

Capitolo 2

I CASI DELLA FLESSIONE E DELLA PRESSO-FLESSIONE RETTA E DEVIATA

2.1 LA FLESSIONE

2.1.1 LA FLESSIONE RETTA

Per flessione retta si intende lo stato tensionale in cui il solido di De Saint Venant è sollecitato da una coppia flettente sulle basi estreme.

Nel seguito si suppone che sia applicata la coppia M_x con asse vettore (asse momento) parallelo ed equiverso all'asse momento (fig. 2.1).

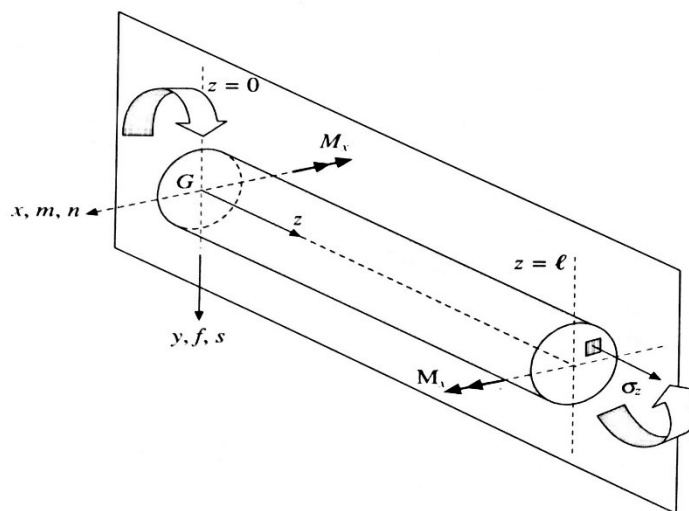


Figura 2.1 - (GAMBAROTTA, et al, 2003)

2.1.1.1 Stato tensionale

La formula di Navier nel caso di flessione retta diviene:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad (2.1)$$

La tensione si annulla dove $y=0$ e l'asse passante per tale punto ed ortogonale a y prende il nome di *asse neutro* n mentre l'asse ortogonale all'asse momento prende il nome di *asse di sollecitazione* s . Possiamo dunque dire che nel caso di flessione retta l'asse n è ortogonale all'asse s .

Inoltre per $y>0$ avremo fibre tese, mentre per $y<0$ fibre compresse.

Dalla (2.1) è facile evincere che i punti di max e min di σ_z si riscontrano nelle fibre più distanti dall'asse neutro (fig. 2.2)

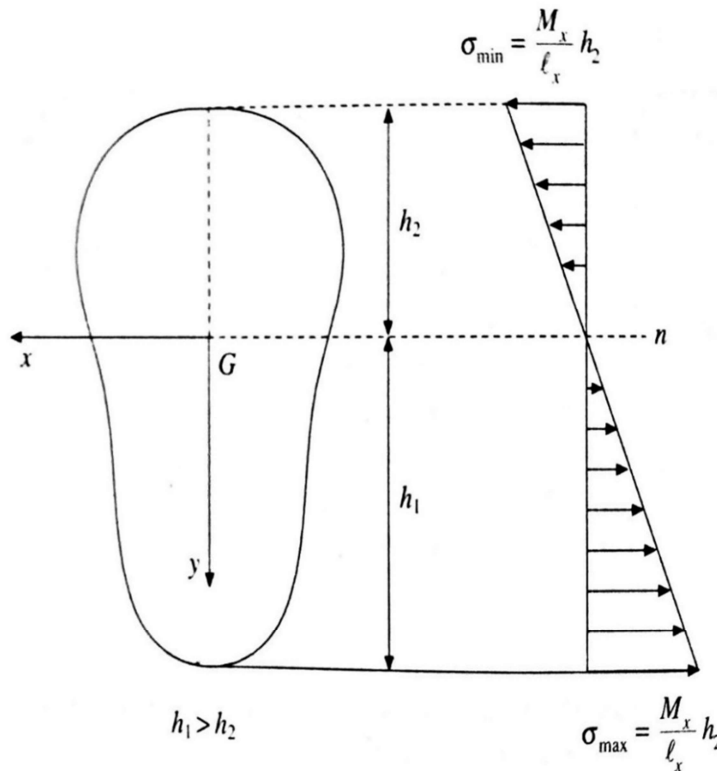


Figura 2.2 - (GAMBAROTTA, et al, 2003)

Analogamente nel caso di flessione con vettore momento sull'asse y avremo:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

E con la stessa logica applicata al caso con vettore momento sull'asse x si evince lo stato tensionale in figura (2.3)

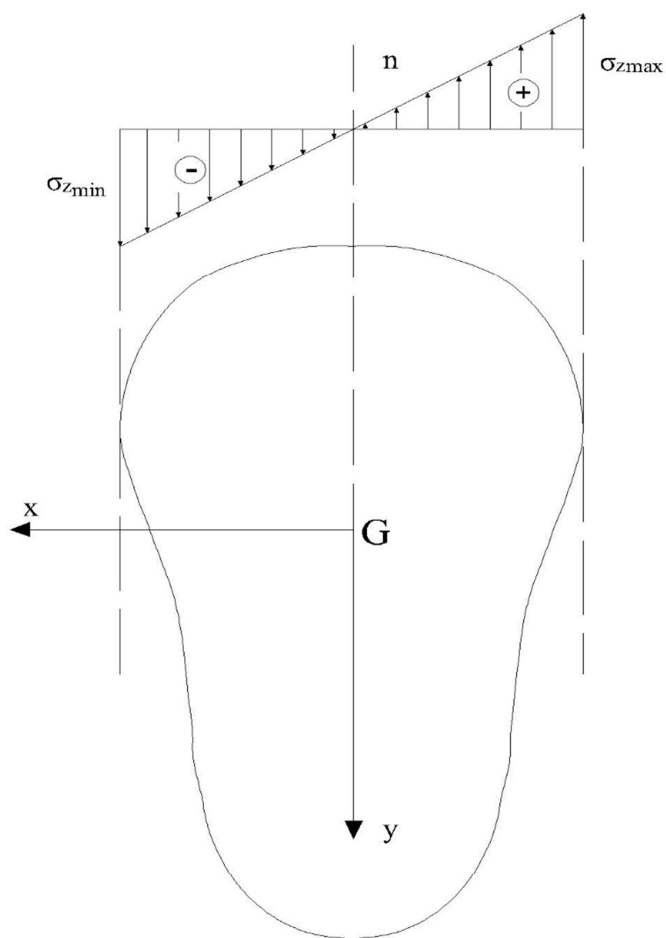


Figura 2.3

2.1.1.2 Stato di deformazione

Ricordando le (1.11) nel caso di flessione retta si ha:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y \right) \right], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y \right) \right], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y \right)$$

Quindi il tensore di *deformazione infinitesima* diventa:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{M_x y}{EI_x} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Le dilatazioni sono uguali in ogni sezione e si annullano sull'asse x baricentrico, il *coefficiente di dilatazione volumetrica* è:

$$c = tr \mathbf{E} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{M_x}{EI_x} (1 - 2\nu) y \quad (2.3)$$

Mentre la variazione di volume della trave è:

$$\Delta V = l \int_A c dA = l \frac{M_x}{EI_x} (1 - 2\nu) \int_A y dA = 0 \quad (2.4)$$

$\Delta V = 0$ poiché l'asse x è baricentrico.

2.1.1.3 Campo di spostamento

Partiamo ancora dalle (1.11)

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y \right) \right], \quad \varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y \right) \right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y \right)$$

Che integrandole ed eliminando il moto rigido, danno le tre componenti di spostamento.

$$\boxed{u = -\frac{\nu M_x}{EI_x} yx} \quad \text{da } \varepsilon_x \quad (2.5)$$

$$\boxed{w = \frac{M_x}{EI_x} yz} \quad \text{da } \varepsilon_y \quad (2.6)$$

Lo spostamento v non è così banale poiché ha componenti x, y e z .

$$v_x = -\frac{\nu M_x}{EI_x} y \quad (2.7)$$

Mentre le componenti x e z sono date dagli scorrimenti angolari

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \quad (\text{ipotesi di de Saint-Venant}), \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

In questo caso di flessione pura, poiché $T=0$ anche tutte τ sono nulle. Quindi è bene ricordare che il campo di spostamento che si troverà ora non è uguale al caso di T diverso da zero.

Ricordo le (1.14) che saranno nulle poiché le τ sono nulle.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Quindi:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow v_x = \frac{\nu M_x}{2EI_x} x^2 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow v_z = -\frac{M_x}{2EI_x} z^2 \quad (2.9)$$

Posso ora determinare v :

$$\boxed{v = v_x + v_y + v_z = -\frac{M_x}{2EI_x} [z^2 + \nu(y^2 - x^2)]} \quad (2.10)$$

Ed esprimendo il campo di spostamento in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{EI_x} yx \\ -\frac{1}{2EI_x} [z^2 + \nu(y^2 - x^2)] \\ \frac{1}{EI_x} yz \end{bmatrix} \cdot M_x \quad (2.11)$$

Lo spostamento della linea d'asse si ottiene imponendo $x = y = 0$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2EI_x} (z^2) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot M_x$$

