Standardtitel

Prof. Dr. rer. nat. Johannes Üpping
johannes.uepping@th-owl.de
Technische Hochschule Ostwestfalen-Lippe

9. June 2025

Abstract

Keywords Zweikörperproblem · Kepler · Drehimpuls · Energie · Fluchtgeschwindigkeit

1 Einleitung

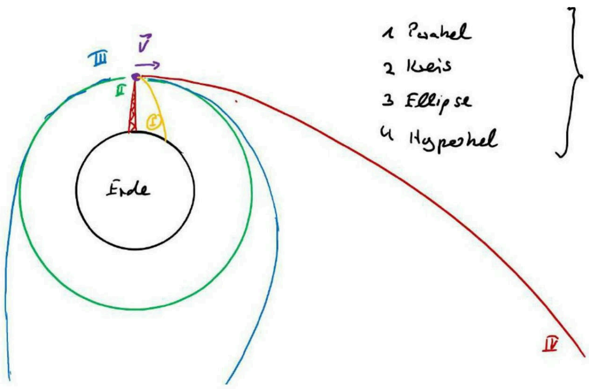

Figure 1: Abbildung: crop_1_Astro-3.jpg

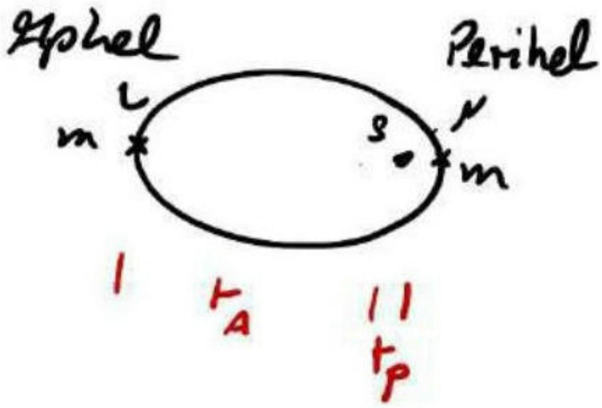

Figure 2: Abbildung: crop_0_Astro-5.jpg

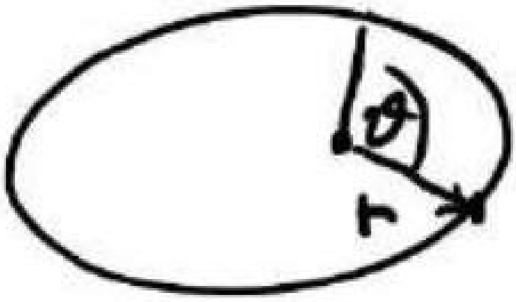

Figure 3: Abbildung: crop_0_Astro-3.jpg

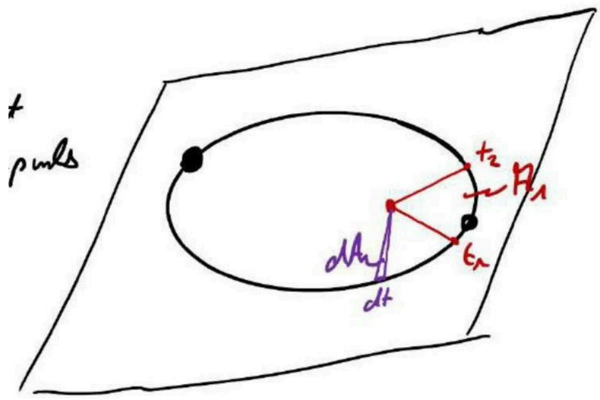

Figure 4: Abbildung: crop_0_Astro-1.jpg

Also die echte Lösung für den Radiusvektor sieht so aus.
R in Abhängigkeit vom Winkel ist gleich P geteilt durch 1 plus E mal Cosinus Theta.
Und das ist ein Kegelschnitt.
So, wenn wir jetzt angucken, dabei sind P und E beides Konstanten, die vom jeweiligen System abhängen.
Da stecken dann irgendwelche Massen und so drin.
Also es ist jetzt nicht wichtig, dass man genau weiß, welche anderen Größen da drin stecken.
Es ist wichtig nur, dass sie konstant sind.
Und E ist eine besondere Konstante, das heißt, die hat auch einen eigenen Namen.
Das ist die sogenannte numerische Exzentrität.
Exzentrität.
Diese numerische Exzentrität, die können wir tatsächlich ändern.
Also R ist in diesem Fall, wenn wir uns jetzt nochmal so eine kleine Ellipse hier hinzeichnen und hier jetzt irgendwie unseren Schwerpunkt oder Brennpunkt haben, je nachdem, dann ist das hier das R.
Und man fängt halt an irgendeiner Stelle an, muss man in 0 festlegen und dann hätte man hier den Winkel Theta.
Also Theta geht von 0 bis 360 Grad und dann kriegt man immer dann die Ellipse raus.
Komma, das haben wir auch schon gesehen.
Wenn die numerische Exzentrität 1 ist, gibt es eine Ellipse.
So, und jetzt ist die Frage, was kann man davon ändern?
Das P ist für uns fest.
Das ist auf jeden Fall eine Konstante, die wir nicht ändern können.

Aber die numerische Exzentrität, auf die haben wir Einfluss, denn da steckt die Geschwindigkeit mit drin.
Und jetzt könnte man sich auf folgenden Aufbau überlegen.
Und zwar nehmen wir an, das soll die Erde sein.
Oder halt irgendein Planet.
Oder irgendeine Masse, das würde reichen.
Auf diese Masse bauen wir jetzt einen sehr, sehr hohen Turm.
Wir sehen, wie hoch der ist.
So, und auch von diesem Turm werfen wir jetzt eine andere kleine Masse weg.
