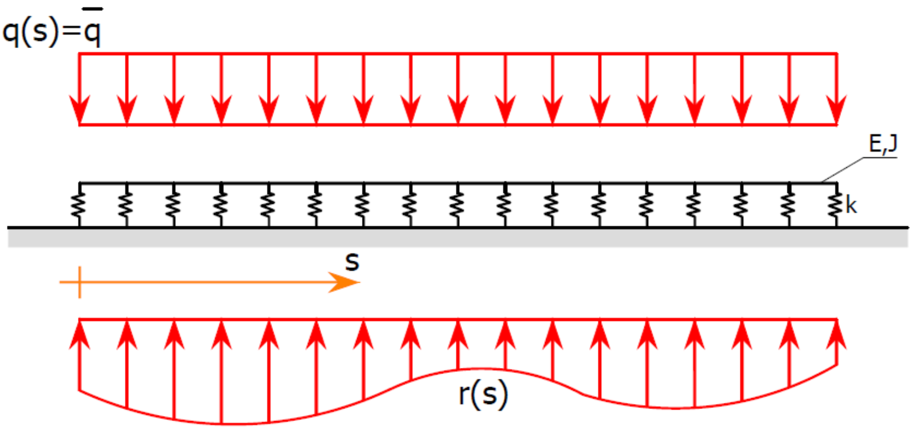
SOLUZIONE ESERCITAZIONE 1

-Soluzione esatta (linea elastica)

Prima di passare alla soluzione dell'esercitazione in esame, vediamo come è possibile impostare il problema da un punto di vista teorico:



Equazione della linea elastica:

$$EJv(s)'''' = q^*(s)$$

dove $q^*(s)$ rappresenta il carico distribuito lungo l'asse della trave, nel caso in esame è possibile esprimerlo come:

$$q^* = \bar{q} - r(s)$$

da cui segue:

$$EJv(s)'''' = \bar{q} - r(s)$$

dove $r(s)$ rappresenta la reazione del terreno che per l'ipotesi di Winkler può essere espressa come:

$$r(s) = kBv(s)$$

dove k rappresenta la costante di sottofondo e B rappresenta la larghezza della trave a contatto con il suolo.

$$EJv(s)'''' = \bar{q} - kBv(s)$$

$$v(s)'''' + \frac{kB}{EJ}v(s) - \frac{1}{EJ}\bar{q} = 0$$

$$v(s)'''' + 4\frac{kB}{4EJ}v(s) - \frac{4}{kB}\frac{kB}{4EJ}\,\bar{q} = 0$$

Tramite la seguente assunzione:

$$\alpha^4 = \frac{kB}{4EJ}$$

possiamo riscrivere l'equazione della linea elastica nel seguente modo:

$$v(s)'''' + 4\alpha^4 v(s) - 4\alpha^4\frac{\bar{q}}{kB} = 0$$

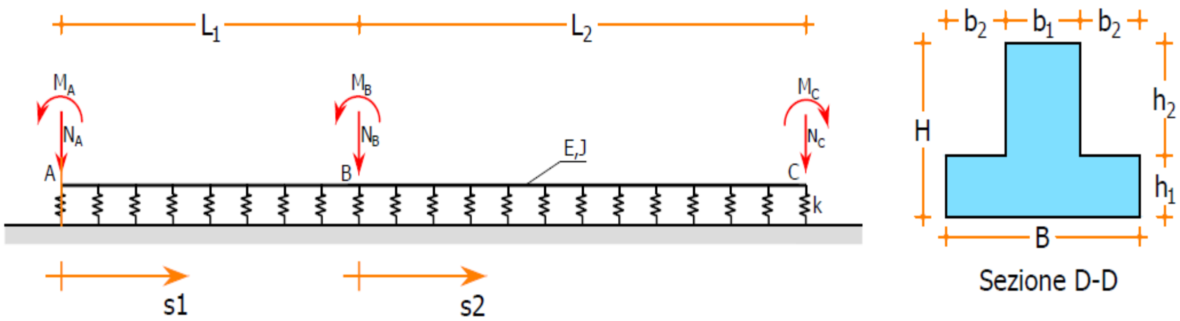
$$\boxed{v(s)'''' + 4\alpha^4\left[v(s) - \frac{\bar{q}}{kB}\right] = 0}$$

L'integrale generale può essere espresso nel seguente modo:

$$v(s) = \frac{\bar{q}}{kB} + A\,e^{\alpha s}sin(\alpha s) + B\,e^{\alpha s}cos(\alpha s) + C\,e^{-\alpha s}sin(\alpha s) + D\,e^{-\alpha s}cos(\alpha s)$$

Per determinare A, B, C e D devono essere utilizzate 4 condizioni al contorno.

