2)\cdot 3-17=-23$	$(-2)\cdot(-23)+56=\mathbf{102}$		
	3	$(-2)\cdot 3-23=\mathbf{-29}$			
	3				

В итоге получаем

$$P(x) = 3(x+2)^4 - 29(x+2)^3 + 102(x+2)^2 - 164(x+2) + 106. \quad \blacktriangle$$

Задачи

1. Применяя схему Горнера, найти частное $Q(x)$ и остаток R при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x - x_0$:

1) $P(x) = x^4 + 19x^2 - 30,\ x_0 = -2;$
2) $P(x) = 14x - 4 + 13x^4 - 9x^7,\ x_0 = -1;$
3) $P(x) = x^6 + 9x^4 + 16x^2 - 10,\ x_0 = 2.$

2. Применяя схему Горнера, убедиться, что и числа 1 и -2 являются корнями многочлена $P(x)$:

1) $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 13x + 6;$
2) $P(x) = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + 1) - 12;$
3) $P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12.$

3. Применяя схему Горнера, убедиться, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $T(x)$:

1) $P(x) = x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 48x - 32,\ T(x) = (x-3)^3;$
2) $P(x) = (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 12x + 35) + 15,\ T(x) = (x+2)(x+6).$

4. Разложить многочлен $f(x)$ по степеням двучлена $x-2$ и найти его значение в точке 2:

1) $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90$;

2) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10$.

Ответы

1. 1) $Q(x)=x^3-2x^2+23x-46$, $R=62$; 2) $Q(x)=-9x^6+9x^5-9x^4+22x^3-22x^2+22x-8$, $R=4$; 3) $Q(x)=x^5-2x^4+13x^3-26x^2+68x-136$, $R=262$. **4.** 1) $f(x)=(x-2)^4-18(x-2)+38$, $f(2)=38$; 2) $f(x)=(x-2)^5+10(x-2)^4+38(x-2)^3+62(x-2)^2+48(x-2)+18$, $f(2)=18$.

§ 3. ТЕОРЕМА БЕЗУ. КОРНИ МНОГОЧЛЕНА

1. Теорема Безу

Пример 1. Дан многочлен $P(x)=2x^5-5x^3-8x-8$. Найти $P(-1)$, $P(1)$, $P(0)$, $P(2)$.

Δ $P(-1)=2(-1)^5-5(-1)^3-8(-1)-8=-2+5+8-8$, т. е. $P(-1)=3$; аналогично, $P(1)=2-5-8-8=-19$, $P(0)=-8$, $P(2)=0$. $\blacktriangle$

Число x, при котором многочлен $P(x)$ обращается в нуль, называется *корнем* этого многочлена.

Например, число 2 — корень многочлена $P(x)=2x^5-5x^3-8x-8$, так как $P(2)=0$.

Отметим, что число x_0 называется корнем многочлена $P(x)$, если оно является решением уравнения $P(x)=0$, т. е. верно равенство $a_0x_0^n+\ldots+a_kx_0^{n-k}+\ldots+a_n=0$.

Пример 2. Разделить многочлен $P(x)=2x^5-5x^3-8x-8$ на двучлен $x+1$.

Δ Воспользуемся для решения схемой Горнера. Заполним таблицу:

	2	0	−5	0	−8	−8
−1	2	−2	−3	3	−11	3

Следовательно, $P(x)=(x+1)(2x^4-2x^3-3x^2+3x-11)+3$. $\blacktriangle$

Сравнивая результаты примеров 1 и 2, замечаем, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x+1$ равен значению этого многочлена при $x=-1$, т. е. $R=P(-1)=3$.

Этот факт не случаен и является следствием *теоремы Безу*.

Теорема 1 (*Безу*). *Если x_0 — произвольное число, то при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $(x-x_0)$ получается остаток, равный значению многочлена при $x=x_0$, т. е. $R=P(x_0)$.*

○ Разделив с остатком многочлен $P(x)$ на двучлен $x - x_0$, получим равенство $P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0) + R$, где остаток R — число. Подставив в это равенство вместо x значение x_0, получим $P(x_0) = Q(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + R$. Отсюда следует, что $R = P(x_0)$. ●

Замечание. Отметим, что при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $ax + b$ получается остаток, равный значению этого многочлена при $x = -\frac{b}{a}$, т. е. $R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Из теоремы Безу вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 2. *Число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $x - x_0$.*

○ Если x_0 — корень многочлена $P(x)$, то по теореме Безу $R = P(x_0) = 0$, т. е. $P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0)$, а это значит, что многочлен $P(x)$ делится на $x - x_0$ нацело.

Пусть теперь $R = 0$, т. е.

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0). \tag{1}$$

Подставляя в равенство (1) $x = x_0$, получаем $P(x_0) = 0$, т. е. x_0 — корень многочлена $P(x)$. ●

2. Многочлены с комплексными коэффициентами

Рассмотрим многочлен $P(z)$ степени n с комплексными коэффициентами:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_k z^{n-k} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Отметим, что теорема Безу справедлива и для многочлена с комплексными коэффициентами.

Справедлива также следующая теорема, которую мы примем без доказательства.

Теорема 3 (*основная теорема алгебры*). *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Следствие 1. Любой многочлен $P(z)$ степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами раскладывается в произведение n линейных множителей:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_k z^{n-k} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n),$$

где $a_0, \ldots, a_n, z_1, \ldots, z_n$ — комплексные числа.

○ Для доказательства воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$ многочлен является линейным.

Предположим, что при $n = k$ утверждение справедливо.

Пусть теперь многочлен $P(z)$ степени $n = k+1$ имеет корень $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда по теореме Безу $P(z)$ представляется в виде $P(z) = (z - z_0)P_k(z)$, где $P_k(z)$ — многочлен степени k, который по предположению индукции раскладывается в произведение k линейных множителей:

$$P_k(z) = a_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_{k-1}z + b_k = a_0(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_k).$$

Следовательно, $P(z) = a_0(z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_k)$. ●

Следствие 2. Любой многочлен $P(z)$ степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет в множестве комплексных чисел ровно n корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.

○ Действительно, согласно следствию 1,

$$P(z) = a_0(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n), \qquad (2)$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — корни многочлена $P(z)$. Объединяя в последнем соотношении равные сомножители в степени, получим

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{k_m}, \qquad (3)$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — различные корни, а $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — их кратности. Поскольку степени многочленов в левой и правой частях равенства одинаковы, то

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m.$$ ●

Корни кратности 1 называются *простыми* корнями, кратности 2 — *двойными*, или *двукратными*, и т. д. *Кратный корень* — корень кратности $k \geqslant 2$.

Из доказанного вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ имеет ровно n (действительных или комплексных) корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

3. Многочлены с действительными коэффициентами

Теорема 4. *Пусть $P(z)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Тогда если z_0 — комплексный корень многочлена $P(z)$, то $\overline{z}_0$ — также его корень.*

○ Пусть $P(z)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Тогда

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_k z^{n-k} + \ldots + a_{n-1} z^n + a_n,$$

где $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Пусть z_0 — комплексный корень многочлена $P(z)$, т. е.

$$P(z_0) = a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z_0 + a_n = 0.$$

Используя свойство сопряженных чисел, получим, что

$$\overline{P(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_k z^{n-k} + \ldots + a_{n-1} z^n + a_n} =$$

$$= \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_{n-1} z^n} + \overline{a_n} =$$

$$= \underbrace{\overline{a_0}}_{=a_0} \cdot \overline{z^n} + \underbrace{\overline{a_1}}_{=a_1} \cdot \overline{z^{n-1}} + \ldots + \underbrace{\overline{a_{n-1}}}_{=a_{n-1}} \cdot \overline{z^n} + \underbrace{\overline{a_n}}_{=a_n} =$$

$$= a_0 \cdot (\overline{z})^n + a_1 \cdot (\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \overline{z} + a_n = P(\overline{z}).$$

Так как $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$, то при z_0 получаем $\overline{P(z_0)} = 0 = P(\overline{z}_0)$. Следовательно, $\overline{z_0}$ — также корень многочлена $P(z)$. ●

Следствие. Любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

○ Действительному корню x_0 многочлена с действительными коэффициентами отвечает линейный множитель $x - x_0$. Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $z_1 = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, то число $z_2 = \overline{z}_1 = \alpha - i\beta$ — также корень этого многочлена. Перемножая в разложении многочлена на множители два соответствующих множителя, получим квадратичный многочлен с действительными коэффициентами

$$(x - z_1)(x - \overline{z}_1) = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2) = x^2 + px + q, \tag{4}$$

где $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$. ●

Разложение на множители многочлена $P_n(x)$ с действительными коэффициентами. Пусть $x_0 = a$ — действительный корень кратности k многочлена $P_n(x)$ степени n с действительными коэффициентами. Тогда выполняется равенство

$$P_n(x) = (x - a)^k Q_{n-k}(x),$$

где $Q_{n-k}(x)$ — многочлен степени $n - k$ с действительными коэффициентами, для которого число $x_0 = a$ не является корнем.

Пусть $x_1 = \alpha + i\beta$ — комплексный корень $(\beta \neq 0)$ многочлена $P_n(x)$. Тогда по теореме 4 число $\overline{x}_1 = \alpha - i\beta$ также является корнем этого многочлена. Таким образом, многочлен $P_n(x)$ в этом случае делится без остатка на квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ с действительными коэффициентами, дискриминант которого отрицателен, т. е. $p^2 - 4q < 0$. Это означает, что существует такой многочлен $Q_{n-2}(x)$ с действительными коэффициентами, что

$$P_n(x) = (x^2 + px + q) \cdot Q_{n-2}(x).$$

Если $x_1 = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$, является корнем многочлена $P_n(x)$ кратности m, то число $\overline{x}_1 = \alpha - i\beta$ также является корнем этого многочлена кратности m, и поэтому многочлен $P_n(x)$ можно в соответствии с формулами (2) и (4) представить в виде

$$P_n(x) = (x - x_1)^m \cdot (x - \overline{x}_1)^m \cdot Q_{n-2m}(x),$$

или

$$P_n(x) = (x^2 + px + q)^m \cdot Q_{n-2m}(x),$$

где p, q — действительные числа, $p^2 - 4q < 0$, а $Q_{n-2m}(x)$ — многочлен степени $n - 2m$ с действительными коэффициентами, для которого числа x_1 и $\overline{x}_1$ не являются его корнями, т. е.

$$Q_{n-2m}(x_1) \neq 0, \quad Q_{n-2m}(\overline{x}_1) \neq 0.$$

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — все действительные корни многочлена $P_n(x)$, а их кратности соответственно равны $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Тогда равенство (2) можно записать в виде

$$P(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m} \cdot R(x),$$

где $R(x)$ — многочлен степени $t = n - \sum\limits_{i=1}^{m} k_i$ с действительными коэффициентами, не имеющий действительных корней.

Если $R(x)$ — многочлен ненулевой степени, то каждой паре комплексно-сопряженных корней x_j и $\overline{x}_j$ кратности s_j многочлена $P_n(x)$ в формуле (2) соответствует множитель $x^2 + p_j x + q_j$, где $p_j^2 - 4q_j < 0$. Поэтому

$$P(x) = a_0 \cdot (x - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_r x + q_r)^{s_r}, \tag{5}$$

где $n = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i + 2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{r} s_j$.

Таким образом, зная все корни многочлена $P_n(x)$ с действительными коэффициентами, можно этот многочлен разложить на множители, т. е. представить в виде (5), где все числа являются действительными.

Разложение на множители многочлена третьей степени. В качестве примера рассмотрим многочлен третьей степени с действительными коэффициентами

$$P_3(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \text{ где } a_0 \neq 0.$$

Данный многочлен имеет три корня с учетом их кратностей или от одного до трех различных корней. Так как комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами — пары комплексно-сопряженных чисел x_1 и $\overline{x}_1$, то получаем, что многочлен третьей степени с действительными коэффициентами должен иметь по крайней мере один действительный корень x_0 и можно записать

$$P_3(x) = (x - x_0) \cdot Q_2(x).$$

Многочлен $Q_2(x)$ может иметь два различных действительных корня, один действительный корень кратности два или два различных комплексных корня. Следовательно, возможны следующие случаи разложения многочлена $P_3(x)$ на множители.

1) Все корни $P_3(x)$ действительные. Возможны три варианта:

а) если многочлен $P_3(x)$ имеет один действительный корень x_0 кратности три, то

$$P_3(x) = a_0(x - x_0)^3;$$

б) если многочлен $P_3(x)$ имеет два различных действительных корня x_0 и x_1, где один из них, например x_0, имеет кратность два, то

$$P_3(x) = a_0(x - x_0)^2(x - x_1);$$

в) если многочлен $P_3(x)$ имеет три различных действительных корня x_0, x_1 и x_2, то

$$P_3(x) = a_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

2) Многочлен $P_3(x)$ имеет один действительный корень x_0 и пару комплексно-сопряженных корней x_1 и $\overline{x}_1$. В этом случае

$$P_3(x) = a_0 \cdot (x - x_0) \cdot (x^2 + px + q),$$

где p, q — действительные числа, $p^2 - 4q < 0$.

Использование метода неопределенных коэффициентов. В случаях, когда разложение на множители многочлена с действительными коэффициентами $P_n(x)$ не удается провести простейшими средствами, можно использовать *метод неопределенных коэффициентов*.

Пример 3. Разложить на множители и найти корни многочлена

$$P(x) = x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14.$$

Δ Предположим, что данный многочлен раскладывается на множители второй степени с целыми коэффициентами. Обозначим один из них через $x^2 + px + q$, другой через $x^2 + rx + s$. Задача сводится к нахождению коэффициентов p, q, r и s. Тогда

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов левой и правой частей уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} p+r=-4, \\ s+q+pr=-10, \\ ps+qr=37, \\ qs=-14. \end{cases}$$

Исходя из последнего уравнения системы, можно попробовать взять $q=2$, $s=-7$ или $q=-2$, $s=7$. В первом случае получаем решение системы $p=-5$, $q=2$, $r=1$, $s=-7$. Таким образом,

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=(x^2-5x+2)(x^2+x-7).$$

Корнями уравнения $x^2-5x+2=0$ являются числа $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, а уравнения $x^2+x-7=0$ — числа $x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$.

Следовательно, числа $\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ и $\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$ — четыре различных корня данного многочлена $P(x)$. ▲

Теорема 5. *Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена, степени которых не превосходят n. Тогда если значения многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают в $n+1$ точке, то $P(x)=Q(x)$.*

○ Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ — различные числа и $P(x_i)=Q(x_i)$, $1\leqslant i\leqslant n+1$. Рассмотрим многочлен $F(x)=P(x)-Q(x)$. Если $F(x)$ не является нулевым многочленом, то его степень не превосходит n, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ — его корни. Однако это противоречит теореме о числе корней многочлена. Следовательно, $F(x)$ — нулевой многочлен и $P(x)=Q(x)$. ●

4. Обобщенная теорема Виета

Пример 4. Составить многочлен третьей степени, корнями которого являются числа x_1, x_2, x_3.

△ Найдем коэффициенты многочлена

$$P_3(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

где $a_0\neq 0$. Так как $P_3(x)$ имеет три корня x_1, x_2, x_3, то запишем его разложение на множители

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \tag{6}$$

Перемножив выражения в скобках и собрав члены с одинаковыми степенями, получим в правой части тождества (6) многочлен, тождественно равный многочлену, стоящему слева

$$P_3(x)=a_0x^3-a_0(x_1+x_2+x_3)x^2+a_0(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-a_0x_1x_2x_3.$$

Отсюда следует, что коэффициенты многочлена $P_3(x)$ определяются с точностью до множителя a_0. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях соотношения (6), получим, что коэффициенты многочлена $P_3(x)$ и его корни x_1, x_2, x_3 связаны формулами

$$\begin{cases} -a_0(x_1+x_2+x_3)=a_1, \\ a_0(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=a_2, \\ -a_0x_1x_2x_3=a_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{a_3}{a_0}. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Рассмотренный пример представляет собой частный случай общей теоремы.

Теорема 6 (*обобщенная теорема Виета*). *Если старший коэффициент a_0 многочлена $P_n(x)$ отличен от нуля, т. е.*

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

а числа x_1, x_2, ..., x_n — его корни, то справедливы равенства:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3+\ldots+x_2x_3x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_3}{a_0}, \\ \dotfill \\ x_1x_2x_3\ldots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases} \qquad (7)$$

Сами равенства системы (7) *называются формулами Виета.*

○ Поскольку по следствию 1 теоремы 3 любой многочлен может быть представлен в виде произведения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

то, перемножив выражения в скобках и собрав члены с одинаковыми степенями, получим в правой части тождества многочлен, тождественно равный многочлену, стоящему слева. Отсюда следует справедливость доказываемых равенств. ●

Замечание. Формулы (7) справедливы и в случае, когда часть корней x_1, x_2, ..., x_n — комплексные числа.

Пример 5. Построить многочлен наименьшей степени, корнями которого являются числа -2, 1 и 3.

△ Так как по условию многочлен имеет не менее трех корней, то наименьшая степень искомого многочлена должна равняться трем, и он имеет вид $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$. Пусть $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Используя для определения неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 обобщенную теорему Виета, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_3}{a_0}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2 = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ -5 = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ -6 = -\dfrac{a_3}{a_0}. \end{cases}$$

Отсюда $a_1 = -2a_0$, $a_2 = -5a_0$, $a_3 = 6a_0$. Тогда многочлен имеет вид

$$P(x) = a_0x^3 - 2a_0x^2 - 5a_0x^2 + 6a_0 = a_0\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right),$$

т. е. многочлен определен с точностью до числового множителя a_0. Беря, например, $a_0 = 1$, получим многочлен $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. ▲

Задачи

1. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x) = ax + b$, не выполняя деления:

1) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$, $Q(x) = 2x + 1$;

2) $P(x) = x^5 - x^3 + 2x - 1$, $Q(x) = 3 - 2x$.

2. Определить кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:

1) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x - 8$, $x_0 = -1$;

4) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54$, $x_0 = 3$.

3. Доказать, что если многочлен 3-й степени с рациональными коэффициентами имеет кратный корень, то все его корни рациональны.

4. Построить многочлен степени 4 со старшим коэффициентом 1, имеющий корни:

1) 1, 2, -3, -4; 2) двукратный корень 3 и простые корни -2 и -4.

5. 1) Сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равна 1. Найти λ.

2) Определить λ так, чтобы один из корней уравнения $x^3 - 7x + \lambda = 0$ равнялся удвоенному другому.

6*. Вычислить сумму квадратов корней уравнения, не решая его:

1) $x^3+2x-3=0$; 2) $x^3+4x^2-x-6=0$; 3) $x^3+px^2+qx+r=0$.

7. Дано уравнение $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, где $ae\neq 0$, с корнями x_1, x_2, x_3, x_4. Составить уравнение 4-й степени, корнями которого были бы следующие числа:

1) $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$; 2) $x_1^{-1}, x_2^{-1}, x_3^{-1}, x_4^{-1}$.

8*. Доказать, что являются рациональными числа:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{242}{27}}-3}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{242}{27}}+3}$; 2) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$.

9*. Многочлен $P(x)=a_0x^n+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_n$, имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Определить, какие корни имеет многочлен $Q(x)$:

1) $Q(x)=a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^na_n$;
2) $Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0$ $(a_n\neq 0)$;
3) $Q(x)=a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}-\ldots+(-1)^na_0$ $(a_n\neq 0)$;
4) $Q(x)=2^na_0x^n+2^{n-1}a_1x^{n-1}+2^{n-2}a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$;
5) $Q(x)=a_nx^n-2a_{n-1}x^{n-1}+2^2a_{n-2}x^{n-2}-\ldots+(-1)^n2^na_0$ $(a_n\neq 0)$.

10. Найти многочлен наименьшей степени по данной таблице его значений:

1) $f(-1)=19$, $f(0)=5$, $f(1)=3$, $f(2)=19$, $f(3)=107$;
2) $f(-1)=5$, $f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(2)=11$, $f(3)=61$.

11*. Найти соотношение между коэффициентами многочлена

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d,$$

при котором:

1) сумма двух корней равна сумме других двух корней;
2) произведение двух корней равно произведению двух других корней.

12*. Найти общие, включая и комплексные, корни многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

1) $f(x)=x^6+x^5+2x^4+x^3+2x^2+x+1$, $g(x)=x^6-x^5+2x^4-x^3+3x^2-2x+2$;
2) $f(x)=x^6+2x^5+3x^4+2x^3+3x^2+2x+2$, $g(x)=x^4+3x^3+6x^2+6x+4$.

Ответы

1. 1) $R=P\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$; 2) $R=P\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{151}{8}$. **2.** 1) 3; 2) 4; 3) -1 не корень; 4) 3. **4.** 1) $x^4+4x^3-7x^2-22x+24$; 2) $x^4-19x^2+6x+72$. **5.** 1) 4; 2) -3. **6.** 1) 10; Указание. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$; 2) 18; 3) p^2-2q. **7.** 1) $ax^4-bx^3+cx^2-dx+e=0$; 2) $ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=0$. **8.** 1) Указание. Обозначить $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{242}{27}}-3}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{242}{27}}+3}=x$ и возвести обе части равенства в куб. Показать, что полученный многочлен имеет единственный действительный корень. **9.** 1) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$. Указание. Если n — четное число, то $Q(x)=P(-x)$; если n — нечетное число, то $Q(x)=-P(-x)$; 2) $x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$; 3) $-x_1^{-1}, -x_2^{-1}, \ldots, -x_n^{-1}$; 4) $\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2}$;

5) $-\frac{2}{x_1}, -\frac{2}{x_2}, \ldots, -\frac{2}{x_n}$. **10.** 1) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 5$; 2) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. **11.** 1) $b = \frac{a^2}{4} + \frac{2c}{a}$. Указание. Представить многочлен в виде произведения $(x^2+px+\alpha)(x^2+px+\beta)$; 2) $d = \left(\frac{c}{a}\right)^2$. **12.** 1) $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Указание. Использовать алгоритм Евклида для нахождения НОД$(f(x), g(x))$; 2) $x_{1,2} = -1 \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Алгебраическим уравнением называют уравнение вида

$$P_n(x) = 0, \tag{1}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$.

Степенью алгебраического уравнения называют степень n многочлена $P_n(x)$. При $n = 2$ алгебраическое уравнение называют *квадратным*, при $n = 3$ — *кубическим*.

Каждый корень уравнения (1) является также корнем многочлена $P_n(x)$.

1. Теоремы о рациональных и целых корнях многочлена

Теорема 1 (*о нахождении рациональных корней многочлена*). *Если многочлен $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $x_0 = \frac{p}{q}$ (причем эта дробь несократима), то p — делитель свободного члена a_n, а q — делитель старшего коэффициента a_0.*

○ Пусть рациональное число $x_0 = \frac{p}{q}$ — корень многочлена $P(x)$ и $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, т. е.

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0.$$

Умножив обе части уравнения на q^n, получим:

$$a_0p^n + a_1qp^{n-1} + a_2q^2p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$$

Все слагаемые в левой части — целые числа. Начиная со второго, все слагаемые делятся на q:

$$a_0p^n + \underbrace{(a_1qp^{n-1} + a_2q^2p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n)}_{\text{делятся на } q} = 0. \tag{2}$$

Так как числа p и q взаимно просты, то по свойствам делимости целых чисел для выполнения равенства (2) необходимо, чтобы q делило a_0.

Аналогично, доказывается, что p делит a_n, так как

$$\underbrace{a_0p^n + a_1qp^{n-1} + a_2q^2p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1}}_{\text{делятся на } p} + a_nq^n = 0. \qquad \bullet$$

Следствием доказанной теоремы является следующая теорема.

Теорема 2 (*о нахождении целых корней многочлена*). *Если все коэффициенты многочлена степени n ($n \geqslant 1$) — целые числа и корень x_0 этого многочлена — также целое число, то x_0 — делитель свободного члена многочлена.*

Следствие 1. Целыми корнями многочлена с целыми коэффициентами могут быть только делители свободного члена.

Следствие 2. Если многочлен

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице, имеет рациональный корень, то этот корень — целое число.

Пример 1. Найти корни многочлена $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

$\triangle$ Делителями свободного члена являются числа $-2, -1, 1, 2$. Убеждаемся, что $P(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2 = -16 + 4 + 10 + 2 = 0$, т. е. число -2 — корень.

Для нахождения частного при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x + 2$ воспользуемся схемой Горнера. Для этого заполним таблицу:

	2	1	−5	2
−2	2	−3	1	0

Следовательно, $P(x) = (x + 2)(2x^2 - 3x + 1)$. В свою очередь многочлен $2x^2 - 3x + 1$ имеет два корня $x = 1$ и $x = \frac{1}{2}$, которые являются корнями многочлена $P(x)$.

Ответ. -2; $\frac{1}{2}$; 1. $\blacktriangle$

2. Формула Кардано

Ж. Лагранж, П. Руффини и Н. Абель показали, что нет общей формулы для нахождения корней уравнения степени $n \geqslant 5$. Э. Галуа нашел метод, позволяющий для любого многочлена определить, выражаются ли его корни через коэффициенты с помощью радикалов.

Для решения уравнения второй степени используется известная вам формула корней квадратного уравнения. Для нахождения корней кубического уравнения используют формулы Кардано, а для решения уравнения четвертой степени применяют метод Феррари.

Рассмотрим кубическое уравнение

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Его корни находят следующим образом. Разделив левую часть уравнения на первый коэффициент, приводят его к виду

$$x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0,$$

где $b_1 = \frac{a_1}{a_0}$, $b_2 = \frac{a_2}{a_0}$, $b_3 = \frac{a_3}{a_0}$.

Далее заменой $y = x + \frac{b_1}{3}$ (выделением полного куба) — к уравнению $y^3 + py + q = 0$, корни которого находятся по *формуле Кардано*:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \qquad (3)$$

При использовании формулы (3) для каждого из трех комплексных значений корня $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ берется то значение корня $\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, для которого выполняется условие $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$.

Тогда корни исходного уравнения выражаются через корни приведенного следующим образом:

$$x_1 = y_1 - \frac{b_1}{3}, \quad x_2 = y_2 - \frac{b_1}{3}, \quad x_3 = y_3 - \frac{b_1}{3}.$$

Задачи

1. Найти все рациональные корни уравнения:

1) $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$; 2) $3x^3 - 4x^2 + 5x - 18 = 0$;

3) $4x^3 + x - 1 = 0$; 4) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$;

5) $8x^4 + 6x^3 - 13x^2 - x + 3 = 0$.

2. Найти все корни уравнения:

1) $4x^4 + 8x^3 - 17x + 5 = 0$; 2) $8x^4 + 6x^3 - 13x^2 - x + 3 = 0$;

3) $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$; 4) $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5 = 0$.

3*. Найти действительные корни уравнения, используя формулу Кардано:

1) $x^3 - 6x + 6 = 0$; 2) $x^3 + 3x^2 + 5 = 0$; 3) $x^3 - 12x + 9 = 0$.

4. Разложить данный многочлен на множители:

1) $x^4 - 5x^2 + 6$; 2) $x^4 + x^3 - x - 1$;

3) $x^4 + 5x^2 + 6$; 4) $x^4 + 4$.

5*. Используя метод неопределенных коэффициентов, найти все корни уравнения:
1) $x^4-4x^3+5x^2-2x-6=0$; 2) $x^4+2x^3+2x^2+10x+25=0$;
3) $x^4+2x^3+3x^2+2x-3=0$.

6. Найти кратные корни многочленов:
1) $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$; 2) $x^6-2x^5-x^4-2x^3+5x^2+4x+4$;
3) $x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$.

7*. Составить уравнение наименьшей степени с целыми коэффициентами, множество корней которого содержит числа:
1) $1,\ 2,\ \sqrt{2}$; 2) $-1,\ 3+\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{2}+1$.

8. Найти все λ, при которых многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень (действительный или комплексный):
1) $f(x)=x^3-\lambda x+2,\ g(x)=x^2+\lambda x+2$;
2) $f(x)=x^3+\lambda x^2-9,\ g(x)=x^3+\lambda x-3$.

9. Найти все a, при которых многочлен $f(x)$ имеет кратный корень:
1) $f(x)=x^3-3x+a$; 2) $f(x)=x^4-4x+a$.

Ответы

1. 1) $2,\ -3,\ -5$; 2) 2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-5,\ 2,\ 3,\ 4$; 5) $-\frac{1}{2};\frac{3}{4}$. **2.** 1) $1,\ -1+\sqrt[3]{1{,}25}$; 2) $-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; 3) $-1,\ \frac{-3\pm 3\sqrt{3}\cdot i}{2}$; 4) $1,\ -2{,}5$. **3.** 1) $-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; 2) $-1+\sqrt[3]{-4+\sqrt{15}}-\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}$. Указание. Положить $y=x+1$; 3) 3. **4.** 1) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$; 2) $(x+1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)$; 3) $\left(x^2+3\right)\left(x^2+2\right)$; 4) $\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+2\right)$. **5.** 1) $1\pm\sqrt{3}$; $1\pm i\sqrt{2}$. Указание. Представить многочлен в виде произведения $(x^2+ax-2)(x^2+bx+3)$; 2) $\frac{-1-\sqrt{3}\pm i\sqrt{16-2\sqrt{3}}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}\pm i\sqrt{16+2\sqrt{3}}}{2}$. Указание. Представить многочлен в виде произведения $(x^2+ax+5)(x^2+bx+5)$; 3) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}$. Указание. Представить многочлен в виде произведения $(x^2+ax-1)(x^2+bx+3)$. **6.** 1) -1; 2) 2; 3) -1 и 2. **7.** Указание. Если число $a+\sqrt{b}$ — корень, то добавить в множество корней число $a-\sqrt{b}$. 1) $x^4-3x^3+6x-4=0$; 2) $x^3-5x^2+x+7=0$; 3) $x^4-10x^2+1=0$; 4) $x^2-2x-1=0$. **8.** 1) $3,\ \pm i$; 2) $\pm i\sqrt{2},\ \pm 2i\sqrt{3}$. **9.** 1) ± 2; 2) 3.

СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ

1. Решение системы, равносильность и следствие, совокупность систем

В этой главе мы рассмотрим системы с двумя и тремя неизвестными (переменными). Систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Многочленом от переменных x и y называется алгебраическая сумма, содержащая слагаемые вида $a_k x^p y^q$, где $a_k \in \mathbb{R}$, p, q — целые неотрицательные числа.

Если левые и правые части уравнений системы (1) являются многочленами от x и y или представляются в виде отношения многочленов, то систему (1) называют *алгебраической*.

Решением системы (1) называется пара чисел x_0, y_0, при подстановке которых соответственно вместо x и y каждое уравнение системы (1) становится верным числовым равенством. Множество решений системы может быть, в частности, пустым. В этом случае говорят, что система не имеет решений (*несовместна*).

Решить систему — значит найти все ее решения или установить, что система не имеет решений.

Процесс решения системы обычно состоит в последовательном переходе с помощью некоторых преобразований от данной системы уравнений к другим, более простым, которые мы умеем решать. При этом нужно внимательно следить за тем, чтобы не потерять решения. Что касается посторонних для данной системы решений, которые могут появиться при преобразованиях системы, то их обычно отсеивают с помощью проверки.

Если в результате преобразований системы (1) получена система

$$\begin{cases} h_1(x, y) = \varphi_1(x, y), \\ h_2(x, y) = \varphi_2(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

такая, что каждое решение системы (1) является решением системы (2), то система (2) называется *следствием* системы (1).

Аналогично, уравнение
$$F(x,y)=G(x,y)$$
называют *следствием* системы (1), если равенство
$$F(x_0,y_0)=G(x_0,y_0)$$
является верным для каждой пары чисел x_0, y_0, образующих решение системы (1).

Если система (2) является следствием системы (1), а система (1) также является следствием системы (2), то эти системы называют *равносильными*. Иначе говоря, системы называют равносильными, если множества их решений совпадают. В частности, две системы, не имеющие решений, являются равносильными.

Используя определение равносильности и следствия, можно утверждать, что:

1) если в системе уравнений заменить какое-либо уравнение на равносильное ему, а остальные уравнения оставить без изменения, то полученная при этом система будет равносильна исходной;
2) если к данной системе присоединить уравнение, являющееся следствием этой системы, то полученная система будет равносильна исходной;
3) если какое-либо уравнение данной системы заменить его следствием, а остальные уравнения оставить без изменения, то полученная система будет следствием исходной.

При решении систем уравнений нередко приходится применять такие преобразования систем, как умножение обеих частей уравнения на одно и то же число (или одну и ту же функцию), почленное сложение, вычитание, умножение и деление уравнений системы, возведение обеих частей уравнения в n-ю степень.

Сформулируем утверждения, связанные с этими преобразованиями, опустив в записи системы неизвестные.

1°. Система
$$\begin{cases} f_1+f_2=g_1+g_2, \\ f_1-f_2=g_1-g_2, \end{cases}$$
полученная почленным сложением и вычитанием уравнений системы (1), равносильна системе (1).

