Das Zweikörperproblem und Bahnberechnungen

Prof. Dr. rer. nat. Johannes Üpping
johannes.uepping@th-owl.de
Technische Hochschule Ostwestfalen-Lippe

14. June 2025

Abstract

Dieses Skript behandelt das Zweikörperproblem und dessen Lösungen, beginnend mit der Herleitung der Drehimpulserhaltung und deren Auswirkungen auf die Bewegung der Körper. Es wird gezeigt, wie sich aus der Erhaltung des Drehimpulses Keplersche Gesetze ableiten lassen, insbesondere das zweite Keplersche Gesetz, das die Flächengleichheit in gleichen Zeiten beschreibt. Die Vorlesung behandelt Kegelschnitte als Lösungen der Bewegungsgleichungen, wobei die numerische Exzentrizität die Art der Bahn bestimmt (Parabel, Kreis, Ellipse, Hyperbel). Abschließend wird die Berechnung der Bahngeschwindigkeit und die Herleitung der Fluchtgeschwindigkeit anhand von Energiebetrachtungen und der Drehimpulserhaltung dargelegt. Die Fluchtgeschwindigkeit wird für die Erde mit etwa 11,2 km/s angegeben.

Keywords Zweikörperproblem · Kepler · Energieerhaltung · Bewegung · Fluchtgeschwindigkeit · Bahn · Gravitation

1 Das Zweikörperproblem und der Drehimpulserhaltungssatz

Beginnen wir mit der Aufschreibung der x-Komponente der Gleichung für das Zweikörperproblem. Wir hatten dies bereits einmal betrachtet. Die Gleichung lautet: x-Doppelpunkt ist gleich minus g Groß M plus Klein M durch R hoch 3 mal x. Um diese Differentialgleichung zu lösen, benötigen Sie nicht nur diese eine, sondern alle drei Raumkomponenten, also insgesamt sechs Integrationen. Diese Integrationen erfordern keine Vereinfachungen, sondern die Anwendung bestimmter Erhaltungssätze aus der Physik. Dies stellt im Grunde die größte Vereinfachung dar, die wir hier vornehmen. Ich habe bereits erwähnt, dass dies relativ zeitaufwändig ist, aber Sie können darauf vertrauen, dass die Ergebnisse, die ich Ihnen gleich zeige, zunächst korrekt sind. Wenn Sie dies nachlesen möchten, finden Sie Informationen in jedem Lehrbuch über theoretische Physik oder klassische Mechanik. Ein Beispiel wäre der Nolting, eine umfassende Reihe in sieben oder acht Bänden.

Ein wichtiger Punkt, für den wir möglicherweise das erste Experiment benötigen, ist, dass die Impulserhaltung die Bewegung eines Planeten auf eine Ebene beschränkt. Oder anders ausgedrückt, die Bewegung der beiden Körper findet immer in einer Ebene statt. Stellen wir uns dies als Skizze vor: Es handelt sich um diese Ebene. Die beiden Körper umkreisen einander innerhalb dieser Ebene und können diese in der Plus-Minus-Richtung nach oben oder unten nicht verlassen. Bei der Berechnung finden Sie, dass das Flächenelement DA gleich einem halben L durch M mal DT ist. Hierbei ist DA ein Flächenelement, L der Systemdrehimpuls, M die Masse des kleinen Körpers und DT ein Zeitelement.

Wenn wir dies nun auf den kleinen Körper beziehen, wie wir es gerade getan haben, können wir uns das wie folgt vorstellen: Nehmen wir an, der Brennpunkt oder Schwerpunkt befindet sich hier. Dann können Sie sich vorstellen, dass dies der Radiusvektor zum Punkt T1 und dies der Radiusvektor zum Punkt T2 ist. Hier haben Sie eine Fläche A1. Wenn Sie sich in diesem System ein kleines Flächenelement mit einem Delta T vorstellen, würden Sie sehen, dass ein sehr kleines Stück hiervon die Breite DT und die Fläche DA hat. Wenn Sie später integrieren, integrieren Sie immer über solche Kreise.