Und zwar soll diese Masse eine Geschwindigkeit V haben.
Und die soll, ich mache da jetzt eine Parallelverschiebung, einfach nur in diese Richtung gehen.
Das heißt, wir werfen die parallel zur Erdoberfläche und senkrecht zum Turm quasi seitlich weg.
Und jetzt gibt es unterschiedliche Möglichkeiten.
Wenn Sie die Kegelschnitte lösen, dann können wir sagen, okay, wenn wir nur ganz locker werfen.
Das ist so das, was unser tägliches Leben ist.
Ja, also wenn Sie von irgendeinem Turm irgendwas runterwerfen, dann kommt das meist nicht wieder irgendwann bei Ihnen an.
Sondern es passiert Folgendes.
Sie werfen das runter und es kracht hier auf den Boden.
Ja, dieser Fall 1 ist eine Parabel.
So, den Fall 2, den nehmen wir jetzt.
Da werfen Sie jetzt richtig, richtig feste.
Also übrigens muss dieser Turm so hoch sein, dass keine Atmosphäre mehr stört.
Sonst funktioniert das nicht.
Und wenn Sie jetzt so feste werfen, dann kann Ihnen Folgendes passieren, dass Sie einen Kreis erzeugen.
Also das ist jetzt der Fall 2.
Da haben Sie schon so feste geworfen, dass Sie genau einen Kreis erzeugen.
Und den einzigen Unterschied, den Sie gemacht haben, das ist nur die Geschwindigkeit.
Jetzt erhöhen Sie die Geschwindigkeit noch weiter.
Dann passiert Folgendes.
Das sieht am Anfang so ein bisschen ähnlich aus.
Aber Sie erzeugen eine Ellipse.
Also der Fall 3 mit noch höherer Geschwindigkeit ist eine Ellipse.
Aber Sie sind immer noch gebunden.
Das heißt, wir sind immer noch egal, wie feste Sie werfen.
Also solange Sie bei 3 sind, kommt der Ball oder die Masse immer wieder bei Ihnen an.
Hat aber auf der anderen Seite eine viel größere Entfernung, als der Turm hoch ist.
Und dann können Sie noch die Variante 4 machen.
Das ist jetzt, wenn Sie noch schneller werfen, dann wird aus dem Ganzen eine Hyperbel.
So, wenn Sie das gemacht haben, dann verlassen Sie den Einflussbereich des Planeten.
Das heißt, den Unterschied zwischen Parabel, Kreis, Ellipse und Hyperbel steuern Sie mit der Geschwindigkeit.
So, und jetzt möchte man natürlich zumindest wissen, letztendlich, welche Geschwindigkeit brauchen Sie, um zum Beispiel der Erde zu entfliehen.
Also die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit.
Um das zu berechnen, müssen wir uns jetzt einmal anschauen, wie viel Energie überhaupt in

