

## Capitolo 4

### ESEMPI DI APPLICAZIONI AD ALCUNI PROFILATI METALLICI

Nel seguito saranno svolti dei calcoli su tre profilati:

1. Ad L con ali uguali (UNI EN 10056 1/2)
2. Ad L con L disuguali (UNI EN 10056 1/2)
3. A doppia T (IPE 100, UNI 5398 (EU 19-57))



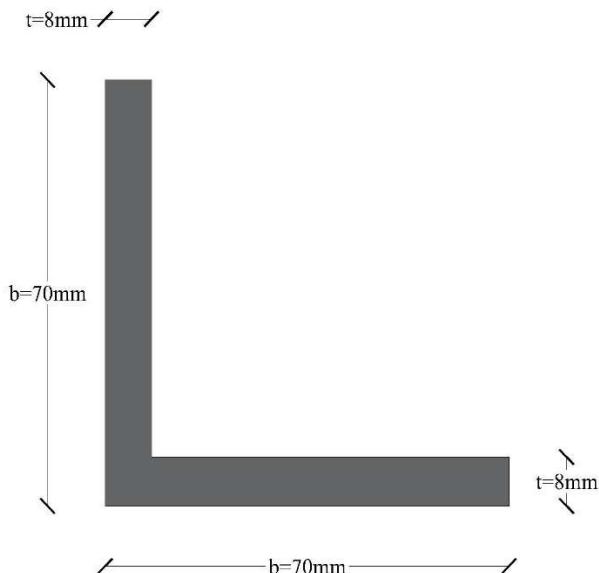
I profilati hanno le seguenti caratteristiche geometriche:

Il profilo IPE 100 presenta due assi di simmetria la cui intersezione fornisce la posizione del baricentro. In questo caso gli assi baricentrici coincidono con gli assi principali d'inerzia e questo semplificherà notevolmente i calcoli.

Il profilo ad L con ali uguali presenta un solo asse di simmetria, per cui il baricentro cade su tale asse. Tuttavia poiché in questo caso gli assi baricentrici non sono anche principali d'inerzia andrà trovato l'angolo  $\vartheta$  formato tra l'asse x e l'asse  $\zeta$  principale d'inerzia e per tutti i calcoli successivi bisognerà fare riferimento agli assi principali d'inerzia.

Il profilo ad L ad ali disuguali non presenta alcun asse di simmetria e questo comporta una maggiore difficoltà per trovare il baricentro della sezione e i relativi assi principali d'inerzia a cui bisognerà fare riferimento.

## 4.1 Profilato a L ad ali uguali



**Figura 4.1**

- Calcolo dell'area:

basandosi sulla figura 4.2 si ha:

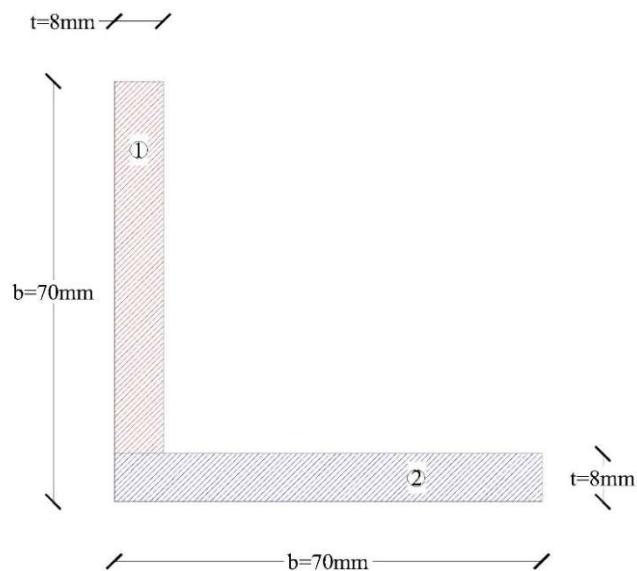
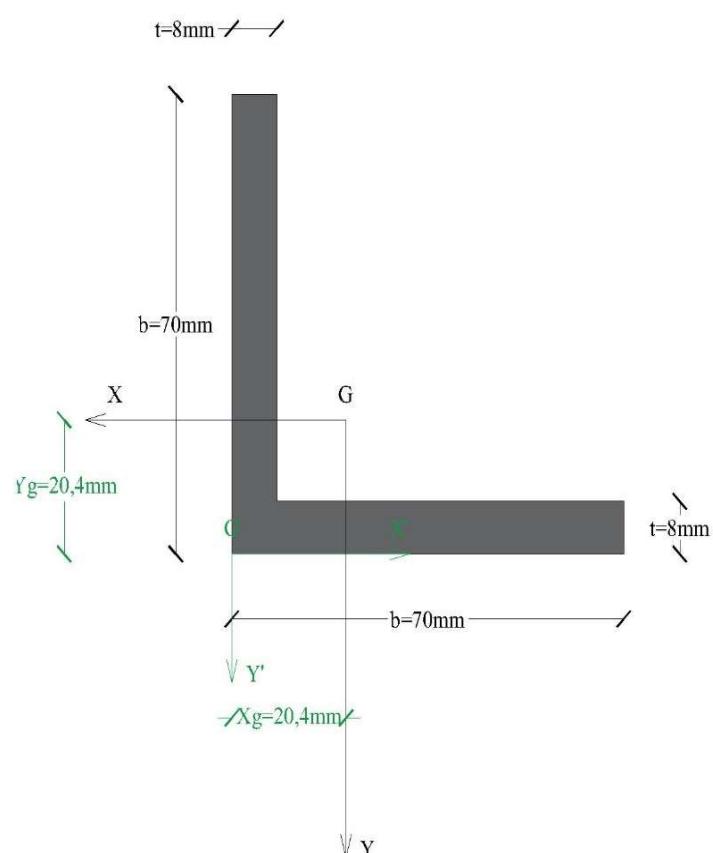
$$A = b \cdot t + (b-t) \cdot t = 7 \cdot 0.8 + 6.2 \cdot 0.8 = 1056 \text{ cm}^2$$

- Calcolo le coordinate del baricentro:

$$A_{tot} \cdot X_G = A_1 \cdot \left( \frac{t}{2} \right) + A_2 \cdot \left( \frac{b}{2} \right) \Rightarrow X_G = 2.044 \text{ cm}$$

$$A_{tot} \cdot Y_G = -A_1 \cdot \left( t + \frac{b-t}{2} \right) - A_2 \cdot \left( \frac{t}{2} \right) \Rightarrow Y_G = -2.044 \text{ cm}$$

Il nostro sistema locale X',Y' di assi cartesiani sarà quindi traslato dalla quantità che abbiamo trovato, quindi impostato nel baricentro come riportato in figura 4.3.

**Figura 4.2****Figura 4.3**

- Calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi X e Y:

$$I_{x_1} = \frac{1}{12}(b-t)^3 \cdot t + (b-t) \cdot t \cdot \left[ \frac{(b-t)}{2} - (2.04-t) \right]^2 = 33.05 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{1}{12}b \cdot t^3 + b \cdot t \cdot \left[ 2.04 - \left( \frac{t}{2} \right) \right]^2 = 15.36 \text{ cm}^4$$

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = 48.41 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12}(b-t) \cdot t^3 + (b-t) \cdot t \cdot \left[ 2.04 - \left( \frac{t}{2} \right) \right]^2 = 13.605 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{1}{12} \cdot t \cdot b^3 + b \cdot t \cdot \left[ \left( \frac{b}{2} \right) - 2.04 \right]^2 = 34.80 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = 48.41 \text{ cm}^4$$

$$I_{(xy)_1} = (b-t) \cdot t \cdot \left( 2.04 - \frac{t}{2} \right) \cdot \left[ -\left( \frac{b-t}{2} - (2.04-t) \right) \right] = -15.13 \text{ cm}^4$$

$$I_{(xy)_2} = b \cdot t \cdot \left( 2.04 - \frac{t}{2} \right) \cdot \left[ -\left( \frac{b}{2} - 2.04 \right) \right] = -13.41 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = I_{(xy)_1} + I_{(xy)_2} = 28.54 \text{ cm}^4$$

- Calcolo dei momenti principali d'inerzia:

poiché  $I_x = I_y$  allora l'angolo che mette in relazione gli assi X e Y con gli assi  $\zeta$  e  $\eta$  principali d'inerzia è  $45^\circ$ .

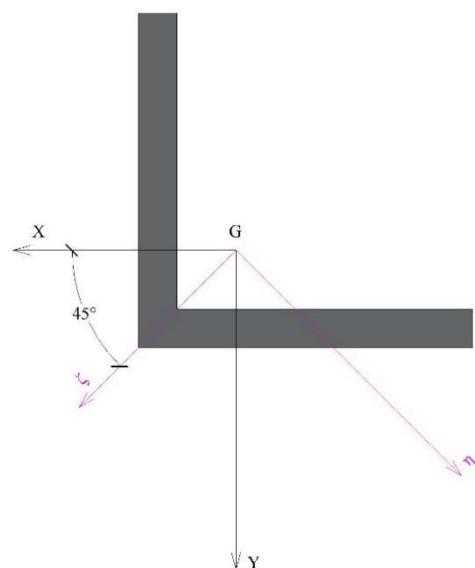
$$\Rightarrow \vartheta = 45^\circ$$

$$I_\xi = I_x \cos^2 \vartheta + I_y \sin^2 \vartheta - I_{xy} \sin 2\vartheta = 76.95 \text{ cm}^4$$

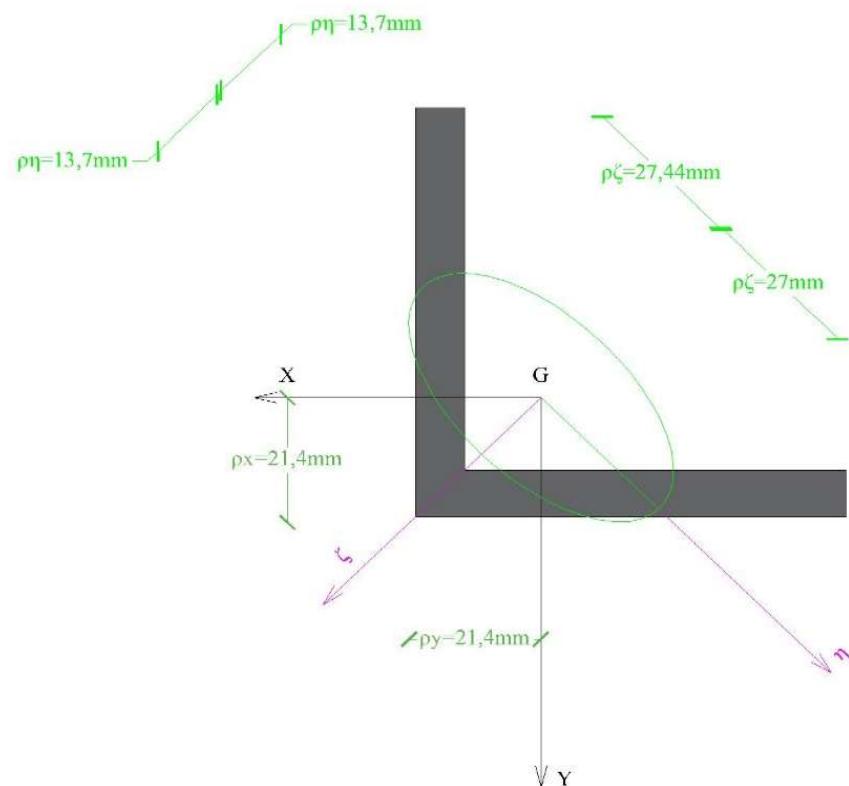
$$I_\eta = I_x \sin^2 \vartheta + I_y \cos^2 \vartheta + I_{xy} \sin 2\vartheta = 19.87 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cdot \sin 2\vartheta + I_{xy} \cdot \cos 2\vartheta = 0$$

$I_{\xi\eta} = 0$  conferma che  $I_\xi$  e  $I_\eta$  sono i momenti principali d'inerzia.

**Figura 4.4**

- Determinazione dell'ellisse centrale d'inerzia:

**Figura 4.5**

L'ellisse della figura 4.5 è stato composto grazie alle formule che seguono:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 2.14 \text{ cm}$$

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} = 2.7 \text{ cm}$$

$$\rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} = 1.37 \text{ cm}$$

- Determinazione grafica del nocciolo centrale d'inerzia:

I vertici del nocciolo 1, 2, 3, 1', 2' rappresentano i *centri relativi* rispettivamente ai cinque assi tangenti alla sezione, ma che non la tagliano. Tenendo presente che il centro relativo a un asse giace sul corrispondente asse coniugato, si sono trovati tutti i centri con la costruzione grafica basata sulle proprietà dell'ellisse centrale d'inerzia; ci si limita quindi a descrivere il procedimento eseguito per la determinazione del vertice B:

1. Si traccia la parallela b' all'asse b, tangente all'ellisse, essendo R il punto di tangenza;
2. la congiungente RG rappresenta la direzione coniugata all'asse b;
3. il segmento RG, raggio d'inerzia relativo all'asse baricentrico parallelo all'asse b, viene ribaltato in R' sulla perpendicolare per G alla direzione coniugata RG;
4. per R', si traccia la normale alla congiungente R'B' che interseca la direzione coniugata nel punto B. Ripetendo tale costruzione per i restanti assi, vengono definiti i centri relativi agli altri quattro assi, costituenti i vertici del pentagono, che rappresenta il nocciolo centrale d'inerzia.