In der Physik zeigt sich, dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist. Das bedeutet, wenn Sie in einem System einen Drehimpuls haben und keine äußeren Kräfte auf dieses System wirken, dann ist der Drehimpuls konstant. Wenn sich zwei Körper im luftleeren Raum umkreisen, gibt es relativ wenig äußere Kräfte. Wenn man alle anderen Planeten und Massen weggedacht werden, ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße. Es gibt ein sehr schönes Demonstrationsexperiment dafür.

Da der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist, ist L konstant. Die Masse M ist ebenfalls konstant, da sich die Masse unterwegs nicht ändert. Da 1,5 konstant ist, folgt direkt eine Proportionalität zwischen DA und DT.

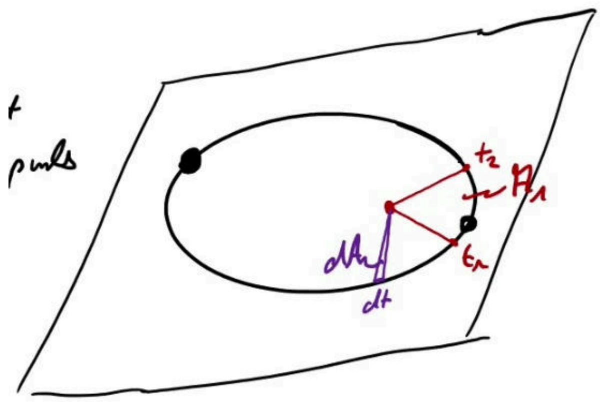

Figure 1: Das Zweikörperproblem und der Drehimpulserhaltungssatz

2 Das Zweite Keplersche Gesetz

Das zweite Keplersche Gesetz besagt, dass der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Betrachten wir eine Ellipse mit dem Schwerpunkt im Brennpunkt. Wir benötigen hierbei keine Massen mehr, sondern lediglich die Radiusvektoren zu verschiedenen Zeitpunkten. Nehmen wir an, wir haben einen Radiusvektor zum Zeitpunkt T1 und einen weiteren zum Zeitpunkt T2, die eine Fläche A1 einschließen. Betrachten wir nun einen Radiusvektor zum Zeitpunkt T3 und einen weiteren zum Zeitpunkt T4, die eine Fläche A2 einschließen.

Wenn die Zeitdifferenz zwischen T1 und T2 genauso groß ist wie die zwischen T3 und T4 – also ΔT1 = ΔT2 – dann folgt daraus, dass die Fläche A1 genauso groß ist wie die Fläche A2. Im Wesentlichen besagt der Satz also, dass der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche

Flächen überstreicht.

Johannes Kepler gelang es, diesen Zusammenhang zu entdecken, indem er Daten auswertete, die von Tycho Brahe gesammelt wurden. Er konnte dies berechnen, ohne die mathematische Lösung des Zweikörperproblems zu kennen. Eine vollständige Lösung erfordert jedoch weitere Integrationen unter Berücksichtigung der Energieerhaltung und weiterer Faktoren.

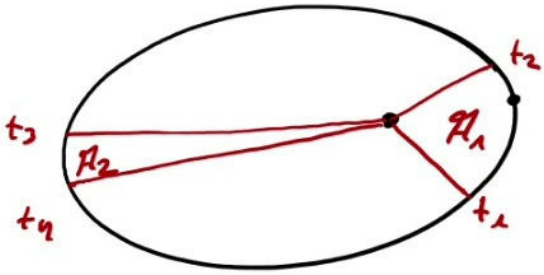

Figure 2: Das Zweite Keplersche Gesetz

3 Kegelschnitte und die numerische Exzentrität

Die erhaltenen Gleichungen beschreiben die Lösung für den Radiusvektor in Abhängigkeit vom Winkel, wobei es sich um einen Kegelschnitt handelt. Dabei sind P und E beides Konstanten, die vom jeweiligen System abhängen – beispielsweise Massen. Es ist nicht entscheidend, welche Größen genau in diesen Konstanten stecken, sondern lediglich, dass sie konstant sind. Die Konstante E wird dabei als numerische Exzentrizität bezeichnet und kann tatsächlich verändert werden.

