Esercizio 3

① Un grafo non diretto di $n$ nodi $\{N_1, \dots, N_n\}$ non è altro che una matrice $G$ con le seguenti caratteristiche:

- È una matrice quadrata $n \times n$;
- Il generico elemento è una variabile, in questo caso aleatoria, a valori in $\{0,1\}$; in particolare l'elemento $G(i,j)$ è pari a 1 quando i nodi $N_i$ e $N_j$ sono connessi, e 0 altrimenti;
- $G(i,i) = 1$: per convenzione tutti i nodi sono connessi a loro stessi
- È una matrice simmetrica: $G(i,j) = G(j,i)$, in quanto il grafo non è orientato.

Dunque gli elementi variabili nel generico grafo $G$ non sono altro che quelli della parte triangolare superiore, in quanto quelli sulla diagonale principale sono noti e quelli della parte triangolare inferiore sono uguali ai suddetti.

$$\begin{pmatrix} \text{noto} & x & y \\ \text{simm} & \text{noto} & z \\ \text{simm} & \text{simm} & \text{noto} \end{pmatrix}$$

Per il generico grafo a $n$ nodi vi sono dunque un numero di variabili i.i.d. Bernoulliane pari agli elementi della parte triangolare superiore, ossia

$$\sum_{i \in [1, n-1]} i = \frac{(n-1)n}{2}$$

Il sample space è dunque $\{0,1\}^{\frac{(n-1)n}{2}}$ e ha dunque ~~size~~ size $2^{\frac{(n-1)n}{2}}$

(2)

Poichè le $\frac{(n-1)n}{2}$ sono variabili i.i.d e bernoulliane, allora la probabilità che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \vdots \end{pmatrix}$ siano pari al generico elemento di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ è pari a

ossia

$$(1-p)^{n_0}\cdot p^{n_1}$$

dove $n_1$ è il numero di volte in cui compare 1 e $n_0$ è il numero di volte in cui compare lo 0

(3)

Innanzitutto, si osserva che per $n<3$ la probabilità è 0.
Nei rimanenti casi, per $n \geq 3$, il numero di possibili terne è pari al numero delle possibili combinazioni di 3 elementi per $\frac{(n-1)n}{2}$ posti.
ossia è pari a

$$\binom{\frac{(n-1)n}{2}}{3} = \frac{\frac{(n-1)n}{2}!}{3!\left(\frac{(n-1)n}{2}-3\right)!}$$

dove $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,(a-b!)}$ è il coefficiente binomiale.

Per ogni possibile terna, per il punto precedente si ha che la probabilità è pari a

$$\binom{\frac{(n-1)n}{2}}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^{\left(\frac{(n-1)n}{2}-3\right)}$$

Questa probabilità differisce da quella per cui vi sono 3 e solo 3 collegamenti generici che è pari a

$$\frac{\frac{(n-1)n}{2}!}{\left(\frac{(n-1)n}{2}-3\right)!}\cdot p^3\cdot(1-p)^{\left(\frac{(n-1)n}{2}-3\right)}$$

(4) Il numero di possibili sequenze di nodi è pari alla metà del numero di permutazioni di $n$ elementi, ossia è pari a $\frac{1}{2} n!$

Per ogni possibile sequenza, per il punto precedente si ha che la probabilità è pari a $p^{n-1} \cdot (1-p)^{\left(\frac{(n-1)n}{2} - (n-1)\right)}$ in quanto il numero di connessioni per una sequenza di $n$ nodi è pari a $n-1$.

Dunque, sommando le probabilità per ogni sequenza, si ha che la probabilità richiesta è pari a $\frac{1}{2} n! \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)^{\left(\frac{(n-1)n}{2} - (n-1)\right)}$

(5) Sia $N$ la v.a. pari a $x + y + z + \dots$ ossia pari alla somma delle suddette $\frac{(n-1)n}{2}$ v.a. i.i.d. bernoulliane, ossia $x, y, z, \dots$ è immediato verificare che $N+n$ è pari al numero di collegamenti del grafo sotto l'assunzione che ogni nodo è sempre connesso a se stesso.

La distribuzione associata ad $N$ è la distribuzione binomiale e dunque il suo valore atteso è pari a $\frac{(n-1)n}{2} \cdot p$

Poiché per ogni costante $k$ e ogni v.a. $X$ si ha $E(X+k) = E(X) + k$ si ha che il valore richiesto è pari a $\frac{(n-1)n}{2} \cdot p + n$