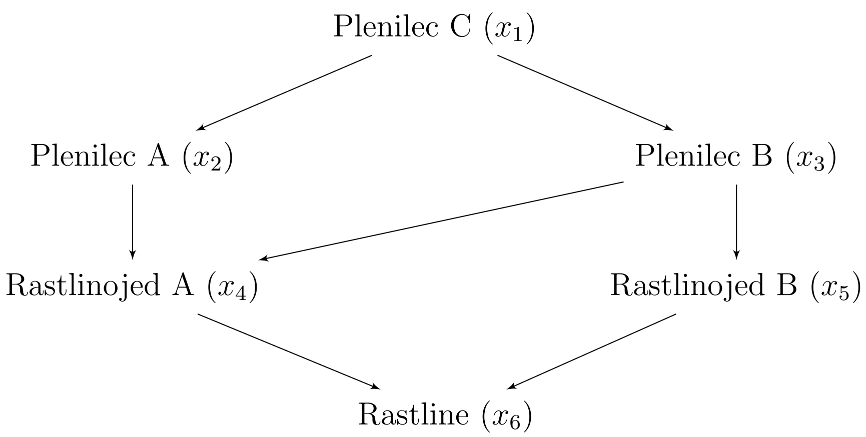
Population dynamics in a food chain

Domen Mohorčič, Larsen Cundrič, Mustafa Grabus

26. maj 2020

1 Problem

Modelirali bomo dinamiko populacij različnih vrst, odnosi med vrstami pa so predstavljeni z naslednjim grafom:



Puščice označujejo smer prehranjevanja (npr. Plenilec A se prehranjuje z Rastlinojedom A). Z x_i označimo velikost posamezne populacije. Sprememba velikosti posamezne populacije je tako odvisna od naravnega prirastka/smrtnosti (b_i), smrtnosti zaradi ulova in prirastka zaradi prehranjevanja z drugo vrsto (a_{ij}). Ulov in prehranjevanje sta odvisna od velikosti ustreznih drugih populacij, naravni prirastek/smrtnost pa je odvisna samo od velikosti populacije. Dinamiko i-te populacije lahko opišemo tako:

$$\dot{x}_i = x_i \cdot b_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \tag{1}$$

kjer je x_i velikost i-te populacije, b_i je koeficient naravnega prirastka/smrtnosti, $a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ pa je sprememba i-te populacije glede na interakcijo z j-to populacijo.

2 Reševanje

2.1 Naloga 1

Sistem diferencialnih enačb za naš primer je naslednji:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 \cdot (b_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3) \\
\dot{x}_2 &= x_2 \cdot (b_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{24} \cdot x_4) \\
\dot{x}_3 &= x_3 \cdot (b_3 + a_{31} \cdot x_1 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5) \\
\dot{x}_4 &= x_4 \cdot (b_4 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{46} \cdot x_6) \\
\dot{x}_5 &= x_5 \cdot (b_5 + a_{53} \cdot x_3 + a_{56} \cdot x_6) \\
\dot{x}_6 &= x_6 \cdot (b_6 + a_{64} \cdot x_4 + a_{65} \cdot x_5)
\end{aligned}
$$

x_i predstavlja velikost i-te populacije, $\dot{x}_i$ pa predstavlja spremembo i-te populacije v nekem trenutku. Velikosti posameznih vrst bomo zapisali v vektor $X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$. Sistem diferencialnih enačb pa bomo zapisali v vektor $\dot{X}$:

$$
\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot (b_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3) \\ x_2 \cdot (b_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{24} \cdot x_4) \\ x_3 \cdot (b_3 + a_{31} \cdot x_1 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5) \\ x_4 \cdot (b_4 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{46} \cdot x_6) \\ x_5 \cdot (b_5 + a_{53} \cdot x_3 + a_{56} \cdot x_6) \\ x_6 \cdot (b_6 + a_{64} \cdot x_4 + a_{65} \cdot x_5) \end{bmatrix} \tag{2}
$$