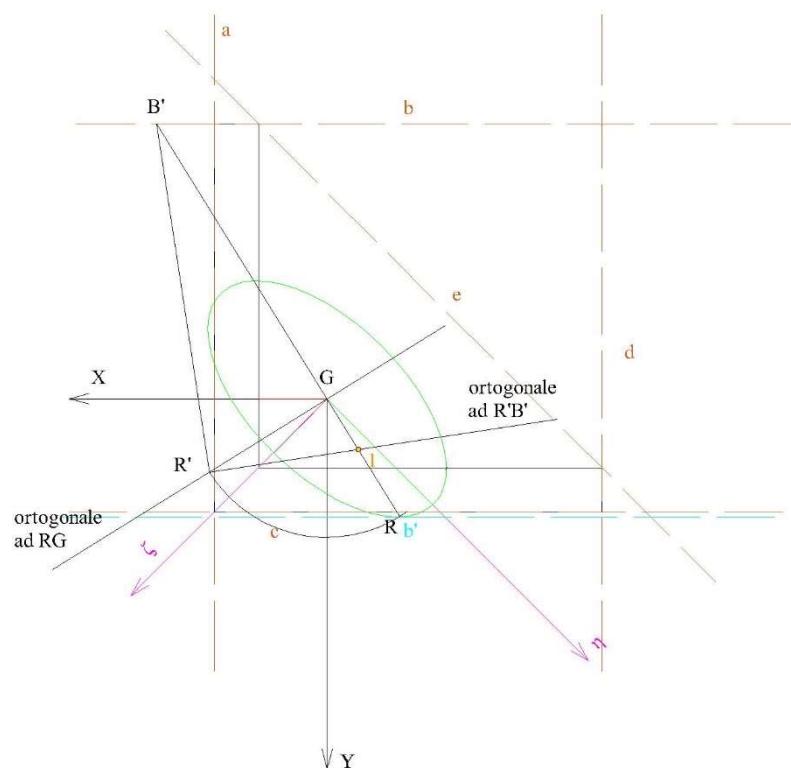


Figura 4.6 – determinazione grafica del centro relativo 1.

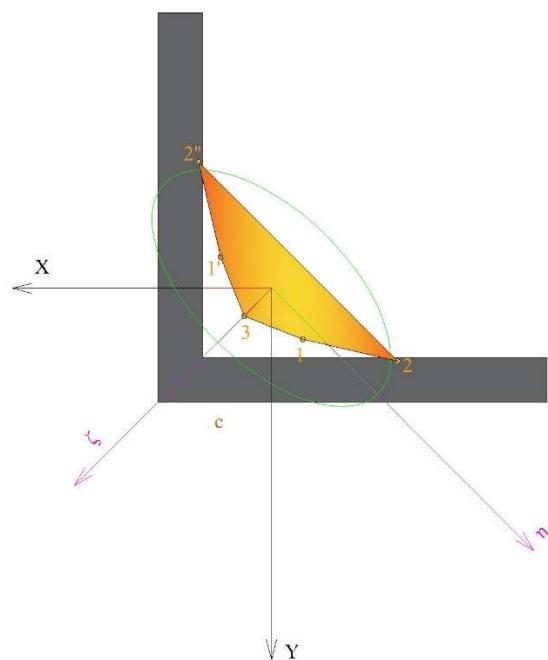
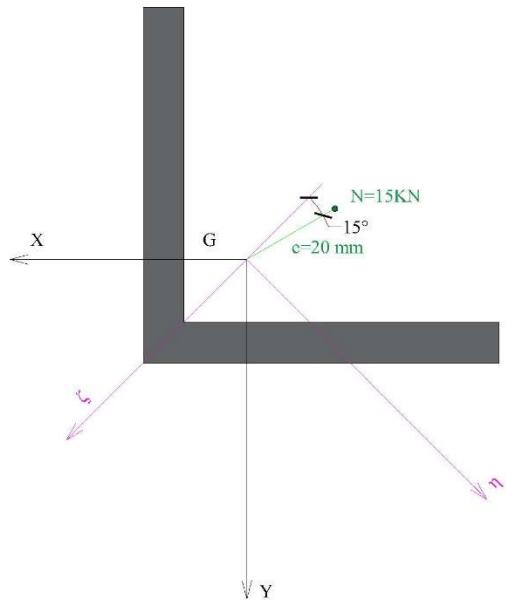


Figura 4.7 – nocciole centrale d'inerzia.

- Determinazione dell'asse neutro:

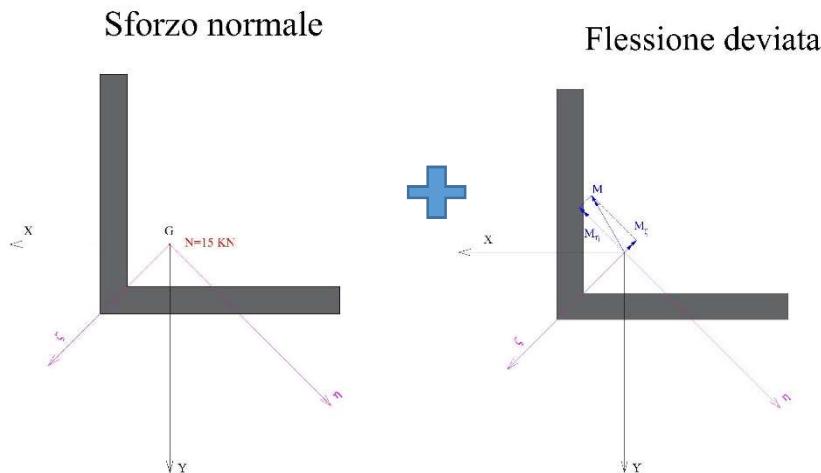


**Figura 4.8**

Useremo in questo esercizio una forza normale di compressione.

Questo caso di pressoflessione si può risolvere facilmente mediante la sovrapposizione degli effetti di 2 casi separati (fig.4.9):

1. Forza normale di compressione applicata nel baricentro
2. Flessione deviata



**Figura 4.9**

- Determinazione dell'asse neutro nel caso di sola flessione deviata prodotta da una forza normale eccentrica di compressione:

Supporremo in questo esercizio , ma anche nel successivo i seguenti dati:

$$N = 15 \text{ kNm}$$

$$e = 2 \text{ cm}$$

tali dati mi generano un momento  $M = N \cdot e = 30 \text{ kNm}$  che andrà ancora scomposto lungo gli assi principali d'inerzia:

$$M_{\xi} = -M \cdot \sin(15^\circ) = -7.76 \text{ kNm}$$

$$M_{\eta} = -M \cdot \cos(15^\circ) = -28.98 \text{ kNm}$$

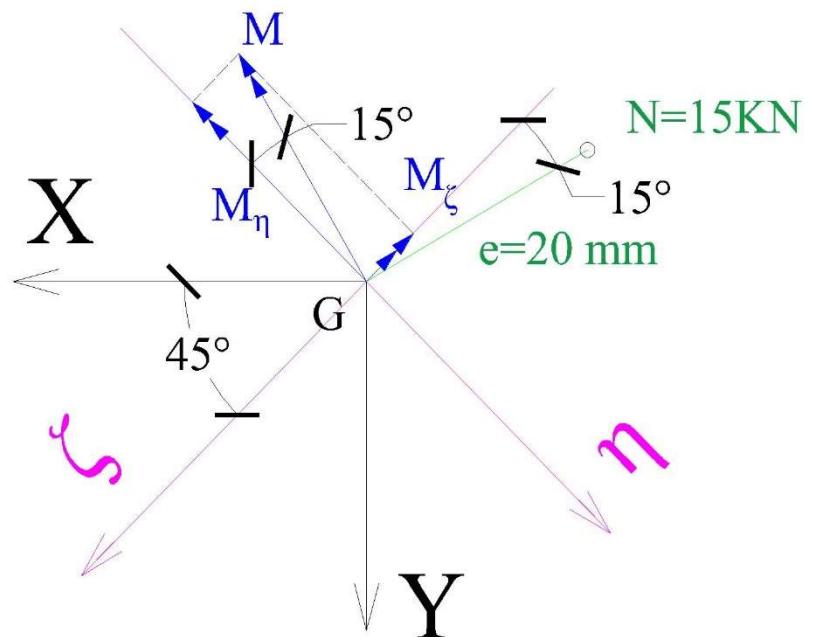
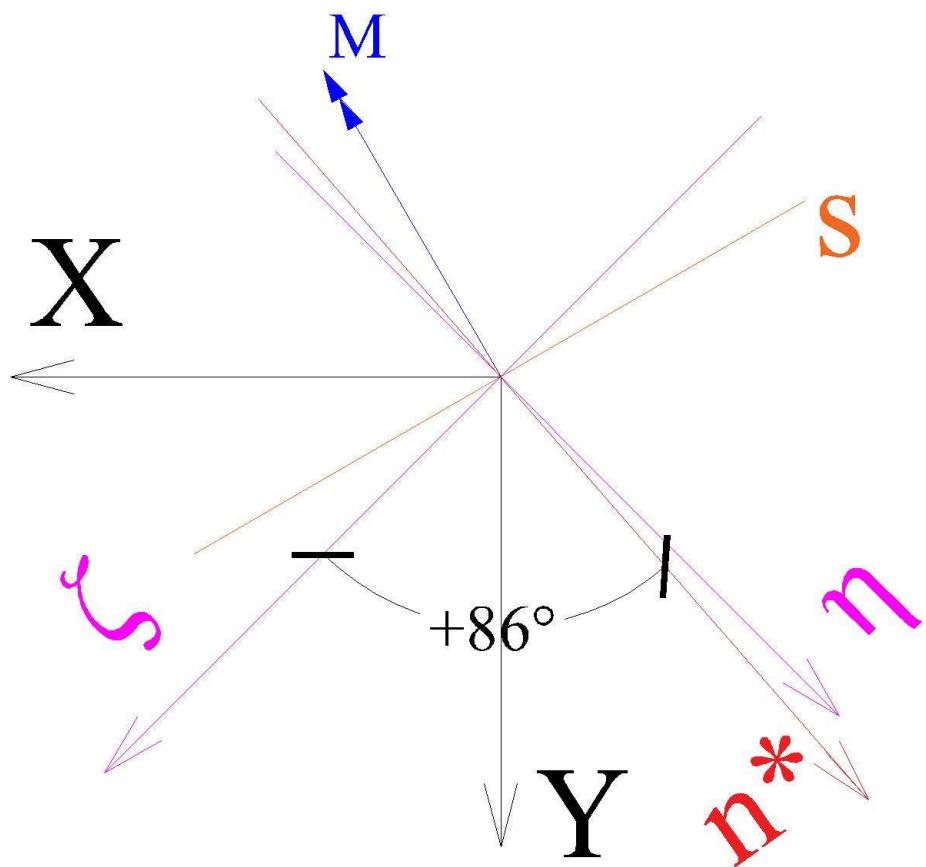


Figura 4.10

È ora possibile determinare l'angolo rispetto all'asse  $\xi$  che identifica la posizione dell'asse neutro:

$$\beta = \arctan\left(\frac{I_\xi}{I_\eta} \cdot \frac{M_\eta}{M_\xi}\right) = \arctan(14.46) \Rightarrow \beta = 86^\circ$$



**Figura 4.11**

- Determinazione delle tensioni normali nel caso della sola flessione deviata

La formula di Navier, diventa nel nostro caso:

$$\sigma_z = \frac{M_\xi}{I_\xi} \cdot \eta - \frac{M_\eta}{I_\eta} \cdot \xi$$

I punti dove le tensioni normali sono Max e Min sono P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub>, aventi secondo gli assi principali d'inerzia le seguenti coordinate:

$$P_1 \equiv [2.885 ; 0]; P_2 \equiv [-2.63 ; 4.384]$$

Le  $\sigma_z$  in P<sub>1</sub> e in P<sub>2</sub> saranno:

$$\sigma_z(P_1) = -\frac{(-28.98)}{(19.8714)} \cdot 2.885 = 4.2074 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z(P_2) = \frac{(-7.76)}{176.9486} \cdot 4.384 - \frac{-28.98}{19.8714} \cdot (-2.63) = -4.2776 \text{ kN/cm}^2$$

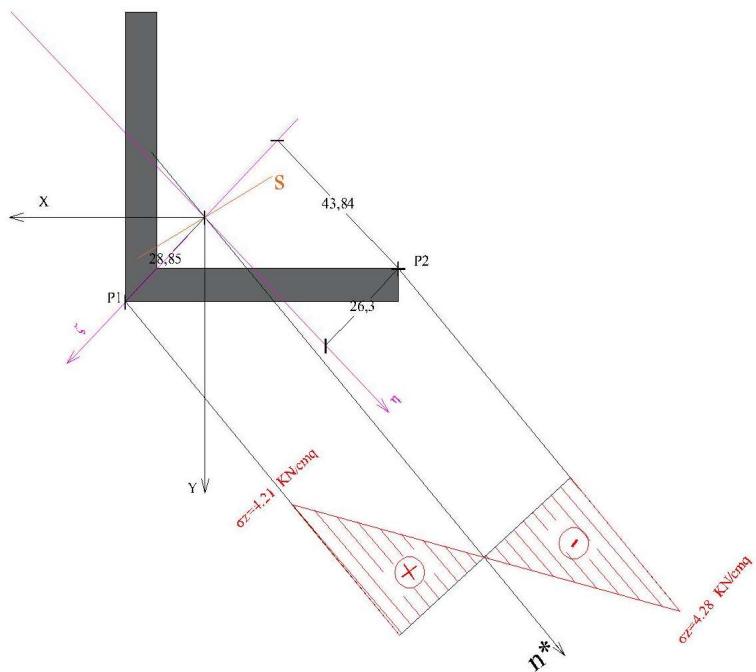


Figura 4.12

- Sovrapposizione della flessione deviata con la forza normale.

