

# Capitolo 1

## LA TRAVE DI DE SAINT VENANT

### 1.1 Il problema di Saint-Venant

Il problema di de Saint-Venant è un problema elastico al contorno.

Venne formulato e risolto da Adhèmar-Jean-Claude Barrè de Saint-Venant (Villiers-en-Bière, 23 agosto 1797-Saint-Ouen, 6 gennaio 1886) matematico e ingegnere francese.



Figura 1 – Adhèmar-Jean-Claude Barrè de Saint-Venant (WIKIPEDIA).

### 1.1.1 Il solido di de Saint Venant

#### ➤ Il modello geometrico

Il solido di Saint-Venant è un cilindro retto ottenibile dalla traslazione in direzione z di una figura piana, con sezione trasversale ortogonale all'asse (trave).

La frontiera del solido è rappresentata da una superficie cilindrica detta superficie laterale o mantello e dalle sezioni terminali dette basi.

L'origine degli assi si assume coincidente con il baricentro della sezione trasversale e l'asse z coincidente con l'asse della trave.

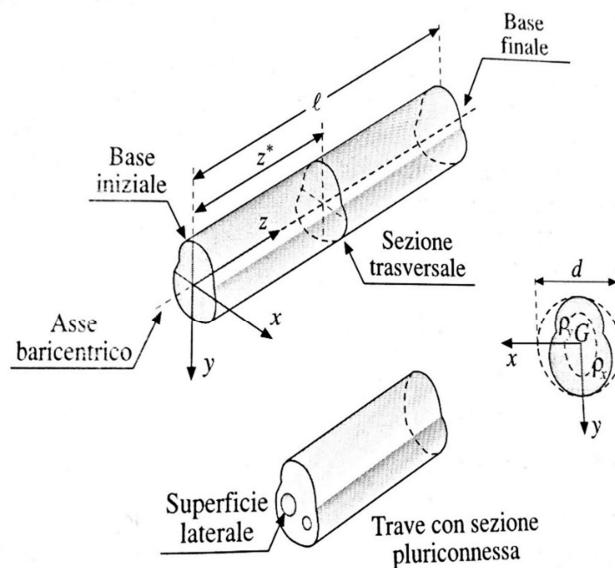
“d” è il raggio del cerchio minimo circoscritto alla sezione e “l” la lunghezza o luce della trave.

Da ciò deriva la definizione teorica di trave:

“prisma allungato avente una dimensione prevalente sulle altre due”

→  $d \ll l$ .

(GAMBAROTTA *et al*, 2003).



**Figura 1.1 – Solido di de Saint Venant (GAMBAROTTA *et al*, 2003).**

➤ **Il modello meccanico del materiale**

Si suppone il materiale come:

- Elastico lineare;
- Omogeneo;
- Isotropo.

➤ **Condizioni di vincolo**

La trave viene considerata priva di vincoli e dunque libera nello spazio; ne consegue che i carichi a essa applicati devono costituire un sistema in equilibrio, ovvero avere risultante e momento risultante nulli.

➤ **Modello delle azioni esterne**

Si assume:

- Assenza di forza di massa o di volume ovunque nel solido

$$p_x = p_y = p_z = 0 \quad (1.1)$$

- Assenza di forze di superficie applicate alla superficie laterale del solido

$$q_x = q_y = q_z = 0 \quad (1.2)$$

- Presenza di forze di superficie sulle basi  $\rightarrow q_x, q_y, q_z \neq 0$

### 1.1.2 Equazioni generali del problema di equilibrio elastico in coordinate cartesiane

- Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

- Equazioni di congruenza

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (1.4)$$

- Equazioni costitutive

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}\quad (1.5)$$

- Leggi inverse di Hooke

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x + \lambda I_{1\varepsilon} & \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y + \lambda I_{1\varepsilon} & \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} \\ \sigma_z &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda I_{1\varepsilon} & \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Dove:

$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  è l'invariante primo di deformazione;

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  è la seconda costante di Lamé;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  è il modulo di elasticità tangenziale.

- Equazioni di congruenza interna

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (1.7)$$

### 1.1.3      *Formulazione matematica del problema*

Per risolvere il problema del solido cilindrico sollecitato sulle basi, Saint-Venant ricorse al *metodo seminverso*, di natura squisitamente ingegneristica.

Tale metodo consiste nel fissare a priori alcune caratteri della soluzione. Successivamente, attraverso le equazioni del problema, si verifica la giustezza delle ipotesi, fornendo similmente i rimanenti parametri incogniti.