2°. Система
$$\begin{cases} f_1=g_1, \\ f_2^2=g_2^2 \end{cases} \qquad (3)$$
является следствием системы (1). В случае когда функции f_2 и g_2 принимают неотрицательные значения в области определения системы (1), т. е. на множестве, где определены функции f_2 и g_2, система (3) равносильна системе (1).

3°. Система
$$\begin{cases} f_1 = g_1, \\ f_1 f_2 = g_1 g_2 \end{cases} \tag{4}$$
является следствием системы (1). Если же не существует таких пар чисел x, y, при которых обе функции f_1 и g_1 одновременно обращаются в нуль, то система (4) равносильна системе (1).

4°. Если для всех пар чисел x, y обе функции f_2 и g_2 одновременно не обращаются в нуль, то система
$$\begin{cases} f_1 = g_1, \\ \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases} \tag{5}$$
является следствием системы (1). При дополнительном требовании, что одновременно не обращаются в нуль функции f_1 и g_1, система (5) равносильна системе (1).

Эти свойства преобразований систем, доказательство которых читатель может легко получить самостоятельно, получат широкое применение при решении систем с двумя и тремя переменными в §§ 3 и 4.

Обратимся теперь к таким часто применяемым при решении систем методам, как метод разложения на множители (приведение данной системы к совокупности двух или большего числа систем), метод подстановки, метод замены неизвестных.

Введем еще одно понятие, играющее важную роль при решении систем уравнений.

Пусть система уравнений имеет вид
$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Будем говорить, что система (6) *равносильна совокупности систем*
$$\begin{cases} g_1 = 0, \\ g_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$
и
$$\begin{cases} \varphi_1 = 0, \\ \varphi_2 = 0, \end{cases} \tag{8}$$
если каждое решение системы (6) является решением хотя бы одной из систем (7), (8) и всякое решение каждой из систем (7), (8) есть решение системы (6).

Это означает, что множество решений системы (6) совпадает с объединением множеств решений систем (7) и (8). Поэтому вместо слов «система (6) равносильна совокупности систем (7) и (8)» говорят, что «система (6) распадается на системы (7) и (8)».

Обычно это понятие применяется в случае, когда левую часть одного из уравнений системы (6) удается разложить на множители. Пусть, например, $f_1 = fg$, где f и g — многочлены (или функции, которые определены на одном и том же множестве). Тогда система

$$\begin{cases} fg = 0, \\ f_2 = 0 \end{cases}$$

равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} f = 0, \\ f_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g = 0, \\ f_2 = 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ xy + x^2 = 6. \end{cases}$$

△ Так как $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$, то система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ xy + x^2 = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y = 0, \\ xy + x^2 = 6. \end{cases}$$

Решим первую систему. Подставляя $x = 2y$ во второе уравнение этой системы, получаем $6y^2 = 6$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Следовательно, первая система имеет два решения, которые будем записывать так: $(2;1)$, $(-2;-1)$. Аналогично, решив вторую систему, найдем еще два решения $(-2\sqrt{3};\sqrt{3})$ и $(2\sqrt{3};-\sqrt{3})$ исходной системы.

Ответ. $(2;1)$, $(-2;-1)$, $(-2\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3};-\sqrt{3})$. ▲

При решении систем для обозначения равносильности, следствия и совокупности систем используются соответственно знаки $\Longleftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Big[$.

2. Методы решения систем

При решении систем уравнений часто применяется метод подстановки (метод исключения неизвестного), с помощью которого решение системы с двумя неизвестными сводится к решению уравнения с одним неизвестным. В основе этого метода лежит следующее утверждение.

Система уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(y), \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

равносильна системе
$$\begin{cases} x = \varphi(y), \\ F(\varphi(y), y) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Пример 2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y^2 + 1 - x = 0, \\ y^2 + y^3 = xy. \end{cases}$$

△ Так как первое уравнение системы равносильно уравнению $x = y^2 + 1$, то, заменяя во втором уравнении x на $y^2 + 1$, получаем уравнение $y^2 - y = 0$, имеющее корни $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Тогда из равенства $x = y^2 + 1$ находим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

О т в е т. $(1; 0)$, $(2; 1)$. ▲

Одним из эффективных методов решения систем уравнений является метод замены переменных, который состоит в следующем. Пусть левые части уравнений системы
$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases} \tag{11}$$
записываются в виде $F_1(x, y) = f_1(u, v)$, $F_2(x, y) = f_2(u, v)$, где $u = \varphi_1(x, y)$, $v = \varphi_2(x, y)$. Тогда система (11) примет вид
$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0, \\ f_2(u, v) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Если (u_k, v_k), $k = 1, 2, \ldots, n$ — все решения системы (12), то, решив n систем уравнений
$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = u_k, \\ \varphi_2(x, y) = v_k \end{cases}$$
и объединив эти решения, найдем все решения системы (11).

Пример 3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

△ Введем новые неизвестные $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} u - v = \frac{3}{2}, \\ u^2 - v^2 = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} u - v = \frac{3}{2}, \\ u + v = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $u = \frac{1}{2}$, $v = -1$.

Следовательно, $x = \frac{1}{u} = 2$, $y = \frac{1}{v} = -1$.

Ответ. $(2; -1)$. ▲

Задачи

1. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

равносильна каждой из следующих систем:

1) $\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_1(x, y) + f_2(x, y) = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = 0, \end{cases}$

где $\beta \neq 0$ (α — любое).

2. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = a(x - y), \\ x^3 + y^3 = b(x + y) \end{cases}$$

равносильна совокупности следующих систем:

1) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - b = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - a = 0, \\ x + y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - a = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - b = 0. \end{cases}$

3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = a, \\ f_2(x, y) = b, \end{cases}$$

где $ab \neq 0$. Доказать, что:

1) каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = a, \\ \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = \frac{a}{b}; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1(x, y) = a, \\ f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) = ab, \end{cases}$$

равносильна исходной системе;

2) система уравнений $\begin{cases} f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)=ab, \\ \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}=\dfrac{a}{b} \end{cases}$ является следствием исходной системы.

4. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+y=8, \\ xy=-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=5, \\ 13x-\dfrac{3}{y}=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3(x+y)+5x=2, \\ x-y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2-y=0, \\ x^2+y^2=5y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-xy=0, \\ y^2+3xy=4. \end{cases}$

5. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2-9y^2=0, \\ 8y^2+xy=11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y=8, \\ xy=16. \end{cases}$

6. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ x-y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+2y^2=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x-3)(y+1)=0, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Ответы

4. 1) $(3;2)$; 2) $(3;-1)$, $\left(-\frac{1}{3};9\right)$; 3) $\left(1;\frac{1}{4}\right)$; 4) $(1;-2)$; 5) $(0;0)$, $(2;4)$, $(-2;4)$; 6) $(0;2)$, $(0;-2)$, $(1;1)$. **5.** 1) $(3;1)$, $(-3;-1)$, $\left(-3\sqrt{\frac{11}{5}};\sqrt{\frac{11}{5}}\right)$, $\left(3\sqrt{\frac{11}{5}};-\sqrt{\frac{11}{5}}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$; 3) $(2;4)$, $(-2;4)$. **6.** 1) $(5;2)$, $(-2;-5)$; 2) $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{3}};2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; 3) $(3;1)$, $(3;-1)$, $(-3;-1)$.

§ 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определители второго порядка. Правило Крамера

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагая, что хотя бы один из коэффициентов при неизвестных в каждом уравнении системы (1) отличен от нуля, будем решать эту систему способом алгебраического сложения. Уравняем коэффициенты при y в обоих уравнениях системы. С этой целью умножим обе части первого уравнения на b_2, а второго — на b_1. Получим систему

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2, \\ a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1. \end{cases}$$

Вычитая почленно из первого уравнения этой системы второе уравнение, находим

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1. \tag{2}$$

Уравнение (2) не содержит y. Чтобы получить уравнение, не содержащее x, умножим обе части первого уравнения системы (1) на a_2, а второго — на a_1. Получим систему

$$\begin{cases} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2, \\ a_2a_1x + b_2a_1y = c_2a_1. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения этой системы первое, находим

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{3}$$

Заметим, что коэффициент при x в уравнении (2) равен коэффициенту при y в уравнении (3), и предположим, что этот коэффициент не равен нулю, т. е.

$$(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0. \tag{4}$$

Тогда из уравнений (2) и (3) получаем

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{5}$$

Если выполняется условие (4), то система (1) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам (5). В самом деле, если $(x; y)$ — решение системы (1), то каждое из равенств (2), (3), (5) является верным, т. е. решение системы (1) определяется формулами (5). Легко проверить, что если выполняется условие (4), то пара чисел x, y, которые определяются формулами (5), удовлетворяет системе (1).

Обращаясь к формулам (5), легко установить правило, по которому образованы правые части равенств (5). Пусть Δ — общий знаменатель дробей (5), т. е.

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Число Δ назовем *определителем системы* (1) и обозначим

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

а числа a_1, b_1, a_2, b_2 назовем *элементами* этого *определителя*. В первом и втором столбцах определителя (6) расположены соответственно коэффициенты при неизвестном x и неизвестном y системы (1). Диагональ, на которой расположены элементы a_1 и b_2, называют *главной*, а диагональ, на которой стоят элементы a_2 и b_1 определителя (6), называют *побочной*.

Из равенства

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{7}$$

следует, что определитель Δ равен разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях.

Обозначим числители в формулах (5) через Δ_x и Δ_y соответственно. Тогда, пользуясь правилом (7), получаем

$$\Delta_x = c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, при условии (4) равенства (5) можно записать так:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \tag{8}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

Заметим, что определители Δ_x и Δ_y можно получить из определителя Δ заменой столбца из коэффициентов соответственно при x и y системы (1) столбцом свободных членов этой системы.

Определители Δ, Δ_x, Δ_y, имеющие две строки и два столбца, называют *определителями второго порядка*.

Формулы (8)–(9) выражают *правило Крамера* для нахождения решения системы (1) в том случае, когда определитель этой системы $\Delta \neq 0$.

Пример 1. Пользуясь правилом Крамера, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8, \\ 5x + 7y = 3. \end{cases} \tag{10}$$

$\triangle$ Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - (-2) \cdot 5 = 31$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 62$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -31$. По формулам (8)–(9) находим $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2$,

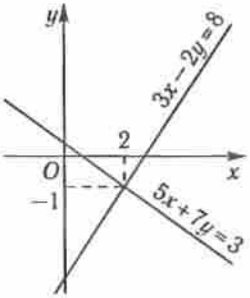


Рис. 1

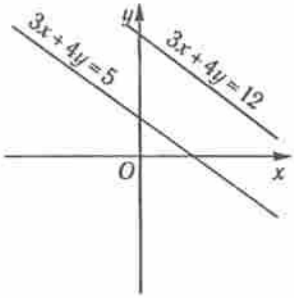


Рис. 2

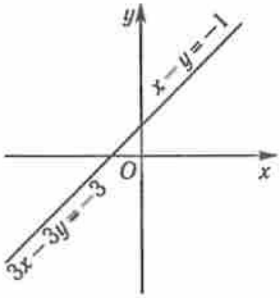


Рис. 3

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1$. Следовательно, система (10) имеет единственное решение $(2; -1)$.

О т в е т. $(2; -1)$. ▲

Заметим, что каждое уравнение системы (1) геометрически представляет прямую на координатной плоскости. Если $\Delta \neq 0$ и $(\alpha; \beta)$ — решение системы (1), то это означает, что прямые $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ пересекаются в точке с координатами $x = \alpha$, $y = \beta$. На рис. 1 дана геометрическая интерпретация системы (10).

Отметим, что если определитель системы (1) равен нулю, то эта система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

Так, система
$$\begin{cases} 3x + 4 = 5, \\ 3x + 4 = 12 \end{cases}$$
не имеет решений. Этой системе соответствует пара параллельных прямых (см. рис. 2), не имеющих общих точек.

Система
$$\begin{cases} x - y = -1, \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$$
имеет бесконечное множество решений. Этой системе соответствует пара совпадающих прямых (см. рис. 3).

Можно показать, что если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных в системе (1) отличен от нуля, то эта система:

не имеет решений, если ее определитель $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y не равен нулю;

имеет бесконечное множество решений, если
$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0.$$

Пример 2. Найти все пары значений a, b, для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} (a+b)x + 26y = 2, \\ 8x + (a^2 - ab + b^2)y = 4 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

Δ Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда оба ее уравнения являются уравнением одной и той же прямой. Умножая обе части первого уравнения на 2 и приравнивая коэффициенты при x и y полученного уравнения и второго уравнения исходной системы, имеем

$2(a+b)=8$, $52=a^2-ab+b^2$, или $a+b=4$, $(a+b)^2-3ab=52$, откуда $ab=-12$. Решив систему

$$\begin{cases} a+b=4, \\ ab=-12, \end{cases}$$

находим два ее решения $a_1=-2$, $b_1=6$ и $a_2=6$, $b_2=-2$.

Ответ. $(-2;6)$, $(6;-2)$. ▲

2. Системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Определители третьего порядка

Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{11}$$

Для нахождения решения системы (11) воспользуемся тем же приемом, который был применен к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Умножим уравнения системы на некоторые множители и сложим. Эти множители будем выбирать так, чтобы в полученном уравнении коэффициенты при двух неизвестных были равны нулю. Можно показать, что в результате получим

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{12}$$

$$\Delta = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3c_2b_1 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - a_2b_1c_3. \tag{13}$$

Формулы (12) записаны в предположении, что $\Delta \neq 0$. Число Δ называется *определителем* (третьего порядка), составленным из коэффициентов при неизвестных системы (11), и обозначается так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

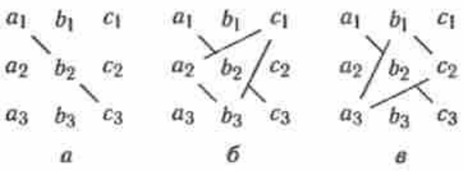


Рис. 4

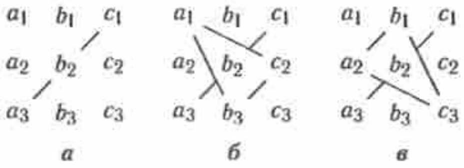


Рис. 5

Укажем правило получения выражения (13).

Первое слагаемое в правой части (13) представляет собой произведение элементов a_1, b_2, c_3 определителя (14), стоящих на главной диагонали (рис. 4, *а*).

Второе слагаемое есть произведение трех элементов, два из которых a_2 и b_3 стоят на неполной диагонали, параллельной главной диагонали, а третий элемент c_1 — в противоположном углу (рис. 4, *б*).

Аналогично, третье слагаемое суммы (13) есть произведение элементов c_2 и b_1, находящихся на неполной диагонали, параллельной главной, а также элемента a_3 (рис. 4, *в*).

Следующие три слагаемых правой части (13), взятые со знаком минус, можно получить аналогичным способом (рис. 5), если вместо главной диагонали определителя рассмотреть побочную диагональ, на которой стоят элементы a_3, b_2, c_1.

Обратимся теперь к формулам (12). В этих формулах Δ_x, Δ_y, Δ_z — определители, получаемые из определителя Δ заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов этого определителя столбцом свободных членов системы (11), т. е.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Итак, решение системы (11) записывается формулами (12), где Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z выражаются формулами (14), (15), при условии, что $\Delta \neq 0$.

Изложенный способ решения систем трех линейных уравнений называют *правилом Крамера*.

Пример 3. Пользуясь правилом Крамера, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 14, \\ 4x + 5y - 2z = -3, \\ x - 6y + z = 11. \end{cases}$$

$\triangle$ Вычислим определитель системы Δ, а также определители Δ_x, Δ_y, Δ_z. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 1 + 4(-6) \cdot 3 + (-2)(-1) \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 3 -$$
$$- (-6)(-2) \cdot 2 - 4(-1) \cdot 1 = 10 - 72 + 2 - 15 - 24 + 4 = -95.$$

Аналогично, получаем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 14 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & -2 \\ 11 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 70 + 22 + 54 - 165 - 168 - 3 = -190,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 11 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 28 + 132 + 9 + 44 - 56 = 95,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 14 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -6 & 11 \end{vmatrix} = 110 + 3 - 336 - 70 - 36 + 44 = -285.$$

По формулам (12) находим решение: $x = \frac{-190}{-95} = 2$, $y = \frac{95}{-95} = -1$, $z = \frac{-285}{-95} = 3$, которое записывают так: $(2; -1; 3)$.

Ответ. $(2; -1; 3)$. $\blacktriangle$

Рассмотрим еще один способ вычисления определителя третьего порядка. Обратимся к формуле (13). Сгруппируем слагаемые, объединяя вместе произведения, содержащие один и тот же элемент первой строки. Получим:

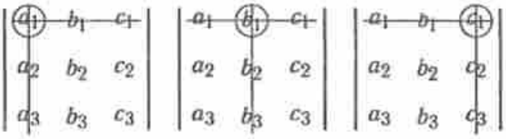
$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_2c_3) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2).$$

Выражения в скобках можно записать в виде определителей второго порядка:

$$b_2c_3 - b_3c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad a_2c_3 - a_3c_2 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad a_2b_3 - a_3b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (16)$$



а б в

Рис. 6

Определители второго порядка в равенстве (16) можно получить из определителя Δ, вычеркивая в нем строку и столбец, на пересечении которых стоят элементы a_1, b_1, c_1 соответственно (рис. 6).

Запись определителя Δ в виде (16) называют разложением его по элементам первой строки.

Аналогично, можно вычислить определитель третьего порядка с помощью разложения его по элементам любой строки или столбца. Например, разложение определителя по элементам второй строки имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Укажем правило выбора знака, с которым входят в разложение определителя элементы той строки (столбца), по которой записывается разложение. Если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент, четная, то этот элемент входит в разложение со знаком плюс, а если нечетная — со знаком минус.

Например, в разложение (17) элементы a_2 и c_2 входят со знаком минус, так как они стоят во второй строке и первом и третьем столбцах соответственно, а элемент b_2 входит со знаком плюс, так как он стоит во второй строке и втором столбце.

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ с помощью разложения его по элементам:

а) второй строки; б) третьей строки.

Δ По формуле (17) находим

а) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 18+48+35=101;$$

б) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 45-10+66=101.$$

О т в е т. 101. ▲

3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -11, \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 24, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 12x_4 = -4. \end{cases} \tag{18}$$

Δ Умножим первое уравнение системы (18) на -2 и сложим полученное уравнение со вторым. Затем умножим первое уравнение на -5 и сложим с третьим. Наконец, умножим первое уравнение на -3 и полученное уравнение сложим с четвертым. Тогда система (18) примет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ -x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -23, \\ 2x_2 + x_3 + 11x_4 = -6, \\ 5x_2 - 2x_3 + 21x_4 = -22. \end{cases} \tag{19}$$

Эти преобразования проводились с целью получить систему, которая не содержит неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого.

Далее преобразуем последние три уравнения системы (19) так, чтобы третье и четвертое уравнения новой системы не содержали неизвестное x_2. С этой целью умножим второе уравнение системы (19) на 2 и сложим с третьим уравнением, а затем умножим второе уравнение на 5 и сложим с четвертым. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ -x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -23, \\ -9x_3 + 25x_4 = -52, \\ -27x_3 + 56x_4 = -137. \end{cases} \tag{20}$$

Умножим третье уравнение системы (20) на -3 и полученное уравнение сложим с четвертым. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ -x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -23, \\ -9x_3 + 25x_4 = -52, \\ -19x_4 = 19. \end{cases} \tag{21}$$

Из последнего уравнения системы (21) находим $x_4 = -1$, затем из третьего уравнения получаем $x_3 = 3$, из второго имеем $x_2 = 1$ и, наконец, из первого находим $x_1 = 2$. Итак, система (21) имеет следующее решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

Заметим, что если одно из уравнений системы (18) заменить уравнением, которое получено почленным сложением этого уравнения и любого другого уравнения, умноженного на некоторое число, а остальные уравнения оставить без изменения, то новая система имеет то же множество решений, что и первоначальная система (равносильна системе (18)). Отсюда следует, что каждая из систем (19), (20), (21) равносильна системе (18).

Таким образом, система (18) имеет единственное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

Ответ. $(2; 1; 3; -1)$. ▲

В процессе решения система (18) была преобразована к треугольному виду (21) *методом Гаусса*.

Пример 6. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 = 21. \end{cases} \tag{22}$$

△ Умножим первое уравнение системы (22) на -2 и прибавим ко второму уравнению. Затем умножим первое уравнение на -3 и прибавим к третьему уравнению. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ \quad x_2 - 2x_3 = -3, \\ \; -x_2 + 2x_3 = 6, \end{cases} \tag{23}$$

равносильную системе (22). Система (23) не имеет решений. В самом деле, третье уравнение можно записать так:

$$x_2 - 2x_3 = -6.$$

С другой стороны, в силу второго уравнения,

$$x_2 - 2x_3 = -3.$$

Эти равенства не могут одновременно быть верными. Итак, система (23) несовместна, а поэтому несовместной является и система (22). Легко проверить, что определитель системы (22) равен нулю. ▲

Задачи

1. Вычислить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0,1 & -0,5 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}$.

11—2549

2. Доказать следующие свойства определителя:

1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

3. Пользуясь правилом Крамера, решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x - 4y = 7, \\ 2x + 5y = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x + 7y = 9, \\ 5x - y = -13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x - 11y = 1, \\ 6x - 7y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 5y = -8, \\ 7x - 4y = -2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{7}{4}x - \frac{5}{3}y = -1, \\ \frac{3}{8}x - \frac{4}{9}y = -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{5}{8}y = -2, \\ \frac{8}{5}x + \frac{7}{4}y = 10. \end{cases}$

4. Доказать, что при любом значении a данная система имеет единственное решение, и найти это решение:

1) $\begin{cases} 3x + ay = a, \\ ax - 2y = a^2 + 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax + 4y = -a, \\ -x + 5ay = 1. \end{cases}$

5. Найти все значения a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 12, \\ 9x + ay = b \end{cases}$$

1) не имеет решений;
2) имеет бесконечно много решений;
3) имеет единственное решение.

6. Найти все значения a, при которых не имеет решений система уравнений:

1) $\begin{cases} ax + 3y = a^2 + 1, \\ (3a + 14)x + (a + 8)y = 5a^2 + 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2ax + y = a^2 - 2a, \\ -10x + (a - 6)y = 10a - 5a^2. \end{cases}$

7. Вычислить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 4 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ с помощью разложения его по элементам:

1) второго столбца; 2) первой строки.

9. Пользуясь правилом Крамера, решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 5, \\ 3x + 4y - z = -1, \\ 2x + y - 2z = -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y - 2z = 1, \\ x - y - z = 2, \\ x - 2y - 3z = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y - z = -8, \\ x + y - z = 4, \\ x - y + z = 6. \end{cases}$

10. Доказать следующие свойства определителя третьего порядка:

1) если определитель имеет две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю;
2) если в определителе поменять местами две строки или два столбца, то модуль определителя не изменится, а знак изменится на противоположный;
3) если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то величина определителя не изменится.

11. Найти все значения b, при которых для любого значения a существует тройка действительных чисел (x, y, z), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x + ay = z^2 - 1, \\ ax + y = z + b. \end{cases}$$

12. Решить методом Гаусса систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y - z = 4, \\ x - y + z = 6, \\ x - y - z = -8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y - z = 2, \\ x - y - 2z = 1, \\ x - 2y - 3z = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 - 8x_4 = -5, \\ 10x_1 - 18x_2 + 2x_3 - 23x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$

13. Пользуясь методом Гаусса, показать, что система уравнений не имеет решений:

1) $\begin{cases} x + y - z = 4, \\ x - y + z = -2, \\ x - 5y + 5z = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ x - y + 2z = 4, \\ 5x + 3y - 4z = 3. \end{cases}$

Ответы

1. 1) 10; 2) -7; 3) -16; 4) 0. **3.** 1) $(1;-1)$; 2) $(-2;3)$; 3) $(5;4)$; 4) $\left(\frac{22}{23}; \frac{50}{23}\right)$; 5) $(8;9)$; 6) $(15;-8)$. **4.** 1) $(a;-2)$; 2) $(-1;0)$. **5.** 1) $a=-12$, $b=36$; 2) $a=-12$, $b \neq 36$; 3) $a \neq -12$. **6.** 1) -6; 2) 5. **7.** 1) 0; 2) -8; 3) 0; 4) -80. **8.** -102. **9.** 1) $(2;0;-1)$; 2) $(-1;1;2)$; 3) $(0;-3;1)$; 4) $(5;6;7)$. **11.** $-\frac{5}{4} \leqslant b \leqslant \frac{5}{4}$. **12.** 1) $(5;6;7)$; 2) $(0;-3;1)$; 3) $(1;2;3;-1)$; 4) $(1;0;-2;0)$.

§3. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Однородные системы

Многочлен $P(x, y)$ называют однородным многочленом степени n, если $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$. Например, многочлен $P(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + 4y^3$ является однородным многочленом третьей степени.

Систему двух уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

называют *однородной*, так как левые части уравнений системы представляют собой однородные многочлены второй степени.

Рассмотрим сначала пример однородной системы, в которой одно из чисел d_1, d_2 равно нулю.

Пример 1. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0, & (1) \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1. & (2) \end{cases}$$

$\triangle$ Если $y = 0$, то из уравнения (1) следует, что $x = 0$. Однако пара чисел $(0;0)$ не удовлетворяет уравнению (2), а значит, не является решением исходной системы. Поэтому, разделив обе части уравнения (1) на $y^2 \neq 0$, получим уравнение

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 2 = 0, \qquad (3)$$

откуда находим, что $\frac{x}{y} = -1$ или $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$.

Система уравнений (3) и (2), равносильная исходной системе, равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y = -x, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$$

Из первой системы получаем уравнение, не имеющее действительных корней. Из второй системы следует, что $x^2 = 4$, откуда $x = \pm 2$.

Таким образом, система имеет два действительных решения: $(2;3)$ и $(-2;-3)$.

Ответ. $(2;3)$, $(-2;-3)$. ▲

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 3, \\ 5x^2 - 2xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

$\triangle$ Сведем эту систему к однородной системе вида (1)–(2). С этой целью вычтем из второго уравнения, умноженного на 3, первое уравнение, умноженное на 5. В результате получим уравнение

$$10x^2 - 21xy - 13y^2 = 0,$$

которое вместе с первым уравнением образует систему, равносильную исходной.

Это уравнение равносильно уравнению

$$10\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 21\frac{x}{y} - 13 = 0, \qquad (4)$$

если $y \neq 0$ (при $y = 0$ система несовместна).

Отсюда находим $x = -\frac{y}{2}$, $x = \frac{13}{5}y$.

Если $x = -\frac{y}{2}$, то из первого уравнения исходной системы получаем $y^2 = 4$, откуда $y_1 = 2$, $y_2 = -2$. В этом случае система имеет два решения: $(-1; 2)$ и $(2; -1)$.

Аналогично, если $x = \frac{13}{5}y$, то $y^2 = \frac{25}{138}$, $y = \pm\frac{5}{\sqrt{138}}$, $x = \pm\frac{13}{\sqrt{138}}$.

Ответ. $(-1; 2)$, $(2; -1)$, $\left(\frac{13}{\sqrt{138}}; \frac{5}{\sqrt{138}}\right)$, $\left(\frac{-13}{\sqrt{138}}; \frac{-5}{\sqrt{138}}\right)$. ▲

Замечание. Если разделить почленно уравнения исходной системы, а затем разделить числитель и знаменатель в левой части полученного уравнения на y^2, то в результате придем к уравнению

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) + 2}{5\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1} = \frac{3}{5},$$

которое можно записать в виде (4).

Пример 3. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$$

△ Разложив левые части уравнений на множители, запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 7, \\ (x+y)xy = -2. \end{cases}$$

Разделив уравнения этой системы почленно, получим уравнение

$$\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} = -\frac{7}{2},$$

которое вместе с первым уравнением исходной системы образует систему, равносильную исходной.

Полагая $\frac{y}{x} = t$, получаем $2t^2 + 5t + 2 = 0$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, т. е. $y = -2x$ или $y = -\frac{x}{2}$. Если $y = -2x$, то из первого уравнения находим $x^3 = -1$, откуда $x_1 = -1$ (другие корни уравнения $x^3 = -1$ не являются действительными) и поэтому $y_1 = 2$.

Аналогично, если $y = -\frac{x}{2}$, то $x^3 = 8$, откуда $x = 2$, $y = -1$.

Ответ. $(-1; 2)$, $(2; -1)$. ▲

12—2549

2. Симметрические системы с двумя неизвестными

Пусть система

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

такова, что $f(x,y)$ и $g(x,y)$ являются симметрическими многочленами, т. е. многочленами, которые не изменяются при замене x на y, а y на x.

Такие системы называют *симметрическими*. Простейшей системой этого типа является система

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases} \tag{5}$$

Используя теорему Виета, можно доказать, что система (5) и квадратное уравнение

$$t^2-at+b=0 \tag{6}$$

связаны следующим образом: если t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения (6), то система (5) имеет решения $(t_1;t_2)$ и $(t_2;t_1)$ и не имеет других решений. Обратно, если $(x_0;y_0)$ — решение системы (5), то x_0 и y_0 — корни уравнения (6).

Например, система

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases}$$

имеет два решения $(2;3)$ и $(3;2)$, так как уравнение $t^2-5t+6=0$ имеет два корня $t_1=2$, $t_2=3$.

Многочлены $x+y$ и xy в левых частях уравнений системы (5) являются простейшими симметрическими многочленами, а любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от u и v, где $u=x+y$, $v=xy$.

При решении симметрических систем часто приходится выражать через u и v многочлены вида

$$S_n=x^n+y^n.$$

Суммы S_2, S_3, S_4, S_5 выражаются через $u=x+y$ и $v=xy$ следующим образом:

$$S_2=x^2+y^2=u^2-2v, \tag{7}$$

$$S_3=x^3+y^3=u^3-3uv, \tag{8}$$

$$S_4=x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2, \tag{9}$$

$$S_5=x^5+y^5=u^5-5u^3v+5uv^2. \tag{10}$$

○ Докажем формулу (10), используя легко проверяемые формулы (7) и (8). Имеем: $S_5 = x^5 + y^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x^2y^2(x + y) = (u^3 - 3uv)(u^2 - 2v) - uv^2 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$. ●

Пример 4. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = 46, \\ x^2 - 3xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

△ Полагая $x+y=u$, $xy=v$ и используя формулы (7) и (9), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u^4 - 4u^2v - 2v^2 = 46, \\ u^2 - 5v = 1. \end{cases}$$

Уравнение $v^2 + 2v - 15 = 0$, полученное из этой системы в результате исключения из нее u^2, имеет корни $v_1 = 3$, $v_2 = -5$. Если $v = -5$, то $u^2 = 5v + 1 = -24$. В этом случае система не имеет действительных решений. Если $v = 3$, то $u^2 = 16$, $u = \pm 4$. Следовательно, исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Решение каждой из них находится как решение симметрической системы типа (5).

Ответ. $(1;3)$, $(3;1)$, $(-1;-3)$, $(-3;-1)$. ▲

Пример 5. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ \dfrac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \dfrac{31}{7}. \end{cases}$$

△ Воспользуемся формулами (7), (8), (10). Тогда система примет вид

$$\begin{cases} u^2 = v + 3, \\ \dfrac{u^5 - 5u^3v + 5uv^2}{u^3 - 3uv} = \dfrac{31}{7}. \end{cases}$$

Так как $u \neq 0$ (при $u = 0$ второе уравнение системы теряет смысл), то, разделив числитель и знаменатель дроби на u и исключая из системы u^2, преобразуем второе уравнение к виду $7v^2 - v - 30 = 0$, откуда $v_1 = -2$, $v_2 = \frac{15}{7}$.

Если $v=-2$, то $u=\pm1$, а если $v=\frac{15}{7}$, то $u=\pm\frac{6\sqrt{7}}{7}$. Поэтому исходная система равносильна совокупности следующих четырех систем:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-1, \\ xy=-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\frac{6\sqrt{7}}{7}, \\ xy=\frac{15}{7}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-\frac{6\sqrt{7}}{7}, \\ xy=\frac{15}{7}. \end{cases}$$

Первая система имеет решения $(-1;2)$ и $(2;-1)$, вторая — решения $(-2;1)$ и $(1;-2)$, третья и четвертая системы не имеют действительных решений.

Ответ. $(-1;2)$, $(2;-1)$, $(-2;1)$, $(1;-2)$. ▲

Замечание. К системе симметрических уравнений иногда бывает удобно свести иррациональное уравнение. Например, при решении уравнения

$$\sqrt[4]{x+3}+\sqrt[4]{94-x}=5$$

можно ввести вспомогательные неизвестные $u=\sqrt[4]{x+3}$, $v=\sqrt[4]{94-x}$ и получить систему

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^4+v^4=97. \end{cases}$$

3. Различные типы систем двух уравнений с двумя неизвестными

Пример 6. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2-4x+4y+27=0, \\ y^2+2x+8y+10=0. \end{cases}$$

△ Сложив уравнения системы, получим уравнение

$$x^2-2x+1+y^2+12y+36=0,$$

которое можно записать в виде

$$(x-1)^2+(y+6)^2=0.$$

Так как $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, то из последнего уравнения, которое является следствием системы, находим

$$x=1, \quad y=-6.$$

Таким образом, система может иметь единственное действительное решение $(1;-6)$. Проверка показывает, что пара чисел $(1;-6)$ удовлетворяет каждому из уравнений системы.

