1 CHAÎNES DE MARKOV *

1.1 Rappels Mathématiques

Soit Ω l'espace de toutes les réalisations possibles d'une experience aléatoire. Chaque élément ω de Ω est appelé *événement élémentaire*. Pour le lancer d'un dé, on aura par exemple $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Variable aléatoire : Soit Ω un ensemble d'événements possibles d'une experience aléatoire. On appelle **variable aléatoire** une application :
$X : \Omega \to E$
$\omega \to X(\omega)$
E est dit *espace d'états* de la variable aléatoire X. Il correspond à l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.

Exemple : Considérons l'experience aléatoire résultant du lancer d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On associe à cette experience la variable aléatoire définie par : $X(\omega) = -1$ si $\omega \leq 3$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \geq 4$. Ainsi, l'espace d'états $E = \{-1, 1\}$.

Remarque : Une variable aléatoire est dite *discrète* lorsque $E \subseteq Z$ ou bien *continue* lorsque $E \subseteq IR$.

1.2 Processus stochastiques et chaînes de Markov

Les processus stochastiques sont des modèles mathématiques utiles pour la description des systèmes comportant des phénomènes de nature probabiliste (qui dépendent du hasard) en fonction d'un paramètre qui est généralement le temps.

Définition : Un processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$ est une famille de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, prenant des valeurs dans l'espace d'états E et indexée par le paramètre t. L'ensemble des temps T de même que E peuvent être discrets ou continus :
- Si $T \subseteq IN$ (ou dans Z) et $E \subseteq IN$, on dit que le processus est à temps discret et à espace d'état discret, ou bien une *chaîne à temps discret.*
- Si $T \subseteq IN$ (ou dans Z) et $E \subseteq IR$, on dit que le processus est à temps discret et à espace d'état continu.
- Si $T \subseteq [0, +\infty[$ (ou dans IR) et $E \subseteq IN$, on dit que le processus est à temps continu et à espace d'état discret, ou bien une *chaîne à temps continu.*
- Si $T \subseteq [0, +\infty[$ (ou dans IR)et $E \subseteq IR$, on dit que le processus est à temps continu et à espace d'état continu.

Processus markoviens : Un processus markovien est un processus stochastique qui satisfait la propriété **markovienne** ou encore la propriété de **perte de mémoire** définie comme suit :
$P[X(t_{n+1}) = x_{n+1}/X(t_n) = x_n, ..., X(t_0) = x_0] = P[X(t_{n+1}) = x_{n+1}/X(t_n) = x_n]$ pour tout $t_{n+1} > t_n > t_{n-1} > ... > t_1 > t_0$.

Ainsi, la propriété Markovienne définit un processus stochastique dont le comportement dans le futur (à l'instant t_{n+1}) ne dépend que de l'état courant (à l'instant t_n) et pas de l'historique. Ainsi, les processus markoviens sont des processus sans mémoire.

Chaîne de Markov : Une chaîne de Markov est un processus markovien à espace d'état discret, qui peut être fini ou infini mais dénombrable ($E \subseteq IN$).
- Si $T \subseteq Z$ (ou IN), le processus est une chaîne de Markov à temps discret.

*. Pr. N. GHARBI, Faculté d'Informatique - USTHB

— Si $T \subseteq IR$ (ou $[0,+\infty[$), le processus est une chaîne de Markov à temps continu.

2 Chaînes de Markov à temps discret [†]

DÉFINITION :

Un processus stochastique $\{X_n\}_{n\in IN}$ à espace d'état discret et à temps discret, est une chaîne de Markov à temps discret (CMTD) si et seulement si :

$$P[X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_0 = i_0] = P[X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}]$$

où : X_n représente l'état du système à l'instant n.

Ainsi, la probabilité pour que la chaîne soit dans un certain état à la nième étape du processus ne dépend que de l'état du processus à l'étape précédente (la n-1 ième étape) et pas des états dans lesquels il se trouvait aux étapes antérieurs.