L'ipotesi sulla soluzione può riguardare lo stato tensionale (tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$ ), quello deformativo (tensore delle deformazioni  $\mathbf{E}$ ) o entrambi. Una volta verificate le equazioni del problema, si ha la soluzione del problema dell'equilibrio elastico (Teorema di Kirchhoff, *unicità della soluzione*).

Il problema dell'equilibrio elastico si dice formulato in forma diretta quando, assegnate le forze agenti sulle basi, occorre trovare le componenti di  $\mathbf{T}$  ed  $\mathbf{E}$ .

Nella formulazione inversa, invece, risultano assegnati le componenti di spostamento in tutti i punti del volume del cilindro, ed occorre determinare le forze esterne sulle basi compatibili con la soluzione assegnata in termini di spostamenti  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ . Cioè dalla deformazione nota si risale al sistema di forze esterne in grado di produrla.

Nel procedimento semi-inverso, si fa qualche ipotesi sulla soluzione, ma senza determinarla completamente. Nel contempo, non tutte le proprietà della sollecitazione esterna risultano indeterminate.

(VIOLA , 1992)

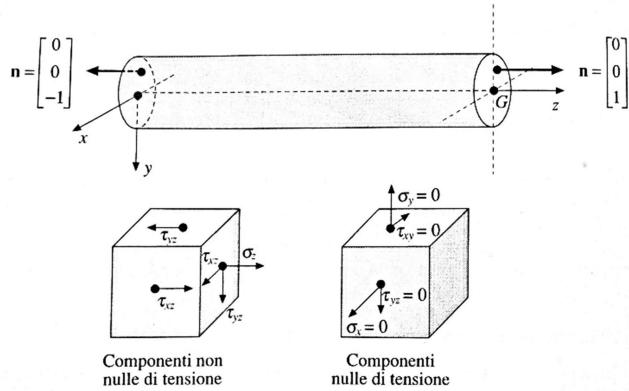
### 1.1.3.1 Ipotesi di de Saint Venant sullo stato tensionale

De Saint Venant fece una notevole semplificazione del problema, ipotizzando che su piani paralleli all'asse baricentrico passanti per un qualunque punto interno siano nulle le componenti normali dello sforzo, così come quelle tangenziali ortogonali all'asse della trave. Devono risultare:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (1.8)$$

Questa ipotesi equivale a supporre che elementi piani longitudinali non si trasmettono reciprocamente tensioni normali ma solo tensioni tangenziali parallele all'asse del solido (Figura 1.2).

(GAMBAROTTA *et al*, 2003).



**Figura 1.2 – stato di tensione (GAMBAROTTA *et al*, 2003)**

*1.1.3.2 Equazioni del problema di equilibrio elastico per il solido di de Saint Venant*

Lo stato di tensione precedentemente definito è uno stato di tensione piano, che comporta:

- Tensore degli sforzi :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

- Equazioni indefinite di equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

- Equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [-\nu \cdot (\sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [-\nu \cdot (\sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Le equazioni di elasticità o costitutive, in forma matriciale diventano:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Equazioni di congruenza interna:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 0 & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= 0 & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 0 & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

## 1.2 Il postulato di de Saint Venant

Il postulato di De Saint Venant e' stato da lui enunciato e commentato in piu' occasioni. Ad esempio, nella prefazione alla celebre memoria "De la torsion des prismes", Parigi 1855, egli cosi' scriveva:

*"Le diverse espressioni fornite nel corso della Memoria per gli spostamenti dei punti dei prismi elastici, per le dilatazioni e le variazioni angolari delle loro parti, le torsioni etc. sono tutte rigorose, allo stesso titolo delle equazioni generali dell'equilibrio elastico, sia in isotropia che in anisotropia, poiche' noi le deduciamo con un'analisi esente da ipotesi od omissioni. Esse devono quindi fornire risultati esatti, a condizione che le forze esterne che producono questi effetti siano applicate e distribuite sulle basi, o sezioni estreme dei prismi, esattamente nella maniera prescritta, con la caratteristica di provocare su tutte le sezioni intermedie una distribuzione analoga di sforzi. Queste espressioni divengono soltanto approssimate nel momento in cui se ne estende l'uso ad altri modi di applicazione e distribuzione delle forze esterne. Il grado di approssimazione non potra' essere precisato - allo stato attuale dell'analisi - ma numerose esperienze, in mancanza di calcoli, fanno ritenere che esso sia notevole. Ad esempio, se si afferra con una tenaglia un estremo di un prisma in caucciù, si vedra' che l'effetto prodotto si estende solo fino ad una piccolissima distanza dal punto di applicazione dell'azione, e che il resto del prisma si comporta come se questa azione non esistesse affatto. Da cio', e da una quantita' di esperienze simili, si puo' concludere che forze applicate su una medesima parte di un prisma elastico e che si fanno equilibrio in media, e quindi con risultante e momento risultante nullo, non causano spostamento che in quella parte e in quelle estremamente vicine, senza influenzare percettibilmente le parti del prisma che si trovano un po' al di qua o al di la'. Ne segue che tutte le volte che si hanno, verso le estremita' di un prisma di una certa lunghezza, forze qualsiasi che stirino il prisma, lo flettano, lo*

