Teoria delle strutture - PROBLEMA 6

```
% Arco di forma parabolica schematizzato come una trave flessibile (e inestensibile)
% ad asse curvilineo
% di rigidezza flessionale EJ.
```

Clear workspace and close any open windows

```
clear all
close all
```

SOLUZIONE PUNTO 1

```
% 1) Mostrare che le sollecitazioni nell’arco, nel caso in cui sia soggetto esclusivamente al
% carico distribuito d’intensità uniforme p, mostrato nella figura a sinistra, si riducono al solo
% sforzo normale, variabile lungo la linea d’asse. Determinare l’andamento dello sforzo
% normale.
```

SIMBOLICO

```
syms L a b c z real
assume(L>0 )
f=L/2;
% assumo f come un parametro che dipende da L
% altrimenti il software impiega troppo tempo a risolvere eventuali integrali
```

Determino l'equazione della nostra parabola

```
F(z)=a*z^2+b*z+c % Equazione della parabola
```

F(z) = $a\,z^2+b\,z+c$

```
% SISTEMA D'EQUAZIONI PER TROVARE LA FUNZIONE DELLA PARABOLA DATA
delta=b^2-4*a*c;
% fisso che la cordinata x del vertice della parabloa passa per un determinato punto
E1=-b/(2*a)==L/2;
% fisso che la cordinata y del vertice della parabloa passa per un determinato punto
E2=-delta/(4*a)==f;
% fisso che la èarabola passa per punto A ''il nostro vincolo''
E3=F(0)==0;
% Risolvo il sistema
S=solve([E1 E2 E3],[a b c]);
a_1=S.a(1)
```

a_1 =

$$-\frac{2}{L}$$

```
b_1=S.b(1)
```

b_1 = 2

```
c_1=S.c(1)
```

c_1 = 0

```
% L'equazione della parabola diventa:
G(z)=simplify(subs(F,[a b c],[a_1 b_1 c_1]))
```

G(z) =

$$2\,z-\frac{2\,z^2}{L}$$

Derivate della funzione parabolica

```
D1=simplify(diff(G,z)) % Derivata prima
```

D1(z) =

$$2-\frac{4\,z}{L}$$

```
D2=simplify(diff(D1,z)) % Derivata seconda
```

D2(z) =

$$-\frac{4}{L}$$

PARAMETRIZZAZIONE DELLA CURVA

```
tan=D1              % porto tang_θ in funzione di z
```

tan(z) =

$$2-\frac{4\,z}{L}$$

```
ds=simplify(sqrt(1+D1^2)) % porto ds in funzione di z
```

ds(z) =

$$\sqrt{{\left(\frac{4\,z}{L}-2\right)}^2 +1}$$

```
SIN(z)=D1/ds        % porto sin_θ in funzione di z
```

SIN(z) =

$$-\frac{\frac{4\,z}{L}-2}{\sqrt{{\left(\frac{4\,z}{L}-2\right)}^2 +1}}$$

```
COS(z)=1/ds         % porto cos_θ in funzione di z
```

COS(z) =

$$\frac{1}{\sqrt{{\left(\frac{4\,z}{L}-2\right)}^2 +1}}$$

SISTEMA FO

```
syms VA VC HA p real
% equazione alla traslazione orizzontale
E4=(VA-VC)*COS(0)-HA*SIN(0)==0
```

E4 =

$$\frac{\sqrt{5}\,\left(\mathrm{VA}-\mathrm{VC}\right)}{5}-\frac{2\,\sqrt{5}\,\mathrm{HA}}{5}=0$$

```
% equazione alla traslazione verticale
E5=L*p-HA*COS(0)-(VA +VC)*SIN(0)==0
```

E5 =

$$L\,p-\frac{\sqrt{5}\,\mathrm{HA}}{5}-\frac{2\,\sqrt{5}\,\left(\mathrm{VA}+\mathrm{VC}\right)}{5}=0$$

```
% equazione alla rotazione in A
E6=L*VC*SIN(0)-(L^2)*p/2==0;
% Risolvo il sistema
SO=solve([E4 E5 E6],[VA VC HA]);
HA0=SO.HA(1)
```