Vediamo ora come specializzare quanto appena visto per risolvere l'esercitazione assegnata.



La struttura in esame è schematizzata come trave elastica su suolo alla Winkler, il peso proprio è schematizzato come carico uniformemente distribuito ($\bar{q}$).

-Tratto $s_1 = (0\,, L_1)$

$$EJv_1''''(s_1) + 4\alpha^4\left[v(s_1) - \frac{\bar{q}}{kB}\right] = 0$$

$$v_1(s_1) = \frac{\bar{q}}{kB} + A\,e^{\alpha s_1}sin(\alpha s_1) + B\,e^{\alpha s_1}cos(\alpha s_1) + C\,e^{-\alpha s_1}sin(\alpha s_1) + D\,e^{-\alpha s_1}cos(\alpha s_1)$$

-Tratto $s_2 = (0\,, L_2)$

$$EJv_2''''(s_2) + 4\alpha^4\left[v(s_2) - \frac{\overline{q}}{kB}\right] = 0$$

$$v_2(s_2) = \frac{\bar{q}}{kB} + E\, e^{\alpha s_2} sin(\alpha s_2) + F\, e^{\alpha s_2} cos(\alpha s_2) + G\, e^{-\alpha s_2} sin(\alpha s_2) + H\, e^{-\alpha s_2} cos(\alpha s_2)$$

In questo caso le equazioni al bordo necessarie per risolvere il problema sono 8:

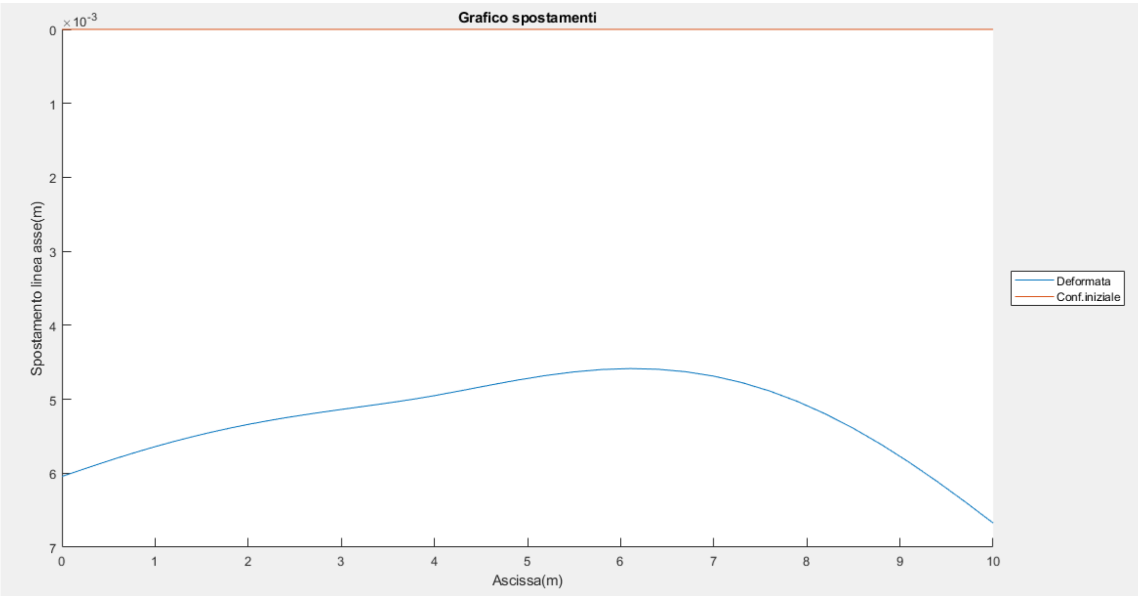
$N_A + T(s_1 = 0) = 0 \rightarrow EJv_1'''(0) = N_A$
$M_A + M(s_1 = 0) = 0 \rightarrow EJv_1''(0) = M_A$
$N_C - T(s_2 = L_2) = 0 \rightarrow EJv_2'''(L_2) = -N_C$
$M_A + M(s_2 = L_2) = 0 \rightarrow EJv_2''(L_2) = M_C$
$v_1(s_1 = L_1) = v_2(s_2 = 0)$
$v_1{}'(s_1 = L_1) = v_2{}'(s_2 = 0)$
$T(s_1 = L_1) - T(s_2 = 0) - N_B = 0 \rightarrow EJ[v_2'''(0) - v_1'''(L_1)] = N_B$
$M(s_1 = L_1) - M(s_2 = 0) - M_B = 0 \rightarrow EJ[v_2''(0) - v_1''(L_1)] = M_B$