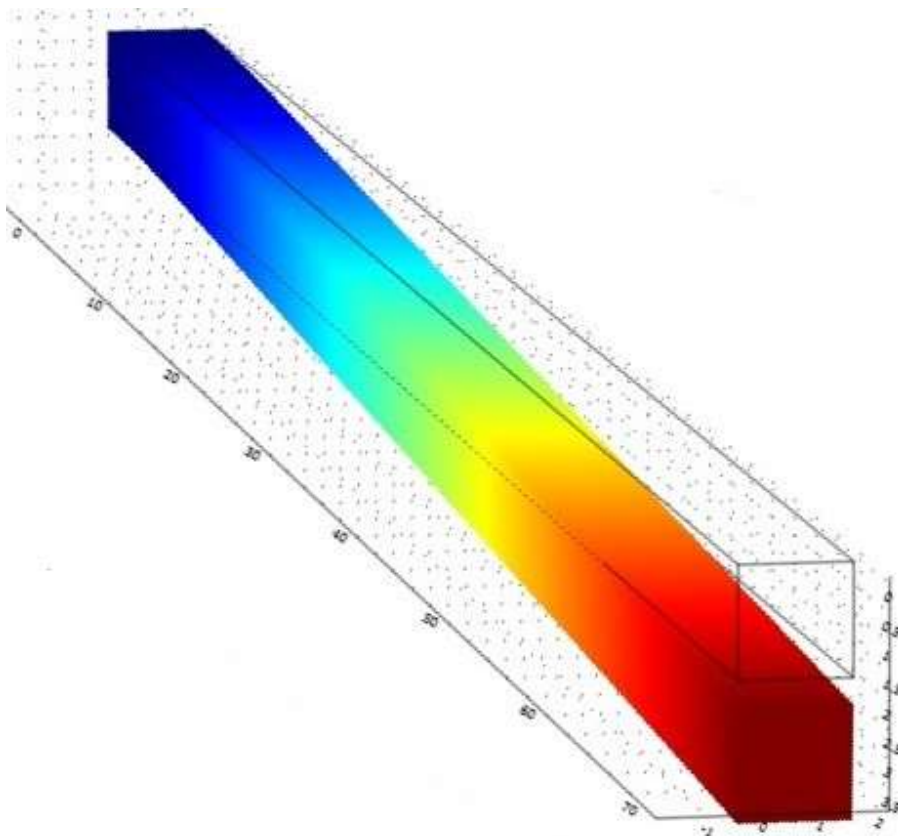


Figura 2.4 – deformata di una trave inflessa

2.1.1.4 Energia di deformazione

Essendo lo stato di tensione e di deformazione uniforme in tutta la trave, l'energia di deformazione può calcolarsi puntualmente per poi essere integrata sulla sezione ed essere moltiplicata per la luce.

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \cdot \varepsilon_z = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon_z^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2}{EI_x^2} y^2 \quad (2.12)$$

$$\Phi_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2}{EI_x^2} \int_0^l dz \int_A y^2 dA = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2}{EI_x} \quad (2.13)$$

2.1.2 LA FLESSIONE DEVIATA

Per flessione deviata si intende quella sollecitazione composta in cui il solido di De Saint-Venant è sollecitato da una coppia flettente M , il cui asse momento non coincide con un asse principale d'inerzia della sezione (fig. 2.5).

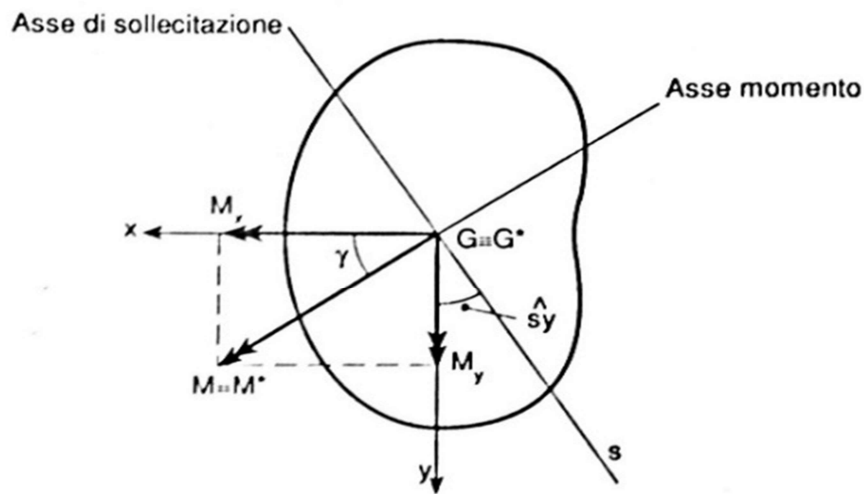


Figura 2.5 - (VIOLA, 1992)

Il piano, ortogonale all'asse momento, che contiene le azioni applicate alle basi estreme si dice *piano di sollecitazione*, mentre la sua traccia sulla sezione, s , viene detta *asse di sollecitazione* e non coincide con uno degli assi principali d'inerzia.

Il vettore momento \mathbf{M} può essere scomposto nelle sue componenti secondo gli assi principali d'inerzia:

$$\begin{cases} M_x = M \cos \gamma \\ M_y = M \sin \gamma \end{cases} \quad (2.14)$$

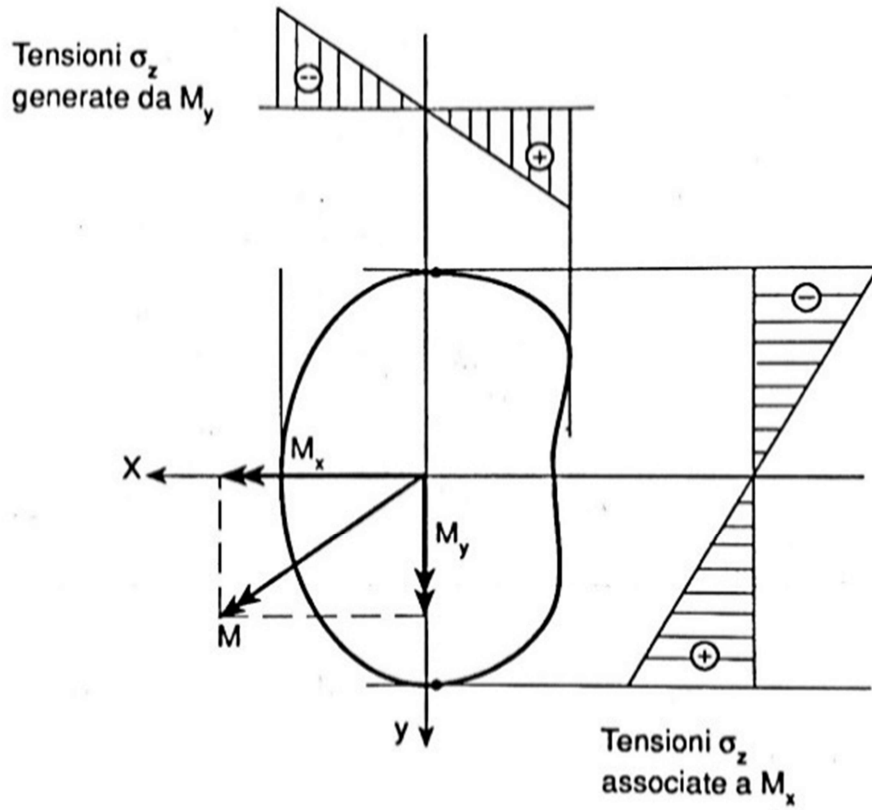


Figura 2.6 - (VIOLA, 1992)

È possibile quindi considerare questo caso come la sovrapposizione degli effetti di due flessioni rette.

2.1.2.1 Stato tensionale

Poiché sullo stato tensionale del sistema influiscono solo M_x e M_y avrò:

$$\sigma_z = \frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x \quad (2.15)$$

Le tensioni normali si annullano su una retta, l'asse neutro n , che si ottiene ponendo $\sigma_z = 0$.

$$\frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x = 0 \quad (2.16)$$

La (2.17) rappresenta l'equazione di una retta baricentrica, poiché in $x = 0$ e in $y = 0$ corrisponde $\sigma_z = 0$.

Dalla (2.17) è possibile esprimere y come:

$$y = \frac{M_y(z) I_x}{M_x(z) I_y} x \quad (2.17)$$

E poiché dalla (2.15) si ricava:

$$\frac{M_y}{M_x} = \tan \gamma \quad (2.18)$$

Ed essendo:

$$\alpha = \gamma + \frac{\pi}{2} \quad (2.19)$$

Si ha per le relazioni degli angoli associati:

$$\frac{M_y}{M_x} = \tan \gamma = -\frac{1}{\tan \alpha} \quad (2.20)$$

La (2.10) diventa:

$$y \tan \alpha = -\frac{I_x}{I_y} x \quad (2.21)$$

Ed esprimendo I_x e I_y in funzione dei *raggi principali di inerzia* ρ_x e ρ_y della sezione:

$$I_x = A\rho_x^2, \quad I_y = A\rho_y^2 \quad (2.22)$$

Ottengo:

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{\rho_x^2}{\rho_y^2} \quad (2.23)$$

La (2.14) diviene così:

$$y \tan \alpha = -\frac{\rho_x^2}{\rho_y^2} x \quad (2.24)$$

Notando che l'angolo β che descrive la posizione dell'asse neutro si può esprimere come:

$$y = x \tan \beta \quad (2.25)$$

Si ottiene:

$$\tan \beta \tan \alpha = -\frac{\rho_x^2}{\rho_y^2} \quad (2.26)$$

La (2.27) dichiara che *l'asse neutro n e l'asse di sollecitazione s* sono coniugati nella polarità avente come conica fondamentale l'ellisse centrale d'inerzia della sezione retta della trave.

Contrariamente a quanto accade nella flessione retta, nella flessione deviata n ed s non sono ortogonali.