Ответ. $(1;-6)$. ▲

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - x^2 - 2xy - 12 = 0, \\ 5x^2y^2 - 2x^2 + 3xy - 6 = 0. \end{cases}$$

△ Чтобы исключить из системы x^2, сложим первое уравнение, умноженное на 2, со вторым уравнением, умноженным на -1. Получим уравнение

$$(xy)^2 - 7xy - 18 = 0,$$

откуда $xy = 9$ или $xy = -2$.

Таким образом, исходная система равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} xy = 9, \\ 3x^2y^2 - x^2 - 2xy - 12 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = -2, \\ 3x^2y^2 - x^2 - 2xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Из первой системы следует, что $x^2 = 213$, $x = \pm\sqrt{213}$, а из второй получаем $x^2 = 4$, $x = \pm 2$.

Ответ. $\left(\sqrt{213}; \frac{9}{\sqrt{213}}\right)$, $\left(-\sqrt{213}; \frac{-9}{\sqrt{213}}\right)$, $(2; -1)$, $(-2; 1)$. ▲

Пример 8. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} - 2xy = 16, \\ \dfrac{y^3}{2x} + 3xy = 25. \end{cases}$$

△ Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} = 16 + 2xy, & (11) \\ \dfrac{y^3}{x} = 50 - 6xy. & (12) \end{cases}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим уравнение

$$13(xy)^2 - 4xy - 800 = 0, \qquad (13)$$

которое вместе с одним из уравнений системы (11)–(12) образует систему, равносильную исходной.

Из уравнения (13) находим

$$xy = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 10400}}{13} = \frac{2 \pm 102}{13},$$

т. е.

$$xy = 8 \quad \text{или} \quad xy = -\frac{100}{13}.$$

Если $xy = 8 = 2^3$, то из уравнения (11), записанного в виде $\frac{x^4}{xy} = 16 + 2xy$, следует, что $x^4 = 2^8$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, и тогда $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

Если $xy = -\frac{100}{13}$, то $x^4 = -\frac{800}{169}$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $(4;2)$, $(-4;-2)$. ▲

Пример 9. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} xy + \dfrac{y^4}{x} = \dfrac{x^2}{y} + y^2, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{4}{x^2} = 0. \end{cases}$$

△ Так как $xy \neq 0$, то, освободившись от знаменателей, систему можно записать в виде

$$\begin{cases} y^2(x^2 + y^3) = x(x^2 + y^3), \\ x^2 + y^3 = -4y. \end{cases}$$

Если $x^2 + y^3 = 0$, то из второго уравнения следует, что $y = 0$, что невозможно.

Если $y^2 = x$, то из второго уравнения системы следует, что $y^3 + y^2 + 4 = 0$ или $(y+2)(y^2 - y + 2) = 0$, откуда $y = -2$ (уравнение $y^2 - y + 2 = 0$ не имеет действительных корней). Итак, $y = -2$, $x = y^2 = 4$.

Ответ. $(4;-2)$. ▲

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 10x - 8y - 12 = 0, \\ 2x^2 + 3xy + y^2 + x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

△ Будем решать уравнения системы как квадратные относительно одного из неизвестных, например y.

Запишем первое уравнение в виде

$$y^2 + y(x+8) - (2x^2 - 10x - 12) = 0,$$

откуда

$$y = \frac{-(x+8) \pm \sqrt{x^2 + 16x + 64 + 8x^2 - 40x - 48}}{2} = \frac{-(x+8) \pm (3x-4)}{2},$$

$$y = -2x - 2 \text{ или } y = x - 6.$$

Отсюда следует, что первое уравнение системы можно записать в виде

$$(y + 2x + 2)(y - x + 6) = 0.$$

Аналогично, второе уравнение можно записать так:

$$(y+x+2)(y+2x-3)=0.$$

Следовательно, исходная система равносильна совокупности четырех систем:

$$1)\ \begin{cases} y+2x+2=0, \\ y+x+2=0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} y+2x+2=0, \\ y+2x-3=0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} y-x+6=0, \\ y+x+2=0; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} y-x+6=0, \\ y+2x-3=0. \end{cases}$$

Первая, третья и четвертая системы имеют соответственно решения $(0;-2)$, $(2;-4)$, $(3;-3)$, вторая система несовместна.

Ответ. $(0;-2)$, $(2;-4)$, $(3;-3)$. ▲

Пример 11. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^5+4x^4+5y^2=0, \\ x^3-\dfrac{y^3}{x^2}=xy-y^2. \end{cases}$$

△ Второе уравнение исходной системы при $x\neq 0$ равносильно каждому из уравнений

$$x^2\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)=y\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right),$$

$$(x^2-y)\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)=0. \qquad (14)$$

Заметим, что если $y=0$, то из второго уравнения исходной системы следует, что $x=0$, а при $x=0$ второе уравнение теряет смысл.

Из уравнения (14) получаем: либо $x^2=y$, либо $x+\dfrac{y^2}{x^2}=0$.

а) Если $x^2=y$, то из первого уравнения исходной системы находим $xy^2+9y^2=0$, откуда $x=-9$, так как $y\neq 0$. Тогда $y=x^2=81$. Пара чисел $(-9;81)$ — решение исходной системы.

б) Если $x+\dfrac{y^2}{x^2}=0$, то $x^3+y^2=0$. Из первого уравнения системы находим

$$x^5+4x^4-5x^3=0 \quad \text{или} \quad x^2+4x-5=0 \quad (x\neq 0),$$

откуда

$$x_1=-5, \quad x_2=1.$$

Пусть $x=-5$, тогда $y^2=125$, откуда $y=\pm 5\sqrt{5}$.

Пусть $x=1$, тогда $y^2=-1$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Таким образом, система имеет три действительных решения.

Ответ. $(-9;81)$, $(-5;5\sqrt{5})$, $(-5;-5\sqrt{5})$. ▲

4. Системы иррациональных уравнений с двумя неизвестными

Пример 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{2}, \\ x + y - xy = 1. \end{cases}$$

△ Первое уравнение подстановкой $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$ преобразуется к виду

$$4t^2 - 7t - 2 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $t_1 = 2$ и $t_2 = -\frac{1}{4}$. Если $t = 2$, то $x = 4y$ и из второго уравнения следует, что $4y^2 - 5y + 1 = 0$, откуда находим $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{4}$. Подстановкой в исходную систему убеждаемся, что пара чисел $(4;1)$ является ее решением, а пара $(1;4)$ не удовлетворяет первому уравнению.

Ответ. $(4;1)$. ▲

Пример 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{7x-y} + \sqrt{2x-y} = 5, & (15) \\ \sqrt{2x-y} + x + y = 1. & (16) \end{cases}$$

△ Умножая обе части уравнения (15) на выражение $\sqrt{7x-y} - \sqrt{2x-y}$, сопряженное левой части этого уравнения, получаем

$$5x = 5(\sqrt{7x-y} - \sqrt{2x-y}), \quad \text{или}$$

$$\sqrt{7x-y} = \sqrt{2x-y} + x. \tag{17}$$

Из уравнений (17) и (16) следует, что

$$\begin{cases} \sqrt{2x-y} = 1 - y - x, & (18) \\ \sqrt{7x-y} = 1 - y. & (19) \end{cases}$$

Складывая почленно уравнения (18) и (19), получаем

$$\sqrt{7x-y} + \sqrt{2x-y} = 2 - 2y - x. \tag{20}$$

Но тогда из (20) и (15) находим $2 - 2y - x = 5$, откуда

$$x = -2y - 3. \tag{21}$$

Каждое из уравнений (17)–(21) является следствием системы (15), (16). Исключая x из системы (19), (21), получаем

$$\sqrt{-5y-6} = 4 + y,$$

откуда $y^2 + 13y + 22 = 0$, $y_1 = -11$, $y_2 = -2$.

Соответствующие значения x находим по формуле (21):

$$x_1 = 19, \quad x_2 = 1.$$

Проверка показывает, что пара чисел $(x_1; y_1)$ не является решением системы, а пара чисел $(1; -2)$ образует решение системы.

Ответ. $(1; -2)$. ▲

Замечание. Легко убедиться в том, что «лобовое» решение, основанное на избавлении от корней в исходной системе с помощью возведения в квадрат, связано с преодолением немалых трудностей.

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 10, \\ \sqrt{x+y} + 2x + y = 16. \end{cases}$$

△ Пусть $u = \sqrt{x+y}$, $v = \sqrt{x+2y}$, тогда

$$x + y = u^2, \quad x + 2y = v^2,$$

откуда

$$x = 2u^2 - v^2, \quad y = v^2 - u^2.$$

Поэтому исходная система примет вид

$$\begin{cases} u + v = 10, \\ u + 3u^2 - v^2 = 16, \end{cases}$$

откуда $2u^2 + 21u - 116 = 0$, $u_1 = -\dfrac{29}{2}$, $u_2 = 4$.

Так как $u \geqslant 0$, то $u = 4$, т. е.

$$\sqrt{x+y} = 4, \quad v = \sqrt{x+2y} = 6,$$

откуда $x + y = 16$, $x + 2y = 36$, $x = -4$, $y = 20$.

Ответ. $(-4; 20)$. ▲

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 + 6y = \dfrac{x}{y} - \sqrt{x-2y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2. \end{cases}$$

△ Область определения системы — множество таких точек, что

$$x \geqslant 2y, \quad y \neq 0, \quad x + \sqrt{x-2y} \geqslant 0. \tag{22}$$

Преобразуем первое уравнение системы так:

$$2y+6y^2=x-y\sqrt{x-2y},$$
$$(\sqrt{x-2y})^2-y\sqrt{x-2y}-6y^2=0,$$
$$(\sqrt{x-2y}-3y)(\sqrt{x-2y}+2y)=0.$$

1) Если $\sqrt{x-2y}-3y=0$, то

$$\sqrt{x-2y}=3y, \quad y\geqslant 0. \tag{23}$$

Из (23) и второго уравнения системы получаем

$\sqrt{x+3y}=(x+3y)-2$, или $(\sqrt{x+3y}-2)(\sqrt{x+3y}+1)=0$,

откуда $\sqrt{x+3y}=2$, так как $\sqrt{x+3y}+1>0$. Тогда $x+3y=4$, $x=-3y+4$. Отсюда и из (23) находим

$$\sqrt{4-5y}=3y, \quad 9y^2+5y-4=0, \quad y_1=-1, \quad y_2=\frac{4}{9}.$$

Так как $y\geqslant 0$, то $y=\frac{4}{9}$ и $x=\frac{8}{3}$.

Пара чисел $\left(\frac{8}{3};\frac{4}{9}\right)$ удовлетворяет условиям (22).

2) Если $\sqrt{x-2y}=-2y$, то $y\leqslant 0$ и $x-2y=4y^2$, а из второго уравнения находим $\sqrt{x-2y}=x+3y-2$. Поэтому $x+3y-2=-2y$, $x=2-5y$, $2-7y=4y^2$, $y_1=\frac{1}{4}$ (не годится), $y_2=-2$, $x_2=12$.

Пара чисел $(12;-2)$ — решение исходной системы.

Ответ. $\left(\frac{8}{3};\frac{4}{9}\right)$, $(12;-2)$. ▲

Пример 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4},\\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52.\end{cases}$$

△ Освобождаясь в первом уравнении от иррациональности в знаменателях, получаем

$$\frac{4x^2-2y^2}{y^2}=\frac{17}{4},$$

откуда $x=\frac{5}{4}y$ и $x=-\frac{5}{4}y$.

Полагая во втором уравнении $t=\sqrt{x^2+xy+4}$, имеем

$$t^2+t-56=0,$$

откуда $t_1=7$, $t_2=-8$. Отбрасывая корень $t_2<0$, получаем $x^2+xy=45$.

Решив две системы уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4}y, \\ x^2 + xy = 45; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{5}{4}y, \\ x^2 + xy = 45, \end{cases}$$

найдем четыре решения, которые, как показывает проверка, удовлетворяют и исходной системе.

Ответ. $(5;4)$, $(-5;-4)$, $(15;-12)$, $(-15;12)$. ▲

Задачи

1. Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y, \\ x^4 + y^4 = \frac{1}{2}(x+y)^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x+y) = 5xy, \\ 8(x^3 + y^3) = 65; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^5 + y^5 = 31. \end{cases}$

2. Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y - xy^2 = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 6x - 3y - 1 = 0, \\ y^2 + 2x + 9y + 14 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 7x - y + 11 = 0, \\ y^2 + 3x - y + 15 = 0. \end{cases}$

3. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y} + \dfrac{x+2y}{xy} = 2, \\ \dfrac{xy}{x-2y} + \dfrac{x-2y}{xy} = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - x - \frac{1}{2}y = 2, \\ \frac{1}{4}x^2 - xy + y^2 + 2y - x = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

4. Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x^2y - x^4 = 3, \\ 2y^3 - x^2y^2 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^4 + 4x^2y = -3, \\ x^2y^2 + 4y^3 = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2} + xy = 72, \\ \dfrac{y^4}{x^2} + xy = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \dfrac{y^3}{x} - 2xy = 16; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y + \dfrac{x^3}{y^3} = \dfrac{y^3}{x} + \dfrac{x^2}{y}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{y^3}{x^3} + \dfrac{10}{x^2} = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + x^4y = \dfrac{1}{xy^2} + x^2, \\ \dfrac{1}{x} + x^2y^2 + 4y^2 = 0. \end{cases}$

5. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}(2+x) = 4y - 3x, \\ 2y^2 - 3xy = 4y - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}(1-2y) = 4x + 2y, \\ 2x^2 + xy = x + y^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8x^2-2xy-y^2-30x-9y-8=0, \\ 8x^2+6xy+y^2-2y-8=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+2xy-8y^2+9x+30y+8=0, \\ x^2+6xy+8y^2-2x-8=0. \end{cases}$

6. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2}, \\ x+y+xy=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{5y-x}+x=3, \\ \sqrt{2y-x}+x+y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+y=23; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10(x-y)-x^4=9, \\ \sqrt{y}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{x-4y}-2\sqrt{3y+x}=1, \\ 7\sqrt{3y+x}+22y+5x=13; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sqrt{x-3y}-\sqrt{5x-y}=2, \\ 15\sqrt{5x-y}+22x+4y=15; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x-1=\dfrac{y}{x}+2\sqrt{x+y}, \\ \sqrt{y+\sqrt{x+y}}=y-3x-6; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 1-5y=\dfrac{x}{y}-6\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{x-\sqrt{x-y}}=x-5y-6. \end{cases}$

7. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y+11}=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x-1}}-2\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{y+1}}=1, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y+6}=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[4]{3x-2y+9}+\sqrt[4]{2x+y-6}=3, \\ \sqrt{3x-2y+9}-\sqrt{2x+y-6}=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\sqrt{8}, \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{16+(x+y)^2}. \end{cases}$

Ответы

1. 1) $(1;2)$, $(2;1)$; 2) $(0;0)$, $(1;1)$; 3) $\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};2\right)$; 4) $(2;-1)$, $(-1;2)$; **2.** 1) $(3;-2)$, $(-3;2)$; 2) $(-1;-2)$, $(2;1)$; 3) $(2;-3)$; 4) $(-5;1)$; **3.** 1) $\left(2+2\sqrt{3};1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(2-2\sqrt{3};1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $\left(\frac{14}{5};-\frac{8}{5}\right)$, $\left(\frac{2}{5};-\frac{14}{5}\right)$, $\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)$, $\left(-\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)$; 3) $(-2;-2)$, $(2;2)$, $(-2;2)$, $(2;-2)$, $\left(-4\sqrt{\frac{2}{5}};2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(4\sqrt{\frac{2}{5}};-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; 4) $(-3;-2)$, $(3;2)$, $(-2;-3)$, $(2;3)$. **4.** 1) $(\sqrt{3};2)$, $(-\sqrt{3};2)$; 2) $(\sqrt{3};-1)$, $(-\sqrt{3};-1)$; 3) $(4;2)$, $(-4;-2)$; 4) $(2;4)$, $(-2;-4)$; 5) $(4;-2)$; 6) $\left(-2;\frac{1}{4}\right)$. **5.** 1) $\left(-\frac{8}{15};\frac{16}{15}\right)$, $(6;9)$; 2) $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{4}{9};\frac{2}{3}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2};-3\right)$, $(2;-4)$, $\left(\frac{3}{2};-5\right)$; 4) $\left(3;-\frac{1}{2}\right)$, $(-4;2)$, $\left(-5;\frac{3}{2}\right)$. **6.** 1) $(4;1)$, $\left(-9;-\frac{9}{4}\right)$; 2) $(1;1)$; 3) $(5;4)$, $(-9;25)$; 4) $(1;2)$, $(-1;0)$; 5) $(13;-3)$; 6) $\left(\frac{1}{7};-\frac{58}{7}\right)$; 7) $(6;30)$, $\left(\frac{2-\sqrt{85}}{9};\frac{29-\sqrt{85}}{9}\right)$; 8) $(42;6)$, $\left(\frac{47+\sqrt{229}}{5};\frac{2+\sqrt{229}}{5}\right)$. **7.** 1) $(1;8)$, $(7;-7)$, $\left(\frac{49}{64};\frac{49}{8}\right)$; 2) $(2;7)$, $\left(\frac{5}{4};1\right)$, $(5;-5)$; 3) $(3;1)$; 4) $(-2\sqrt{2}+\sqrt{3};-2\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(2\sqrt{2}-\sqrt{3};2\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

§4. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Основные приемы решения систем

В §1 на примере систем с двумя неизвестными были даны определения равносильности и следствия систем, а также рассмотрены свойства преобразований, которые часто используются при решении систем уравнений.

Для систем с тремя неизвестными определения равносильности и следствия, а также свойства преобразований систем формулируются аналогично.

Будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0, \\ f_2(x,y,z)=0, \\ f_3(x,y,z)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

где f_1, f_2, f_3 являются либо многочленами от x, y, z, либо представляются в виде отношения многочленов.

Сформулируем для систем уравнений с тремя неизвестными следующие утверждения, которые могут оказаться полезными при решении систем (для краткости x, y, z в записи уравнений опущены).

1°. Если $f_1 = g_1g_2$, где g_1 и g_2 — многочлены, то система (1) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} g_1=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} g_2=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0; \end{cases} \qquad (3)$$

и поэтому множество решений системы (1) в этом случае есть объединение множеств решений систем (2) и (3).

2°. Если уравнение

$$F(x,y,z)=0 \qquad (4)$$

есть следствие системы (1), то система

$$\begin{cases} f_1=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0, \\ F=0 \end{cases}$$

равносильна системе (1). То есть при добавлении к системе (1) еще одного уравнения (4), являющегося следствием этой системы, получается система, равносильная системе (1).

3°. Если уравнение (4) — следствие системы (1), причем $F=F_1F_2$, где F_1 и F_2 — многочлены, то система (1) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} f_1=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0, \\ F_1=0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_1=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0, \\ F_2=0. \end{cases}$$

4°. Система (1) равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} f_1-f_2=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1+f_2=0, \\ f_1-f_2=0, \\ f_3=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1+f_2=0, \\ f_1+f_3=0, \\ f_2+f_3=0. \end{cases}$$

Более общим является следующее утверждение: система

$$\begin{cases} a_1f_1+b_1f_2+c_1f_3=0, \\ a_2f_1+b_2f_2+c_2f_3=0, \\ a_3f_1+b_3f_2+c_3f_3=0, \end{cases}$$

полученная из системы (1) линейным преобразованием, равносильна системе (2), если определитель этого преобразования отличен от нуля, т. е.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

5°. Если уравнение $f_1(x,y,z)=0$ равносильно уравнению $x=\varphi(y,z)$, где φ — многочлен от y и z, то система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} x=\varphi(y,z), \\ f_2(\varphi(y,z),y,z)=0, & (5) \\ f_3(\varphi(y,z),y,z)=0. & (6) \end{cases}$$

Это утверждение лежит в основе метода исключения неизвестных: система (1) сводится к системе (5)–(6) с двумя неизвестными.

Прежде чем переходить к примерам алгебраических систем с тремя неизвестными, отметим, что общих рецептов для нахождения решений систем нет. Каждый раз нужно учитывать конкретные особенности рассматриваемой системы.

Обратимся сначала к системам с тремя неизвестными, которые сводятся к кубическим уравнениям. К таким системам относятся системы симметрических алгебраических уравнений, т. е. системы вида (1), где f_1, f_2, f_3 — многочлены, каждый из которых не меняется, если поменять местами элементы любой пары из трех переменных x, y, z. В этом случае удобно ввести новые неизвестные

$$u = x + y + z, \quad v = xy + xz + yz, \quad w = xyz.$$

Простейший пример системы рассматриваемого типа — система

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + xz + yz = b, \\ xyz = c. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) и кубическое уравнение

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0 \tag{8}$$

связаны следующим образом.

Если t_1, t_2, t_3 — корни уравнения (8), то система (7) имеет шесть решений: $(t_1;t_2;t_3)$, $(t_1;t_3;t_2)$, $(t_2;t_1;t_3)$, $(t_2;t_3;t_1)$, $(t_3;t_2;t_1)$, $(t_3;t_1;t_2)$, получаемых всевозможными перестановками трех чисел t_1, t_2, t_3. Обратно, если $(x_0;y_0;z_0)$ — решение системы (7), то x_0, y_0, z_0 — корни уравнения (8). Доказательство этого утверждения основано на использовании формул Виета для корней уравнения (8):

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = a, \\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = b, \\ t_1t_2t_3 = c. \end{cases}$$

Для сведения систем симметрических уравнений типа

$$\begin{cases} x + y + z = A, \\ x^2 + y^2 + z^2 = B, \\ xyz = C; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = A, \\ xy + xz + yz = B, \\ xyz = C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = A, \\ x^2 + y^2 + z^2 = B, \\ x^3 + y^3 + z^3 = C; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = A, \\ xy + xz + yz = B, \\ x^3 + y^3 + z^3 = C \end{cases}$$

к системам вида (7) можно использовать следующие тождества:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz), \tag{9}$$

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz, \tag{10}$$

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz. \tag{11}$$

2. Примеры

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2, & (12) \\ x^2+y^2+z^2=6, & (13) \\ x^3+y^3+z^3=8. & (14) \end{cases}$$

△ Сведем исходную систему к системе вида (7). Используя первые два уравнения системы и тождество (9), получаем

$$xy+xz+yz=-1. \tag{15}$$

Применяя формулу (11) и равенства (12)–(15), находим

$$xyz=-2.$$

Следовательно, исходная система равносильна системе (7), в которой $a=2$, $b=-1$, $c=-2$. Уравнение (8) в этом случае записывается в виде

$$t^3-2t^2-t+2=0$$

и имеет корни 1, -1, 2. Поэтому система имеет 6 решений, получаемых перестановкой чисел 1, -1, 2.

Ответ. $(1;-1;2)$, $(1;2;-1)$, $(-1;1;2)$, $(-1;2;1)$, $(2;1;-1)$, $(2;-1;1)$. ▲

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2x-y)^2=4+z^2, \\ (z-y)^2=2+4x^2, \\ (z+2x)^2=3+y^2. \end{cases}$$

△ Введем обозначения $2x=u$, $-y=v$ и запишем исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} u+v-z=\dfrac{4}{u+v+z}, \\ v+z-u=\dfrac{2}{u+v+z}, \\ z+u-v=\dfrac{3}{u+v+z}. \end{cases}$$

Сложив уравнения этой системы и положив $u+v+z=t$, получим уравнение $t=\frac{9}{t}$, откуда $t_1=3$, $t_2=-3$.

С использованием обозначения t последнюю систему можно записать в виде

$$\begin{cases} t-2z=\dfrac{4}{t}, \\ t-2u=\dfrac{2}{t}, \\ t-2v=\dfrac{3}{t}, \end{cases}$$

откуда легко находятся искомые переменные u, v и z при подстановке каждого из найденных значений t.

Если $t = 3$, то

$$z = \frac{1}{2}\left(t - \frac{4}{t}\right) = \frac{5}{6}, \quad u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{2}{t}\right) = \frac{7}{6}, \quad v = \frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{t}\right) = 1,$$

$$x = \frac{u}{2} = \frac{7}{12}, \quad y = -v = -1.$$

Аналогично, если $t = -3$, то $x = -\frac{7}{12}$, $y = 1$, $z = -\frac{5}{6}$.

Ответ. $\left(\frac{7}{12}; -1; \frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{12}; 1; -\frac{5}{6}\right)$. ▲

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y} = \dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{xyz}{y+z} = 2, \\ \dfrac{xyz}{z+x} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

△ Так как правые части уравнений системы отличны от нуля, то $xyz \neq 0$. Полагая $\frac{1}{yz} = u$, $\frac{1}{zx} = v$, $\frac{1}{xy} = w$, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{5}{6}, \\ v + w = \dfrac{1}{2}, \\ w + u = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \tag{16}$$

Складывая уравнения системы (16), находим

$$u + v + w = 1. \tag{17}$$

Из (16) и (17) получаем $w = \frac{1}{6}$, $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{3}$, т. е.

$$\begin{cases} yz = 2, \\ zx = 3, \\ xy = 6. \end{cases} \tag{18}$$

Перемножая почленно уравнения системы (18), которая равносильна исходной системе, имеем $(xyz)^2 = 36$, откуда

$$xyz = 6 \tag{19}$$

или

$$xyz = -6. \tag{20}$$

Следовательно, исходная система равносильна совокупности систем (18), (19) и (18), (20), которые имеют решения $(3;2;1)$ и $(-3;-2;-1)$ соответственно.

Ответ. $(3;2;1)$, $(-3;-2;-1)$. ▲

Пример 4. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz+11=0, \\ x^3-y^3+z^3-xyz-21=0, \\ y^3+z^3-x^3-xyz-3=0. \end{cases}$$

△ Складывая уравнения попарно, получим систему

$$\begin{cases} x^3=xyz+5, \\ y^3=xyz-4, \\ z^3=xyz+12, \end{cases}$$

равносильную исходной системе. Перемножим уравнения этой системы и введем обозначение $t=xyz$, тогда

$$t^3=(t+5)(t-4)(t+12)=t^3+13t^2-8t-240,$$

или

$$13t^2-8t-240=0,$$

откуда $t_1=-4$, $t_2=\frac{60}{13}$.

Если $t=-4$, то $x^3=1$, $y^3=-8$, $z^3=8$, откуда

$$x_1=1, \quad y_1=-2, \quad z_1=2.$$

Если $t=\frac{60}{13}$, то $x^3=\frac{125}{13}$, $y^3=\frac{8}{13}$, $z^3=\frac{216}{13}$, откуда

$$x_2=\frac{5}{\sqrt[3]{13}}, \quad y_2=\frac{2}{\sqrt[3]{13}}, \quad z_2=\frac{6}{\sqrt[3]{13}}.$$

Ответ. $(1;-2;2)$, $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{13}}; \frac{2}{\sqrt[3]{13}}; \frac{6}{\sqrt[3]{13}}\right)$. ▲

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6xz+3x=2z-2, & (21) \\ xy+yz=2(z-x+1), & (22) \\ zy-6xz+y=3x+3. & (23) \end{cases}$$

△ Будем решать систему методом исключения неизвестных и сведéнием, в конечном счете, к одному уравнению с одним неизвестным. Складывая почленно уравнения (21) и (23), получаем

$$z(y-2)=1-y. \qquad (24)$$

Так как $y\neq 2$ в силу (24), то из (24) следует, что

$$z=\frac{1-y}{y-2}. \qquad (25)$$

Запишем далее уравнение (22) в виде

$$z(y-2) = 2-(y+2)x. \tag{26}$$

Исключая z из уравнений (24) и (26), получаем $x(y+2) = y+1$, откуда следует, что $y \neq -2$ и поэтому

$$x = \frac{y+1}{y+2}. \tag{27}$$

Заметим, что система (27), (25), (21) равносильна системе (21)–(23). Подставляя выражения для x и z (формулы (25), (27)) в уравнение (21), получаем

$$6\,\frac{(y+1)(1-y)}{y^2-4} + 3\,\frac{y+1}{y+2} = 2\,\frac{1-y}{y-2} - 2,$$

или $y^2 - y - 12 = 0$, откуда $y_1 = 4$, $y_2 = -3$.

Соответствующие значения x и z найдем по формулам (27) и (25).

Ответ. $\left(\frac{5}{6}; 4; -\frac{3}{2}\right)$, $\left(2; -3; -\frac{4}{5}\right)$. ▲

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 6y + 4z + xy = 0, \\ 3x - 5y + z - y^2 = 0, \\ x - 4y - 2z - yz = 0. \end{cases}$$

△ Вычитая из второго уравнения, умноженного на 2, первое и третье, получаем

$$y(z - x - 2y) = 0. \tag{28}$$

Уравнение (28) вместе с первыми двумя уравнениями исходной системы образует систему, равносильную данной. Из (28) следует, что либо $y = 0$, либо

$$z = x + 2y. \tag{29}$$

Если $y=0$, то $x=0$, $z=0$ и $(0;0;0)$ — решение исходной системы.

Если справедливо равенство (29), то из первых двух уравнений исходной системы получаем

$$\begin{cases} 9x + 2y + xy = 0, & (30) \\ 4x - 3y - y^2 = 0. & (31) \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (30), умноженного на 4, уравнение (31), умноженное на 9, находим

$$35y + 4xy + 9y^2 = y(4x + 9y + 35) = 0,$$

откуда

$$4x = -9y - 35. \tag{32}$$

Из уравнений (31) и (32) следует, что $y^2 + 12y + 35 = 0$, откуда $y_1 = -5$, $y_2 = -7$.

Если $y=-5$, то из уравнений (32) и (29) находим $x=\frac{5}{2}$, $z=-\frac{15}{2}$, а если $y=-7$, то $x=7$, $z=-7$.

Ответ. $(0;0;0)$, $\left(\frac{5}{2};-5;-\frac{15}{2}\right)$, $(7;-7;-7)$. ▲

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy^2+4zx^2-2yz^2=3xyz, \\ 4xz^2-2yx^2+zy^2=3xyz, \\ 2xy-4xz+2yz=3. \end{cases}$$

△ Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$xy^2+4x^2z-2yz^2-4xz^2+2x^2y-y^2z=0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения:

$$y^2(x-z)+4xz(x-z)+2y(x^2-z^2)=0,$$

$$(x-z)[y(y+2z)+2x(y+2z)]=0,$$

$$(x-z)(y+2z)(y+2x)=0. \tag{33}$$

Заметим, что исходная система равносильная системе, состоящей из ее первого и третьего уравнений и уравнения (33). Она равносильна также совокупности трех систем, получаемых присоединением к первому и третьему уравнениям соответственно уравнений

$$x=z, \tag{34}$$

$$y=-2z, \tag{35}$$

$$y=-2x. \tag{36}$$

1) Подставляя из уравнения (34) $x=z$ в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$x(y^2-5xy+4x^2)=x(y-x)(y-4x)=0,$$

$$4xy-4x^2=4x(y-x)=3. \tag{37}$$

Если $x=0$ или $y=x$, то уравнение (37) превращается в неверное равенство $0=3$.

Если $y=4x$, то из (37) находим $x^2=\frac{1}{4}$, $x=\pm\frac{1}{2}$. В этом случае система имеет два решения

$$\left(\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{1}{2};-2;-\frac{1}{2}\right).$$

2) Подставляя $y=-2z$ (см. (35)) в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$z(2z^2+5xz+2x^2)=z(z+2x)(x+2z)=0,$$

$$-4z(z+2x)=3. \tag{38}$$

Если $z=0$ или $z+2x=0$, то уравнение (38) превращается в неверное равенство $0=3$.

Если $x=-2z$, то из уравнения (38) находим $z^2=\frac{1}{4}$, $z=\pm\frac{1}{2}$. В этом случае система имеет решения $\left(-1;-1;\frac{1}{2}\right)$ и $\left(1;1;-\frac{1}{2}\right)$.

3) Подставляя $y=-2x$ (см. (36)) в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$\begin{gathered} x(2x^2+5xz+2z^2)=x(x+2z)(z+2x)=0, \\ -4x(x+2z)=3. \end{gathered} \tag{39}$$

Если $x=0$ или $x+2z=0$, то уравнение (39) превращается в неверное равенство $0=3$.