Betrachten wir eine kleine Ellipse mit einem Schwerpunkt oder Brennpunkt, dann stellt R den Radius dar, der von einem Startpunkt bei 0 über den Winkel Theta, der von 0 bis 360 Grad reicht, die Ellipse beschreibt. Wenn die numerische Exzentrizität gleich 1 ist, erhalten wir eine Ellipse. Die Konstante P ist jedoch fest und kann nicht verändert werden, während die numerische Exzentrizität durch die Geschwindigkeit beeinflusst werden kann.

Stellen Sie sich vor, wir hätten die Erde oder einen anderen Planeten und bauen darauf einen sehr hohen Turm. Von diesem Turm werfen wir eine kleine Masse mit einer Geschwindigkeit V parallel zur Erdoberfläche weg. Abhängig von der Wurfstärke können unterschiedliche Ergebnisse erzielt werden. In den meisten Fällen kracht die Masse einfach auf den Boden. Dieser Fall entspricht einer Parabel.

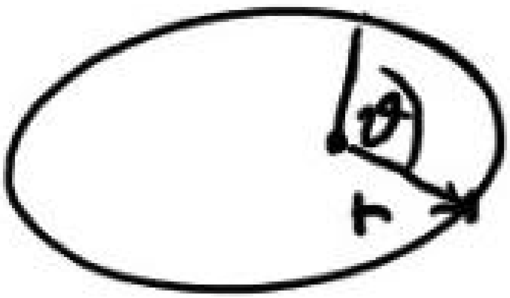

Figure 3: Kegelschnitte und die numerische Exzentrität

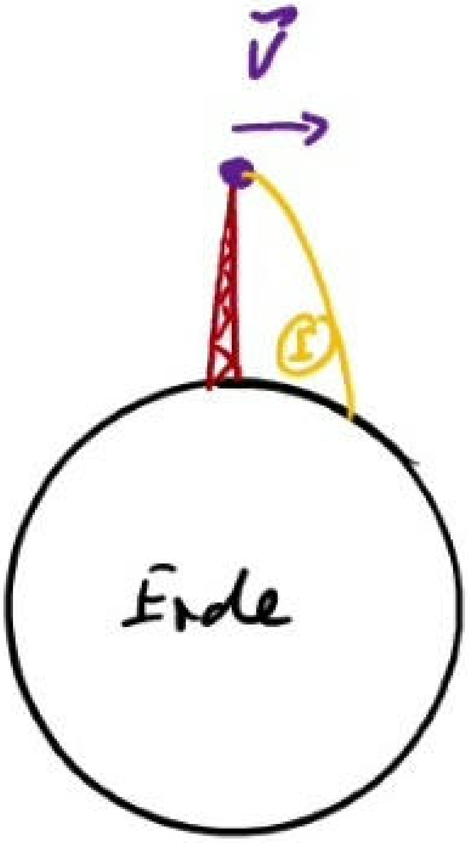

Figure 4: Kegelschnitte und die numerische Exzentrität

4 Flugbahnen und Fluchtgeschwindigkeit

Betrachten wir nun den Fall 2. Hierbei wird mit sehr hoher Geschwindigkeit geworfen. Wichtig ist, dass der Turm, von dem aus geworfen wird, hoch genug sein muss, um atmosphärische Störungen auszuschließen. Bei ausreichender Wurfstärke entsteht ein Kreis. Der einzige Unterschied zu vorherigen Fällen ist die Geschwindigkeit. Erhöht man die Geschwindigkeit noch weiter, entsteht eine Ellipse, also Fall 3. Obwohl die Flugbahn komplexer wird, bleibt die Masse gebunden und kehrt, egal wie stark geworfen wird, zum Ausgangspunkt zurück. Allerdings ist die zurückgelegte Strecke deutlich größer als die Höhe des Turms.

Mit Fall 4, bei noch höherer Geschwindigkeit, wird aus der Ellipse eine Hyperbel. Ab diesem Punkt verlässt die Masse den Einflussbereich des Planeten. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Flugbahn – also ob Parabel, Kreis, Ellipse oder Hyperbel – allein durch die Wurfgeschwindigkeit bestimmt wird.

