Metody Optymalizacji
Lista 1

Dominik Kaczmarek, nr albumu 261757

8 kwietnia 2024

1 Zadanie

1.1 Model

Jednym z testów na dokładność i odporność algorytmów LP jest następujące zagadnienie:

$$\min \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

Przy warunkach:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},$$

gdzie:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Rozwiązaniem tego zagadnienia jest $\mathbf{x}_i = 1$, dla $i = 1, \ldots, n$. Macierz $\mathbf{A}$ występująca w tym teście, zwana macierzą Hilberta, powoduje złe uwarunkowanie zagadnienia nawet dla niezbyt dużych n.

1.2 Wyniki

Zapisałem powyższy problem w `GNU MathProg` i rozwiązałem go przy użyciu `glpsol` dla różnych n. W poniższych tabelach znajdują się wartości x_i, $i = 1, \ldots, n$ oraz błędy względne dla $n \in \{6, 7, 8\}$. Na ich podstawie można zauważyć, że dla $n \in \{6, 7\}$ wartości x_i są bardzo bliskie 1 przez co błąd względny jest mały, natomiast dla $n = 8$ błąd znacząco rośnie, a wyniki są dalekie od prawidłowego rozwiązania.

Tabela 1: Wektory $\mathbf{x}$ dla $n \in \{6, 7, 8\}$

$x_i \mid n$	6	7	8
x_1	0.99999999999970268227	0.99999999998907596055	1.00006342862546393491
x_2	1.00000000000747224504	1.00000000043793324522	0.99650349685098649211
x_3	0.99999999995450583601	0.99999999576632747633	1.04662004362886662534
x_4	1.00000000010850187415	1.00000001650268433018	0.74358975321532527758
x_5	0.99999999988858667699	0.99999996968299931233	1.69930068760698382846
x_6	1.00000000004129940834	1.00000002624071915314	0.00000000000000000000
x_7	–	0.99999999137219774958	1.71794872780273988333
x_8	–	–	0.79591836220564482485

Tabela 2: Błąd względny dla $n \in \{6, 7, 8\}$

	Błąd wzgl.
6	$6.83336e-11$
7	$1.67869e-08$
8	0.514059

2 Zadanie

2.1 Opis problemu

Pewna firma zajmuje się wypożyczaniem camperów w środkowej Europie. Zakres jej działalności obejmuje Polskę oraz sąsiednie kraje. Co jakiś czas pojawia się naturalny problem niedoboru lub nadmiaru camperów (dwa rodzaje zależne od komfortu: Standard i VIP) w miastach, gdzie zlokalizowane są przedstawicielstwa firmy (punkty wypożyczania camperów). Poniżej tabela opisuje problem nadmiaru i niedoboru:

Miasta	Niedobór Standard	Niedobór VIP	Nadmiar Standard	Nadmiar VIP
Warszawa	–	4	14	–
Gdańsk	20	–	–	2
Szczecin	–	–	12	4
Wrocław	8	–	–	10
Kraków	–	8	10	–
Berlin	16	4	–	–
Rostok	2	–	–	4
Lipsk	3	–	–	10
Praga	–	4	10	–
Brno	9	–	–	2
Bratysława	4	–	–	8
Koszyce	4	–	–	4
Budapeszt	8	–	–	4
Razem	74	20	46	48

Należy ustalić plan przemieszczania camperów przy minimalizacji kosztów transportu, jeśli:

- koszt przemieszczenia campera Standard jest proporcjonalny do odległości,
- koszt przemieszczenia campera VIP jest o 15% wyższy niż campera Standard,
- camper Standard może być zastąpiony przez camper VIP. Natomiast camper VIP nie może zastąpić campera Standard.

2.2 Model

2.2.1 Parametry

- n - liczba miast z siedzibą firmy,
- a_i - nadmiar camperów typu Standard w mieście i,
- b_i - nadmiar camperów typu VIP w mieście i,
- α_i - niedobór camperów typu Standard w mieście i,
- β_i - niedobór camperów typu VIP w mieście i,
- s - koszt przewiezienia jednego campera Standard za 1 km,
- v - koszt przewiezienia jednego campera VIP za 1 km,
- d_{ij} - długość trasy między miastem i a miastem j w km.