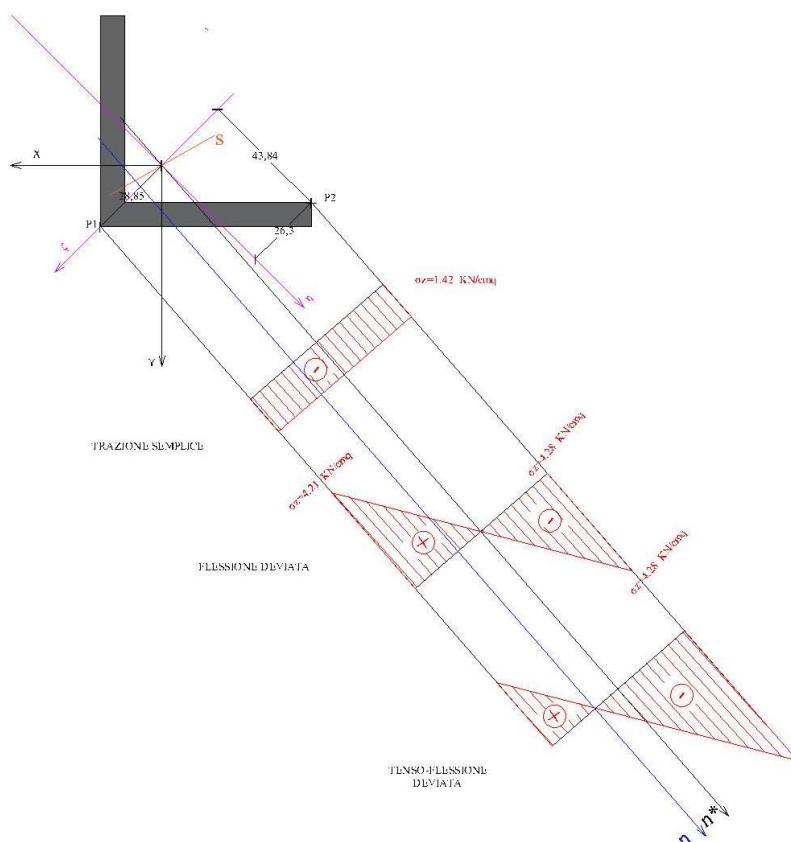
Le  $\sigma_z$  dovute allo solo forza normale sono uniformi e sono:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{-15}{10.56} = -1.42 \text{ kN/cm}^2$$

Combinando le appena dette con quelle ottenute nei punti  $P_1$  e  $P_2$  trovati nel caso della flessione deviata si avrà la soluzione del problema dello sforzo normale eccentrico che nel nostro caso genera la presso-flessione deviata poiché  $N < 0$ .

$$\sigma_z(P_1) = 4.2074 - 1.42 = 2.7874 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z(P_2) = -4.2776 - 1.42 = -5.6976 \text{ kN/cm}^2$$



**Figura 4.13**

- Determinazione dell'asse neutro della pressoflessione deviata senza sovrapposizione degli effetti.

Posso determinare la posizione dell'asse neutro nel caso completo di pressoflessione deviata determinando le intercette dell'asse neutro sugli assi principali d'inerzia.

Queste intercette sono:  $-\frac{\rho_\eta^2}{e_\xi}$ ;  $-\frac{\rho_\xi^2}{e_\eta}$

Dobbiamo perciò determinarci  $e_\xi$  e  $e_\eta$  che rappresentano le coordinate del centro di pressione.

Nel nostro caso:

$$e_\xi = e \cos(15^\circ) = -1.93 \text{ cm}$$

$$e_\eta = e \sin(15^\circ) = 0.52 \text{ cm}$$

Quindi:

$$-\frac{\rho_\eta^2}{e_\xi} = \frac{1.37^2}{1.93} = 0.97 \text{ cm}$$

$$-\frac{\rho_\xi^2}{e_\eta} = -\frac{2.7^2}{0.52} = 14.019 \text{ cm}$$

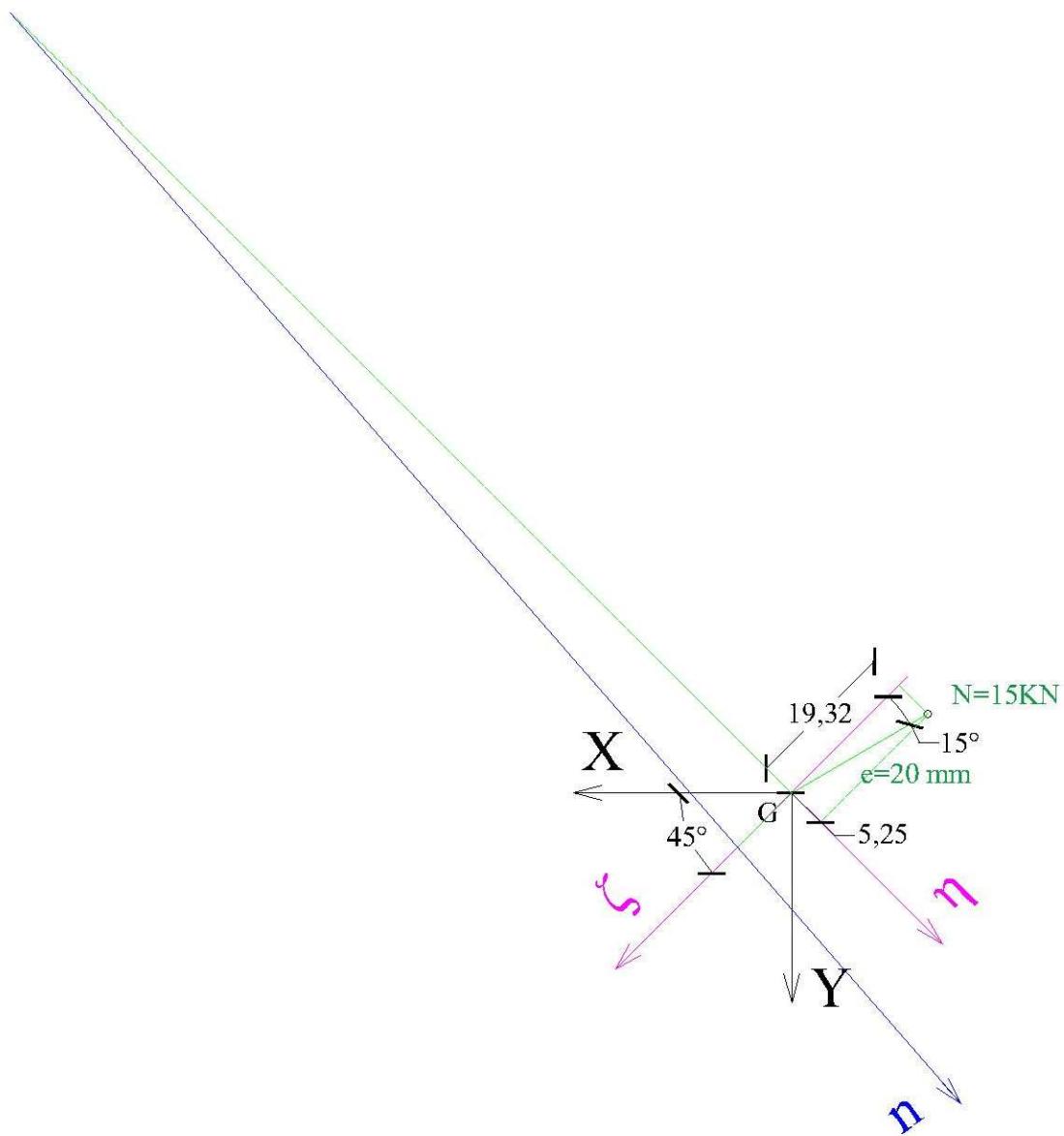
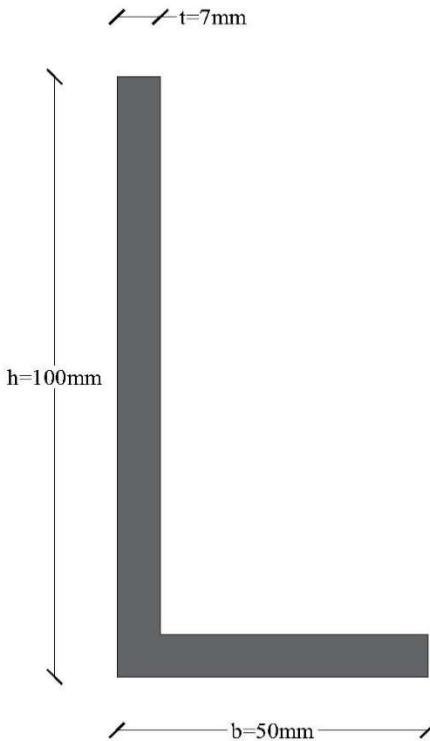


Figura 4.14

L'asse neutro così trovato può essere sovrapposto a quello trovato precedentemente con la sovrapposizione degli effetti per verificare che il procedimento fatto con la sovrapposizione degli effetti sia corretto.

## 4.2 Profilato a L ad ali disuguali



**Figura 4.15**

- Calcolo dell'area:

basandosi sulla figura 4.16 si ha:

$$A = b \cdot t + (h - t) \cdot t = 0.7 \cdot 5 + (10 - 0.7) \cdot 0.7 = 10.01 \text{ cm}^2$$

- Calcolo le coordinate del baricentro:

$$A_{tot} \cdot X_G = A_1 \cdot \left( \frac{t}{2} \right) + A_2 \cdot \left( \frac{b}{2} \right) \Rightarrow X_G = 1.10 \text{ cm}$$

$$A_{tot} \cdot Y_G = A_1 \cdot \left( t + \frac{h-t}{2} \right) + A_2 \cdot \left( \frac{t}{2} \right) \Rightarrow Y_G = 3.605 \text{ cm}$$

Impostiamo quindi i nostri assi nel baricentro come riportato in figura 4.17.

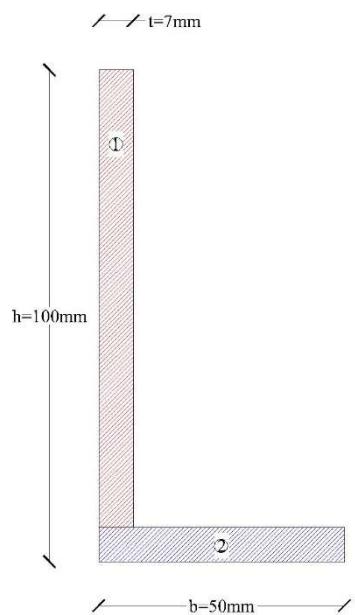


Figura 4.16

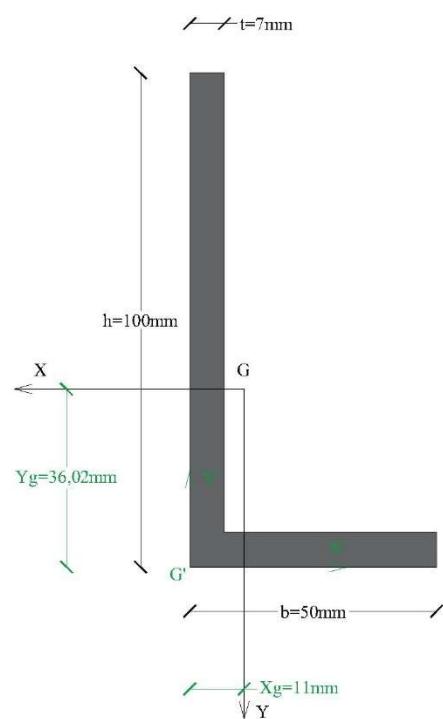


Figura 4.17

- Calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi X e Y:

$$I_{x_1} = \frac{1}{12}(h-t)^3 \cdot t + (h-t) \cdot t \cdot \left[ \frac{(h-t)}{2} - (3.605 - t) \right]^2 = 66.744 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{1}{12}b \cdot t^3 + b \cdot t \cdot \left[ 3.605 - \left( \frac{t}{2} \right) \right]^2 = 37.225 \text{ cm}^4$$

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = 103.9689 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12}(h-t) \cdot t^3 + (h-t) \cdot t \cdot \left[ 1.10 - \left( \frac{t}{2} \right) \right]^2 = 3.93 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{1}{12} \cdot t \cdot b^3 + b \cdot t \cdot \left[ \left( \frac{b}{2} \right) - 1.10 \right]^2 = 14.152 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = 18.08 \text{ cm}^4$$

$$I_{(xy)_1} = (h-t) \cdot t \cdot \left( 1.10 - \frac{t}{2} \right) \cdot \left[ - \left( \frac{h-t}{2} - (3.605 - t) \right) \right] = -8.52 \text{ cm}^4$$

$$I_{(xy)_2} = b \cdot t \cdot \left( 3.605 - \frac{t}{2} \right) \cdot \left[ - \left( \frac{b}{2} - 1.10 \right) \right] = -15.9495 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = I_{(xy)_1} + I_{(xy)_2} = -24.4695 \text{ cm}^4$$

- Calcolo dei momenti principali d'inerzia:

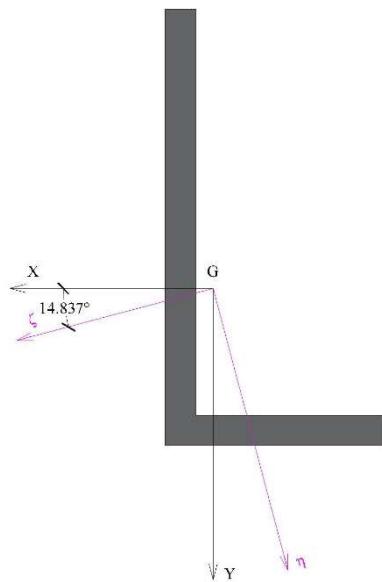
l'angolo che mette in relazione gli assi X e Y con gli assi  $\zeta$  e  $\eta$  principali d'inerzia è:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left( \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) \Rightarrow \vartheta = 14.83^\circ$$