HA0 = 0

```
VA0=SO.VA(1)
```

VA0 =

$$\frac{\sqrt{5}\,L\,p}{4}$$

```
VC0=SO.VC(1)
```

VC0 =

$$\frac{\sqrt{5}\,L\,p}{4}$$

Momento in F0

```
% Momento
M0(z)=simplify(-((p*z^2)/2)+VA0*SIN(0)*(z)-VA0*COS(0)*G(z))
```

M0(z) = 0

```
% (poichè il momento è nullo , anche il taglio sarà nullo essendo T=M')
% mi riduco al caso di solo N(z)
```

SISTEMA F1

```
% equazione alla traslazione orizzontale
E7=VA*COS(0)-HA*SIN(0)-VC*COS(0)+1*SIN(0)==0;
% equazione alla traslazione verticale
E8=-VA*SIN(0)-VC*SIN(0)-HA*COS(0)-1*COS(0)==0;
% equazione alla rotazione in A
E9=VC*SIN(0)*L+1*COS(0)*L==0;
% Risolvo il sistema
S1=solve([E7 E8 E9],[VA VC HA]);
HA1=S1.HA(1)
```

HA1 = 1

```
VA1=S1.VA(1)
```

VA1 =

$$-\frac{1}{2}$$

```
VC1=S1.VC(1)
```

VC1 =

$$-\frac{1}{2}$$

Momento in F1

```
% Momento in F1
M1(z)=simplify(VA1*SIN(0)*z-VA1*COS(0)*G(z)+1*COS(0)*(z)+1*SIN(0)*G(z))
```

M1(z) =

$$\sqrt{5}\left(z-\frac{z^2}{L}\right)$$

MULLER-BRESLAU

```
syms E J X1 real
assume(E>0 & J>0)
Lv10=simplify(int(M1(z)*M0(z)/(E*J)*ds,z,0,L))
```

Lv10 = 0

```
Lv11 =int(M1(z)^2/(E*J)*ds,z,0,L);
n10 =Lv10 ; n11 =Lv11;
n1=n10+X1*n11==0;
X1=(-n10/n11)
```

X1 = 0

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

```
VAE=VA0+X1*VA1 % VA esatto
```

VAE =

$$\frac{\sqrt{5}\,L\,p}{4}$$

```
HAE=HA0+X1*HA1 % HA esatto
```

HAE = 0

CALCOLO DELLE CDS ESATTE

```
M1E=M0(z)+X1*M1(z) % Momento esatto
```

M1E = 0

```
N1E=simplify(-VAE*(COS(0))/COS(z)) % Forza normale esatta
```

N1E =

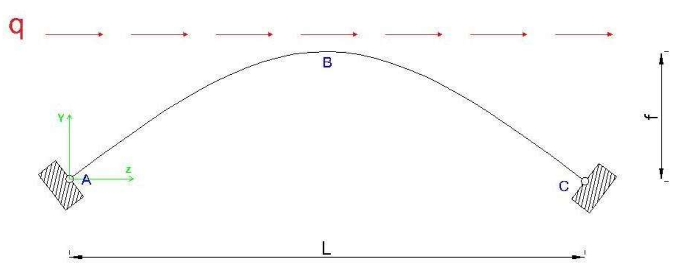
$$-\frac{L\,p\,\sqrt{\left(\frac{4\,z}{L}-2\right)^2+1}}{4}$$