2.2.2 Zmienne decyzyjne

- $x_{ij} \geqslant 0$ - liczba camperów Standard przewożonych z miasta i do miasta j,
- $y_{ij} \geqslant 0$ - liczba camperów VIP przewożonych z miasta i do miasta j.

2.2.3 Funkcja celu

Minimalizacja kosztu przemieszczenia camperów:

$$\min \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} d_{ij}(sx_{ij} + vy_{ij})$$

2.2.4 Ograniczenia

1. Nie wysyłaj więcej camperów z miasta i niż wynosi jego nadmiar:

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad \forall_{i=1,\dots,n}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j}^{n} y_{ij} \leqslant b_i, \quad \forall_{i=1,\dots,n}$$

2. Wypełnij deficyt camperów w każdym mieście (z założeniem, że VIP może zastąpić Standard):

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i}^{n} x_{ij} + y_{ij} \geqslant \alpha_i, \quad \forall_{j=1,\dots,n}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i}^{n} y_{ij} \geqslant \beta_i, \quad \forall_{j=1,\dots,n}$$

3. Suma camperów typu VIP i typu Standard dostarczonych do miasta i musi być większa lub równa sumie deficytów w tym mieście:

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i}^{n} x_{ij} + y_{ij} \geqslant \alpha_i + \beta_i, \quad \forall_{j=1,\dots,n}$$

2.3 Wyniki

Przyjęte przeze mnie koszty transportu camperów typu Standard i VIP na jednym kilometrze wynoszą:

$$s = 1.0$$
$$v = s \cdot 1.15 = 1.15$$

2.3.1 Plan przemieszczenia camperów

Tabela 3: Plan przemieszczenia camperów. (Standard / VIP)

i | j	**War.**	**Gd.**	**Szcz.**	**Wroc.**	**Kr.**	**Ber.**	**Ros.**	**Lipsk**	**Praga**	**Brno**	**Brat.**	**Kosz.**	**Bud.**
War.	-	14/0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Gdańsk	-	0/2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Szczecin	-	4/0	-	-	-	8/4	-	-	-	-	-	-	-
Wrocław	0/4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kraków	-	-	-	6/0	-	-	-	-	-	-	4/0	-	-
Berlin	-	-	-	-	-	-	0/2	-	3/0	-	-	-	-
Rostok	-	-	-	-	-	0/2	0/2	-	-	-	-	-	-
Lipsk	-	-	-	-	-	0/3	-	0/3	-	-	-	-	-
Praga	-	-	-	-	-	3/0	-	-	-	7/0	-	-	-
Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/2	-	-	-
Brat.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/4	-	0/4
Koszyce	-	-	-	-	0/4	-	-	-	-	-	-	-	-
Budap.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/4

2.3.2 Wynik funkcji celu

Najniższy koszt przemieszczenia camperów jaki możemy uzyskać, spełniając zadane ograniczenia to: **20595.8**.

2.3.3 Całkowitoliczbowość

W tym zadaniu założenie całkowitoliczbowości **nie** jest wymagane.

3 Zadanie

3.1 Opis problemu

Przedsiębiorstwo produkuje cztery mieszanki - produkty końcowe (patrz schemat). Dwa z tych produktów są produktami podstawowymi, powstającymi jako mieszanki trzech surowców. Poniższa tabela pokazuje, w jaki sposób surowce te mają być wymieszane, a także zawiera ceny zbytu produktów podstawowych (zakładamy, że firma może sprzedać takie ilości wszystkich produktów, jakie wytworzy, nie zmieniając cen):

Produkt	Specyfikacja	Cena za 1 kg
A	co najmniej 20% surowca 1 co najmniej 40% surowca 2 nie więcej niż 10% surowca 3	\$3
B	co najmniej 10% surowca 1 nie więcej niż 30% surowca 3	\$2.5

W celu zagwarantowania terminowych dostaw surowców przedsiębiorstwo zgodziło się na to, że w każdym wypadku w rozpatrywanym okresie planowania zakupi pewne minimalne ilości tych surowców. Natomiast fizyczne uwarunkowania urządzeń produkcyjnych ograniczają z góry ilość każdego z surowców, jaką przedsiębiorstwo może w tym okresie przetworzyć. Oba rodzaje ograniczeń, jak i jednostkowe ceny surowców podane są w poniższej tabeli:

Surowiec	Minimum (kg)	Maksimum (kg)	Koszt za 1 kg (\$)
1	2000	6000	2.1
2	3000	5000	1.6
3	4000	7000	1.0

Z samej natury procesu produkcji wynika fakt, że tylko pewna część każdego z surowców użytych do produkcji produktów podstawowych wchodzi bezpośrednio do tych produktów. Reszta (odpady), których ilość wyraża się każdorazowo poprzez znany współczynnik strat (patrz poniższa tabela), może być albo użyta ponownie - do produkcji produktów C i D - albo zniszczona na koszt firmy.

