Naravna števila

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Peanovi aksiomi za naravna števila:

- 0 je naravno število.
- Vsako naravno število n ima naslednika $S(n) := n + 1$.
- 0 ni naslednik nobenega naravnega števila.
- Iz $n \neq n'$ sledi $S(n) \neq S(n')$.
- **Matematična indukcija.** Naj za neko podmnožico A množice $\mathbb{N}$ velja:
  1. $n_0 \in A$ za nek $n_0 \in \mathbb{N}$.
  2. Iz $k \in A$ sledi $k + 1 \in A$.

  Potem je $A = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$.

  ('Običajni' primer: $n_0 = 0 \Rightarrow A = \mathbb{N}$)

Dokazovanje z matematično indukcijo

Cilj: Dokazati, da neka trditev $T(n)$, ki vsebuje številsko spremenljivko n, velja za vsak n iz množice

$$\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\},$$

kjer je n_0 neko naravno število.

$\mathbf{T(n)}\ldots$ indukcijska predpostavka

Postopek:

1. **Baza indukcije**: Dokažemo veljavnost $T(n_0)$.
2. **Indukcijski korak**: Dokažemo sklep

$$T(k) \text{ velja za nek } k \geq n_0. \Rightarrow T(k+1) \text{ velja.}$$

Matematična indukcija - primeri

1. **Dokazovanje enakosti**:

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3+2^3+\cdots+n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \end{aligned}$$

   za vsa naravna števila $n \geq 1$.

2. **Dokazovanje neenakosti**:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

   za vsak $x > -1$ in $n \in \mathbb{N}$.

3. **Dokazovanje formul iz kombinatorike**: Število različnih vrstnih redov n različnih elementov je enako $n!$.

Številske množice - $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

V $\mathbb{N}$ lahko $\boxed{\textbf{seštevamo, množimo, potenciramo}}$.

V **celih številih**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

lahko tudi $\boxed{\textbf{odštevamo}}$.

V **racionalnih številih** $\mathbb{Q}$ pa lahko še $\boxed{\textbf{delimo}}$ (azen z 0!):

- vsi kvocienti $\frac{n}{m}$, kjer $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$,
- vsak kvocient ima okrajšano obliko

$$\frac{x}{y},$$

kjer $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$, x in y nimata skupnih deliteljev.

Realna števila $\mathbb{R}$

Želja: Naj bo $A \subseteq \mathbb{Q}$ poljubna omejena množica, tj. obstajata $m, M \in \mathbb{Q}$, tako da je $m \leq a \leq M$ za vsak $a \in A$. Potem obstajata največji m in najmanjši M.

Potreba po **realnih številih** $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, kjer so $\mathbb{I}$ ...**iracionalna števila**
- model: točke na **številski premici**
- računanje: **neskončna decimalna števila**

$$x = \pm n.d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

  kjer
  - je $n \in \mathbb{N}$ naravno število
  - so d_i decimalke, tj. $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
  - ta zapis ni enoličen, na primer $1.000\ldots = 0.999\ldots$

Omejene podmožice realnih števil

A naj bo neprazna podmnožica v $\mathbb{R}$.

- A je **navzgor omejena**, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $a \leq M$ za vsak $a \in A$.
- Vsak M je **zgornja meja**, najmanjša med njimi **obstaja** (po konstrukciji $\mathbb{R}$) in se imenuje **supremum** $\sup(A)$ množice A.
- Če $\sup(A) \in A$, potem je $\sup(A)$ kar **maksimum** $\max(A)$ množice A.

Analogni pojmi:

- **Omejenost navzdol**.
- **Spodnja meja**, **infimum** $\inf(A)$ množice A.
- **Minimum** $\min(A)$.

Omejene podmožice realnih števil - primeri

- Ali je množica $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 2\}$ omejena? Če ja, kaj so $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$, $\min(A)$?
- Ali je množica $B = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - 3x + 2 < 0\}$ omejena? Če ja, kaj so $\sup(B)$, $\inf(B)$, $\max(B)$, $\min(B)$?

Številska premica

Intervali:

- **omejeni** - daljice na številski premici:
  - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ odprt interval
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ zaprt interval
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ in
    $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ polodprta ali polzaprta intervala
- **neomejeni** - poltraki na številski premici:
  - $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ odprt navzgor neomejen interval
  - $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
  - $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
  - $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
  - $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

∞ **ni število!**

Absolutna vrednost – razdalja na številski premici

Absolutna vrednost $|x|$ števila $x \in \mathbb{R}$ je **oddaljenost** števila x od števila 0 na številski premici in je enaka

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0, \\ -x & ; \quad x < 0. \end{cases}$$

Razdalja med številoma x in y je enaka $|x - y|$.

Osnovne lastnosti:

- **nenegativnost:** $|x| \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
- **multiplikativnost:** $|xy| = |x||y|$.
- **trikotniška neenakost:** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Absolutna vrednost

1. Narišimo množico realnih števil x, za katere velja $|x-5| \leq 2$.

2. Narišimo množico realnih števil x, za katere velja $|x-3| = |x+1|$.

3. Narišimo množico realnih števil x, za katere velja $||x-3| - 2x| > 2$.

4. Narišimo množico točk (x, y) v ravnini, za katere velja $|x| + |y| < 1$.

Kompleksna števila $\mathbb{C}$

Cilj: Sedaj bi radi reševali še poljubne **algebraične enačbe**

$$\mathbf{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0},$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ in $a_n \neq 0$.

- Naprimer:
$$\mathbf{x^2 + 1 = 0}?$$
- V $\mathbb{R}$ rešitev ni. Proglasimo za rešitev **imaginarno enoto i**.
- Da ohranimo operaciji $\pm$, moramo $\mathbb{R}$ dodati vse izraze oblike
$$\mathbf{x + iy}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
- Dobimo $\mathbb{C}$, zaprto za $\pm$, $\cdot$, $:$ in izpolnjuje zgornji cilj.

Kompleksna števila $\mathbb{C}$

- $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
  - $\mathrm{Re}\,(z) = \mathbf{x} \dots$ **realni del**,
  - $\mathrm{Im}\,(z) = \mathbf{y} \dots$ **imaginarni del**.
- model: **kompleksna ravnina**.

Računanje s kompleksnimi števili

Kompleksna števila lahko:

- **seštevamo** in **odštevamo**:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

- **množimo**:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$

- **delimo** (deljenje z 0 ni definirano):

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)\mathbf{(x_2 - iy_2)}}{(x_2 + iy_2)\mathbf{(x_2 - iy_2)}} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_1y_2 + y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

- **konjugiramo**:

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{x} - \mathbf{iy} \quad \text{je } \textbf{konjugirano število}$$

števila $z = x + iy$.

Računanje s kompleksnimi števili

Trditev

Nekaj osnovnih lastnosti računanja s kompleksnimi števili:

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z, \quad z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$

Računanje in kompleksna ravnina

- **seštevanje**: paralelogramsko pravilo,
- predpis $z \mapsto z + z_0$ določa **vzporedni premik** za z_0.
- **množenje**: predpis $z \mapsto az$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ je:
  - **razteg**, če je $a > 1$,
  - **krčenje**, če je $0 < a < 1$
  - **zrcaljenje čez koordinatno izhodišče**, če je $a = -1$.
- **konjugiranje**: zrcaljenje čez realno os.

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost kompleksnega števila z je nenegativno realno število
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geometrijski opis:

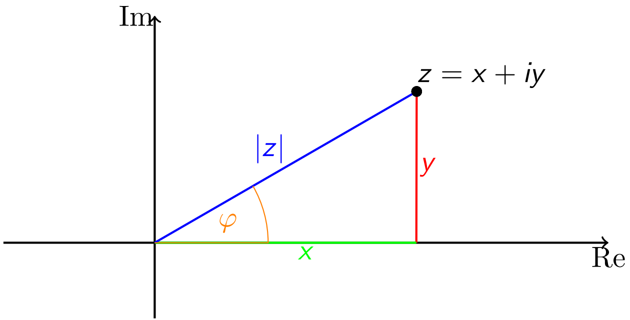
- $|z|$ je **oddaljenost** števila z od izhodišča v kompleksni ravnini
- $|z_1 - z_2|$ je **razdalja** med z_1 in z_2

Trditev

Predpis $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ *ima naslednje lasnosti:*

- **multiplikativnost**: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- **invariantnost za konjugiranje**: $|\bar{z}| = |z|$
- **trikotniška neenakost**: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Polarni zapis kompleksnega števila



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = |z| \cos \varphi$$
$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \qquad y = |z| \sin \varphi$$

Primer

- *Zapišimo* $1 + i$ *ter* $-1 - i$ *v polarni obliki.*
- *Opišimo zgornji zaprt polkrog s kompleksnimi koordinatami.*

Polarni zapis kompleksnega števila

- **Polarni zapis** števila $z = x + iy$ je:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kjer je $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ polarni kot ali argument in je določen samo do mnogokratnika celega kota 2π natanko.

- **Množenje števil v polarnem zapisu**:

$$\begin{aligned} & |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = \; & |z_1||z_2|\big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ & \qquad + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\big] \\ = \; & \underbrace{|z_1||z_2|}_{\textit{produkt absolutnih vrednosti}}\left(\cos\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\textit{vsota kotov}} + i\sin\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\textit{vsota kotov}}\right) \end{aligned}$$

- **Eulerjeva formula** (trenutno le zapis, kasneje bo sledila iz Taylorjevih vrst):

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Polarni zapis kompleksnega števila

Eulerjeva formula poenostavi zapis:

- polarnega zapisa:

$$\mathbf{z} = |\mathbf{z}|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi}.$$

- množenja:

$$\mathbf{z_1 z_2} = |\mathbf{z_1}||\mathbf{z_2}|\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Števila na enotski krožnici zapišemo kot

$$\mathbf{z} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi},$$

kjer je $\varphi \in \mathbb{R}$.

Računanje v polarni obliki

- **Enakost dveh števil**:
$$r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2} \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \text{ in } \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi,$$
kjer je $k \in \mathbb{Z}$ neko celo število.
- **Konjugiranje**:
$$\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}.$$
- **Potenciranje:**
$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \ldots \quad \textbf{de Moivrova formula}.$$
- **Invertiranje:**
$$z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{-i\varphi},$$
kjer je $z \neq 0$.
- **Deljenje:**
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$
kjer je $z_2 \neq 0$.

Geometrija operacij v kompleksni ravnini

$z_0 = |z_0| e^{i\varphi_0}$

Preslikava	transformacija v $\mathbb{C}$
$z \mapsto \overline{z}$	zrcaljenje čez realno os
$z \mapsto z + z_0$	premik za z_0
$z \mapsto e^{i\varphi_0} z$	zasuk okrog izhodišča za kot φ_0
$z \mapsto z_0 z$	razteg (ali krčenje) za $|z_0|$ in zasuk za φ_0
$z \mapsto z^{-1}$	zrcaljenje čez realno os in razteg za $|z|^{-2}$

Rešitve algebraičnih enačb

Spomnimo se pojma **algebraična enačba**:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$ in $a_n \neq 0$.

Izrek

Vsaka algebraična enačba stopnje $n > 0$ ima **vsaj eno kompleksno** *rešitev $x \in \mathbb{C}$.*

Posledica

- *Vsaka algebraična enačba stopnje $n > 0$ ima natanko n kompleksnih rešitev (ne nujno različnih).*
- *Če so vsi koeficienti a_i realni, potem kompleksne ničle nastopajo v konjugiranih parih, tj. če je $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, je rešitev, potem je tudi $\alpha - i\beta$ rešitev.*
- *Poljuben polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ima razcep $P(x) = a_n (x - x_1) \ldots (x - x_n)$, kjer so $x_1, \ldots, x_n$ rešitve enačbe $P(x) = 0$.*

Koreni kompleksnega števila

n-ti koreni števila $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ so rešitve enačbe

$$\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = \mathbf{a}.$$

- Enačbo zapišemo v polarni obliki:

$$|\mathbf{z}|^{\mathbf{n}} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\mathbf{n}\varphi} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}^{\mathbf{i}\mathrm{Arg}(\mathbf{a})}.$$

- Dobimo *n* različnih rešitev:

$$\mathbf{z}_{\mathbf{k}} = \sqrt[n]{|a|}\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\mathrm{Arg}(\mathbf{a})+2\mathbf{k}\pi}{\mathbf{n}}}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \ldots \mathbf{n} - \mathbf{1}$$

- Rešitve ležijo na **oglíščih pravilnega *n*-kotnika** v kompleksni ravnini.

Zgledi

- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $z^6 = 1$.
- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $(z^3 - 2)(z^4 + i) = 0$.
- Poiščimo z^{2021} za $z = \frac{1-i}{i}$.