Risolvendo il sistema di 8 equazioni in 8 incognite è possibile ricavare le funzioni dello spostamento per i due tratti in esame.
Noto lo spostamento il problema è risolto in quanto le caratteristiche della sollecitazione possono essere ricavate tramite le seguenti relazioni.

$$T(s_1) = -EJ\; v_1'''(s_1) \qquad\qquad M(s_1) = -EJ\; v_1''(s_1)$$

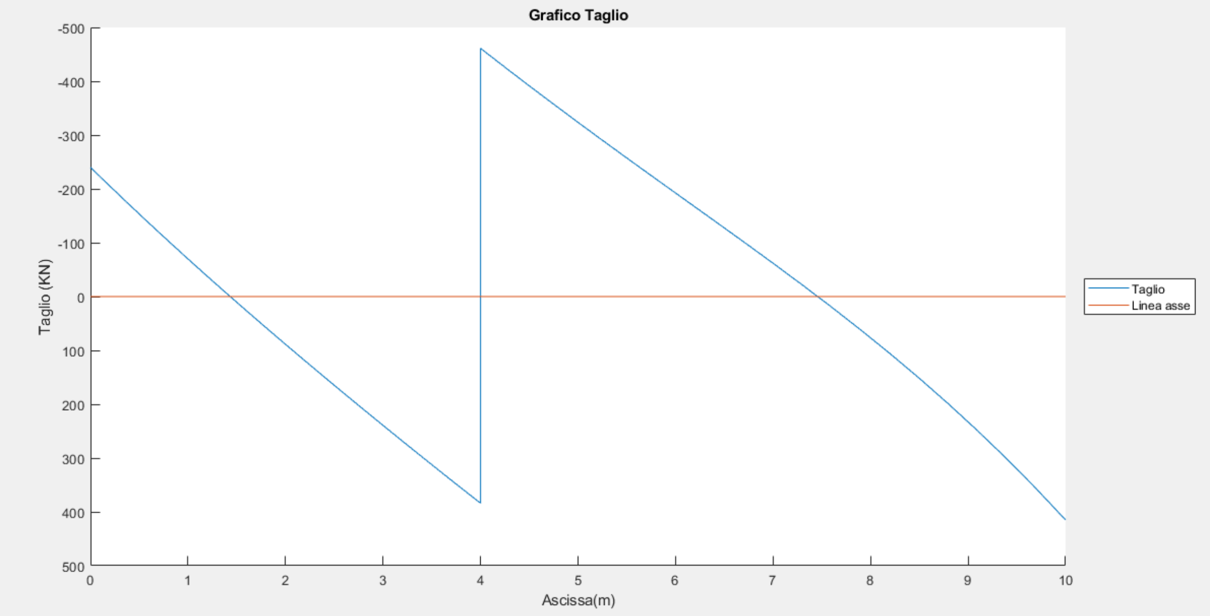
$$T(s_2) = -EJ\; v_2'''(s_2) \qquad\qquad M(s_2) = -EJ\; v_2''(s_2)$$

I calcoli, vista la loro complessità, sono stati eseguiti con il software di calcolo MATLAB.
Per lo spostamento è stato ottenuto il seguente grafico:

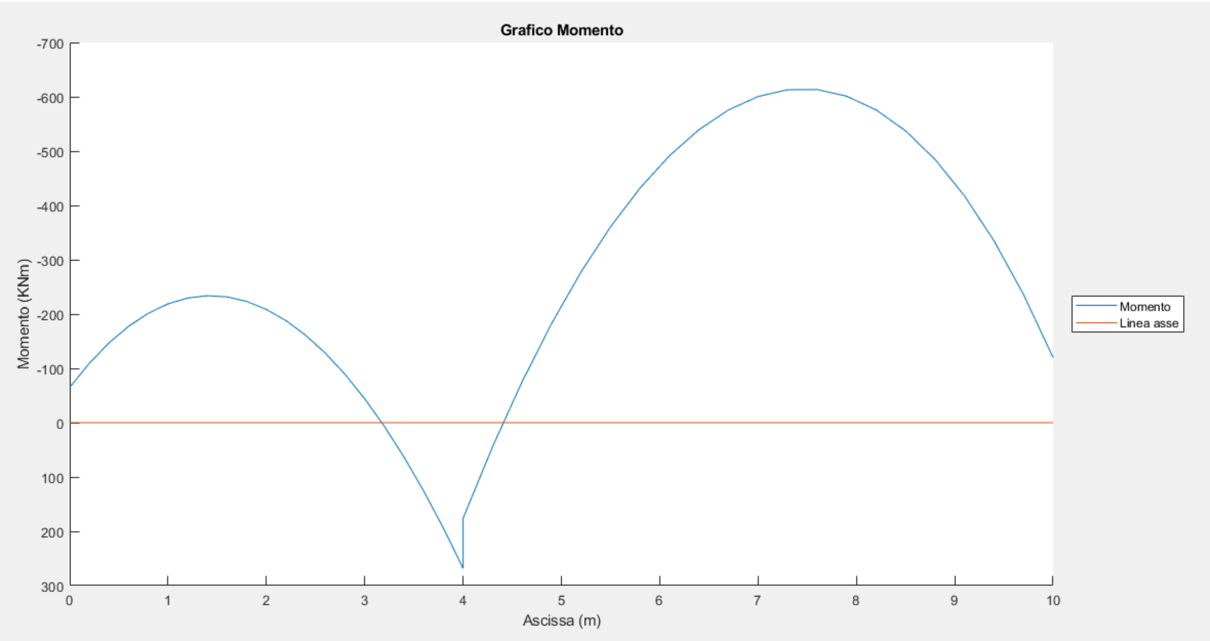


$v_A(s_1 = 0) = 6{,}04\; mm \quad v_B(s_1 = L_1; s_2 = 0) = 4{,}95 mm \quad v_C(s_2 = L_2) = 6{,}67\; mm$

In seguito, sono riportati i grafici di Taglio e Momento lungo l'asse della trave:



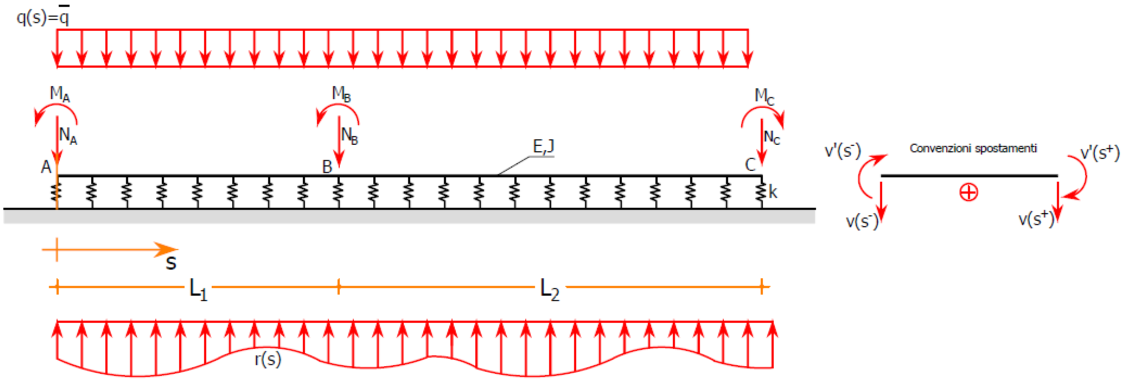
$T_A = -240\ KN$ $T_B^- = -461{,}1\ KN$ $T_B^+ = 383{,}9\ KN$ $T_C = 415\ KN$



$M_A = -65\ KNm$ $M_B^- = 268{,}1\ KNm$ $M_B^+ = 176{,}1\ KNm$ $M_C = -120\ KNm$

-Soluzione con Rayleigh-Ritz

Per la soluzione viene fatto riferimento alla seguente figura:



Il metodo di Rayleigh-Ritz è fondato sul Teorema della minima energia potenziale totale:

$$V = U - W \rightarrow Equilibrio \rightarrow \nabla V = 0$$

V: Energia potenziale totale
U: Energia di deformazione elastica
W: Lavoro virtuale dei carichi

Per il problema in esame possiamo scrivere:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EJ\, \chi(s)^2 ds + \int_0^L \frac{1}{2}\, k\, v(s)^2 ds = \int_0^L \frac{1}{2} EJ[-v''(s)^2]ds + \int_0^L \frac{1}{2}\, k\, v(s)^2 ds$$

$$W = \sum_i N_i\, v(s_i) + \sum_i M_i\, v'^{(s_i)} + \int_0^L q\, v(s)ds$$
$$= N_A v(0) + N_B v(L_1) + N_C v(L_2) - M_A v'^{(0)} - M_B v'(L_1) + M_C v'(L_2)$$