V vektorju $b = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6]^T$ so koeficienti naravnega prirastka/smrtnosti, ki je za rastline (x_6) pozitiven, za vse ostale pa negativen.
Sistem enačb za dani primer lahko tako zapišemo kot

$$
\dot{X} = X * (b + A \cdot X) \tag{3}
$$

($*$ predstavlja množenje po elementih), kjer matrika A vsebuje koeficiente hranjenja in plenjenja a_{ij}:

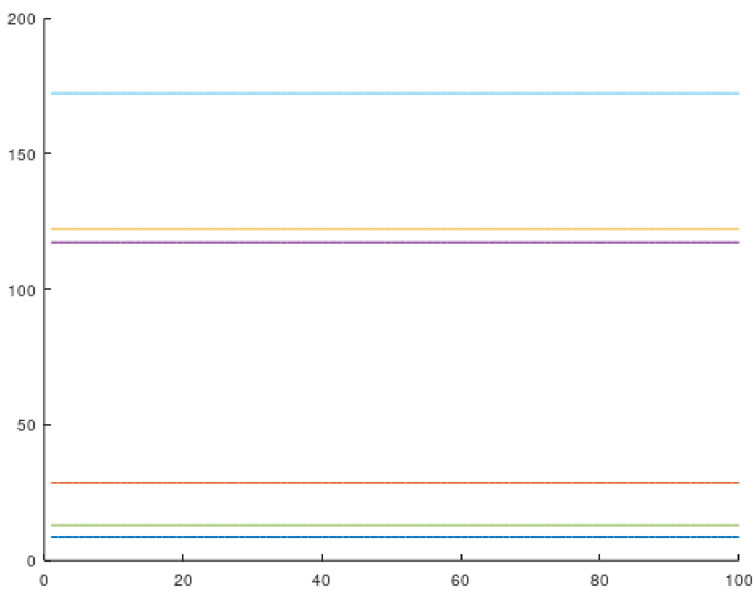
$$
A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}
$$

Koeficient a_{ij} predstavlja interakcijo vrste i z vrsto j. Pozitivna vrednost pomeni, da se vrsta i prehranjuje z vrsto j, negativna pa, da je vrsta i plen vrste j. Vrsta s sabo nima take interakcije, zato so elemeniti, kjer je $i = j$, enaki $a_{ij} = 0$. Koeficienta a_{ij} in a_{ji} pa si nista nujno nasprotna, saj lahko plenilska vrsta poje več plena, kot pa ima koristi od tega.
Za začetek smo določili $b = [-0.1, -0.1, -0.1, -0.05, -0.05, 0.3]^T$ in

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot 0.001 \tag{5}$$

2.2 Naloga 2

Stacionarna rešitev sistema je, ko je vektor $\dot{X}$ enak 0. To pomeni, da je $X * (b + A \cdot X) = 0$. Vektor $X = 0$ že zadosti našemu pogoju, vendar iščemo neničelno rešitev. Za naša A in b je to $X = [8.7, 28.7, 122.3, 117.4, 13.0, 172.3]^T$. Slika rešitve po 100 iteracijah izgleda tako:



2.3 Naloga 3

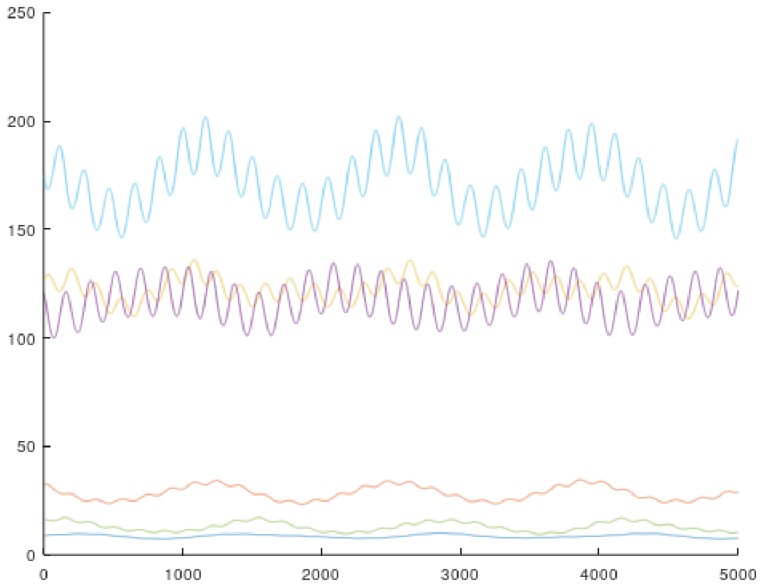
Napisali smo funcijo simulatePopulation.m, ki za vhod vzame matriko interakcij A, vektor naravnih prirastkov b in začetne velikosti populacij v vektorju