NAUK: polarno obliko uporabljamo pri potenciranju, korenjenju ter (v veliki meri) pri množenju.

Zaporedja

Zaporedje je preslikava

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Pišemo tudi:

$$(a_n)_n = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

n ... indeks

a_n ... n-ti člen zaporedja

Zaporedja

Zaporedje lahko opišemo

- **eksplicitno**: $\mathbf{a_n = f(n)}$, kjer je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ neka preslikava.

  Npr., $a_n = \frac{1}{n}$ za $n \geq 1$.

  Kaj je splošni člen zaporedja:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots ?$$

- **rekurzivno**:
  - $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_{n+1} = f(a_n)}$, kjer je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka preslikava, $n \geq 0$ (**enočlena rekurzija**)
    Npr.,
$$a_{n+1} = 3a_n + 5, \quad a_0 = 1.$$
  - $\mathbf{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}}$, $\mathbf{a_{n+k} = f(a_n, \ldots, a_{n+k-1})}$, kjer je $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ neka preslikava, $n \geq 0$ (**k-člena rekurzija**)
    Npr.,
$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 4.$$

Primer - rekurzivno zaporedje

V hranilniku imaš en kovanec. Vsak dan naredimo naslednje: v primeru, ko imaš v hranilniku manj kot 10 kovancev, število kovancev v hranilniku podvojimo, v nasprotnem primeru pa moraš ven vzeti 5 kovancev. Zapiši splošni člen zaporedja.

Naj bo b_n število kovancev n-ti dan, pri čemer je začetno stanje 0-ti dan.

Potem je

$$b_n = \begin{cases} 2b_{n-1}, & \text{če je } b_{n-1} < 10, \\ b_{n-1} - 5, & \text{če je } b_{n-1} \geq 10. \end{cases}$$

Nekaj členov:

$$1, 2, 4, 8, 16, 11, 6, 12, 7, 14, \ldots.$$

Vprašanje: Koliko kovancev je največ lahko v hranilniku na nek dan?

Primeri zaporedij

2. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}$

3. **aritmetično zaporedje**
   - eksplicitni opis: $a_n = a + nd,\ a, d \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.
   - rekurzivni opis: $a_0 = a \in \mathbb{R},\ a_{n+1} = a_n + d,\ d \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

4. **geometrijsko zaporedje**
   - eksplicitni opis: $a_n = aq^n,\ a, q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.
   - rekurzivni opis: $a_0 = a \in \mathbb{R},\ a_{n+1} = a_n q,\ q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

5. **Fibonaccijevo zaporedje**

$$a_0 = 1, a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

6. $a_0 = 3, \quad a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}\right)$

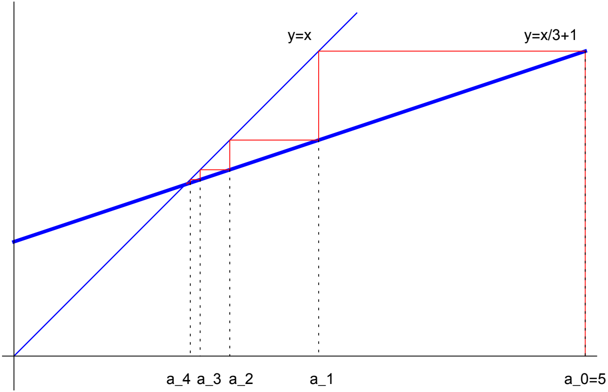
Grafični prikaz rekurzije

$a_0 = a, \quad a_{n+1} = f(a_n)$

- narišemo grafa $y = f(x)$ in $y = x$,
- a_0 nanesemo na x-os,
- $(a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$ je točka na grafu $(x, f(x))$ pri $x = a_0$
- za vsak n,
  - (a_{n-1}, a_n) je točka na grafu $(x, f(x))$,
  - (a_n, a_n) je točka na isti vodoravno premici na grafu $y = x$,
  - (a_n, a_{n+1}) je točka na isti navpični premici na grafu $y = f(x)$.

Primer

$$a_0 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + 1$$



Lastnosti zaporedij - omejenost

Definicija

Zaporedje $(a_n)_n$ je **navzgor omejeno**, *če ima zgornjo mejo, to je tako število $\mathbf{M} \in \mathbb{R}$, da je $\mathbf{a_n} \leq \mathbf{M}$ za vsak $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.*

Če je zaporedje $(a_n)_n$ navzgor omejeno, potem **najmanjšo** *izmed zgornjih mej imenujemo* **supremum** *zaporedja $(a_n)_n$ in označimo z $\sup_n a_n$.*

Zaporedje $(a_n)_n$ je **navzdol omejeno**, *če ima spodnjo mejo, to je tako število $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$, da je $\mathbf{a_n} \geq \mathbf{m}$ za vsak $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.*

Če je zaporedje $(a_n)_n$ navzdol omejeno, potem **največjo** *izmed spodnjih mej imenujemo* **infimum** *zaporedja $(a_n)_n$ in označimo z $\inf_n a_n$.*

Omejeno zaporedje *je navzgor in navzdol omejeno.*

Lastnosti zaporedij - monotonost

Zaporedje je **naraščajoče**, če je $\mathbf{a_n \leq a_{n+1}}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in je **padajoče**, če je $\mathbf{a_n \geq a_{n+1}}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Primer

Analiziraj omejenost in monotonost zaporedj:

1. $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$ *za* $n \geq 1$.
2. $c_n = \dfrac{c_{n-1}}{2}$ *za* $n \geq 1$ *in začetnim členom* $c_0 = 1$.

Limita zaporedja

Število $a \in \mathbb{R}$ je **limita** zaporedja $(\mathbf{a_n})_\mathbf{n}$, kar označimo z

$$\mathbf{a} = \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n},$$

če za vsak $\varepsilon > \mathbf{0}$ obstaja tak indeks $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$, da za vsak $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$ velja $|\mathbf{a} - \mathbf{a_n}| < \varepsilon$.

Neformalno: <u>vsi</u> členi od nekje dalje so poljubno blizu limite a.

Število N je <u>odvisno</u> od ε. Pri manjšem ε mora biti N večji.

Limita zaporedja

Zaporedje $(a_n)_n$ je **konvergentno**, če ima limito. Sicer je **divergentno.**

Trditev

Če je zaporedje konvergentno, potem je omejeno.

Kaj to pomeni (s stališča računanja)?

- ε – računska natančnost
- **N** – od tu dalje so vsi členi pri tej natančnosti enaki a

Naraščanje ter padanje preko vseh meja

Zaporedje $(a_n)_n$ **narašča prek vsake meje**, če za vsak $\mathbf{M} \in \mathbb{R}$ obstaja indeks $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$, da za vsak $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$ velja $\mathbf{a_n} \geq \mathbf{M}$.

Oznaka: $\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = \infty$.

Opomba

Tako zaporedje ni konvergentno, saj nima limite!

Zaporedje $(a_n)_n$ **pada prek vsake meje**, če za vsak $\mathbf{M} \in \mathbb{R}$ obstaja indeks $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$, da za vsak $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$ velja $\mathbf{a_n} \leq -\mathbf{M}$.

Oznaka: $\displaystyle\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = -\infty$.

Opomba

Tako zaporedje ni konvergentno, saj nima limite!

Pravila za računanje limit

Naj bo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ $\quad (a, b \neq \pm\infty)!$.

- **pravilo vsote**: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
- **pravilo produkta**: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
- **pravilo deljenja**: Če je $b_n \neq 0$ za vsak (dovolj velik) n in $b \neq 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Izračunaj naslednje limite:

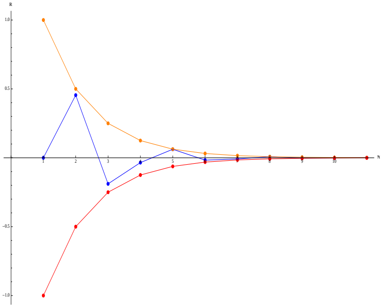
$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n \text{ za poljuben } \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2 + n + 1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n + 6^n}{3^n + 6^{n+1} + 1}\right)^3.$$

Računanje limit

Izrek (o sendviču)

Če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, je tudi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$



Izračunaj naslednje limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2n)}{2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

Pogoji za konvergenco monotonih zaporedij

Izrek (O konvergenci monotonih zaporedij)

- *Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno.*
- *Padajoče zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzdol omejeno*

Izračunaj limite naslednjih zaporedij

1. $a_0 = 0, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + 6),$
2. $b_0 = 2, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right).$

Število e kot limita zaporedja

Iz konvergence zaporedja $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se da s pomočjo pravil za računanje limit izpeljati konvergenco zaporedja

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \\
&= e \cdot 1 = e.
\end{aligned}$$

Pri funkcijah bomo videli, da velja celo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Odtod za $k \in \mathbb{Z}$ s substitucijo $x = \frac{n}{k}$ sledi

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \lim_{x\to\mathrm{sign}\,(k)\cdot\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{xk} = e^k.$$

Definicija potence pri realnem eksponentu

Naj bo $a > 0$ pozitivno število in $r \in \mathbb{R}$ realno število. Radi bi definirali a^r?

- Če je $r \in \mathbb{N}$, potem je $a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{r}$.
- Če je $r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, potem je $a^r = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{-r}$.
- Če je $r = \frac{1}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$, potem je a^r pozitiven $x > 0$, ki zadošča $x^n = a$. Iz poglavja o korenih enote vemo, da x obstaja in je enoličen. Brez korenov enote, bi dokaz obstoja in enoličnosti zahteval delo.
- Če je $r = \frac{m}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$ in $m \in \mathbb{Z}$, potem je a^r enoličen pozitiven $x > 0$, ki zadošča $x^n = a^m$.
- Če je $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, potem izberemo zaporedje $r_n \in \mathbb{Q}$ z $\lim r_n = r$ in definiramo $a^r := \lim a^{r_n}$. Pokazati je treba, da desna limita res obstaja in je neodvisna od izbire zaporedja r_n...delo.

Vrste

Vrsta je simbolična vsota:

$$a_0 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Kje bomo pojem vrste potrebovali? Pri definiciji določenega integrala, pri razvoju funkcij v Taylorjevo vrsto (ključno orodje v numerični matematiki, da sploh lahko karkoli izračunamo).

Kako smiselno definirati vsoto? Tako, da seštevamo končno mnogo členov in 'upamo', da se sčasoma rezultat 'ne spreminja več kaj dosti'. Seveda se bo rezultat spreminjal, če bomo prištevali neničelne člene, tako da pojem 'ne spreminja več kaj dosti' nadomestimo z 'se vse bolj približuje neki vrednosti'.

Formalizirajmo zgornji premislek:

m-ta delna vsota vrste je enaka

$$S_m = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Opazimo, da lahko zaporedje delnih vsot tudi rekurzivno definiramo:

$$S_0 = a_0, \qquad S_{m+1} = S_m + a_{m+1}.$$

Vrste

Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **konvergentna**, če je konvergentno zaporedje delnih vsot S_m. V tem primeru je njena **vsota** njena enaka limiti zaporedja S_m, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} S_m = S.$$

Vrsti, ki ni konvergentna, pravimo **divergentna**.

Trditev (Potreben pogoj za konvergenco)

Če je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergentna, potem velja* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Obratno pa ne velja!

Analiziraj konvergenco naslednjih vrst:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Geometrijska vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

- Konvergenca je odvisna od **kvocienta** q:
  - konvergira, če je $|q| < 1$,
  - divergira, če je $|q| \geq 1$.
- Za $|q| < 1$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

- $\sum_{n=M}^{\infty} a \cdot q^n = aq^M + aq^{M+1} + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{aq^M}{1-q}$.

Izračunajmo vsoti $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$ in $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$,

.

Pravila za računanje z vrstami

Naj bosta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **konvergentni**. Potem so tudi vrste $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$, $c \in \mathbb{R}$, in $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ **konvergentne** in velja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Dokaz primera $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$:

- Označimo s S_m, S'_m in S''_m m-te delne vsote vrst $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$.
- Velja $S''_m = S_m + S'_m$.
- Po pravilih za računanje limit velja $\lim_m S''_m = \lim_m S_m + \lim_m S'_m$, kar dokaže $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Vrste - dominirana konvergenca/divergenca

Naj bosta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ vrsti z **nenegativnimi členi** in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n$. (V temu primeru pravimo, da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dominira vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.)