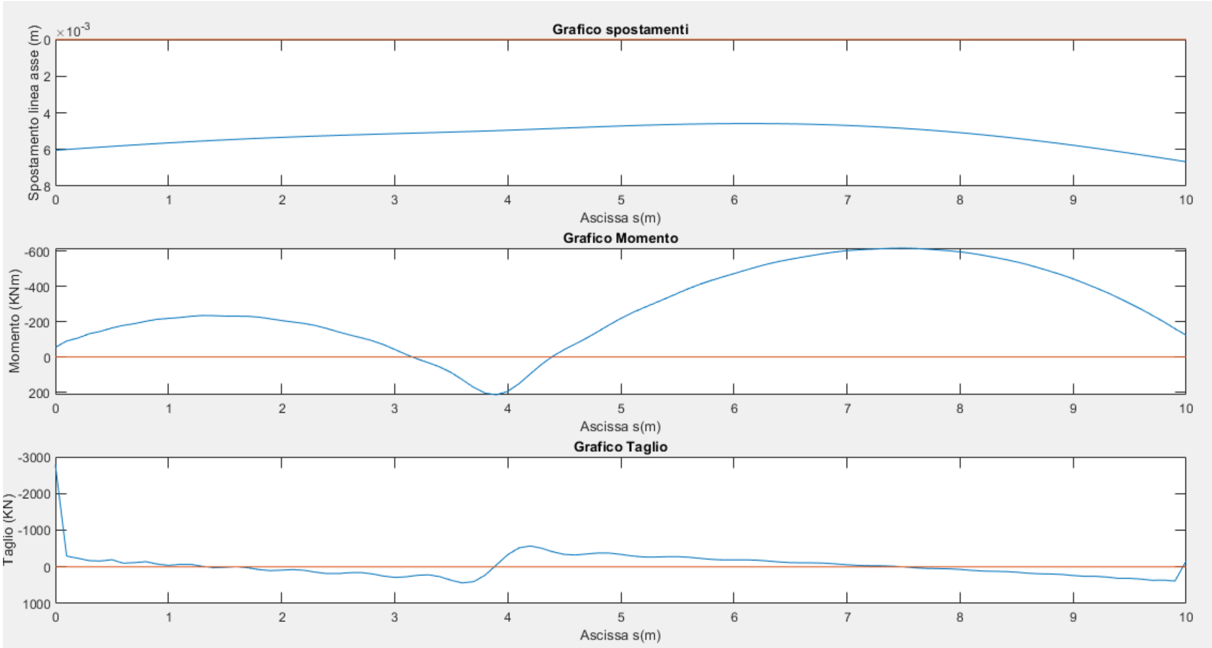
Per discretizzare il problema continuo è necessario approssimare le funzioni di spostamento nel seguente modo:

$$v(s) \cong \sum_i c_i\, \varphi_i(s)$$

Le funzioni $\varphi_i(s)$vengono scelte in modo arbitrario, nella scelta bisogna prestare attenzione a scegliere funzioni linearmente indipendenti e che rispettino le condizioni essenziali del problema.
Nel caso in esame è importante scegliere le $\varphi_i(s)$ in modo che non si annullino $v(s)$ e $v'(s)$ in corrispondenza dei punti di applicazione dei carichi altrimenti si perderebbe la dipendenza da questi nella soluzione.
Le funzioni scelte sono del tipo:

$$\varphi_i(s) = s^{i-1} \qquad i = 1, \dots \dots, n$$

Imponendo la condizione per cui $\nabla V = 0$ si ottengono le incognite c_i tramite cui è possibile ricavare il valore di $v(s)$ approssimato.
Implementando il problema sul software di calcolo MATLAB con n=50 si ottengono i seguenti grafici: ???????????



$$v_A(s = 0) = 6{,}04\ mm \quad v_B(s = L_1;) = 4{,}94mm \quad v_C(s = L_2) = 6{,}67\ mm$$