*torcano etc., si può sempre rimpiazzare queste forze, con tutta l'approssimazione desiderabile nei riguardi dei loro effetti su tutte le altre parti del prisma, con delle forze staticamente equivalenti o che non ne differiscano che per sistemi in equilibrio, o - in altre parole - con delle forze che abbiano la stessa risultante geometrica e lo stesso momento risultante, e che siano applicate e distribuite nel modo particolare che presuppone la nostra soluzione".*

(DE SAINT VENANT, 1855).

E svariati anni dopo precisava, alla pagina 145 del libro di A. Clebsch, "Théorie de l'élasticité des corps solides", tradotto da M.M. Saint Venant e Flamant, con Note estese di M.M. Saint-Venant, Dunod, Parigi, 1883:

*"forze staticamente equivalenti, ossia con la stessa risultante e lo stesso momento risultante, producono gli stessi effetti lungo tutta il solido, qualunque sia il loro modo di applicazione e di distribuzione, eccetto che nel luogo dove esse agiscono, e su porzioni vicine e piccolissime, si' da poterle trascurare".*

(CLEBSCH, DE SAINT VENANT, 1883).

Ed ancora, in una nota al paragrafo 28, pagina 174 dello stesso testo:

*"le soluzioni, anche se, per essere rigorosamente esatte, presuppongono un modo particolare, e mai realizzato, di applicazione e distribuzione delle forze alle estremità della trave che esse stirano, flettono o torcono, si possono nondimeno utilizzare, con tutta l'approssimazione desiderabile, se forze ad esse staticamente equivalenti sono applicate e distribuite in un altro modo su queste estremità: in altri termini, le seconde forze causeranno gli stessi stiramenti, flessioni e torsioni delle prime lungo*

*tutta la trave ch'esse sollecitano, eccetto porzioni piccolissime della sua lunghezza, misurata a partire dai punti dove esse agiscono".*

(CLEBSCH, DE SAINT VENANT, 1883).

Una generalizzazione ai solidi tridimensionali fu fornita da Boussinesq nel 1885:

*"Un sistema equilibrato di forze esterne applicato ad un corpo elastico, i cui punti di applicazione giacciono all'interno di una sfera assegnata, produce deformazioni di grandezza trascurabile a distanze dalla sfera sufficientemente grandi rispetto al suo raggio"*

(J. Boussinesq, 1885)

In breve:

a sufficiente distanza dalle basi caricate da forze esterne, gli stati tensionale e deformativo non dipendono dalla distribuzione puntuale dei carichi, ma solo dai loro vettori risultanti.

La distanza oltre la quale la soluzione risulta indipendente dalla distribuzione puntuale della sollecitazione, prende il nome di *distanza di smorzamento*.

(VIOLA , 1992)

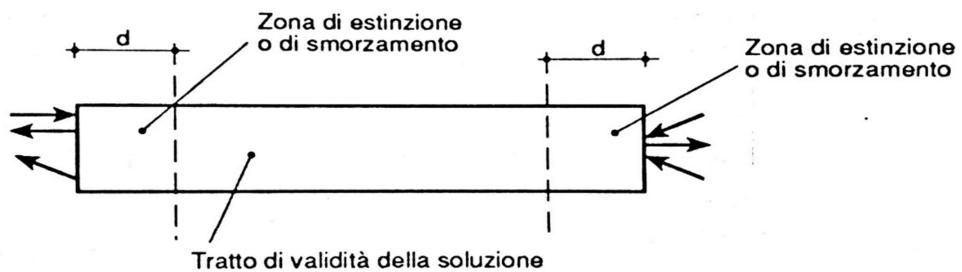


Figura 1.3 – zone di estinzione o smorzamento (VIOLA, 1992).

Nel caso di travi a sezione compatta, la distanza di smorzamento è all'incirca uguale alla dimensione massima della sezione stessa. Per travi a sezione sottile, la distanza di smorzamento risulta maggiore della dimensione massima della sezione.