1. Če je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **konvergentna**, je **konvergentna** tudi vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
2. Če je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **divergentna**, je **divergentna** tudi vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dokaz točke (1):

- Označimo s S_m in S'_m m-ti delni vsoti vrst $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
- Kar so členi a_n nenegativni, je zaporedje $\{S_m\}_m$ naraščajoče.
- Ker je $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergentna, je zaporedje $\{S'_m\}_m$ omejeno.
- Iz pogoja $a_n \leq b_n$ za vsak n sledi $S_m \leq S'_m$ za vsak m. Torej je tudi $\{S_m\}_m$ omejeno.
- Po izreku o monotoni konvergenci zaporedij je zaporedje $\{S_m\}_m$ konvergentno. Po definiciji je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergenta.

Kvocientni kriterij

Izrek

Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Tvorimo zaporedje $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. *Če obstaja $q < 1$, tako da za vsak n od nekega n_0 naprej velja $D_n \leq q$, potem vrsta konvergira.*
2. *Če obstaja $q \geq 1$, tako da za vsak n od nekega n_0 naprej velja $D_n \geq q$, potem vrsta divergira.*
3. *Naj $\lim D_n =: D$ obstaja. Če je:*
   3.1 *$D < 1$, potem vrsta konvergira.*
   3.2 *$D = 1$, potem ne moremo soditi o konvergenci.*
   3.3 *$D > 1$, potem vrsta divergira.*

Primer

Za katere $x > 0$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ konvergira?

Dokaz kvocientnega kriterija

Dokaz točke (1):

- Velja
$$\sum_n a_n = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n_0-1}) + (a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots).$$
Vrsta $\sum_n a_n$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira vrsta $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots$ (končno mnogo členov namreč nima vpliva na obstoj limit zaporedja delnih vsot).
- Ker velja $a_{n+1} = D_n a_n$ za vsak n, s k-kratno uporabo te rekurzijo dobimo $a_{n+k} = D_{n+k-1} D_{n+k-2} \cdots D_n a_n$.
- Ocenimo $a_{n_0+k} \leq q^k a_{n_0}$, saj je $D_n \leq q$ za vsak $n \geq n_0$.
- Torej je vrsta $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots$ dominirana z vrsto $a_{n_0} + q a_{n_0} + q^2 a_{n_0} + q^3 a_{n_0} + \cdots$, ki je geometrijska vrsta z začetnim členom a_{n_0} in kvocientom $q < 1$. Torej konvergira in po izreku o dominirani konvergenci konvergira tudi $\sum_n a_n$.

Dokaz prvega dela točke (3):

Ker je $\lim_n D_n = D < 1$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, ki zadošča $|D_n - D| \leq D + \frac{1-D}{2} = \frac{D+1}{2}$. Za q v točki (1) lahko vzamemo $\frac{D+1}{2} < 1$.

Korenski kriterij

Izrek

Naj bo $\sum a_n$ vrsta z nenegativnimi členi. Tvorimo zaporedje $C_n = \sqrt[n]{a_n}$.

1. *Če obstaja $q < 1$, tako da za vsak n od nekega n_0 naprej velja $C_n \leq q$, potem vrsta konvergira.*
2. *Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $C_n \geq 1$, potem vrsta divergira.*
3. *Naj $\lim C_n =: C$ obstaja. Če je:*
   - 3.1 *$C < 1$, potem vrsta konvergira.*
   - 3.2 *$C = 1$, potem ne moremo soditi o konvergenci.*
   - 3.3 *$C > 1$, potem vrsta divergira.*

Primer

Za katere $x > 0$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ konvergira?

Dokaz korenskega kriterija

Dokaz točke (1):

- Kot v dokazu kvocientnega kriterija zadošča dokazati konvergenco vrste $(a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots)$.
- Ker velja $a_n = C_n^n$ za vsak n in $C_n \leq q$ za vsak $n \geq n_0$, velja $a_n \leq q^n$.
- Torej je vrsta $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots$ dominirana z vrsto $q^{n_0} + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + q^{n_0+3} + \ldots$, ki je geometrijska vrsta z začetnim členom q^{n_0} in kvocientom $q < 1$. Torej konvergira in po izreku o dominirani konvergenci konvergira tudi $\sum_n a_n$.

Dokaz prvega dela točke (3):

Ker je $\lim_n C_n = C < 1$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, ki zadošča $|C_n - C| \leq C + \frac{1-C}{2} = \frac{C+1}{2}$. Za q v točki (1) lahko vzamemo $\frac{C+1}{2} < 1$.

Leibnizov kriterij

Izrek (Leibnizov kriterij)

Če zaporedje a_n pada proti 0 in so vsi členi a_n pozitivni, potem je $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ konvergentna.

Dokaz:

- Iz rekurzivne zveze $S_{2n} = S_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n}$ sledi $S_{2n} \leq S_{2n-2}$. (Saj je $a_{2n-1} \geq a_{2n}$.)
- Podobno iz $S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1}$ sledi $S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$. (Saj je $a_{2n} \geq a_{2n+1}$.)
- Torej je zaporedje $\{S_{2n}\}$ padajoče, zaporedje $\{S_{2n+1}\}$ pa naraščajoče.
- Ker velja $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$, je $S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$. Torej je zaporedje $\{S_{2n+1}\}$ navzgor omejeno z S_0 in zato po izreku o monotoni konvergenci, konvergentno. Podobno premislimo, da je $\{S_{2n}\}$ navzdol omejeno z S_1 in konvergentno.
- Velja
$$\lim S_{2n} - \lim S_{2n+1} = \lim(S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim a_{2n+1} = 0.$$
- Sledi $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1}$ in zaporedje $\{S_n\}_n$ je konvergentno.

Kaj je funkcija ene spremenljivke?

Funkcija je predpis, ki vsakemu elementu x iz **definicijskega območja** $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ priredi natanko določeno število $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Če $\mathcal{D}_f$ ni podano, je največja množica, kjer ima predpis f smisel.

- $x \ldots$ neodvisna spremenljivka
- $y = f(x) \ldots$ odvisna spremenljivka
- $f(A) = \{f(x)\,;\, x \in A\} \ldots$ **slika** množice $A \subset \mathcal{D}_f$
- $\mathcal{Z}_f = f(\mathcal{D}_f) \ldots$ **zaloga vrednosti** funkcije f
- $f^{-1}(B) = \{x\,;\, f(x) \in B\} \ldots$ **praslika** množice $B \subset \mathcal{Z}_f$

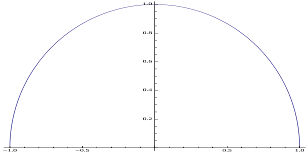
Primera:

- $f(x) = y$, kjer je $y = x^4$, je funkcija. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$.
- $f(x) = y$, kjer je $y^4 = x$, ni funkcija.

Graf funkcije in podajanje funkcij

Graf funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ je krivulja v ravnini:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x))\ ;\ x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



- Graf funkcije seka poljubno navpično premico največ v eni točki.
- Projekcija grafa na os x je $\mathcal{D}_f$, projekcija grafa na os y pa je $\mathcal{Z}_f$.

Predpis lahko podamo na več načinov.

- **eksplicitno**: $y = f(x)$, npr. $y = \sqrt{1 - x^2}$
- **implicitno**: $F(x, y) = 0$, npr. $x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y \geq 0$
- **parametrično**: $x = x(t)$, $y = y(t)$, npr.

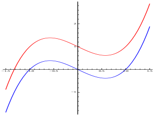
$$x = \cos t,\ y = \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

Transformacije funkcij

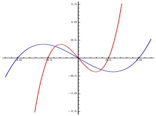
- $g(x) = f(x-a) \ldots$ vodoravni premik za $|a|$ v desno ($a > 0$) oz. levo ($a < 0$)
- $g(x) = f(x) + c \ldots$ navpični premik za $|c|$ navzgor ($c > 0$) oz. navzdol ($c < 0$)
- $g(x) = f(\frac{x}{a}) \ldots$ vodoravni razteg ($a > 1$) oz. skrček ($a < 1$) za faktor a
- $g(x) = cf(x) \ldots$ navpični razteg ($c > 1$) oz. skrček ($c < 1$) za faktor c
- $g(x) = -f(x) \ldots$ zrcaljenje preko osi x
- $g(x) = f(-x) \ldots$ zrcaljenje preko osi y

Denimo, da znamo narisati graf funkcije $y = f(x)$.

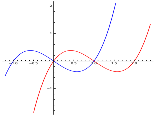
$f(x) + 1$



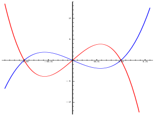
$f(2x)$



$f(x-1)$



$-2f(x)$



Operacije s funkcijami

Naj bosta $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ funkciji. Na preseku $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ lahko definiramo nove funkcije:

- **vsoto** $f + g$ s predpisom $x \mapsto f(x) + g(x)$,
- **razliko** $f - g$ s predpisom $x \mapsto f(x) - g(x)$,
- **produkt** fg s predpisom $x \mapsto f(x)g(x)$,
- **kvocient** f/g s predpisom $x \mapsto f(x)/g(x)$, če $g(x) \neq 0$.

Če je $Z_f \subseteq \mathcal{D}_g$, potem lahko definiramo funkcijo $g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

in imenujemo **kompozitum** funkcij g in f.

V splošnem $f \circ g \neq g \circ f$.

Izračunaj kompozituma funkcij

$$f(x) = x^2 + 1, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}, \qquad g(x) = \log x^2, \quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lastnosti funkcij

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je

- **naraščajoča**, če velja $f(x_1) \leq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, ki zadoščata $x_1 \leq x_2$.
- **padajoča**, če velja $f(x_1) \geq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, ki zadoščata $x_1 \leq x_2$.
- **navzgor omejena**, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ zadošča $f(x) \leq M$. Številu M pravimo **zgornja meja** funkcije f na $\mathcal{D}_f$.
- **navzdol omejena**, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ zadošča $m \leq f(x)$. Številu m pravimo **spodnja meja** funkcije f na $[a, b]$.
- **omejena** na $\mathcal{D}_f$, če je na $\mathcal{D}_f$ nazvdol in navzgor omejena.
- **soda**, če je $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$
- **liha**, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.
- **injektivna**, če različni točki $x \neq y \in \mathcal{D}_f$ preslika v različni vrednosti $f(x) \neq f(y) \in \mathcal{Z}_f$.
- **surjektivna**, če je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.
- **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna.

Primeri

- Določi, kje sta funkciji $f(x) = x^3$ in $g(x) = x^4$ naraščajoči oz. padajoči.
- Določi, kateri od funkcij $f(x) = \cos x$ in $g(x) = e^x$ sta omejeni.
- Preveri:
  - $f(x) = |x|$, $g(x) = x^{2k}$ za $k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \cos x$ so sode.
  - $f(x) = \mathrm{sign}(x)$, $g(x) = x^{2k+1}$ za $k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \sin x$ so lihe.
  - $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = x^2 + 2x + 1$ niso ne sode in ne lihe.
- Premisli:
  - Graf sode funkcije je simetričen glede na os y, graf lihe pa glede na koordinatno izhodišče.
  - Vsota sodih funkcij je soda funkcija, vsota lihih je liha funkcija.
  - Produkt dveh sodih ali dveh lihih funkcij je soda funkcija, produkt lihe in sode funkcije je liha funkcija.
  - Graf injektivne funkcije seka poljubno vodoravno premico v največ eni točki.
  - Vsaka vodoravna premica seka graf surjektivne funkcije v vsaj eni točki.

Inverzna funkcija

Naj bo $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ **injektivna** funkcija. Potem funkcijo $f^{-1} : \mathcal{Z}_f \to \mathcal{D}_f$, za katero velja

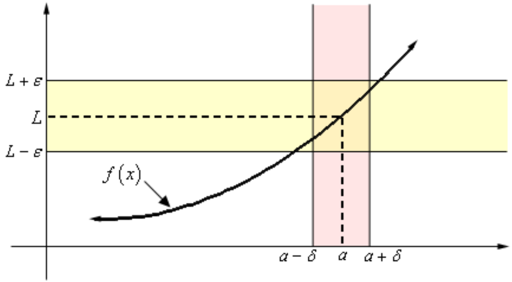
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

za vsak $x \in \mathcal{D}_f$, imenujemo **inverzna funkcija** funkcije f.

- Ekvivalentno: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$.
- Definicijsko območje in zaloga vrednosti se zamenjata: $D_{f^{-1}} = Z_f, \quad Z_{f^{-1}} = D_f$.
- Inverzno funkcijo f^{-1} eksplicitno podane funkcije f izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato izrazimo y kot funkcijo x.
- Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije f prek simetrale lihih kvadrantov.

Limita funkcije

Zanima nas, kako se funkcija f obnaša v okolici točke a, torej na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ za nek $\delta > 0$, razen morda v točki a.



