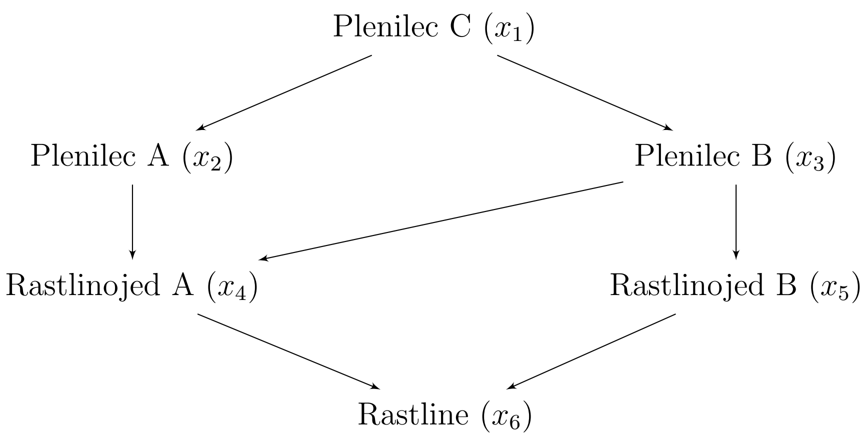
Population dynamics in a food chain

Domen Mohorčič, Larsen Cundrič, Mustafa Grabus

16. maj 2020

1 Problem

Modelirali bomo dinamiko populacij različnih vrst, odnosi med vrstami pa so predstavljeni na naslednji sliki:



Puščice označujejo smer prehranjevanja (npr. Plenilec A se prehranjuje z Rastlinojedom A). Z x_i označimo velikost posamezne populacije. Sprememba velikosti posamezne populacije je tako odvisna od naravnega prirastka/smrtnosti, smrtnosti zaradi ulova in prirastka zaradi prehranjevanja. Ulov in prehranjevanje sta odvisna od velikosti ustreznih drugih populacij, naravni prirastek/smrtnost pa je odvisna samo od velikosti populacije. Dinamiko i-te populacije lahko opišemo tako:

$$\dot{x}_i = x_i \cdot b_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \tag{1}$$

kjer je x_i velikost i-te populacije, b_i je koeficient naravnega prirastka/smrtnosti, $a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ pa je sprememba i-te populacije glede na interakcijo z j-to populacijo.

2 Reševanje

2.1 Naloga 1

Sistem diferencialnih enačb za naš primer je naslednji:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 \cdot (b_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3) \\
\dot{x}_2 &= x_2 \cdot (b_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{24} \cdot x_4) \\
\dot{x}_3 &= x_3 \cdot (b_3 + a_{31} \cdot x_1 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5) \\
\dot{x}_4 &= x_4 \cdot (b_4 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{46} \cdot x_6) \\
\dot{x}_5 &= x_5 \cdot (b_5 + a_{53} \cdot x_3 + a_{56} \cdot x_6) \\
\dot{x}_6 &= x_6 \cdot (b_6 + a_{64} \cdot x_4 + a_{65} \cdot x_5)
\end{aligned}
$$

x_i predstavlja velikost i-te populacije, $\dot{x}_i$ pa predstavlja spremembo i-te populacije v odvisnosti od velikosti ostalih populacij. Velikosti posameznih vrst bomo zapisali v vektor $X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$. Sistem diferencialnih enačb pa bomo zapisali v vektor $\dot{X}$:

$$
\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot (b_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3) \\ x_2 \cdot (b_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{24} \cdot x_4) \\ x_3 \cdot (b_3 + a_{31} \cdot x_1 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5) \\ x_4 \cdot (b_4 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{46} \cdot x_6) \\ x_5 \cdot (b_5 + a_{53} \cdot x_3 + a_{56} \cdot x_6) \\ x_6 \cdot (b_6 + a_{64} \cdot x_4 + a_{65} \cdot x_5) \end{bmatrix} \tag{2}
$$

V vektorju $b = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6]^T$ so koeficienti naravnega prirastka/smrtnosti, ki je za rastline (x_6) pozitiven, za vse ostale pa negativen.
Sistem enačb za dani primer lahko tako zapišemo kot

$$
\dot{X} = X * (b + A \cdot X) \tag{3}
$$

($*$ predstavlja množenje po elementih), kjer matrika A vsebuje koeficiente hranjenja in plenjenja a_{ij}:

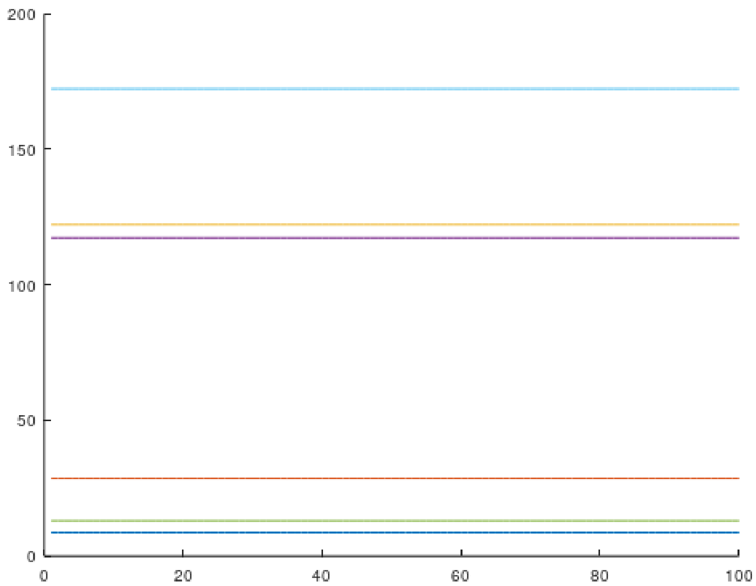
$$
A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}
$$

Koeficient a_{ij} predstavlja interakcijo vrste i in j. Pozitivna vrednost pomeni, da se vrsta i prehranjuje z vrsto j, negativna pa ravno nasprotno. Vrsta s sabo nima take interakcije, zato so elemeniti $a_{i=j} = 0$. Koeficienta a_{ij} in a_{ji} nista nujno nasprotna, saj lahko plenilska vrsta poje več plena, kot pa ima koristi od tega.
Za začetek smo določili $b = [-0.1, -0.1, -0.1, -0.05, -0.05, 0.3]^T$ in

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot 0.001 \tag{5}$$

2.2 Naloga 2

Stacionarna rešitev sistema je, ko je vektor $\dot{X}$ enak 0. To pomeni, da je $X * (b + A \cdot X) = 0$. Vektor $X = 0$ že zadosti našemu pogoju, vendar iščemo neničelno rešitev. Za naša A in b je to $X = [8.7, 28.7, 122.3, 117.4, 13.0, 172.3]^T$. Slika rešitve po 100 iteracijah izgleda tako:

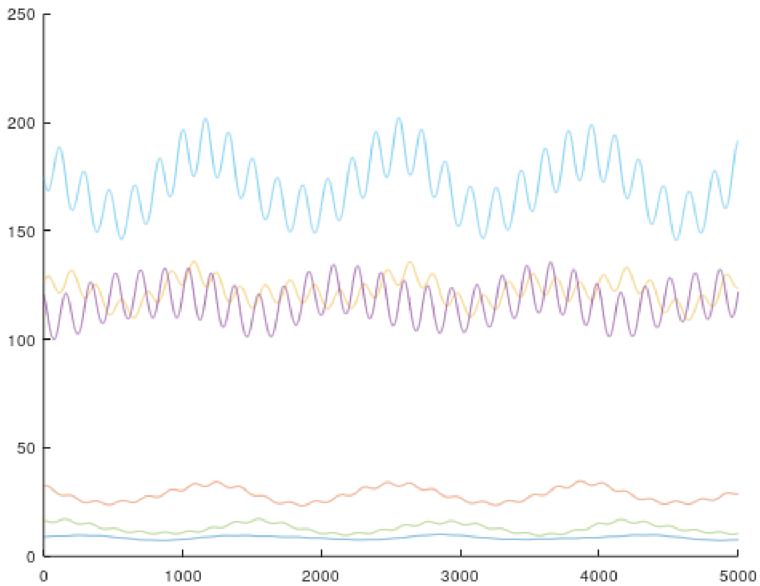


2.3 Naloga 3

Napisali smo funcijo simulatePopulation.m, ki za vhod vzame matriko A, vektor b in začetne velikosti populacij v vektorju X.

2.4 Naloga 4

Naredili smo simulacijo za začetne pogoje, ki se malo razlikujejo od X. Dobili smo $X_{nov} = [9.0, 32.6, 125.9, 121.0, 16.5, 175.4]^T$, slika simulacije po 5000 iteracijah pa izleda tako:



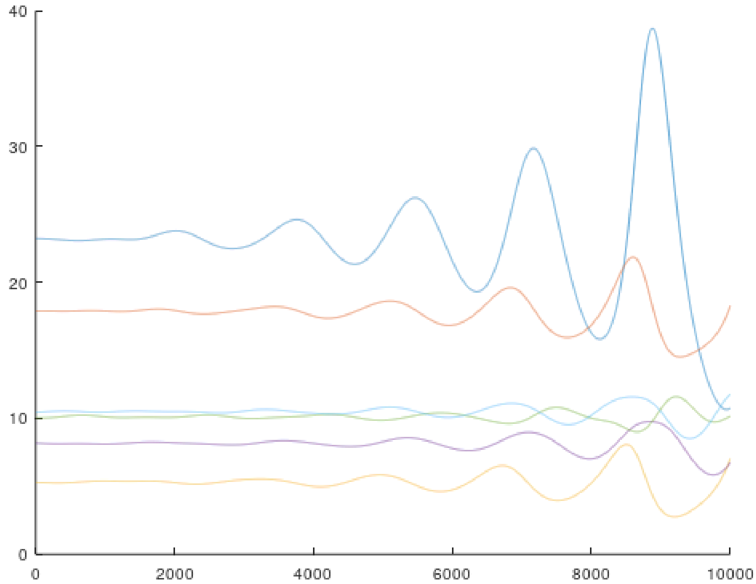
2.5 Naloga 5

Preučili smo obnašanje sistema za različne vrednosti koeficientov in začetnih pogojev in našli ciklično, asimptotično ciklično obnašanje in kaos.
Asimptotično ciklično obnašanje smo dobili z naslednjimi začetnimi vrednostmi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.0041790 & 0.0014199 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0010902 & 0 & 0 & 0.0038366 & 0 & 0 \\ -0.0019610 & 0 & 0 & 0.0031243 & 0.0038874 & 0 \\ 0 & -0.0022909 & 0.0029800 & 0 & 0 & 0.0053580 \\ 0 & 0 & -0.0032865 & 0 & 0 & 0.0059388 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0028531 & -0.0031236 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.0824046 \\ -0.0059820 \\ -0.0192474 \\ -0.0311698 \\ -0.0448382 \\ 0.0549130 \end{bmatrix} \text{ in } X = \begin{bmatrix} 23.2438 \\ 17.8982 \\ 5.2910 \\ 8.1907 \\ 10.0353 \\ 10.4537 \end{bmatrix}.$$

Vektor X se od stacionarne rešitve sistema razlikuje samo za 0.11196. Slika simulacije sistema s takimi podatki pa je naslednja:

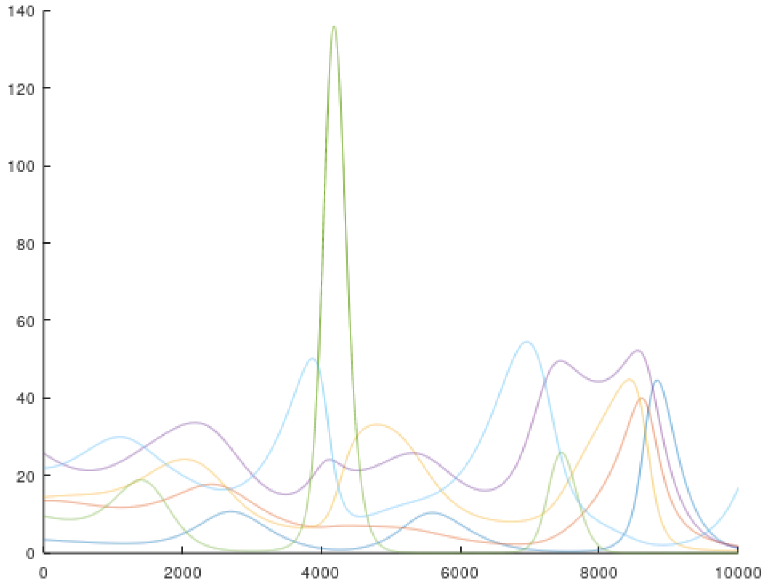


Kaos pa smo dobili z naslednjimi koeficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.0005993 & 0.0018995 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0010021 & 0 & 0 & 0.0007798 & 0 & 0 \\ -0.0016327 & 0 & 0 & 0.0003364 & 0.0002603 & 0 \\ 0 & -0.0001513 & 0.0008657 & 0 & 0 & 0.0007994 \\ 0 & 0 & -0.0024918 & 0 & 0 & 0.0025529 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0009197 & -0.0003923 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.0394982 \\ -0.0159140 \\ -0.0042202 \\ -0.0326592 \\ -0.0235321 \\ 0.0275829 \end{bmatrix} \text{ in } X = \begin{bmatrix} 3.4576 \\ 13.4956 \\ 14.4207 \\ 25.7688 \\ 9.5432 \\ 21.9396 \end{bmatrix}.$$

Vektor X se od stacionarne rešitve razlikuje za 4.1805, za sistem pa po 5000 iteracijah dobimo naslednjo naslednjo sliko:



Ciklično obnašanje smo opisali v poglavju Naloga 4.