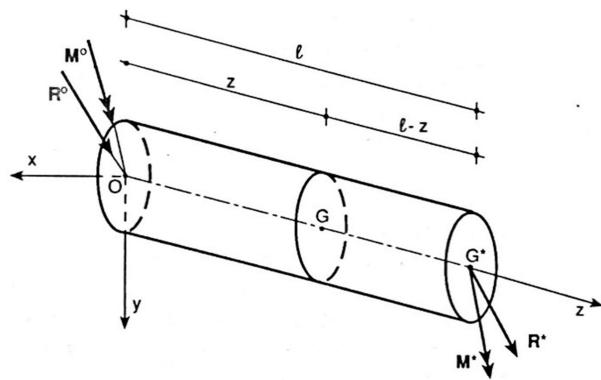
Quindi è possibile con questo postulato estendere i risultati generali di questo problema:

- In presenza di vincoli esterni (con  $\frac{d}{l} \ll 1$  il corpo si può considerare privo di vincoli).
- In presenza di carichi applicati in campata;
- A travi ad asse curvilineo o ad asse spezzato;
- A travi eterogenee e non isotrope.

### 1.3 Caratteristiche della sollecitazione

#### 1.3.1 L'equilibrio

Dalla figura (1.4), cilindro sulle cui basi terminali sono applicati i vettori caratteristici delle forze esterne.



**Figura 1.4 - (VIOLA, 1992).**

Sulla base  $z=0 \rightarrow R^0 \equiv (Tx^0, Ty^0, N^0); M^0 \equiv (Mx^0, My^0, Mz^0)$ ;

Sulla base  $z=l \rightarrow R^* \equiv (Tx^*, Ty^*, N^*); M^* \equiv (Mx^*, My^*, Mz^*)$ ;

quindi per l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione, risulta:

$$R^0 + R^* = 0$$

$$M^0 + M^* = 0$$

Se si esegue un taglio del cilindro, l'equilibrio si mantiene in entrambe le porzioni del cilindro, infatti l'equilibrio di una porzione implica l'equilibrio della porzione complementare. Le componenti dei vettori risultanti dal taglio che abbiamo fatto prendono il nome di caratteristiche della sollecitazione (CDS), che rappresentano l'azione mutua che le due porzioni di solido si scambiano (fig. 1.5).

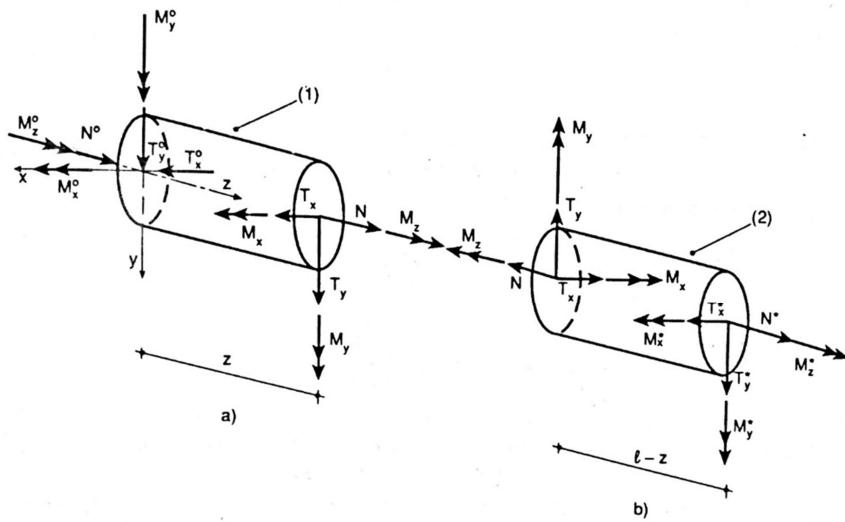


Figura 1.5 - (VIOLA, 1992).

### 1.3.2 Relazione fra tensione e sollecitazione

Il principio di equivalenza elastica assicura che a una certa distanza dalle sezioni estreme lo stato di sforzo dipende solo dalle caratteristiche dell'azione interna.

Per l'ipotesi di de Saint -Venant, nel generico punto della sezione retta esistono al più tre componenti di tensione  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$ .

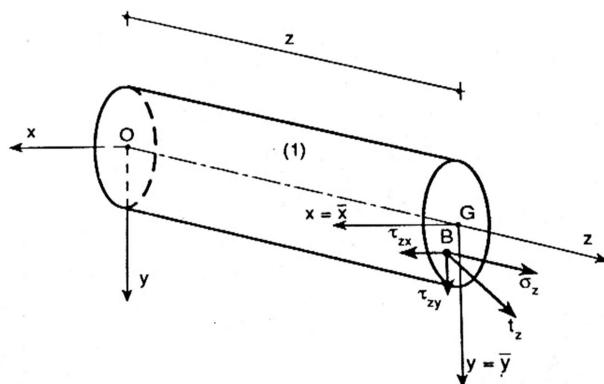


Figura 1.5 - (VIOLA, 1992).