Nous nous interéssons particulièrement aux **CMTD homogènes** où les probabilités $P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]$ ne dépendent pas de n. On peut alors définir la *probabilité de transition* d'un état i vers un état j, p_{ij} qui ne dépend pas de l'étape n :

$$p_{ij} = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i] = P[X_1 = j \mid X_0 = i],\ \forall n \in IN.$$

$p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$: représente la probabilité de transition de l'état i à l'état j en une étape.
Où : $\sum_{j\in E} p_{ij} = 1$.

Notons que $p_{ii} \geq 0$ car il est possible de rester dans un même état i entre deux étapes consécutives.

Une CMTD peut être décrite soit par :
- Un graphe orienté, dans lequel on associe à chaque état de la chaîne un noeud et à chaque transition possible entre deux états i et j avec $p_{ij} > 0$, un arc orienté pondéré par la probabilité de transition ;
- Une matrice de transition $P = \|p_{ij}\|$ qui est une matrice carrée d'ordre fini ou infini correspondant à la cardialité de l'espace l'état et dont les éléments correspondent aux probabilités de transition entre états.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12}\cdots & p_{1j}\cdots \\ p_{21} & p_{22}\cdots & p_{2j}\cdots \\ ..... & & \\ p_{i1} & p_{i2}\cdots & p_{ij}\cdots \\ ..... & & \end{pmatrix}$$

La distribution de l'état initial :

L'état initial d'un système est défini par le vecteur des probabilités : $\pi^{(0)} = [\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}, ...]$
où : $\pi_i^{(0)} = P[X_0 = i]$ est la probabilité que la chaîne se trouve à l'instant initial à l'état i.
Dire qu'initialement le système est dans l'état j signifie que $\pi_j^{(0)} = 1$ et $\pi_i^{(0)} = 0$, $\forall i \neq j$.

Exemple 1 : Soit un processeur :

$$X_n = \begin{cases} 0, \text{ si le processeur est en bon état le jour } n \\ 1, \text{ si le processeur est en panne le jour } n \end{cases}$$

†. Pr. N. GHARBI, Faculté d'Informatique - USTHB

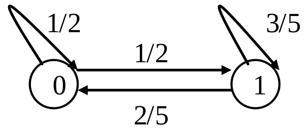

Fig. 1: Représentation graphique de la chaîne de l'exemple 1

On suppose que la probabilité que le processeur tombe en panne le jour n sachant qu'il était la veille en bon état est de 50% et que la probabilité qu'il soit réparé est de 40%.

L'espace d'états $E = \{0, 1\}$
$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$
La distribution de l'état initial est : $\pi^{(0)} = [\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}] = [0, 1]$ ou $[1, 0]$

2.1 Analyse transitoire : ‡

L'analyse d'une CMTD au régime transitoire consiste à déterminer le vecteur des probabilités d'état $\pi^{(n)}$: $\pi^{(n)} = [\pi_i^{(n)}, i \in E]$
où : $\pi_i^{(n)} = P[X_n = i]$ est la probabilité que la chaîne se trouve à l'instant n (à la nième étape du processus) dans l'état i.

Ce vecteur des probabilités $\pi^{(n)}$ dépend :
— de la matrice de transition P ;
— du vecteur des probabilités d'état initiales $\pi^{(0)}$.

$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}.P = \pi^{(n-2)}.P^2 = ... = \pi^{(0)}.P^n$

La matrice P comprend les probabilités de transition en une seule étape (p_{ij}), tandis que la matrice P^n comprend les probabilités de transition en n étapes ($p_{ij}^{(n)}$).

$p_{ij}^{(n)}$: représente la probabilité de transition de l'état i à l'état j en n étapes. Elle est définie par :

$p_{ij}^{(n)} = P[X_{k+n} = j \mid X_k = i] = P[X_n = j \mid X_0 = i]$, $\forall k \in IN$.

Ainsi, les équations de Kolmogorov peuvent être appliquées comme suit :

$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)}.p_{kj}^{(n-m)}$, $0 < m < n$.