Število L je **limita** funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $0 < |x-a| < \delta$.
Pišemo: $L = \lim_{x\to a} f(x)$.

Neformalno: L je limita funkcije f v točki a: vrednost $f(x)$ je poljubno blizu L, če je le x dovolj blizu a (a ne enak a).

Limita funkcije f v točki a ni odvisna od vrednosti funkcije f v točki a.

Leva in desna limita

Število L je **leva limita** funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $a - \delta < x < a$. Označimo:

$$L = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Število L je **desna limita** funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $a < x < a + \delta$. Označimo:

$$L = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Funkcija f ima v točki a limito natanko tedaj, ko ima v točki a tako levo kot desno limito in sta ti dve limiti enaki.

Neskončna limita

Če za vsako število $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) > M$, če le $a - \delta < x < a$, potem pišemo $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \infty$.

Podobno definiramo simbol $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = -\infty$, če za vsako število $m \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) < m$, če le $a - \delta < x < a$.

Če za vsako število $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) > M$, če le $a < x < a + \delta$, potem pišemo $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \infty$.

Podobno definiramo simbol $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = -\infty$, če za vsako število $m \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) < m$, če le $a < x < a + \delta$.

Limita v neskončnosti

Oznaka $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ pomeni, da je število L limita funkcije f, ko gre x čez vse meje, torej da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število M, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$ za vsak $x > M$.

Podobno definiramo s simbolom $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število m, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$ za vsak $x < m$.

Pravila za računanje limit

Za računanje limit veljajo enaka pravila kot pri zaporedjih.

Trditev

Naj bo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *in* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = K \in \mathbb{R}$. *Potem je*

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L + K.$

  Dokaz. Po karakterizaciji limit funkcij prek zaporedij moramo za poljubno zaporedje $(a_n)_n$ *z* $\lim a_n = a$ *preveriti* $\lim(f(a_n)+g(a_n)) = L+K$. *Po pravilih za računanje limit zaporedij pa res velja:*

  $$\lim(f(a_n)+g(a_n)) = \lim f(a_n) + \lim g(a_n) = L + K.$$

- $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x)) = \alpha L$ *za vsak* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LK.$
- *če je* $K \neq 0$, *je* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}.$

Zveznost funkcije

Funkcija f je **zvezna** v točki a natanko tedaj, ko je

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Z drugimi besedami: funkcija f je zvezna v točki a, ko ima v tej točki limito L, ki je enaka $f(a)$. V $\epsilon - \delta$ notaciji lahko zveznost funkcije f definiramo kot:

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je v točki $a \in \mathcal{D}$ zvezna natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

če je $|x - a| < \delta$.

Določimo takšen a, da bo spodnja funkcija povsod zvezna:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < 1, \\ ax + 3, & x \geq 1. \end{cases}$$

Lastnosti zveznosti

Izrek

Naj bosta $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ *in* $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ *funkciji, ki sta zvezni v točki* $a \in \mathcal{D}_f \cap D_g$.

1. *Potem so tudi funkcije* $f+g,\ f-g,\ fg$ *zvezne v* a.

   Dokaz zveznosti $f+g$. *Po pravilih za računanje limit vemo, da je* $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$. *Ker sta* f *in* g *zvezni v* $x=a$, *sledi* $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a)$.

2. *Če je še* $g(a) \neq 0$, *potem je* f/g *definirana na neki okolici točke* a *in zvezna v točki* a.
3. *Naj bo* $\mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{D}_g$. *Če je funkcija* f *zvezna v točki* a, g *pa ima v točki* $f(a)$ *limito* L, *je*

   $$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = L.$$

   Posebej, če je g *zvezna v točki* $f(a)$, *potem je* $g\circ f$ *zvezen v točki* a.

Lastnosti zveznosti

Dokaz (3). Naj bo $(a_n)_n$, $a_n \neq a$, zaporedje z $\lim a_n = a$. Velja $\lim_n (g \circ f)(a_n) = \lim_n g(f(a_n))$. Ker je $\lim f(a_n) = f(a)$, in $\lim g(b_n) = L$ za vsako zaporedje $(b_n)_n$ z $\lim b_n = f(a)$, sledi $\lim_n g(f(a_n)) = L$.

- Vse elementarne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane.
- Če je podatek a podan dovolj natančno (z napako manjšo od δ), bo vrednost $f(a)$ izračunana z napako manjšo od ε.
- Graf zvezne funkcije bo v točki $(a, f(a))$ "nepretrgana krivulja".
- Če vrednost $f(a)$ ni definirana, vendar obstaja $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, lahko funkcijo f razširimo, tako da definiramo $f(a) := L$. Tako razširjena funkcija je zvezna v točki a.
- Zamenjamo lahko vrstni red računanja limite in vrednosti zvezne funkcije.

Izračunajmo $\lim\limits_{x \to 0} \sin(3x^2 + \pi)$.

Ničle zveznih funkcij

Izrek

Če je f zvezna na zaprtem omejenem intervalu $[a, b]$ in je $f(a)f(b) < 0$, tj. f v krajiščih intervala sta predznaka različna, potem obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je $f(c) = 0$.

Dokaz z **bisekcijo**: Definiramo tri zaporedja, a_n, b_n in c_n:

- $a_0 = a$, $b_0 = b$.
- za $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_n = (a_n + b_n)/2 \ldots \quad \text{to je razpolovišče intervala } [a_n, b_n],$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, c_n], & \text{če je } f(a_n)f(c_n) < 0, \\ [c_n, b_n], & \text{če je } f(c_n)f(b_n) < 0. \end{cases}$$

Če za kakšen c_n velja $f(c_n) = 0$, je $c = c_n$. Sicer pa zaporedja a_n, b_n in c_n vsa konvergirajo k istemu številu c, saj je $a_n \leq c_n \leq b_n$, $(a_n)_n$ je naraščajoče, $(b_n)_n$ padajoče in $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.

Omejenost zveznih funkcij

Izrek

Naj bo f zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$. Potem:

- *f je omejena na $[a, b]$, tj. obstajata*

$$M = \sup\{f(x) \; ; \; x \in [a, b]\}, \quad m = \inf\{f(x) \; ; \; x \in [a, b]\}.$$

- *Obstajata $x_m, x_M \in [a, b]$, kjer je*

$$f(x_m) = m \quad \text{in} \quad f(x_M) = M.$$

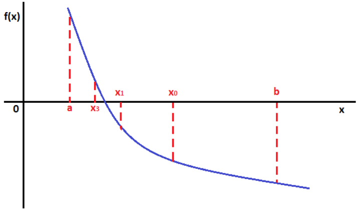
- *Za vsako vrednost y med m in M, $m \leq y \leq M$, obstaja točka $x_y \in [a, b]$, kjer je $f(x_y) = y$, tj. enačba $f(x) = y$ ima rešitev na intervalu $[a, b]$.*

Drugače povedano, zvezna funkcija f preslika omejen zaprt interval $[a, b]$ v omejen zaprt interval:

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Metode za iskanje ničel zveznih funkcij

- **Bisekcija**



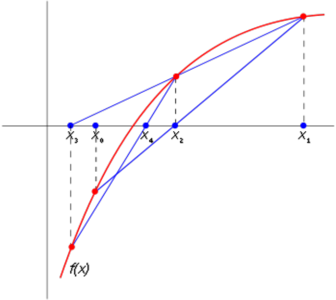
- Izberi začetna približka $a = x_0$ in $b = x_1$, ki zadoščata $f(a)f(b) < 0$.
- Izberi maksimalno število ponovitev M.
- Za $n = 2, 3, 4, \ldots, M$:

$$x_n = \frac{a+b}{2},$$
$$[a, b] = \begin{cases} [a, x_n], & \text{če je } f(a)f(x_n) < 0, \\ [x_n, b], & \text{če je } f(x_n)f(b) < 0. \end{cases}$$

- x_M je približek za ničlo.

Metode za iskanje ničel zveznih funkcij

- **Sekantna metoda**



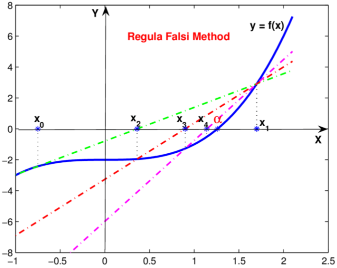
- Izberi začetna približka $a = x_0$ in $b = x_1$.
- Izberi maksimalno število ponovitev M.
- Za $n = 2, 3, 4, \ldots, M$:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}.$$

- x_M je približek za ničlo.

Metode za iskanje ničel zveznih funkcij

▶ Regula falsi



- Izberi začetna približka $a = x_0$ in $b = x_1$ tako, da je $f(a)f(b) < 0$, in maksimalno število ponovitev M.
- Za $n = 2, 3, 4, \ldots, M$:

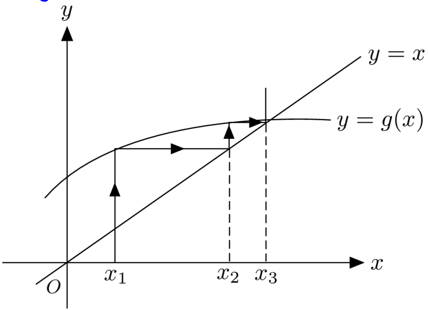
$$x_n = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)},$$

$$[a, b] = \begin{cases} [a, x_n]\,, & \text{če je } f(a)f(x_n) < 0, \\ [x_n, b]\,, & \text{če je } f(x_n)f(b) < 0. \end{cases}$$

- x_M je približek za ničlo.

Metode za iskanje ničel zveznih funkcij

- **Navadna iteracija**



- Poiščemo funkcijo $g(x)$, tako da je ničla α funkcije f njena negibna točka, tj. $g(\alpha) = \alpha$.
- Izberemo začetni približek x_0 in maksimalno število korakov M.
- Za $n = 1, 2, 3, \ldots, M$:

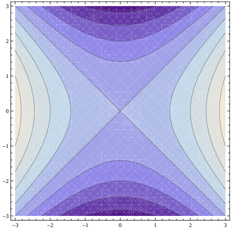
$$x_n = g(x_{n-1}).$$

- Če zaporedje $(x_n)_n$ konvergira, potem je x_M približek za ničlo funkcije f. Konvergenca $(x_n)_n$ je odvisna od odvoda $g'(\alpha)$.

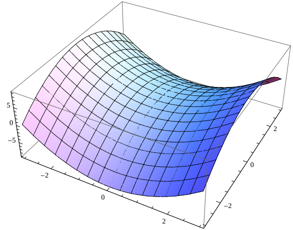
Nivojske krivulje

Nivojska krivulja (na kratko **nivojnica**) funkcije $f(x, y)$ je krivulja v $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$, podana z enačbo $f(x, y) = c$.

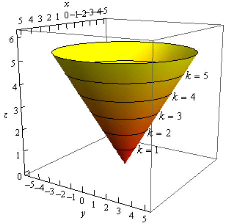
$f(x, y) = \sin x + \cos y$



$g(x, y) = x^2 - y^2$



$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



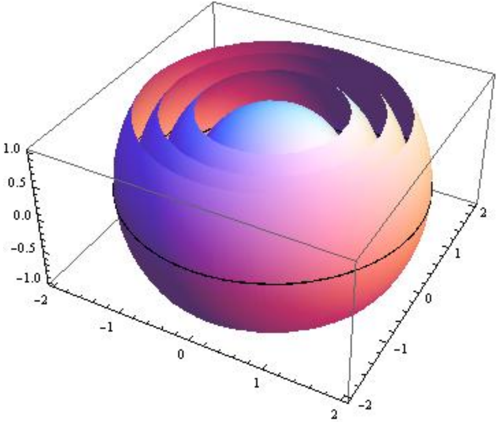
Nivojske ploskve

Nivojske ploskve funkcije treh spremenljivk so ploskve v $\mathbb{R}^3$, podane z enačbo $f(x, y, z) = c$.

Nivojske ploskve funkcije

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

so sfere



Limita funkcije dveh spremenljivk

Neformalno: L je limita funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki (a, b), če je vrednost $f(x, y)$ poljubno blizu L, če je le (x, y) dovolj blizu (a, b) (a nujno ne enak (a, b)).