Il vettore tensione  $\mathbf{t}_z$  ammette la seguente rappresentazione cartesiana:

$$\mathbf{t}_z = \tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k} \quad (1.14)$$

La risultante delle forze  $\mathbf{t}_z dA$  ed il risultante dei momenti

$(B - G) \wedge t_z dA$  rappresentano i vettori caratteristici R ed M della sezione.

Ossia le azioni globali che si trasmettono attraverso l'intera sezione A del cilindro.

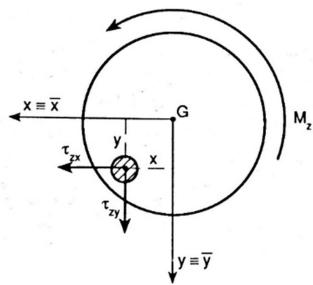
$$R = \int_A t_z dA ; \quad M = \int_A (B - G) \wedge t_z dA . \quad (1.15)$$

Se si proiettano le equazioni vettoriali (1.15) sugli assi x, y, z della terna di riferimento risulta:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_z dA , & M_x &= \int_A \sigma_z \cdot y dA , \\ T_x &= \int_A \tau_{zx} dA , & M_y &= - \int_A \sigma_z \cdot x dA \\ T_y &= \int_A \tau_{zy} dA , & M_z &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \end{aligned} \quad (1.16)$$

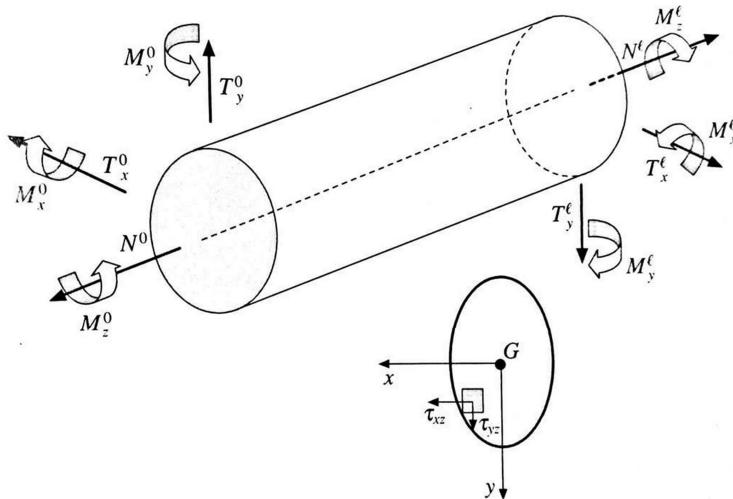
Queste esprimono le caratteristiche della sollecitazione in funzione delle componenti di tensione interna, ovvero l'equivalenza statica tra il sistema costituito dalle sei caratteristiche di sollecitazione e il complesso delle forze elementari di componenti  $\sigma_z dA, \tau_{zx} dA, \tau_{zy} dA$ .

L'ultima relazione delle (1.16) si può ricavare utilizzando le notazioni della figura (1.6). Il termine corrispondente a  $\tau_{zy}$  è positivo, poiché il momento della forza elementare  $\tau_{zy} dA$  rispetto a G è antioraria.



**Figura 1.6 - (VIOLA, 1992).**

Le caratteristiche della sollecitazione  $T_x, T_y, M_x, M_y, M_z$  valutate sulla sezione di normale positiva  $z = l$ , sono positive se dirette nel verso positivo dei corrispondenti assi.



**Figura 1.7 - (GAMBAROTTA, et al, 1992).**

L'equilibrio alla traslazione nelle direzioni x,y,z e l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse della trave richiede:

$$N(z)=N^0=\text{cost}, \quad T_x(z)=T_x^0=\text{cost}, \quad T_y(z)=T_y^0=\text{cost}, \quad M_z(z)=M_z^0=\text{cost}$$

L'equilibrio alla rotazione attorno ai due rimanenti assi comporta:

$$M_x(z)=M_x^0 + zT_y^0, \quad M_y(z)=M_y^0 + zT_x^0. \quad (1.17)$$

## 1.4 I quattro casi fondamentali

In virtù del principio di de Saint Venant è possibile far riferimento unicamente alla risultante ed al momento risultante delle forze agenti all'estremità della trave. Inoltre grazie al principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile ottenere qualsiasi condizione di carico mediante la combinazione di 4 tipi di sollecitazioni semplici.