Если $z=-2x$, то из уравнения (39) находим $x^2=\frac{1}{4}$, $x=\pm\frac{1}{2}$. В этом случае система имеет два решения

$$\left(\frac{1}{2};-1;-1\right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{1}{2};1;1\right).$$

Ответ. $\left(\frac{1}{2};-1;-1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};1;1\right)$, $\left(\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-2;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(1;1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;-1;\frac{1}{2}\right)$. ▲

Пример 8. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2y-xy^5z=z^2, & (40)\\ xz+3y^4z^2=10x^2y^5, & (41)\\ 5y^4z+3xy^8z^2=2x^2. & (42)\end{cases}$$

△ Выразим из данной системы z через x и y. С этой целью прибавим к уравнению (41) уравнение (40), умноженное на $5y^4$. Получим уравнение

$$xz-5xy^9z=2y^4z^2. \tag{43}$$

Рассмотрим два возможных случая: $z=0$, $z\neq 0$. Если $z=0$, то из (42) следует, что $x=0$, а уравнение (41) принимает вид $0\cdot y=0$. В этом случае система имеет бесконечное множество решений

$$(0;\alpha;0), \quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{44}$$

Заметим, что если $y=0$, то из (40) и (42) следует, что $z=0$, $x=0$, а если $x=0$, то из (40) получаем $z=0$, и система имеет решения (44).

Поэтому, рассматривая второй случай ($z\neq 0$), будем предполагать, что $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Итак, пусть $xyz\neq 0$, тогда из (43) находим

$$z=\frac{x-5xy^9}{2y^4}. \tag{45}$$

Используя формулу (45) и условие $xyz \neq 0$, преобразуем уравнение (40) к виду

$$8y^9 - 2y^9(1 - 5y^9) = (1 - 5y^9)^2.$$

Полагая $t = y^9$, получаем уравнение

$$15t^2 - 16t + 1 = 0,$$

откуда $t_1 = \frac{1}{15}$, $t_2 = 1$, $y_1 = 15^{-\frac{1}{9}}$, $y_2 = 1$.

Если $y = y_1$, то $5y^9 = \frac{1}{3}$ и из (45) следует, что

$$y^4 z = \frac{x}{3}.$$

Тогда уравнение (42) примет вид

$$5x + x^3 = 6x^2 \quad \text{или} \quad x^2 - 6x + 5 = 0,$$

так как $x \neq 0$. Отсюда получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Соответствующие значения z определяются формулой (45).

Аналогично, если $y = y_2 = 1$, то из (45) и (42) следует, что $6x^2 - x - 5 = 0$, откуда $x = 1$, $x = -\frac{5}{6}$.

Ответ. $(0; \alpha; 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $(1; 15^{-\frac{1}{9}}; 5 \cdot 15^{-\frac{5}{9}})$, $(5; 15^{-\frac{1}{9}}; 25 \cdot 15^{-\frac{5}{9}})$, $(1; 1; -2)$, $\left(-\frac{5}{6}; 1; \frac{5}{3}\right)$. ▲

Пример 9. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 6y - z^2 = -6, & (46) \\ y^2 + 4x + z = -4, & (47) \\ 7x - 11y + 2z(z+1) = 4. & (48) \end{cases}$$

△ Будем исключать из системы одно из неизвестных, например z. С этой целью сложим почленно уравнение (48) и уравнения (46) и (47), умноженные соответственно на 2 и -2. Получим

$$2x^2 - 2y^2 - x + y = 0$$

или

$$(x - y)(2x + 2y - 1) = 0. \tag{49}$$

Заметим, что система (46)–(48) равносильна системе (46), (47), (49), которая равносильна совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} x = y, \\ y^2 + 6y - z^2 = -6, \\ y^2 + 4y + z = -4; \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - y, \\ \left(\frac{1}{2} - y\right)^2 + 6y - z^2 = -6, \\ y^2 + 4\left(\frac{1}{2} - y\right) + z = -4. \end{cases} \tag{51}$$

Рассмотрим систему (50). Умножая второе уравнение этой системы на -1, а третье на 2 и складывая полученные уравнения, имеем

$$y^2 + 2y + z^2 + 2z = -2$$

или

$$(y+1)^2 + (z+1)^2 = 0, \tag{52}$$

откуда $y = -1$, $z = -1$, так как y и z — действительные числа.

Уравнение (52) является следствием системы (50), и поэтому система (50) не может иметь действительных решений, отличных от $(-1; -1; -1)$. Проверка показывает, что тройка чисел $(-1; -1; -1)$ является решением системы (50).

Обратимся теперь к системе (51). Второе уравнение этой системы преобразуем к виду

$$\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = z^2, \quad \text{откуда} \quad z = y + \frac{5}{2} \ \text{или} \ z = -y - \frac{5}{2}.$$

Поэтому система (51) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - y, \\ z = y + \frac{5}{2}, \\ y^2 - 4y + z = -6; \end{cases} \tag{53}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - y, \\ z = -y - \frac{5}{2}, \\ y^2 - 4y + z = -6. \end{cases} \tag{54}$$

Решим систему (53). Подставляя в третье уравнение выражение для z из второго уравнения этой системы, получаем

$$2y^2 - 10y + 7 = 0,$$

откуда находим $y_1 = \dfrac{5+\sqrt{11}}{2}$, $y_2 = \dfrac{5-\sqrt{11}}{2}$, а затем соответствующие значения x и z из первых двух уравнений этой системы.

Решим систему (54). Исключая z из второго и третьего уравнений этой системы, получаем уравнение

$$2y^2 - 6y + 17 = 0,$$

не имеющее действительных корней. Поэтому система (54) не имеет действительных решений. ▲

Ответ. $(-1;-1;-1)$, $\left(-\dfrac{4+\sqrt{11}}{2}; \dfrac{5+\sqrt{11}}{2}; -\dfrac{10+\sqrt{11}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4+\sqrt{11}}{2}; \dfrac{5-\sqrt{11}}{2}; \dfrac{-10+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Задачи

Решить системы уравнений (**1–15**):

1. $\begin{cases} xy=6, \\ yz=3, \\ zx=2. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} yz=\frac{2}{3}x, \\ zx=\frac{3}{2}y, \\ xy=6z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x(y+z)=27, \\ y(z+x)=32, \\ z(x+y)=35. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x(x+y+z)=7, \\ y(x+y+z)=14, \\ z(x+y+z)=28. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=18, \\ (y+z)(x+y+z)=30, \\ (x+z)(x+y+z)=24. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x+\frac{1}{y}=1, \\ y+\frac{1}{z}=-\frac{3}{4}, \\ z+\frac{1}{x}=\frac{9}{2}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}, \\ x+y=z, \\ y+z=-2x. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=15, \\ 3y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=20, \\ 6z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=13. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} y^3+z^3=7x^3, \\ y+z-3x=0, \\ z-x=y-2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 27x^3-y^3-13\frac{xy}{z}=0, \\ 3x^2z-4xy+\frac{3}{z}=0, \\ 3xz-yz=1. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} (x+y)^2-z^2=4, \\ (y+z)^2-x^2=2, \\ (z+x)^2-y^2=3. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 5xy=6(x+y), \\ 3yz=2(y+z), \\ 4zx=3(z+x). \end{cases}$

13. $\begin{cases} xy+yz+zx=-4, \\ x+y+z=1, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xy+xz-yz=5. \end{cases}$

Найти действительные решения систем уравнений (**16–21**):

16. $\begin{cases} x^2+4xy+6y^2=3, \\ x^2-4xz+12z^2=2, \\ y^2+3yz+2z^2=0. \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} 2yz+\frac{3}{x}+3=0, \\ xy+\frac{4}{z}-2=0, \\ xz+\frac{2}{y}+2=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3(x+y)=z, \\ 3(x^2+y^2)=5z, \\ 3(x^3+y^3)=7z. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^3+2y^3+z^3+2xyz+22=0, \\ 2x^2-2y^3-z^3+xyz+2=0, \\ y^3-x^3-z^3+xyz-13=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=9+yz, \\ x^2+2y^2+z^2=6+xz, \\ x^2+y^2+2z^2=3+xy. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2+2yz=1, \\ y^2+2zx=2, \\ z^2+2xy=1. \end{cases}$

Ответы

1. $(2;3;1)$, $(-2;-3;-1)$. **2.** $(0;0;0)$, $(3;2;1)$, $(-3;-2;-1)$, $(3;-2;-1)$, $(-3;2;-1)$. **3.** $(3;4;5)$, $(-3;-4;-5)$. **4.** $(1;2;4)$, $(-1;-2;-4)$. **5.** $(1;2;3)$, $(-1;-2;-3)$. **6.** $\left(\frac{1}{5};\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right)$, $(2;-1;4)$. **7.** $(-2;3;1)$. **8.** $(3;2;1)$, $(-3;-2;-1)$, $(3;-2;-1)$, $(-3;2;-1)$. **9.** $(0;1;-1)$, $(3;4;5)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};2\right)$. **10.** $\left(\frac{15}{8};\frac{15}{8};\frac{4}{15}\right)$, $\left(-\frac{37}{72};-\frac{37}{8};\frac{12}{37}\right)$. **11.** $\left(\frac{7}{6};1;\frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{6};-1;-\frac{5}{6}\right)$. **12.** $(0;0;0)$, $(3;2;1)$. **13.** $(1;2;-2)$, $(2;1;-2)$, $(-2;1;2)$, $(1;-2;2)$, $(2;-2;1)$, $(-2;2;1)$. **14.** $(1;2;-1)$, $(1;-1;2)$, $(-1;1;2)$, $(-1;2;1)$, $(2;1;-1)$, $(2;-1;1)$. **15.** $(3;2;-1)$, $(3;-1;2)$, $\left(1;\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(1;\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. **16.** $\left(-1;-\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right)$, $\left(1;\frac{1}{3};-\frac{1}{6}\right)$, $\left(1;-1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;1;-\frac{1}{2}\right)$. **17.** $(3;2;-1)$. **18.** $(0;0;0)$, $(2;-1;3)$, $(-1;2;3)$. **19.** $(-2\sqrt[3]{4};-3;2\sqrt[3]{2})$, $\left(-2\sqrt[3]{\frac{2}{3}};-\sqrt[3]{\frac{1}{3}};-2\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)$. **20.** $(0;0;0)$, $(2;-1;3)$, $(-1;2;3)$. **21.** $(1;0;1)$, $(-1;0;-1)$, $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Глава IX

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 1. ТОЧНЫЕ ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ. ОПЕРАЦИИ НАД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

1. Верхняя и нижняя грани числовых множеств

В гл. II (§ 2) было рассмотрено понятие действительного числа и на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел введено правило сравнения.

Множество X действительных чисел ($X \subset \mathbb{R}$) называется *ограниченным сверху*, если существует действительное число C такое, что все элементы множества X не превосходят C.

Используя логические символы, запишем определение ограниченного сверху множества X в следующем виде:

$$\exists C \in \mathbb{R} \colon \forall x \in X \to x \leqslant C. \tag{1}$$

Это означает (см. рис. 1), что все элементы множества X расположены на числовой прямой левее точки C (эта точка может принадлежать множеству X).

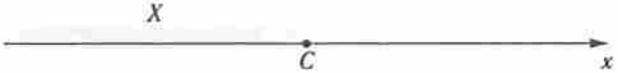


Рис. 1

Всякое действительное число C, обладающее свойством, указанным в определении (1), называют *верхней гранью* числового множества.

Аналогично, множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует действительное число C' такое, что все элементы множества X удовлетворяют условию $x \geqslant C'$, т. е. располагаются на числовой прямой (рис. 2) правее точки C' (точка C' может принадлежать множеству X).

Рис. 2

Определение ограниченного снизу множества $X \subset \mathbb{R}$ можно записать так:

$$\exists C' \in \mathbb{R} \colon \forall x \in X \to x \geqslant C'. \tag{2}$$

Пусть числовое множество X ограничено как сверху, так и снизу. Тогда его называют *ограниченным*. Это означает, что

$$\exists C' \in \mathbb{R}\ \exists C \in \mathbb{R} \colon \forall x \in X \to C' \leqslant x \leqslant C.$$

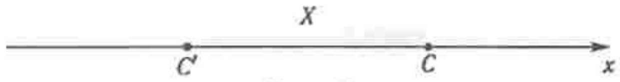


Рис. 3

Все элементы ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}$ (рис. 3) принадлежат отрезку $[C'; C]$.

2. Определение точных верхней и нижней граней

Если числовое множество X ограничено сверху, то выполняется условие (1), а число C является его верхней гранью. Ясно, что любое число, большее C, также является верхней гранью множества X. Таким образом, ограниченное сверху числовое множество имеет бесконечно много верхних граней, среди которых особую роль играет наименьшая. Речь идет о числе M, обладающем следующими свойствами:

M — верхняя грань множества X;
любое число M', меньшее M, не является верхней гранью множества X.

Такое число M будем называть точной верхней гранью множества X. Сформулируем определение точной верхней грани, используя логические символы.

Определение 1. Число M называется *точной верхней гранью множества* X, если выполняются следующие условия:

$$\forall x \in X \to x \leqslant M;$$
$$\forall \alpha < M \ \ \exists x_\alpha \in X \colon x_\alpha > \alpha.$$

Рис. 4 иллюстрирует определение 1.

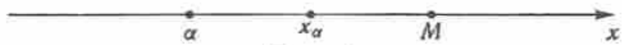


Рис. 4

Наличие индекса α в записи элемента x_α множества X указывает на то, что этот элемент, вообще говоря, зависит от числа $\alpha \in \mathbb{R}$.

Точная верхняя грань числового множества X обозначается $\sup X$ (читается «супремум»). Таким образом,

$$\{M = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \leqslant M\} \wedge \{\forall \alpha < M \ \ \exists x_\alpha \in X \colon x_\alpha > \alpha\}.$$

Замечание 1. Число $M = \sup X$ может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X. Например, если X — множество чисел x таких, что $2 \leqslant x < 3$, то $\sup X = 3$, а $3 \notin X$.

Замечание 2. Из определения 1 следует, что если у числового множества X существует точная верхняя грань M, то она единственна.

Введем понятие точной нижней грани.

Если числовое множество X ограничено снизу, то выполняется условие (2), а число C' является его нижней гранью.

Любое число, меньшее C', также является нижней гранью числового множества X, ограниченного снизу, а наибольшую из нижних граней называют точной нижней гранью числового множества X.

Речь идет о числе m, обладающем следующими свойствами:

m — нижняя грань множества X;

любое число β, большее m, не является нижней гранью множества X.

Сформулируем определение точной нижней грани, используя логические символы.

Определение 2. Число m называется *точной нижней гранью* числового множества X, если выполняются следующие условия:

$$\forall x \in X \to x \geqslant m;$$

$$\forall \beta > m \ \exists x_\beta \in X: x_\beta < \beta.$$

Рис. 5

Рис. 5 иллюстрирует определение 2. Точная нижняя грань обозначается $\inf X$ (читается «инфимум»). Таким образом,

$$\{m = \inf X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \geqslant m\} \wedge \{\forall \beta > m \ \exists x_\beta \in X: x_\beta < \beta\}.$$

3. Существование точных граней

Теорема 1. *Если непустое множество действительных чисел X ограничено сверху, то существует его точная верхняя грань* $\sup X$*; если непустое множество действительных чисел X ограничено снизу, то существует его точная нижняя грань* $\inf X$.

Доказательство теоремы 1 обычно приводится в курсе математического анализа, изучаемого в вузах. Эта теорема служит основой при определении операций над действительными числами, а также для доказательства многих теорем, связанных с понятиями предела и непрерывности функции.

Следствие. Если X и Y — непустые множества действительных чисел такие, что для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$ справедливо неравенство $x \leqslant y$, то существуют $\sup X$ и $\inf Y$, причем

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \to x \leqslant \sup X \leqslant \inf Y \leqslant y.$$

Это утверждение называют *теоремой об отделимости числовых множеств*.

4. Операции над действительными числами

Сложение и вычитание действительных чисел. Операции сложения и умножения действительных чисел вводятся с помощью приближения действительных чисел рациональными и, в частности, десятичными приближениями этих чисел.

Суммой двух действительных чисел α и β называется такое действительное число δ, что для *любых* рациональных чисел r, s, r', s', удовлетворяющих условиям

$$r \leqslant \alpha \leqslant s, \quad r' \leqslant \beta \leqslant s', \tag{3}$$

выполняется неравенство $r + r' \leqslant \delta \leqslant s + s'$. Сумма чисел α и β обозначается $\alpha + \beta$.

Теорема 2. *Для любых действительных чисел α и β их сумма существует и единственна.*

Для доказательства существования суммы можно воспользоваться следствием из теоремы 1, взяв в качестве δ число $\sup E$, где E — множество чисел вида $r + r'$.

Единственность суммы можно доказать, используя следующее утверждение: *пусть $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta' \in \mathbb{R}$ и пусть существуют такие последовательности рациональных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $x_n \leqslant \delta \leqslant \delta' \leqslant y_n$, $y_n - x_n \leqslant \frac{1}{10^n}$. Тогда $\delta = \delta'$.*

Заметим, что неравенства (3) будут выполняться, если в качестве r и r' (s и s') взять $(n+1)$-е десятичное приближение с недостатком (с избытком) соответственно для чисел α и β, т. е.

$$\underline{\alpha}_{n+1} \leqslant \alpha \leqslant \overline{\alpha}_{n+1}, \quad \underline{\beta}_{n+1} \leqslant \beta \leqslant \overline{\beta}_{n+1}.$$

Понятие разности двух рациональных чисел, как и понятие их частного, было рассмотрено в §2 гл. II. Аналогично эти операции вводятся и на множестве $\mathbb{R}$.

Умножение и деление действительных чисел. Произведением двух п о л о ж и т е л ь н ы х действительных чисел α и β называют такое действительное число δ, что для любых рациональных чисел r, s, r', s', удовлетворяющих условиям

$$0 < r \leqslant \alpha \leqslant s, \quad 0 < r' \leqslant \beta \leqslant s',$$

выполняется неравенство $rr' \leqslant \delta \leqslant ss'$. Произведение чисел α и β обозначается $\alpha\beta$.

Теорема 3. *Произведение любых двух положительных действительных чисел существует и единственно.*

Доказательство существования произведения и его единственности аналогично доказательству теоремы 2.

Произведение двух произвольных действительных чисел определяется следующим образом:

а) если $\alpha = 0$, то $\alpha\beta = 0$ при любом $\beta \in \mathbb{R}$;

б) если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, то $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$;

в) если $\alpha < 0$, $\beta > 0$ или $\alpha > 0$, $\beta < 0$, то $\alpha\beta = -|\alpha||\beta|$.

Операция деления вещественных чисел вводится по аналогии с операцией деления рациональных чисел.

Можно доказать, что если $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\beta \neq 0$, то частное $\frac{\alpha}{\beta}$ существует и единственно.

Некоторые свойства действительных чисел. Напомним те свойства действительных чисел, в которых используется понятие модуля:

$$|-a| = |a|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|,$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \quad |a-b| \geqslant ||a| - |b||.$$

Отметим также, что если a, δ — заданные действительные числа, причем $\delta > 0$, то неравенство

$$|x - a| < \delta \tag{4}$$

равносильно двойному неравенству $a - \delta < x < a + \delta$, т. е. множество решений (рис. 6) неравенства (4) — интервал $(a - \delta, a + \delta)$.

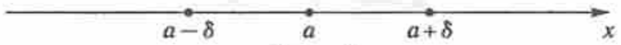


Рис. 6

Аналогично, неравенство

$$|x - a| > \delta, \quad \delta > 0, \tag{5}$$

выполняется при $x < a - \delta$ и при $x > a + \delta$ (рис. 7), т. е. множество решений неравенства (5) — объединение бесконечных интервалов $(-\infty, a - \delta)$ и $(a + \delta, +\infty)$.

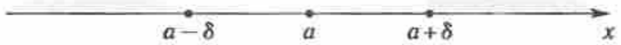


Рис. 7

Если $a < b$ и α, β — произвольные точки отрезка $[a; b]$, т. е.

$$a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b \quad \text{или} \quad a \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant b,$$

то

$$|\alpha - \beta| \leqslant b - a. \tag{6}$$

Неравенство (6) имеет очевидный геометрический смысл: расстояние между точками α и β (рис. 8) не превосходит расстояния между точками a и b.

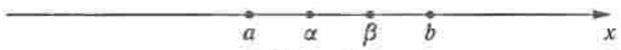


Рис. 8

§2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Числовая последовательность

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Кратко последовательность обозначают символами $\{x_n\}$ или (x_n), при этом x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n — номером члена x_n.

Числовая последовательность — это функция, область определения которой есть множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел; множество значений этой функции, т. е. совокупность чисел x_n, $n \in \mathbb{N}$, называют *множеством значений этой последовательности*.

Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным. Например, множество значений последовательности $\{(-1)^n\}$ состоит из двух чисел 1 и -1, а множества значений последовательностей $\{n^2\}$ и $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ бесконечны.

Последовательность может быть задана с помощью формулы вида

$$x_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

выражающей x_n через номер n, например

$$x_n = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad x_n = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Такую формулу называют *формулой общего члена последовательности*.

Для задания последовательности используют и *рекуррентные формулы*, т. е. формулы, выражающие n-й член последовательности через члены с меньшими номерами (предшествующие члены). Так определяют арифметическую и геометрическую прогрессии. Другими примерами являются последовательности

1) $x_1 = a$, $x_n = bx_{n-1} + c$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$;

2) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$;

здесь a, b, c — заданные числа.

Пример 1.

1) Выписать несколько первых членов последовательностей $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{2^n}\right\}, \left\{\sin\dfrac{\pi n}{2}\right\}, \ \{\log_{(n+2)}(n+1)\}$.

2) Написать формулу общего члена последовательностей $\left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots\right\}$ и $\left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, -\dfrac{5}{6}, \ldots\right\}$.

3) Выписать несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, заданной рекуррентно: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}^2$, $n\geqslant 2$.

$\triangle$ 1) $\left\{\frac{\sqrt{n}}{2^n}\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{2}{16},\frac{\sqrt{5}}{32},\ldots\right\}$;

$\left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\}=\left\{\sin\frac{\pi}{2},\sin\pi,\sin\frac{3\pi}{2},\sin 2\pi,\sin\frac{5\pi}{2},\ldots\right\}=$
$=\{1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots\}$;

$\{\log_{(n+2)}(n+1)\}=\{\log_3 2,\log_4 3,\log_5 4,\log_6 5,\ldots\}$.

2) $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\ldots\right\}=\left\{\frac{1}{3^1},\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^3},\frac{1}{3^4},\ldots\right\}=\left\{\frac{1}{3^n}\right\}=\{3^{-n}\}$;

$\left\{-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\frac{4}{5},-\frac{5}{6},\ldots\right\}=\left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\right\}$.

3) Имеем: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=2x_2-x_1^2=2\cdot 3-1^2=5$, $x_4=2x_3-x_2^2=2\cdot 5-3^2=1$, $x_5=2x_4-x_3^2=2\cdot 1-5^2=-23$, $x_6=2x_5-x_4^2=2\cdot(-23)-1^2=-47,\ldots$. $\blacktriangle$

Последовательность $\{x_n\}$ *ограничена снизу*, если существует число C_1 такое, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $x_n\geqslant C_1$. Например, последовательность, в которой $x_n=n^3$, ограничена снизу числом 1.

Последовательность $\{x_n\}$ *ограничена сверху*, если существует число C_2 такое, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $x_n\leqslant C_2$. Например, последовательность $\{-n+3\}$ ограничена сверху числом 2.

Последовательность $\{x_n\}$ *ограничена*, если существуют числа C_1 и C_2 такие, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верны неравенства $C_1\leqslant x_n\leqslant C_2$. Например, последовательность $\{2^{-n}\}$ ограничена, так как при всех $n\in\mathbb{N}$ имеем $0<2^{-n}\leqslant\frac{1}{2}$.

Это определение равносильно следующему: последовательность $\{x_n\}$ *ограничена*, если существует число $C>0$ такое, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $|x_n|\leqslant C$, или, короче,

$$\exists C>0\colon \forall n\in\mathbb{N}\to|x_n|\leqslant C.$$

Последовательность $\{x_n\}$ является *неограниченной*, если для любого $C>0$ найдется номер n_C такой, что $|x_{n_C}|>C$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют:

возрастающей, если для любого $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $x_{n+1}>x_n$;

неубывающей, если для любого $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $x_{n+1}\geqslant x_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют:

убывающей, если для любого $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $x_{n+1}<x_n$;

невозрастающей, если для любого $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $x_{n+1}\leqslant x_n$.

Возрастающие (неубывающие), а также убывающие (невозрастающие) последовательности называют *строго монотонными* (*монотонными*). Так, последовательность $\{3n+2\}$ — возрастающая, а последовательность $\left\{\frac{1}{n^2+n}\right\}$ — убывающая.

Точную верхнюю (нижнюю) грань множества значений последовательности $\{x_n\}$ называют *точной верхней* (соответственно *точной нижней*) *гранью* последовательности и обозначают $\sup\{x_n\}$ (соответственно $\inf\{x_n\}$).

Последовательность $\{x_n\}$ можно изображать точками $(n; x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, на плоскости или точками x_n, $n \in \mathbb{N}$, на числовой оси.

2. Определение предела последовательности

Предваряя определение предела последовательности, рассмотрим две числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = \frac{1}{2^n}.$$

Выпишем несколько первых членов каждой последовательности:

$$\{x_n\}: 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \frac{9}{8}, \frac{8}{9}, \ldots;$$

$$\{y_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots .$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на числовой прямой (рис. 9, 10).

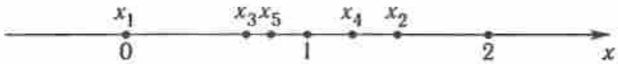


Рис. 9

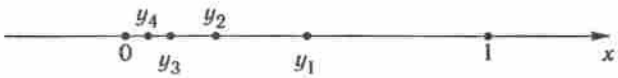


Рис. 10

Заметим, что члены последовательности $\{x_n\}$ как бы «сгущаются» около точки 1 (рис. 9), располагаясь правее точки 1 при четных n и левее точки 1 при нечетных n. С увеличением n расстояние от точки x_n до точки 1 уменьшается (стремится к нулю). Поэтому число 1 называют пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ и пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Аналогично, члены последовательности $\{y_n\}$ с ростом n «приближаются» к точке 0 (рис. 10), и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Сформулируем определение предела последовательности.

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если a — предел последовательности, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Замечание. Запись N_ε указывает на то, что номер, начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют условию $|x_n - a| < \varepsilon$, зависит, вообще говоря, от ε.

Если $x_n = a$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (такую последовательность называют *стационарной*), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Последовательность, у которой существует предел, называют *сходящейся*. Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют *расходящейся*; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Обратимся еще раз к определению предела. Согласно определению, число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, которое можно записать в виде

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Другими словами, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежит интервалу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Этот интервал называют *ε-окрестностью* точки a (рис. 11) и обозначают $U_\varepsilon(a)$.

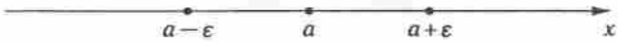


Рис. 11

Итак, число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если для каждой ε-окрестности точки a найдется номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат ε-окрестности точки a, так что вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо содержится лишь конечное число членов.

Пример 2. Используя определение предела, показать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a, если

1) $x_n = \frac{n+1}{n}$; $a = 1$; 2) $x_n = \frac{b}{\sqrt[m]{n}}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$; $a = 0$;

3) $x_n = q^n$; $|q| < 1$; $a = 0$; 4) $x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$; $a = 0$;

5) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1}$, $|q| < 1$; $a = \frac{1}{1-q}$; 6) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, $a = \frac{1}{2}$.

△ 1) Так как $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, то $|x_n - 1| = \frac{1}{n}$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполняться, если $\frac{1}{n} < \varepsilon$, т. е. при $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Выберем в качестве N_ε какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$, например число $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

По определению предела это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Замечание. Аналогичным образом можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+b}{n} = 1$ для любого $b \in \mathbb{R}$.

2) Пусть $r = \frac{1}{m}$. Так как $|x_n| = \frac{|b|}{n^r}$, а неравенство $\frac{|b|}{n^r} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, равносильно каждому из неравенств

$$n^r > \frac{|b|}{\varepsilon}, \quad n > \left(\frac{|b|}{\varepsilon}\right)^m,$$

то при всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\left(\frac{|b|}{\varepsilon}\right)^m\right] + 1$, справедливо неравенство $|x_n| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b}{n^r} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{\sqrt[m]{n}} = 0.$$

Замечание. Положив $m = 1$, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b}{n} = 0$.

3) Если $q = 0$, то $x_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Пусть $q \neq 0$. Обозначим $r = \frac{1}{|q|}$, тогда $r > 1$, так как $|q| < 1$. Поэтому $r = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$, откуда

$$\frac{1}{|q|^n} = r^n = (1+\alpha)^n > \alpha n.$$

Здесь использовано неравенство Бернулли (гл. II, §6, пример 8). Следовательно,

$$|x_n| = |q|^n < \frac{1}{\alpha n}, \quad \alpha = \frac{1}{|q|} - 1, \tag{1}$$

и для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right] + 1$, выполняются неравенства

$$|x_n| < \frac{1}{\alpha n} \leqslant \frac{1}{\alpha N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

4) Умножив и разделив x_n на $\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}$, получим

$$x_n = \frac{(\sqrt{n+3})^2 - (\sqrt{n+2})^2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}},$$

откуда $|x_n| < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Неравенство $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ будет выполняться, если $\sqrt{n} > \frac{1}{2\varepsilon}$, т. е. при $n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$. Пусть $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$, тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняются неравенства

$$|x_n| < \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{N_\varepsilon}} < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) = 0$.

5) Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем

$$x_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q},$$

откуда в силу (1) следует, что неравенства

$$\left|x_n - \frac{1}{1-q}\right| = \frac{|q|^n}{1-q} < \frac{1}{(1-q)\alpha n} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$, выполняются для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где

$$N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\alpha(1-q)\varepsilon}\right] + 1, \quad \alpha = \frac{1}{|q|} - 1,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-q}$.

6) Так как $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$, то

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Поэтому $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$ при $n \geqslant N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right] + 1$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$. ▲

Замечание. Пусть геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, тогда ее знаменатель q удовлетворяет условию $|q|<1$. Если u_1 — первый член прогрессии, то сумма первых n членов этой прогрессии равна

$$S_n = u_1 \sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{1-q}$$

(пример 2(5)), то $S = \frac{u_1}{1-q}$.

Пример 3. Пусть $x_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \neq 0$. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ограничена.

$\triangle$ Так как $a \neq 0$, то $|a| > 0$. Из определения предела последовательности следует, что по заданному числу $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ можно найти номер m такой, что при всех $n \geqslant m$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$. Отсюда, используя неравенство $|a| - |x_n| \leqslant |x_n - a|$, получаем $|a| - |x_n| < \frac{|a|}{2}$. Тогда $|x_n| > \frac{|a|}{2}$, и поэтому $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}$ для всех $n \geqslant m$.

Пусть C — наибольшее из чисел $\frac{1}{|x_1|}, \ldots, \frac{1}{|x_{m-1}|}, \frac{2}{|a|}$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\left|\frac{1}{x_n}\right| \leqslant C$, т.е. последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ограничена. $\blacktriangle$

3. Свойства сходящихся последовательностей

1°. *Числовая последовательность может иметь только один предел.*

$\bigcirc$ Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела a и b, причем $a < b$ (рис. 12). Выберем $\varepsilon > 0$ таким,

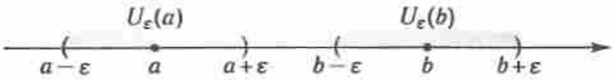


Рис. 12

чтобы ε-окрестности точек a и b не пересекались (не имели общих точек). Возьмем, например, $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$. Так как число a — предел

14—2549

последовательности $\{x_n\}$, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти номер N такой, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ для всех $n \geqslant N$. Поэтому вне интервала $U_\varepsilon(a)$ может оказаться лишь конечное число членов последовательности. В частности, интервал $U_\varepsilon(b)$ может содержать лишь конечное число членов последовательности. Это противоречит тому, что b — предел последовательности (любая окрестность точки b должна содержать бесконечное число членов последовательности). Полученное противоречие показывает, что последовательность не может иметь два различных предела. Итак, сходящаяся последовательность имеет только один предел. ●

2°. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

○ Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер m такой, что при всех $n \geqslant m$ имеет место неравенство $|x_n - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|.$$

Поэтому при всех $n \geqslant m$ выполняется неравенство

$$|x_n| < 1 + |a|.$$

Пусть C — наибольшее из чисел $1 + |a|, |x_1|, \ldots, |x_{m-1}|$, тогда $|x_n| \leqslant C$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ●

Замечание. Из ограниченности последовательности не следует ее сходимость. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не является сходящейся.

