# Capitolo 3

# CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLE SEZIONI

## 3.1 Momenti statici o momenti del primo ordine

Questa proprietà rappresenta la distribuzione della forma dell'area presa in considerazione in relazione ad un certo asse, si definisce *momento statico* $S_x$ *della sezione A rispetto all'asse x la quantità:*

$$S_x = \int_A y dA \tag{3.1}$$

Analogamente si definisce momento statico $S_y$ della sezione:

$$S_y = \int_A x dA \tag{3.2}$$

Poiché i momenti statici sono definiti come integrali, essi godono della proprietà additiva, ossia il momento statico della sezione A rispetto a un'asse è la somma dei momenti statici $A_i$(i=1,h) componenti la sezione:

$$S_x = \int_A y dA = \sum_1^h i \int_{A_i} y dA = \sum_i^h i S_{xi} \tag{3.3}$$

$$S_y = \int_A x dA = \sum_1^h i \int_{A_i} x dA = \sum_i^h i S_{yi} \tag{3.4}$$

## 3.2 Baricentro

In fisica il baricentro è il punto al quale è applicata la forza risultante di tutte le forze peso parallele, può coincidere con il centro di massa di un corpo se questo corpo ha densità uniforme.

Nel baricentro G della sezione A i momenti statici rispetto a una qualunque coppia d'assi avente origine in tale punto sono nulli.

Gli assi aventi origine nel baricentro vengono nominati *assi baricentrici*.

Per determinare il baricentro G di una figura piana A è sufficiente valutare i momenti statici $S'_x, S'_y$ rispetto a un sistema di assi arbitrari $(x', y')$ e quindi ricercare il sistema d'assi (x,y) traslato delle coordinate del baricentro $(x_G, y_G)$ rispetto al quale i momenti statici $S_x$ ed $S_y$ sono nulli.

$$S'_x = y_G A \qquad S'_y = x_G A \tag{3.5}$$

Che forniscono le coordinate di G rispetto agli assi $(x', y')$:

$$y_G = \frac{S'_x}{A} \qquad x_G = \frac{S'_y}{A} \tag{3.6}$$

## 3.3 Momenti d'inerzia o momenti del secondo ordine

Si definisce *momento d'inerzia* o *momento del secondo ordine* $I_x$ della sezione A, rispetto all'asse x la quantità:

$$I_x = \int_A y^2 dA \tag{3.7}$$

E momento d'inerzia $I_y$ la quantità:

$$I_y = \int_A x^2 dA \tag{3.8}$$

Inoltre si definisce *momento centrifugo* la quantità:

$$I_{xy} = \int_A xy dA \tag{3.9}$$

E *momento d'inerzia polare*:

$$I_0 = I_x + I_y = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A r^2 dA \tag{3.10}$$

Dove r è la distanza del generico punto dall'origine.

### 3.3.1 *Trasformazione dei momenti d'inerzia*

- Con la traslazione degli assi

Dal teorema di Huyghens-Steiner i momenti d'inerzia di un sistema di assi x', y' traslato rispetto agli assi originari x,y,di una quantità $d_x$ e $d_y$, si ha:

$$I_x^{'} = I_x + Ad_y^2 \tag{3.11}$$

$$I_y^{'} = I_y + Ad_x^2 \tag{3.12}$$

$$I_{xy}^{'} = I_{xy} + Ad_x d_y \tag{3.13}$$

i secondi termini si chiamano *momenti di trasporto*.

- Con la rotazione degli assi

Ruotando il sistema di assi x', y' rispetto agli assi originari x,y, si ha:

$$I_x^{'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \tag{3.11}$$

$$I_y^{'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \tag{3.12}$$

$$I_{xy}^{'} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \tag{3.13}$$

I momenti d'inerzia si trasformano come il tensore d'inerzia avente la proprietà di simmetria ed è definito positivo.

$$J = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Il momento polare è il primo invariante del tensore degli sforzi:

$$I_0 = I_{xx} + I_{yy},\ I_0 = I_0^{'} \tag{3.15}$$

Si definiscono *assi principali d'inerzia* di una sezione rispetto a un punto O scelto come origine agli assi coordinati rispetto ai quali il momento centrifugo è nullo.

Se di una data figura esiste l'asse di simmetria, allora tale asse ed il suo ortogonale sono assi principali d'inerzia.

I momenti riferiti agli assi principali sono denominati *momenti principali d'inerzia*.

Noti i momenti d'inerzia di una sezione con origine in O, la rotazione degli assi principali d'inerzia x', y' rispetto agli assi originari x,y è espressa dall'angolo $\theta$ che annulla il momento centrifugo $I_{xy}^{'}$.