Formalno: Število L je **limita** funkcije $f(x, y)$ v točki (a, b), če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, za vsako točko (x, y) v krogu s polmerom δ okrog točke (a, b).
Krog s polmerom δ okrog (a, b) je množica vseh takšnih točk (x, y), da velja

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2.$$

Funkcija $f(x, y)$ je **zvezna** v točki (a, b), če je

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Računanje limit

Primer

Ali obstajajo naslednje limite:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

  Krog s polmerom δ *okoli točke* $(0,0)$ *v polarnih koordinatah zapišemo kot* $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, *kjer* $r \in [0,\delta]$ *in* $\varphi \in [0, 2\pi]$. *Pogoj* $(x,y) \to (0,0)$ *se v polarnih koordinatah glasi* $r \to 0$. *Velja*

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} \sin 2\varphi.$$

  Zadnja limita pa ne obstaja, saj izraz sploh ni odvisen od r.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$.

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\sin 2\varphi\cos\varphi = 0.$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

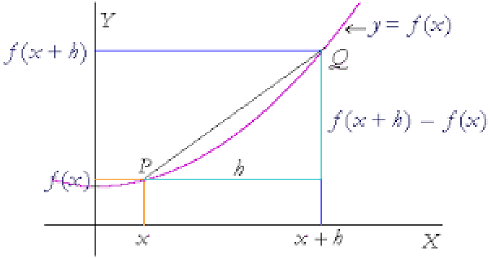
Odvod

Funkcija $f(x)$ naj bo definirana na nekem intervalu okrog točke x_0.

Diferenčni kvocient funkcije f v točki x_0,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

predstavlja relativno spremembo funkcijske vrednosti pri spremembi neodvisne spremenljivke za h.



Diferenčni kvocient je enak smernemu koeficientu sekante na graf skozi točko $(x_0, f(x_0))$ in bližnjo točko $(x_0+h, f(x_0+h))$.

Odvod

Odvod funkcije f v točki x_0 je limita diferenčnega kvocienta

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

če le-ta obstaja. V tem primeru pravimo, da je funkcija f **odvedljiva v točki x_0**.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je **odvedljiva na $\mathcal{D}$**, če je odvedljiva v vsaki točki $x_0 \in \mathcal{D}$.

Izračunaj odvode naslednjih funkcij, kjer obstajajo:

- $f(x) = c$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to \infty} \frac{c - c}{h} = 0.$$

- $g(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to \infty} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \ldots + h^n\right) - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right) = n x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Odvod

- $h(x) = \log x$:

$$h'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log \frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$
$$= \lim_{t\to 0} \left(\log(1+t)^{\frac{1}{tx_0}}\right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{x_0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)$$
$$= \frac{1}{x_0}\log\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{x_0}\log e = \frac{1}{x_0},$$

kjer smo v predpredzadnji enakosti upoštevali, da je log zvezna, da smo lahko zamenjali lim in log.

- $k(x) = \sin x$.

$$k'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$
$$= \left(\lim_{h\to 0}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0,$$

kjer smo v tretji enakosti upoštevali enakost (za $\alpha = x + \frac{h}{2}$, $\beta = \frac{h}{2}$)

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta.$$

Pomen odvoda

Odvod $f'(x_0)$ je

- **relativna sprememba** vrednosti $f(x_0)$, če se vrednost spremenljivke x_0 malce spremeni
- **hitrost spreminjanja** funkcije f v x_0
- **naklonski koeficient tangente** na graf v točki $(x_0, f(x_0))$

Trditev

Če je f odvedljiva v točki x_0, potem je v x_0 tudi zvezna.

Dokaz.

- Po karakterizacije limit funkcij moramo pokazati, da za vsako zaporedje $(a_n)_n$ z $\lim_n a_n = x_0$ velja $\lim_n f(a_n) = f(x_0)$.
- Definirajmo funkcijo $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Vemo, da velja $\lim_{x\to x_0} g(x) = f'(x_0)$. Po karakterizaciji limit funkcij vemo, da za vsako zaporedje $(a_n)_n$ z $\lim_n a_n = x_0$ velja $\lim_n g(a_n) = \frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0} = f'(x_0)$.
- Ker je $\lim_n(a_n - x_0) = 0$, mora za obstoj $\lim_n g(a_n)$ veljati $\lim_n(f(a_n) - f(x_0)) = 0$. V nasprotnem bi namreč obstajal $\epsilon > 0$ in neko podzaporedje $(a_{n_k})_k$ zaporedja $(a_n)_n$, tako da bi za vsak k veljalo $|f(a_{n_k}) - f(x_0)| > \epsilon$. Toda potem $\lim_k g(a_{n_k})$ ne bi obstajala (števec bi bil po absolutni vrednosti vedno večji od ϵ).

Opomba

Če je f zvezna v točki x_0, potem v x_0 ni nujno odvedljiva. Primer - funkcija $f(x) = |x|$ je zvezna v točki 0, ni pa tam odvedljiva.

Levi odvod $f'_-(x_0)$ funkcije f v točki x_0 je leva limita, **desni odvod** $f'_+(x_0)$ pa desna limita diferenčnega kvocienta

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Funkcija je odvedljiva z leve, če obstaja levi odvod, in odvedljiva z desne, če obstaja desni odvod.

Funkcija $f(x) = |x|$ je odvedljiva z leve in z desne v točki $x_0 = 0$, vendar je

$$f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1,$$

zato v tej točki ni odvedljiva.

Pravila za računanje odvodov

Če sta $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji v $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, potem velja

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

  Dokaz. Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje z $\lim_n a_n = x_0$. Velja

  $$\begin{aligned}
  &\lim_n \frac{(f+g)(a_n) - (f+g)(x_0)}{a_n - x_0} = \lim_n \frac{f(a_n) + g(a_n) - f(x_0) - g(x_0)}{a_n - x_0} \\
  &= \lim_n \left(\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} + \frac{g(a_n) - g(x_0)}{a_n - x_0} \right) \\
  &= \lim_n \left(\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \right) + \lim_n \left(\frac{g(a_n) - g(x_0)}{a_n - x_0} \right) \\
  &= f'(x_0) + g'(x_0).
  \end{aligned}$$

  Po karakterizacije limit funkcij z zaporedji velja lasnost odvoda vsote funkcij.

- Za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ velja $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, kjer $g(x) \neq 0$
- **Verižno pravilo** za posredno odvajanje funkcij. Če je še $\mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{D}_g$ in je g odvedljiva v $f(x)$, potem velja

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Dokaz. Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje z $\lim_n a_n = x_0$. Velja

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{(g \circ f)(a_n) - (g \circ f)(x_0)}{a_n - x_0} &= \lim_n \frac{g(f(a_n)) - g(f(x_0))}{a_n - x_0} \\
&= \lim_n \left(\frac{g(f(a_n)) - g(f(x_0))}{f(a_n) - f(x_0)} \cdot \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \right) \\
&= \lim_n \left(\frac{g(f(a_n)) - g(f(x_0))}{f(a_n) - f(x_0)} \right) \lim_n \left(\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \right) \\
&= g'(f(x_0))f'(x_0).
\end{aligned}$$

Po karakterizacije limit funkcij z zaporedji velja verižno pravilo.

- Če ima f inverzno funkcije in je $f'(x) \neq 0$, potem je

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Uporaba odvoda

1. linearna aproksimacija funkcij,

   V bližini točke x_0 funckijsko vrednost računamo tako, da izračunamo tangento na graf funkcije in $f(x)$ aproksimiramo z vrednostjo na tangenti pri tem x.

   Tangenta v x_0:

   $$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

   Približek za $f(x_0 + h)$ za majhne h je

   $$\boxed{f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h}.$$

   Primera:

   $$\sqrt{0.98} = \sqrt{1 - 0.02} = \sqrt{1} - \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0.02 = 1 - 0.01 = 0.99.$$

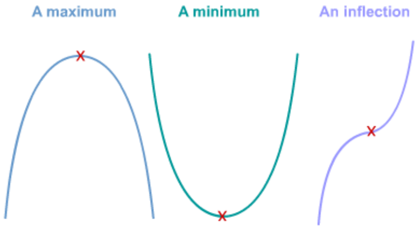
   $$\cos\left(\frac{21\pi}{120}\right) = \cos\left(\frac{20\pi}{120} + \frac{\pi}{120}\right) = \cos\left(\frac{20\pi}{120}\right) - \sin\left(\frac{20\pi}{120}\right)\frac{\pi}{20}$$
   $$= \sqrt{3}2 - \frac{\pi}{40}.$$

2. analiza naraščanja in padanja funkcij,

   V točkah x, kjer je $f'(x) \geq 0$ (oz. $f'(x) > 0$), funkcija **naraščа** (oz. **strogo narašča**). V točkah x, kjer je $f'(x) \leq 0$ (oz. $f'(x) < 0$), funkcija **pada** (oz. **strogo pada**).

3. iskanje stacionarnih točk in ekstremov funkcij,

   Točke x, kjer je $f'(x) = 0$ so **stacionarne**. Funkcija ima v x_0 **lokalni minimum** (oz. **lokalni maksimum**), če obstaja $\delta > 0$, tako da velja $f(x) \geq f(x_0)$ (oz. $f(x) \leq f(x_0)$) za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. **Lokalni ekstremi** funkcije so lokalni minimumi in lokalni maksimumi. Če ima funkcija lokalni ekstrem funkcije, potem je ta v stacionarni točki ali pa na robu definicijskega območja.



Prva trditev o obstoju lokalnih ekstemov:

- Če se predznak f' v stacionarni točki x_0 spremeni iz pozitivnega v negativnega, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni maksimum.
- Če se predznak f' v stacionarni točki x_0 spremeni iz negativnega v pozitivnega, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum.
- Če se predznak f' v stacionarni točki x_0 ne spremeni, potem funkcija f v točki x_0 nima lokalnega ekstrema.

Če $f' : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je f **dvakrat odvedljiva** na $\mathcal{D}$, odvod funkcije f' pa zapišemo kot

$$\boxed{f''(x) = (f')'(x)}$$

in imenujemo **drugi odvod** funkcije f.

Če $f'' : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je f **trikrat odvedljiva** na $\mathcal{D}$, $f'''(x) = (f'')'(x)$ imenujemo **tretji odvod** funkcije f.

Če lahko funkcijo f n-krat odvajamo na $\mathcal{D}$, potem pravimo, da je funkcija f **n-krat odvedljiva** na $\mathcal{D}$, **n-ti odvod** funkcije f pa označimo z

$$\boxed{f^{(n)} = (f^{(n-1)})'(x).}$$

Druga trditev o obstoju lokalnih ekstremov:

- Če je $f''(x_0) < 0$, kjer je x_0 stacionarna točka, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni maksimum.
- Če je $f''(x_0) > 0$, kjer je x_0 stacionarna točka, potem ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum.

Tretja trditev o obstoju lokalnih ekstremov: Če v stacionarni točki x_0 funkcije f velja $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, potem naj bo n najmanjše naravno število, ki zadošča

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{in} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Če je n liho število, potem v x_0 ni lokalnega ekstrema.
- Če pa je n sodo število, potem je v primeru:
  - $f^{(n)}(x_0) > 0$ točka x_0 lokalni minimum.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0$ točka x_0 lokalni maksimum.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ima v točki x_0:

- **globalni maksimum**, če velja $f(x_0) \geq f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}$.
- **globalni minimum**, če velja $f(x_0) \leq f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}$.
- **globalni ekstrem**, če je v x_0 globalni minimum ali globalni maksimum.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Na $[a, b]$ iščemo globalni ekstrem po naslednjem postopku:

- Določimo vse stacionarne točke $x_1, \ldots, x_n$ in izračunamo vse funkcijske vrednosti $f(x_1), \ldots, f(x_n)$.
- Izračunamo vrednosti $f(a), f(b)$.
- Poiščemo največjo vrednost iz zgornjih korakov.

Primer: Določimo globalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$ na intervalu $[-8, 4]$.

- $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$. Stacionarne točke zadoščajo $f'(x) = 0$ oz. $x^2 + 2x - 12 = (x + 4)(x - 2) = 0$. Torej $x_1 = -4$ in $x_2 = 2$.
- $f''(x) = 6x + 6$. Ker je $f''(-4) = -18$, je x_1 lokalni maksimum. Ker je $f''(2) = 18$, je x_2 lokalni minimum.
- Izračunamo $f(-8) = -128$, $f(-4) = 80$, $f(2) = -28$ in $f(4) = 16$. Torej je $x = -8$ globalni minimum, x_1 pa globalni maksimum.

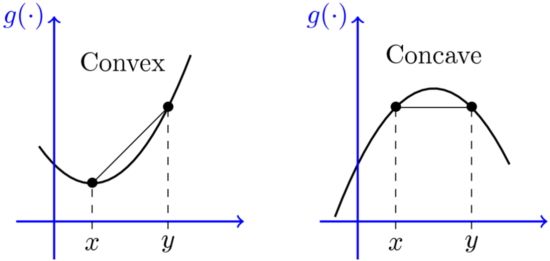
4. analiza konveksnosti in konkavnosti funkcij,

Funkcija f je **konveksna** na intervalu (a, b), če za vsaki točki $x, y \in (a, b)$ graf funkcije leži **pod sekanto** skozi točki $(x, f(x))$ in $(y, f(y))$.