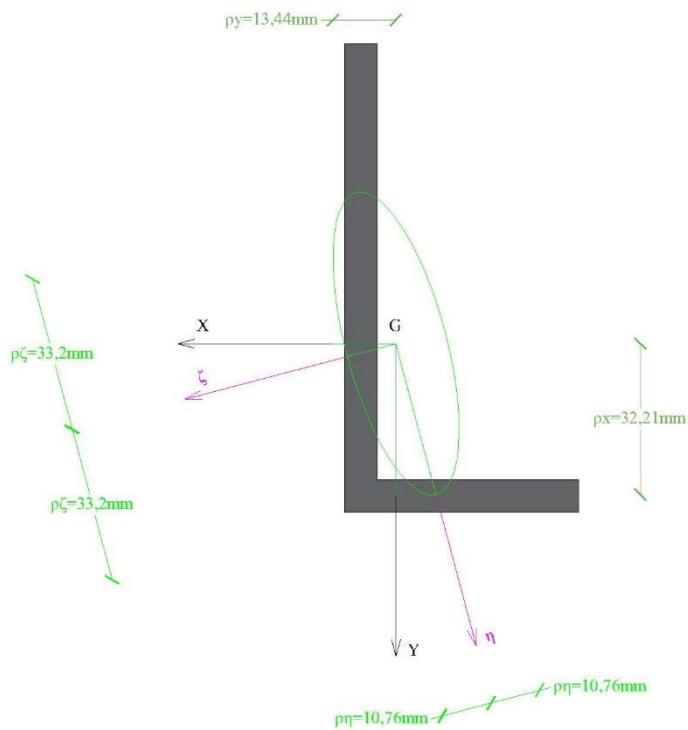
$$I_\zeta = I_x \cos^2 \vartheta + I_y \sin^2 \vartheta - I_{xy} \sin 2\vartheta = 110.451 \text{ cm}^4$$

$$I_\eta = I_x \sin^2 \vartheta + I_y \cos^2 \vartheta + I_{xy} \sin 2\vartheta = 11.598 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cdot \sin 2\vartheta + I_{xy} \cdot \cos 2\vartheta = 0$$

**Figura 4.18**

- Determinazione dell'ellisse centrale d'inerzia

**Figura 4.19**

L'ellisse della figura 4.19 è stato composto grazie alle formule che seguono:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = 3.22 \text{ cm}$$

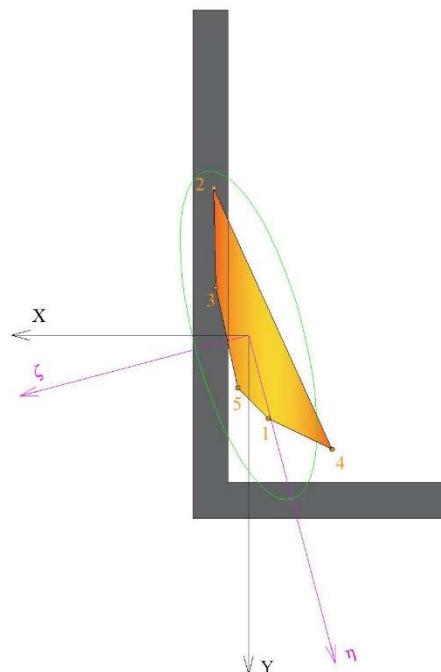
$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 1.34 \text{ cm}$$

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} = 3.32 \text{ cm}$$

$$\rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} = 1.076 \text{ cm}$$

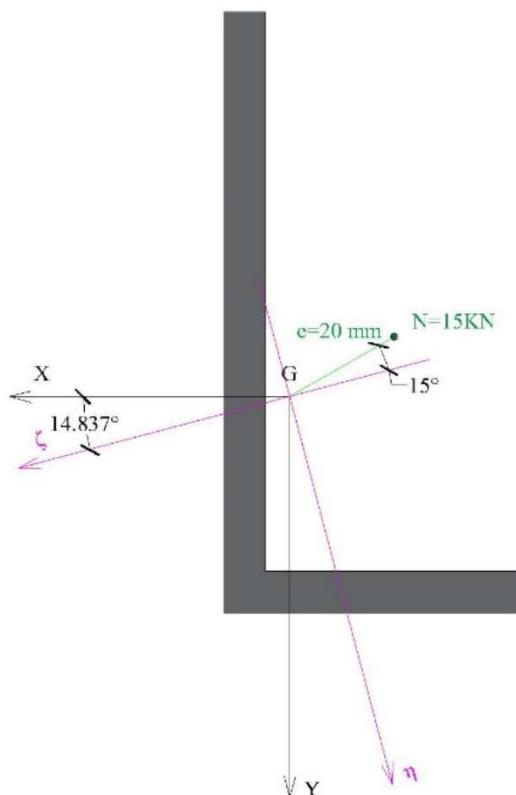
- Determinazione grafica del nocciolo centrale d'inerzia:

omettendo la procedura per la determinazione dei centri relativi già vista nell'esercizio 4.1 si rappresenta subito il nocciolo centrale d'inerzia in figura 4.20.



**Figura 4.20 – nocciolo centrale d'inerzia.**

- Determinazione dell'asse neutro:



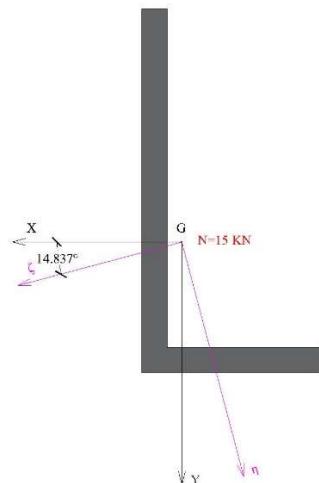
**Figura 4.21**

anche in questo esercizio ci riferiremo ad una forza normale di compressione, questo caso di pressoflessione si può risolvere facilmente come visto nell'esercizio precedente.

sovraposizione degli effetti dei 2 casi (fig.4.22):

3. Forza normale di compressione
4. Flessione deviata

### Sforzo normale



### Flessione deviata

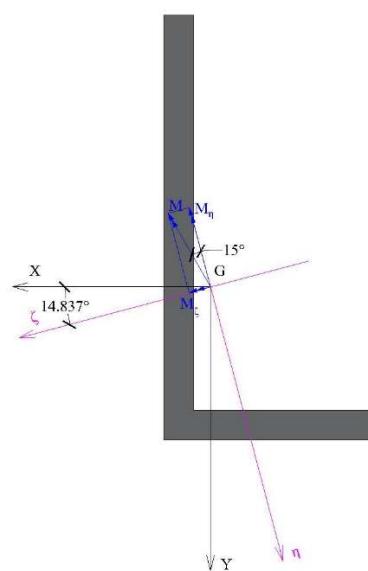


Figura 4.22

- Determinazione dell'asse neutro nel caso di sola flessione deviata prodotta dalla forza normale eccentrica di compressione:

usando i dati che abbiamo usato anche nell'esercizio precedente, quindi:

$$N = 15 \text{ kNm}$$

$$e = 2 \text{ cm}$$

si avrà ancora un momento  $M = N \cdot e = 30 \text{ kNm}$  che andrà ancora scomposto lungo gli assi principali d'inerzia, per pura coincidenza l'angolo tra  $M$  e  $M_\eta$  è ancora  $\approx 15^\circ$ , ma a differenza del caso precedente  $M_\xi$  sarà positivo.

$$M_\xi = M \cdot \sin(15^\circ) = 7.76 \text{ kNm}$$

$$M_\eta = -M \cdot \cos(15^\circ) = -28.98 \text{ kNm}$$

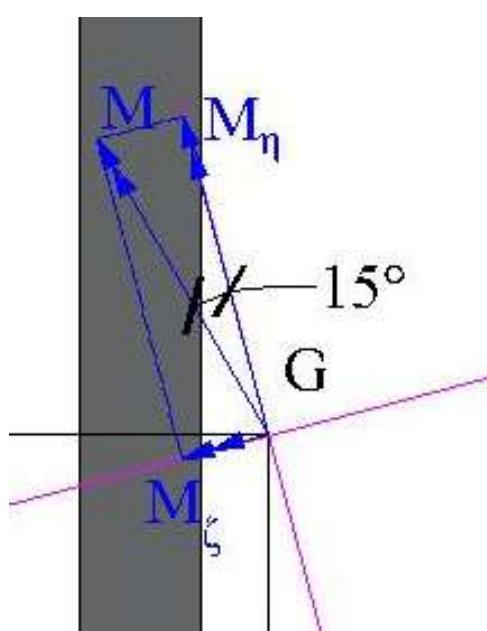


Figura 4.23

È ora possibile determinare l'angolo rispetto all'asse  $\xi$  che identifica la posizione dell'asse neutro:

$$\beta = \arctan\left(\frac{I_\xi}{I_\eta} \cdot \frac{M_\eta}{M_\xi}\right) = \arctan(-35.5650) \Rightarrow \beta = -88.3894^\circ \approx -88^\circ$$

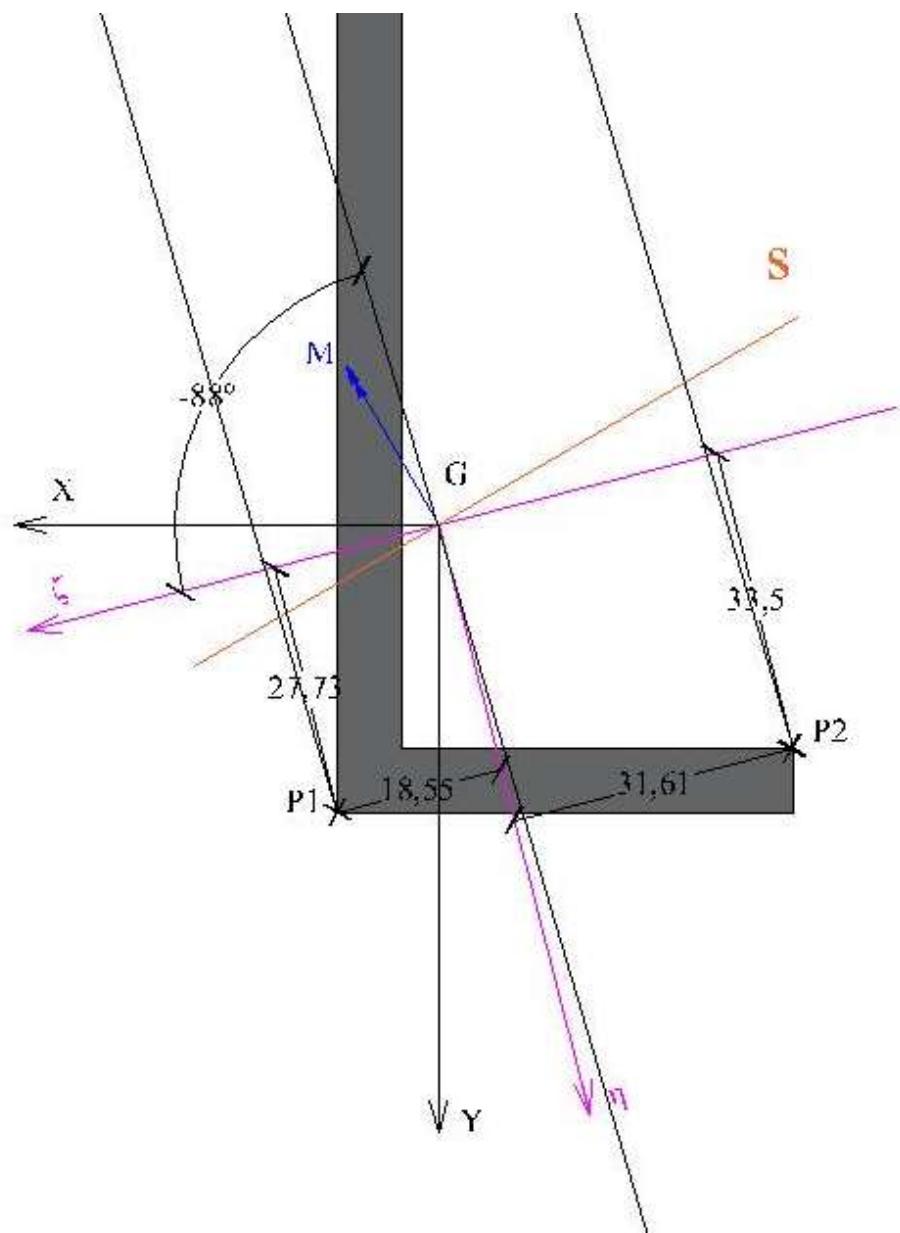


Figura 4.24

- Determinazione delle tensioni normali nel caso della sola flessione deviata

La formula di Navier, diventa nel nostro caso:

$$\sigma_z = \frac{M_\xi}{I_\xi} \cdot \eta - \frac{M_\eta}{I_\eta} \cdot \xi$$

I punti dove le tensioni normali sono Max e Min sono  $P_1$  e  $P_2$ , aventi secondo gli assi principali d'inerzia le seguenti coordinate:

$$P_1 \equiv [1.85; 2.773]; P_2 \equiv [-3.161; 3.35]$$

Le  $\sigma_z$  in  $P_1$  e in  $P_2$  saranno:

$$\sigma_z(P_1) = \frac{7.76}{110.45} \cdot 2.773 - \frac{(-28.98)}{(11.598)} \cdot 1.85 = 4.8174 \text{ KN/cm}^2$$

$$\sigma_z(P_2) = \frac{7.76}{110.45} \cdot 3.35 - \frac{(-28.98)}{(11.598)} \cdot (-3.161) = -7.663 \text{ KN/cm}^2$$

Il caso di sola flessione deviata con le tensioni normali appena calcolate è rappresentato in figura 4.26.