- Forza assiale  $N$ ;
- Flessione retta  $M_x$  o  $M_y$ ;
- Taglio e flessione con asse di sollecitazione coincidente con l'asse principale d'inerzia  $x$  o  $y$ ;
- Torsione  $M_z$ .

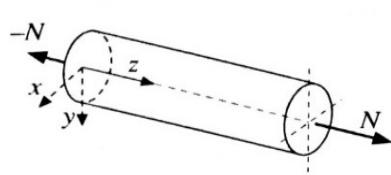
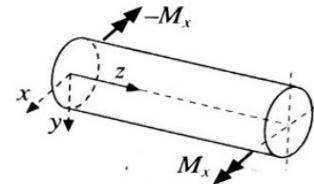
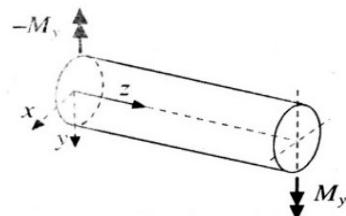
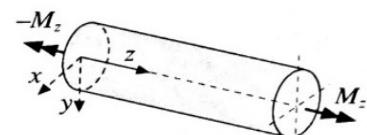
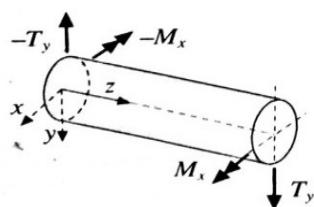
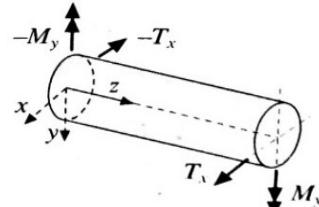
Sforzo assiale  $N$ Flessione retta di momento flettente  $M_x$ Flessione retta di momento flettente  $M_y$ Torsione di momento torcente  $M_z$ Taglio  $T_y$  e momento flettente  $M_x$ Taglio  $T_x$  e momento flettente  $M_y$ 

Figura 1.8 - (GAMBAROTTA, et al., 2003).

## 1.5 Energia di deformazione

Per un solido lineare ed isotropo, il potenziale elastico  $\phi$ , ha la seguente forma:

$$\phi = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (1.18)$$

Che in notazione matriciale possiamo scriverla come:

$$\phi = \frac{1}{2}(\underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}) \quad (1.19)$$

Dove  $\underline{\sigma}^T$  e  $\underline{\varepsilon}^T$  sono i vettori algebrici delle componenti di tensione e deformazione

$$\underline{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}] \quad (1.20)$$

$$\underline{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}] \quad (1.21)$$

Con le ipotesi di de Saint-Venant la (1.18) diventa:

$$\phi = \frac{1}{2}(\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (1.22)$$

La (1.22) rappresenta l'*energia specifica di deformazione*, relativa al solido cilindrico di de Saint-Venant.

L'*energia potenzia elastica*  $\Phi$ , o energia di deformazione elastica, relativa al cilindro vale:

$$\Phi_V = \int_V \phi dV = \int_V \frac{1}{2}(\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (1.23)$$

Analogamente possiamo conoscere il lavoro virtuale di deformazione, poiché:

$$\mathcal{L}_V = \Phi_V \quad (1.24)$$

## 1.6 Soluzione generale nelle tensioni normali

Le equazioni di Beltrami per l'equilibrio elastico, nel caso di de Saint-Venant, assumono la seguente forma:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.17)$$

$$(1+\nu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_x \partial_z} = 0; \quad (1+\nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_y \partial_z} = 0 \quad (1.18)$$

Dove  $\nabla^2$  è l'operatore di Laplace

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.19)$$

La (1.18) non verrà trattata in questa tesi, poiché la suddetta tesi non ha l'obiettivo di trattare la soluzione nelle tensioni tangenziali ma solamente quelli normali, per cui sono necessarie le (1.17).