Cette relation exprime le fait que pour aller de l'état i à l'état j en n étapes, on peut aller de l'état i à l'état k en m étapes, puis aller de cet état k à l'état j en $n - m$ étapes, et ce pour tous les états k (d'où la somme).

Suite Exemple : On suppose que le processeur en bon état à l'instant initial $n = 0$

$\pi^{(0)} = [\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}] = [1, 0]$

$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}.P = [1/2, 1/2]$

‡. Pr. N. GHARBI, Faculté d'Informatique - USTHB

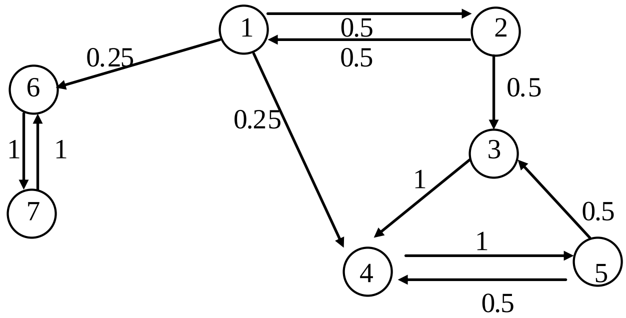

Fig. 2: Exemple de chaîne non irréductible (réductible)

$\pi^{(2)} = \pi^{(1)}.P = [0.45, 0.55]$

Remarque : L'évolution de la distribution des états $\pi^{(n)}$ dépend de la distribution initiale $\pi^{(0)}$.

2.2 Paramètres de performances d'une CMTD §

Des paramètres de performance intéressants peuvent être obtenus à partir d'une CMTD, tels que :
- $p_{ij}^{(n)}$: la probabilité d'aller d'un état i à un état j en n étapes ;
- $f_{ii}^{(n)}$: la probabilité que le premier retour en i ait lieu n étapes après l'avoir quitté ;
- f_{ii} : la probabilité de revenir en i après l'avoir quitté : $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$;
- M_i : le temps moyen (le nombre moyen d'étapes) de retour en i : $M_i = \sum_{n=1}^{\infty} n.f_{ii}^{(n)}$;
- f_{ij} : la probabilité d'aller d'un état i à un état j ;
- M_{ij} : le temps moyen nécessaire à la transition d'un état i à un état jd'aller d'un état i à un état j.

2.3 Classification des états

Définition : CMTD irréductible
Une chaîne de Markov à temps discret est dite irréductible ssi de tout état i on peut atteindre tout état j (en un nombre fini d'étapes) : $\forall i, j \in E$, $\exists m \geq 1$ tel que $p_{i,j}^{(m)} \neq 0$
où : $p_{i,j}^{(m)}$ désigne la probabilité de transition de l'état i à l'état j en m étapes.

Exemple 2 : Cette CMTD est non irréductible car par exemple de l'état 6 on ne peut pas atteindre l'état 1. Cette chaîne comporte deux sous-chaînes absorbantes : {6, 7} et {3, 4, 5}. Ces dernières sont telles qu'une fois dans un des états qu'elles comportent, on ne peut plus en sortir.

Ainsi, toute CMTD non irréductible (réductible) possède au moins une sous-chaîne absorbante.

Définition : CMTD apériodique
La période d'un état j est : $D(j) = PGCD\{k \geq 1/p_{j,j}^{(k)} > 0\}$. C'est le plus grand commun diviseur des longueurs des circuits allant de j à j.
La période d'une CMTD est égale au PGCD de la période de chacun de ses états. Elle est égale au PGCD de la longueur de tous les circuits du graphe.

Une CMTD est dite périodique si sa période est supérieure à 1 (et **apériodique** si sa période est égale à 1).