3°. *Если последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *таковы, что*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N_0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

то последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

○ По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $z_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_2$. Отсюда и из условия (2) следует (рис. 13), что при всех $n \geqslant N$, где

$$N = \max(N_0, N_1, N_2),$$

выполняется условие $y_n \in U_\varepsilon(a)$. Это означает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ●

Рис. 13

Пример 4. Пусть $\alpha_n \geqslant -1$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+\alpha_n} = 1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

$\triangle$ Докажем сначала, что

$$1 - |\alpha_n| \leqslant \sqrt[k]{1+\alpha_n} \leqslant 1 + |\alpha_n|, \quad n \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

В самом деле, если $\alpha_n \geqslant 0$, то

$$1 \leqslant \sqrt[k]{1+\alpha_n} \leqslant \left(\sqrt[k]{1+\alpha_n}\right)^k = 1 + \alpha_n = 1 + |\alpha_n|,$$

а если $-1 \leqslant \alpha_n < 0$, то

$$1 \geqslant \sqrt[k]{1+\alpha_n} \geqslant \left(\sqrt[k]{1+\alpha_n}\right)^k = 1 + \alpha_n = 1 - |\alpha_n|,$$

откуда следуют неравенства (4). Применяя свойство 3°, получаем утверждение (3). ▲

Замечание. Если $x_n = \sqrt[k]{a+\alpha_n}$, где $a > 0$, $a + \alpha_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то

$$x_n = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{1+\frac{\alpha_n}{a}}$$

и из равенства (3) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a+\alpha_n} = \sqrt[k]{a}$.

Пример 5. Доказать, что если $a > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{5}$$

$\triangle$ Если $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$. Обозначая $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$, получаем

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n,$$

где $\alpha_n > 0$, откуда

$$a = (1+\alpha_n)^n > \alpha_n n \tag{6}$$

в силу неравенства Бернулли. Так как $\alpha_n > 0$, то из (6) следует, что

$$0 < \alpha_n < \frac{a}{n}, \quad \text{т. е.} \quad 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} \quad \text{или} \quad 1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a}{n}.$$

Применяя свойство 3° и замечание к примеру 2(1), получаем соотношение (5). ▲

4. Предел монотонной последовательности

При доказательстве теоремы о пределе монотонной последовательности используется понятие точной верхней (нижней) грани последовательности.

Число a является точной верхней гранью последовательности $\{x_n\}$ ($a = \sup\{x_n\}$), если выполняются следующие условия:

$$\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \leqslant a, \tag{7}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m\colon x_m > a - \varepsilon. \tag{8}$$

Заметим, что номер m зависит, вообще говоря, от ε.

Теорема 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей (неубывающей) и ограничена сверху, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ является убывающей (невозрастающей) и ограничена снизу, то существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}.$$

○ Приведем доказательство теоремы для случая ограниченной сверху и возрастающей последовательности. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, т. е. множество чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ограничено сверху, то по теореме о существовании верхней грани (§ 1, теорема 1) существует точная верхняя грань этой последовательности, определяемая условиями (7), (8). Так как $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность, то

$$\forall n \geqslant m \to x_m \leqslant x_n. \tag{9}$$

Из (7)–(9) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m\colon \forall n \geqslant m \to a - \varepsilon < x_m \leqslant x_n \leqslant a,$$

т. е. $x_n \in U_\varepsilon(a)$. Это означает, согласно определению предела, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup\{x_n\}.$$ ●

Пример 6. Доказать, что если $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, где $a > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

△ Так как

$$x_{n+1} = \frac{a}{n+1} x_n, \tag{10}$$

то $x_{n+1} \leqslant x_n$ при всех $n \geqslant n_0$, где $n_0 = [a]$, т. е. $\{x_n\}$ — убывающая при $n \geqslant n_0$ последовательность. Кроме того, $x_n \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность ограничена снизу. По теореме 1 последовательность $\{x_n\}$ сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Тогда, переходя к пределу в равенстве (10), получаем $b = 0 \cdot b$, т. е. $b = 0$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{11}$$ ▲

Замечание. При переходе к пределу в соотношении (10) использовалось свойство сходящихся последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)$, см. ниже теорему 2; а также то, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b}{n} = 0$ (см. замечание к примеру 2(2)).

Пример 7. Последовательность $\{x_n\}$ задается рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \tag{12}$$

где $x_1 > 0$, $a > 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}. \tag{13}$$

$\triangle$ Докажем сначала методом индукции, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \to x_k > 0. \tag{14}$$

В самом деле, из формулы (12) и условий $x_1 > 0$, $a > 0$ следует, что $x_2 > 0$. Предполагая, что $x_n > 0$, из равенства (12) получаем $x_{n+1} > 0$. Утверждение (14) доказано.

Далее, применяя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического, из (12) получаем

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a} \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е.

$$\forall n \geqslant 2 \to x_n \geqslant \sqrt{a}. \tag{15}$$

Итак, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Докажем, что она является невозрастающей. Запишем равенство (12) в виде

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n},$$

откуда в силу (14) и (15) получаем

$$\forall n \geqslant 2 \to x_{n+1} \leqslant x_n,$$

т. е. последовательность является невозрастающей при $n \geqslant 2$. По теореме 1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, где $\alpha \geqslant \sqrt{a} > 0$ в силу условия (15). Переходя в равенстве (12) к пределу, получаем

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right),$$

откуда $\alpha^2 = a$, $\alpha = \sqrt{a}$, т. е. справедливо утверждение (13). $\blacktriangle$

Замечание. При переходе к пределу в соотношении (12) использовалось то, что для сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

$$\lim_{n\to\infty}(px_n + qy_n) = p\cdot\lim_{n\to\infty} x_n + q\cdot\lim_{n\to\infty} y_n, \quad p, q \in \mathbb{R},$$

а также что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ при условиях: $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ (см. ниже теорему 2).

5. Число e

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

и покажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная сверху. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$x_n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n^n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\frac{1}{n^k},$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Подставляя выражение для C_n^k в формулу разложения для x_n, запишем x_n в следующем виде:

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right); \qquad (16)$$

тогда

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right). \qquad (17)$$

Все слагаемые в суммах (16) и (17) положительны, причем каждое слагаемое суммы (16) меньше соответствующего слагаемого суммы (17), так как

$$1-\frac{m}{n} < 1-\frac{m}{n+1}, \quad m = 1, \ldots, n-1,$$

а число слагаемых в сумме (17) на одно больше, чем в сумме (16). Поэтому $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность. Кроме того, учитывая, что

$$0 < 1-\frac{m}{n} < 1 \quad m = 1, \ldots, n-1,$$

из равенства (16) получаем

$$x_n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Так как $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$ при $k \in \mathbb{N}$, то, используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем

$$x_n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Следовательно, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, т. е. $\{x_n\}$ — ограниченная сверху последовательность. По теореме 1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Этот предел обозначается буквой e. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{18}$$

Заметим, что число e иррационально и $e \approx 2{,}718281828459045$.

6. Бесконечно малые последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε такой, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon$. Из определения предела последовательности и определения бесконечно малой последовательности следует, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a, тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - a\}$ имеет предел, равный нулю, т. е. является бесконечно малой.

Бесконечно малые последовательности обладают следующими свойствами:

1°. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

2°. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

Замечание. Так как бесконечно малая последовательность ограничена (свойство 2° сходящихся последовательностей), то произведение двух или нескольких бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство этих свойств можно получить, используя неравенства, связанные с понятием модуля (см. конец § 1), и определения бесконечно малой и ограниченной последовательностей.

Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad \text{при условии, что} \quad y_n \neq 0 \ (n \in \mathbb{N}),\ b \neq 0. \tag{19}$$

○ Ограничимся доказательством утверждения (19).

Нужно показать, что $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ — бесконечно малая последовательность.

Так как $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{(a+\alpha_n)b - (b+\beta_n)a}{by_n} = \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\frac{1}{y_n}.$$

Последовательность $\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n$ является бесконечно малой (по свойству 1° бесконечно малых последовательностей), а последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ является ограниченной (пример 3).

Так как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой (свойство 2° бесконечно малых последовательностей), то справедливо утверждение (19). ●

Пример 8. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если

1) $x_n = \dfrac{3n^3+4n-1}{5n^3+2n^2+4}$; 2) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{2n^3+4n^2+3}}{n}$;

3) $x_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-2n+5}$.

△ 1) Так как $x_n = \dfrac{3+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{5+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^3}}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n^k}=0$, $k\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}$, то по теореме 2 получаем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{5}$.

2) Так как $x_n = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{2n^3}}$, то используя результат примера 4, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{2}$.

3) Используя равенство $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, запишем x_n в следующем виде:

$$x_n = \frac{4n-2}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-2n+5}} = \frac{4-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}.$$

Так как числитель и знаменатель полученной дроби имеют пределы, равные соответственно 4 и 2, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ▲

Пример 9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n = \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

$\triangle$ Воспользуемся формулой

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(гл. I, §3, пример 13). Тогда $x_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$, откуда находим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$. ▲

Пример 10. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

сходится, и найти ее предел.

$\triangle$ В сумме x_n каждое слагаемое меньше предыдущего, и поэтому

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Используя свойство 3° сходящихся последовательностей, теорему 2 и результат примера 4, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. ▲

Задачи

1. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, если:

1) $x_n = \sin\sqrt{n}$; 2) $x_n = \frac{n+1}{n^2+1}$; 3) $x_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$; 4) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ не является ограниченной, если:

1) $x_n = n\sin\frac{\pi n}{2}$; 2) $x_n = \frac{n\sqrt{n}}{n+1}$;

3) $x_n = n + (-1)^n n$; 4) $x_n = \sqrt{n^3+3n^2+4} - \sqrt{n^3+2n^2+2}$.

3. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \frac{3n+2}{2n+1}$; 2) $x_n = \frac{4n^3+3n+1}{3n^3+n^2+4}$;

3) $x_n = \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$; 4) $x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{3n^2+4}$.

4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \frac{\sqrt{2n^2+5n}}{n+1}$; 2) $x_n = \frac{\sqrt[3]{8n^3+3n+1}}{\sqrt{2n^2+5}}$;

3) $x_n = \sqrt{n^2+n+3} - \sqrt{n^2-n+5}$; 4) $x_n = \sqrt{9n^2+n+6} - 3n$.

5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{2n\cdot(2n+2)}$;

2) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$.

6. Последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ является расходящейся. Доказать, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ является расходящейся.

7. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}}$.

8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{\frac{3}{2}}(2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})\right]$.

9. Используя теорему о пределе монотонной последовательности, доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если:

1) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$; 2) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

10. Последовательность $\{x_n\}$ задается при $n \geqslant 2$ рекуррентной формулой $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ и условием $x_1 = \sqrt{2}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Ответы

3. 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 6; 4) $\frac{1}{6}$. **4.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{6}$. **5.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **7.** $\frac{1}{a_1 d}$. **8.** $\frac{1}{4}$.

§ 3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Определение предела функции

Важную роль в курсе математического анализа играет понятие предела, связанное с поведением функции в окрестности данной точки. Напомним, что δ-окрестностью точки a называется интервал длины 2δ с центром в точке a, т. е. множество

$$U_\delta(a) = \{x\colon |x-a| < \delta\} = \{x\colon a-\delta < x < a+\delta\}.$$

Проколотой δ-окрестностью точки a будем называть множество

$$\dot{U}_\delta(a) = U_\delta(a)\setminus\{a\} = \{x\colon 0 < |x-a| < \delta\},$$

т. е. δ-окрестность точки a с исключенной из нее точкой a.

Предваряя определение предела функции, рассмотрим два примера.

Пример 1. Исследуем функцию $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ в окрестности точки $x = 1$.

$\triangle$ Функция f определена при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 1$, причем $f(x) = x+1$ при $x \neq 1$. График этой функции изображен на рис. 14.

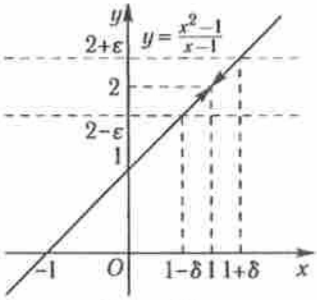


Рис. 14

Из этого рисунка видно, что значения функции близки к 2, если значения x близки к 1 ($x \neq 1$). Придадим этому утверждению точный смысл.

Пусть задано любое число $\varepsilon > 0$ и требуется найти число $\delta > 0$ такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки $x=1$ значения функции $f(x)$ отличаются от числа 2 по абсолютной величине меньше, чем на ε.

Иначе говоря, нужно найти число $\delta > 0$ такое, чтобы для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ соответствующие точки графика функции $y = f(x)$ лежали в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y = 2 - \varepsilon$ и $y = 2 + \varepsilon$ (см. рис. 14), т. е. чтобы выполнялось условие $f(x) \in U_\varepsilon(2)$. В данном примере можно взять $\delta = \varepsilon$.

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ стремится к двум при x, стремящемся к единице, а число 2 называют пределом функции $f(x)$ при $x \to 1$ и пишут $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ или $f(x) \to 2$ при $x \to 1$. ▲

Пример 2. Исследуем функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{если} \quad x<0, \\ 0, & \text{если} \quad x=0, \\ 1-x^2, & \text{если} \quad x>0, \end{cases}$$

в окрестности точки $x = 0$.

△ Из графика этой функции (рис. 15) видно, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(0)$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(1)$. В самом деле, прямые $y = 1+\varepsilon$ и $y = 1-\varepsilon$ пересекают график функции $y = f(x)$ в точках, абсциссы которых равны $x_1 = -\varepsilon$, $x_2 = \sqrt{\varepsilon}$. Пусть δ — наименьшее из чисел $|x_1|$ и x_2, т. е. $\delta = \min(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon})$. Тогда если $|x| < \delta$ и $x \neq 0$, то $|f(x) - 1| < \varepsilon$, т. е. для всех $x \in \dot{U}_\delta(0)$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(1)$. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ стремится к единице при x, стремящемся к нулю, и пишут

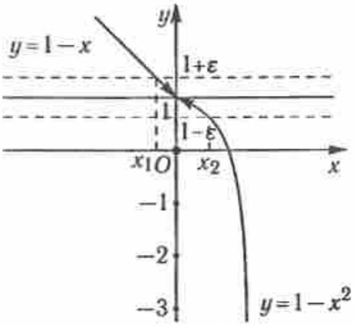


Рис. 15

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1. \qquad ▲$$

В первом примере функция не определена в точке $x = 1$, а во втором функция определена в точке $x = 0$, но значение функции в точке $x = 0$ не совпадает с ее пределом при $x \to 0$.

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точки a, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

С помощью логических символов это определение можно записать так:

$$\{\lim_{x \to a} f(x) = A\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \colon 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon,$$

или, используя понятие окрестности, в виде

$$\{\lim_{x \to a} f(x) = A\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Таким образом, число A есть предел функции $f(x)$ в точке a, если для любой ε-окрестности числа A можно найти такую проколотую δ-окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих этой δ-окрестности, соответствующие значения функции содержатся в ε-окрестности числа A.

Замечание. Отметим, что число δ, фигурирующее в определении предела, зависит, вообще говоря, от ε, т. е. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Определение 1 называют определением предела функции по Коши.

Наряду с этим определением используется определение предела по Гейне.

Определение 2. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a, т. е.

$$\exists \delta_0 > 0 \colon \dot{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f),$$

и для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что

$$x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a) \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу A.

Пример 3. Пользуясь определением предела по Гейне, доказать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

$\triangle$ Достаточно показать, что существуют последовательности $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$ с отличными от нуля членами, сходящиеся к нулю и такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(\tilde{x}_n)$. Возьмем $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}$, $\tilde{x}_n = (\pi n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 0$, $f(x_n) = 1$, $f(\tilde{x}_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = 0$. Следовательно, функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$. ▲

Ниже приводится без доказательства теорема, устанавливающая связь между определениями 1 и 2.

Теорема 1. *Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.*

Теорема 1 позволяет получать доказательство свойств пределов функций, пользуясь либо определением по Коши, либо по Гейне.

2. Различные типы пределов

Односторонние конечные пределы. Число A_1 называют *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* a и обозначают $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \in (a-\delta, a) \to |f(x) - A_1| < \varepsilon.$$

Аналогично, число A_2 называют *пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* a и обозначают $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \in (a, a+\delta) \to |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Числа A_1 и A_2 характеризуют поведение функции соответственно в левой и правой полуокрестностях точки a, поэтому пределы слева и справа называют *односторонними пределами*. Если $a = 0$, то предел слева функции $f(x)$ обозначают $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$ или $f(-0)$, а предел справа обозначают $\lim\limits_{x\to +0} f(x)$ или $f(+0)$.

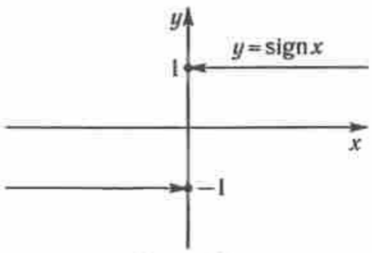


Рис. 16

Например, для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$, где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 16,

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(-0) = -1, \qquad \lim_{x\to +0} f(x) = f(+0) = 1.$$

Бесконечные пределы в конечной точке. Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки a, имеет в этой точке *бесконечный предел*, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon \forall x\in \dot{U}_{\delta}(a) \to |f(x)|>\varepsilon. \qquad (1)$$

В этом случае функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой при* $x\to a$.

Согласно условию (1), график функции $y=f(x)$ для всех $x\in\dot{U}_{\delta}(a)$ лежит вне горизонтальной полосы $|y|<\varepsilon$. Введем обозначение

$$U_{\varepsilon}(\infty)=\{y\colon |y|>\varepsilon\}=(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty)$$

и назовем это множество *ε-окрестностью бесконечности*. Тогда запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ означает, что для любой ε-окрестности бесконечности $U_{\varepsilon}(\infty)$ найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, что для всех $x\in\dot{U}_{\delta}(a)$ выполняется условие $f(x)\in U_{\varepsilon}(\infty)$.

Например, если $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, так как условие (1) выполняется при $\delta=\dfrac{1}{\varepsilon}$ (рис. 17).

Аналогично, говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки a, имеет в этой точке *предел, равный* $+\infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon \forall x\in \dot{U}_{\delta}(a) \to f(x)>\varepsilon,$$

т. е. $f(x)\in U_{\varepsilon}(+\infty)$, где множество $U_{\varepsilon}(+\infty)=(\varepsilon;+\infty)$ называют ε-окрестностью символа $+\infty$.

Если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon \forall x\in \dot{U}_{\delta}(a) \to f(x)<-\varepsilon,$$

т. е. $f(x)\in U_{\varepsilon}(-\infty)$, где $U_{\varepsilon}(-\infty)=(-\infty,-\varepsilon)$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке *a предел, равный* $-\infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, а множество $U_{\varepsilon}(-\infty)$ называют ε-окрестностью символа $-\infty$.

Например, если $f(x)=-\dfrac{1}{|x|}$ (рис. 18), то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, а если $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ (рис. 19), то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

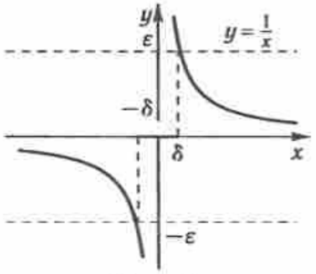


Рис. 17

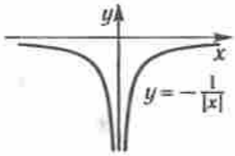


Рис. 18

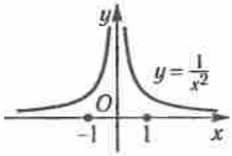


Рис. 19

Предел в бесконечности. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \in U_\delta(+\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то говорят, что число A есть *предел функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к плюс бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Например, если

$$f(x) = \frac{3 - 2x}{x + 1}$$

(см. рис. 20), то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$. В самом деле, $f(x) = -2 + \dfrac{5}{x+1}$, и если $x > 0$, то $x + 1 > x > 0$. Поэтому $\dfrac{5}{x+1} < \dfrac{5}{x}$, откуда следует, что неравенство $|f(x) + 2| < \dfrac{5}{x} < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ выполняется при любом $x > \delta$, где $\delta = \dfrac{5}{\varepsilon}$, т. е. при любом $x \in U_\delta(+\infty)$.

Если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \in U_\delta(-\infty) \to$ $\to f(x) \in U_\varepsilon(A)$, т. е. неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется для всех $x \in (-\infty, -\delta)$, то говорят, что число A есть *предел функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к минус бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$. Например,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 - 2x}{x + 1} = -2$$

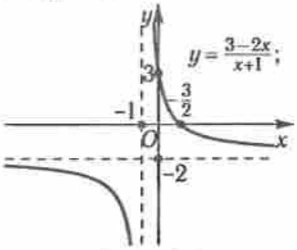


Рис. 20

(см. рис. 20).

Аналогично, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \in U_\delta(\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то говорят, что число A есть *предел функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$. Например, если

$$f(x) = \frac{3 - 2x}{x + 1},$$

то $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$.

Точно так же вводится понятие бесконечного предела в бесконечности. Например, запись $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \in U_\delta(+\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(-\infty).$$

Аналогично определяются бесконечные пределы при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$.

3. Свойства пределов функций

В рассматриваемых ниже свойствах речь идет о конечном пределе функции в заданной точке. Под точкой понимается либо число a, либо один из символов $a-0$, $a+0$, $-\infty$, $+\infty$, ∞.

Для определенности будем формулировать свойства пределов, предполагая, что a — число, а функция определена в проколотой окрестности точки a.

1°. Если функция $f(x)$ имеет предел A в точке a, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена.

2°. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, причем $A \neq 0$, то найдется такая проколотая окрестность точки a, в которой значения функции $f(x)$ имеют тот же знак, что и число A.

3°. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, причем $A \neq 0$, то существует число $\delta > 0$ такое, что функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена на множестве $\dot{U}_\delta(a)$.

4°. Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняются неравенства $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, и если $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, то существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Для доказательства свойств 1°–3° можно воспользоваться определением 1 предела, взяв $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$, а для доказательства свойства 4° удобно использовать свойство 3° для трех последовательностей (§ 2, разд. 3) и определение предела функции по Гейне.

4. Бесконечно малые функции. Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел

Функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой при* $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1°. Сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

2°. Произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на ограниченную в проколотой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Эти свойства легко доказать, используя определения бесконечно малой и ограниченной функций, либо с помощью определения предела функции по Гейне и свойств бесконечно малых последовательностей.

Так как бесконечно малая функция ограничена, то произведение двух (или нескольких) бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Например, функции $3x$, $4x^3$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Если $x \to 0$ и $x > 0$, то $\sqrt{x} \to 0$, т. е. $\sqrt{x}$ — бесконечно малая функция при $x \to +0$. Аналогично, $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

Если $x \to \infty$, то $\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{2}{x^2} \to 0$, т. е. $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x^2}$ — бесконечно малые функции при $x \to \infty$.

Замечание. Из определений предела функции и бесконечно малой функции следует, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, т. е. $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Пример 4. Пусть $b > 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Доказать, что

$$\lim_{x \to a} \sqrt{b + \alpha(x)} = \sqrt{b}.$$

△ Обозначим $\varphi(x) = \sqrt{b + \alpha(x)} - \sqrt{b}$. Нужно доказать, что $\varphi(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, т. е. что $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$. Умножив и разделив $\varphi(x)$ на $\sqrt{b + \alpha(x)} + \sqrt{b}$, получим

$$\varphi(x) = \frac{\alpha(x)}{\sqrt{b + \alpha(x)} + \sqrt{b}},$$

где $b + \alpha(x) > 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, так как $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$|\varphi(x)| = \frac{|\alpha(x)|}{\sqrt{b + \alpha(x)} + \sqrt{b}} < \frac{|\alpha(x)|}{\sqrt{b}},$$

и поэтому $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$. ▲

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B.$$

Тогда

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B, \tag{2}$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = AB, \tag{3}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \textit{при условии, что} \quad B \neq 0. \tag{4}$$

Для доказательства равенств (2)–(4) достаточно воспользоваться определением предела функции по Гейне и свойствами пределов последовательностей (§2, теорема 2). Другой способ доказательства —

использование замечания перед примером 4 и свойств бесконечно малых функций.

Отметим частный случай утверждения (3):

$$\lim_{x\to a}(Cf(x)) = C\lim_{x\to a} f(x),$$

т. е. постоянный множитель можно вынести за знак предела.

Пример 5. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5+x+4x^2}{1+2x+3x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+5}{2x^2-x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+4x+3}}{x}$.

△ 1) Так как Cx^k, где C — постоянная, $k\in\mathbb{N}$, является бесконечно малой функцией при $x\to 0$, то предел числителя равен 5, а предел знаменателя равен 1. Поэтому искомый предел равен 5.

2) Умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x-1}+1$, получим

$$\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{1+(x-2)}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+(x-2)}+1}$$

при $x\neq 2$, где $\sqrt{1+(x-2)}\to 1$ при $x\to 2$ (пример 4). Используя утверждение (4), находим, что искомый предел равен $\frac{1}{2}$.

3) Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, запишем ее в виде $\dfrac{3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$. Так как $\frac{C}{x^k}\to 0$ при $x\to\infty$ (C — постоянная, $k\in\mathbb{N}$), то искомый предел равен $\frac{3}{2}$.

4) Последовательно преобразуем данную функцию:

$$\frac{\sqrt{2x^2+4x+3}}{x} = \sqrt{\frac{2x^2+4x+3}{x^2}} = \sqrt{2+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Отсюда следует (пример 4), что искомый предел равен $\sqrt{2}$. ▲

Пример 6. Пусть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, $b>0$, $k\in\mathbb{N}$. Показать, что

$$\lim_{x\to a}\sqrt[k]{b+\alpha(x)} = \sqrt[k]{b}. \qquad (5)$$

△ Введем обозначения

$$\varphi(x) = \sqrt[k]{b+\alpha(x)} = \sqrt[k]{b}\left(\sqrt[k]{1+\frac{\alpha(x)}{b}}\right), \quad \beta(x) = \frac{\alpha(x)}{b}.$$

Тогда $\beta(x)\to 0$ при $x\to a$.

Как и в примере 4 (§2, разд. 3), можно показать, что

$$1-|\beta(x)| \leqslant \sqrt[k]{1+\beta(x)} \leqslant 1+|\beta(x)|.$$

Применив свойство 4° пределов функций, получаем

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{b+\alpha(x)} = \sqrt[k]{b} \lim_{x\to a} \sqrt[k]{1+\beta(x)} = \sqrt[k]{b}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$.

$\triangle$ Пусть $\varphi(x) = \sqrt[3]{8-x}-2 = 2\left(\sqrt[3]{1-\frac{x}{8}}-1\right)$, $g(x) = \sqrt[3]{1-\frac{x}{8}}$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ (пример 6). Применив формулу $a-b = \dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$, получим

$$g(x)-1 = \frac{1-\dfrac{x}{8}-1}{(g(x))^2+g(x)+1},$$

$$h(x) = (g(x))^2+g(x)+1 \to 3 \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

Если $x \neq 0$, то

$$\frac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x} = \frac{-\dfrac{x}{4}}{xh(x)} = -\frac{1}{4h(x)} \to -\frac{1}{12} \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x} = -\dfrac{1}{12}$. $\blacktriangle$

5. Пределы монотонных функций

Сформулируем без доказательства теорему о пределах для монотонной функции.

Теорема 3. *Если функция f определена и является монотонной на отрезке $[a,b]$, то в каждой точке $x_0 \in (a,b)$ эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках a и b — соответственно правый и левый пределы.*

Следствие. Если функция f определена и возрастает на отрезке $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, то

$$f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0).$$

6. Замена переменного при вычислении пределов

Теорема 4. *Если существуют*

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=b,\quad \lim_{y\to b}f(y)=A,$$

причем для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a выполняется условие $\varphi(x)\neq b$, то в точке a существует предел сложной функции $f(\varphi(x))$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=\lim_{y\to b}f(y).$$

Для доказательства теоремы 4 можно воспользоваться определением предела функции по Гейне.

Задачи

Вычислить предел функции (1–18):

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+5}$. **4.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x+3}{2x^3-x^2+5}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+x^2-1}{3x^5-x+2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3-(2x-1)^3}{4x^2+x+3}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$. **10.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$. **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}\right)$. **16.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2-3x+7}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$. **18.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

Ответы

1. -4. **2.** $\frac{2}{5}$. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{2}{3}$. **5.** 2. **6.** $\frac{4}{3}$. **7.** 1. **8.** 6. **9.** $\frac{1}{6}$. **10.** $-\frac{4}{3}$. **11.** $-\frac{1}{16}$. **12.** $\frac{2}{3}$. **13.** $\frac{1}{144}$. **14.** $\frac{3}{2}$. **15.** 0. **16.** 3. **17.** $-\frac{1}{4}$. **18.** $\frac{2}{3}$.

§ 4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Понятие непрерывности функции

Определение. Функция, определенная в некоторой окрестности точки a, называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

Таким образом, функция f непрерывна в точке a, если выполнены следующие условия:

функция f определена в некоторой окрестности точки a, т. е. существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(a) \subset D(f)$;

существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$;

$A = f(a)$.

Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a, выраженное условием (1), можно сформулировать с помощью неравенств (на языке ε—δ), с помощью окрестностей и в терминах последовательностей соответственно в виде

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 \colon \forall x \colon |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 \colon \forall x \in U_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(f(a)),$$

$$\forall \{x_n\} \colon \lim_{n \to \infty} x_n = a \to \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

Подчеркнем, что в определении непрерывности, в отличие от определения предела, рассматривается полная, а не проколотая окрестность точки a, и пределом функции является значение этой функции в точке a.

Назовем разность $x - a$ *приращением аргумента* и обозначим ее через Δx, а разность $f(x) - f(a)$ — *приращением функции*, соответствующим данному приращению Δx аргумента, и обозначим ее через Δy. Таким образом,

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

При этих обозначениях равенство (1) примет вид

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 1. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если

1) $f(x) = x^3$, $a = 1$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a \neq 0$;

3) $f(x)=\sqrt{x}$, $a>0$; 4) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $a=0$.

△ 1) Если $x\to 1$, то по свойствам пределов (§3, разд. 3) получаем $x^3\to 1$, т. е. для функции $f(x)=x^3$ в точке $x=1$ выполняется условие (1). Поэтому функция x^3 непрерывна в точке $x=1$.

2) Если $x\to a$, где $a\neq 0$, то, используя свойства пределов (§3, разд. 3), получаем

$$\frac{1}{x}\to\frac{1}{a},\quad \frac{1}{x^2}\to\frac{1}{a^2},$$

т. е. функция $\frac{1}{x^2}$ непрерывна в точке $x=a$ $(a\neq 0)$.

3) Так как $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$, то отсюда получаем

$$0\leqslant|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

Следовательно, $\sqrt{x}-\sqrt{a}\to 0$ при $x\to a$. Это означает, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в точке a, где $a>0$.

4) Функция f определена на множестве $\mathbb{R}$, и при любом $x\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$0\leqslant|f(x)-f(0)|=|f(x)|=|x|\cdot|\sin\frac{1}{x}|\leqslant|x|,$$

так как $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ при $x\neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ $=f(0)=0$, т. е. функция f непрерывна в точке $x=0$. ▲

По аналогии с понятием предела слева (справа) вводится понятие непрерывности слева (справа). Если функция f определена на полуинтервале $(a-\delta,a]$ и $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=f(a)$, т. е. $f(a-0)=f(a)$, то эту функцию называют *непрерывной слева в точке* a.

Аналогично, если функция определена на полуинтервале $[a,a+\delta)$, и $f(a+0)=f(a)$, то эту функцию называют *непрерывной справа в точке* a.

Например, функция $f(x)=[x]$ непрерывна справа в точке $x=1$ и не является непрерывной слева в этой точке, так как

$$f(1-0)=0,\quad f(1+0)=f(1)=1.$$

Очевидно, функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна как справа, так и слева в этой точке.

2. Точки разрыва

В этом разделе будем предполагать, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Точку a назовем *точкой разрыва функции* f, если эта функция либо не определена в точке a, либо определена, но не является непрерывной в точке a.

Следовательно, a — точка разрыва функции f, если не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

$a \in D(f)$;

существует конечный $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$;

$A = f(a)$.

Если a — точка разрыва функции f, причем в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, т. е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, то точку a называют *точкой разрыва первого рода*.

Замечание. Если $x = a$ — точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то разность $f(a+0) - f(a-0)$ называют *скачком функции в точке* a. В случае когда $f(a+0) = f(a-0)$, точку a называют *точкой устранимого разрыва*. Полагая $f(a) = f(a+0) = f(a-0) = A$, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \neq a, \\ A, & \text{если} \quad x = a, \end{cases}$$

непрерывную в точке a и совпадающую с $f(x)$ при $x \neq a$. В этом случае говорят, что функция *доопределена по непрерывности в точке* a.

Пусть $x = a$ — точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода. Тогда ее называют *точкой разрыва второго рода функции* f. В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.