- Sovrapposizione della flessione deviata con la forza normale.

Le  $\sigma_z$  dovute alla sola sforza normale sono uniformi e sono:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{-15}{10.01} = -1.50 \text{ KN/cm}^2$$

Combinando le appena dette con quelle ottenute nei punti  $P_1$  e  $P_2$  trovati nel caso della flessione deviata si avrà la soluzione del problema dello sforzo normale eccentrico, come anche visto nell'esercizio precedente.

In questo caso si avrà:

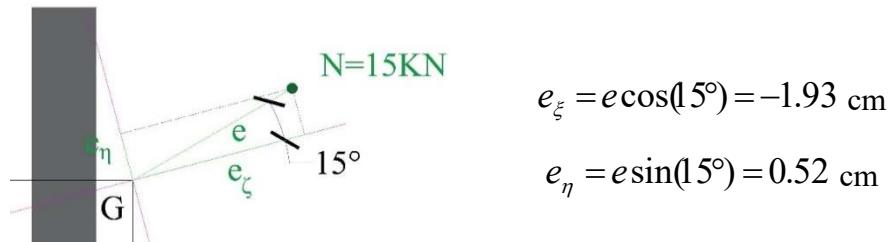
$$\sigma_z(P_1) = 4.8174 - 1.50 = 3.3174 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z(P_2) = -7.663 - 1.50 = -9.163 \text{ kN/cm}^2$$

Abbiamo così risolto il nostro problema di sforzo normale eccentrico di cui la soluzione è rappresentata in figura 4.27.

Come nell'esercizio 4.1 è possibile determinare la posizione dell'asse neutro nel caso completo di pressoflessione deviata determinando le intercette dell'asse neutro sugli assi principali d'inerzia.

Dobbiamo perciò determinare  $e_\xi$  e  $e_\eta$  che rappresentano le coordinate del centro di pressione.



**Figura 4.25**

Quindi:

$$-\frac{\rho_\eta^2}{e_\xi} = \frac{1.076^2}{1.93} = 0.97 \text{ cm}$$

$$-\frac{\rho_\xi^2}{e_\eta} = -\frac{3.32^2}{0.52} = 14.02 \text{ cm}$$

Disegnando una retta passante per i punti che abbiamo trovato si troverà l'asse neutro come visto nel caso precedente.

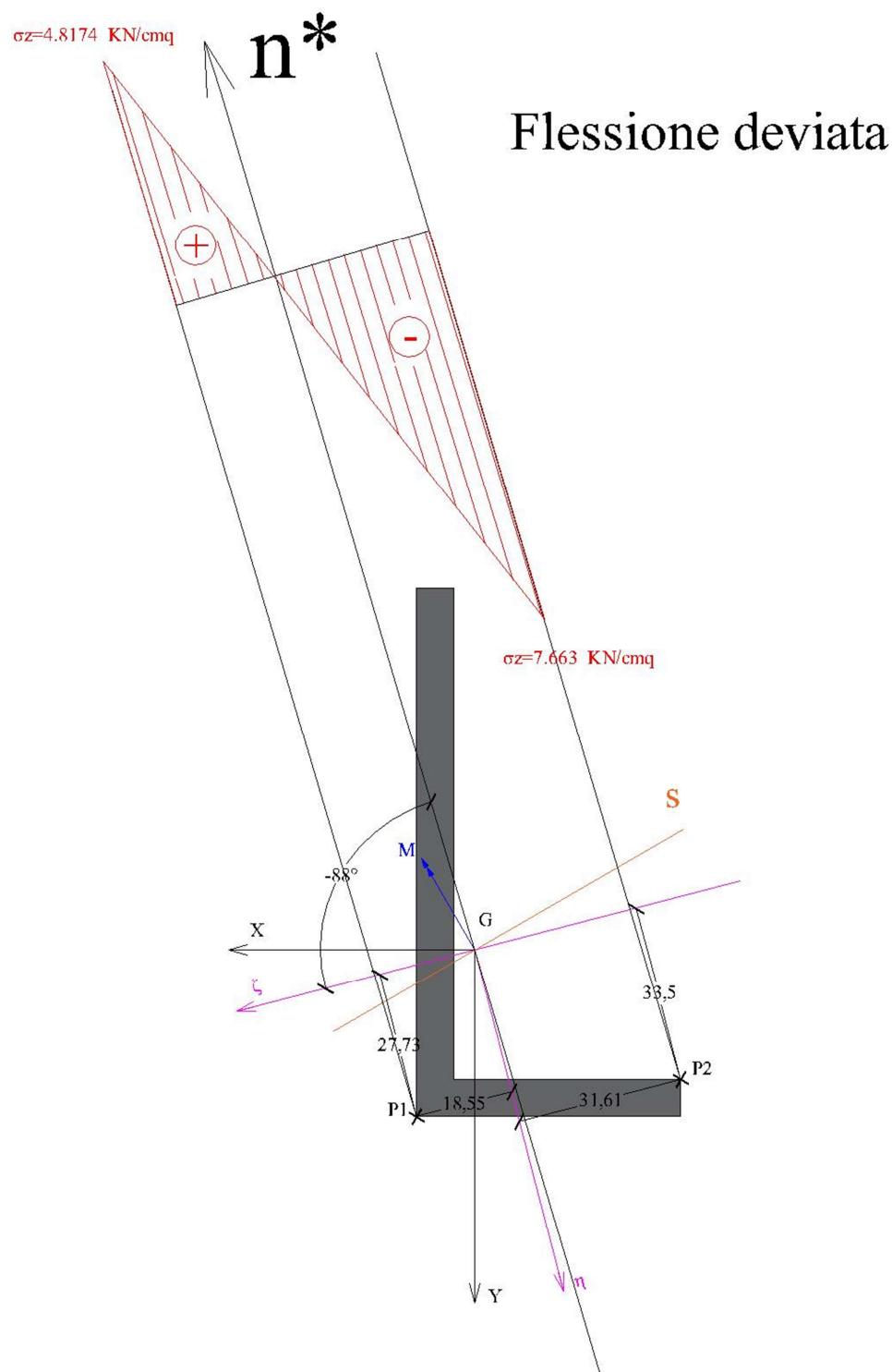
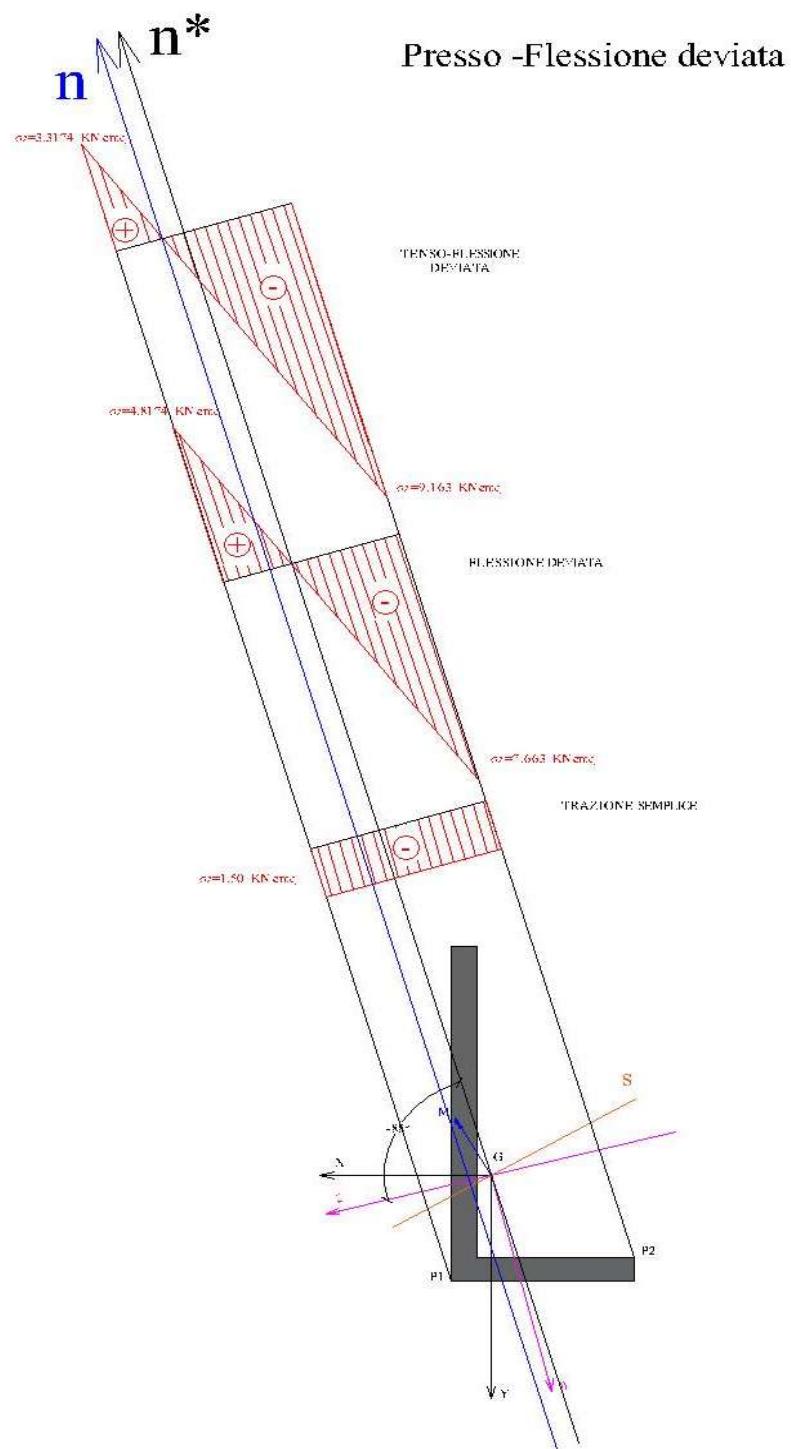
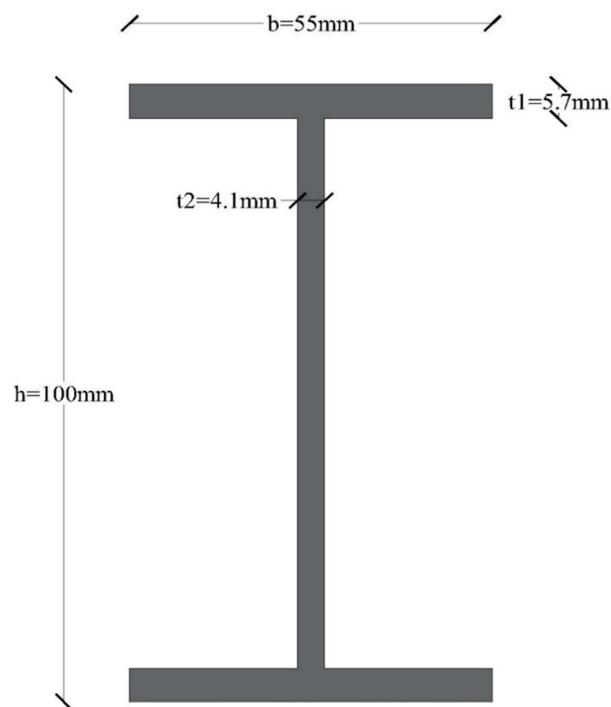


Figura 4.26

**Figura 4.27**

### 4.3 Profilato IPE 100 ad ali parallele



**Figura 4.28**

Per la doppia simmetria del profilato il baricentro è situato nel punto di intersezione dei due assi di simmetria (fig. 4.30)

- Calcolo dell'area:

basandosi sulla figura 4.29 si ha:

$$A = 2 \cdot b \cdot t_1 + (h - 2t_1) \cdot t_2 = 2 \cdot (5.5 \cdot 0.57) + (10 - 2 \cdot 0.57) \cdot 0.41 = 9.90 \text{ cm}^2$$