Funkcija f je **konkavna** na intervalu (a, b), če za vsaki točki $x, y \in (a, b)$ graf funkcije leži **nad sekanto** skozi točki $(x, f(x))$ in $(y, f(y))$.

Če je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f konveksna na (a, b).

Če je $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, je f konkavna na (a, b).



5. risanje grafov funkcij

Za izris grafa funkcije $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ lahko upoštevamo naslednje:

1. Določimo definicijsko območje $\mathcal{D}_f$, ničle ter obnašanje funkcije na robu definicijskega območja.
2. Izračunamo odvod f'. Ničle odvoda nam določajo stacionarne točke, predznak pa območja naraščanja in padanja.
3. Izračunamo drugi odvod f''. Predznak f'' nam pove, kje je funkcija f konveksna in kje konkavna.

Narišimo graf funkcije $f(x) = x^2 e^{-x}$.

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Ničla je $x = 0$. Obnašanje na robu:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$
- $f'(x) = e^{-x}x(2-x)$ in $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$.
- Stacionarni točki sta $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$. Ker je $f''(0) = 2$, je x_1 lok. minimum. Ker je $f''(2) = -2e^{-2} < 0$, je x_2 lok. maksimum.
- $f'(x) > 0$ natanko za $x \in (0,2)$. Torej je f naraščajoča na intervalu $(0,2)$ in padajoča na $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$.
- $f''(x) > 0$ natanko za $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, \infty)$. Tu je funkcija konveksna. Na intervalu $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ pa je f konkavna.

6. Računanje limit: L'Hospitalovo pravilo 1

Izrek

Naj bosta f, g odvedljivi funkciji na intervalu (a, b), tako da je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Naj bo $c \in (a, b)$ tak, da velja eden od naslednjih pogojev:

1. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x) \in \{-\infty, \infty\}$ *in* $\lim\limits_{x \to c} g(x) \in \{-\infty, \infty\}.$

Potem je

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}},$$

če desna limita obstaja.

Primera. Naj bo $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x \to 0} x^n \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^n}} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-n \frac{1}{x^{n+1}}} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{n} x^n = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

6. Računanje limit: L'Hospitalovo pravilo 2

Izrek

Naj bosta f, g odvedljivi funkciji na intervalu (A, ∞), tako da je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in (A, \infty)$. Naj velja eden od pogojev:

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$
2. $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \{-\infty, \infty\}$ *in* $\lim_{x\to\infty} g(x) \in \{-\infty, \infty\}.$

Potem je

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}},$$

če desna limita obstaja.

Primeri.

$$\lim_{x\to\infty} x^2(e^{-x^{-2}} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^{-2}} - 1}{x^{-2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{-3}e^{-x^{-2}}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^{-2}}}{-1} = -1.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p_n(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n! a_n}{e^x} = 0.$$

7. Natančnejša aproksimacija funkcije

Spomnimo se linearne aproskimacije funkcije v okolici točke x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Izkaže se, da je lahko to še izboljšamo z naslednjim zaporedjem aproksimacij:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2,$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3,$$

$$\vdots$$

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{T_n(x;x_0)}.$$

Polinomu $T_n(x; x_0)$ pravimo **Taylorjev polinom stopnje n** funkcije f v točki x_0 in zadošča

$$T_n(x_0; x_0) = f(x_0),\ T_n'(x_0; x_0) = f'(x_0),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(x_0; x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Torej se vsak naslednji Taylorjev polinom bolj prilega grafu funkcije f v okolici točke x_0, saj se ujema še v enem odvodu višje stopnje.

7. Natančnejša aproksimacija funkcije - Taylorjeva formula

Izrek

Če je f vsaj $(n+1)$-krat odvedljiva v točki x_0, potem na nekem intervalu okrog x_0 velja **Taylorjeva formula***:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(f(x)),$$

kjer je

$$R_n(f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

za nek c med x_0 in x.

Če je f neskončnokrat odvedljiva v točki x_0, potem ji lahko priredimo **Taylorjevo vrsto** v točki x_0:

$$T_f(x; x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots .$$

Če v točki x velja $\lim_{n\to\infty} R_n(f(x)) = 0$, potem je $f(x) = T_f(x; x_0)$.

Odvodi funkcije dveh spremenljivk

Parcialna odvoda funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$ v točki (a, b) definiramo kot

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

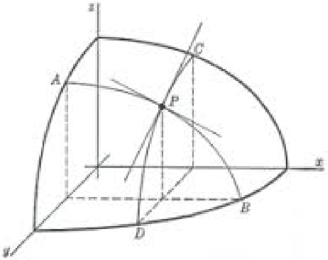
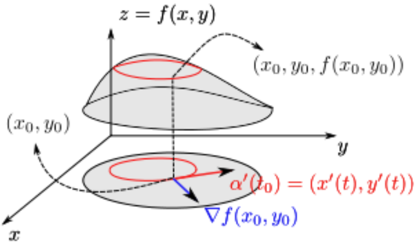


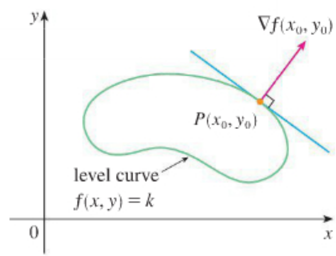
Fig. 1

Gradient funkcije v (x, y)

Gradient funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) je vektor

$$\mathrm{grad} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$





Pomen gradienta

Parcialni odvod po x v točki (x_0, y_0)

- je **relativna sprememba funkcijske vrednosti** pri zelo majhni spremembi spremenljivke x, kjer je neodvisna spremenljivka y fiksna,
- je **smerni koeficient tangente** pri x_0 na krivuljo, ki jo dobimo, če graf funkcije prerežemo vzdolž ravnine $y = y_0$,
- opisuje **gibanje funkcijskih vrednosti** (naraščanje ali padanje) ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri osi x.

Parcialni odvodi funkcije n spremenljivk

Parcialni odvod funkcije n spremenljivk $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ po spremenljivki x_i v točki $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ definiramo kot

$$\begin{aligned} f_{x_i}(a_1, \dots, a_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n))}{h}. \end{aligned}$$

Gradient funkcije n spremenljivk $f(x_1, \dots, x_n)$ v točki $(a_1, \dots, a_n)$ je vektor v $\mathbb{R}^n$, ki ima za komponente vse parcialne odvode:

$$\mathrm{grad}\ f(a_1, \dots, a_n) = (f_{x_1}(a_1, \dots, a_n), \dots, f_{x_n}(a_1, \dots, a_n)).$$

Za računanje parcialnih odvodov lahko uporabljamo pravila za odvajanje, pri čemer eno spremenljivko obravnavamo kot spremenljivko, ostale pa kot parametre (tj. konstante).

Diferenciabilnost funkcije dveh spremenljivk

Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je **diferenciabilna** v točki (a, b), če je

$$f(a + h_1, b + h_2) = f(a, b) + f_x(a, b)h_1 + f_y(a, b)h_2 + o(h_1, h_2),$$

kjer je $o : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija, ki zadošča

$$\lim_{h_1^2 + h_2^2 \to 0} \frac{o(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0. \tag{1}$$

Pogoj (1) pomeni, da je vrednost funkcije $o(h_1, h_2)$ za majhne h_1, h_2 zanemarljiva v primerjavi z razdaljo točke (h_1, h_2) od izhodišča. Torej je za majhne h_1, h_2 funkcijska vrednost $f(a + h_1, b + h_2)$ približno

$$f(a, b) + f_x(a, b)h_1 + f_y(a, b)h_2.$$

Izrek

Če parcialna odvoda $f_x(a, b)$ in $f_y(a, b)$ v neki okolici točke (a, b) obstajata in sta zvezni funkciji, potem je funkcija f v točki (a, b) diferenciabilna.

Odvajanje funkcije dveh spremenljivk po parametru

Imamo naslednje podatke:

- $f(x, y)$ je parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk v vsaki točki (x, y) iz množice $D \subset \mathbb{R}^2$, pri čemer sta parcialna odvoda $f_x(x, y)$ in $f_y(x, y)$ zvezni funkciji,
- $x(t)$ in $y(t)$ sta odvedljivi funkciji spremenljivke t, tako da je za vsak t točka $(x(t), y(t))$ v D.

Sestavljena funkcija

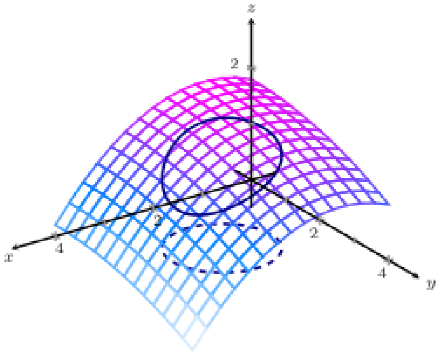
$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

je odvedljiva in velja **verižno pravilo**:

$$\boxed{g'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)}$$

Odvajanje funkcije dveh spremenljivk po parametru

Funkcija $g(t)$ opisuje vrednosti $f(x, y)$ nad parametrizirano krivuljo $x = x(t), y = y(t)$, njen odvod $g'(t)$ pa spremembo funkcijske vrednosti $f(x, y)$ ob majhnem premiku vzdolž parametrizirane krivulje $x = x(t), y = y(t)$.



Primer. Iz točke $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ se malo premaknemo vzdolž enotske krožnice $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$. Ali bo vrednost funkcije $f(x, y) = 3 + x^2 - y^2$ ob tem narasla ali padla?

Funkcijsko vrednost pri gibanju po krožnici opisuje funkcija $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. Zanima nas $g'(t_0)$, kjer je $(\cos t_0, \sin t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ oz. $t_0 = \frac{\pi}{3}$. Z verižnim pravilom dobimo

$$g'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0).$$

Velja

$$f_x(x, y) = 2x, \ f_y(x, y) = -2y \quad \text{in} \quad x'(t) = -\sin t, \ y'(t) = \cos t.$$

Torej

$$g'(t_0) = -2x(t_0) \sin t_0 - 2y(t_0) \cos t_0 = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{3}.$$

Ker je $g'(t_0) < 0$, bo funkcijska vrednost padala.

Odvajanje funkcije več spremenljivk po parametrih

Naj velja:

- Funkcija $f(x_1, \ldots, x_n)$ ima zvezne parcialne odvode po vseh spremenljivkah.
- Vsaka spremenljivka x_i je parcialno odvedljiva funkcija

$$x_i(t_1, \ldots, t_m) =: x_i(\underline{t}), \quad i = 1, \ldots, m,$$

m novih skupnih spremenljivk.

Sestavljena funkcija

$$g(t_1, \ldots, t_m) = f(x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_m))$$

je odvedljiva in velja **verižno pravilo** za odvajanje:

$$\boxed{g_{t_i}(\underline{t}) = \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(x_1(\underline{t}), \ldots, x_n(\underline{t}))(x_j)_{t_i}(\underline{t})}.$$

Primeri:

- Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^x$ z uporabo verižnega pravila.

  Definirajmo funkcijo $g(x, y) = x^y$. Naj bo $x(t) = y(t) = t$ za $t \in \mathbb{R}$. Zanima nas odvod $f'(t)$ funkcije $f(t) = g(x(t), y(t)) = t^t$. Velja

  $$g_x(x, y) = yx^{y-1},\ f_y(x, y) = \log x \cdot x^y \quad \text{in} \quad x'(t) = y'(t) = 1.$$

  Po verižnem pravilu sledi

  $$f'(t) = g_x(x(t), y(t))x'(t) + g_y(x(t), y(t))y'(t) = tt^{t-1} + \log t \cdot t^t = t^t(1 + \log t).$$

- Izračunajmo, direktno in s pomočjo verižnega pravila, odvod sestavljene funkcije $g(t) = f(x(t), y(t))$, kjer je $f(x, y) = x^2 + y^3$ in
  - $x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos t,$

    Direktno:

    $$g(t) = \sin^2(t) + \cos^3 t \ \Rightarrow\ g'(t) = 2\sin t \cos t - 3\cos^2 t \sin t.$$

    Z verižnim pravilom

    $$\begin{aligned} g'(t) &= f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= 2x(t)x'(t) + 3y(t)^2 y'(t) = 2\sin t \cos t - 3\cos t^2 \sin t. \end{aligned}$$

  - $x(t) = t, y(t) = 0,$

    $$g(t) = t^2 \ \Rightarrow\ g'(t) = 2t, \qquad g'(t) = 2x(t)x'(t) + 3y(t)^2 y'(t) = 2t.$$

Smerni odvod funkcije dveh spremenljivk

Funkcija $f = f(x, y)$ naj ima zvezne parcialne odvode na območju $D \subset \mathbb{R}^2$, naj bo $(x_0, y_0) \in D$ in naj bo

$$x(t) = x_0 + te_1, \quad y(t) = y_0 + te_2 \quad t \in \mathbb{R}$$

enačba premice skozi točko (x_0, y_0) s smernim vektorjem $\vec{e}$.