Le (1.17) si possono ottenere mettendo in relazione i tre termini della (1.11)

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu \sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

Con i termini della (1.12):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Si ottiene così:

$$-\frac{\nu \partial^2 \sigma_z}{E \partial_y^2} - \frac{\nu \partial^2 \sigma_z}{E \partial_x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_x^2} = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{E \partial_x^2} - \frac{\nu \partial^2 \sigma_z}{E \partial_z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_z^2} = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{E \partial_y^2} - \frac{\nu \partial^2 \sigma_z}{E \partial_z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_z^2} = 0 \quad (1.22)$$

Dalle (1.21) e (1.22) si evince che:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_x^2} = \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_z^2} \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_y^2} = \nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_z^2} \end{cases} \quad (1.23)$$

Sostituendo le (1.22) nella (1.20) si ottiene:

$$2\nu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_z^2} = 0 \quad (1.24)$$

E sostituendo la (1.24) in (1.23) si ha:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_x^2} = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_y^2} = 0 \quad (1.26)$$

Dalla relazione  $2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0$  delle (1.12) si ha:

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_z}{E \partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{E \partial x \partial y} = 0 \quad (1.27)$$

Abbiamo così ottenuto le prime quattro equazioni di Beltrami per l'equilibrio elastico, le quali ci serviranno per ottenere l'espressione delle tensioni normali. (le riportiamo per semplicità nelle operazioni successive).

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.27)$$

Le quali equivalgono alla (1.17) e caratterizzano la soluzione delle  $\sigma_z$  in direzione dell'asse della trave qualunque sia la sollecitazione a cui è sottoposta la trave.

Passiamo ora a determinare l'espressione di  $\sigma_z$  tramite integrazione delle equazioni di Beltrami.

Partiamo dalla (1.24):

$$\int \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} dz = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = A_{(x,y)} \quad (1.28)$$

$A_{(x,y)}$  rappresenta una costante che dipende dai parametri x e y.

Integrando ancora la (1.28) è possibile ottenere  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = \int A_{(x,y)} dz = A_{(x,y)} \cdot z + B_{(x,y)} \quad (1.29)$$

Inserendo la (1.29) nella (1.25) si ha:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial_x^2} = \frac{\partial^2}{\partial_x^2} (A_{(x,y)} \cdot z) + \frac{\partial^2}{\partial_x^2} B_{(x,y)} = 0 \quad (1.30)$$

Se  $z \neq 0$  l'unica soluzione possibile è:

$$\frac{\partial^2}{\partial_x^2} A_{(x,y)} = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_x^2} B_{(x,y)} = 0 \quad (1.32)$$

Determiniamo  $A_{(x,y)}$  tramite integrazione :

$$\int \frac{\partial^2}{\partial_x^2} A_{(x,y)} dx = \frac{\partial}{\partial_x} A_{(x,y)} = C_{(y)} \quad (1.33)$$

La costante  $C$  della (1.33) è solo in funzione di  $y$  poiché essendo la funzione lineare in  $x$  e  $y$ , derivandola rispetto a  $x$  rimane solo in funzione di  $y$ .

Integrando ancora la (1.33) è possibile ottenere  $A_{(x,y)}$ .

$$A_{(x,y)} = \int C_{(y)} dx = C_{(y)} \cdot x + D_{(y)} \quad (1.34)$$

Analogamente dalla (1.32):

$$B_{(x,y)} = E_{(y)} \cdot x + F_{(y)} \quad (1.35)$$

Con la (1.34) e la (1.35) la (1.29) diventa:

$$\sigma_z = A_{(x,y)} \cdot z + B_{(x,y)} = [C_{(y)} \cdot x + D_{(y)}] z + E_{(y)} \cdot x + F_{(y)} \quad (1.36)$$

Sostituendo la (1.36) nella (1.26) si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial_y^2} [C_{(y)} \cdot x + D_{(y)}] z + \frac{\partial^2}{\partial_y^2} [E_{(y)} \cdot x + F_{(y)}] = 0 \quad (1.37)$$

Dove, affinché la soluzione nulla sia possibile si deve avere:

$$\frac{\partial^2}{\partial_y^2} C_{(y)} = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_y^2} D_{(y)} = 0 \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_y^2} E_{(y)} = 0 \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_y^2} F_{(y)} = 0 \quad (1.41)$$

Per la (1.38) è possibile ottenere:

$$\int \frac{\partial^2}{\partial_y^2} C_{(y)} = \frac{\partial}{\partial_y} C_{(y)} = k_3 \quad (1.42)$$

Integrando ancora la (1.42) otteniamo  $C_{(y)}$ :

$$C_{(y)} = k_3 \cdot y + k_1 \quad (1.43)$$

La costante  $k_3$  e le successive costanti che vedremo in questa dimostrazione sono stati numerati tramite pedici in modo del tutto a piacere.