X.

```
function retval = simulatePopulation (x0, b, A, n, fig)
    F = @(X, b, A) X.*(b+A*X); %enacba prirastka za vsako vrsto
    h = 0.1; %dolzina koraka

    tocke = zeros(6, n);
    x = x0;

    %%Simulacija
    for i = (1:n)
        x = x + rk4Step(F, x, h, b, A);
        tocke(:, i) = x;
    end

    figure(fig)
    hold on;
    for i = (1:6)
        vektor = zeros(1, n);
        vektor(1, :) = tocke(i, :);
        plot(vektor);
    endfor

    lastX = x;
endfunction

%%Korak rk4
function val = rk4Step(f, x0, h, b, A)
    k1=feval(f, x0, b, A);
    k2=feval(f, x0 + k1*h/2, b, A);
    k3=feval(f, x0 + k2*h/2, b, A);
    k4=feval(f, x0 + k3*h, b, A);
    val = h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
endfunction
```

2.4 Naloga 4

Naredili smo simulacijo za začetne pogoje, ki se malo razlikujejo od X. Dobili smo $X_{nov} = [9.0, 32.6, 125.9, 121.0, 16.5, 175.4]^T$, slika simulacije po 5000 iteracijah pa izleda tako:



Sistem se za naše vrednosti $(A, b$ in $X_{nov})$ obnaša ciklično.

2.5 Naloga 5

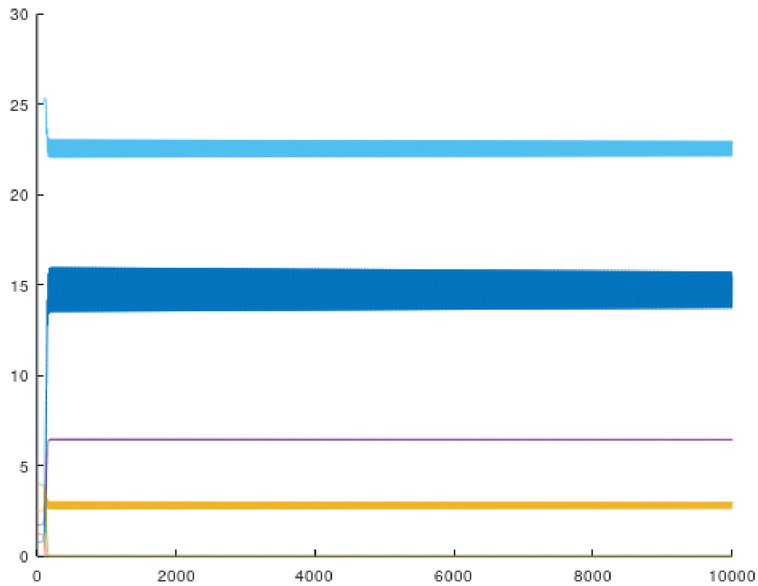
Preučili smo obnašanje sistema za različne vrednosti koeficientov in začetnih pogojev in našli ciklično obnašanje, asimptotično ciklično obnašanje in kaos.

Asimptotično ciklično obnašanje, kjer imamo spiralni lijak, smo dobili z naslednjimi začetnimi vrednostmi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.37939 & 1.38080 & 0 & 0 & 0 \\ -1.10424 & 0 & 0 & 0.65246 & 0 & 0 \\ -0.30582 & 0 & 0 & 1.24509 & 0.40233 & 0 \\ 0 & -0.99713 & -0.73865 & 0 & 0 & 0.39387 \\ 0 & 0 & -0.35715 & -0 & 0 & 0.39208 \\ 0 & 0 & 0 & -1.50798 & -1.78165 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -3.89109 \\ -0.27347 \\ -3.53131 \\ -6.79120 \\ -8.91734 \\ 9.72807 \end{bmatrix} \text{ in } X = \begin{bmatrix} 0.77988 \\ 1.22798 \\ 2.48059 \\ 1.73900 \\ 3.98827 \\ 25.00319 \end{bmatrix}.$$