Например, для функции $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ — точка разрыва первого рода. Доопределив эту функцию по непрерывности, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

непрерывную в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Для функций $\sin \frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ точка $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

Теорема. *Если функция f определена на отрезке $[a, b]$ и монотонна, то она может иметь внутри этого отрезка точки разрыва только первого рода.*

○ Пусть x_0 — произвольная точка интервала (a, b). По теореме 3 § 3 функция f имеет в точке x_0 конечные пределы слева и справа. Если, например, f — возрастающая функция, то

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0),$$

где $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ — соответственно пределы функции f слева и справа в точке x_0.

В том случае, когда $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, точка x_0 является точкой разрыва первого рода функции f; если же $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то точка x_0 есть точка непрерывности функции f. Аналогичное утверждение справедливо и для убывающей функции. ●

3. Свойства функций, непрерывных в точке

1°. Если функция f непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2°. Если функция f непрерывна в точке a, причем $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a знак функции f совпадает со знаком числа $f(a)$.

Для доказательства свойств 1° и 2° можно использовать свойства пределов функций (§ 3, разд. 3).

3°. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$ непрерывны в точке a, а при дополнительном условии $g(a) \neq 0$ функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке a.

Для доказательства свойства 3° следует использовать определение непрерывности и свойства пределов функций (§ 3, разд. 4, теорема 2).

4°. (Непрерывность сложной функции.) Если функция $z = f(y)$ непрерывна в точке y_0, а функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $y_0 = \varphi(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $f(\varphi(x))$, и эта функция непрерывна в точке x_0.

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функцию $f(x)$ называют *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и, кроме того, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Сформулируем без доказательства основные теоремы для функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 1 (*Вейерштрасса*). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем, и достигает своих точных верхней ($M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$) и нижней ($m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$) граней, т. е.*

$$\exists c_1 \in [a, b] : f(c_1) = M,$$
$$\exists c_2 \in [a, b] : f(c_2) = m.$$

Теорема 2 (*о нулях непрерывной функции*). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает в его концах значения разных знаков, т. е. $f(a)f(b) < 0$, то на отрезке $[a,b]$ имеется хотя бы один нуль функции f, т. е.*

$$\exists c \in [a,b]: f(c) = 0.$$

Замечание. Теорема 2 утверждает, что график функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$ и принимающей в его концах значения разных знаков, пересекает ось Ox (рис. 21) хотя бы в одной точке отрезка $[a,b]$.

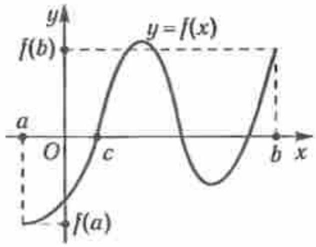


Рис. 21

Теорема 3 (*Коши*). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то для каждого значения C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f(\xi) = C$.*

Следствие. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$,

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

то множество значений, принимаемых функцией на отрезке $[a,b]$, есть отрезок $[m,M]$.

○ Для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, причем, согласно теореме 1, функция f принимает на отрезке $[a,b]$ значения, равные m и M. Все значения из отрезка $[m,M]$ функция принимает по теореме 3. Отрезок $[m,M]$ вырождается в точку, если $f(x) = \text{const}$ на отрезке $[a,b]$. ●

Теорема 4 (*об обратной функции*). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает на отрезке $[a,b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена функция $x = f(y)$, обратная к f, непрерывная и возрастающая.*

Пример 2. Найти такие числа b и c, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ b, & x = 2, \\ x + c, & x > 2 \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 2$.

△ Так как $f(2) = b$,

$$f(2-0) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 4, \qquad f(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 2 + c,$$

то функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 2$ тогда и только тогда, когда

$$f(2-0) = f(2+0) = f(2),$$

т. е. при выполнении условий $4 = 2 + c = b$, откуда находим $b = 4$, $c = 2$. ▲

Пример 3. Выяснить, является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, & x \neq 2, \\ 8, & x = 2 \end{cases}$$

непрерывной в точке $x = 2$.

△ Если $x \neq 2$, то $f(x) = x^2 + 2x + 4$, откуда находим $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 12$.

Так как $f(2) = 8$, а $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, то функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x = 2$. ▲

Пример 4. Показать, что уравнение $x^3 - 4x^2 + 3$ имеет корень на отрезке $[-1; 0]$.

△ Функция $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ непрерывна на отрезке $[-1; 0]$, $f(-1) = -2$, $f(0) = 3$. По теореме 2 на интервале $(-1; 0)$ найдется точка c такая, что $f(c) = 0$, т. е. данное уравнение имеет корень на отрезке $[-1; 0]$. ▲

Задачи

1. Выяснить, является ли непрерывной в точке $x = a$ функция $f(x)$, если

1) $a = 1$, $f(x) = \dfrac{4x^2 - x + 1}{3x + 1}$; 2) $a = -2$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$;

3) $a = 2$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 2, \\ x + 6, & x \geqslant 2. \end{cases}$

2. Найти такие значения a и b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на своей области определения, если:

1) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 + ax + b, & |x| > 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leqslant 0, \\ ax + b, & 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, & x \geqslant 1. \end{cases}$

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a. Доказать, что функция $|f(x)|$ также непрерывна в точке a.

4. Показать, что уравнение $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ имеет корень на отрезке $[0, 1]$.

5. Найти точки разрыва функции $f(x)$, если

1) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}$.

Ответы

1. 1) Да; 2) нет; 3) да. **2.** 1) $a = 1$, $b = -1$; 2) $a = 2$, $b = -1$. **5.** 1) $-1, 1, 2$; 2) $1, -2$.

§5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

При вычислении пределов функций вида $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$, где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, преобразуют дробь, выделяя в ее числителе и знаменателе множитель вида $(x-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Если в некоторой окрестности точки a функции $f(x)$ и $g(x)$ представляются в виде

$$f(x) = (x-a)^k f_1(x), \quad g(x) = (x-a)^k g_1(x),$$

где $k \in \mathbb{N}$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad \text{при} \quad x \neq a,$$

откуда следует, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}, \quad \text{если} \quad g_1(a) \neq 0.$$

Пример 1. Найти предел функции:

$$1)\ \lim_{x\to -1} \frac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^3 - 2x^2 + x + 4}; \qquad 2)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + x + 4}.$$

△ 1) Пусть $f(x) = x^3 - x^2 + x + 3$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$. Так как $x = -1$ — корень многочленов $f(x)$ и $g(x)$ $(f(-1) = g(-1) = 0)$, то при разложении этих многочленов на множители можно выделить множитель $x + 1$.

Имеем

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x^2 + x + 3 = x^2(x+1) - 2x(x+1) + 3(x+1) = \\ = (x+1)(x^2 - 2x + 3),$$

$$g(x) = x^3 + x^2 - 3x(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^2 - 3x + 4).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 4} = \frac{3}{4}.$$

2) Пусть $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $g(x) = x^4 - 4x + 3$. Тогда $f(1) = g(1) = 0$,

$$f(x) = x^3 - x - 2(x-1) = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)^2(x+2),$$

$$g(x) = x^4 - x - 3(x-1) = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3) = \\ = (x-1)(x^3 - 1 + x^2 + x - 2) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 3).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$ ▲

В некоторых случаях при вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$, можно использовать замену переменного (§ 4, п. 6).

Пример 2. Найти предел функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\alpha x}-1}{x}$, $\alpha \neq 0$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-\sqrt[5]{1+2x}}{x}$.

$\triangle$ 1) Пусть $\sqrt[3]{1+\alpha x}=t$, тогда

$$x=\frac{t^3-1}{\alpha},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\alpha x}-1}{x}=\alpha\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^3-1}=\alpha\lim_{t\to 1}\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{\alpha}{3}.$$

2) Пусть $\sqrt[5]{32+x}=t$, тогда

$$x=t^5-32,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^5-32}=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t^4+2t^3+4t^2+8t+16}=\frac{1}{80}.$$

3) Прибавляя и вычитая единицу в числителе дроби, представим эту дробь в виде $f(x)-g(x)$, где

$$f(x)=\frac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x},\quad g(x)=\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{x}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^5-1)}=3\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4+t^3+t^2+t+1}=\frac{3}{5},$$

а $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\frac{2}{3}$ (пример 2(1)), то искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-g(x))=\frac{3}{5}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{15}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3. Найти предел функции:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+3}\right).$$

$\triangle$ Представим данную функцию в виде $f(x)-g(x)$, где

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-x,\quad g(x)=\sqrt{x^2-2x+3}-x.$$

Пусть

$$h(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+1},$$

тогда

$$f(x) = \frac{h^3(x) - x^3}{h^2(x) + xh(x) + x^2},$$

где $h^3(x) - x^3 = 3x^2 + 1$. Разделив числитель и знаменатель полученной дроби на x^2 и учитывая, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}} = 1$$

(§ 3, пример 6), находим, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{1+1+1} = 1.$$

Найдем $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, используя равенство

$$g(x) = \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}+x} = \frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1},$$

откуда получаем

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{-2}{2} = -1.$$

Следовательно, искомый предел равен

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 1 + 1 = 2. \qquad \blacktriangle$$

Задачи

Вычислить пределы функций (1–10):

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{1 - x^3} + \dfrac{1}{x - 1} \right)$.

4. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{2x - x^2} + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$.

6. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$.

7. $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt[3]{9+x} + x + 7}{\sqrt[3]{15+2x} + 1}$.

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^2 - 1} \right)$.

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 4x} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4} \right)$.

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \right)$.

Ответы

1. $\frac{3}{2}$. **2.** $\frac{3}{4}$. **3.** 1. **4.** $-\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{3}{2}$. **6.** $-\frac{1}{3}$. **7.** 2. **8.** 2. **9.** 2. **10.** $-\frac{1}{4}$.

Глава X

СТЕПЕННАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§1. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Знакомые вам функции $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$ и $y=\frac{1}{x}$ являются частными случаями *степенной функции*, т. е. функции вида $y=x^p$, где p — заданное действительное число.

Свойства степенной функции существенно зависят от свойств степени с действительным показателем и, в частности, от того, при каких значениях x и p имеет смысл степень x^p.

Рассмотрим свойства степенной функции в зависимости от показателя степени p.

1. Степенные функции с натуральным показателем степени $y=x^p$, где $p\in\mathbb{N}$

Степенная функция $y=x^p$ $(p\in\mathbb{N})$ обладает следующими свойствами.

Область определения: все действительные числа, т. е. множество $\mathbb{R}$.

Множество значений: $\mathbb{R}$ при p нечетном, $y\geqslant 0$ при p четном.

Четность, нечетность: при p нечетном, т. е. при натуральном значении $p=2n-1$, функция нечетная, так как $(-x)^{2n-1}=-x^{2n-1}$; при p четном, т. е. при $p=2n$, функция четная, так как $(-x)^{2n}=x^{2n}$.

Нули функции: $y=0$ при $x=0$ для любого $p\in\mathbb{N}$.

Промежутки знакопостоянства: если p четное, то $y>0$ при всех $x\neq 0$; если p нечетное, то $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$.

Промежутки монотонности: при p нечетном функция возрастает на всей области определения; при p четном функция возрастает при $x\geqslant 0$, убывает при $x\leqslant 0$.

○ Пусть p — нечетное число, т. е. $p=2n-1$ $(n\in\mathbb{N})$. Если $0\leqslant x_1<x_2$, то $x_1^{2n-1}<x_2^{2n-1}$; если же $x_1<x_2\leqslant 0$, то $0\leqslant -x_2<-x_1$, откуда $(-x_2)^{2n-1}<(-x_1)^{2n-1}$ или $x_1^{2n-1}<x_2^{2n-1}$. Наконец, если $x_1<0$, а $x_2>0$, то $x_1^{2n-1}<x_2^{2n-1}$. Таким образом, неравенство $x_1^{2n-1}<x_2^{2n-1}$ справедливо при всех x_1, x_2 таких, что $x_1<x_2$. Следовательно, функция $y=x^{2n-1}$ — возрастающая.

Пусть теперь p — четное число, т. е. $p=2n$ $(n\in\mathbb{N})$. При всех x_1, x_2 таких, что $0\leqslant x_1<x_2$, справедливо неравенство $x_1^{2n}<x_2^{2n}$, т. е. при $x\geqslant 0$ функция $y=x^{2n}$ — возрастающая. При всех x_1, x_2 таких, что $x_1<x_2\leqslant 0$, выполняется неравенство $0\leqslant -x_2<-x_1$, откуда $(-x_2)^{2n}<(-x_1)^{2n}$ или $x_2^{2n}<x_1^{2n}$, т. е. функция $y=x^{2n}$ — убывающая. ●

Ограниченность: при p нечетном функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу; при p четном функция ограничена снизу, так как $f(x)=x^{2n}\geqslant 0$ при всех $x\in\mathbb{R}$, и принимает наименьшее значение $y_{\min}=f(0)=0$.

Графики функций $y=x^p$ для $p=1, 2, 3, 4$ показаны на рис. 1. При всех $p\in\mathbb{N}$ графики называются *параболами p-й степени* или просто параболами. При $p=2$ это обычная парабола, при $p=3$ — *кубическая парабола*.

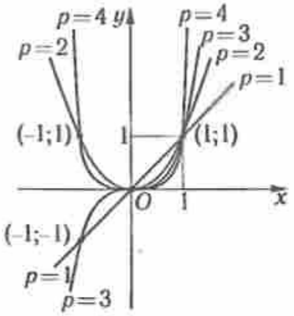


Рис. 1

Пример 1. Доказать, что функция $y=x^p$, где $p\in\mathbb{N}$, является непрерывной на всей области определения.

$\triangle$ Функция $y=x$ является непрерывной на $\mathbb{R}$, так как $\Delta y=\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Поэтому функция $y=x^p$, где $p\in\mathbb{N}$, является непрерывной на $\mathbb{R}$ как произведение p непрерывных функций. ▲

Пример 2. Доказать, что функция $y=x^5$ не является ограниченной.

$\triangle$ Предположим противное, т. е. допустим, что существует число $C>0$ такое, что для любого $x\in D(f)=\mathbb{R}$ справедливо неравенство $|f(x)|<C$.

Возьмем число $x_c=\sqrt[5]{2C}$. Тогда $f(x_c)=\left(\sqrt[5]{2C}\right)^5=2C>C$, что противоречит предположению. Следовательно, функция $y=x^5$ не является ограниченной. ▲

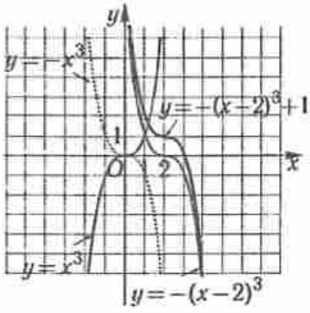


Рис. 2

Пример 3. Построить график функции $y=-x^3+6x^2-12x+9$.

$\triangle$ Заметим, что $D(f)=\mathbb{R}$ и $y=-x^3+6x^2-12x+9=-(x-2)^3+1$. Следовательно, график данной функции получается из графика функции $y=x^3$ симметрией относительно оси абсцисс, сдвигом вдоль оси абсцисс на 2 единицы вправо и вдоль оси ординат на 1 единицу вверх. График изображен на рис. 2. ▲

2. Степенные функции с целым отрицательным показателем степени $y = x^{-p}$, где $p \in \mathbb{N}$

Степенная функция $y=x^{-p}=\frac{1}{x^p}$, где $p\in\mathbb{N}$, обладает следующими свойствами.

Область определения: множество $\mathbb{R}$, кроме $x=0$.

Множество значений: множество $\mathbb{R}$, кроме $y=0$ при p нечетном, $y>0$ при p четном.

Четность, нечетность: при p нечетном, т. е. при натуральном значении $p=2n-1$, функция нечетная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}}=-\frac{1}{x^{2n-1}}$; при p четном, т. е. при $p=2n$, функция четная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n}}=\frac{1}{x^{2n}}$.

Нули функции: нет.

Промежутки знакопостоянства: если p нечетное число, то $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$; если p четное, то $y>0$ при всех $x\neq 0$.

Промежутки монотонности: при p нечетном функция убывает при $x<0$ и $x>0$; при p четном функция возрастает при $x<0$, убывает при $x>0$.

○ Это следует из свойств функции $y=x^p$, где $p\in\mathbb{N}$. ●

Ограниченность: при p нечетном функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу; при p четном функция ограничена снизу, так как $f(x)=x^{-2n}>0$ при всех действительных значениях $x\neq 0$, однако функция не принимает наименьшего значения.

График функции $y=\frac{1}{x^p}$, где $p=2n-1$ $(n\in\mathbb{N})$ имеет такой же вид, как графики функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=\frac{1}{x^3}$, представленные на рис. 3, *а*.

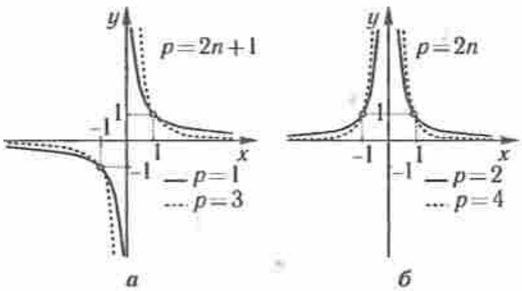


Рис. 3

График функции $y=\frac{1}{x^p}$, где $p=2n$ $(n\in\mathbb{N})$, имеет такой же вид, как графики функций $y=\frac{1}{x^2}$ и $y=\frac{1}{x^4}$, представленные на рис. 3, *б*.

Прямая $y=0$ (ось абсцисс) является *горизонтальной асимптотой*, а прямая $x=0$ (ось ординат) является *вертикальной асимптотой* графика функции $y=x^{-p}$, где $p\in\mathbb{N}$.

○ Это следует из свойств функции $y=x^p$, где $p\in\mathbb{N}$. ●

3. Степенные функции вида $y=\sqrt[n]{x}$, где $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$

Степенная функция вида $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2)$ обладает следующими свойствами.

Область определения: $D(f)=[0;+\infty)$ при n четном; $D(f)=\mathbb{R}$ при n нечетном.

○ Если $n=2m$ $(m\in\mathbb{N})$ — четное число, то корень степени $2m$ определен лишь для неотрицательных чисел и значение функции равно арифметическому корню из неотрицательного числа x, т. е. $y=\sqrt[2m]{x}$ $(x\geqslant 0)$.

Если же $n=2m+1$ $(m\in\mathbb{N})$ — нечетное число, то корень степени $2m+1$ определен для всех действительных чисел. При этом для $x\geqslant 0$ он является арифметическим корнем, а для $x<0$ его можно выразить через арифметический корень следующим образом

$$\sqrt[2m+1]{x}=-\sqrt[2m+1]{|x|}.$$

Значение функции в этом случае определяется так:

$$y=\sqrt[2m+1]{x}\ (x\geqslant 0)\quad \text{и}\quad y=-\sqrt[2m+1]{|x|}\ (x<0).$$ ●

Множество значений: $[0;+\infty)$ при n четном; $\mathbb{R}$ при n нечетном.

Четность, нечетность: при n нечетном функция нечетная; при n четном функция есть функция общего вида.

Нули функции: $y=0$ при $x=0$.

Промежутки знакопостоянства: если n четное, то $y>0$ при $x>0$; если n нечетное, то $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$.

Отметим, что если $n=2m$ $(m\in\mathbb{N})$ — четное число, то функция $y=\sqrt[2m]{x}$ является обратной к функции $y=x^{2m}$ на промежутке $[0;+\infty)$; если же $n=2m+1$ $(m\in\mathbb{N})$ — нечетное число, то функция $y=\sqrt[2m+1]{x}$ является обратной к функции $y=x^{2m+1}$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$. Отсюда можно получить следующие свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2)$.

Непрерывность: функция $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2)$ является непрерывной на всей области определения.

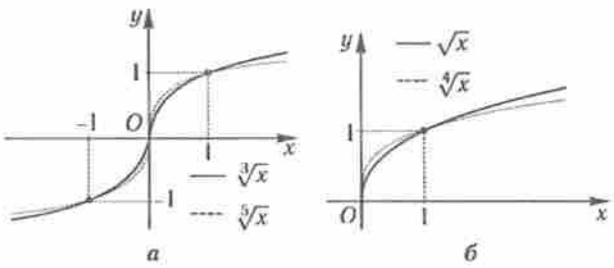


Рис. 4

Промежутки монотонности: функция вида $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2)$ является возрастающей на всей области определения.

Ограниченность: если $n=2m+1$ $(m\in\mathbb{N})$ — нечетное число, то функция $y=\sqrt[2m+1]{x}$ не является ограниченной ни сверху, ни снизу; если же $n=2m$ $(m\in\mathbb{N})$ — четное число, то функция $y=\sqrt[2m]{x}$ ограничена снизу, так как $f(x)=\sqrt[2m]{x}>0$ при всех действительных значениях $x\neq 0$ и принимает наименьшее значение $y_{\min}=f(0)=0$.

Экстремумы: нет.

График функции вида $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2)$ может быть получен симметрией относительно прямой $y=x$ соответствующего графика функции $y=x^n$ $(n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2)$. При этом для $n=2m+1$ $(m\in\mathbb{N})$ график функции $y=x^n$ берется на всей числовой прямой, а для $n=2m$ $(m\in\mathbb{N})$ берется только часть графика функции $y=x^n$ на промежутке $[0;+\infty)$.

График функции $y=\sqrt[2m+1]{x}$ $(m\in\mathbb{N})$ имеет такой же вид, как графики функций $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=\sqrt[5]{x}$, представленные на рис. 4, *а*.

График функции $y=\sqrt[2m]{x}$ $(m\in\mathbb{N})$ имеет такой же вид, как графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt[4]{x}$, представленные на рис. 4, *б*.

4. Степенная функция вида $y=x^r$, где $r\in\mathbb{Q}$

Дадим определение степенной функции x^r с рациональным показателем r. Если $r=\frac{m}{n}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, то положим

$$x^r=(x^{\frac{1}{n}})^m,\ x>0. \tag{1}$$

Функция $x^{\frac{1}{n}}$ непрерывна и возрастает. Функция t^m непрерывна при $t>0$, возрастает, если $m>0$, и убывает, если $m<0$. Поэтому функция x^r непрерывна при $x>0$, возрастает, если $r>0$, и убывает, если $r<0$.

График функции $y=x^r$ $(r\in\mathbb{Q})$ имеет такой же вид, как, например, графики, представленные на рис. 5.

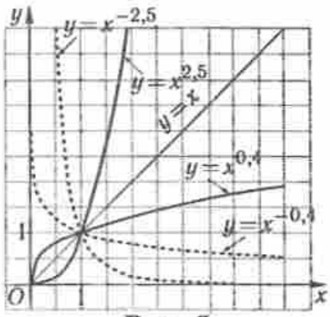


Рис. 5

Перечислим некоторые свойства степеней действительных чисел с рациональным показателем:

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}, \quad a > 0, \tag{2}$$

$$a^r > 1 \text{ при } r \in \mathbb{Q}, a > 1 \text{ и } r > 0, \tag{3}$$

$$a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \text{ при } a > 0,\ r_1 \in \mathbb{Q},\ r_2 \in \mathbb{Q}, \tag{4}$$

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2} \text{ при } a > 0,\ r_1 \in \mathbb{Q},\ r_2 \in \mathbb{Q}, \tag{5}$$

$$a^{r_1} > a^{r_2} \text{ при } a > 1,\ r_1 \in \mathbb{Q},\ r_2 \in \mathbb{Q},\ r_1 > r_2. \tag{6}$$

Свойства (2)–(6) легко проверяются, если воспользоваться свойствами целых степеней и тем, что при $a > 0$, $b > 0$ из равенства $a^n = b^n$, $n \in \mathbb{N}$, следует $a = b$.

Задачи

1. В одной системе координат постройте графики функций:

1) а) $y = x^2$; б) $y = x^3$; в) $y = x^4$; г) $y = x^5$;

2) а) $y = x^{-1}$; б) $y = x^{-2}$; в) $y = x^{-3}$; г) $y = x^{-4}$;

3) а) $y = x^{\frac{1}{3}}$; б) $y = x^{\frac{1}{2}}$; в) $y = x^{\frac{4}{3}}$; г) $y = x^{\frac{3}{2}}$;

4) а) $y = x^{-\frac{1}{3}}$; б) $y = x^{-\frac{1}{2}}$; в) $y = x^{-\frac{4}{3}}$; г) $y = x^{-\frac{3}{2}}$.

2. Используя свойства степенной функции, сравнить числа:

1) $(0{,}33)^6$ и $(-4{,}2)^6$; 2) $\left(-\frac{11}{16}\right)^5$ и $\left(-\frac{6}{12}\right)^5$;

3) $(1-\sqrt{2})^7$ и $(\sqrt{3}-1)^7$; 4) $(\sqrt{3}+1)^{10}$ и $(\sqrt{2}+2)^{10}$;

5) $\left(\frac{13}{14}\right)^{\frac{3}{4}}$ и $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}}$; 6) $3{,}2^{-0{,}3}$ и $3{,}3^{-0{,}3}$;

7) $(2\sqrt[3]{5})^{-0{,}4}$ и $(5\sqrt[3]{2})^{-0{,}4}$.

3. Показать, что функция $y = x^2$ не является ограниченной сверху на промежутке $[0; +\infty)$.

4. Доказать, что функция $y = x^2$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающей на промежутке $[0; +\infty)$.

5. Построить график функции и с его помощью исследовать функцию, т. е. указать область определения и множество значений, участки знакопостоянства и монотонности, нули функции, а также проверить на четность и нечетность:

1) $f(x)=\begin{cases} x^4, & \text{если } |x|\leqslant 2,\\ 64x^{-2}, & \text{если } |x|>2;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{если } |x|\geqslant 2,\\ 128x^{-4}, & \text{если } |x|<2.\end{cases}$

6. Построить график функции и найти ее область определения, множество значений, промежутки возрастания и убывания; выяснить, является ли функция ограниченной; имеет ли наибольшее и наименьшее значения:

1) $y=|x|^{\frac{1}{3}}+1$; 2) $y=3-|x|^5$; 3) $y=|x|^3-1$; 4) $y=(2x)^{-2}-4$.

7. Начальная масса тела m_0 при движении этого тела со скоростью v меняется и достигает значения m, вычисляемого по формуле $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, где c — скорость света, $c\approx 3\cdot 10^5$ км/с. Какова должна быть скорость тела, чтобы его масса:

1) увеличилась в два раза; 2) увеличилась в три раза?

8. Массу тела на высоте h от поверхности Земли можно найти по формуле $m_h=\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2\cdot m_0$, где m_h — масса тела на расстоянии h км над поверхностью Земли, R — радиус Земли (принять равным 6400 км), m_0 — масса тела на уровне моря, h — расстояние от поверхности Земли.

1) Изобразить схематически график изменения массы тела человека при подъеме на расстояние, равное 0, R, $2R$, $3R$, ..., если его масса на уровне моря равна 75 кг.

2) На какой высоте над поверхностью Земли масса тела станет равной 25 кг?

Ответы

5. 1) $D(f)=\mathbb{R}$, $E(f)=[0;16]$; $y>0$ при всех $x\neq 0$; функция возрастает на промежутках $(-\infty;-2]$ и $[0;2]$, убывает на промежутках $[-2;0]$ и $[2;+\infty)$; $x=0$; функция четная; 2) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $E(f)=(-\infty;8]\cup[8;+\infty)$; $y>0$ при $x>0$ и $y<0$ при $x<0$; функция возрастает на промежутках $(-\infty;-2]$ и $[2;+\infty)$, убывает на промежутках $[-2;0]$ и $[0;2]$; нулей нет; функция нечетная. **6.** 1) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=[1;+\infty)$; функция убывает на $(-\infty;0]$, возрастает на $[0;+\infty)$; функция ограничена снизу, $y_{\text{наим}}=y(0)=1$; 2) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=(-\infty;-3]$; убывает на $[0;+\infty)$; возрастает на $(-\infty;0]$, ограничена сверху, $y_{\text{наиб}}=y(0)=-3$; 3) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=[1;+\infty]$; убывает на $(-\infty;0]$, возрастает на $[0;+\infty)$, ограничена снизу, $y_{\text{наим}}=y(0)=-1$; 4) $D(y)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $E(y)=(-4;+\infty]$, убывает на $(0;+\infty)$, возрастает на $(-\infty;0)$, ограничена снизу, наибольшего и наименьшего значения не принимает. **7.** 1) $v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\approx 259\,807$ км/с; 2) $v=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}c\approx 282\,843$ км/с. **8.** 2) $h\approx 4685$ км.

§2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Рассмотрим функцию a^r, где $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$.

Ранее было доказано (гл. IX, §2, пример 5), что если $a > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{1}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1. \tag{2}$$

Заметим, что соотношения (1) и (2) справедливы и в случае, когда $0 < a < 1$.

Утверждение 1. *Пусть $\{r_n\}$ — произвольная последовательность рациональных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1. \tag{3}$$

○ Из (1) и (2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0 такой, что для любого $k > k_0$ будут справедливы неравенства

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, то для любого $k_0 \in \mathbb{N}$ найдется номер n_0 такой, что при всех $n > n_0$ будут справедливы неравенства $|r_n| < \dfrac{1}{k_0+1}$. В силу монотонности функции a^r при $r \in \mathbb{Q}$ из этого следует, что будут выполняться неравенства $a^{-\frac{1}{k_0+1}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{k_0+1}}$. Тогда для всех $n > n_0$ будут справедливы неравенства

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{k_0+1}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{k_0+1}} < 1 + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$. ●

Утверждение 2. *Пусть $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — две монотонные последовательности рациональных чисел таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = x_0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда последовательности $\{a^{p_n}\}$ и $\{a^{q_n}\}$ сходятся и имеют равные пределы.*

○ Пусть $\{p_n\}$ — монотонная последовательность рациональных чисел и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = x_0$. Из монотонности и сходимости $\{p_n\}$ следует, что существуют числа $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ такие, что $\alpha \leqslant p_n \leqslant \beta$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{a^{p_n}\}$ будет монотонна и ограничена $(a^\alpha \leqslant a^{p_n} \leqslant a^\beta)$. Следовательно, $\{a^{p_n}\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n} = b_1$. Кроме того, так как $a^\alpha \leqslant a^{p_n} \leqslant a^\beta$, то $b_1 \geqslant a^\alpha > 0$.

Аналогично доказывается, что и $\{a^{q_n}\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n} = b_2$.

Докажем, что $b_1 = b_2$. Для этого рассмотрим последовательность $\left\{\frac{a^{p_n}}{a^{q_n}}\right\}$. Так как $\{a^{p_n}\}$ и $\{a^{q_n}\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n} = b_2 \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{a^{p_n}}{a^{q_n}}\right\}$ также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{p_n}}{a^{q_n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}} = \frac{b_1}{b_2}$. С другой стороны, $\frac{a^{p_n}}{a^{q_n}} = a^{p_n - q_n}$, а так как $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n - q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n - \lim\limits_{n\to\infty} q_n = x_0 - x_0 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n - q_n} = 1$. Следовательно, $\frac{b_1}{b_2} = 1$ или $b_1 = b_2$. ●

Утверждение 3. *Пусть $\{r_n\}$ — произвольная последовательность рациональных чисел, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда последовательность $\{a^{r_n}\}$ имеет предел.*

○ Пусть $\{p_n\}$ — некоторая монотонная последовательность рациональных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$ (например, последовательность десятичных приближений числа x_0).

Рассмотрим последовательность $\{a^{r_n} - a^{p_n}\}$. Покажем, что эта последовательность сходится и ее предел равен 0. Для этого представим ее в следующем виде:

$$a^{r_n} - a^{p_n} = a^{p_n}(a^{r_n - p_n} - 1).$$

Так как $r_n - p_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $a^{r_n - p_n} \to 1$ при $n \to \infty$, а значит $a^{r_n - p_n} - 1 \to 0$, т. е. является бесконечно малой. А так как $\{a^{p_n}\}$ сходится, поэтому ограничена, то $a^{r_n} - a^{p_n}$ — бесконечно малая при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{r_n} - a^{p_n}) = 0$.

Следовательно, $\{a^{r_n}\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n}$. ●

Определение показательной функции. Пусть x — произвольная точка числовой прямой и пусть $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Предполагая, что $a > 0$, положим по определению

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \tag{4}$$

Если $a > 1$, то предел (4) существует в силу утверждения 3.

Если $0 < a < 1$, то $a^{r_n} = \frac{1}{b^{r_n}}$, где $b = \frac{1}{a}$, откуда следует, что предел (4) существует и при $a \in (0;1)$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n} = b^x$. При $a = 1$ предел (4) существует и равен 1, так как $1^r = 1$ для любого $r \in \mathbb{Q}$.

Определение. Функцию, заданную формулой $y = a^x$, где a — фиксированное число, $a > 0$, $a \neq 1$, называют *показательной функцией с основанием a*.

Замечание. Определение *показательной функции* является корректным, т. е. предел (4) не зависит от выбора последовательности рациональных чисел, сходящейся к x. Действительно, если $\{r_n\}$ и $\{\rho_n\}$ — последовательности рациональных чисел, сходящихся к x, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = x$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n - \rho_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n-\rho_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n}$.

Свойства функции $y = a^x$, $a > 1$.