Analogamente, con lo stesso procedimento con cui abbiamo ottenuto la (1.43) è possibile ricavare le seguenti:

$$D_{(y)} = k_2 \cdot y + k \quad (1.44)$$

$$E_{(y)} = t_3 \cdot y + t_1 \quad (1.45)$$

$$F_{(y)} = t_2 \cdot y + t \quad (1.46)$$

Sostituendo le (1.43),(1.44),(1.45),(1.46) nella (1.36) si ha:

$$\sigma_z = t + t_1 \cdot x + t_2 \cdot y + t_3 \cdot x \cdot y + z[k + k_1 \cdot x + k_2 \cdot y + k_3 \cdot xy] \quad (1.47)$$

La (1.47) deve però verificare anche la (1.27), quindi:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = t_3 \cdot z + k_3 = 0 \quad (1.48)$$

Dove l'unica soluzione possibile è:

$$k_3 = t_3 = 0 \quad (1.49)$$

Abbiamo così ottenuto l'espressione bilineare delle tensioni normali:

$$\sigma_z = t + t_1 \cdot x + t_2 \cdot y + z[k + k_1 \cdot x + k_2 \cdot y] \quad (1.50)$$

La (1.50) è verificata qualunque siano la risultante ed il momento risultante delle azioni applicate alle basi estreme.

In un riferimento baricentrico sostituendo la (1.50) nelle relazioni fra stato di tensione e caratteristiche della sollecitazione (1.16), otteniamo:

- riferendoci come detto prima in un riferimento baricentrico  $x=0$  e  $y=0$  e poiché  $N$  è costante lungo  $z$  allora si avrà che il termine  $k$  dovrà essere pari a zero:

$$N = \int_A \sigma_z dA = (t + zk)A = tA \quad (1.51)$$

Quindi con  $k=0$  si avrà:

$$t = \frac{N}{A} \quad (1.52)$$

- Per  $M_y$  e  $M_x$  che invece possono variare lungo  $z$  non possiamo porre  $z=0$  come per  $N$ , quindi sempre riferendosi al sistema baricentrico abbiamo:

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot ydA = (t_1 + zk_1) \cdot \int_A xydA + (t_2 + zk_2) \cdot \int_A y^2 dA \quad (1.53)$$

$$-M_x = \int_A \sigma_z \cdot x dA = (t_1 + zk_1) \cdot \int_A x^2 dA + (t_2 + zk_2) \cdot \int_A xydA \quad (1.54)$$

A= area trasversale

Dall'assunzione dell'origine degli assi nel baricentro di una generica sezione trasversale, i momenti statici risultano nulli. È opportuno ricordare anche i momenti d'inerzia di una figura piana:

$$Ix = \int_A y^2 dA ; Iy = \int_A x^2 dA ; I_{xy} = \int_A xydA$$

Possiamo riscrivere le (1.53), (1.54) in funzione dei momenti d'inerzia o momenti del secondo ordine citati sopra.

$$\begin{aligned} M_x &= (t_1 + zk_1) \cdot I_{xy} + (t_2 + zk_2) \cdot I_x \\ -M_y &= (t_1 + zk_1) \cdot I_y + (t_2 + zk_2) \cdot I_{xy} \end{aligned}$$

E poiché, da quanto trovato nel capitolo (1.3) le CDS per i momenti sono:

$$\begin{aligned} M_x(z) &= M_x^0 + zT_y^0, \\ M_y(z) &= M_y^0 + zT_x^0. \end{aligned}$$

Possiamo così determinare le costanti  $t_1$ ,  $t_2$  e  $k_1$ ,  $k_2$  assumendo che si annullano i termini privi di  $z$ .

$$\begin{cases} t_1 = -\frac{(M_x^0 I_{xy} + M_y^0 I_x)}{D} \\ t_2 = \frac{(M_y^0 I_{xy} + M_x^0 I_y)}{D} \\ k_1 = -\frac{(T_x^0 I_x + T_y^0 I_{xy})}{D} \\ k_2 = \frac{(T_x^0 I_{xy} - T_y^0 I_y)}{D} \end{cases} \quad (1.55)$$

$$\text{Con } D = I_x I_y - (I_{xy})^2 > 0$$

Se si assumono come assi coordinati x e y gli assi principali d'inerzia della sezione, il momento centrifugo  $I_{xy}$  si annulla e le relazioni (1.22) assumono la forma:

$$\begin{cases} t_1 = -\frac{M_y^0}{I_y} \\ t_2 = \frac{M_x^0}{I_x} \\ k_1 = -\frac{T_x^0}{I_y} \\ k_2 = -\frac{T_y^0}{I_x} \end{cases} \quad (1.56)$$

Con la (1.55) e con la (1.52), possiamo ottenere la seguente relazione generale delle tensioni normali che prende il nome di *Formula di Navier*:

$$\boxed{\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x} \quad (1.57)$$