Analoga alla (2.26) è:

$$\tan \beta = \frac{M_y I_x}{M_x I_y} \quad (2.27)$$

Che si ottiene dalla sola (2.25)

2.1.2.1.1 Ricerca asse neutro come sovrapposizione di rotazione

Scomponendo il momento lungo gli assi principali d'inerzia abbiamo detto che si ottiene la (2.7). (fig 2.7)

Ciascuno di questi momenti flettenti produce una flessione retta:

per M_x l'asse di sollecitazione è y e l'asse neutro x ; (fig. 2.8)

per M_y l'asse di sollecitazione è x e l'asse neutro y . (fig 2.9)

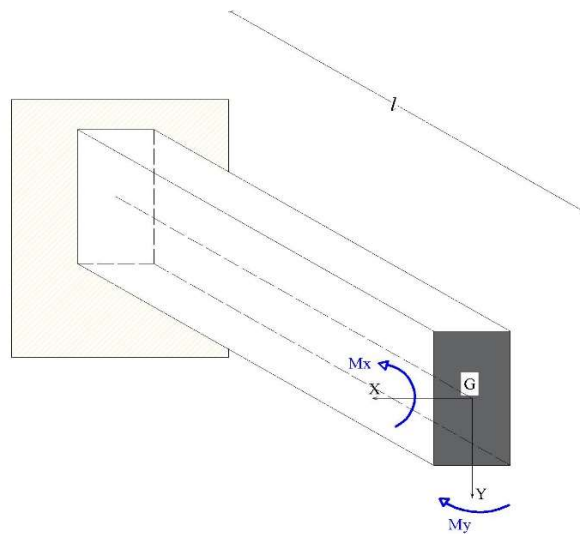


Figura 2.7- scomposizione in di M sugli assi principali

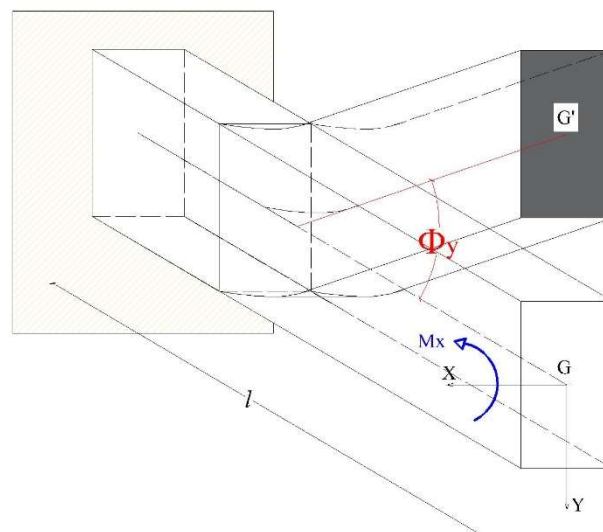


Figura 2.8- angolo Φ_y , formatosi dalla sollecitazione M_x

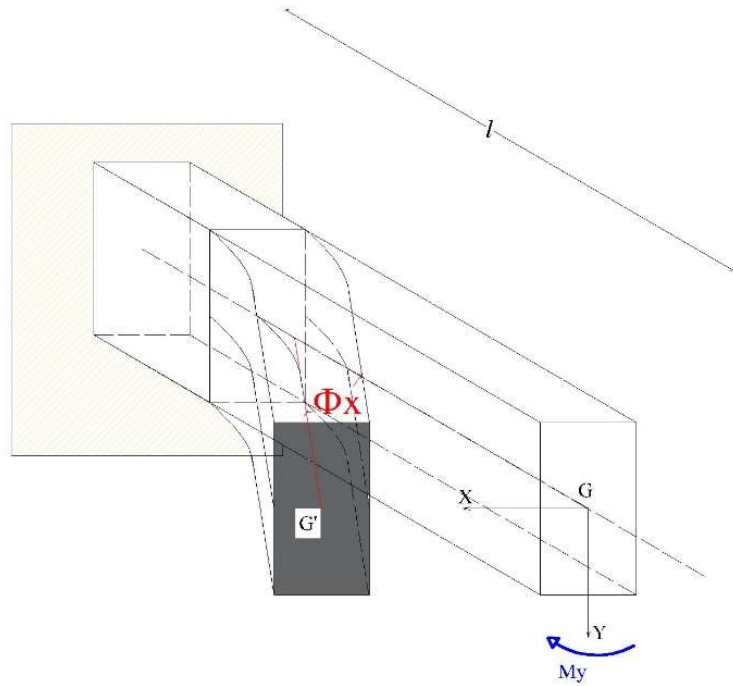


Figura 2.9- angolo Φ_x , formatosi dalla sollecitazione M_y

I corrispondenti angoli di flessione, con assi di rotazione x e y, risultano:

$$\phi_x = \frac{M_x l}{EI_x}, \quad \phi_y = \frac{M_y l}{EI_y} \quad (2.28)$$

Le due rotazioni (2.28) equivalgono a una rotazione unica ϕ intorno all'asse n inclinato di un angolo β rispetto a x (fig. 2.10), tale che:

$$\tan \beta = \frac{\phi_y}{\phi_x} = \frac{M_y I_x}{M_x I_y} \quad (2.29)$$

Che risulta essere uguale alla (2.28).

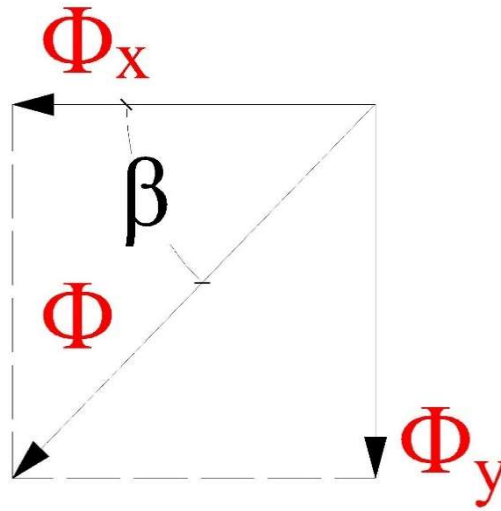


Figura 2.10

La rotazione ϕ totale, intorno all'asse n , è data da:

$$\phi = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} = \frac{Ml}{E} \sqrt{\frac{\sin^2 \gamma}{I_x^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{I_y^2}} \quad (2.30)$$

Dalla (2.31) è facile ricavare la curvatura poiché:

$$\chi = \frac{\phi}{l} = \frac{M}{E} \sqrt{\frac{\sin^2 \gamma}{I_x^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{I_y^2}} \quad (2.31)$$

Questo procedimento visto nel caso di rotazioni di una trave a mensola si può anche applicare in tutti gli altri in cui il vincolo esterno non è solo l'incastro alla base.

2.1.2.1.2 Determinazione grafica dell'asse neutro

Noti l'asse di sollecitazione s , ortogonale all'asse momento che definisce la flessione deviata, e l'ellisse centrale d'inerzia della sezione si può determinare l'asse neutro n .

Infatti la retta baricentrica parallela alle tangenti dell'ellisse nei punti di intersezione con s , costituisce l'asse neutro della sollecitazione di flessione deviata.

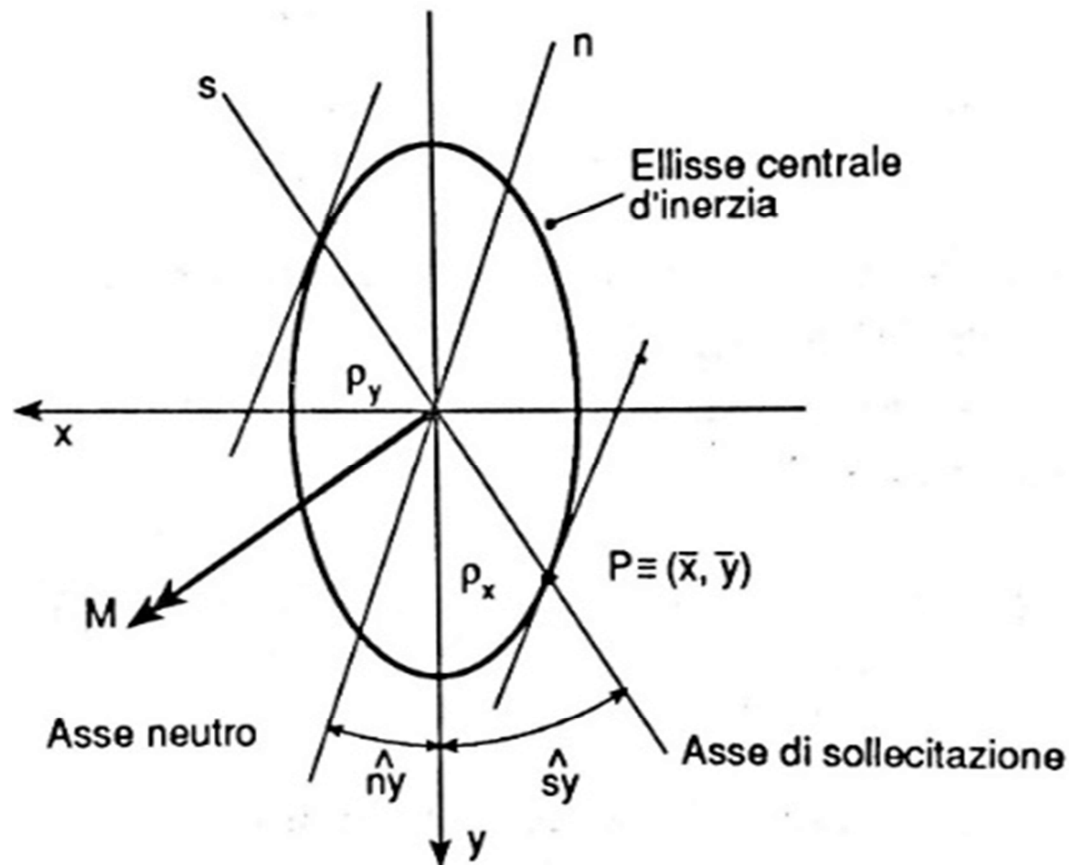


Figura 2.11 - (VIOLA, 1992)

2.1.2.1.3 Rappresentazione dello stato tensionale

La tensione σ_z è costante sulle corde parallele all'asse neutro e varia linearmente con la distanza di queste dal baricentro G della sezione.

Pertanto, le massime sollecitazioni di compressione e di trazione si verificano nei punti più lontani dall'asse neutro.

Per valutare σ_z nei suddetti punti si usa la formula di Navier, nel nostro caso è la (2.16)

$$\sigma_z = \frac{M_x(z)}{I_x} y - \frac{M_y(z)}{I_y} x$$

Noti M_x , M_y , I_x , I_y , occorre porre nella (2.8) le coordinate dei punti della sezione più distanti dall'asse neutro.

