

# Domination on modular product graphs

Domen Humar in Maja Komic

November 2023

## 1 Definicije

**Definicija 1** Podmnožica vozlišč grafa  $G$  (označimo jo z  $S$ ) je **dominanta podmnožica** grafa  $G$ , če zanjo velja, da je vsako vozlišče grafa  $G$ , ali znotraj podmnožice  $S$ , ali je sosednjo nekemu vozlišču znotraj  $S$ .

**Definicija 2** **Dominacijsko število** grafa  $G$ , označeno z  $\gamma(G)$ , je velikost/moč/kardinalno število najmanjše dominantne podmnožice grafa  $G$ .

**Definicija 3** **Modularni produkt grafov  $G$  in  $H$**  je graf  $G \diamond H$  z množico vozlišč  $V(G \diamond H) = V(G) \times V(H)$ , ki je unija kartezičnega produkta, direktnega produkta in direktnega produkta komplementov  $G$  in  $H$

$$G \diamond H = G \square H \cup G \times H \cup \overline{G} \times \overline{H}$$

. Natančneje, točki  $(g, h)$  in  $(g', h')$  iz grafa  $G \diamond H$  sta sosednji, če velja:

1. če je  $g = g'$  in  $hh' \in E(H)$ ; ali
2. če je  $h = h'$  in  $gg' \in E(G)$ ; ali
3. če je  $gg' \in E(G)$  in  $hh' \in E(H)$ ; ali
4. če za  $g \neq g'$  in  $h \neq h'$  velja  $uu' \notin E(G)$  in  $hh' \notin E(H)$ .

Povezave iz prve in druge točke so iz kartezičnega produkta, povezave iz tretje točke so iz direktnega produkta in povezave iz četrte točke so iz direktnega produkta komplementov.

## 2 Problem

Naj bosta  $G$  in  $H$  grafa. Na različnih primerih grafov želimo preveriti spodnjo neenakost in poiskati čim več takih grafov  $G$  in  $H$  za katera velja enakost.

$$\gamma(G \diamond H) \leq \gamma(G) + \gamma(H) - 1 \quad (1)$$

### 3 Načrt dela

Najprej bova implementirala sledeči funkciji:

- funkcijo, ki sprejme grafa  $G$  in  $H$  in vrne modularni produkt  $G \diamond H$
- funkcijo, ki sprejme graf  $K$  in vrne dominantno število (Za manjše grafe bova napisala nek manjši program v Python-u, za večje grafe pa bova uporabila neko metahevrstiko).

Z tema dvema funkcijama bova preverila veljavnost neenakosti (1), tako da ju bova aplicirala na vedno večjih grafih. Pri reševanju problema bova uporabljala Sage paket za Python.