Nun stellt sich die Frage nach der konkreten Geschwindigkeit, die benötigt wird, um beispielsweise der Erde zu entfliehen, also die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit. Um diese zu berechnen, müssen wir zunächst die Energie betrachten, die in der Bewegung um einen Schwerpunkt steckt.

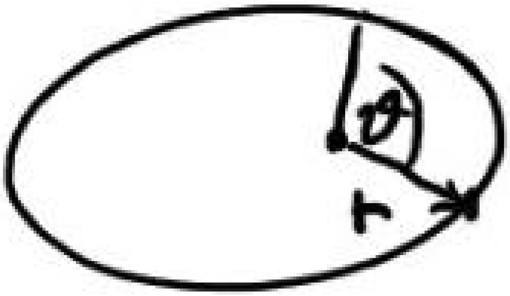

Figure 5: Flugbahnen und Fluchtgeschwindigkeit

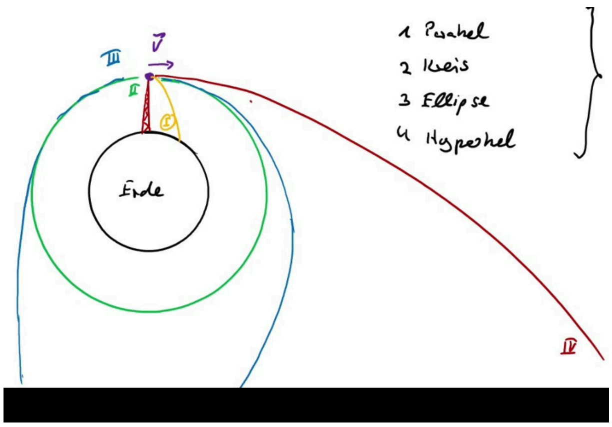

Figure 6: Flugbahnen und Fluchtgeschwindigkeit

5 Energiebetrachtung bei Bahnbewegung

Und wenn wir jetzt die Energie in diesem System berechnen, dann ist das relativ einfach. Wichtig ist, dass wir das nur für den kleinen Körper tun. Der große Körper könnte man das äquivalent machen, aber wir wollen es erstmal nur für den kleinen Körper machen. Die Gesamtenergie ist nichts anderes als die Summe der beiden Energien, die wir kennen: die kinetische Energie und die potentielle Energie. Beide sind bekannt: 1,5 mv^2 und $-GmM/r$. Achten Sie darauf, dass in der Kraft immer r^2, in der Energie aber nur r vorkommt. Da wir die Energieerhaltung kennen, können wir direkt sagen, dass das Ganze eine Konstante ist, solange in unserem System keine Energie nach außen abfließt, was wir ausschließen wollen. Daraus folgt direkt: Wenn die Bahn festgelegt ist, muss ein leichterer Körper schneller sein als ein schwererer Körper – das ist nicht verwunderlich und hätten wir auch mit dem Kraftansatz herausgefunden. Betrachten wir einen kompletten Umlauf, also alle Winkel von 0 bis 360 Grad, und bilden den Mittelwert, dann erhalten wir eine interessante Beziehung, den sogenannten Virialsatz. Der Mittelwert der kinetischen Energie ist betragsmäßig genau die Hälfte vom Mittelwert der potenziellen Energie. Die Herleitung dazu finden Sie in der klassischen Mechanik. Da dies ein wichtiger Satz ist, schreiben wir ihn nochmals auf: Das zeitliche Mittel der kinetischen Energie entspricht betragsmäßig dem zeitlichen Mittel der halben potenziellen Energie. Diese Beziehung nutzen wir nun, um die Bahngeschwindigkeit zu bestimmen. Dazu betrachten wir auf der Bahn zwei spezielle Punkte. Um die Geschwindigkeit zu bestimmen, müssen wir zuerst die quantitative Gesamtenergie bestimmen. Bisher wissen wir, dass es sich um eine Konstante handelt, aber nun wollen wir ihren Wert bestimmen. Dazu nutzen wir die Energie am sogenannten Perihälion, also dem Punkt, an dem sich der Schwerpunkt und der Körper am nächsten sind.