I punti indicati in figura (2.12) con P_1 e P_2 si determinano conducendo le parallele n_1 e n_2 all'asse neutro, radenti la sezione.

In P_1 si ha la massima tensione di compressione e in P_2 la massima tensione di trazione.

Il diagramma può essere ottenuto o sulla fondamentale f_1 parallela all'asse di sollecitazione, oppure sulla fondamentale f_2 perpendicolare all'asse neutro n .

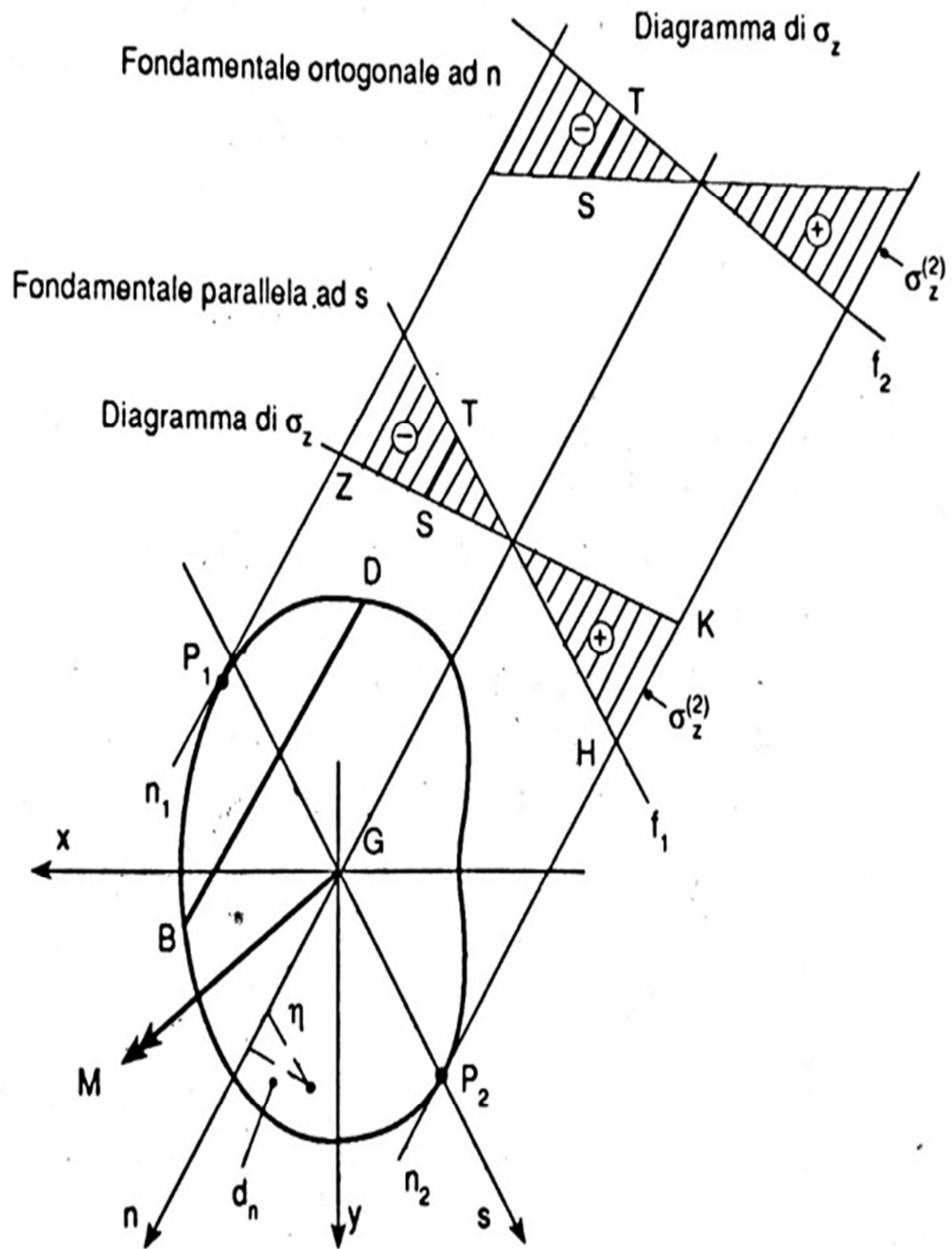


Figura 2.12 - (VIOLA, 1992)

2.1.2.2 Stato di deformazione

Il tensore di deformazione infinitesima \mathbf{E} , nel caso della flessione deviata si ottiene ricordando le (1.11) e la (2.8):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right) \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right) \right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right)$$

Quindi, il tensore di *deformazione infinitesima* diventa:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \left(\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right) \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

2.1.2.3 Campo di spostamento

Il campo di spostamento si trova combinando le relazioni di congruenza e di legame elastico per i due casi di flessione retta su x e y.

- Flessione retta su x (caso già svolto, si riporta la (2.11))

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{EI_x} yx \\ -\frac{1}{2EI_x} (z^2 + \nu(y^2 - x^2)) \\ \frac{1}{EI_x} yz \end{bmatrix} \cdot M_x$$

- Flessione retta su y

Partiamo ancora dalle (1.11)

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(-\frac{M_y}{I_y} x \right) \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(-\frac{M_y}{I_y} x \right) \right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{E} \cdot \left(-\frac{M_y}{I_y} x \right)$$

Con lo stesso procedimento per la flessione retta su x si ottiene:

(questa volta è u che ha componenti lungo x,y e z)

$$\boxed{w = -\frac{M_y}{EI_y} xz} \quad (2.33)$$

$$\boxed{v = \frac{\nu \cdot M_y}{EI_y} xy} \quad (2.34)$$

$$u_x = \frac{\nu \cdot M_y}{2EI_y} x^2 \quad (2.35)$$

Poi dagli scorrimenti angolari determino le componenti u_y e u_z :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow u_y = -\frac{\nu M_x}{2EI_x} y^2 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_z = \frac{M_y}{2EI_y} z^2 \quad (2.37)$$

Posso ora determinare v:

$$\boxed{u = u_x + u_y + u_z = \frac{M_y}{2EI_y} \left[z^2 + \nu(x^2 - y^2) \right]} \quad (2.38)$$

Abbiamo così determinato gli spostamenti generati da flessione retta su l'asse y .

Con la sovrapposizione degli effetti tra gli spostamenti di una flessione retta lungo x e una lungo y si ottiene il seguente campo di spostamento, che rappresenta il campo di spostamento della flessione deviata.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu xy}{EI_x} & \frac{z^2 + \nu \cdot (x^2 - y^2)}{2EI_y} \\ -\frac{z^2 + \nu \cdot (y^2 - x^2)}{2EI_x} & \frac{\nu xy}{EI_y} \\ \frac{yz}{EI_x} & -\frac{xz}{EI_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Lo spostamento della linea d'asse si ottiene sempre ponendo $x = y = 0$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{z^2}{2EI_y} \\ -\frac{z^2}{2EI_x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = -\frac{z^2}{2E} \begin{bmatrix} \frac{M_y}{I_y} \\ -\frac{M_x}{I_x} \end{bmatrix}$$

2.1.2.4 Energia di deformazione

L'energia di deformazione specifica ϕ dipende unicamente dalle tensioni normali, e risulta:

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \cdot \varepsilon_z = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon_z^2 = \frac{1}{2E} \cdot \left(\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right)^2 \quad (2.40)$$

Mentre l'energia di deformazione dell'intera trave si ottiene integrando la (2.40) sull'intero volume della trave

$$\Phi_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2}{EI_x^2} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_y^2}{EI_y^2} l \quad (2.41)$$

La (2.41) è stata ottenuta tenendo conto che non dipende da z e che gli assi x e y sono assi principali d'inerzia e quindi il termine che contiene il prodotto $M_x M_y$ si annulla poiché è nullo il momento centrifugo.

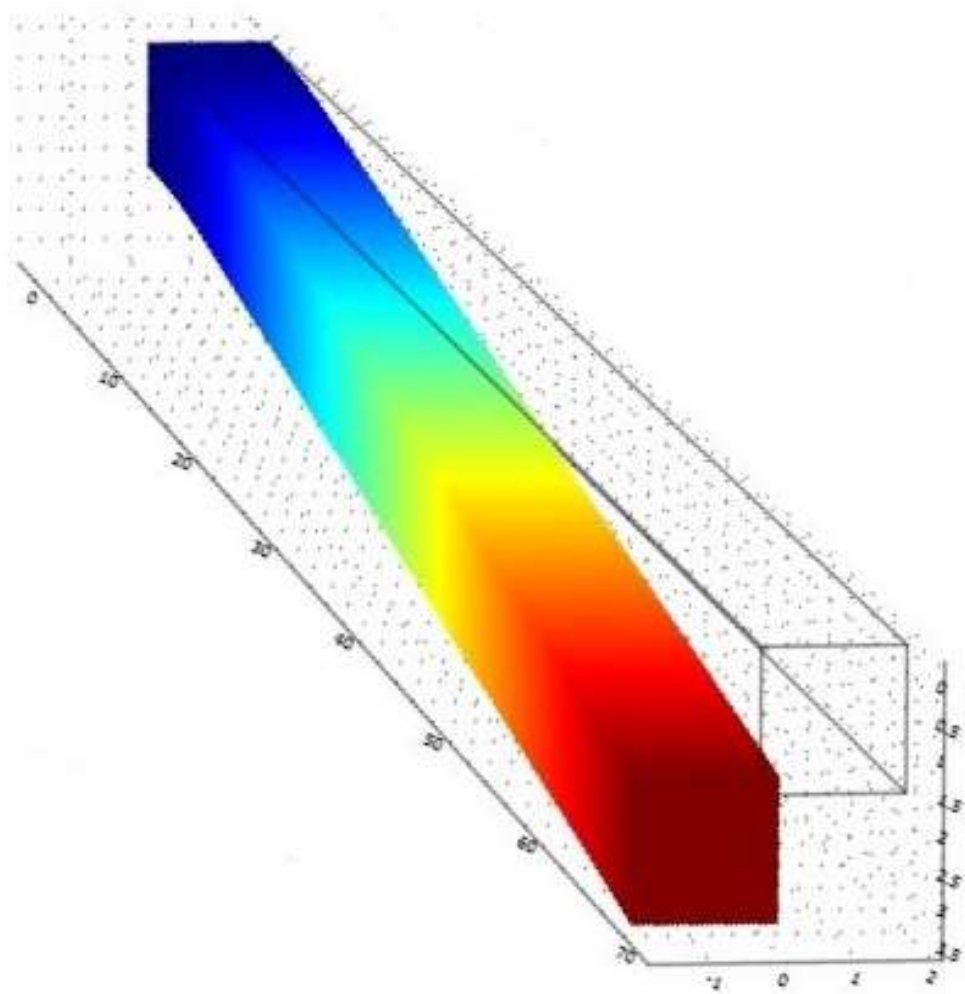


Figura 2.13 – deformata di una trave soggetta a flessione deviata

2.2 FORZA NORMALE ECCENTRICA

Questa sollecitazione composta si ha quando una trave è soggetta a una o più forze parallele al suo asse geometrico; ciò si verifica frequentemente nei pilastri, quando in sommità agisce un carico P eccentrico, oppure quando la sommità è collegata con un'altra struttura che le trasmette una forza P centrata ed un momento M .