Odvod sestavljene funkcije

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f(x_0 + te_1, y_0 + te_2)$$

v točki $t = 0$ je enak

$$\boxed{g'(0) = f_x(x_0, y_0)e_1 + f_y(x_0, y_0)e_2 = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{e} =: f_{\vec{e}}(x_0, y_0)},$$

imenujemo ga **smerni odvod funkcije f v smeri vektorja $\vec{e}$** v točki (x_0, y_0).

Smerni odvod $f_{\vec{e}}(x_0, y_0)$ meri **spremembo funkcijske vrednosti** ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$.

Smerni odvod funkcije dveh spremenljivk

Smerni odvod:

- v smeri vektorja $\vec{e} = (1, 0)$, je enak parcialnemu odvodu $f_{\vec{e}} = f_x$,
- v smeri vektorja $\vec{e} = (0, 1)$, je enak parcialnemu odvodu $f_{\vec{e}} = f_y$.

Smerni odvod

- je **relativna sprememba** funkcijske vrednosti ob majhnem premiku iz točke v smeri vektorja $\vec{e}$,
- **smerni koeficient tangente** na krivuljo

$$g(t) := f(x_0 + e_1 t, y_0 + e_2 t)$$

v točki $t = 0$, če po krivulji potujemo s hitrostjo velikosti vektorja (e_1, e_2).

Pomen odvodov za funkcijo dveh spremenljivk

Za funkcijo dveh spremenljivk $f = f(x, y)$ velja:

- če je $f_x(x_0, y_0) > 0$, f ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri osi x, narašča, in če je $f_x(x_0, y_0) < 0$, pada,
- če je $f_y(x_0, y_0) > 0$, f ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri osi y, narašča, in če je $f_y(x_0, y_0) < 0$, pada,
- za poljuben enotski vektor $\vec{e}$: če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) > 0$, potem f ob majhnem pomiku v smeri vektorja $\vec{e}$, narašča, in če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) < 0$, pada.

Ali funkcija

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$$

v točki $(2, -1)$ v smeri vektorja $(1, -1)$ narašča ali pada?

$$\begin{aligned} f_{(1,-1)}(2, -1) &= f_x(2, -1) \cdot 1 + f_y(2 - 1) \cdot (-1) \\ &= (2x + 2y)(2, -1) - (2x - 2y)(2, -1) = -4. \end{aligned}$$

Torej funkcija pada.

Pomen odvodov za funkcijo dveh spremenljivk

V kateri smeri se moramo premakniti iz točke (x_0, y_0), da bo funkcijska vrednost $f(x, y)$ najhitreje narasla?

Smerni odvod v smeri vektorja $\vec{e}$, kjer je $|\vec{e}| = 1$, je

$$\boxed{f_{\vec{e}}(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{e} = |\text{grad } f(x_0, y_0)| \cos\varphi},$$

kjer je φ kot med grad$f(x_0, y_0)$ in $\vec{e}$.

Smerni odvod ima največjo vrednost, če je $\varphi = 0$, torej če $\vec{e}$ kaže v smeri vektorja grad $f(x_0, y_0)$. Vektor grad $f(x_0, y_0)$ torej kaže:

- **v smeri najhitrejšega naraščanja funkcijske vrednosti** (tj. največje strmine grafa),
- **v smeri pravokotno na nivojske krivulje**.

Uporaba odvoda funkcij dveh spremenljivk

1. Linearna aproksimacija funkcije dveh spremenljivk:

   Naj bo funkcija $f(x, y)$ v okolici točke (x_0, y_0) parcialno odvedljiva po x in y in naj bosta $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ zvezni funkciji v (x_0, y_0).

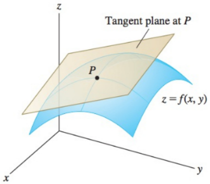
   Linearno funkcijo dveh spremenljivk

   $$\boxed{L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

   imenujemo **linearna aproksimacija** funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0). Členu

   $$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

   pravimo **totalni diferencial** funkcije f v točki (x_0, y_0) in ga označimo z $df(x_0, y_0)$.



Iz izpeljave verižnega pravila se spomnimo izreka, da je funkcija f, za katero obstaja okolica točke (x_0, y_0), v kateri sta oba parcialna odvoda $f_x(x, y)$ in $f_y(x, y)$ zvezni funkciji, diferenciabilna v (x_0, y_0). To pa pomeni, da je pri majhnih spremembah $x - x_0$ in $y - y_0$ totalni diferencial približno enak spremembi funkcijske vrednosti:

$$df(x_0, y_0) \doteq \Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

in vrednost linearne aproksimacije je približno enaka vrednosti f

$$f(x, y) \doteq L(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Primer. Izračunajmo približno vrednost $\sqrt{1,01^2 + 2,02^3}$.

Definiramo funkcijo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Zanima nas $f(1.01, 2.02)$. Izračunajmo še $f_x(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^3}} \cdot 2x$ in $f_y(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^3}} \cdot 3y^2$. Velja $f(1, 2) = 3$, $f_x(1, 2) = \frac{1}{3}$, $f_y(1, 2) = 2$. Sledi:

$$\begin{aligned} f(1.01, 2.02) &\doteq f(1, 2) + f_x(1, 2)(1.01 - 1) + f_y(1, 2)(2.02 - 2) \\ &= 3 + \frac{1}{3} \cdot 0.01 + 2 \cdot 0.02 = 3.0433 \cdots . \end{aligned}$$

2. analiza naraščanja in padanja funkcij v izbrani smeri,

   Funkcija f pri premikanju iz točke (x_0, y_0) v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$ narašča (oz. strogo narašča), če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) \geq 0$ (oz. $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) > 0$).
   Funkcija f pri premikanju iz točke (x_0, y_0) v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$ pada (oz. strogo pada), če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) \leq 0$ (oz. $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) < 0$).

3. Stacionarne točke in ekstremi funkcije več spremenljivk

   Naj bo $f(x_1, \ldots, x_n)$ parcialno odvedljiva funkcija n spremenljivk. Točka $a \in \mathbb{R}^n$ je **stacionarna** ali **kritična točka** funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$, če so vsi parcialni odvodi v točki a enaki 0, tj.

$$f_{x_1}(a) = 0, \quad f_{x_2}(a) = 0, \quad \ldots, \quad f_{x_n}(a) = 0.$$

   V stacionarni točki

   - je gradient funkcije enak ničelnemu vektorju,
   - so vsi smerni odvodi enaki 0,
   - je totalni diferencial enak 0,

Primer. Za $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ velja $f_x(x,y) = 2x - 2$ in $f_y(x,y) = 2y - 6$, zato je edina stacionarna točka $(1,3)$. Nivojnica skozi $(1,3)$ je množica

$$\begin{aligned}
&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = f(1,3) = 4\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 = 4\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + (y-3)^2 = 0\} \\
&= \{(1,3)\}.
\end{aligned}$$

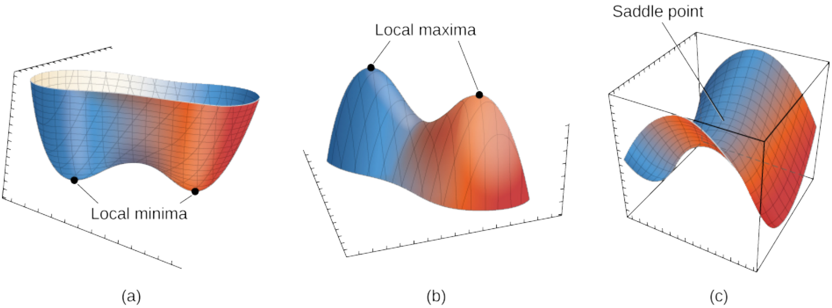
Primer. Za $f(x,y) = x^2 - y^2$ velja $f_x(x,y) = 2x$ in $f_y(x,y) = -2y$, zato je edina stacionarna točka $(0,0)$. Nivojnica skozi $(0,0)$ je množica

$$\begin{aligned}
&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = f(0,0) = 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 = y^2\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = -y \text{ ali } x = -y\}.
\end{aligned}$$

Funkcija f ima v točki T **lokalni maksimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je funkcijska vrednost v vseh točkah, ki so od T oddaljene za manj kot δ, manjša ali enaka vrednosti v točki T.

Funkcija f ima v točki T **lokalni minimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da je funkcijska vrednost v vseh točkah, ki so od T oddaljene za manj kot δ, večja ali enaka vrednosti v točki T.

Lokalni ekstrem funkcije so lokalni minimumu in lokalni maksimumi.



Potreben pogoj za lokalni ekstrem funkcije več spremenljivk: Če je funkcija f v točki $a \in \mathbb{R}^n$ parcialno odvedljiva in ima v tej točki lokalni ekstrem, potem je a stacionarna točka funkcije f.

- **Parcialni odvodi 2. reda** funkcije f v točki (x_0, y_0):

$$f_{xx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad f_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0),$$

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad f_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

- Matriko

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

  imenujemo **Hessejeva matrika** funkcije f v točki (x_0, y_0).

- Če sta f_{xy} in f_{yx} zvezni funkciji v (x_0, y_0), potem je

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

  Torej je H_f simetrična.

- Funkcija n spremenljivk ima n^2 parcialnih odvodov 2. reda, njena Hesssejeva matrika je simetrična matrika reda $n \times n$.

Trditev o klasifikaciji stacionarnih točk: Naj bo (x_0, y_0) stacionarna točka vsaj dvakrat parcialno zvezno odvedljive funkcije f.
Naj bo

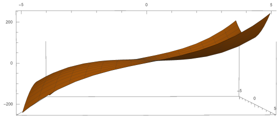
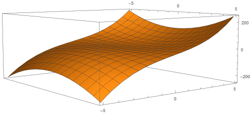
$$D(x_0, y_0) := f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

$D(x_0, y_0)$ imenujemo tudi **determinanta** matrike $H_f(x_0, y_0)$. Velja:

- Če je $D(x_0, y_0) > 0$, je v točki (x_0, y_0)
  - lokalni minimum, če je $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ in
  - lokalni maksimum, če je $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.
- Če je $D(x_0, y_0) < 0$, v točki (x_0, y_0) ni ekstrema, imamo sedlo.
- Če je $D(x_0, y_0) = 0$, pa samo iz drugih parcialnih odvodov ne moremo o lokalnih ekstremih v (x_0, y_0) ničesar sklepati.

Primer. Določimo in klasificirajmo lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^2y + y^3 - y.$$

Velja $f_x(x,y) = 2xy$ in $f_y(x,y) = x^2 + 3y^2 - 1$. Stacionarne točke so tako

$$(0, \sqrt{\frac{1}{3}}), \quad (0, -\sqrt{\frac{1}{3}}), \quad (1,0) \quad \text{in} \quad (-1,0).$$

Velja še $f_{xx}(x,y) = 2y$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x$, $f_{yy}(x,y) = 6y$. Sledi

$$H_f(0, \sqrt{\frac{1}{3}}) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}, \quad H_f(0, -\sqrt{\frac{1}{3}}) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & -6\sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix},$$

$$H_f(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sledi

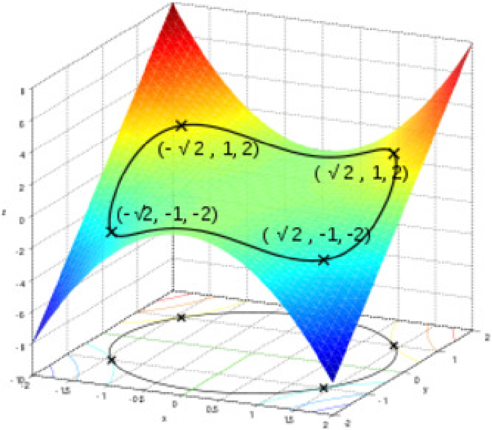
$$D(0, \sqrt{\frac{1}{3}}) = 4, \quad D(0, -\sqrt{\frac{1}{3}}) = 4, \quad D(1,0) = -4 \quad \text{in} \quad D(-1,0) = -4.$$

Točka $\left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ je lokalni minimum, $\left(0, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ lokalni maksimum, točki $(1,0)$ in $(-1,0)$ pa sta sedli.