1°. Для любых действительных чисел x_1 и x_2 выполняется равенство
$$a^{x_1}\cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}. \tag{5}$$
Из формулы (5), в частности, следует, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

2°. Функция $y = a^x$, где $a > 1$, строго возрастает на $\mathbb{R}$.

3°. Функция $y = a^x$, где $a > 1$, непрерывна на $\mathbb{R}$.

4°. Для любых действительных чисел x_1 и x_2 выполняется равенство
$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1\cdot x_2}. \tag{6}$$

5°. Если $a > 1$, то
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \tag{7}$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0. \tag{8}$$

Докажем свойства 1° и 3°.

○ Свойство 1°. Пусть $\{r_n\}$ и $\{\rho_n\}$ — последовательности рациональных чисел такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = x_2$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n + \rho_n) = x_1 + x_2$ и существуют пределы:
$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_1},\quad \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = a^{x_2},\quad \lim_{n\to\infty} a^{r_n+\rho_n} = a^{x_1+x_2}.$$
Так как по свойству степени с рациональным показателем $a^{r_n+\rho_n} = a^{r_n}a^{\rho_n}$, то, переходя в последнем равенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем равенство (5).

Свойство 3°. Пусть x_0 — произвольная точка множества $\mathbb{R}$, $\Delta y = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$. Нужно доказать, что $a^{\Delta x} \to 1$ при $\Delta x \to 0$ или
$$\lim_{x\to 0} a^x = 1. \tag{9}$$
Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность действительных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. В силу свойств действительных чисел найдутся последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$ и $\{\rho_n\}$, удовлетворяющие при $n \in \mathbb{N}$ условию
$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < \rho_n < x_n + \frac{1}{n},$$
откуда в силу свойства 2° получаем
$$a^{x_n}a^{-\frac{1}{n}} < a^{r_n} < a^{x_n} < a^{\rho_n} < a^{x_n}a^{\frac{1}{n}}. \tag{10}$$

Так как $\rho_n \to 0$ и $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то в силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\rho_n} = 1$. Отсюда, используя неравенство (10), получаем $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$. Утверждение (9) доказано, откуда следует, что существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0} a^{x_0+\Delta x}$, равный a^{x_0}, т. е. функция $y = a^x$ непрерывна в точке x_0. Так как x_0 — произвольная точка множества $\mathbb{R}$, то функция a^x непрерывна на $\mathbb{R}$. ●

Итак, показательная функция $y = a^x$, где $a > 1$, обладает следующими свойствами:

Область определения: $D(a^x) = \mathbb{R}$, т. е. множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

Множество значений: $E(a^x) = \mathbb{R}_+$, множество всех положительных действительных чисел $\mathbb{R}_+$.

Четность, нечетность: функция не является ни четной, ни нечетной.

Нули функции: нулей нет.

Промежутки знакопостоянства: $y > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Промежутки монотонности: функция строго возрастает на всей области определения.

Ограниченность: функция ограничена снизу, так как $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, функция возрастает и $a^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Непрерывность: функция непрерывна на всей области определения.

Замечание. Для показательной функции $y = a^x$, где $0 < a < 1$, остаются в силе свойства 1°, 3°, 4°.

Однако в отличие от функции $y = a^x$, где $a > 1$, которая является строго возрастающей, функция $y = a^x$, где $0 < a < 1$, строго убывает, поскольку $a^x = \frac{1}{b^x}$, где $b = \frac{1}{a} > 1$.

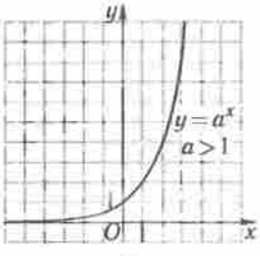
Из (7) и (8) следует, что если $0 < a < 1$, то

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty. \tag{11}$$

На рис. 6 изображены графики показательной функции $y = a^x$ для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$.

В качестве основания показательной функции часто используют число e (см. гл. IX, §2), а функцию $y = e^x$ называют *экспоненциальной* и обозначают $\exp x$.

Применение показательного закона в физике. Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов. Так, например, по законам показательной функции протекают следующие явления.



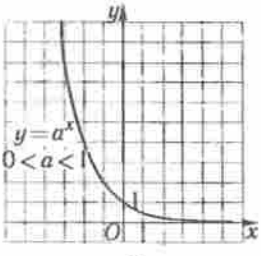


Рис. 6

1) Радиоактивный распад вещества задается формулой $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где $m(t)$ и m_0 — масса радиоактивного вещества соответственно в момент времени t и в начальный момент времени $t=0$; T — период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшится вдвое).

2) Количество бактерий $N(t)$ в определенной среде за время t вычисляется по формуле $N(t)=N_0a^{kt}$, где N_0 — начальное количество бактерий, a и k — некоторые постоянные.

3) Изменение атмосферного давления p в зависимости от высоты h над уровнем моря описывается формулой $p(h) = p_0a^h$, где p_0 — атмосферное давление над уровнем моря, a — некоторая постоянная.

Гиперболические функции. Функции, заданные формулами
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2},$$
называют соответственно *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*.

Эти функции определены и непрерывны на $\mathbb{R}$, причем $\operatorname{ch} x$ — четная функция, а $\operatorname{sh} x$ — нечетная функция. Графики функций $y=\operatorname{ch} x$ и $y=\operatorname{sh} x$ изображены на рис. 7.

Из определения гиперболических функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ следует, что
$$\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x=e^x, \tag{12}$$
$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1, \tag{13}$$
$$\operatorname{ch} 2x=1+\operatorname{sh}^2 x, \tag{14}$$
$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x. \tag{15}$$

Пример 1. Доказать формулу $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$.

△ $$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$ ▲

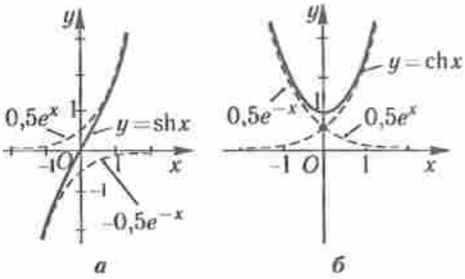


Рис. 7

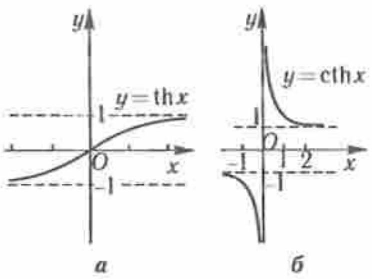


Рис. 8

Функции, заданные формулами

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

называют *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом* соответственно.

Функция $\operatorname{th} x$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция $\operatorname{cth} x$ определена и непрерывна на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; обе функции нечетные, их графики представлены на рис. 8.

Задачи

1. Построить на одном чертеже графики функций:

1) $y = 2^x$; 2) $y = 3^x$;

3) $y = 0{,}5^x$; 4) $y = 0.2^x$.

2. Как по графику функции $y = k \cdot a^x$ определить основание a и коэффициент k?

3. Для функций вида $y = a^x$, графики которых представлены на рис. 1, расставить в порядке возрастания числа a_1, a_2, a_3, a_4.

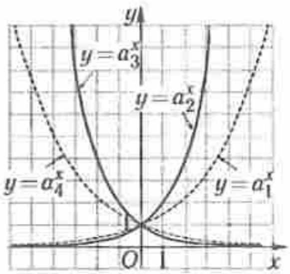


Рис. 9

4. Найти область определения функции:

1) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$; 2) $y = \frac{1}{16^{x^2} - 2^x}$;

3) $y = \sqrt{\frac{16 - 2^{-x^2}}{x}}$; 4) $y = \frac{1}{4^x - 2^x - 2}$.

5. Найти множество значений функции:

1) $y = 10^{-x^2}$; 2) $y = \frac{1}{1 - 2^{-x}}$; 3) $y = 2^{-x^2+4x+5}$; 4) $y = \frac{|x|}{x} \cdot e^{x^2}$.

6. Выяснить, какие из функций являются четными, какие нечетными и какие являются функциями общего вида:

1) $y = x2^{-x}$; 2) $y = 10^x + 10^{-x}$; 3) $y = \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3^{-x}}$;

4) $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$; 5) $y = \frac{(1 + 2^x)^2}{2^x}$.

7. Доказать ограниченность функции:

1) $y=10^{-|x|}$; 2) $y=2^{-x^2}$; 3) $y=0{,}3^{x^2-1}$.

8. Доказать неограниченность функции:

1) $y=0{,}4^x$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $y=3^x$, $x\in\mathbb{R}$.

9. Исследовать на монотонность функцию:

1) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$; 2) $y=2^{1-x}-2^{x-1}$.

10. Построить график функции:

1) а) $y=3^x$; б) $y=3^{-x}$; в) $y=-3^x$;
г) $y=2-3^x$; д) $y=0{,}5\cdot 3^{|x|}$; е) $y=3^{1-x}+4$.

2) а) $y=0{,}5^x$; б) $y=0{,}5^{|x|}$; в) $y=0{,}5^{\frac{x}{3}}$;
г) $y=0{,}5^{2x-1}$; д) $y=|2-0{,}5^x|$; е) $y=3-0{,}5^{-x}$.

11. Доказать равенства:

1) $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x$; 2) $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}x$;
3) $\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x$; 4) $\operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x\operatorname{sh}x$;
5) $\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y=\dfrac{\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)}{2}$; 6) $\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y=\dfrac{\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)}{2}$;
7) $\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y=\dfrac{\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y)}{2}$.

12. Докажите, что для любой показательной функции $f(x)=k\cdot a^x$ и любой геометрической прогрессии $\{b_n\}$ с положительными членами найдется такая арифметическая прогрессия $\{x_n\}$, что для всех n будет справедливо равенство $f(x_n)=b_n$.

Ответы

2. $k=y(0)$, $a=\frac{y(1)}{k}$. **3.** $a_3<a_4<a_2<a_1$. **4.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;0{,}25)\cup$ $\cup(0{,}25;+\infty)$; 3) $(-\infty;-4]\cup(0;4]$; 4) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **5.** 1) $E(y)=(0;1]$; 2) $E(y)=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; 3) $E(y)=(0;512]$; 4) $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. **6.** 1) общего вида; 2) четная; 3) нечетная; 4) нечетная; 5) четная.

§3. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

По теореме об обратной функции на промежутке $(0;+\infty)$ определена функция, обратная к функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$. Эта функция называется *логарифмической функцией с основанием a* и обозначается формулой $y=\log_a x$. Таким образом, логарифмическая функция $y=\log_a x$ и показательная функция $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, взаимно обратны.

○ Решая уравнение $y=\log_a x$ относительно x, получаем $x=a^y$; меняя местами x и y, получаем $y=a^x$. ●

Логарифмическая функция обладает следующими свойствами.

Область определения: множество всех положительных действительных чисел $\mathbb{R}_+$, т. е. $D(\log_a x)=\mathbb{R}_+$.

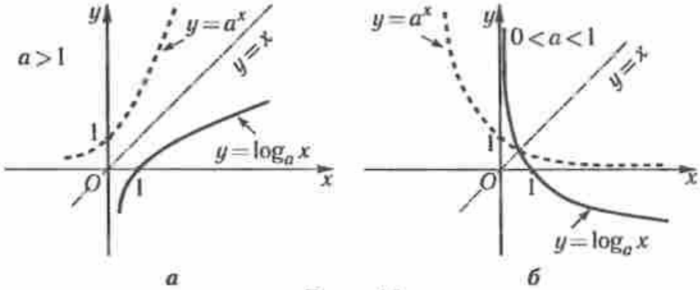


Рис. 10

Область значений: множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$, т. е. $E(\log_a x) = \mathbb{R}$.

Промежутки монотонности: на всей области определения возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$.

Отметим, что справедливы и два следующих утверждения:

если $a > 1$ *и* $\log_a x_1 > \log_a x_2$, *где* $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, *то* $x_1 > x_2$;

если же $0 < a < 1$ *и* $\log_a x_1 > \log_a x_2$, *где* $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, *то* $x_2 > x_1$.

Промежутки знакопостоянства: если $a > 1$, то $y > 0$ при $x > 1$, $y < 0$ при $0 < x < 1$. Если же $0 < a < 1$, то $y > 0$ при $0 < x < 1$, $y < 0$ при $x > 1$.

Непрерывность: функция является непрерывной на промежутке $(0; +\infty)$.

На рис. 10 изображены графики логарифмической функции $y = \log_a x$ для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$.

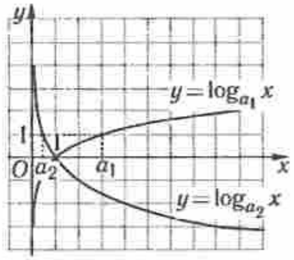


Рис. 11

Отметим, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку $(1; 0)$. Для того чтобы по графику логарифмической функции оценить значение основания, достаточно найти абсциссу точки пересечения графика $y = \log_a x$ с прямой $y = 1$ (см. рис. 11).

При решении уравнений часто используется следующая теорема.

Теорема. *Если* $\log_a x_1 = \log_a x_2$, *где* $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, *то* $x_1 = x_2$.

○ Предположим, что $x_1 \neq x_2$, например $x_2 > x_1$. Если $a > 1$, то из неравенства $x_2 > x_1$ следует, что $\log_a x_2 > \log_a x_1$; если же $0 < a < 1$, то из неравенства $x_2 > x_1$ следует, что $\log_a x_1 > \log_a x_2$. В обоих случаях получилось противоречие с условием $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Следовательно, $x_1 = x_2$. ●

Пример 1. Является ли функция $y = \log_2(x + \sqrt{1+x^2})$ четной или нечетной?

$\triangle$ Область определения данной функции состоит из всех x таких, что $x + \sqrt{1+x^2} > 0$. Этому неравенству удовлетворяет любое действительное число x. В самом деле, перепишем неравенство в виде $\sqrt{1+x^2} > -x$. Очевидно, что при любом $x > 0$ последнее неравенство верно. Если же $x \leqslant 0$, то его обе части можно возвести в квадрат, после чего получим $1 + x^2 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$. Таким образом, область определения данной функции симметрична относительно начала координат.

Далее, для любого x справедлива следующая цепочка равенств:

$$y(-x) = \log_2\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right) = \log_2\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right) =$$
$$= \log_2 \frac{\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}} = \log_2 \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} =$$
$$= -\log_2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -y(x).$$

Так как область определения данной функции симметрична относительно начала координат и $y(-x) = -y(x)$, то функция является нечетной. $\blacktriangle$

Пример 2. Найти, какой формулой задается функция $f(x)$ при $x<0$, и решить уравнение $f(x)=4$, если известно, что $f(x)$ — нечетная функция и при $x > 0$ определена формулой $f(x) = \log_3 \frac{x}{3}$.

$\triangle$ Так как функция $f(x)$ — нечетная и определена для всех $x > 0$, то она определена для всех $x < 0$, т. е. область определения $f(x)$ симметрична относительно начала координат, и для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. Если $x < 0$, то справедлива запись $x = -|x|$. Тогда $f(-|x|) = -f(|x|)$ или, освобождаясь от модуля, получаем при $x < 0$ формулу $f(x) = -\log_3\left(-\frac{x}{3}\right)$.

Решая уравнение $f(x) = 4$, получаем:

$$\log_3 \frac{x}{3} = 4 \text{ при } x > 0, \text{ откуда } \frac{x}{3} = 3^4 \text{ или } x = 243;$$
$$-\log_3\left(-\frac{x}{3}\right) = 4 \text{ при } x < 0, \text{ откуда } -\frac{x}{3} = 3^{-4} \text{ или } x = -\frac{1}{27}.$$

Ответ. $f(x) = -\log_3\left(-\frac{x}{3}\right), x < 0$; $x = -\frac{1}{27}$, $x = 243$. $\blacktriangle$

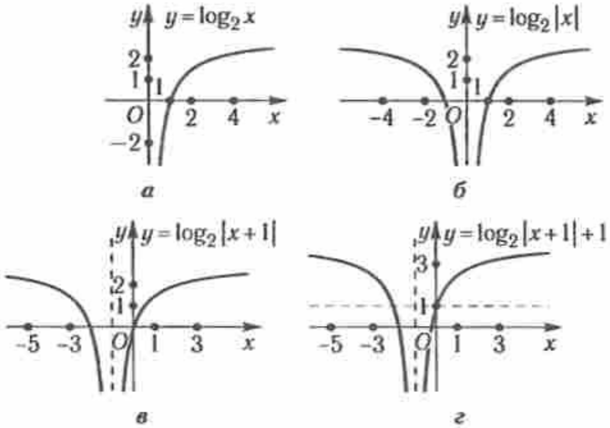


Рис. 12

Пример 3. Построить график функции $y=\log_2|1+x|+1$.

График данной функции получается из графика функции $y=\log_2 x$ по следующей схеме:

$$\log_2 x \mapsto \log_2|x| \mapsto \log_2|x+1| \mapsto \log_2|x+1|+1$$

(на рис. 12 $а \mapsto б \mapsto в \mapsto г$ соответственно).

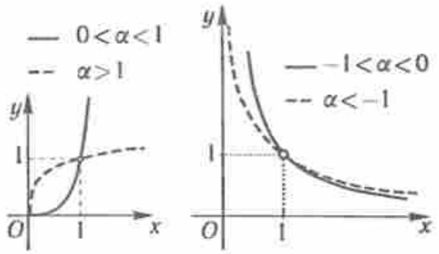
Степенные функции вида $y=x^\alpha$ с произвольным действительным показателем. В §1 была рассмотрена степенная функция вида $y=x^r$, где $r\in\mathbb{Q}$. Степенная функция с действительным показателем α при $x>0$ определяется формулой

$$x^\alpha = e^{\alpha\ln x}. \tag{1}$$

Функция x^α непрерывна при $x>0$ как суперпозиция показательной функции e^t и функции $t=\alpha\ln x$, которые являются непрерывными. Из равенства (1) и свойств показательной и логарифмической функций следует, что функция x^α строго возрастает при $\alpha>0$ и строго убывает при $\alpha<0$ на промежутке $(0;+\infty)$. Из формулы (1) и равенства $\ln e^t=t$ следует, что

$$\ln x^\alpha = \alpha\ln x, \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad x>0.$$

Замечание. Если $\alpha\in\mathbb{Q}$, то функция x^α может иметь смысл и при $x<0$. Например, функции x^2, $\sqrt[3]{x}$ определены на $\mathbb{R}$, а функции $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ определены при всех $x\in\mathbb{R}$, кроме $x=0$. Если число $\alpha>0$, то принято считать, что $0^\alpha=0$; если $\alpha<0$, то выражение 0^α не имеет смысла; если показатель $\alpha=0$, то по определению степени $x^0=1$ для всех действительных значений x, кроме 0.



а *б*

Рис. 13

Итак, пусть показатель степени α — положительное действительное нецелое число. В этом случае степенная функция $y=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ обладает следующими свойствами.

Область определения: $D(f)=[0;+\infty)$.

Множество значений: $E(f)=[0;+\infty)$.

Четность, нечетность: функция не является ни четной, ни нечетной.

Нули функции: $y=0$ при $x=0$.

Промежутки знакопостоянства: $y>0$ при $x>0$.

Промежутки монотонности: функция возрастает на всей области определения, т. е. на промежутке $x \geqslant 0$.

Ограниченность: функция ограничена снизу, так как $f(x)=x^{\alpha} \geqslant 0$ при всех $x \geqslant 0$ и принимает наименьшее значение $y_{\min}=f(0)=0$.

Экстремумы: нет.

График функции $y=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ имеет такой же вид, как, например, графики, представленные на рис. 13, *а*.

Пусть теперь показатель степени α — отрицательное действительное нецелое число. В этом случае степенная функция $y=x^{\alpha}$ $(\alpha<0)$ обладает следующими свойствами.

Область определения: $D(f)=(0;+\infty)$.

Множество значений: $E(f)=(0;+\infty)$.

Четность, нечетность: функция не является ни четной, ни нечетной.

Нули функции: нулей нет.

Промежутки знакопостоянства: $y>0$ при $x>0$.

Промежутки монотонности: функция убывает при $x>0$.

Ограниченность: функция ограничена снизу, так как $f(x)=x^{\alpha}>0$ при всех $x>0$, но не принимает своего наименьшего значения.

Экстремумы: нет.

График функции $y=x^\alpha$ ($\alpha<0$) имеет такой же вид, как, например, графики, представленные на рис. 13, *б*.

Прямая $y=0$ (ось абсцисс) является *горизонтальной асимптотой*, а прямая $x=0$ (ось ординат) является *вертикальной асимптотой* графика функции $y=x^\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha<0$).

Пример 4. Сравнить числа:

1) $(2{,}7)^{4-\pi}$ и $(2{,}9)^{4-\pi}$; 2) $(0{,}95)^{-0{,}7}$ и $(0{,}99)^{0{,}9}$.

△ 1) Так как $3<\pi<4$, то $0<4-\pi<1$. Функция $y=x^{4-\pi}$ возрастает на промежутке $x\geqslant 0$. Поэтому $(2{,}9)^{4-\pi}>(2{,}7)^{4-\pi}$.

2) Рассмотрим функции $f_1(x)=x^{-0{,}7}$ и $f_2(x)=x^{0{,}9}$. Заметим, что $f_1(1)=f_2(1)=1$, но f_1 — убывающая функция и $(0{,}95)^{-0{,}7}>1$, а f_2 — возрастающая и $(0{,}99)^{0{,}9}<1$. Следовательно, $(0{,}95)^{-0{,}7}>(0{,}99)^{0{,}9}$. ▲

Задачи

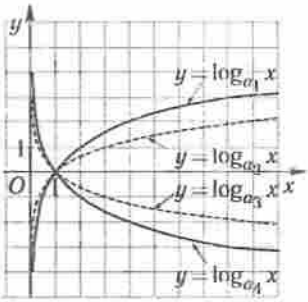


Рис. 14

1. На одном чертеже построить графики функций:

1) $y=\log_2 x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$;

3) $y=\log_3 x$; 4) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

2. Построить график функции:

1) $y=\log_2 x^2$; 2) $y=\log_x x$;

3) $y=\log_{x^2} x^4$; 4) $y=2^{\log_2 x}$.

3. Для функций вида $y=\log_a x$, графики которых представлены на рис. 14, расставить в порядке возрастания числа a_1, a_2, a_3, a_4.

4. Сравнить выражения $\log_a N$ и $\log_{\frac{1}{a}} N$, если:

1) $a>1$, $N>1$; 2) $0<a<1$, $N>1$;
3) $a>1$, $0<N<1$; 4) $0<a<1$, $0<N<1$.

5. Сравнить выражения $\log_a N$ и $\log_a \frac{1}{N}$, если:

1) $a>1, N>1$; 2) $0<a<1, N>1$; 3) $a>1, 0<N<1$; 4) $0<a<1, 0<N<1$.

6. Найти область определения функций:

1) $y=\log_{0{,}5}(3+4x-x^2)$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\log_2(x^2-7x-8)}$; 3) $y=\log_{3+x}(x^2-1)$.

7. Найти область определения и множество значений функций:

1) $y=\log_2\left(x^2+2x+3\right)$; 2) $y=\log_{0{,}5}(-x^2+4x+5)$; 3) $y=\log_9(3-|x|)$.

8. Определить, какая из функций является четной, нечетной или функцией общего вида:

1) $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$; 2) $y=\log_3(\sqrt{1+x^2}-x)$; 3) $f(x)=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\left(x-\log_3\dfrac{2+x}{2-x}\right)$.

9. Найти, какой формулой определяется функция $f(x)$ при $x<0$, и решить уравнение $f(x)=3$, если известно, что:

1) $f(x)$ — нечетная и при $x>0$ определена формулой $f(x)=\log_3\frac{x}{3}$;

2) $f(x)$ — четная и при $x>0$ определена формулой $f(x)=\log_3\frac{x}{3}$;

3) $f(x)$ — нечетная и при $x>0$ определена формулой $f(x)=\log_2(2x)$;

10. Выяснить, является ли ограниченной функция:

1) $y=\log_2(x^2+1)$; 2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(3-4x+x^2)$;

3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2(1-x^2)}$; 4) $y=3^{\log_2(1-x^2)}$.

11. Найти промежутки монотонности функции:

1) $y=\log_{\frac{1}{2}}|4x^2-4x|$; 2) $y=\log_2||x|-1|$.

12. Построить график функций:

1) а) $y=\log_3 x$; б) $y=2\log_3 x$; в) $y=\log_3(-x)$; г) $y=\log_3|x|$;
д) $y=-\log_3 x$; е) $y=\log_3|x-3|$; ж) $y=4\log_3(x+2)-2$.

1) а) $y=\log_{0,5}x$; б) $y=\log_{0.5}(2x)$; в) $y=\log_{0,5}(x+2)$; г) $y=|\log_{0,5}x|$;
д) $y=2\log_{0,5}x$; е) $y=\log_{0,5}(3x-2)$; ж) $y=\log_{0,5}(1-x)$.

13. Построить график функции $y=\log_{(|x|-2)}|2-|x||$.

14. Изобразить схематически график функции и найти ее область определения и множество значений; выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей); является ли функция ограниченной:

1) $y=x^{\frac{2}{\pi}}-1$; 2) $y=(x-1)^{\sqrt{2}}$; 3) $y=(x+1)^{-\sqrt{3}}$; 4) $y=1-(x+2)^{-\frac{1}{\pi}}$.

Ответы

3. $a_3<a_4<a_2<a_1$. **4.** 1) $\log_a N>\log_{\frac{1}{a}}N$; 2) $\log_a N<\log_{\frac{1}{a}}N$; 3) $\log_a N<\log_{\frac{1}{a}}N$; 4) $\log_a N>\log_{\frac{1}{a}}N$. **5.** 1) $\log_a N>\log_a\frac{1}{N}$; $a>1$, $N>1$; 2) $\log_a N<\log_a\frac{1}{N}$; 3) $\log_a N<\log_a\frac{1}{N}$; 4) $\log_a N>\log_a\frac{1}{N}$. **6.** 1) $(2-\sqrt{7};2+\sqrt{7})$; 2) $(-\infty;-4]\cup\left(8;\frac{7+\sqrt{85}}{2}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{85}}{2};+\infty\right)$; 3) $(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;+\infty)$. **7.** 1) $D(y)=\mathbb{R}$, $E(y)=[1;+\infty)$; 2) $D(y)=(-1;5)$, $E(y)=\mathbb{R}$; 3) $D(y)=(-3;3)$, $E(y)=(-\infty;0,5]$. **8.** 1) нечетная; 2) нечетная; 3) четная. **9.** 1) $f(x)=-\log_3\left(-\frac{x}{3}\right)$, $x<0$; $x=-\frac{1}{9}$, $x=81$; 2) $f(x)=\log_3\left(-\frac{x}{3}\right)$, $x<0$; $x=\pm 81$; 3) $f(x)=-\log_2(-2x)$, $x<0$; $x=-\frac{1}{16}$, $x=4$. **10.** 1) $y\geqslant 1$; 2) функция неограниченна; 3) $y\geqslant 1$; 4) $0<y<1$. **11.** 1) Возрастает на промежутке $(-\infty;0)$; убывает на промежутке $(1;+\infty)$; 2) возрастает на промежутках $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; убывает на промежутках $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$.

§4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшее показательное уравнение — уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Это уравнение при $b \leqslant 0$ корней не имеет, а при $b > 0$ имеет единственный корень $x = \log_a b$.

Рассмотрим основные методы решения показательных уравнений.

1. Решение показательного уравнения часто сводится к решению простейших. Для этого применяют различные методы решения уравнений: разложение на множители, замена переменной и т. д.

Пример 1. Решить уравнение $4^{x+1} + 4^{x+2} = 40$.

△ $4^{x+1} + 4^{x+2} = 40 \Leftrightarrow 4^{x+1}(1+4) = 40 \Leftrightarrow 4^{x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{2x+2} = 2^3$. Функция $y = 2^x$ возрастающая, каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента. Отсюда $2x + 2 = 3$ или $x = 0{,}5$.

Ответ. 0,5. ▲

2. Многие показательные уравнения решаются приведением обеих частей к одному основанию и использованием свойства монотонности показательной функции. Так, при $a > 0$, $a \neq 1$, имеем

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x).$$

Пример 2. Решить уравнение $(0{,}4)^x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+3} = 1$.

△ $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2x-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{-x-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Leftrightarrow -x-3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$

Ответ. -3. ▲

3. Применение основного логарифмического тождества:

$$\varphi(x)^{\log_{\varphi(x)} f(x)} = g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x).$$

Замечание. При этом преобразовании могут появиться лишние корни.

4. Если уравнение имеет вид $f(a^x) = 0$, то заменой $t = a^x$ оно сводится к уравнению $f(t) = 0$, а далее к решению совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a^x = t_1, \\ \dots\dots\dots \\ a^x = t_k, \end{array}\right.$$

где t_k — все корни уравнения $f(t) = 0$.

Частный случай — *однородные показательные уравнения*, т. е. уравнения вида

$$k_1 \cdot a^{2f(x)} + k_2 \cdot a^{f(x)} \cdot b^{\varphi(x)} + k_3 \cdot b^{2\varphi(x)} = 0,$$

где k_1, k_2, k_3 — числа. Общий метод решения уравнений такого вида состоит в делении обеих его частей на выражение $a^{2f(x)} \neq 0$ (или на $a^{f(x)} \cdot b^{\varphi(x)}$, или на $b^{2\varphi(x)}$) и последующей замене переменной, сводящей его к квадратному уравнению.

Пример 3. Решить уравнение $3 \cdot 2^{2x+1} + 5 \cdot 6^x = 2 \cdot 3^{2x+1}$.

$\triangle$ Запишем уравнение в виде $6 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{2x} = 0$. Разделим уравнение на $3^{2x} \neq 0$: $6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 6 = 0$. Положим $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Получим уравнение $6t^2 + 5t - 6 = 0$. Числа $t_1 = \frac{2}{3}$ и $t_2 = -\frac{3}{2}$ — его корни. Уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -\frac{3}{2}$ решений не имеет, решением уравнения $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$ является $x = 1$.

Ответ. 1. ▲

5. Если уравнение содержит члены вида $f(x)^{g(x)}$, то можно воспользоваться тем, что по определению $f(x)^{g(x)} = 10^{g(x) \cdot \lg f(x)}$, при этом обе функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и $f(x) > 0$.

Замечание. *Степенно-показательное выражение* $f(x)^{\varphi(x)}$ определено, если:

1) $f(x) > 0$ и $\varphi(x)$ существует;
2) $f(x) = 0$, а $\varphi(x) > 0$ (в этом случае $f(x)^{\varphi(x)} = 0$ по определению степени с рациональным или иррациональным показателем).

При решении показательных и логарифмических уравнений часто применяются следующие преобразования:

потенцирование — переход от уравнения $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x);$$

логарифмирование – переход от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftarrow \quad \log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x).$$

Замечание. При потенцировании могут появиться лишние корни, а логарифмирование может привести к потере корней.

Пример 4. Решить уравнение $5^x \cdot 2^{\frac{2+x}{x}} = 40$.

$\triangle$ Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$$x \log_2 5 + \frac{2+x}{x} = \log_2 40 \quad \text{или} \quad x \log_2 5 + \frac{2+x}{x} = 3 + \log_2 5.$$

Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то, умножив на x, получаем равносильное уравнение

$$x^2 \log_2 5 + 2 + x = 3x + x \log_2 5 \quad \text{или} \quad x^2 \log_2 5 - (2 + \log_2 5)\, x + 2 = 0.$$

Последнее уравнение является обычным квадратным уравнением относительно x. Его дискриминант

$$D = (2+\log_2 5)^2 - 8\log_2 5 =$$
$$= 4 + 4\log_2 5 + \log_2^2 5 - 8\log_2 5 = 4 - 4\log_2 5 + \log_2^2 5 = (2-\log_2 5)^2.$$

Так как $2 - \log_2 5 < 0$, то $\sqrt{D} = \log_2 5 - 2$. Тогда $x_1 = \dfrac{2+\log_2 5+\log_2 5-2}{2\log_2 5} = 1$, $x_2 = \dfrac{2+\log_2 5-\log_2 5+2}{2\log_2 5} = \dfrac{2}{\log_2 5} = 2\log_5 2 = \log_5 4$.

Ответ. $\log_5 4$; 1. ▲

Пример 5. При каких значениях параметра p уравнение $|2^x - p| = 4$ имеет единственное решение?

△ Полагая $2^x = y$, где $y > 0$, получим

$$|y-p| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-p>0, \\ y = 4+p, \\ y>0, \end{cases} \\ \begin{cases} y-p<0, \\ y = p-4, \\ y>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4+p>p, \\ y = p+4, \\ p+4>0, \end{cases} \\ \begin{cases} p-4<p, \\ y = p-4, \\ p-4>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4>0, \\ y = p+4, \\ p>-4, \end{cases} \\ \begin{cases} -4<0, \\ y = p-4, \\ p>4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система имеет решение при $p > -4$. Вторая — при $p > 4$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение, если имеет решение только первая система совокупности.