Vektor X se od stacionarne rešitve sistema razlikuje samo za 0.00012384. Slika simulacije sistema s takimi podatki pa je naslednja:



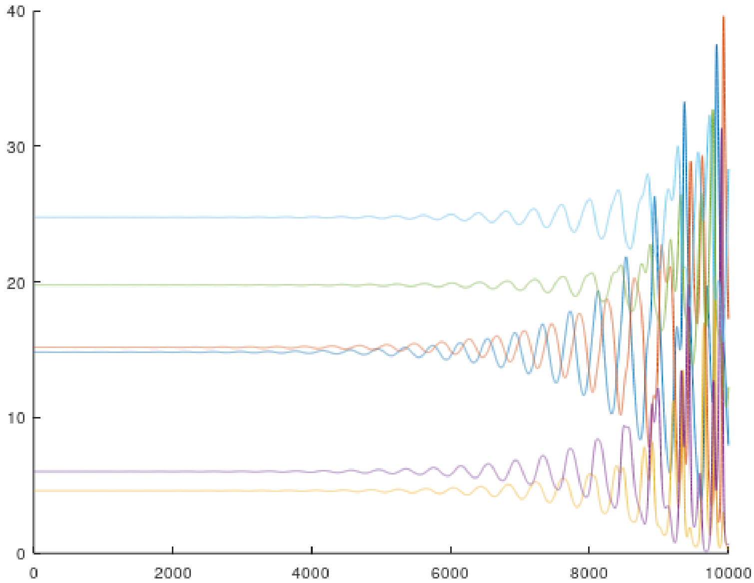
.

Asimptotično ciklično obnašanje s spiralnim izvorom pa smo dobili z naslednjimi začetnimi vrednostmi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.000084 & 0.027628 & 0 & 0 & 0 \\ -0.011626 & 0 & 0 & 0.032503 & 0 & 0 \\ -0.033349 & 0 & 0 & 0.038057 & 0.028158 & 0 \\ 0 & -0.026921 & -0.033088 & 0 & 0 & 0.028894 \\ 0 & 0 & -0.008998 & 0 & 0 & 0.009693 \\ 0 & 0 & 0 & -0.004489 & -0.006963 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.128572 \\ -0.023682 \\ -0.291557 \\ -0.154676 \\ -0.198708 \\ 0.164787 \end{bmatrix} \text{ in } X = \begin{bmatrix} 14.8432 \\ 15.1853 \\ 4.6090 \\ 6.0374 \\ 19.7722 \\ 24.7789 \end{bmatrix}.$$

Vektor X se od stacionarne rešitve razlikuje za 0.0023216. Slika simulacije sistema izgleda tako:



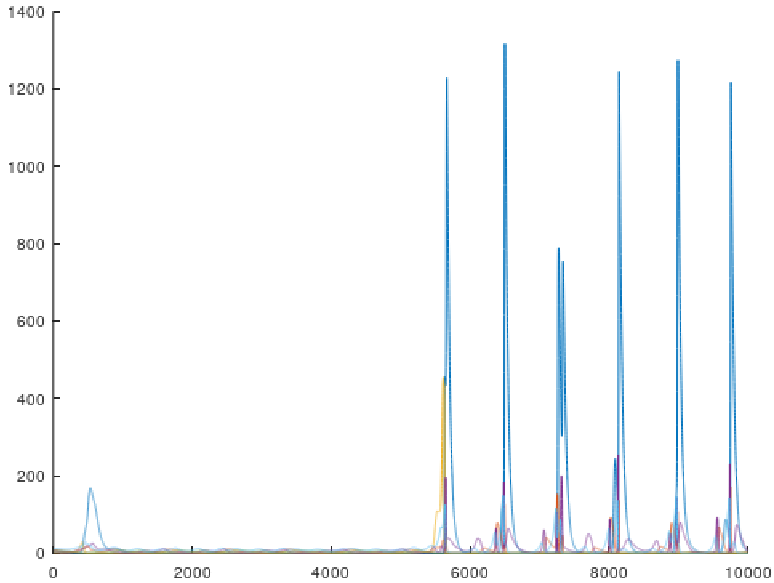
.