Surowiec	Produkt A	Produkt B
1	0.1	0.2
2	0.2	0.2
3	0.4	0.5

Drugorzędny produkt C otrzymuje się poprzez wymieszanie dowolnych ilości odpadów z surowców 1, 2, 3 otrzymanych przy wyrobie produktu A z oryginalnym surowcem 1, przy czym ten ostatni musi stanowić (wagowo) dokładnie 20% mieszanki. Podobnie, drugorzędny produkt D otrzymuje się poprzez wymieszanie dowolnych ilości odpadów z surowców 1, 2, 3 otrzymanych przy wyrobie produktu B z oryginalnym surowcem 2, przy czym ten ostatni musi stanowić (wagowo) dokładnie 30% mieszanki. Przy produkcji produktów drugorzędnych nie powstają żadne odpady. Ceny rynkowe (za 1 kg) produktów C i D wynoszą odpowiednio 0.6\$ i 0.5\$.

Poniższa tabela zawiera koszty zniszczenia odpadów nie użytych do produkcji produktów drugorzędnych. Ceny te są różne w zależności od pochodzenia odpadów (kombinacja surowców/produkt podstawowy), ponieważ odpady z różnych procesów produkcyjnych mają różne właściwości chemiczne:

Surowiec	Produkt A ($/kg)	Produkt B ($/kg)
1	0.1	0.05
2	0.1	0.05
3	0.2	0.40

Przedsiębiorstwo chce znaleźć odpowiedź na następujące pytania:

- Ile zakupić surowców 1, 2 i 3?
- Jaką część każdego z surowców przeznaczyć do produkcji jakiego produktu (A, B, C i D)?
- Jaką część odpadów z produkcji produktów A i B zniszczyć, a jaką przeznaczyć do produkcji produktów drugorzędnych?

3.2 Model

3.2.1 Parametry

- S - zbiór surowców,
- P - zbiór wszystkich produktów,
- $P1 \subseteq P$ - zbiór produktów pierwszej klasy,
- $P2 \subseteq P$ - zbiór produktów drugiej klasy,
- α_i - minimalna ilość zakupu surowca $i \in S$,
- β_i - maksymalna ilość zakupu surowca $i \in S$,
- k_i - koszt zakupu 1 kg surowca $i \in S$,
- v_j - cena sprzedaży 1 kg produktu $j \in P$,
- u_{ij} - koszt utylizacji 1 kg odpadu surowca $i \in S$ z produktu $j \in P1$,
- g_{ij} - procent produkcji odpadu surowca i w produkcie $j \in P1$.
- max_{ij}: maksymalny wkład surowca i w produkt j.
- min_{ij}: minimalny wkład surowca i w produkt j.

3.2.2 Zmienne decyzyjne

- s_i - ilość zakupionego surowca $i \in S$,
- $w_{i,j}$ - ilość surowca $i \in S$ wykorzystanego do produkcji produktu $j \in P$,
- m_j - masa wszystkich surowców wykorzystanych do produkcji produktu $j \in P$,
- o_{ij} - ilość odpadów surowca $i \in S$ wyprodukowanych podczas produkcji produktu $j \in P1$,
- zij - ilość zutylizowanych odpadów surowca i wyprodukowanych podczas produkcji produktu j,
- rij - ilość wykorzystanych odpadów surowca $i \in S$ uzyskanych podczas produkcji produktu $j \in P1$,
- p_j - ilość wyprodukowanego produktu $j \in P$,
- Z - suma wartości sprzedaży wszystkich produktów,
- U - koszt utylizacji odpadów,
- K - koszt zakupu surowców.