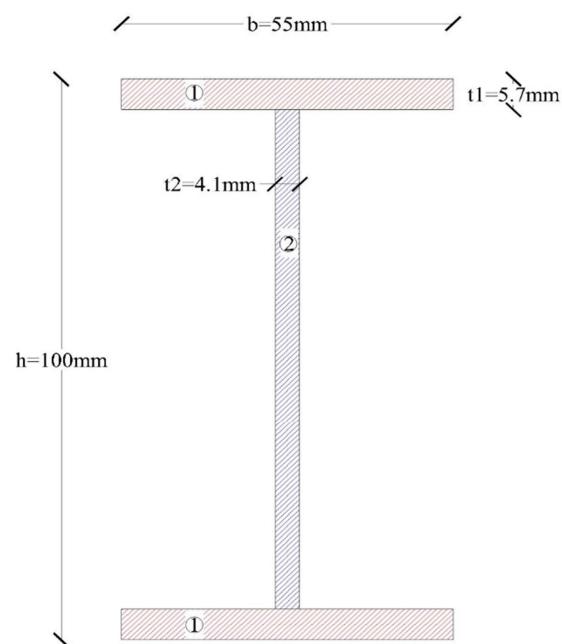


Figura 4.29

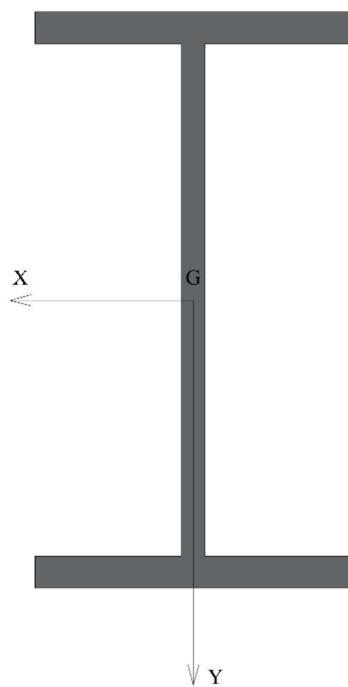


Figura 4.30

- Calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi X e Y:  
sempre facendo riferimento alla figura 4.29 si ha:

$$I_{x_1} = \frac{1}{12} b \cdot t_1^3 \cdot b \cdot t_1 \cdot \left[ \frac{(h - t_1)}{2} \right]^2 = 69,78 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{1}{12} \cdot t_2 \cdot (h - 2t_1)^3 = 23.76 \text{ cm}^4$$

$$I_x = 2I_{x_1} + I_{x_2} = 16332 \text{ cm}^4$$

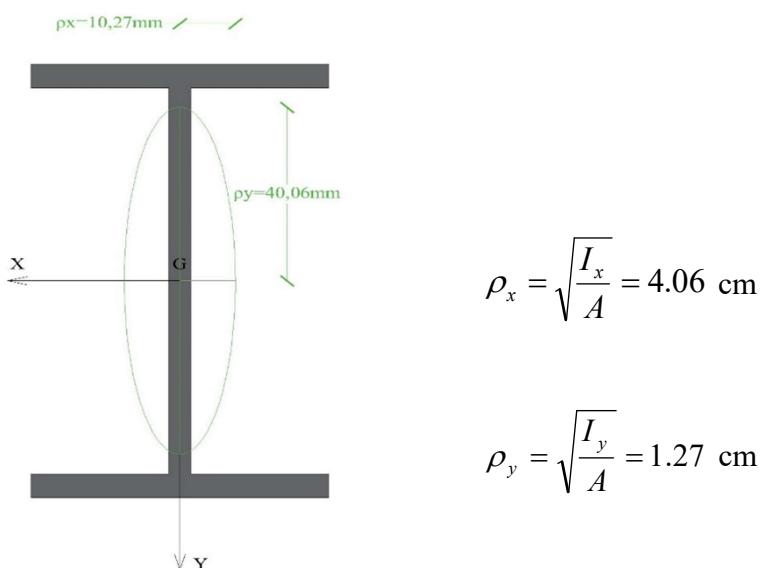
$$I_{y_1} = \frac{1}{12} \cdot t_1 \cdot b^3 = 7.90 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{1}{12} \cdot (h - 2t_1) \cdot t_2^3 = 0.051 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2I_{y_1} + I_{y_2} = 15.85 \text{ cm}^4$$

Poiché  $I_{xy} = 0$ , allora  $I_x$  e  $I_y$  sono anche i momenti principali d'inerzia.

- Determinazione dell'ellisse centrale d'inerzia



**Figura 4.31**

- Determinazione del nocciolo centrale d'inerzia:  
in questo caso è facile verificare sia la formulazione analitica che la costruzione grafica del nocciolo.

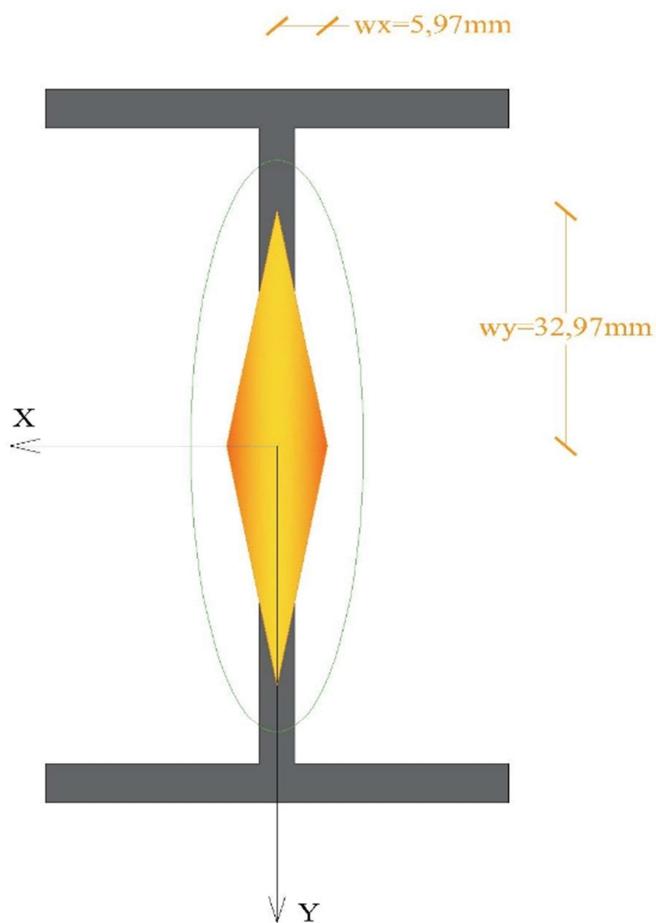


Figura 4.32

Le coordinate dei centri relativi sono:

$$w'_y = \frac{\rho_x^2}{(h/2)} = 3.29 \text{ cm}$$

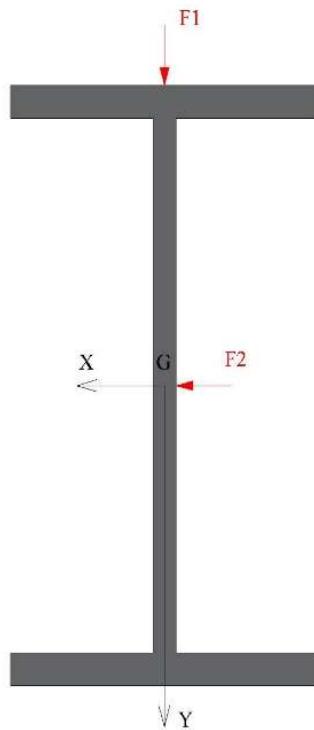
$$w'_x = \frac{\rho_y^2}{(h/2)} = 0.59 \text{ cm}$$

- Determinazione dell'asse neutro:

In questo esercizio a differenza dei due precedenti, si vuole analizzare il caso in cui la flessione deviata non è prodotta da una forza normale eccentrica ma da due coppie di forze  $F_1$  e  $F_2$ .

Ovviamente per la completa soluzione dovremmo calcolare anche le tensioni tangenziali prodotte dalle forze  $F_1$  e  $F_2$  essendo forze di taglio rispettivamente lungo Y e lungo X, ma poiché questa tesi non ha lo scopo di fornire una trattazione delle tensioni tangenziali ci limitiamo a risolvere la flessione deviata prodotta dalle coppie di forze.

Imponiamo per semplicità  $F_1=F_2=F=10$  kN ed affinché non si abbiano effetti torcenti le forze  $F_1$  e  $F_2$  saranno applicate sugli assi di simmetria della sezione.



**Figura 4.32**

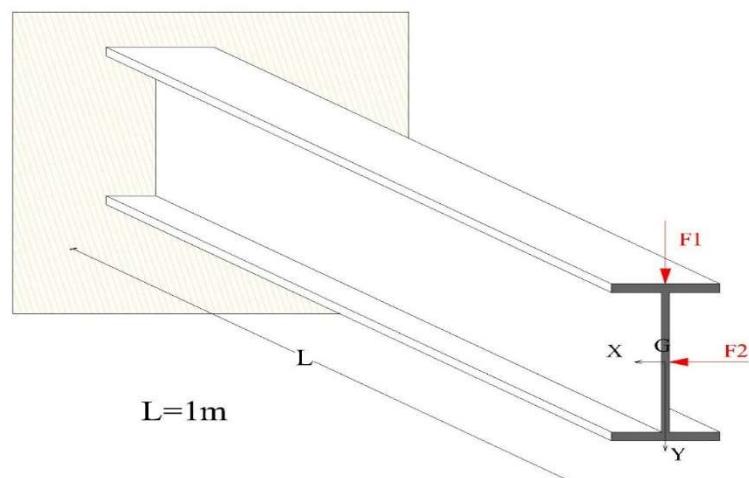


Figura 4.33

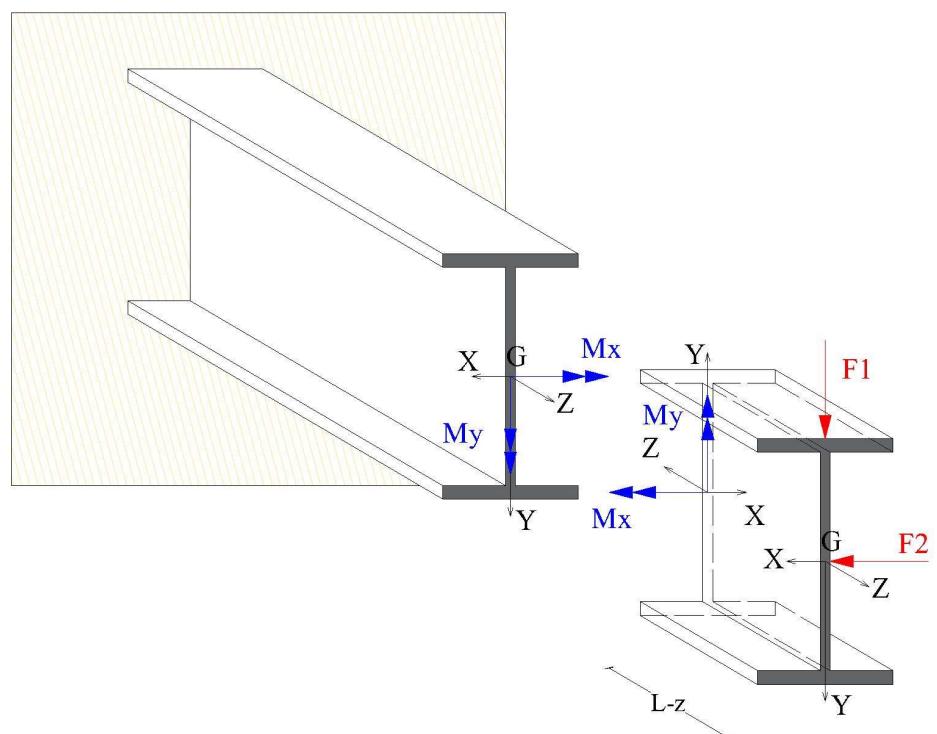


Figura 4.34

- Determino le coppie  $M_x$  e  $M_y$  prodotte dalle forze  $F_1$  e  $F_2$ .

Basandosi sulla figura 4.34 si ha:

$$M_y = F \cdot (L - z) ; \quad M_x = -F \cdot (L - z)$$

È così possibile determinare l'angolo  $\beta$  che identifica la posizione dell'asse neutro.

$$\beta = \arctan\left(\frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_x}\right) = \arctan(-10.22) \Rightarrow \beta = -84.41^\circ \approx -84^\circ$$

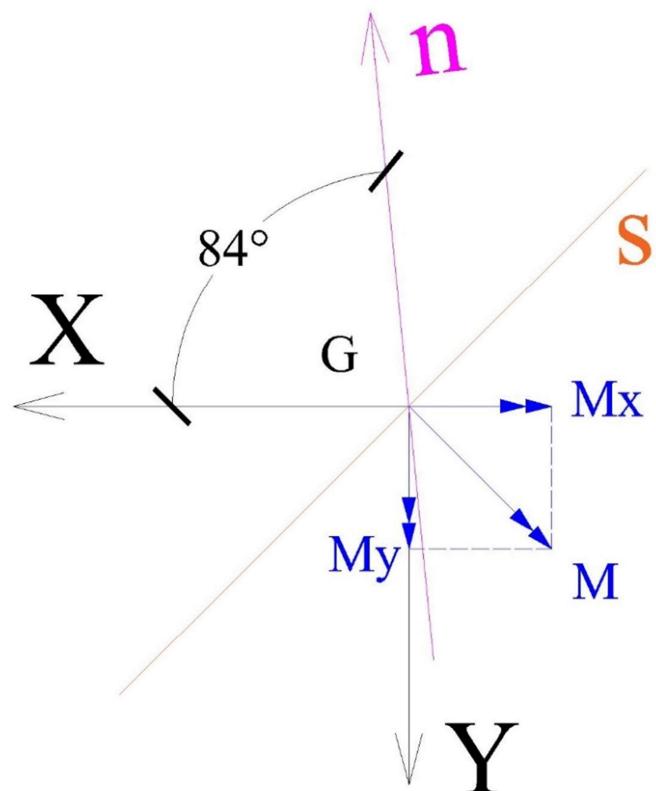


Figura 4.35

- Determinazione delle  $\sigma_z$  all'incastro

Riferendosi alla sezione d'incastro si ha:

$$M_x = -1000 \text{ kNm}$$

$$M_y = 1000 \text{ kNm}$$

i punti P1 e P2 dove le  $\sigma_z$  sono massime hanno le seguenti coordinate:

$$P_1 \equiv \left[ \frac{b}{2}; \frac{h}{2} \right] \equiv [2.75; 5]; \quad P_2 \equiv \left[ -\frac{b}{2}; -\frac{h}{2} \right] \equiv [-2.75; -5]$$

Ed essendo la formula di Navier nel nostro la seguente:

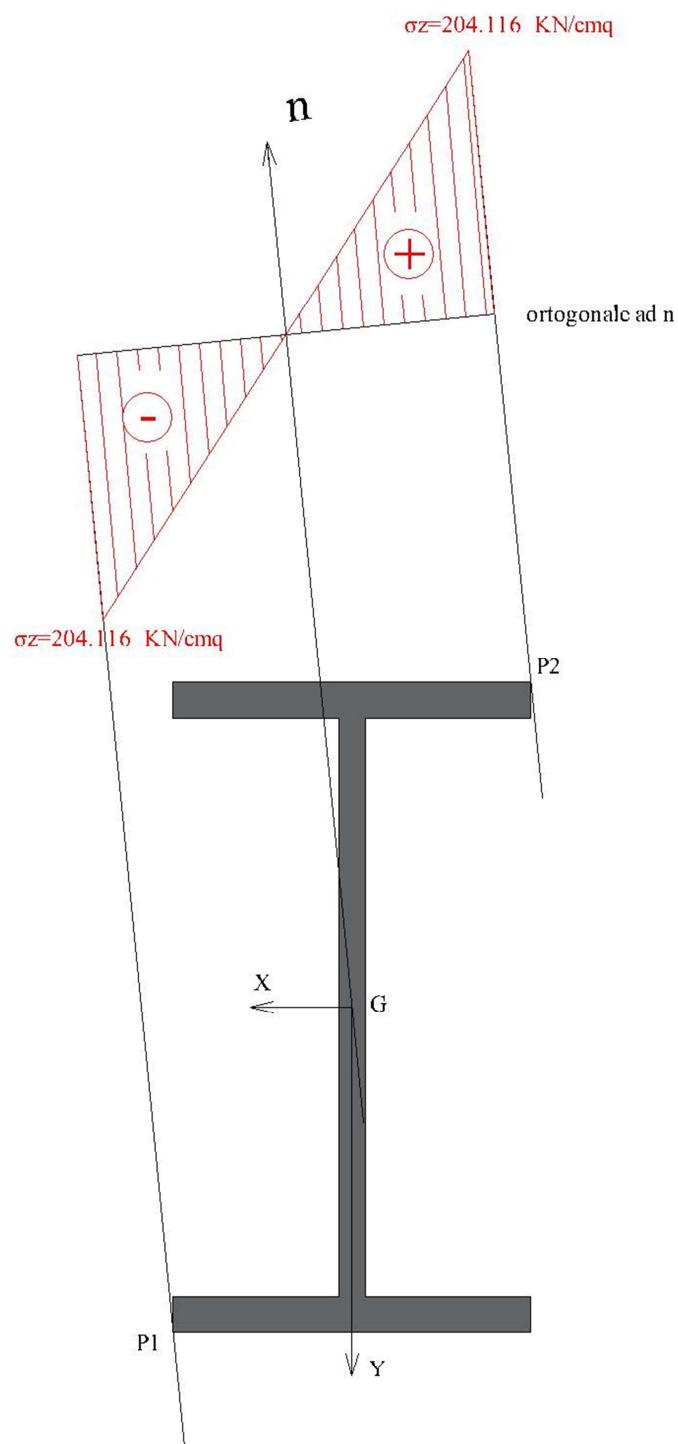
$$\sigma_z = \frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x$$

Nei punti P1 e P2 si avrà:

$$\sigma_z(P_1) = -\frac{F(L-z)}{163.32} \cdot 5 - \frac{F(L-z)}{15.85} \cdot 2.75 = -0.204 \cdot F(L-z) = -204.116 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z(P_2) = -\frac{F(L-z)}{163.32} \cdot (-5) - \frac{F(L-z)}{15.85} \cdot (-2.75) = 0.204 \cdot F(L-z) = 204.116 \text{ kN/cm}^2$$

Lo stato tensionale è rappresentato in figura 4.36.

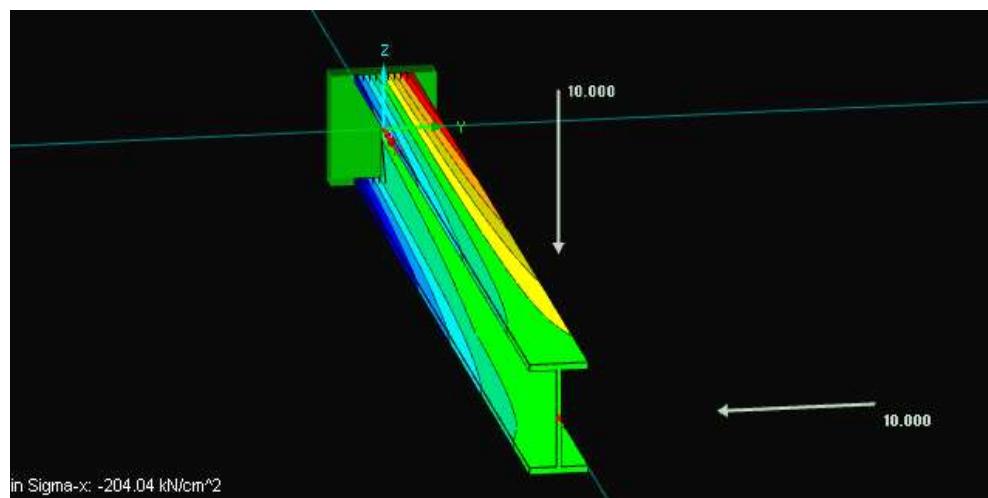


**Figura 4.36**

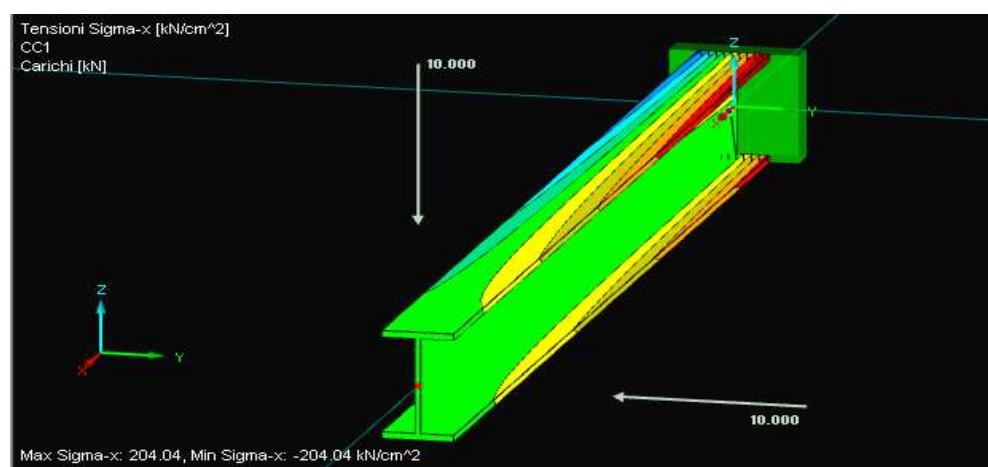
Se ci riferiamo all'intera trave, calcolando le tensioni normali in ogni sezione della linea d'asse, visto che i momenti variano in funzione di z, è possibile definire le isostatiche della trave.

Nelle figure 4.37, 4.38 e 4.39 sono rappresentate le isostatiche, ovviamente nelle applicazioni 4.1 e 4.2 poiché avevamo uno stato tensionale costante in tutta la trave le tensioni normali saranno costanti in tutte le sezioni della linea d'asse.

Le immagini sono state ricavate con la versione trial del software *Dlubal RFEM*.



**Figura 4.37**



**Figura 4.38**

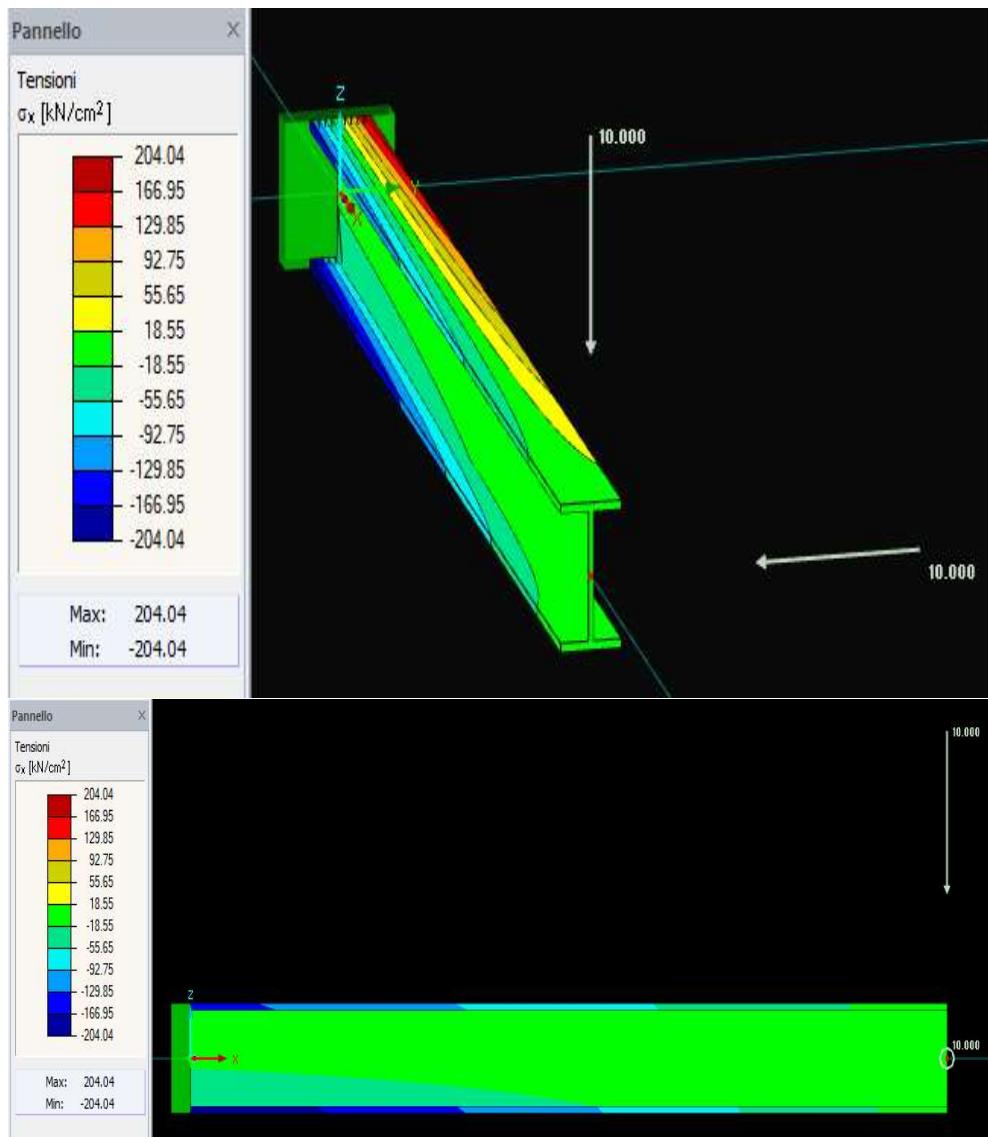


Figura 4.39

Per pura curiosità si è voluto inserire delle immagini che rappresentassero il percorso delle tensioni normali lungo l'asse della trave nei casi di taglio flessione semplice la cui sovrapposizione degli effetti ci porta alla soluzione vista precedentemente.

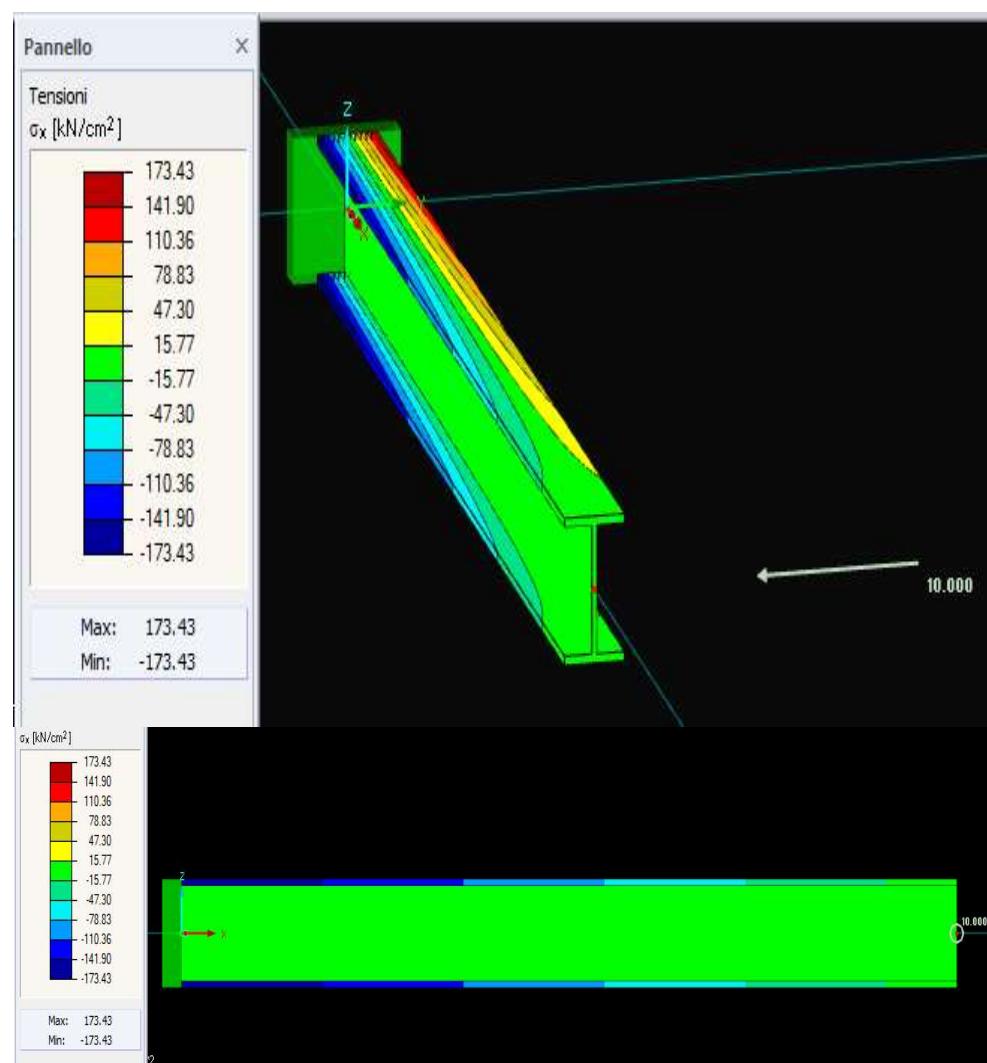


Figura 4.40 – forza solo lungo x (dal software y)