Kaos smo dobili z naslednjimi koeficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.024710 & 0.024893 & 0 & 0 & 0 \\ -0.003471 & 0 & 0 & 0.024640 & 0 & 0 \\ -0.027545 & 0 & 0 & 0.036172 & 0.027497 & 0 \\ 0 & -0.034815 & -0.004165 & 0 & 0 & 0.028781 \\ 0 & 0 & -0.029746 & 0 & 0 & 0.018492 \\ 0 & 0 & 0 & -0.014320 & -0.039922 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.245517 \\ -0.094402 \\ -0.114666 \\ -0.113336 \\ -0.150582 \\ 0.235885 \end{bmatrix} \text{ in } X = \begin{bmatrix} 7.2023 \\ 7.9662 \\ 1.7152 \\ 4.6668 \\ 4.4584 \\ 12.1101 \end{bmatrix}.$$

Vektor X se od stacionarne rešitve razlikuje za 1.9694, za sistem pa po 10000 iteracijah dobimo naslednjo naslednjo sliko:



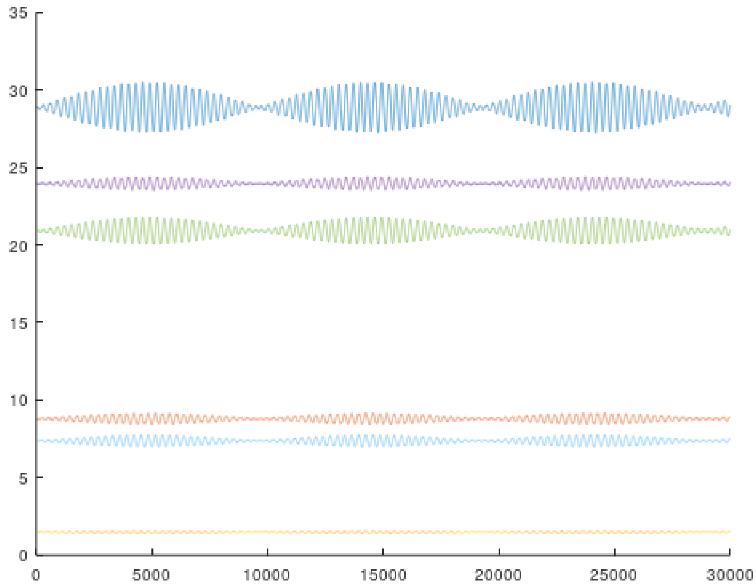
.

Ciklično obnašanje smo našli z naslednjimi koeficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.021620 & 0.037477 & 0 & 0 & 0 \\ -0.011555 & 0 & 0 & 0.026287 & 0 & 0 \\ -0.026978 & 0 & 0 & 0.012645 & 0.027949 & 0 \\ 0 & -0.030686 & -0.019335 & 0 & 0 & 0.041368 \\ 0 & 0 & -0.033011 & 0 & 0 & 0.030491 \\ 0 & 0 & 0 & -0.000749 & -0.012079 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.2454399 \\ -0.2962493 \\ -0.1088634 \\ -0.0064447 \\ -0.1757772 \\ 0.2704713 \end{bmatrix} \text{ in } X = \begin{bmatrix} 28.8557 \\ 8.7814 \\ 1.4681 \\ 23.9553 \\ 20.9203 \\ 7.3815 \end{bmatrix}.$$

Vektor X se od stacionarne rešitve razlikuje za 0.025147, slika simulacije pa je naslednja:



.