Ответ. $-4 < p \leqslant 4$. ▲

Пример 6. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}.$$

△ Произведя замену $y = 4^{x-2}$, где $y > 0$, получим линейное уравнение

$$3y + 27 = a(1+y) \quad \text{или} \quad (a-3)y = 27 - a.$$

При $a = 3$ это уравнение не имеет решений. Если $a \neq 3$, то $y = \dfrac{27-a}{a-3}$. Из условия $y > 0$ следует неравенство $\dfrac{27-a}{a-3} > 0$, которое справедливо при $a \in (3; 27)$. При этих значениях a из уравнения $4^{x-2} = \dfrac{27-a}{a-3}$ находим $x = \log_4 \dfrac{27-a}{a-3} + 2$.

Ответ. Если $a \in (3; 27)$, то $x = \log_4 \dfrac{27-a}{a-3} + 2$; если $a \notin (3; 27)$, то решений нет. ▲

Задачи

Решить уравнения (**1–38**):

1. $25^{|1-2x|}=5^{4-6x}$.

2. $4^{\sqrt{x+1}}+4^{\sqrt{x+1}-1}=4^{\sqrt{x+1}+1}-11$.

3. $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.

4. $2^x+3^{x-2}=3^x-2^{x+1}$.

5. $9^x-12\cdot 3^x+27=0$.

6. $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0$.

7. $7^{x+6}\cdot 3^{x+6}=7^{3x}\cdot 3^{3x}$.

8. $13^{x+4}\cdot 5^{x+4}=5^{3x}\cdot 13^{3x}$.

9. $27^x+3^{x+4}=82\cdot 9^x$.

10. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$.

11. $\left(\frac{1}{12}\right)^{x-2}=3^{2x}\cdot 2^{4x}$.

12. $22^{1-2x}=2^{3x}\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^{-3x}$.

13. $2^x+10=36\cdot 2^{2-x}$.

14. $\dfrac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{0{,}04^x}{25}$.

15. $4^{x+8}-10\cdot 2^{x+7}-24=0$.

16. $4^x-3\cdot 2^x+3\sqrt{2}=2$.

17. $9^x+6^x=2^{2x+1}$.

18. $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0$.

19. $4\cdot 16^x=7\cdot 9^x-3\cdot 12^x$.

20. $5\cdot 36^x-3\cdot 25^x=2\cdot 30^x$.

21. $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

22. $(0{,}6)^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

23. $x^{\log_3 x}=81x^3$.

24. $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

25. $3^x=2^{x^2}$.

26. $3^{\log_2(-2x)}=5^{\log_2 3}$.

27. $2^{|x-2|}-2^{|x|}=\sqrt{2}$.

28. $2^{|x+2|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}$.

29*. $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$.

30. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$.

31. $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$.

32. $3^{2x^2}-2\cdot 3^{x^2+x+6}+3^{2(x+6)}=0$.

33. $5^{2x^2+5}-3\cdot 5^{(x+1)(x+2)}-10\cdot 5^{6x-1}=0$.

34. $2^{2x^2-2}+7\cdot 2^{(x+7)(x-1)}-8\cdot 2^{12(x-1)}=0$.

35. $8\left(4^x+4^{-x}\right)-54\left(2^x+2^{-x}\right)+101=0$.

36. $3^x+4^x=25$.

37. $6^x-4^x=152$.

38*. $3^{x^2+\frac{81}{x^2}-17}=-6-6x-x^2$.

Найти значения параметра a, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение (**39–43**):

39. $2^{|x|+a}-2^{|x|}=5$.

40. $2^x+2^{2-x}=a$.

41. $|2^x-a|=3$.

42. $(a+1)\cdot 4^x+4\cdot 2^x+a-2=0$.

43. $(a-1)\cdot 4^x-4\cdot 6^x+(a+2)\cdot 9^x=0$.

44. Найти все значения параметра p, при которых не имеют решения уравнения:

1) $(p-4)\cdot 9^x+(p+1)\cdot 3^x+2p-1=0$; 2) $(10-p)\cdot 5^{2x+1}-2\cdot 5^{x+1}+6-p=0$.

45. При каком значении параметра p уравнение $p\cdot 2^x+2^{-x}=5$ имеет единственное решение?

46. При всех допустимых значениях параметра a решить уравнения:

1) $a^2-9^{x+1}-8\cdot 3^x\cdot a=0$; 2) $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0$;

3) $3\cdot 4^{x-2}+27=a+a\cdot 4^{x-2}$.

Ответы

1. $\frac{3}{5}$. **2.** 0. **3.** -1. **4.** 3. **5.** 1; 2. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 2. **9.** 0; 4. **10.** $\pm\sqrt{2},\pm 1$. **11.** $\frac{2}{3}$. **12.** $\frac{1}{5}$. **13.** 3. **14.** -1. **15.** -5. **16.** $\frac{1}{2}$, $\log_2(3-\sqrt{2})$. **17.** 0. **18.** -2. **19.** 0. **20.** 0. **21.** 10. **22.** 3; $-2{,}5$. **23.** $\frac{1}{3}$; 81. **24.** 1; 4.

25. 0; $\log_2 3$. **26.** $-2{,}5$. **27.** 0,5. **28.** -2. **29.** ± 3. Указание. Так как $\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}=1$, то можно сделать замену $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=t$. **30.** ± 2. **31.** 1; 2. **32.** -2; 3. **33.** 1; 2. **34.** 1; 5. **35.** ± 2; ± 1. **36.** 2. **37.** 3. **38.** -3. Указание. Воспользоваться ограниченностью левой и правой частей уравнения. **39.** $0<a\leqslant\log_2 6$. **40.** $a\geqslant 4$. **41.** $a>-3$. **42.** $-2\leqslant a<2$. **43.** $-2<a\leqslant 2$. **44.** 1) $p\in(-\infty;\frac{3}{7})\cup[4;+\infty)$; 2) $p\in(-\infty;5)\cup[10;+\infty)$. **45.** $p\leqslant 0$, $p=\frac{25}{4}$. **46.** 1) Если $a=0$, то решений нет; если $a<0$, то $x=\log_3(-a)$; если $a>0$, то $x=\log_3 a-2$; 2) если $a\leqslant 0$, то $x_{1,2}=\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$; если $0<a<1$, то $x_{1,2}=\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$, $x_{3,4}=\pm\log_{12}(1-\sqrt{1-a})$; если $a=1$, то $x=0$; если $a>1$, то решений нет; 3) если $a\in(-\infty;3]\cup[27;+\infty)$, то решений нет; если $3<a<27$, то $x=2+\log_4\frac{a-27}{3-a}$.

§ 5. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. *Простейшие логарифмические уравнения* — уравнения двух видов:

$\log_a x=b$, где $a>0, a\neq 1$. Уравнение имеет единственный корень $x=a^b$. В общем случае

$$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b \quad (a>0, a\neq 1);$$

$\log_x A=B$, где $A>0$. Уравнение при $A\neq 1$, $B\neq 0$ имеет единственный корень $x=A^{\frac{1}{B}}$; при $A=1$, $B=0$ имеет решением любое отличное от единицы положительное число; при $A=1$ и $B\neq 0$ решений не имеет.

2. Решение уравнений вида $f(\log_a x)=0, a>0, a\neq 1$, с помощью замены $t=\log_a x$ сводится к решению совокупности следующих уравнений $\log_a x=t_1, \ldots, \log_a x=t_n$, где t_i $(i=1,\ldots,n)$ — все корни уравнения $f(t)=0$.

При решении уравнений вида $f(\log_x A)=0$, $A>0$, используется замена $t=\log_x A$.

3. При решении уравнений вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$, используется любая из приведенных ниже схем:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} f(x)=g(x),\\ g(x)>0\end{cases}$$

или

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} f(x)=g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}$$

Аналогично, для уравнения $\log_{f(x)} A=\log_{g(x)} A$, $A>0$:

$$\log_{f(x)} A=\log_{g(x)} A \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} g(x)>0,\\ g(x)\neq 1,\\ f(x)=g(x)\end{cases}$$

или

$$\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $\log_2(x+2) = \log_2(x^2+x-7)$.
$\triangle$ Из равенства логарифмов следует равенство выражений, стоящих под знаком логарифма: $x+2 = x^2+x-7$. Отсюда $x^2 = 9$, т. е. $x = -3$ или $x = 3$. Проверка: при $x = -3$ левая часть исходного уравнения не имеет смысла; $x = 3$ является его решением.

Ответ. $x = 3$. ▲

4. При решении логарифмических уравнений иногда применяется формула

$$f(x)^{\log_a g(x)} = g(x)^{\log_a f(x)}, \quad \text{где} \quad a > 0,\ a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0.$$

5. Часто используется формула перехода к другому основанию:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = \frac{1}{\log_{f(x)} \varphi(x)}, \quad \text{где} \quad \varphi(x) > 0,\ \varphi(x) \neq 1,\ f(x) > 0,\ f(x) \neq 1.$$

Замечание. Формальное применение этой формулы может привести как к появлению посторонних корней, так и к потере.

6. Имеют место эквивалентности:

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x) \end{cases}$$

или

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$$

Пример 2. Решить уравнение $\log_{x-6}(x-4) = 2$.
$\triangle$ Область определения данного уравнения: $x > 6$, $x - 6 \neq 1$. Для этих значений x уравнение равносильно следующему: $(x-6)^2 = x-4$. Его корни $x_1 = 8$ и $x_2 = 5$. С учетом ограничений получим $x = 8$.

Ответ. 8. ▲

Пример 3. Решить уравнение $\log_3(0{,}5+x) = \log_3 0{,}5 - \log_3 x$.
$\triangle$ Преобразуем уравнение $\log_3(0{,}5+x) + \log_3 x = \log_3 0{,}5$.

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ 0{,}5 + x > 0, \\ \log_3(0{,}5x + x^2) = \log_3 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 0{,}5 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0{,}5.$$

Ответ. 0,5. ▲

Пример 4. Решить уравнение
$$10\cdot\log_{4x}x+21\cdot\log_{16x}x-3\cdot\log_{\frac{x}{2}}x^2=0.$$

Δ Переходя к логарифмам по основанию 2, получим:
$$\frac{10\log_2 x}{\log_2 4x}+\frac{21\log_2 x}{\log_2 16x}-\frac{3\log_2 x^2}{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{10}{2+\log_2 x}+\frac{21}{4+\log_2 x}-\frac{6}{\log_2 x-1}\right)\log_2 x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=0,\\ \dfrac{10}{2+\log_2 x}+\dfrac{21}{4+\log_2 x}-\dfrac{6}{\log_2 x-1}=0.\end{array}\right.$$

Решением первого уравнения является $x=1$. Для решения второго уравнения сделаем замену $t=\log_2 x$. Получим
$$\frac{25t^2+15t-130}{(2+t)(4+t)(t-1)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}5t^2+3t-26=0,\\(2+t)(4+t)(t-1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2,\\t=-2{,}6.\end{array}\right.$$

Выполняя обратную замену, получим $\log_2 x=2$ или $\log_2 x=-2{,}6$, т. е. $x=4$ или $x=2^{-2,6}=\dfrac{1}{4\cdot\sqrt[5]{8}}$.

Ответ. $\dfrac{1}{4\cdot\sqrt[5]{8}}$; 1; 4. ▲

Пример 5. Решить уравнение $(x+1)^{\lg(x+1)}=100(x+1)$.

Δ Первый способ (логарифмирование обеих частей уравнения). Область определения уравнения $x+1>0$, т. е. $x>-1$. Для $x>-1$ обе части уравнения положительны. Логарифмируя их по основанию 10, получим
$$\lg(x+1)\cdot\lg(x+1)=\lg 100+\lg(x+1).$$

Пусть $\lg(x+1)=t$. Полученное уравнение примет вид $t^2-t-2=0$. Его корни $t_1=-1$ и $t_2=2$. Отсюда $\lg(x+1)=-1$, $x=-0{,}9$ или $\lg(x+1)=2$, $x=99$.

Второй способ (применение основного логарифмического тождества). Область определения уравнения $x>-1$, поэтому в силу основного логарифмического тождества $(x+1)=10^{\lg(x+1)}$. Тогда $\left(10^{\lg(x+1)}\right)^{\lg(x+1)}=10^2\cdot10^{\lg(x+1)}$ или $10^{\lg^2(x+1)}=10^{2+\lg(x+1)}$. Отсюда $\lg^2(x+1)=2+\lg(x+1)$. Решениями этого уравнения являются $x=-0{,}9$ и $x=99$.

Ответ. $-0{,}9$; 99. ▲

Задачи

Решить уравнения (1–40):

1. $2^{2\lg x-\lg(6-x)}=1$.
2. $\log_2(1+3\log_2 x)=2$.
3. $\log_3\frac{x+1}{3}=\log_3\frac{x}{2-x}$.
4. $\log_5(x-1)=\log_5\frac{x}{x+1}$.
5. $\log_3\log_4\log_5 x=0$.
6. $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$.
7. $\log_3\left(3+\sqrt{3+x}\right)=\frac{1}{\log_x 3}$.
8. $\log_{2x}\left(\frac{32}{x}-16x\right)=\frac{1}{\log_{56}2x}-3$.
9. $\log_{x+1}2=2$.
10. $\log_{2x-1}13=10$.
11. $\log_2 x\cdot\log_2 2x=\log_2 16x$.
12. $\frac{1}{\log_2(1+x)}+\frac{2\log_{0,25}(3,5-x)}{\log_2(1+x)}=1$.
13. $\log_x(3x^2-x-3)=2$.
14. $2\log_{x-1}(x-3)=1$.
15. $2\log_{5-x}(x+1)=\log_{5-x}(6-2x)$.
16. $\log_{x+1}(x-0.5)=\log_{x-0.5}(x+1)$.
17. $0,5\log_{3x-4}9=\log_{x^2-2x}3$.
18. $\log_{3x}x=\log_{9x}x^3$.
19. $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1$.
20. $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$.
21. $\log_7(6+7^{-x})=1+x$.
22. $\log_{\sqrt5}(4^x-6)-\log_{\sqrt5}(2^x-2)=2$.
23. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$.
24. $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$.
25. $\log_{5x}\frac{5}{x}+\log_5^2 x=1$.
26. $\log_{12}(4^{3x}+3x-9)=3x-x\log_{12}27$.
27. $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$.
28. $3\cdot 49^{\log_x 2}-140\cdot 7^{\log_x 2-1}=7$.
29. $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.
30. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.
31. $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(1-x)^3=25$.
32. $\lg^2 x^3+\lg^3 x^2=1$.
33. $\lg|2x-3|-\lg|3x-2|=1$.
34. $|\log_2(3x-1)-\log_2 3|=|\log_2(5-2x)-1|$.
35. $2\log_x 3+\log_{3x}3+3\log_{9x}3=0$.
36. $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}}2=\log_{\frac{x}{64}}2$.
37. $\sqrt{\log_x\sqrt{2x}}\cdot\log_2 x=-1$.
38. $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5$.
39. $\log_2(5^x-2)\cdot\log_{(5^x-2)}(25^x+4)=\log_2(5^x-2)+\log_2(5^x+3)$.
40. $\log_{2x+1}(5+8x-4x^2)+\log_{5-2x}(1+4x+4x^2)=4$.
41. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$ имеет решение.
42. При каких значениях параметра p имеет единственное решение уравнение $\lg(x^2+2px)=\lg(8x-6p-3)$?
43. Решить уравнение $\log_a x+|a+\log_a x|\cdot\log_{\sqrt{x}}a=a\cdot\log_x a$.
44. Решить уравнение $\sqrt{\log_2\cos\pi x}=5x-4-x^2$.
45. Решить уравнение $\cos\pi x-\log_3(1+x^2)=1$.

Ответы

1. 2. **2.** 2. **3.** $\sqrt3-1$. **4.** $\frac{(1+\sqrt5)}{2}$. **5.** 625. **6.** 16. **7.** 6. **8.** $\frac{\sqrt7}{2}$. **9.** $\sqrt2-1$. **10.** $\frac{1+\sqrt[10]{13}}{2}$. **11.** $\frac14$; 4. **12.** 3; $-0,5$. **13.** 1,5. **14.** 5. **15.** 1. **16.** 1. **17.** 4. **18.** $\frac{1}{\sqrt3}$, 1. **19.** -1; 7. **20.** 2; 3. **21.** 0. **22.** 2. **23.** 4.

24. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 4$. **25.** $\frac{1}{25}; 1; 5$. **26.** 3. **27.** $10^{-\frac{1}{2}}; 100$. **28.** 2. **29.** 100. **30.** $\frac{1}{9}; 9$. **31.** -9; 0,9. **32.** $\frac{1}{10}; 10^{\frac{-1\pm\sqrt{33}}{16}}$. **33.** $\frac{23}{32}; \frac{17}{28}$. **34.** $1; \frac{17}{12}; \frac{11}{6}$. **35.** $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$. **36.** 4; 8. **37.** $\frac{1}{4}$. **38.** $\frac{1}{25}$. **39.** $1+\log_5 2$. **40.** 0,5; 1. **41.** $a>0, a\neq 4^{-\frac{1}{3}}$, $a\neq 1$. **42.** $-\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant -\frac{3}{22}, p=1$. **43.** $a^{-1+\sqrt{1-a}}, a^{1-\sqrt{1+3a}}$ при $0<a<1$; нет решений при $a\leqslant 0$ или $a\geqslant 1$. **44.** 4. **45.** 0.

§ 6. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении показательных и логарифмических неравенств применяются те же методы, что и при решении рациональных и иррациональных неравенств. Часто в неравенствах удается все выражения свести к одному основанию. В этом случае можно использовать следующие схемы.

$a>1$	$0<a<1$
$a^{f(x)}\leqslant a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)\leqslant g(x)$	$a^{f(x)}\leqslant a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)\geqslant g(x)$
$\log_a f(x)\leqslant \log_a g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leqslant g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$	$\log_a f(x)\leqslant \log_a g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{2\cdot 3^{x+3}-5^{x+3}}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<1$.

$\triangle$ Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{2\cdot 3^3\cdot 3^x-5^3\cdot 5^x}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<1 \Leftrightarrow \frac{5^x\left(54\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-125\right)}{5^x\left(5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-3\right)}<1 \Leftrightarrow \frac{54\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-125}{5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x-3}<1.$$

Выполнив замену $t=\left(\frac{3}{5}\right)^x$, получим $\frac{54t-125}{5t-3}<1\Leftrightarrow\frac{49t-122}{5t-3}<0$. Решим последнее неравенство методом интервалов. Функция $f(t)=\frac{49t-122}{5t-3}$ определена для всех t, кроме $t=\frac{3}{5}$, непрерывна на области определения и равна нулю в точке $\frac{122}{49}$. Точки $\frac{3}{5}$ и $\frac{122}{49}$ разбивают числовую прямую на три промежутка, в каждом из которых функция f имеет знак, указанный на рис. 15. Итак, $f(t)<0$ при $\frac{3}{5}<t<\frac{122}{49}$. Теперь решим неравенства $\frac{3}{5}<\left(\frac{3}{5}\right)^x<\frac{122}{49}$. Функция $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ убывающая, поэтому $\frac{3}{5}<\left(\frac{3}{5}\right)^x$ при $x<1$, а $\left(\frac{3}{5}\right)^x<\frac{122}{49}$ при $x>\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{122}{49}\right)$. Значит, все $x\in\left(\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{122}{49}\right); 1\right)$ являются решениями исходного неравенства.

Рис. 15

Ответ. $\left(\log_{\frac{3}{5}}\frac{122}{49}; 1\right)$. ▲

Пример 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} > 1$.

△ Так как функция $\left(\frac{1}{2}\right)^t$ убывающая и $1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$, то получим

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad \log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right) < 0.$$

Функция $\log_3 t$ возрастающая с областью определения $\mathbb{R}_+$ и $0=\log_3 1$. Поэтому последнее неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right) < 1,\\ \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right) > 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2-\frac{4}{5} > \frac{1}{5},\\ 0 < x^2-\frac{4}{5} < 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2 > 1,\\ x^2 < \frac{9}{5}.\end{cases}$$

Далее, $x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$ и $x^2 < \frac{9}{5} \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{\sqrt{5}}$. Решением исходного неравенства будет пересечение множеств $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$, т. е. $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; -1\right) \cup \left(1; \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. При этом было учтено, что $\sqrt{5} < 3$ и, значит, $\frac{3}{\sqrt{5}} > 1$, а $-\frac{3}{\sqrt{5}} < -1$.

Ответ. $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; -1\right) \cup \left(1; \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. ▲

Замечание. При решении неравенств вида $\log_{f(x)} a < b$, где a и b — заданные числа, иногда удобнее перейти к неравенству $\frac{1}{\log_a f(x)} < b$, чем рассматривать два случая: $0 < f(x) < 1$ и $f(x) > 1$.

Пример 3. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$3^{\sqrt{x}} > 2^a.$$

△ Перейдем в неравенстве к одному основанию 2:

$$3^{\sqrt{x}} = 2^{\log_2 3^{\sqrt{x}}}, \text{ поэтому } 2^{\log_2 3^{\sqrt{x}}} > 2^a.$$

Далее логарифмируя, получаем

$$\log_2 3^{\sqrt{x}} > a \Leftrightarrow \sqrt{x}\log_2 3 > a \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{a}{\log_2 3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a < 0,\\ x \geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}a \geqslant 0,\\ x > a^2\log_3^2 2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ. Если $a \geqslant 0$, то $x \in (a^2 \log_3^2 2; +\infty)$; если $a < 0$, то $x \in [0; +\infty)$. ▲

Пример 4. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\log_a(x-2) + \log_a x > 1.$$

△ В соответствии с определением логарифмической функции, $a > 0, a \neq 1$, $x > 2$. Следовательно, при этих условиях

$$\log_a(x-2) + \log_a x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x(x-2) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x^2 - 2x > a, \\ x > 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x^2 - 2x < a, \\ x > 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. Если $a \leqslant 0$, $a = 1$, то решений нет; если $0 < a < 1$, то $x \in (2; 1 + \sqrt{1+a})$; если $a > 1$, то $x \in (1 + \sqrt{1+a}; +\infty)$. ▲

Задачи

Решить неравенства (1–58):

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}} \geqslant 3^{2+x}$.

2. $27^{\frac{1}{(x-1)}} \leqslant 3^{-\frac{x}{2}}$.

3. $\left(\frac{15}{14}\right)^{x+7} > \left(\frac{15}{14}\right)^{x^2-3x+2}$.

4. $5^{1-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} < 4{,}8$.

5. $5^{x+2} + 5^{x+1} \geqslant 6$.

6. $5^{\frac{x+2}{3-x}} > 25$.

7. $9^x - 2^{x+0{,}5} > 2^{x+3{,}5} - 3^{2x-1}$.

8. $9 \cdot 3^{2x+2} + 3 \cdot 3^{2x+1} - 9^x \leqslant 89$.

9. $\log_2(x+1) > -\log_2 3$.

10. $\log_{\frac{1}{2}}(x+4) < \log_2\left(\frac{1}{3}\right)$.

11. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{x+1} < -\log_3(3-x)$.

12. $\log_{\frac{5}{16}} \frac{x-1}{2} \geqslant \log_6(4-x)$.

13. $\log_6(x - 3\sqrt{x} + 2) < 1$.

14. $\log_3 \frac{x^2-4x+3}{x^2-x+5} \geqslant 0$.

15. $\log_2 \frac{4-3x}{x} > 0$.

16. $\log_{0,3} \frac{2+3x}{x} < 0$.

17. $\log_3(3x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(5x-4) > 0$.

18. $2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \log_2(x^2-x+2) \geqslant 1$.

19. $\frac{2}{\log_3(x^2-16)} \geqslant 1$.

20. $\frac{1}{\log_2(5-x^2)} \leqslant \frac{1}{2}$.

21. $\log_2^2 x + 3\log_2 x \leqslant 5\log_2 \sqrt[5]{16}$.

22. $\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 1$.

23. $\log_x^2 169 - \log_x 13 - 3 \geqslant 0$.

24. $\log_x^2 9 + 2\log_x 3 - 6 \geqslant 0$.

25. $16^x - 2 \cdot 12^x \leqslant 3^{2x+1}$.

26. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

27. $3^{x+2} \cdot 2^{1-2x} \leqslant 20$.

28. $12^{x-2} \leqslant 3^{3x} \cdot 2^{6x}$.

29. $3^{x-1} \geqslant \frac{2-3^x}{3^x-4}$.

30. $4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leqslant 0$.

31. $81^x + 3^{2x-1} > 84.$

32. $\log_{2x} 5 > \log_{3x+1} 5.$

33. $2^{1+\log_3 x} + 2^{1-\log_3 x} \leqslant 5.$

34. $7^{2x} - 33 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^x - 14 \cdot 5^{1-2x} \leqslant 0.$

35. $4^x - 101 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \cdot 25^{1-x} \geqslant 0.$

36. $0{,}64 \leqslant \sqrt{0{,}8^{x(x-3)}}.$

37. $x^2 \cdot 2^{x+2} - 12x^2 \cdot 3^x + 3^{x+1} > 2^x.$

38. $4^x \cdot 5^{\frac{3x-4}{x-3}} \geqslant 10.$

39. $3^x \geqslant 2^{x^2}.$

40. $x^{\lg x} \geqslant 10000.$

41. $|2^x - 1| + x \geqslant x \cdot 2^x.$

42. $\left|\dfrac{\log_2 x - 1}{\log_2 x - 5}\right| \leqslant 1.$

43. $\left|\dfrac{\log_2 x - 2}{\log_2 x - 4}\right| \leqslant 1.$

44. $\log_{|x+3|-4} 6 \geqslant 1.$

45. $\log_{|x+1|-3} 5 \leqslant 1.$

46. $|\log_2(\frac{x}{4})| > |\log_2 x|.$

47. $\log^2_{\frac{1}{2}} x - |\log_2 x| - 2 < 0.$

48. $\sqrt{\log_3 \dfrac{2x-1}{1-x}} < 1.$

49. $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1-2x)} \geqslant 0.$

50. $\dfrac{1 - \log_{0,5}(-x)}{\sqrt{2-6x}} < 0.$

51. $\sqrt{x^2-6x+9}\,\log_2 x > \sqrt{9-6x+x^2}.$

52. $\log_3(\log_2(2 - \log_4 x) - 1) < 1.$

53. $\log_{0,1} \log_2 \dfrac{x^2+1}{|x-1|} < 0.$

54. $\log_2(2^x+1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}+2) > -2.$

55. $\log_{\frac{1}{2}}(2^x - 7) < x - 3.$

56. $||2^x + x - 2| - 1| > 2^x - x - 1.$

57. $||3^x + 4x - 9| - 8| \leqslant 3^x - 4x - 1.$

58. $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant (\sqrt{5}+2)^{\frac{x-1}{x+1}}.$

59. Определить, при каких значениях параметра a имеет решение неравенство:

1) $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$; 2) $a^{x^2-2x} + a^{2x-x^2} \leqslant 4.$

60. Определить, при каких значениях параметра a имеет решение неравенство:

1) $\log_a(1+x) > \log_{a^2}(1+x)$; 2) $\log_a(x^2+2x+2) < 0.$

61. Найти значения параметра a, при которых неравенство выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$:

1) $a \cdot 9^x + 4(a-1)3^x + a > 1$; 2) $4^{x^2} + 2(2a+1)2^{x^2} + 4a^2 - 3 > 0.$

62. Найти значения параметра a, при которых неравенство выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$:

1) $\log_a(x^2+2) > 1$; 2) $\log_{a(a+1)}(|x|+4) > 1$;

3) $\log_{\frac{a}{(a+1)}}(x^2+2) > 1$; 4) $\log_{(a^2-1)}(a^2x^2+2ax+4) > 1.$

63. Для каждого значения параметра a решить данные неравенства:

1) $a^{x^2-x} > 1$; 2) $\log_a(1+x) > 1$; 3) $\log_a(x^2+2x) > 0$;

4) $\log_a(x^2+2x) < 1.$

Ответы

1. $(-\infty;0)$. **2.** $(-\infty;1)$. **3.** $(-1;5)$. **4.** $(0;+\infty)$. **6.** $[-1;+\infty)$. **7.** $\left(\frac{4}{3};3\right)$. **7.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **8.** $(-\infty;0]$. **9.** $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$. **10.** $(-1;+\infty)$. **11.** $(-1;0)\cup(2;3)$. **12.** $(1;2] \cup [3;4)$. **13.** $[0;1) \cup (4;16)$. **14.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$. **15.** $(0;1)$.

16. $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **17.** $(0{,}8;1{,}5)$. **18.** $(2;6]$. **19.** $[-5;-\sqrt{17})\cup(\sqrt{17};5]$. **20.** $(-\sqrt{5};-2)\cup[-1;1]\cup(2;\sqrt{5})$. **21.** $\left[\frac{1}{16};2\right]$. **22.** $(1;10)$. **23.** $\left[13^{-\frac{4}{3}};1\right)\cup(1;13]$. **24.** $[3^{-\frac{2}{3}};1)\cup(1;3]$. **25.** $(-\infty;\log_{\frac{4}{3}}3]$. **26.** $(-\infty;\log_{0,4}2)$. **27.** $\left[\log_{\frac{4}{3}}0{,}9;+\infty\right)$. **28.** $[-1;+\infty)$. **29.** $(-\infty;1]\cup(\log_3 4;+\infty)$. **30.** $(-\infty;0)\cup[\log_5 4;+\infty)$. **31.** $(1;+\infty)$. **32.** $(0{,}5;+\infty)$. **33.** $\left[\frac{1}{3};3\right]$. **34.** $(-\infty;1]$. **35.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. **36.** $[-1;4]$. **37.** $(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3)\cup(-0{,}5;0{,}5)$. **38.** $[0{,}5;\log_2 1{,}6]\cup(3;+\infty)$. **39.** $[0;\log_2 3]$. **40.** $(0;0{,}01]\cup[100;+\infty)$. **41.** $[-1;1]$. **42.** $(0;8]$. **42.** $(0;8]$. **44.** $[-13;-8)\cup(2;7]$. **45.** $(-\infty;-9]\cup(-5;-4)\cup(2;3)\cup[7;+\infty)$. **46.** $(0;2)$. **47.** $\left(\frac{1}{4};4\right)$. **48.** $\left[\frac{2}{3};\frac{4}{5}\right)$. **49.** $\left[0;\frac{1}{2}\right)$. **50.** $(-0{,}5;0)$. **51.** $(2;3)\cup(3;+\infty)$. **52.** $(2^{-28};1)$. **53.** $(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2};1)\cup(1;+\infty)$. **54.** $(-\infty;0)$. **55.** $(3;+\infty)$. **56.** $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. **57.** 0; 2. **58.** $(-1;0]\cup[1;+\infty)$. **59.** 1) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 2) $(0;+\infty)$. **60.** 1) $(0;1)\cup(1;+\infty)$; 2) $(0;1)$. **61.** 1) $a\geqslant 1$; 2) $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **62.** 1) $(1;2)$; 2) $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$; 3) $(-\infty;-2)$; 4) $(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)$. **63.** 1) Если $a\leqslant 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x\in(0;1)$; если $a>1$, то $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; 2) если $a\leqslant 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x\in(-1;a-1)$; если $a>1$, то $x>a-1$; 3) если $a\leqslant 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x\in(-1-\sqrt{2};-2)\cup(0;-1+\sqrt{2})$; если $a>1$, то $x\in(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2};+\infty)$; 4) если $a\leqslant 0$ или $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $x\in(-\infty;-1-\sqrt{1+a})\cup(-1+\sqrt{1+a};+\infty)$; если $a>1$, то $x\in(-1-\sqrt{1+a};-2)\cup(0;-1+\sqrt{1+a})$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Этот учебник является частью учебно-методического комплекта для преподавания математики в старших классах физико-математического и естественно-научных профилей.
Комплект включает в себя:

- учебник для 10 класса
- учебник для 11 класса
- методическое пособие и дидактические материалы для 10 класса
- методическое пособие и дидактические материалы для 11 класса
- задачник для 10–11 классов

Шабунин Михаил Иванович — доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики МФТИ, автор свыше двухсот научных и учебно-методических работ, один из авторов учебников алгебры для 7–11 классов средней школы, учебников и сборников задач по математическому анализу и теории функций комплексного переменного для студентов вузов, автор многих пособий для абитуриентов.

Заслуженный работник высшей школы РФ, лауреат премии Правительства Российской Федерации в области образования за 2002 год, член Научно-методического Совета по математике Министерства образования и науки РФ, заслуженный профессор МФТИ.

Прокофьев Александр Александрович — доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики МИЭТ, преподаватель математики Физико-математического лицея №1557 Зеленоградского округа г. Москвы, учитель высшей категории.

Автор более 40 книг, в том числе монографий, учебных и методических пособий по математике для школьников и студентов. Область научных интересов связана с разноуровневыми и вариативными моделями математического образования в средней и высшей школе.

ISBN 978-5-94774-452-1
9 785947 744521