Se la forza è di compressione si assume $N < 0$.

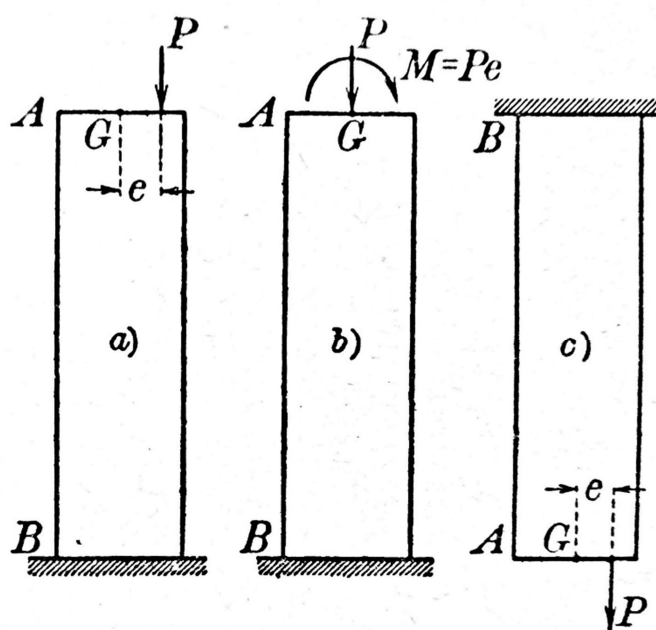


Figura 2.14 – (BELLUZZI, 1941)

I primi due casi sono in figura (2.14) sono equivalenti, poiché la forza P eccentrica si può trasportare nel baricentro della sezione, aggiungendo una coppia $M = Pe$, dove e è l'eccentricità della forza. In entrambi i casi si hanno due sollecitazioni:

forza normale $N = \pm P$ e momento flettente $M = Pe$.

Se si trascura il peso proprio del pilastro, N , e ed M sono costanti in tutte le sezioni; altrimenti M è costante, mentre N aumenta ed e diminuisce al crescere della distanza della sezione dall'estremo A.

Indicate con x_c e y_c le coordinate del punto di applicazione C (detto centro di sollecitazione) di N, i momenti di tale forza rispetto agli assi x e y risultano:

$$M_x = Ny_c, \quad M_y = -Nx_c. \quad (2.42)$$

Il segno dipende dal fatto che M_x è concorde con l'asse x, mentre M_y è discorde rispetto a y.

Come già detto in precedenza, il sistema di forze con risultante N applicata in C è equivalente a una forza N applicata nel baricentro G e a un momento M di intensità $M = Ne$, ove $e = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$ detta *eccentricità* è la distanza del centro di sollecitazione al baricentro.

L'asse congiungente G con C rappresenta l'asse di sollecitazione s ed è ortogonale all'asse momento (fig. 2.15).

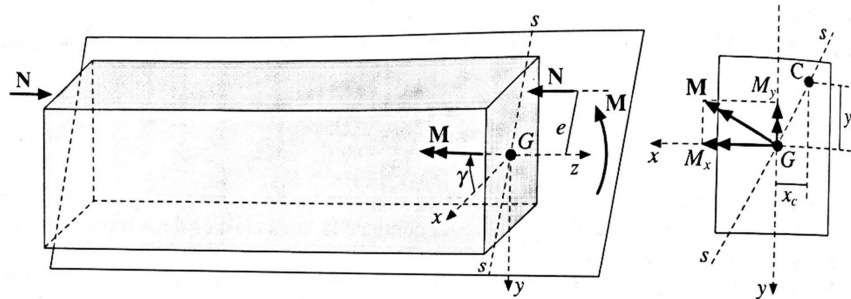


Figura 2.15 – Sforzo normale eccentrico - (GAMBAROTTA, et al, 2003)

È quindi chiaro che la sollecitazione con forza normale eccentrica è una sollecitazione composta che può considerarsi ottenuta per sovrapposizione da una forza normale centrata nel baricentro della sezione e di una flessione deviata, cioè due flessioni rette M_x e M_y .

Nel caso in cui la forza normale sia di trazione la sollecitazione si chiama *tensoflessione*, mentre nel caso di compressione è detta *pressoflessione*.

2.2.1 Stato tensionale

Lo stato tensionale dato dalla (1.57) ed ottenibile dalla sovrapposizione degli effetti di una forza normale applicata nel baricentro e da una flessione deviata è:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad (2.43)$$

Ove N , M_x e M_y vanno assunti con il loro segno.

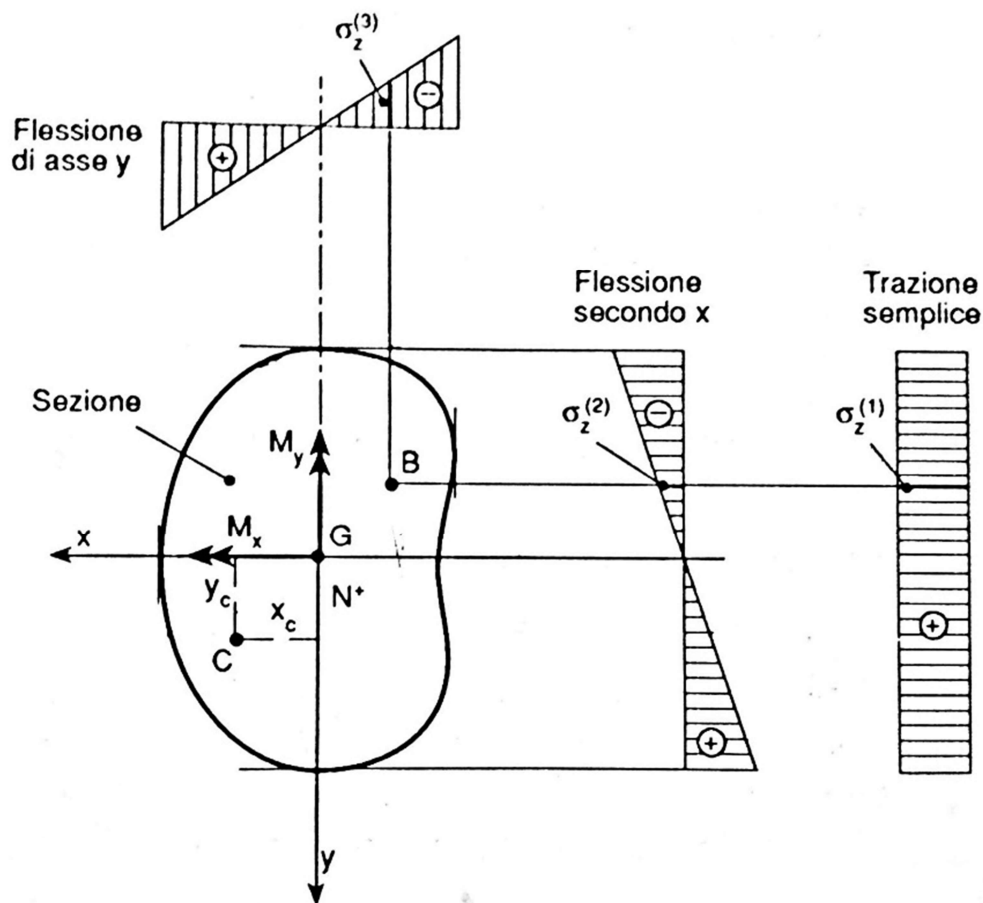


Figura 2.12 - (VIOLA, 1992)

È interessante notare che:

- la distribuzione delle tensioni normali σ_z si riproduce in tutte le sezioni rette della trave, poiché nell'espressione (2.43) in σ_z non compare la variabile z ;
- in corrispondenza del baricentro ($x=y=0$), la tensione è pari a:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

2.2.1.1 Determinazione analitica dell'asse neutro

L'espressione (2.44) rappresenta l'equazione di un piano, nel riferimento Gxy . L'intersezione di questo piano con la sezione retta prende il nome di *asse neutro*. Esso risulta essere il luogo dei punti dove le $\sigma_z = 0$, quindi:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0 \quad (2.44)$$

Esprimendo anche i momenti principali d'inerzia I_x e I_y in funzione dei raggi d'inerzia ρ_x e ρ_y :

$$I_x = A \cdot \rho_x^2 \quad I_y = A \cdot \rho_y^2 \quad (2.45)$$

E con riferimento alla sollecitazione di sforzo normale eccentrico, ricordando le (2.42)

$$M_x = N y_c, \quad M_y = -N x_c$$

Si ha:

$$\frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_c}{\rho_x^2} y + \frac{x_c}{\rho_y^2} x \right) = 0 \quad (2.46)$$

Si ricava così l'equazione dell'asse neutro:

$$1 + \frac{y_c}{\rho_x^2} y + \frac{x_c}{\rho_y^2} x = 0 \quad (2.47)$$

La (2.47) è l'*antipolare* del punto $C \equiv (x_c, y_c)$ rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione retta della trave e può esprimersi nella forma segmentaria:

$$-\frac{x}{\frac{\rho_y^2}{x_c}} + \frac{y}{\frac{\rho_x^2}{y_c}} = 1 \quad (2.48)$$

Dove:

$$-\frac{\rho_y^2}{x_c} \quad -\frac{\rho_x^2}{y_c} \quad (2.49)$$

Esprimono le intercette dell'asse neutro sugli assi x e y principali d'inerzia. Il segno meno indica che il punto appartiene alla semiretta $y < 0$ se $y_c > 0$, analogo per x.