SOLUZIONE PUNTO 2

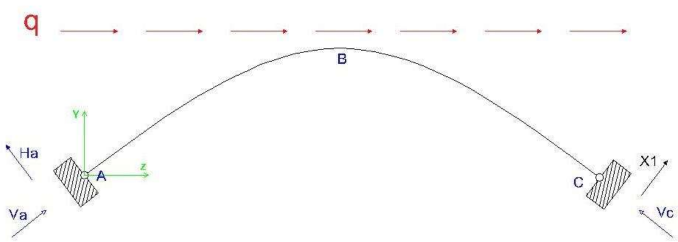
```
%2) Determinare le sollecitazioni nell’arco nel caso in cui, oltre al carico verticale p, sia
%presente anche un carico distribuito in direzione orizzontale, d’intensità pari a q

% Ora mi limito a calcolare il caso con la sola forza orizzontale,
% (poichè ho già calcolato il caso con la forza verticale)
% Posso poi usare la sovrapposizione degli effetti per ricavare la soluzione del punto 2
```

CASO 2

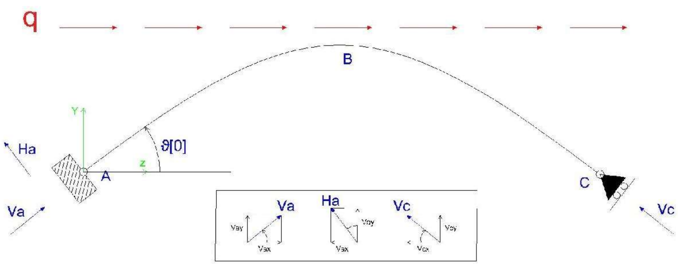


Scelta dell'incognita iperstatica



SISTEMA F0

Sistema F0




```
syms q real
assume(q>0)
% equazione alla traslazione orizzontale
E10=(VA-VC)*COS(0)-HA *SIN(0)+q*L==0;
% equazione alla traslazione verticale
E11=-HA*COS(0)-(VA +VC)*SIN(0)==0;
%  equazione alla rotazione in A
E12=L*VC*SIN(0)-q*L*f==0;
S3=solve([E10 E11 E12],[VA VC HA]);
HA2O=S3.HA(1)
```

HA2O =

$$\frac{\sqrt{5}\,L\,q}{5}$$

```
VA2O=S3.VA(1)
```

VA20 =

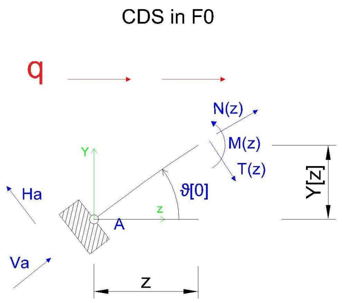
$$-\frac{7\sqrt{5}\,L\,q}{20}$$

```
VC20=S3.VC(1)
```

VC20 =

$$\frac{\sqrt{5}\,L\,q}{4}$$

Momento in F0

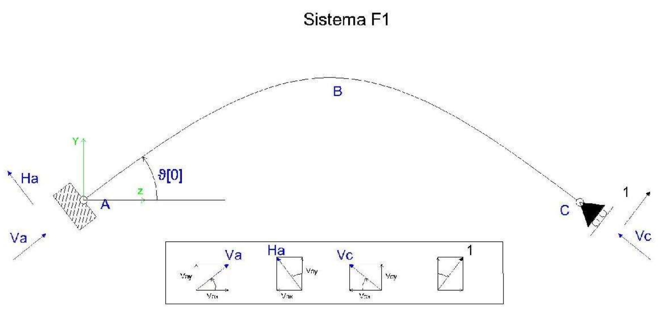



```
% Momento
M20(z)=simplify(VA20*SIN(0)*z-VA20*COS(0)*G(z)+HA20*COS(0)*z+HA20*SIN(0)*G(z)+q*z*(f-G(z)))
```

M20(z) =

$$\frac{q\,z\,(3\,L^2-7\,L\,z+4\,z^2)}{2\,L}$$

SISTEMA F1




```
% equazione alla traslazione orizzontale
E13=VA*COS(0)-HA*SIN(0)-VC*COS(0)+1*SIN(0)==0;
% equazione alla traslazione verticale
E14=-VA*SIN(0)-VC*SIN(0)-HA*COS(0)-1*COS(0)==0;
% equazione alla rotazione in A
E15=VC*SIN(0)*L+1*COS(0)*L==0;
S4=solve([E13 E14 E15],[VA VC HA]);
HA21=S3.HA(1)
```