dieser Bewegung um einen Schwerpunkt drin steckt.
Und wenn Sie jetzt nämlich die Energie in diesem System berechnen, dann hält man relativ einfach.
Und zwar wichtig, in dem Fall machen wir das nur für den kleinen Körper.
Der große oder der andere könnte man das alles äquivalent machen, aber wir wollen es erstmal nur für den kleinen Körper machen.
Und zwar die Gesamtenergie.
Ey, Gesamt ist nichts anderes als die beiden einzigen Energien, die wir haben.
Das ist einmal die kinetische Energie plus die potenzielle Energie.
Beide von diesen Energieformen kennen wir.
Das ist einmal gleich 1,5 mv^2 und minus g mal M mal m durch r.
So, achten Sie darauf, sonst in der Kraft war immer r^2, in der Energie ist nur noch durch r.
Und weil wir ja die Energieerhaltung kennen, können wir direkt sagen, dass das Ganze auf jeden Fall eine Konstante ist.
Solange in unserem System keine Energie nach außen abfließt, was wir ausschließen wollen.
Direkt daraus kann man schon eine Folgerung ziehen.
Und zwar, wenn die Bahn fest ist, das ist jetzt das Wichtige, dann ist ein leichterer Körper, muss schneller sein als ein schwererer Körper.
Das ist natürlich nicht verwunderlich, das hätten wir über den Kraftansatz genauso rausgekriegt.
Aber wenn man jetzt quasi einen kompletten Umlauf sich betrachtet, also Sie betrachten das für alle Winkel, Theta von 0 bis 360 Grad, und macht dann den Mittelwert, dann erhält man eine interessante Beziehung, und zwar den sogenannten Viralsatz.
Und zwar ist der Mittelwert der kinetischen Energie betragsmäßig genau die Hälfte vom Mittelwert der potenziellen Energie.
Also die Herleitung finden Sie auch, klassische Mechanik.
So, weil das ein wichtiger Satz ist, schreiben wir das nochmal auf.
Das zeitliche Mittel der kinetischen Energie entspricht betragsmäßig dem zeitlichen Mittel der halben potenziellen Energie.
Und diesen Zusammenhang, den nutzen wir jetzt aus, um letztendlich die Bahngeschwindigkeit zu bestimmen.
Und dazu schauen wir uns jetzt auf der Bahn zwei ganz spezielle Punkte an.
Also um diese Geschwindigkeit zu bestimmen, muss man als allererstes rauskriegen, was ist die quantitative Gesamtenergie.
Das heißt, bisher ist es klar, dass es eine Konstante ist, die Gesamtenergie.
Aber wie hoch diese Konstante ist, das schauen wir uns jetzt an.
Und zwar nutzen wir dazu die Energie am sogenannten Perihail.
Das ist einfach nichts anderes als den Punkt, wo der Schwerpunkt und der Körper am nächsten zusammen sind.
Vielleicht zeichnen wir das einmal kurz auf.
Also wenn wir das jetzt übertreiben, dann ist das hier der Schwerpunkt.
Das hier ist die Masse.
Und einen halben Umlauf später ist die Masse hier.
Und dann ist das hier der nächste Punkt, das sogenannte Perihail.
Und jetzt gleich kommt als nächstes die Energie am Abhehl.
Das ist natürlich dann der Punkt, der am weitesten weg ist vom Schwerpunkt.
Und da können Sie immer darauf achten, dass diese Linie, die jetzt die beiden Massen zu unterschiedlichen Zeitpunkten und den Schwerpunkt verbinden, das ist immer zweimal die

