Population dynamics in a food chain

Domen Mohorčič, Larsen Cundrič, Mustafa Grabus

16. maj 2020

1 Problem

Modelirali bomo dinamiko populacij različnih vrst, odnosi med vrstami pa so predstavljeni na naslednji sliki:

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Plenilec C } (x_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Plenilec A } (x_2) \arrow[d] & & \text{Plenilec B } (x_3) \arrow[dll] \arrow[d] \\
\text{Rastlinojed A } (x_4) \arrow[dr] & & \text{Rastlinojed B } (x_5) \arrow[dl] \\
 & \text{Rastline } (x_6) &
\end{tikzcd}
$$

Puščice označujejo smer prehranjevanja (npr. Plenilec A se prehranjuje z Rastlinojedom A). Z x_i označimo velikost posamezne populacije. Sprememba velikosti posamezne populacije je tako odvisna od naravnega prirastka/smrtnosti, smrtnosti zaradi ulova in prirastka zaradi prehranjevanja. Ulov in prehranjevanje sta odvisna od velikosti ustreznih drugih populacij, naravni prirastek/smrtnost pa je odvisna samo od velikosti populacije. Dinamiko i-te populacije lahko opišemo tako:

$$\dot{x}_i = x_i \cdot b_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \tag{1}$$

kjer je x_i velikost i-te populacije, b_i je koeficient naravnega prirastka/smrtnosti, $a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ pa je sprememba i-te populacije glede na interakcijo z j-to populacijo.

2 Reševanje

2.1 Naloga 1

Sistem diferencialnih enačb za naš primer je naslednji:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 \cdot (b_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3) \\
\dot{x}_2 &= x_2 \cdot (b_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{24} \cdot x_4) \\
\dot{x}_3 &= x_3 \cdot (b_3 + a_{31} \cdot x_1 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5) \\
\dot{x}_4 &= x_4 \cdot (b_4 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{46} \cdot x_6) \\
\dot{x}_5 &= x_5 \cdot (b_5 + a_{53} \cdot x_3 + a_{56} \cdot x_6) \\
\dot{x}_6 &= x_6 \cdot (b_6 + a_{64} \cdot x_4 + a_{65} \cdot x_5)
\end{aligned}$$

x_i predstavlja velikost i-te populacije, $\dot{x}_i$ pa predstavlja spremembo i-te populacije v odvisnosti od velikosti ostalih populacij. Velikosti posameznih vrst bomo zapisali v vektor $X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$. Sistem diferencialnih enačb pa bomo zapisali v vektor $\dot{X}$:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot (b_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3) \\ x_2 \cdot (b_2 + a_{21} \cdot x_1 + a_{24} \cdot x_4) \\ x_3 \cdot (b_3 + a_{31} \cdot x_1 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5) \\ x_4 \cdot (b_4 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{46} \cdot x_6) \\ x_5 \cdot (b_5 + a_{53} \cdot x_3 + a_{56} \cdot x_6) \\ x_6 \cdot (b_6 + a_{64} \cdot x_4 + a_{65} \cdot x_5) \end{bmatrix} \tag{2}$$

V vektorju $b = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6]^T$ so koeficienti naravnega prirastka/smrtnosti, ki je za rastline (x_6) pozitiven, za vse ostale pa negativen.
Sistem enačb za dani primer lahko tako zapišemo kot

$$\dot{X} = X * (b + A \cdot X) \tag{3}$$

($*$ predstavlja množenje po elementih), kjer matrika A vsebuje koeficiente hranjenja in plenjenja a_{ij}:

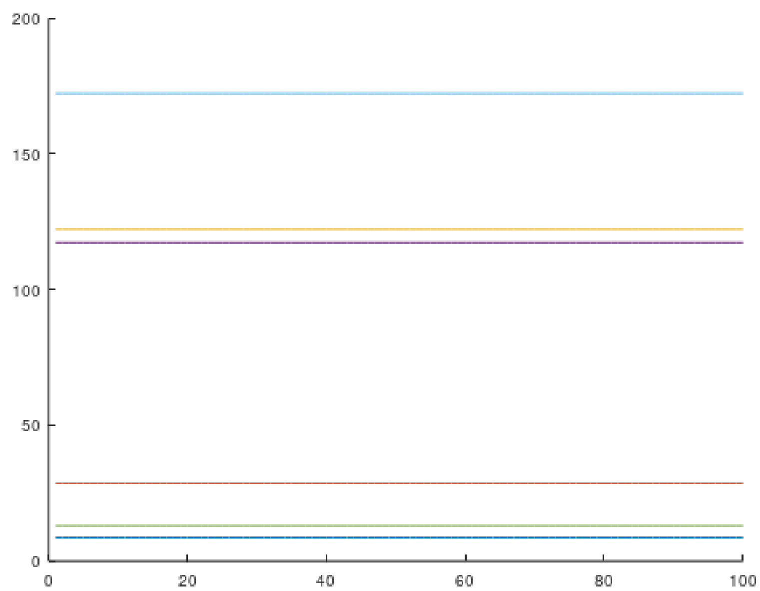
$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Koeficient a_{ij} predstavlja interakcijo vrste i in j. Pozitivna vrednost pomeni, da se vrsta i prehranjuje z vrsto j, negativna pa ravno nasprotno. Vrsta s sabo nima take interakcije, zato so elemeniti $a_{i=j} = 0$. Koeficienta a_{ij} in a_{ji} nista nujno nasprotna, saj lahko plenilska vrsta poje več plena, kot pa ima koristi od tega.
Za začetek smo določili $b = [-0.1, -0.1, -0.1, -0.05, -0.05, 0.3]^T$ in