HA21 =

$$\frac{\sqrt{5}\,L\,q}{5}$$

```
VA21=S3.VA(1)
```

VA21 =

$$-\frac{7\sqrt{5}\,L\,q}{20}$$

```
VC21=S3.VC(1)
```

VC21 =

$$\frac{\sqrt{5}\,L\,q}{4}$$

Momento in F1

```
M21(z)=simplify(VA21*SIN(0)*z-VA21*COS(0)*G(z)+1*COS(0)*z+1*SIN(0)*G(z))
```

```
M21(z) =
```

$$-\frac{z\,(8\,\sqrt{5}\,z-10\,\sqrt{5}\,L+7\,L\,q\,z)}{10\,L}$$

MULLER-BRESLAU

```
Lv210=simplify(int(M21(z)*M20(z)/(E*J)*ds,z,0,L))
```

```
Lv210 =
```

$$\frac{L^4\,q\,\left(5328\,\sqrt{5}\,\sigma_2-5328\,\sqrt{5}\,\sigma_1+2268\,\sqrt{5}\,L\,q+3423\,L\,q\,\sigma_1-3423\,L\,q\,\sigma_2+13760\right)}{983040\,\mathrm{E}\,J}$$

where

$$\sigma_1=\log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}-2)}{4}\right)$$

$$\sigma_2=\log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}+2)}{4}\right)$$

```
Lv211=simplify(int(M21(z)^2/(E*J)*ds,z,0,L))
```

```
Lv211 =
```

$$\frac{L^3\,\left(298560\,\sigma_2-298560\,\sigma_1-1718080\,L\,q+515840\,\sqrt{5}+355348\,\sqrt{5}\,L^2\,q^2-11907\,L^2\,q^2\,\sigma_1+11907\,L^2\,q^2\,\sigma_2+60144\,\sqrt{5}\,L\,q\,\sigma_1-\right.}{4915200\,\mathrm{E}\,J}$$

where

$$\sigma_1=\log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}-2)}{4}\right)$$

$$\sigma_2=\log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}+2)}{4}\right)$$

```
n210=Lv210; n211 =Lv211;
% n21=n210+X21*n211==0;
X21=simplify(-n210/n211)
```

```
X21 =
```

$$-\frac{5\,L\,q\,\left(5328\,\sqrt{5}\,\sigma_2-5328\,\sqrt{5}\,\sigma_1+2268\,\sqrt{5}\,L\,q+3423\,L\,q\,\sigma_1-3423\,L\,q\,\sigma_2+13760\right)}{298560\,\sigma_2-298560\,\sigma_1-1718080\,L\,q+515840\,\sqrt{5}+355348\,\sqrt{5}\,L^2\,q^2-11907\,L^2\,q^2\,\sigma_1+11907\,L^2\,q^2\,\sigma_2+60144\,\sqrt{5}\,L\,q\,\sigma_1-6\ldots}$$

where

$$\sigma_1=\log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}-2)}{4}\right)$$

$$\sigma_2=\log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}+2)}{4}\right)$$

REAZIONI VINCOLARI ESATTE

```
VA2E=simplify(VA20+simplify(X21*VA21)) % VA esatto
```

```
VA2E =
```

$$\frac{7\,\sqrt{5}\,L^2\,q^2\,\left(5328\,\sqrt{5}\,\sigma_2-5328\,\sqrt{5}\,\sigma_1+2268\,\sqrt{5}\,L\,q+3423\,L\,q\,\sigma_1-3423\,L\,q\,\sigma_2+13760\right)}{4\,\left(298560\,\sigma_2-298560\,\sigma_1-1718080\,L\,q+515840\,\sqrt{5}+355348\,\sqrt{5}\,L^2\,q^2-11907\,L^2\,q^2\,\sigma_1+11907\,L^2\,q^2\,\sigma_2+60144\,\sqrt{5}\,L\,q\,\sigma_1-\ldots\right.}$$

where

$$\sigma_1=\log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}-2)}{4}\right)$$

$$\sigma_2=\log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}+2)}{4}\right)$$

```
HA2E=simplify(HA20+simplify(X21*HA21)) % HA esatto
```