3.2.3 Funkcja celu

Maksymalizacja zysku ze sprzedaży wyprodukowanych produktów z uwzględnieniem kosztów poniesionych przy zakupie surowców i utylizacji odpadów:

$$\max\ (Z - U - K)$$

3.2.4 Ograniczenia

1. Ograniczenia dotyczące zakupu surowców:

$$\text{s.t.}\quad \alpha_i \leqslant s_i \leqslant \beta_i, \quad \forall_{i \in S}$$

2. Ograniczenia dotyczące alokacji surowców:

$$\text{s.t.}\quad s_i = \sum_{j \in P} w_{i,j}, \quad \forall_{i \in S}$$

3. Ograniczenia dotyczące mieszania surowców w produkcji produktów pierwszej klasy:

$$\text{s.t.}\quad m_j = \sum_{i \in S} w_{i,j}, \quad \forall_{j \in P1}$$

4. Ograniczenie dotyczące ilości produktu 'C':

$$\text{s.t.}\quad m_C = w_{1,C} + \sum_{i \in S}(r_{i,A}),$$

5. Ograniczenie dotyczące ilości produktu 'D':

$$\text{s.t.}\quad m_D = w_{2,D} + \sum_{i \in S}(r_{i,B}),$$

6. Ograniczenia dotyczące alokacji odpadów:

$$\text{s.t.}\quad o_{i,j} = z_{i,j} + r_{i,j}, \quad \forall_{i \in S}, \forall_{j \in P1}$$

7. Ograniczenia dotyczące minimalnego zużycia surowców na produkt:

$$\text{s.t.}\quad w_{i,j} \geqslant min_{ij} \cdot m_j, \quad \forall_{i \in S}, \forall_{j \in P}$$

8. Ograniczenia dotyczące maksymalnego zużycia surowców na produkt:

$$\text{s.t.}\quad w_{i,j} \leqslant max_{ij} \cdot m_j, \quad \forall_{i \in S}, \forall_{j \in P}$$

9. Ograniczenia dotyczące produkcji produktów pierwszej kategorii:

$$\text{s.t.}\quad m_j = p_j + \sum_{i \in S} o_j, \quad \forall_{j \in P1}$$

10. Ograniczenia dotyczące produkcji odpadów:

$$\text{s.t.}\quad o_{ij} = w_{ij} g_{ij}, \quad \forall_{i \in S}, \forall_{j \in P1}$$

11. Ograniczenia dotyczące produkcji produktów drugiej kategorii:

$$\text{s.t.}\quad p_j = m_j, \quad \forall_{j \in P2}$$

12. Całkowity koszt utylizacji odpadów:

$$\text{s.t.}\quad U = \sum_{i \in S} \sum_{j \in P1} z_{ij} u_{ij}$$

13. Zysk ze sprzedaży produktów:

$$\text{s.t.}\quad Z = \sum_{j \in P} p_j v_j$$

14. Całkowity koszt zakupu wszystkich surowców:

$$\text{s.t.}\quad K = sum_{i \in S} s_i k_i$$

3.3 Wyniki

3.3.1 Ilość zakupionych surowców

- Ilość zakupionego surowca 1: **6000** kg
- Ilość zakupionego surowca 2: **5000** kg
- Ilość zakupionego surowca 3: **4000** kg

3.3.2 Podział surowców do produkcji

Tabela 4: Podział surowców do produkcji

Produkt	**Surowiec 1**	**Surowiec 2**	**Surowiec 3**
A	1175.09	940.07	235.02
B	4725.03	4059.93	3764.98
C	99.88	0	0
D	0	0	0

3.3.3 Utylizacja i użycie odpadów

Tabela 5: Zutylizowane odpady

Surowiec/Produkt	**Produkt 1**	**Produkt 2**
Surowiec 1	0	945.01
Surowiec 2	0	812.00
Surowiec 3	0	1882.49

Tabela 6: Zużyte odpady

Surowiec/Produkt	**Produkt 1**	**Produkt 2**
Surowiec 1	117.51	0
Surowiec 2	188.01	0
Surowiec 3	94.01	0

3.3.4 Zyski i koszty

- Profit: **2986.886016**
- Sprzedaz produktow: 28427.732080
- Koszt utylizacji: 840.846063
- Koszt surowcow: 24600.000000