

考试方式: 闭卷

太原理工大学 高等数学 E(一) 试卷 A

适用专业 软件专业 考试日期: 2020-01-10 时间: 120 分钟 共 2 页

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

一. 单项选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没定义, 则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的 ()
A. 连续点; B. 跳跃间断点; C. 可去间断点; D. 第二类间断点.
2. 下列叙述正确的是 ()
A. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在区间 (a, b) 内可导, 且 $f(x) \geq g(x)$, 则必有 $f'(x) \geq g'(x), x \in (a, b)$;
B. 如果 $f'(0) = 0$, 则 $f(0) = 0$;
C. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处必有切线;
D. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处不可导, 则曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处没有切线.
3. 下列反常积分发散的是 ()
A. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; B. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; C. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$; D. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, 其中 p 是任意的实数.
4. 摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$) 的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与横轴所围图形的面积 ()
A. $\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt$; B. $\int_0^{2\pi a} a^2(1 - \cos t)^2 dt$;
C. $\int_0^{2\pi} \pi a^2(1 - \cos t)^2 dt$; D. $\int_0^{2\pi a} \pi a^2(1 - \cos t)^2 dt$.
5. 设 $f(x) \neq 0$, 又 y_1, y_2, y_3 是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, 则该方程必定有解 ()
A. $y_1 + y_2 + y_3$; B. $y_1 + y_2 - y_3$; C. $y_1 - y_2 - y_3$; D. $-y_1 - y_2 - y_3$.

二. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

6. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 2x^2 - 3xe^y$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.
7. 设函数 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x=1$ 处取得极大值 1, 则 $(a, b) =$ _____.
8. 曲线 $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ 的渐近线的条数总共有 _____ 条.

9. 设 $f(x) = \arcsin x$, 则 $df(x^3) =$ _____.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2ax}{\sin x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$, 若要使 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则常数 $a =$ _____.

三. 解答题与证明题 (每小题 8 分, 共 80 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^3 x} - 1}{x(1 - \cos x)}$.

12. 已知 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = t - \ln(1 + t^2) \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

13. 求椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在点 $(2, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程和法线方程.

14. 若 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & x \geq 0 \\ \frac{1}{2+x} & x < 0 \end{cases}$, 求定积分 $\int_0^2 f(x-1) dx$.

15. 求不定积分 $\int x \tan^2 x dx$.

16. 求函数 $y = \ln(x^2 + 1)$ 的单调区间、极值、凹凸区间及拐点.

17. 求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 与其在点 $(0, -3)$ 和 $(3, 0)$ 之间的弦所围成图形的面积.

18. 设函数 $F(x) = (x-1)f(x)$, 其中 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上具有一阶连续导数, 在 $(1, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(1) = f(2) = 0$, 试用罗尔中值定理证明: 在 $(1, 2)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $F''(\xi) = 0$ 成立.

19. 证明: 当 $x > 1$ 时, 不等式 $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ 成立.

20. 求微分方程 $y'' - 7y' + 12y = -12x + 19$ 的通解.