§. Pr. N. GHARBI, Faculté d'Informatique - USTHB

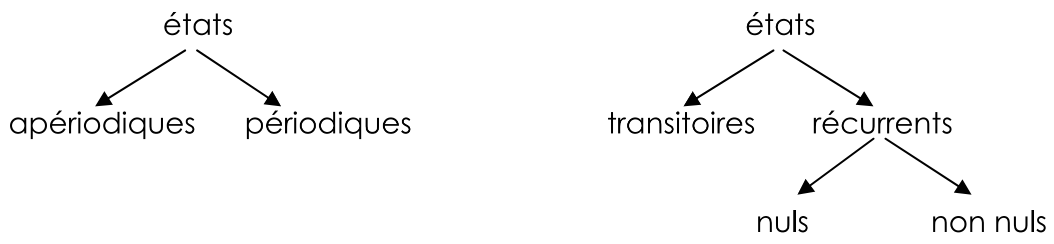

Fig. 3: Classification des états d'une CMTD

Exemple : Dans l'exemple précédant, l'état 6 est périodique de période $D(6) = 2$ et l'état 4 est apériodique car $D(4) = PGCD\{2, 3\} = 1$. Ainsi, la CMTD est apériodique.

Définition : Un état i est dit :
— Transitoire si $f_{ii} < 1$;
— Récurrent si $f_{ii} = 1$; de plus il est :
  — Récurrent nul si le temps moyen de retour est infini : $M_i = \infty$;
  — Récurrent non nul (ou récurrent positif) si le temps moyen de retour est fini : $M_i < \infty$.

On aboutit ainsi à la double classification représentée dans la figure 3.

Ainsi, une première classification des états d'une CMTD consiste à dire si l'état est apériodique ou bien périodique. Dans ce dernier cas, préciser sa période. Une deuxième classification consiste à montrer si l'état est transitoire, récurrent nul ou récurrent non nul.

Exemple : Dans l'exemple précédant :
— L'état 1 est transitoire , car $f_{11} = f_{11}^{(2)} = 1/4 < 1$;
— L'état 6 est récurrent non nul, car $f_{66} = f_{66}^{(2)} = 1$ et $M_6 = 2$;
Attention, on regarde toujours le premier retour.

Propriété : Tous les états d'une **CMTD irréductible** sont de même nature : soit tous récurrents nuls ou bien tous récurrents non nuls. De plus, ils ont tous la même période.

Propriété : Une CMTD finie ne peut comporter que des états transitoires ou récurrents non nuls. Ainsi, un état récurrent nul ne peut donc exister que dans une CMTD infinie.

Propriété : Tous les états d'une **CMTD irréductible finie** sont récurrents non nuls.

Remarque : Ces propriétés restent valables pour les sous-chaines absorbantes.

2.4 Calcul de la probabilité et du temps moyen de transition entre états :

La probabilité d'aller d'un état i à un état j est définie par :

$f_{ij} = \sum_{k \neq j} p_{ik}.f_{kj}$.

Le temps moyen (nombre d'étapes moyen nécessaire à la transition d'un état i à un état j est défini par :

$M_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}.M_{kj}$.

2.5 Analyse stationnaire :

Lorsque le système aura fonctionné suffisamment longtemps ($n \to \infty$), il atteint le régime stationnaire défini par le vecteur limite ou le vecteur des probabilités stationnaires : $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi^{(n)}$.

On verra dans la suite comment obtenir assez rapidement la valeur de π indépendamment de la distribution initiale et sans calculer les distributions intermédiaires $\pi^{(n)}$.

L'analyse du système en régime permanent nécessite la vérification au préalable de certaines propriétés de la chaîne de Markov ayant rapport avec l'ergodicité.

Propriété :
Une chaîne de Markov à temps discret finie est ergodique si et seulement si elle est apériodique et irréductible.

Exemple : Vérifier l'ergodicité de l'exemple 2.1.

Définition : Stationnarité
Une chaîne de Markov admet une distribution stationnaire sur ses états si elle est ergodique.

Ainsi, si la CMTD est ergodique, le système qu'elle modélise se stabilise après l'écoulement d'un temps infini et il existe toujours une seule distribution des probabilités stationnaires π qui est indépendante de la distribution initiale et qui est solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \pi.P = \pi \\ \sum_{i\in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Dans l'exemple 2.1, $\pi = [4/9, 5/9]$.