Nella sollecitazione composta di sforzo assiale e flessione deviata l'asse neutro non è baricentrico. I punti H' e K' di intersezione di n con gli assi x e y hanno coordinate non nulle (fig. 2.13).

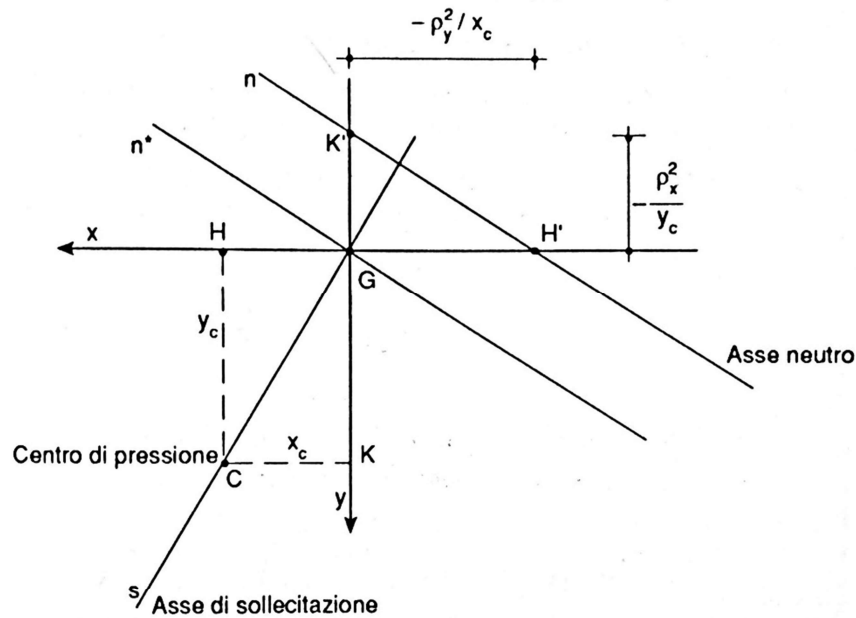


Figura 2.13 - (VIOLA, 1992)

Si ricorda che l'equazione dell'asse neutro n^* associato alla sola sollecitazione di flessione deviata si ricava ponendo:

$$\frac{y_c}{\rho_x^2} y + \frac{x_c}{\rho_y^2} x = 0 \quad (2.50)$$

La retta n^* risulta essere la retta baricentrica parallela all'asse neutro n della sollecitazione composta da N ed $M=Ne$.

Notare che l'asse neutro n ed il centro di sollecitazione C sono situati sempre in semipiani diversi, definiti dalla retta n^* baricentrica e parallela all'asse neutro n .

2.2.1.2 Determinazione grafica dell'asse neutro

Per la determinazione grafica dell'asse neutro, corrispondente ad un assegnato centro di sollecitazione $C \equiv (x_c, y_c)$, si richiede la conoscenza dei raggi d'inerzia ρ_x e ρ_y dell'ellisse centrale d'inerzia della sezione.

Ai fini della costruzione, dunque, si può procedere senza disegnare l'ellisse, ma rappresentando i soli semidiametri coniugati.

Indichiamo con H e K le proiezioni del centro di sollecitazione C sulle rette baricentriche x e y (fig. 2.14).

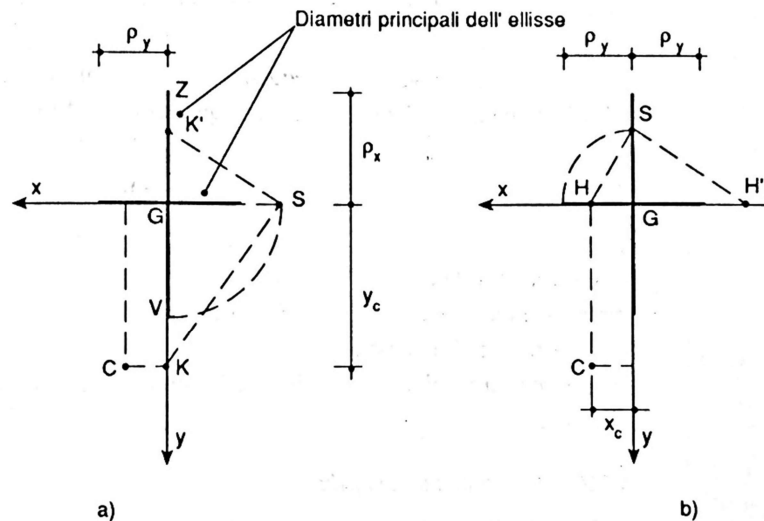


Figura 2.14 - (VIOLA, 1992)

Nella figura (2.14) sono stati ricavati separatamente i punti H'(fig. 2.14b) e K'(fig. 2.14a), ma per la determinazione dell'asse neutro la determinazione di H' e K' va effettuata sulla stessa figura.

Per ricavare ad esempio K', occorre ribaltare il segmento $\overline{GZ} = \overline{GV} = \rho_x$ sull'asse principale x ed individuare il punto S come in figura (2.14a). La retta s ortogonale a SK interseca y in K'.

Con una semplice proporzione si può ottenere il segmento $\overline{GK'}$:

$$\frac{\overline{GK'}}{\overline{SG}} = \frac{\overline{SG}}{\overline{GK}} \Rightarrow \overline{GK'} = \frac{(\overline{SG})^2}{\overline{GK}} = \frac{\rho_x^2}{y_c} \quad (2.51)$$

Il punto H' si determina in maniera analoga, come mostrato in figura (2.14).

La retta che congiunge i punti H' e K' è il nostro asse neutro.

2.2.1.3 Rappresentazione dello stato tensionale

Anche in questo caso come abbiamo detto per la flessione deviata le massime sollecitazioni di compressione e di trazione si verificano nei punti più lontani dall'asse neutro.

Per valutare σ_z nei suddetti punti si usa la formula di Navier, che nel nostro caso è la (2.43)

L'asse neutro n costituisce l'antipolare del centro di sollecitazione C rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione.

La forma del diametro delle tensioni dipende dalla posizione dell'asse neutro e, quindi, da quella del centro di pressione C.

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

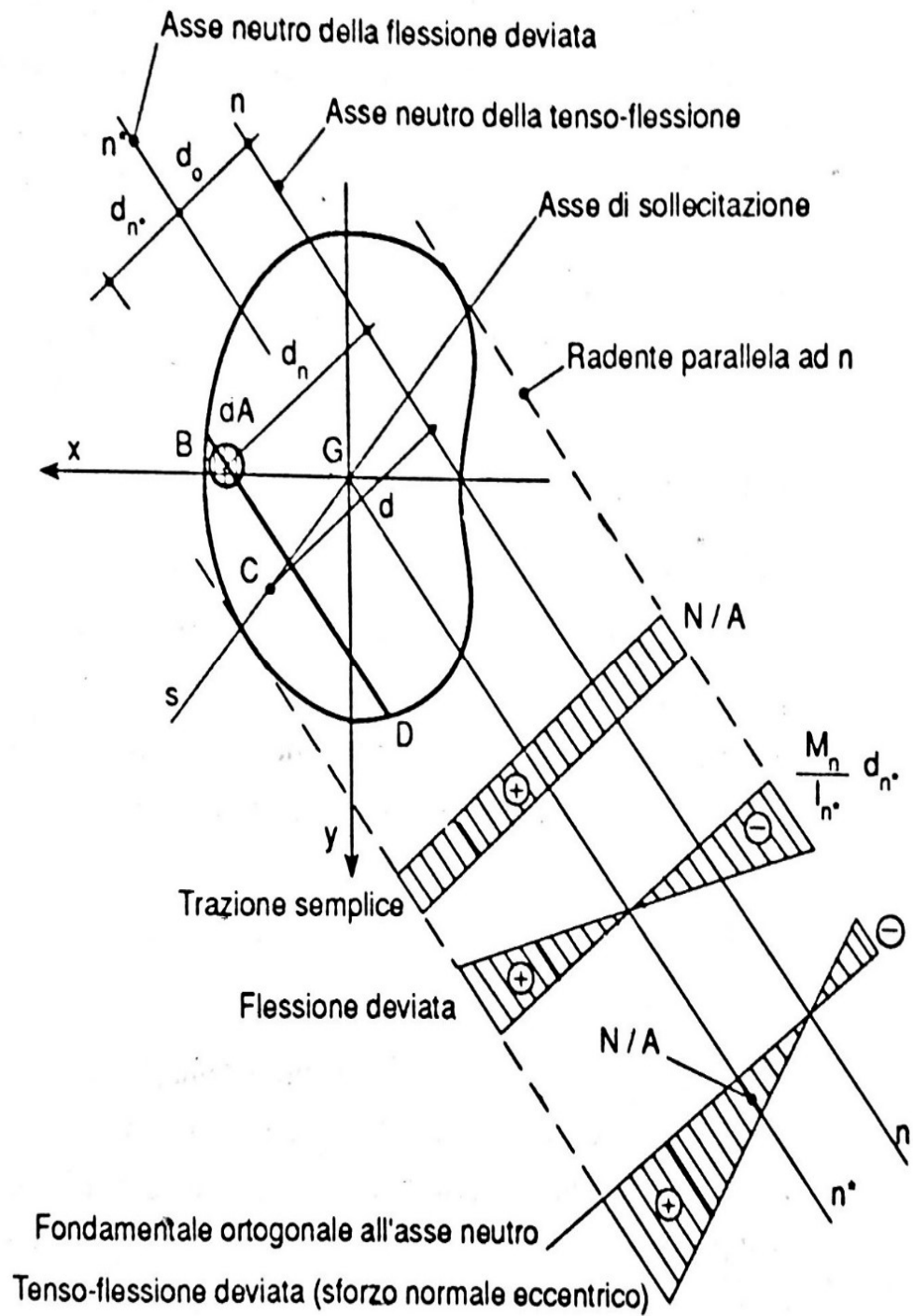


Figura 2.15 - (VIOLA, 1992)