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot 0.001 \tag{5}$$

2.2 Naloga 2

Stacionarna rešitev sistema je, ko je vektor $\dot{X}$ enak 0. To pomeni, da je $X * (b + A \cdot X) = 0$. Vektor $X = 0$ že zadosti našemu pogoju, vendar iščemo neničelno rešitev. Za naša A in b je to $X = [8.7, 28.7, 122.3, 117.4, 13.0, 172.3]^T$. Slika rešitve po 100 iteracijah izgleda tako:



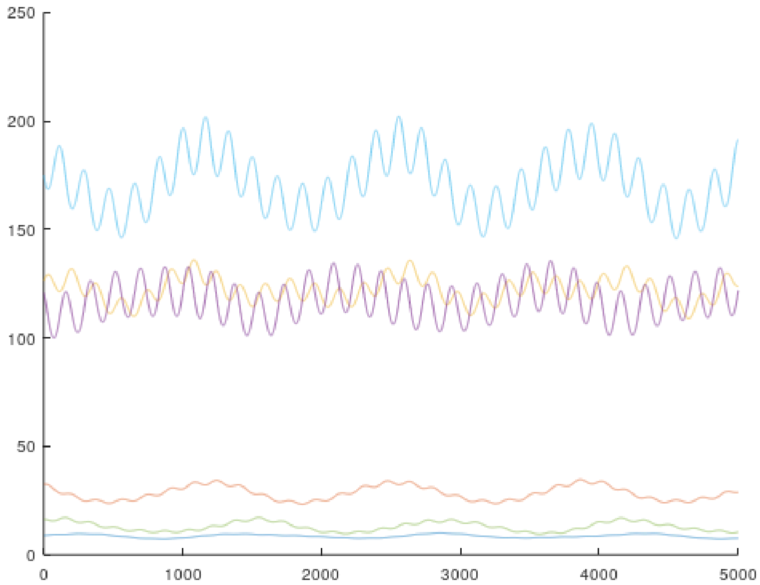
2.3 Naloga 3

Napisali smo funcijo simulatePopulation.m, ki za vhod vzame matriko A, vektor b in začetne velikosti populacij v vektorju X.

```
function retval = simulatePopulation (x0, b, A, n, fig)
    F = @(X, b, A) X.*(b+A*X);%enacba prirastka za vsako vrsto
    h = 0.1;%dolzina koraka

    tocke = zeros(6, n);
    x = x0;

    %%Simulacija
    for i = (1:n)
        x = x + rk4Step(F, x, h, b, A);
        tocke(:, i) = x;
    end

    figure(fig)
    hold on
    for i = (1:6)
        vektor = zeros(1, n);
        vektor(1, :) = tocke(i, :);
        plot(vektor);
    endfor

    lastX = x
endfunction

%%Korak rk4
function val = rk4Step(f, x0, h, b, A)
    k1=feval(f, x0, b, A);
    k2=feval(f, x0 + k1*h/2, b, A);
    k3=feval(f, x0 + k2*h/2, b, A);
    k4=feval(f, x0 + k3*h, b, A);
    val = h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
endfunction
```

2.4 Naloga 4

Naredili smo simulacijo za začetne pogoje, ki se malo razlikujejo od X. Dobili smo $X_{nov} = [9.0, 32.6, 125.9, 121.0, 16.5, 175.4]^T$, slika simulacije po 5000 iteracijah pa izleda tako:



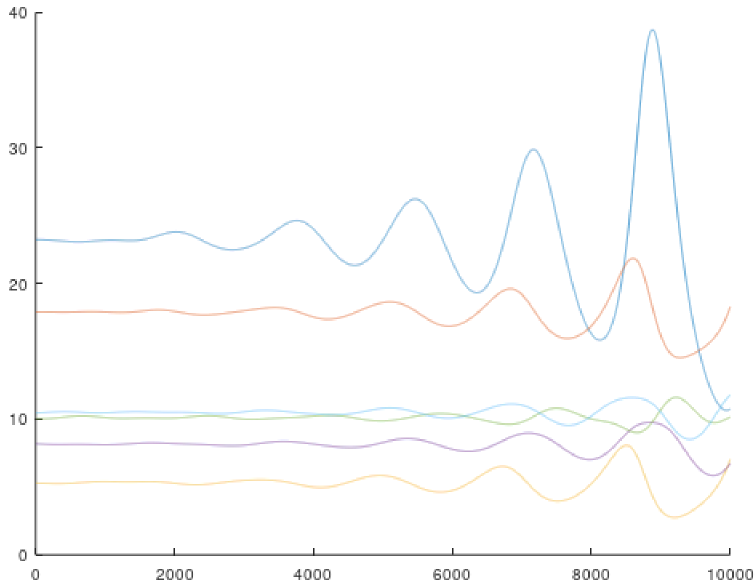
2.5 Naloga 5

Preučili smo obnašanje sistema za različne vrednosti koeficientov in začetnih pogojev in našli ciklično, asimptotično ciklično obnašanje in kaos.
Asimptotično ciklično obnašanje smo dobili z naslednjimi začetnimi vrednostmi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.0041790 & 0.0014199 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0010902 & 0 & 0 & 0.0038366 & 0 & 0 \\ -0.0019610 & 0 & 0 & 0.0031243 & 0.0038874 & 0 \\ 0 & -0.0022909 & 0.0029800 & 0 & 0 & 0.0053580 \\ 0 & 0 & -0.0032865 & 0 & 0 & 0.0059388 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0028531 & -0.0031236 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.0824046 \\ -0.0059820 \\ -0.0192474 \\ -0.0311698 \\ -0.0448382 \\ 0.0549130 \end{bmatrix} \text{ in } X = \begin{bmatrix} 23.2438 \\ 17.8982 \\ 5.2910 \\ 8.1907 \\ 10.0353 \\ 10.4537 \end{bmatrix}.$$

Vektor X se od stacionarne rešitve sistema razlikuje samo za 0.11196. Slika simulacije sistema s takimi podatki pa je naslednja:

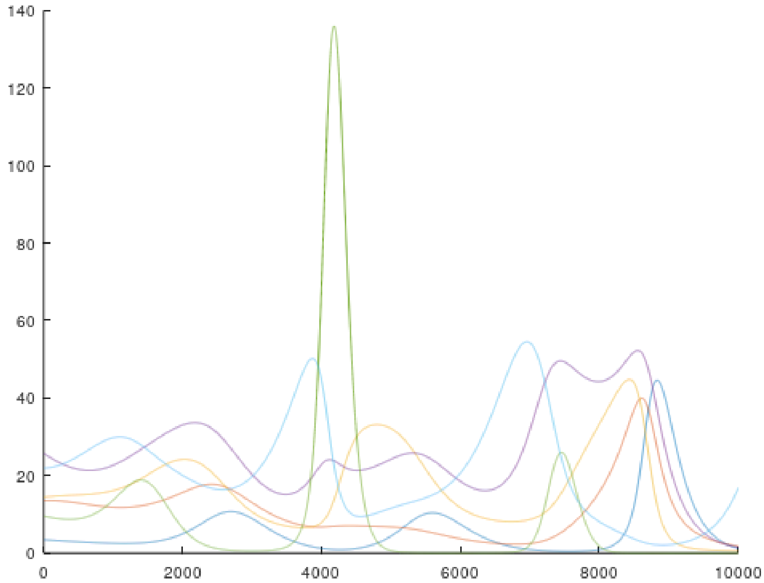


Kaos pa smo dobili z naslednjimi koeficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.0005993 & 0.0018995 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0010021 & 0 & 0 & 0.0007798 & 0 & 0 \\ -0.0016327 & 0 & 0 & 0.0003364 & 0.0002603 & 0 \\ 0 & -0.0001513 & 0.0008657 & 0 & 0 & 0.0007994 \\ 0 & 0 & -0.0024918 & 0 & 0 & 0.0025529 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0009197 & -0.0003923 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.0394982 \\ -0.0159140 \\ -0.0042202 \\ -0.0326592 \\ -0.0235321 \\ 0.0275829 \end{bmatrix} \text{ in } X = \begin{bmatrix} 3.4576 \\ 13.4956 \\ 14.4207 \\ 25.7688 \\ 9.5432 \\ 21.9396 \end{bmatrix}.$$

Vektor X se od stacionarne rešitve razlikuje za 4.1805, za sistem pa po 10000 iteracijah dobimo naslednjo naslednjo sliko:



Ciklično obnašanje smo opisali v poglavju Naloga 4.
Obnašanje sistema pa je odvisno od lastnih vrednosti jakobijeve matrike sistema v stacionarni točki. Lastne vrednosti so kompleksne, od njihovega realnega dela pa je odvisno obnašanje sistema. Če je realni del manjši od nič, je stacionarna točka spiralni liak, če pa je pozitivna, je spiralni izvor.