Nel caso più generale in cui $I_x \neq I_y$ ponendo $I_{xy}^{'} = 0$ si ha:

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left[\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right] \qquad (3.16)$$

$$\text{Se } I_x = I_y \rightarrow \theta = 45°$$

## 3.4 Ellisse centrale d'inerzia

Si definiscono *raggi principali d'inerzia* le grandezze:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad (3.17)$$

Riferite agli assi baricentrici principali d'inerzia della sezione x,y. Tali grandezze risultano dimensionalmente lunghezze e possono essere viste come i semidiametri di una ellisse centrale d'inerzia della sezione.

Il semidiametro $\rho_x$ si pone sull'asse y mentre il semidiametro $\rho_y$ sull'asse x (fig. 3.1).

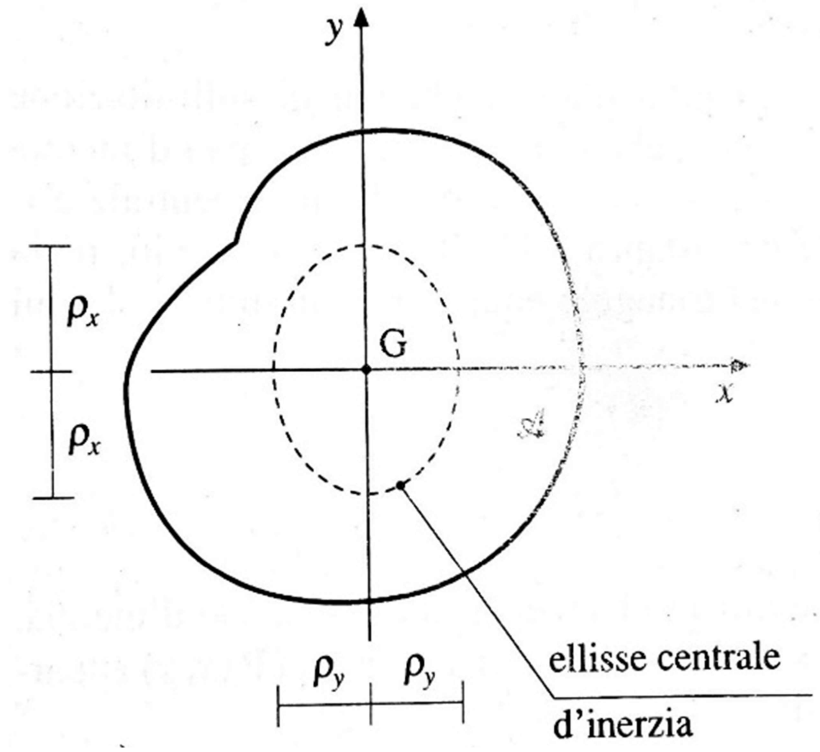


**Figura 3.1 –ellisse centrale d'inerzia in una sezione - (GAMBAROTTA, et al*, 2003*)**

È possibile anche definire gli *assi coniugati x', y'* rispetto all'ellisse centrale d'inerzia, questi assi sono formati da:

una retta x' passante per il baricentro e da una retta y' che si ottiene unendo il baricentro G con il punto P in cui l'asse x'', parallelo a x', è tangente all'ellisse (figura 3.2).

di tale assi $\rho_x^{'}$ e $\rho_y^{'}$ si definiscono semidiametri coniugati.

Inoltre, se $\rho_x = \rho_y$ l'ellisse centrale d'inerzia degenera in una circonferenza

