Population dynamics in a food chain

Domen Mohorčič, Larsen Cundrič, Mustafa Grabus

13. maj 2020

1 Problem

Modelirali bomo dinamiko populacij različnih vrst, odnosi med vrstami pa so predstavljeni na naslednji sliki:

$$
\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x_2 \arrow[d] & & x_3 \arrow[d] \arrow[dll] \\
x_4 \arrow[dr] & & x_5 \arrow[dl] \\
 & x_6 &
\end{tikzcd}
$$

2 Naloga

2.1 Naloga 1

Sistem diferencialnih enačb za naš primer je naslednji:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 \cdot (b_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3) \\
\dot{x}_2 &= x_2 \cdot (b_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{24} \cdot x_4) \\
\dot{x}_3 &= x_3 \cdot (b_3 + a_{31} \cdot x_1 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5) \\
\dot{x}_4 &= x_4 \cdot (b_4 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{46} \cdot x_6) \\
\dot{x}_5 &= x_5 \cdot (b_5 + a_{53} \cdot x_3 + a_{56} \cdot x_6) \\
\dot{x}_6 &= x_6 \cdot (b_6 + a_{64} \cdot x_4 + a_{65} \cdot x_5)
\end{aligned}$$

x_i predstavlja velikost i-te populacije, $\dot{x}_i$ pa predstavlja spremembo i-te populacije v odvisnosti od velikosti ostalih populacij. Velikosti posameznih vrst bomo zapisali v vektor $X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$. Sistem diferencialnih enačb pa bomo zapisali v vektor $\dot{X}$:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot (b_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3) \\ x_2 \cdot (b_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{24} \cdot x_4) \\ x_3 \cdot (b_3 + a_{31} \cdot x_1 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5) \\ x_4 \cdot (b_4 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{46} \cdot x_6) \\ x_5 \cdot (b_5 + a_{53} \cdot x_3 + a_{56} \cdot x_6) \\ x_6 \cdot (b_6 + a_{64} \cdot x_4 + a_{65} \cdot x_5) \end{bmatrix} \tag{1}$$

V vektorju $b = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6]^T$ so koeficienti naravnega prirastka, ki je za rastline (x_6) pozitiven, za vse ostale pa negativen.
Sistem enačb za dani primer lahko tako zapišemo kot

$$\dot{X} = X * (b + A \cdot X) \tag{2}$$

($*$ predstavlja množenje po elementih), kjer matrika A vsebuje koeficiente hranjenja in plenjenja a_{ij}:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Koeficient a_{ij} predstavlja interakcijo vrste i in j. Pozitivna vrednost pomeni, da se vrsta i prehranjuje z vrsto j, negativna pa ravno nasprotno. Vrsta s sabo nima take interakcije, zato so elemeniti $a_{i=j} = 0$. Koeficienta a_{ij} in a_{ji} nista nujno nasprotna, saj lahko plenilska vrsta poje več plena, kot pa ima koristi od tega.
Za začetek smo določili $X = []^T$, $b = [-0.2, -0.1, -0.1, -0.05, -0.05, 0.3]^T$ in $A = ...$