In base alla corrispondenza tra C ed n , si possono distinguere tre casi:

- Quando il centro di pressione C si trova esterno al nocciolo centrale d'inerzia dell'area della sezione, l'asse neutro n taglia la sezione stessa. In particolare l'asse $n=n_1$ taglia il nocciolo, se il centro di sollecitazione $C \equiv C_1$ è esterno alla sezione. Il diagramma delle tensioni σ_z si presenta intrecciato. Di conseguenza, una parte della sezione risulta tesa, l'altra compressa, indipendentemente dal segno dello sforzo assiale. Se in C_1 la forza normale N è di trazione, le tensioni hanno il segno indicato nella figura sottostante.
- Se il centro di sollecitazione $C \equiv C_2$ è ubicato sul contorno del nocciolo, l'asse neutro corrispondente n_2 risulta tangente alla sezione. Il diagramma delle tensioni è dello stesso segno. Le tensioni σ_z si annullano solo nel punto o nei punti di contatto fra la sezione e l'asse neutro. Nel caso in figura, le tensioni sono generate dallo sforzo di trazione in C_2 e si ha $\sigma_z \geq 0$.
- Quando il centro di pressione $C \equiv C_3$ cade interamente al nocciolo, l'asse neutro $n \equiv n_3$ che gli corrisponde è esterno alla sezione. Le tensioni che sollecitano la sezione sono equiverse, dello stesso segno della forza normale applicata, e non si annullano in alcun punto della sezione retta. In figura troviamo $\sigma_z \geq 0$, poiché si è supposto agente la forza di trazione $N \geq 0$.

Questi tre casi sono rappresentati nelle figure 2.16 e 2.17.

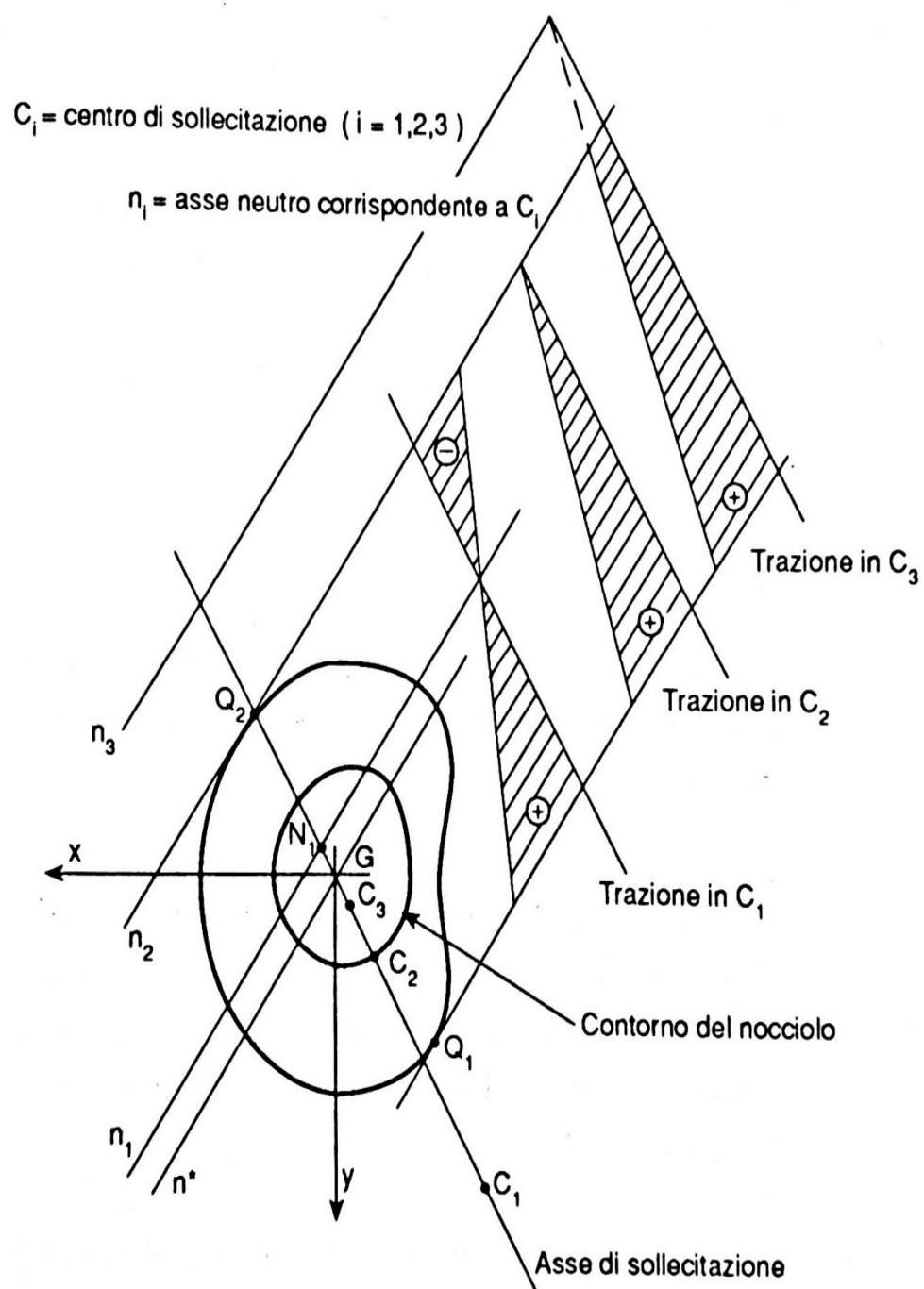


Figura 2.16 - (VIOLA, 1992)

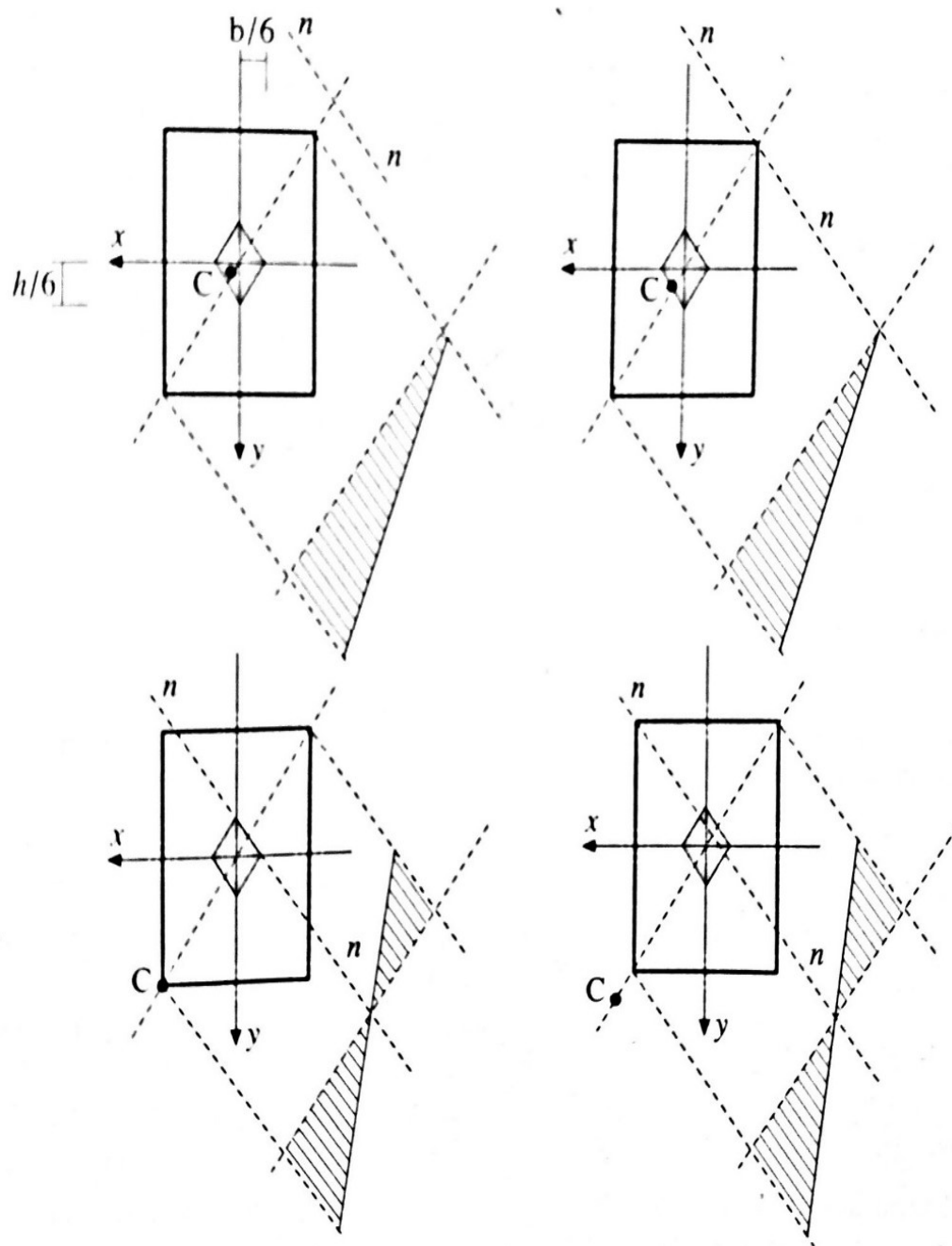


Figura 2.17 – Relazione tra centro di sollecitazione e nocciolo centrale d'inerzia - (GAMBAROTTA, et al, 2003)

2.2.2 *Stato di deformazione*

Essendo il caso di forza normale eccentrica ottenuto per sovrapposizione di una forza normale centrata e di una flessione deviata il tensore di deformazione infinitesima \mathbf{E} , costante lungo l'asse della trave, risulta dalla sovrapposizione delle deformazioni dei due casi.