Obnašanje sistema pa je odvisno od lastnih vrednosti jakobijeve matrike sistema v stacionarni točki. Jakobijeva matrika je enaka:

$$J_{x_1} = \begin{bmatrix} b_1 + x_2a_{12} + x_3a_{13} + x_4a_{14} + x_5a_{15} + x_6a_{16} \\ x_2a_{21} \\ x_3a_{31} \\ x_4a_{41} \\ x_5a_{51} \\ x_6a_{61} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$J_{x_2} = \begin{bmatrix} x_1a_{12} \\ b_2 + x_1a_{21} + x_3a_{23} + x_4a_{24} + x_5a_{25} + x_6a_{26} \\ x_3a_{32} \\ x_4a_{42} \\ x_5a_{52} \\ x_6a_{62} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$J_{x_3} = \begin{bmatrix} x_1a_{13} \\ x_2a_{23} \\ b_3 + x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_4a_{34} + x_5a_{35} + x_6a_{36} \\ x_4a_{43} \\ x_5a_{53} \\ x_6a_{63} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$J_{x_4} = \begin{bmatrix} x_1a_{14} \\ x_2a_{24} \\ x_3a_{34} \\ b_4 + x_1a_{41} + x_2a_{42} + x_3a_{43} + x_5a_{45} + x_6a_{46} \\ x_5a_{54} \\ x_6a_{64} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$J_{x_5} = \begin{bmatrix} x_1a_{15} \\ x_2a_{25} \\ x_3a_{35} \\ x_4a_{45} \\ b_5 + x_1a_{51} + x_2a_{52} + x_3a_{53} + x_4a_{54} + x_6a_{56} \\ x_6a_{65} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$J_{x_6} = \begin{bmatrix} x_1a_{16} \\ x_2a_{26} \\ x_3a_{36} \\ x_4a_{46} \\ x_5a_{56} \\ b_6 + x_1a_{61} + x_2a_{62} + x_3a_{63} + x_4a_{64} + x_5a_{65} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$JF = \begin{bmatrix} J_{x_1} & J_{x_2} & J_{x_3} & J_{x_4} & J_{x_5} & J_{x_6} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Lastne vrednosti jacobijeve matrike v stacionarni točki so kompleksne. Imaginarni del skrbi za ciklično obnašanje, od njihovega realnega dela pa je odvisno obnašanje sistema. Če je realni del lastne vrednosti negativen, je stacionarna točka spiralno privlačna, če je pozitiven, je spiralno odbojna. Če je realni del enak 0, imamo krožnico. Rešitev sistema se da tako napisati z enačbo

$$x(t) = e^{\alpha t}((C_1 cos(\beta t) + C_2 sin(\beta t))u + (-C_1 sin(\beta t) + C_2 cos(\beta t))w) \tag{13}$$

Lastna vrenost Jacobijeve matrike v stacionarni točki takega sistema je oblike $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. V zgornji enačbi je α realni del lastne vrednosti in β imaginarni del lastne vrednosti. Vektorja u je realni del lastnega vektorja, w pa je imaginarni del lastnega vektorja. Ker sta lastni vrednosti konjugirani, sta konjugirana tudi njuna lastna vektorja.
Ker pa imamo sistem šest spremenljivk, imamo tudi šest lastnih vrednosti $(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ in šest lastnih vektorjev $(v_1, \dots, v_6)$. Ker pa so vse lastne vrednosti in lastni vektorji konjugirani, jih lahko zapišemo tako:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \alpha_1 \pm \beta_1 i \\ \lambda_{3,4} &= \alpha_3 \pm \beta_3 i \\ \lambda_{5,6} &= \alpha_5 \pm \beta_5 i \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} v_{1,2} &= u_1 \pm w_1 i \\ v_{3,4} &= u_3 \pm w_3 i \\ v_{5,6} &= u_5 \pm w_5 i \end{aligned}$$

kar nam da tri enačbe za rešitev sistema:

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t}((C_1 cos(\beta_1 t) + C_2 sin(\beta_1 t))u_1 + (-C_1 sin(\beta_1 t) + C_2 cos(\beta_1 t))w_1) \tag{14}$$

$$x_3(t) = e^{\alpha_3 t}((C_3 cos(\beta_3 t) + C_4 sin(\beta_3 t))u_3 + (-C_3 sin(\beta_3 t) + C_4 cos(\beta_3 t))w_3) \tag{15}$$

$$x_5(t) = e^{\alpha_5 t}((C_5 cos(\beta_5 t) + C_6 sin(\beta_5 t))u_5 + (-C_5 sin(\beta_5 t) + C_6 cos(\beta_5 t))w_5) \tag{16}$$