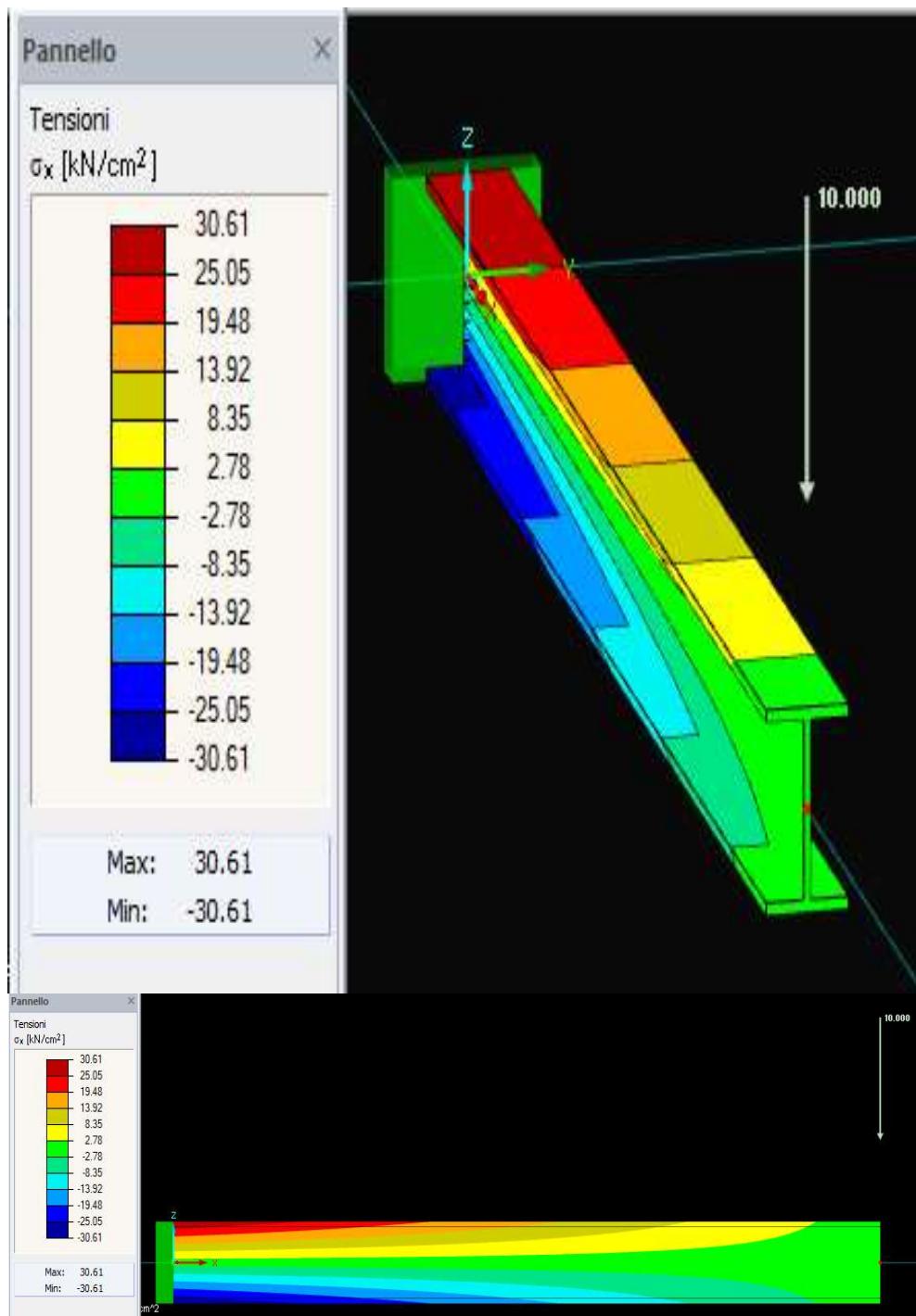
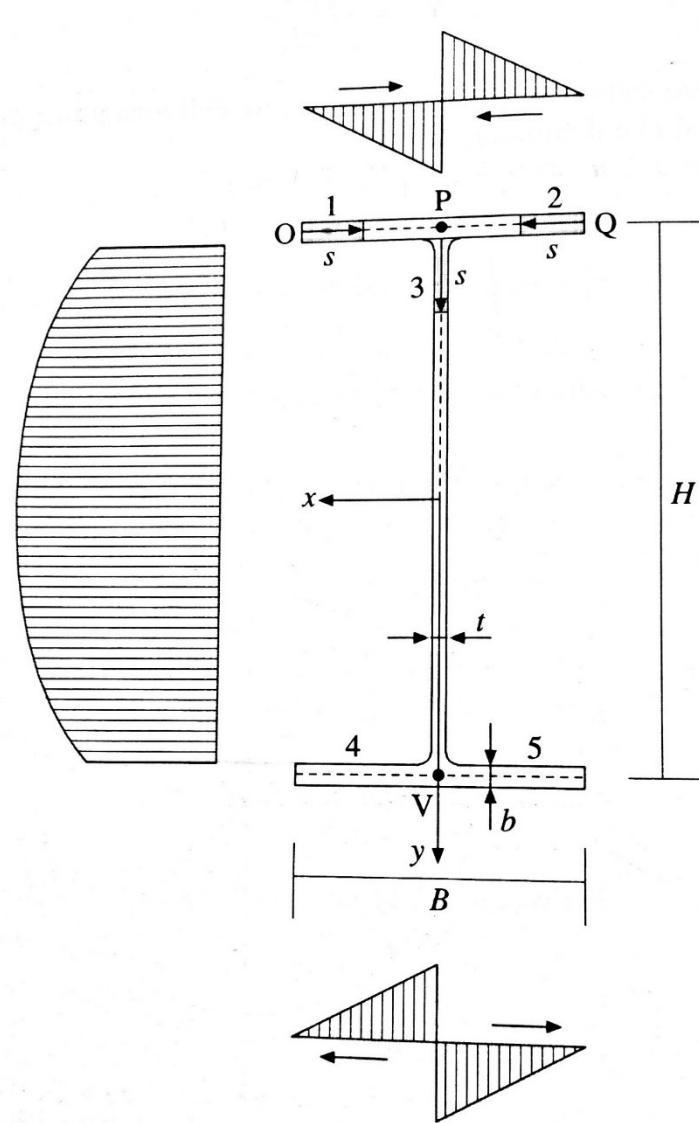


Figura 4.41 – forza solo lungo y (dal software z)

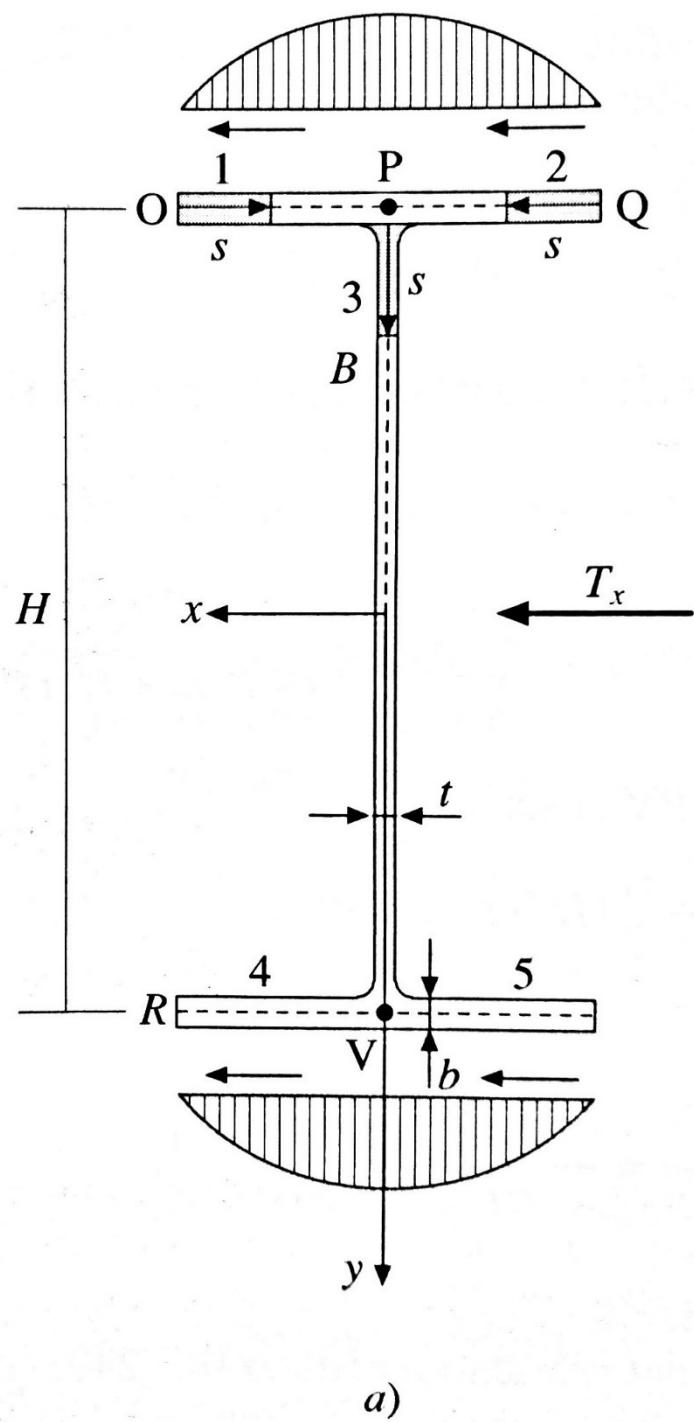
Per la completezza dell'esercizio si inseriscono i diagrammi delle tensioni tangenziali nel caso di sola  $F_1$  e nel caso di sola  $F_2$  ottenuti applicando la nota formula di Jouraswski.

la sovrapposizione degli effetti dei singoli casi ci darà la soluzione del nostro problema dovuto al taglio.

I diagrammi sono riportate nelle figure 4.42 e 4.43.

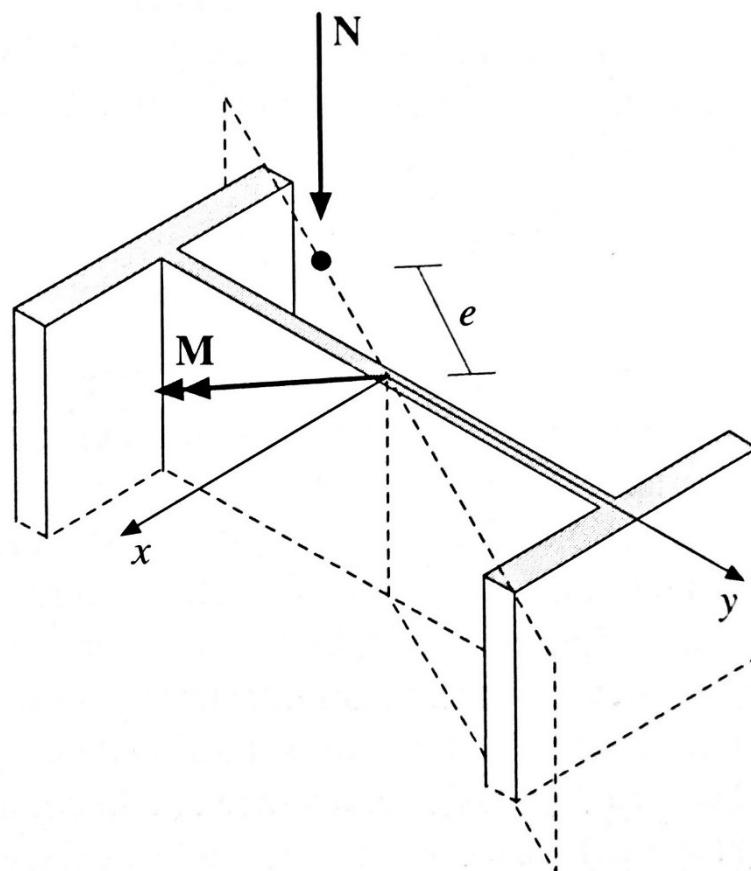


**Figura 4.42 – diagramma delle  $\tau$  dovute a taglio verticale con retta d'azione che cade nel baricentro della figura - (GAMBAROTTA, et al., 2003).**



**Figura 4.43 – diagramma delle  $\tau$  dovute a taglio orizzontale con retta d'azione che cade nel baricentro della figura - (GAMBAROTTA, et al., 2003).**

Nel caso vi fosse stato uno sforzo normale eccentrico invece delle forze  $F_1$  e  $F_2$  bastava svolgere un procedimento uguale a quello applicato nei casi 4.1 e 4.2.



**Figura 4.44 – sforzo normale eccentrico su profilato ad ali parallele- (GAMBAROTTA, et al, 2003)**