4. Vezani ekstremi

Vezani ekstremi funkcije f pri pogoju $g(x, y) = 0$ so

- največje in najmanjše vrednosti $f(x, y)$ med točkami, ki zadoščajo pogoju $g(x, y) = 0$,
- lokalni ekstremi funkcije f nad krivuljo, podano z enačbo $g(x, y) = 0$.



Potreben pogoj za lokalni ekstrem (x_0, y_0) funkcije $f(x, y)$ nad krivuljo $g(x, y) = 0$:

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}: \ \mathrm{grad}\ f(x_0, y_0) = \lambda\ \mathrm{grad}\ g(x_0, y_0). \quad (1)$$

Dokaz. (Neobvezen, za radovedne.)

- Naj bo (x_0, y_0) lokalni ekstrem $f(x, y)$ nad $g(x, y) = 0$.
- Parametriziramo košček krivulje, določene s pogojem $g(x, y) = 0$, ki se začne v točki (x_0, y_0), s potjo $l(t) := (x(t), y(t))$, kjer je $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ in velja $l(0) = (x_0, y_0)$.
- Tvorimo funkcijo $h(t) := f(x(t), y(t))$. Ker je v $t = 0$ lokalni ekstrem f nad potjo $l(t)$, velja
$$\begin{aligned} 0 = h'(0) &= f_x(x(0), y(0))x'(0) + f_y(x(0), y(0))y'(0) \\ &= \mathrm{grad}\ f(x_0, y_0) \cdot (x'(0), y'(0)). \end{aligned}$$
- Torej je $\mathrm{grad}\ f(x_0, y_0)$ pravokoten na tangento $(x'(0), y'(0))$ na pot $l(t)$ v točki $t = 0$.
- Ker je pot $l(t)$ del nivojnice funkcije g za vrednosti 0, je tangenta $(x'(0), y'(0))$ pravokotna tudi na $\mathrm{grad}\ g(x(0), y(0)) = \mathrm{grad}\ g(x_0, y_0)$.
- To pa pomeni, da sta $\mathrm{grad}\ f(x_0, y_0)$ in $\mathrm{grad}\ g(x_0, y_0)$ vzporedna vektorja in velja (1).

- Na drug način lahko pogoj za obstoj vezanega ekstrema povemo tako, da tvorimo **Lagrangeovo funkcijo**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

  izračunamo njene stacionarne točke in med njimi študiramo, katere so lokalni ekstremi.

- Stacionarne točke (x_0, y_0, λ_0) funkcije L pa zadoščajo sistemu

$$\begin{aligned} L_x(x_0, y_0, \lambda_0) &= f_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g_x(x_0, y_0) = 0 \\ L_y(x_0, y_0, \lambda_0) &= f_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g_y(x_0, y_0) = 0 \\ L_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) &= -g(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

TODA: Projekcija vsake stacionarne točke (x_0, y_0, λ_0) funkcije L na prvi dve koordinati (x_0, y_0) ni nujno lokalni ekstrem funkcije f.

Opomba.

$$0 = g(x,y) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} \;\Rightarrow\; \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

je krožnica s središčem v točki $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ in polmerom $\sqrt{\frac{25}{2}}$.

- Tvorimo Lagrangeovo funkcijo
$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 12 - x - y - \lambda(x^2 + x + y^2 + y - 12).$$
- Dobimo Lagrangeov sistem
$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= -1 - \lambda(2x+1) = 0,\\ L_y(x,y,\lambda) &= -1 - \lambda(2y+1) = 0,\\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2 + x + y^2 + x - 12) = 0, \end{aligned}$$
- Iz $L_x(x,y,\lambda)$ in $L_y(x,y,\lambda)$ izrazimo λ in dobimo (če $x \neq -\frac{1}{2}$ in $y \neq -\frac{1}{2}$)
$$\lambda = -\frac{1}{2x+1} = -\frac{1}{2y+1} \;\Rightarrow\; 2x+1 = 2y+1 \;\Rightarrow\; x = y. \qquad (2)$$
Primera $x = -\frac{1}{2}$ ali $y = -\frac{1}{2}$ moramo obravnavati posebej:
    - Če je $x = -\frac{1}{2}$, potem iz $L_x(-\frac{1}{2}, y, \lambda)$ dobimo $-1 = 0$, kar je protislovje.
    - Če je $y = -\frac{1}{2}$, potem iz $L_y(x, -\frac{1}{2}, \lambda)$ dobimo $-1 = 0$, kar je protislovje.

5. Natančnejša aproksimacija funkcije - Taylorjevi polinomi

Če druge parcialne odvode še naprej odvajamo, dobimo **parcialne odvode višjih redov**.

Trditev. Če so višji parcialni odvodi zvezni, so neodvisni od vrstnega reda odvajanja.

Parcialni odvodi 3. reda funkcije $f(x,y)$ v točki (a,b):

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a,b)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)$$

Taylorjev polinom funkcije dveh spremenljivk

$f(x,y)$ naj bo vsaj trikrat parcialno odvedljiva v točki (x_0, y_0).

Taylorjev polinom prve stopnje okrog točke (x_0, y_0)

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

je enak linearni aproksimaciji $L(x,y)$ okrog točke (x_0, y_0).

Taylorjev polinom druge stopnje okrog točke (x_0, y_0):

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + (f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2)$$

Nedoločeni integral

Definicija: Funkcija $F : D \to \mathbb{R}$ je **nedoločeni integral** ali **primitivna funkcija** funkcije f na odprtem intervalu D, če za vsak $x \in \mathcal{D}$ velja

$$F'(x) = f(x).$$

Oznaka: $F(x) = \displaystyle\int f(x)\, dx$. Opomba: To je le oznaka nedoločenega integrala, ne pa definicija.

Primer. Ker je $(x^2)' = (5 + x^2)' = 2x$, sta $F_1(x) = x^2$ in $F_2(x) = 5 + x^2$ oba nedoločena integrala funkcije $f(x) = 2x$.

Enoličnost. Nedoločeni integral je določen le do konstante natanko. Če je $F'(x) = f(x)$, potem

- je $(F(x) + C)' = f(x)$ za vse konstante $C \in \mathbb{R}$,
- za vsak nedoločeni integral G funkcije f velja $G(x) = F(x) + C$ za nek $C \in \mathbb{R}$.

  Dokaz. Iz $G'(x) = F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in D$ sledi $(G - F)'(x) = 0$ za vsak $x \in D$. Ker je odvod v vseh točkah 0, je funkcija $G - F$ konstanta na D.

Integrali elementarnih funkcij

$$\begin{aligned}
\int x^\alpha \, dx &= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1, \\ \log|x| + C, & \alpha = -1, \end{cases} \\
\int \log x \, dx &= -x + x\log x + C, \\
\int e^x \, dx &= e^x + C, \\
\int a^x \, dx &= \frac{a^x}{\log a} + C, \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C, \\
\int \tan x \, dx &= -\log\cos x + C, \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C, \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \\
\int \frac{dx}{ax^2+b} &= \frac{\arctan(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}})}{\sqrt{a}\sqrt{b}} + C, \quad a, b > 0.
\end{aligned}$$

Pravila za računanje nedoločenih integralov

1. linearnost:

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))\, dx &= \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx, \\ \int \alpha f(x)\, dx &= \alpha \int f(x)\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primer (linearnost).

$$\begin{aligned} \int (1 - x^2)^2\, dx = \int (1 - 2x^2 + x^4)\, dx &= \int 1\, dx - \int (2x^2)\, dx + \int x^4\, dx \\ &= (x + C_1) - (2 \cdot \frac{x^3}{3} + C_2) + (\frac{x^5}{5} + C_3) \\ &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} + C, \end{aligned}$$

kjer so $C_1, C_2, C_3, C \in \mathbb{R}$ konstante.

2. vpeljava nove spremenljivke:
Naj bo $F : D \to \mathbb{R}$ nedoločen integral funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, tj.

$$F(x)' = f(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Naj bo $u : D' \to D$ taka odvedljiva funkcija, da je funkcija $F \circ u : D' \to \mathbb{R}$ definirana. Potem je $F \circ u$ nedoločen integral funkcije $(f \circ u)u' : D' \to \mathbb{R}$, tj.

$$(F \circ u)'(x) = f(u(x))u'(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Preverba. Velja

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x),$$

kjer smo v prvi enakosti uporabili pravilo za odvajanje kompozituma, v drugi pa dejstvo, da je F nedoločen integral f.

Uporaba.

- Zanima nas $\int f(u(x))u'(x)dx$.
- Denimo, da ne znamo izračunati $\int f(u(x))u'(x)dx$, znamo pa izračunati $\int f(x)dx$.

  Opomba. x v $\int f(x)dx$ in x v $\int f(u(x))u'(x)dx$ nista ista x-a. Sta samo imenovanje spremenljivke funkcije f v prvem primeru oz. funkcije $(f \circ u)u'$ v drugem primeru.
- Če je $F : D' \to \mathbb{R}$ nedoločen integral $\int f(x)dx$, potem je $F \circ u$ nedoločen integral $\int f(u(x))u'(x)dx$.

Integral neomejene funkcije

- Naj bo f definirana na intervalu $(a, b]$ in neomejena v okolici točke a, tj. za vsak $\delta > 0$ je f neomejena na okolici $(a, a + \delta)$. Naj bo f integrabilna na vsakem intervalu $[a + \delta, b]$, kjer je $\delta > 0$. Potem definiramo
$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\, dx,$$
če obstaja limita na desni strani.
- Naj bo f definirana na intervalu $[a, b)$ in neomejena v okolici točke b, tj. za vsak $\delta > 0$ je f neomejena na okolici $[a, b - \delta)$. Naj bo f integrabilna na vsakem intervalu $[a, b - \delta]$, kjer je $\delta > 0$. Potem definiramo
$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)\, dx,$$
če obstaja limita na desni strani.
- Naj bo $c \in (a, b)$, f pa definirana na intervalu $[a, b] \setminus \{c\}$ in neomejena v okolici točke c, tj. za vsak $\delta > 0$ je f neomejena na okolici $(c - \delta, c + \delta)$. Naj bo f integrabilna na vsakem intervalu $[a, c - \delta]$ in $[c + \delta, b]$, kjer je $\delta > 0$. Potem definiramo
$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$$
če obstajata limiti na desni strani.

Izrek. Naj bo g zvezna funkcija na $[a, b]$.

- Integral $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\, dx$ obstaja, če je $s < 1$. Če je $s \geq 1$ in $g(a) \neq 0$, integral ne obstaja.
- Integral $\int_a^b \frac{g(x)}{(b-x)^s}\, dx$ obstaja, če je $s < 1$. Če je $s \geq 1$ in $g(b) \neq 0$, integral ne obstaja.

Primer. Ali integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ obstaja?
Definiramo $g(x) = \cos x$. Ker je $s = \frac{1}{2}$, $g(0) = 1 \neq 0$, po izreku integral obstaja.

Primer. Ali integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\, dx$ obstaja?
Definiramo $g(x) = \cos x$. Ker je $s = 1$, $g(0) = 1 \neq 0$, po izreku integral obstaja.

Primer. Ali integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ obstaja?
Definiramo $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ker je $s = \frac{1}{2}$ in $\lim_{x \to 0+} g(0) = 1 \neq 0$, lahko g zvezno razširimo v točki $x = 0$, in po izreku integral obstaja.

Integral na neomejenem intervalu

- Naj bo f definirana na intervalu $[a, \infty)$ in integrabilna na vsakem končnem podintervalu $[a, b]$. Potem definiramo

  $$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx,$$

  če obstaja limita na desni strani.
- Naj bo f definirana na intervalu $(-\infty, b]$ in integrabilna na vsakem končnem podintervalu $[a, b]$. Potem definiramo

  $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx,$$

  če obstaja limita na desni strani.
- Naj bo f definirana na $\mathbb{R}$ in integrabilna na vsakem končnem podintervalu $[a, b]$. Potem definiramo

  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

  kjer je c poljubno realno število.

Izrek. Naj bo g zvezna in omejena funkcija na $[a, \infty)$. Integral

$$\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\, dx, \quad a > 0$$

obstaja, če je $s > 1$. Če je za nek $c < \infty$, $|g(x)| \geq m > 0$ za vsak $x > c$ in je $s \leq 1$, integral ne obstaja.

Funkcija Gamma. $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad \mathcal{D} = (0, \infty)$

- $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$,
- za $n \in \mathbb{N}$ velja $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Definicijsko območje lahko razširimo na $\mathbb{R} - \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$.