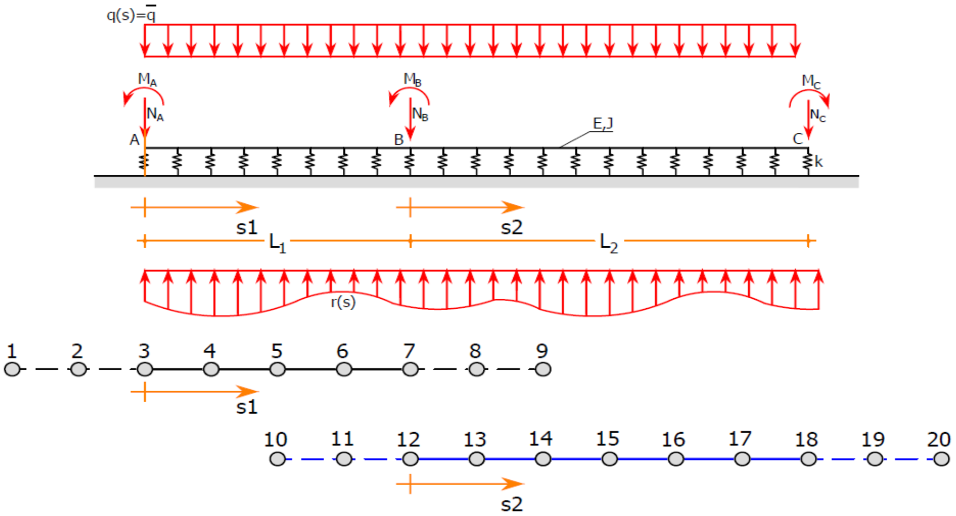
-Soluzione con le differenze finite

Il metodo alle differenze finite consiste nel sostituire la derivata di una funzione, definita come limite del rapporto incrementale, con il rapporto incrementale stesso.
Tramite questo metodo è possibile approssimare le derivate della funzione in un generico punto del dominio ed ottenere le seguenti formule:

$$v_i' = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta s} \qquad v_i'' = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta s^2}$$

$$v_i''' = \frac{v_{i+2} - 2v_{i+1} + 2v_{i-1} - v_{i-2}}{2\Delta s^3} \qquad v_i'''' = \frac{v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}}{\Delta s^4}$$

Con riferimento alla figura seguente vediamo come applicare il metodo al caso in esame.



Possiamo subito notare come si renda necessario estendere il dominio per poter scrivere le condizioni al bordo.

-Ascissa s_1:

$$v''''(s1) + 4\alpha^4 v'(s_1) = \frac{4\alpha^4}{k\ B}\ \bar{q}$$

Per un generico punto (i)appartenente alla trave di ascissa s_2 possiamo scrivere:

$$\frac{v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}}{\Delta s_1^4} + 4\alpha^4 v_i = \frac{4\alpha^4}{k\ B}\ \bar{q}$$

Δs_1: lunghezza generico tratto della trave di ascissa s_1
Se indichiamo con n_1 il numero di punti della trave di ascissa s_1 possiamo scrivere:

$$\Delta s_1 = \frac{L_1}{n_1 - 1}$$

-Ascissa s_2:

$$v''''(s_2) + 4\alpha^4 v'(s_2) = \frac{4\alpha^4}{k\ B}\ \bar{q}$$

Per un generico punto (i)appartenente alla trave di ascissa s_2 possiamo scrivere:

$$\frac{v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}}{\Delta s_2^4} + 4\alpha^4 v_i = \frac{4\alpha^4}{k\ B}\ \bar{q}$$

Δs_2: lunghezza generico tratto della trave di ascissa s_2
Se indichiamo con n_1 il numero di punti della trave di ascissa s_2 possiamo scrivere:

$$\Delta s_2 = \frac{L_2}{n_2 - 1}$$

-Condizioni al bordo

1) $EJv_3''' = N_A \rightarrow \dfrac{v_5 - 2v_4 + 2v_2 - v_1}{2\ \Delta s_1^3} = \dfrac{N_A}{EJ}$

2) $EJv_3'' = M_A \rightarrow \dfrac{v_4 - 2v_3 + v_2}{\Delta s_1^2} = \dfrac{M_A}{EJ}$

3) $EJv_{18}''' = -N_C \rightarrow \dfrac{v_{20} - 2v_{19} + 2v_{17} - v_{16}}{2\ \Delta s_2^3} = \dfrac{-N_C}{EJ}$

4) $EJv_{18}'' = M_C \rightarrow \dfrac{v_{19} - 2v_{18} + v_{17}}{\Delta s_2^2} = \dfrac{M_C}{EJ}$