Propriété : Dès l'instant où les probabilités stationnaires existent, on a :
$\pi_j = \frac{1}{M_j}, \forall j \in E$.

Où : M_j est le temps moyen de retour en j.

Propriété : Une CMTD à espace d'état infinie peut être ergodique.

3 Chaînes de Markov à temps continu [¶]

Contrairement aux chaînes de Markov à temps discret, les CMTC permettent de représenter une évolution continue du temps.

DÉFINITION : Chaîne de Markov à temps continu
Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ à espace d'état discret (dénombrable finie ou infinie) et à temps continu est une chaîne de Markov à temps continu (CMTC) si et seulement si :
$P[X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_{n-2}) = i_{n-2}, ..., X(t_0) = i_0] = P[X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}]$, $\forall n$ et $\forall t_0 < t_1 < ... < t_n$.

En d'autres termes, la probabilité pour que la chaîne soit dans un certain état à l'instant t_n ne dépend donc que de l'état du processus à l'instant t_{n-1} et pas des états dans lesquels il se trouvait

¶. Pr. N. GHARBI, Faculté d'Informatique - USTHB aux instants antérieurs $(t_0, ..., t_{n-2})$.

DÉFINITION :
Une chaîne de Markov à temps continu est caractérisée par :
- Le temps passé dans tout état i de la chaîne est une variable aléatoire distribuée selon la loi exponentielle de taux μ_i ;
- Les transitions d'un état i vers les autres états sont probabilistes.

Remarque : Dans les CMTC, nous considérons les taux de transition au lieu des probabilités de transition d'état. En fait, le temps de transition de l'état i à l'état j est distribué selon une loi exponentielle de taux $\mu_{ij} = \mu_i.p_{ij}$, où p_{ij} est la probabilité de se rendre dans l'état j en quittant l'état i et le temps passé dans l'état i est exponentiel de taux μ_i.

3.0.1 Description des chaînes de Markov à temps continu

En pratique, une CMTC peut être décrite soit par un *diagramme de transition d'état* ou bien par une matrice des taux de transition dite : *générateur infinitésimal*
- Le diagramme de transition est un graphe orienté et libellé dont les sommets correspondent aux états de la chaîne de Markov et les arcs sont étiquetés par les taux de la distribution exponentielle associés à la transition d'un état à un autre.
- Le générateur infinitésimal Q est une matrice carrée, d'ordre égal au nombre d'états de la chaîne. Un élément q_{ij} désigne le taux de transition μ_{ij} de l'état i vers l'état j, $i \neq j$. Les éléments diagonaux q_{ii} sont choisis, par définition, égaux à l'opposé de la somme des autres éléments de la ligne :

$$q_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij} & \text{si } i \neq j \\ -\sum_{k=1,k\neq i}^{n} \mu_{ik} & \text{si } i = j \end{cases}$$

où :
- n correspond au nombre d'états de la chaîne de Markov.
- μ_{ij} désigne le taux de la distribution associée à la transition de l'état i à l'état j. S'il n'y a pas de transition, l'élément est nul.

3.0.2 Chaîne de Markov incluse [‖]

Il existe un lien très fort entre les CMTC et les CMTD et ce lien peut être formalisé par la définition de la *CMTD incluse* dans la CMTC.

Définition : La CMTD incluse dans la CMTC de générateur infinitésimal Q, dont les termes q_{ij} $(i \neq j)$ sont donnés par $\mu_{ij} = \mu_i.p_{ij}$, est une chaîne de Markov à temps discret dont la matrice de transition a pour éléments les p_{ij} (voir Fig. 4).