große Halbachse.
Das brauchen wir später nochmal.
Okay, um das vielleicht ein bisschen genauer zu machen hier, das ist vielleicht eher, ja ich habe es schon verbockt, das wäre in dem Fall eigentlich eher hier, wäre der Schwerpunkt vermutlich in dem System.
Also das Perihail ist tatsächlich nur einmal da und das gibt es nur an der Stelle.
So und jetzt schauen wir uns da einmal die entsprechenden Energien an.
Und zwar gilt an der Stelle, dass die Energie E0, das ist jetzt die Gesamtenergie, die wir noch nicht kennen, die soll jetzt am Perihail sein, 1 halb m Geschwindigkeit am Perihail zum Quadrat, minus Groß G, Klein M, Groß M geteilt durch den Radius am Perihail.
So, diese Gleichung nehmen wir jetzt mal dem Abstand am Perihail, also RP zum Quadrat und dann erhalten wir E0, RP Quadrat ist gleich 1 halb m, VP Quadrat, RP Quadrat, minus G, Klein M, Groß M, mal RP.
Das ist jetzt gleich Gleichung 1 und auf der anderen Seite schauen wir uns das gleiche an.
Auch hier ist die Energie E0, weil die Gesamtenergie ja gleich groß sein muss, Energieerhaltung.
Und wenn wir das aufschreiben, ist das 1 halb m, V abheilt zum Quadrat, minus Groß G, Klein M, Groß M durch R abheilt.
Und auch hier machen wir jetzt das gleiche, wir multiplizieren das mit RP zum Quadrat.
Dann kommt da folgendes raus, E0, RP Quadrat gleich 1 halb m, V abheilt Quadrat, RP Quadrat, minus Groß G, Klein M, Groß M, mal RP ohne Quadrat.
Diese Gleichung nennen wir 2.
Und jetzt kommt eine kleine Zwischenfolgerung, die wir machen.
Und zwar, wenn wir uns daran erinnern, dass der Drehimpuls erhalten bleibt, können wir folgendes machen.
Und zwar gilt VA, also die Geschwindigkeit am Abheil, mal der Radius am Abheil muss genauso groß sein wie die Geschwindigkeit, also VP am Perihil, mal RP.
Und wenn das richtig ist, dann gilt genauso, dass 1 halb m, V, P Quadrat, RP Quadrat das gleiche ist wie 1 halb m, V, A Quadrat, RA Quadrat.
Und um jetzt tatsächlich eine Vereinfachung zu erzielen, machen wir eine Subtraktion.
Das heißt, wir wollen folgendes berechnen, und zwar Gleichung 2 minus Gleichung 1.
Und dann sehen Sie, was da passiert.
Wir machen erstmal die linken Seiten.
Das ist noch ziemlich einfach.
Da steht dann nämlich nichts anderes als E0, RA Quadrat minus E0, RP Quadrat.
Dann kommt das Gleichheitszeichen.
Jetzt haben wir festgestellt, dass 1 halb m, VP Quadrat, RP Quadrat das gleiche ist wie 1 halb m, VA Quadrat, RA Quadrat.
Damit kürzen sich jetzt die kinetischen Terme, na sie kürzen sich nicht weg, aber sie subtrahieren sich raus, weil sie genau gleich sind.
Das heißt, die brauchen wir nicht beachten.
Und dann bleiben nur noch die Gravitationsterme über.
Da klammern wir jetzt direkt mal minus Groß M, Klein M, Groß G aus.
Und dann haben wir da stehen, Minus Groß G, Klein M, Groß M, mal ein Bruch.
Und in dem Bruch steht nur noch RA minus RP, geteilt durch RA Quadrat minus RP Quadrat.
Und das können wir jetzt noch etwas vereinfachen.
Und zwar wie folgt.
Genau, genau.