HA2E =

$$\frac{\sqrt{5}\,L\,q}{5}-\frac{\sqrt{5}\,L^2\,q^2\,\left(5328\,\sqrt{5}\,\sigma_2-5328\,\sqrt{5}\,\sigma_1+2268\,\sqrt{5}\,L\,q+3423\,L\,q\,\sigma_1-3423\,L\,q\,\sigma_2+13760\right)}{298560\,\sigma_2-298560\,\sigma_1-1718080\,L\,q+515840\,\sqrt{5}+355348\,\sqrt{5}\,L^2\,q^2-11907\,L^2\,q^2\,\sigma_1+11907\,L^2\,q^2\,\sigma_2+60144\,\sqrt{5}\,L}$$

where

$$\sigma_1=\log\left(\frac{L\,\left(\sqrt{5}-2\right)}{4}\right)$$

$$\sigma_2=\log\left(\frac{L\,\left(\sqrt{5}+2\right)}{4}\right)$$

CDS ESATTE

```
M2E=simplify(M20(z)+simplify(X21*M21(z))) % Momento
```

M2E =

$$\frac{q\,z\,\left(3\,L^2-7\,L\,z+4\,z^2\right)}{2\,L}+\frac{q\,z\,\left(8\,\sqrt{5}\,z-10\,\sqrt{5}\,L+7\,L\,q\,z\right)\,\left(5328\,\sqrt{5}\,\sigma_2-5328\,\sqrt{5}\,\sigma_1+2268\,\sqrt{5}\,L\,q+3423\,L\right.}{2\,\left(298560\,\sigma_2-298560\,\sigma_1-1718080\,L\,q+515840\,\sqrt{5}+355348\,\sqrt{5}\,L^2\,q^2-11907\,L^2\,q^2\,\sigma_1+11907\,L^2\,q\right.}$$

where

$$\sigma_1=\log\left(\frac{L\,\left(\sqrt{5}-2\right)}{4}\right)$$

$$\sigma_2=\log\left(\frac{L\,\left(\sqrt{5}+2\right)}{4}\right)$$

```
% FORZA NORMALE E TAGLIO
syms N2 T2 real
E16=N2*COS(z)+T2*SIN(z)+VA2E*COS(0)-HA2E*SIN(0)+q*z==0;
E17=T2*COS(z)-N2*SIN(z)-HA2E*COS(0)-VA2E*SIN(0)==0;
S6=solve([E16 E17],[N2,T2]);
```

```
Warning: Solutions are valid under the following conditions: 5*L^2 + 16*z^2 ~= 16*L*z & 298560*log((L*(5^(1/2) - 2))/4) + 171
11907*L^2*q^2*log((L*(5^(1/2) - 2))/4) + 60144*5^(1/2)*L*q*log((L*(5^(1/2) + 2))/4) ~= 298560*log((L*(5^(1/2) + 2))/4) + 5158
355348*5^(1/2)*L^2*q^2 + 11907*L^2*q^2*log((L*(5^(1/2) + 2))/4) + 60144*5^(1/2)*L*q*log((L*(5^(1/2) - 2))/4). To include para
conditions in the solution, specify the 'ReturnConditions' value as 'true'.
```

```
N2E=simplify(S6.N2(1))
```

N2E =

$$\frac{L\,q\,\left(1805440\,\sqrt{5}\,L-3095040\,\sqrt{5}\,z-6254080\,L^2\,q-1044960\,L\,\sigma_1+1044960\,L\,\sigma_2+1791360\,z\,\sigma_1-1791360\,z\,\sigma_2+1204028\,\sqrt{5}\right.}{2\,\sqrt{5\,L^2-16\,L\,z+16\,z^2}\,\left(298560\,\sigma_2-298560\right.}$$

where

$$\sigma_1=\log\left(\frac{L\,\left(\sqrt{5}-2\right)}{4}\right)$$

$$\sigma_2=\log\left(\frac{L\,\left(\sqrt{5}+2\right)}{4}\right)$$

```
T2E=simplify(S6.T2(1))
```