Ainsi, si la CMTC est caractérisée par des taux de transition μ_{ij} entre états, les probabilités de transition de la chaîne incluse sont données par :

$$p_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_i} = \frac{\mu_{ij}}{\sum_{k\neq i} \mu_{ik}}$$

Soit un état i d'une CMTC, avec une transition vers l'état j et une autre vers l'état k. Le temps passé dans l'état i est exponentiel de taux μ_i. Partant de l'état i, la variable aléatoire mesurant le temps de transition vers l'état j (resp. état k) suit une loi exponentielle de taux μ_{ij} (resp. μ_{ik}). On a alors :

‖. Pr. N. GHARBI, Faculté d'Informatique - USTHB

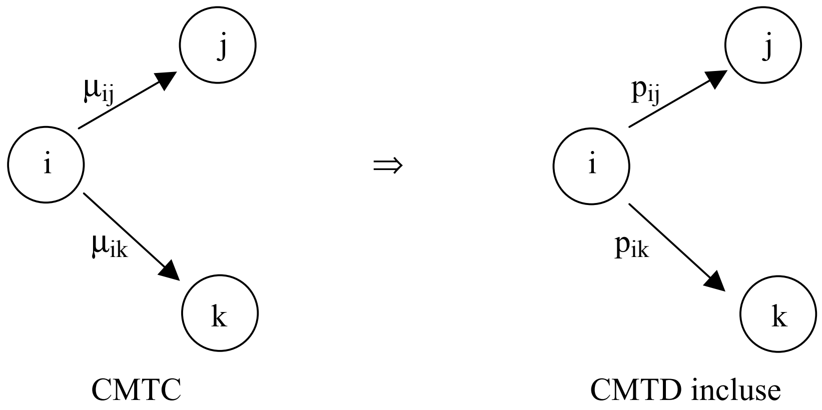

Fig. 4: CMTD incluse dans une CMTC

$\mu_i = \mu_{ij} + \mu_{ik}$
$\mu_{ij} = \mu_i.p_{ij}$
$\mu_{ik} = \mu_i.p_{ik}$
$p_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_{ij}+\mu_{ik}}$
$p_{ik} = \frac{\mu_{ik}}{\mu_{ij}+\mu_{ik}}$

Par ailleurs, pour savoir lequel des états j ou k sera visité en sortant de i, on *"tire"* une réalisation particulière pour chacune de ces deux variables aléatoires (suivant respectivement des lois exponentielles de taux μ_{ij} et μ_{ik}). La plus petite des deux valeurs générées correspond à la transition qui sera effectivement empruntée.

De même que dans les CMTD, pour définir la nature d'un état, on calcule la probabilité d'y revenir un jour lorsqu'on le quitte. Or, pour obtenir cette valeur, on a besoin des probabilités de cheminement (transition) dans le graphe, d'où l'intérêt de la chaine incluse, car le temps passé dans un état fournit seulement des informations sur la vitesse à laquelle on circule dans le graphe. Ainsi, la nature de tout i dans une CMTC est la même que celle du même état dans la CMTD incluse.

3.0.3 Conditions d'existence et calcul d'une distribution stationnaire **

Pour confirmer l'existence du régime stationnaire, on doit vérifier si la CMTC est irréductible.

Propriété : Une CMTC finie et irréductible est ergodique.

Propriété : Une CMTC est irréductible si et seulement si la CMTD incluse est irréductible.

En termes de graphe, une chaîne de Markov est irréductible, si et seulement si elle comporte une unique composante fortement connexe.

Propriété : Dans une CMTC erogodique, le vecteur π des probabilités stationnaires $\pi_i = lim_{t\to\infty}\pi_i(t)$ existe toujours et est l'unique solution du système matriciel suivant :

$$\begin{cases} \pi.Q = 0 \\ \sum_{i\in E}\pi_i = 1 \end{cases}$$

**. Pr. N. GHARBI, Faculté d'Informatique - USTHB où : E est l'espace des états de la chaîne de Markov.

La résolution de ce système d'équations, nous donnerait les probabilités stationnaires des différents états, ou encore la proportion de temps que le processus passe (en régime stationnaire) dans ces différents états.

Remarque : À l'état stationnaire, pour tout état j, le flux sortant de j = flux entrant dans j. Cette equation est dite : *equation d'état.*