Also bei dieser Gleichung, die ist jetzt noch verkehrt.
Denn, was ich eigentlich gemacht habe, ist, ich habe noch durch Ne, das machen wir anders.
Das machen wir schön.
Also wir radieren das wieder weg und machen das in zwei Schritten.
Dann steht da nämlich im ersten Schritt nur RA minus RP.
Und jetzt klammern wir auf der einen Seite E0 aus.
Dann steht da E0 mal Klammer auf RA Quadrat minus RP Quadrat.
Und das teilen wir dann durch die andere Seite.
Und dann bleibt hier nur noch stehen, E0 ist gleich Minus Groß M, Klein M, Groß M.
Und dann kommt der Bruch mit dem Zähler RA minus RP und dem Nenner RA Quadrat minus RP Quadrat.
So, wenn Sie sich den Nenner anschauen, dann sehen Sie direkt, aha, das ist sowas wie eine binomische Formel.
Und wenn wir die auflösen, haben wir RA minus RP mal RA plus RP.
Und dann sehen Sie, aha, eins kürzt sich davon dankenswerterweise raus, sodass am Ende nur noch überbleibt.
Minus Groß G, Klein M, Groß M, geteilt durch RA plus RP.
Und wenn wir jetzt noch ganz kurz schauen in die Skizze, die wir oben gemacht haben, dann stellen wir folgendes fest, dass das hier ja RA ist.
Und dieses kleine Stück RP ist, kein V, das soll ein R sein, ich schreibe das neu, RP.
Und dann sehen Sie, dass folgendes gilt, die doppelte große Halbachse ist die Summe aus RA und RP.
Und dann vereinfacht sich das Ganze noch zu Minus Groß G, Klein M, Groß M durch 2A.
So, damit haben wir E0 bestimmt.
Das heißt, die Gesamtenergie in diesem kompletten System für die eine Masse ist Minus Groß G, Klein M, Groß M, geteilt durch 2A.
So, wenn man dann nämlich jetzt die Bahngeschwindigkeit ausrechnen möchte, was dann ziemlich einfach ist, geht man wie folgt vor.
Und zwar schaut man sich einfach einmal wieder die Energie an, die wir vorher schon hatten.
Und zwar 1,5m V Quadrat für das Teilchen Minus Groß G, Klein M, Groß M durch R.
Und davon wussten wir vorher nur, das ist die Gesamtenergie des Systems, aber die kennen wir jetzt auch.
Denn die Gesamtenergie ist Minus Groß M, Klein M, Groß M geteilt durch 2A.
So, das löst man dann einfach nach V auf.
Das geht auch in einem Schritt.
Und dann steht da nichts anderes als eine große Wurzel.
Und in dieser Wurzel steht 2 mal Groß M, Groß G und dann in der Klammer 1 durch R minus 1 durch 2A.
Und das ist die Bahngeschwindigkeit in Abhängigkeit des Radiusvektors.
Denn der Rest ist für ein System konstant.
Und wenn wir uns jetzt überlegen, jetzt denken wir nochmal zurück an den Wurf von unserem hohen Turm.
Wie groß müsste denn jetzt die Geschwindigkeit sein, um dem schwere Feld eines Körpers zu entrinnen?
Also quasi das M ist eine, also wir haben eine kleine Kugel in der Hand.
Und wie schnell müssen wir jetzt werfen, dass eine Hyperbel entsteht?
Das heißt, sie nicht wieder offen ist.

Und im Grenzübergang ist eine Hyperbel nichts anderes als eine Ellipse mit einer unendlichen Halbachse.
Da sehen Sie, was passiert.
Wenn wir nämlich das A unendlich groß machen, wird die Gesamtenergie 0.
Das heißt, unser Teilchen ist ungebunden.
Also das könnte man hier noch vorschreiben.
E Gesamt, dass das konsistent ist, ist da gleich 0.
Da beim Grenzübergang für A gegen unendlich von Minus Groß G Klein M Groß M durch 2A eine 0 rauskommt.
Wenn wir jetzt einfach wissen, dass dieser Term 0 wird, dann setzen wir das einfach ein und erhalten die Fluchtgeschwindigkeit.
Also um eine solche Bahn, eine Hyperbel zu erreichen, ist dann diese Geschwindigkeit nötig.
Und diese Geschwindigkeit wird Fluchtgeschwindigkeit genannt.
Also V-Flucht muss größer gleich der Wurzel aus 2 Groß G Groß M durch R sein.
Also für die Erde ist diese Geschwindigkeit 11,2 Kilometer pro Sekunde.
Also für die Erde ist diese Geschwindigkeit 11,2 Kilometer pro Sekunde. TEST