Nel caso di sola forza normale, le (1.11) nel diventano:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{N}{A} \right) \right], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{N}{A} \right) \right], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{N}{A} y \right)$$

Quindi il tensore di *deformazione infinitesima* diventa:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{N}{EA} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

E combinato con quello trovato nel caso di flessione deviata (2.32), che riscriviamo per semplicità

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \left(\frac{M_x}{EI_x} y - \frac{M_y}{EI_y} x \right) \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Si ha così il tensore di *deformazione infinitesima* nel caso di pressoflessione deviata:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \left(\frac{N}{EA} + \frac{M_x}{EI_x} y - \frac{M_y}{EI_y} x \right) \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

2.2.3 *Campo di spostamento*

Anche il campo di spostamento può essere facilmente ottenuto per sovrapposizione di uno spostamento generato dalla forza normale centrata e di quello generato dalla flessione deviata che abbiamo già visto.

Lo spostamento che avviene per sollecitazione con forza normale centrata nel baricentro sarà:

Partendo ancora dalle (1.11)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{N}{A} \right) \right], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\frac{N}{A} \right) \right], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{N}{A} \right)$$

Che integrandole ed eliminando il moto rigido, mi danno le tre componenti di spostamento.

$$\boxed{u = -\frac{\nu N}{EA} x} \quad \text{da } \varepsilon_x \quad (2.54)$$

$$\boxed{v = -\frac{\nu N}{EA} y} \quad \text{da } \varepsilon_y \quad (2.55)$$

$$\boxed{w = -\frac{N}{EA} z} \quad \text{da } \varepsilon_z \quad (2.56)$$

In questo caso le (1.14) che saranno nulle poiché le τ sono nulle, non mi generano alcun spostamento.

Il campo di spostamento dato da forza normale in forma matriciale sarà:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{EA} x \\ -\frac{\nu}{EA} y \\ \frac{1}{EA} z \end{bmatrix} \cdot N \quad (2.57)$$

u e v sono legate dalla medesima costante di proporzionalità alle coordinate x e y del generico punto P della sezione, che pertanto si sposta lungo la retta che lo congiunge al baricentro G, ne consegue che i contorni della sezione si trasformano in curve simili a quelle iniziali.

Se ν è positivo ed N è di trazione, la sezione si contrae, viceversa si dilata se N è di compressione.

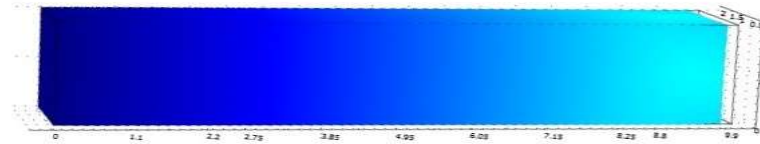


Figura 2.18 – deformazione di una trave soggetta a sollecitazione con forza normale di compressione

La linea d'asse si potrà solo accorciare o allungare, ma non ruotare o spostarsi verticalmente.

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{EA} z \end{bmatrix} \cdot N \quad (2.58)$$

Combinando lo spostamento dovuto a N con quello trovato precedentemente da una sollecitazione di flessione deviata (2.39), che si riporta di seguito per semplicità:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu xy}{EI_x} & \frac{z^2 + \nu \cdot (x^2 - y^2)}{2EI_y} \\ -\frac{z^2 + \nu \cdot (y^2 - x^2)}{2EI_x} & \frac{\nu xy}{EI_y} \\ \frac{yz}{EI_x} & -\frac{xz}{EI_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Si può ottenere così lo spostamento per lo stato di sollecitazione di pressoflessione deviata:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \frac{1}{EA} x & \frac{\nu xy}{EI_x} & \frac{z^2 + \nu \cdot (x^2 - y^2)}{2EI_y} \\ -\nu \frac{1}{EA} y & -\frac{z^2 + \nu \cdot (y^2 - x^2)}{2EI_x} & \frac{\nu xy}{EI_y} \\ \frac{1}{EA} z & \frac{yz}{EI_x} & -\frac{xz}{EI_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Lo spostamento della linea d'asse sarà:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{z^2}{2EI_y} \\ 0 & -\frac{z^2}{2EI_x} & 0 \\ \frac{1}{EA} z & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

2.2.4 Energia di deformazione

L'energia di deformazione specifica ϕ dipende unicamente dalle tensioni normali, e risulta:

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \cdot \varepsilon_z = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon_z^2 = \frac{1}{2E} \cdot \left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right)^2 \quad (2.61)$$

Mentre l'energia di deformazione dell'intera trave si ottiene integrando la (2.61) sull'intero volume della trave

$$\Phi_V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N}{EA} l + \frac{M_x^2}{EI_x^2} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_y^2}{EI_y^2} l \right) \quad (2.62)$$

2.2.5 Presso-flessione (o tenso-flessione) retta

2.2.5.1 Rappresentazione dello stato tensionale

Quando il centro di sollecitazione C è situato su un asse principale d'inerzia della sezione, cioè quando $X_c=0$, oppure $Y_c=0$, in questo caso la sollecitazione di sforzo normale eccentrico risulta composta dallo sforzo assiale centrato e da una flessione retta, si è quindi in presenza di presso-flessione retta o tenso- flessione retta, quale di questi due dipende dal segno di N .

Ad esempio, se il centro di sollecitazione cade sull'asse y , $C \equiv (0, y_c)$ si ha:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y \quad (2.63)$$

Nel caso di sforzo di trazione ($N>0$), M_x vale:

$$M_x = Ne = Ny_c \quad (2.64)$$

La formula di Navier diventa così:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{Ne}{I_x} y = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{\rho_x^2} y \right) \quad (2.65)$$

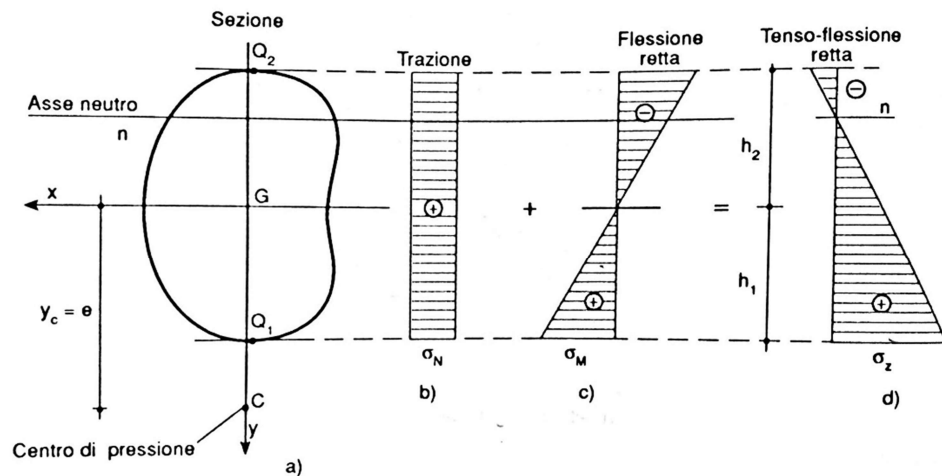


Figura 2.18 – sollecitazione tenso-flessione retta (VIOLA, 1992)

Il diagramma complessivo in figura (2.18) è ottenuto come sovrapposizione di una sollecitazione per sforzo assiale centrato e di una sollecitazione per flessione retta sull'asse x.

2.2.5.2 Determinazione dell'asse neutro

L'equazione dell'asse neutro per la tenso-flessione si ricava ponendo la (2.65) uguale a zero.

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{\rho_x^2} y \right) = 0 \quad (2.66)$$

Da ciò si ricava:

$$y = -\frac{\rho_x^2}{e} = -\frac{\rho_x^2}{y_c} \quad (2.67)$$

La (2.67) rappresenta l'equazione di una retta, antipolare del centro di sollecitazione $C \equiv (0, y_c)$, è parallela all'asse x ed è situata dalla parte opposta di C rispetto al baricentro G della sezione.

Alcune considerazioni:

- Se il centro di pressione C si avvicina al baricentro, y_c si riduce e, quindi, $\frac{\rho_x^2}{y_c}$ aumenta. Il che significa che l'asse neutro n si allontana da G della sezione. Quando invece C si allontana da G, la retta n si accosta al baricentro.
- Quando il centro di sollecitazione C coincide con il baricentro G, ossia $y_c = e = 0$, la (2.74) ci dice che l'asse neutro è a distanza infinita da G.
Cioè, per $C \equiv G$ la sollecitazione si riduce allo sforzo normale semplice, che genera uno stato di tensione uniforme nella sezione.

- Se il centro di pressione C si allontana infinitamente da G, ossia:

$$\overline{GC} = e = y_c \rightarrow \infty$$

Allora $y=0$. Quindi l'asse neutro coincide con x, cioè la sollecitazione si riduce ad una flessione retta.

* È facile capire, da quanto detto che il caso di forza normale eccentrica, come sarà il campo di spostamento e deformazione in questo caso (ovviamente si ottiene con una sovrapposizione degli effetti di uno sforzo normale centrato e una flessione retta e non una deviata).