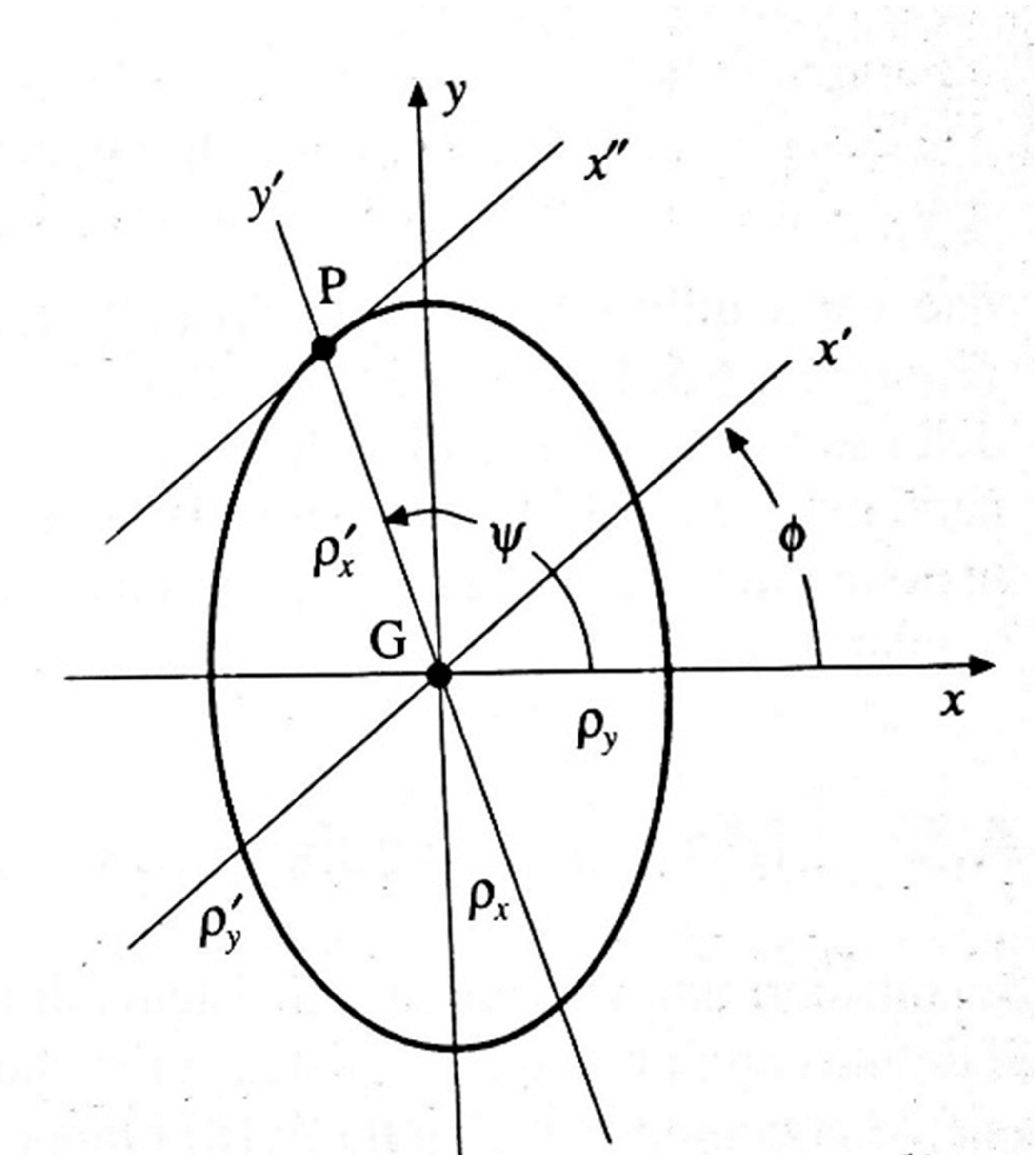


**Figura 3.2 –diametri coniugati dell'ellisse - (GAMBAROTTA, et al *, 2003*)**

Grazie all'ellisse centrale d'inerzia è facile determinare l'asse neutro anche in particolari condizioni di sollecitazioni composte come visto nel capitolo 2

## 3.5 Nocciolo centrale d’inerzia

Il nocciolo centrale d’inerzia è il luogo dei *centri relativi* alle rette che tangono la sezione assegnata senza tagliarla.

Si definisce centro relativo il baricentro dei singoli momenti statici che compongono il nostro solido.

Noto l’ellisse centrale d’inerzia sarà facile tracciare il contorno del nocciolo centrale d’inerzia che è il luogo dei punti degli *antipoli* delle rette radenti la sezione, cioè quelle rette che tangono la sezione senza tagliarla.

“si chiama nocciolo centrale d’inerzia una figura, interna ad un’area, il cui contorno è il luogo degli antipoli rispetto all’ellisse centrale delle rette che inviluppano la figura senza tagliarla.”