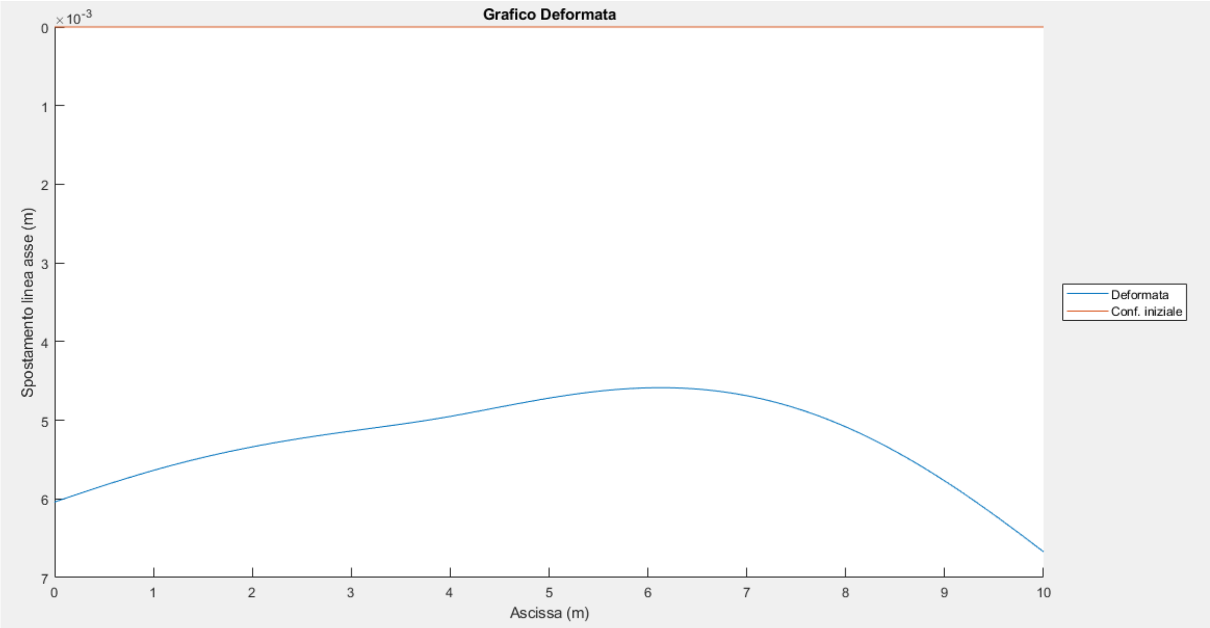
5) $EJ(v_{12}''' - v_7''') = N_B \rightarrow \dfrac{v_{14} - 2v_{13} + 2v_{11} - v_{10}}{2\ \Delta s_2^3} - \dfrac{v_9 - 2v_8 + 2v_6 - v_5}{2\ \Delta s_1^3} = \dfrac{N_B}{EJ}$

6) $EJ(v_{12}'' - v_7'') = M_B \rightarrow \dfrac{v_{13} - 2v_{12} + v_{11}}{\Delta s_2^2} - \dfrac{v_8 - 2v_7 + v_6}{\Delta s_1^2} = \dfrac{M_B}{EJ}$

7) $v_7 = v_{12}$

8) $\dfrac{v_8 - v_6}{2\Delta s_1} = \dfrac{v_{13} - v_{11}}{2\Delta s_2}$

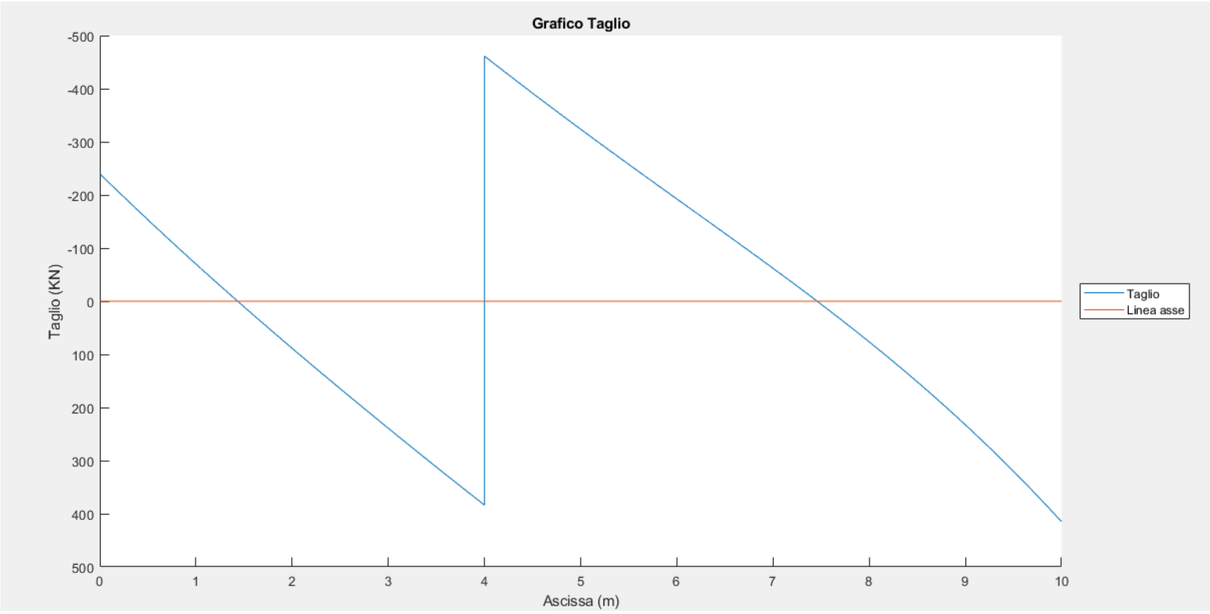
Con riferimento alla figura soprastante dove $n_1 = 5$ ed $n_2 = 7$, considerando le 8 condizioni al bordo otteniamo un sistema di 20 equazioni in 20 incognite dove le incognite sono rappresentate dagli spostamenti dei nodi.
Implementando il sistema sul software MATLAB e considerando $n_1 = 100$ ed $n_2 = 150$ otteniamo il seguente grafico degli spostamenti:



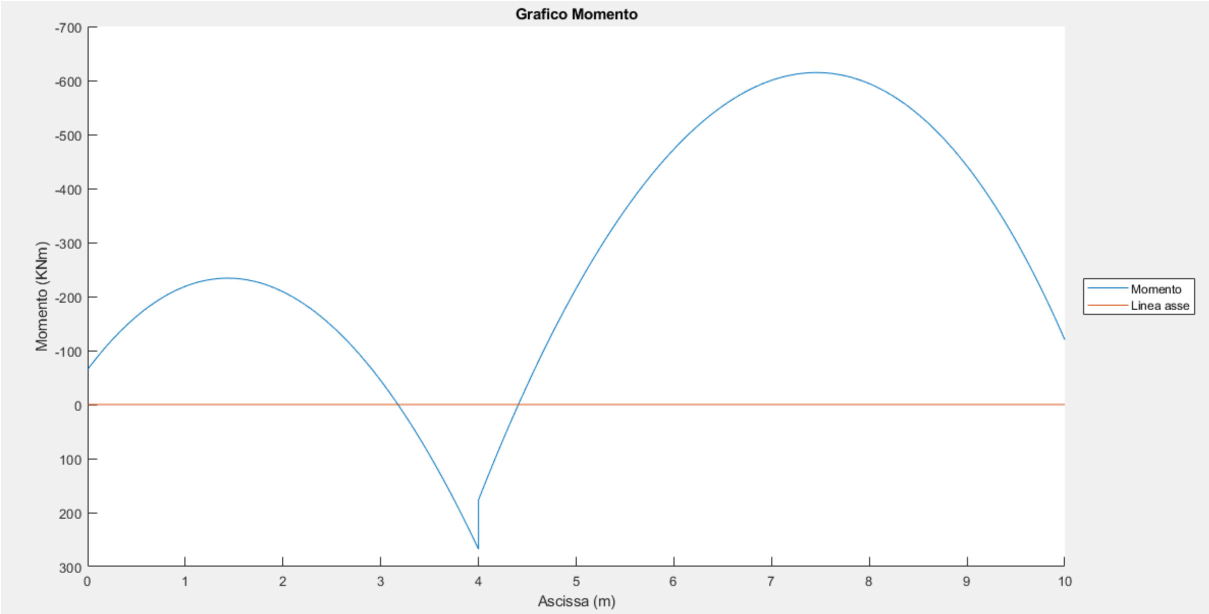
$$v_A(s=0)=6{,}04\ mm \quad v_B(s=L_1;)=4{,}95mm \quad v_C(s=L_2)=6{,}67$$

In questo caso vediamo che i risultati sono sostanzialmente coincidenti con quelli della soluzione esatta.

In seguito, sono riportati i grafici di Taglio e Momento lungo l'asse della trave:



$$T_A=-240\ KN \quad T_B^-=-461{,}3\ KN \quad T_B^+=383{,}7\ KN \quad T_C=415\ KN$$



$M_A = -65\ KNm$ $\quad M_B^- = 176{,}8\ KNm$ $\quad M_B^+ = 267{,}7\ KNm$ $\quad M_C = -120\ KNm$