T2E =

$$\frac{2\,q\,\left(597120\,z^2\,\sigma_2 - 597120\,z^2\,\sigma_1 + 257920\,\sqrt{5}\,L^2 - 893440\,L^3\,q + 1031680\,\sqrt{5}\,z^2 - 149280\,L^2\,\sigma_1 + 149280\,L^2\,\sigma_2 + 172004\,\sqrt{5}\,\right.}{}$$

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

```
MF=M2E % momento
```

MF =

$$\frac{q\,z\,(3\,L^2 - 7\,L\,z + 4\,z^2)}{2\,L} + \frac{q\,z\,(8\,\sqrt{5}\,z - 10\,\sqrt{5}\,L + 7\,L\,q\,z)\,(5328\,\sqrt{5}\,\sigma_2 - 5328\,\sqrt{5}\,\sigma_1 + 2268\,\sqrt{5}\,L\,q + 3423\,L}{2\,(298560\,\sigma_2 - 298560\,\sigma_1 - 1718080\,L\,q + 515840\,\sqrt{5} + 355348\,\sqrt{5}\,L^2\,q^2 - 11907\,L^2\,q^2\,\sigma_1 + 11907\,L^2\,q}$$

where

$$\sigma_1 = \log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}-2)}{4}\right)$$

$$\sigma_2 = \log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}+2)}{4}\right)$$

```
NF=simplify(N1E+N2E) % forza normale
```

NF =

$$\frac{L\,q\,\left(1805440\,\sqrt{5}\,L - 3095040\,\sqrt{5}\,z - 6254080\,L^2\,q - 1044960\,L\,\sigma_1 + 1044960\,L\,\sigma_2 + 1791360\,z\,\sigma_1 - 1791360\,z\,\sigma_2 + 1204028\,\sqrt{5}\right.}{2\,\sqrt{5\,L^2 - 16\,L\,z + 16\,z^2}\,\left(298560\,\sigma_2 - 298560\right.}$$

where

$$\sigma_1 = \log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}-2)}{4}\right)$$

$$\sigma_2 = \log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}+2)}{4}\right)$$

```
TF=simplify(T2E) % taglio
```

TF =

$$\frac{2\,q\,\left(597120\,z^2\,\sigma_2 - 597120\,z^2\,\sigma_1 + 257920\,\sqrt{5}\,L^2 - 893440\,L^3\,q + 1031680\,\sqrt{5}\,z^2 - 149280\,L^2\,\sigma_1 + 149280\,L^2\,\sigma_2 + 172004\,\sqrt{5}\,L^4\right.}{}$$

where

$$\sigma_1 = \log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}-2)}{4}\right)$$

$$\sigma_2 = \log\left(\frac{L\,(\sqrt{5}+2)}{4}\right)$$

PUNTO 3 & 4

```
% 3) Assumendo che lo spessore dell’arco sia pari a h = l/20, determinare il valore di q in
%corrispondenza del quale la curva delle pressioni risulta tangente all’estradosso o
%all’intradosso dell’arco. Per il valore di q così determinato, tracciare l’andamento della
%curva delle pressioni.

%4) Determinare il massimo valore di q in corrispondenza del quale tutte le sezioni
%trasversali dell’arco sono soggette a tensioni di compressione (o, al più, a tensioni nulle).
%Nel calcolo, assumere h = l/20. Per il valore di q così determinato, tracciare l’andamento
%della curva delle pressioni.
```

Eccentricità

```
e=MF/NF;
% se faccio la tangente della funzione e, posso valutare se è uguale alla tangente dell'intradosso o estradosso.
% devo però fissare anche il punto in cui questa uguaglianza deve verificarsi.
% E' impossibile che questa uguaglianza sia verificata.
```

```
% E' bene analizzare tale curva numericamente.
```