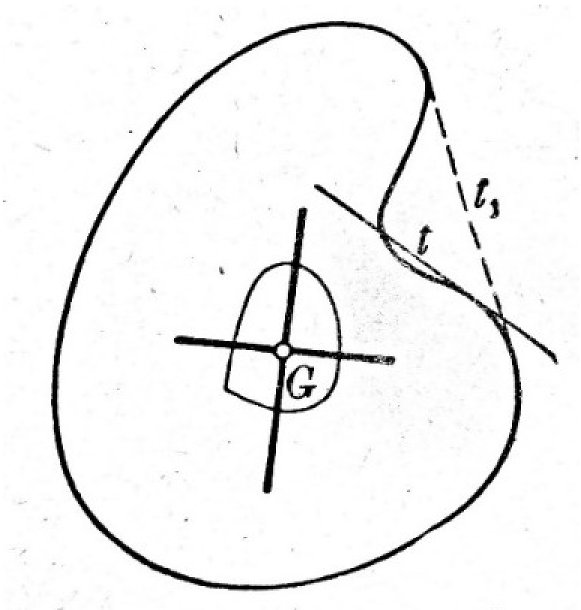


**Figura 3.4- la retta $t_1$ tange la sezione senza tagliarla, al contrario di t- (BELLUZZI, *1941*)**

Dalle proprietà di polarità d'inerzia discendono delle regole che agevolano la costruzione del nocciolo:

- Se il contorno della sezione presenta un vertice allora in corrispondenza di tale vertice il nocciolo ha un tratto rettilineo.
- Se il contorno della sezione presenta un tratto rettilineo, allora in corrispondenza di tale tratto il contorno del nocciolo presenterà un vertice.
- Se la sezione è un poligono allora lo è anche il nocciolo ed ha lo stesso numero di lati.
- Il nocciolo è sempre convesso
- Il nocciolo ha le stesse proprietà di simmetria della sezione.

Se "a" è una retta tangente alla figura data, l'antipolo A è sul diametro $y_o$ coniugato di a.
Se y' è la distanza del punto P' di contatto dal diametro $x_o$ parallela alla retta tangente misurata nella direzione $y_o$, il raggio vettore GA= W' del nocciolo disteso su $y_o$ si ricava da:

$$w' = \frac{\rho_{x_0}^2}{y'} \qquad w'' = \frac{\rho_{x_0}^2}{y''} \tag{3.18}$$

Le (3.18) rappresentano i massimi del nocciolo in valore assoluto (fig. 3.5)

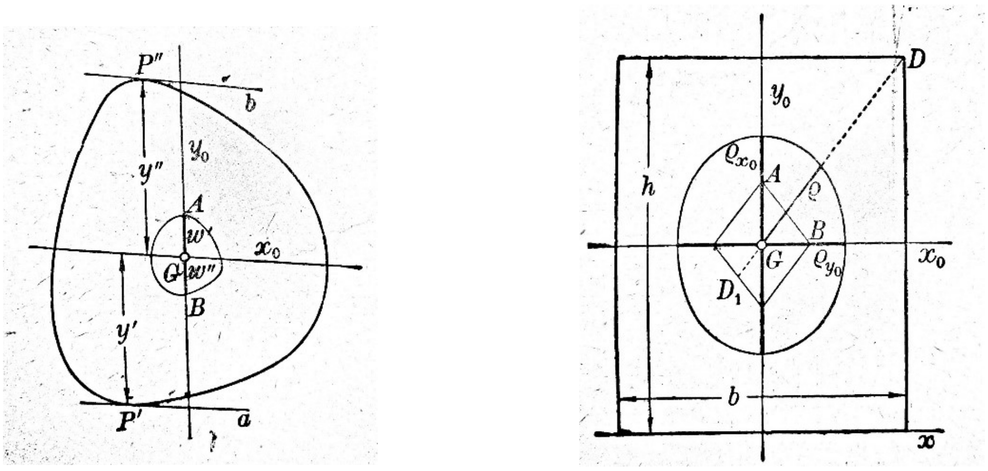


**Figura 3.5 – rappresentazione del nocciolo centrale d'inerzia - (BELLUZZI, *1941*)**

La conoscenza del nocciolo centrale d'inerzia è interessante quando si parla di sforzo normale eccentrico, esso ci permette di conoscere l'andamento qualitativo delle tensioni normali, come visto nel capitolo 2.

## 3.6 Modulo di resistenza

Si definiscono i moduli di resistenza rispetto agli assi principali d'inerzia di un punto P appartenente al contorno della figura, i rapporti:

$$W_x = \frac{I_x}{y_p} \qquad W_y = \frac{I_y}{x_p} \tag{3.19}$$

La dimensione del modulo di resistenza è $L^3$.

I moduli di resistenza rispetto ad ogni asse baricentrico sono proporzionali ai raggi vettori w del nocciolo centrale d'inerzia distesi sul diametro coniugato.

Questo perché se si pone:

$$I_x = A \cdot \rho_x^2 \qquad I_y = A \cdot \rho_y^2 \tag{3.20}$$

Si ha:

$$W_x = A \cdot w_x \qquad W_y = A \cdot w_y \tag{3.21}$$