Um dies zu verdeutlichen, stellen wir uns vor, der Schwerpunkt befindet sich hier und die Masse hier. Ein halben Umlauf später befindet sich die Masse hier, und dieser Punkt ist das Perihälion. Als nächstes betrachten wir die Energie am Aphelion, dem Punkt, der am weitesten vom Schwerpunkt entfernt ist. Beachten Sie, dass die Linie, die die beiden Massen zu unterschiedlichen Zeitpunkten mit dem Schwerpunkt verbindet, immer zweimal die große Halbachse beträgt. Dies benötigen wir später noch.

Betrachten wir die Energie am Perihälion: Die Gesamtenergie E_0 ist $1/2\ mv_p^2$ - GMm/r_p. Multiplizieren wir diese Gleichung mit r_p^2, erhalten wir $E_0r_p^2 = 1/2\ mv_p^2r_p^2$ - $GMm\ r_p$. Dies ist Gleichung 1. Auf der anderen Seite betrachten wir das gleiche am Aphelion: Die Energie ist wieder E_0, da die Gesamtenergie konstant bleibt. Die Gleichung lautet $1/2\ mv_a^2$ - GMm/r_a. Multiplizieren wir auch diese Gleichung mit r_p^2, erhalten wir $E_0r_p^2 = 1/2\ mv_a^2r_p^2$ - $GMm\ r_p$. Dies ist Gleichung 2.

Nun folgt eine Zwischenfolgerung: Da der Drehimpuls erhalten bleibt, gilt $v_ar_a = v_pr_p$. Folglich ist $1/2\ mv_p^2r_p^2 = 1/2\ mv_a^2r_a^2$. Subtrahieren wir Gleichung 2 von Gleichung 1, erhalten wir auf der linken Seite $E_0r_p^2$ - $E_0r_p^2$. Auf der rechten Seite kürzen sich die kinetischen Terme weg, da sie gleich sind. Es bleiben nur die Gravitationsterme übrig. Wir klammern -GMm aus und erhalten -GMm $(1/r_a - 1/r_p)$. Vereinfachen wir dies weiter, erhalten wir -GMm $(r_p - r_a)$ / (r_ar_p). Wenn wir uns daran erinnern, dass die doppelte große Halbachse (2a) die Summe aus r_a und r_p ist, vereinfacht sich dies zu -GMm / 2a. Somit haben wir E_0 bestimmt. Die Gesamtenergie in diesem System für die eine Masse ist also -GMm / 2a.

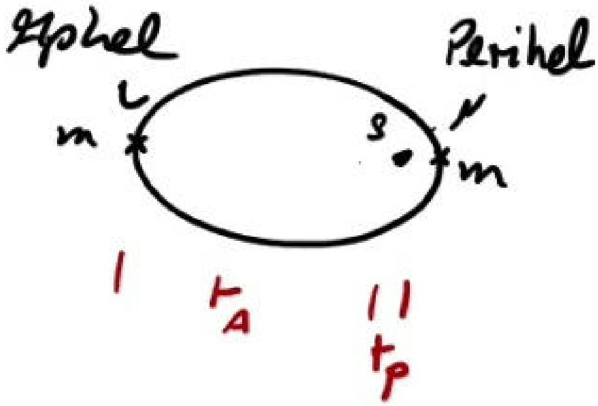

Figure 7: Energiebetrachtung bei Bahnbewegung

6 Berechnung der Bahngeschwindigkeit und Fluchtgeschwindigkeit

Um die Bahngeschwindigkeit zu berechnen, betrachten wir zunächst die Gesamtenergie des Systems, die wir bereits als $1{,}5mV^2 - GMm/R$ definiert haben. Diese Energie kennen wir nun genauer, da wir wissen, dass sie auch als $-GMm/(2a)$ ausgedrückt werden kann. Durch Auflösen dieser Gleichung nach V erhalten wir die Bahngeschwindigkeit in Abhängigkeit des Radiusvektors: $V = \sqrt{2GM(1/R - 1/(2a))}$. Der Rest der Größen ist konstant, sodass die Geschwindigkeit allein vom Radius abhängt.

Betrachten wir nun das Problem, wie schnell ein Objekt geworfen werden muss, um dem Gravitationsfeld eines Körpers zu entkommen – also, um eine Hyperbelbahn zu erzeugen. Im Grenzübergang wird eine Hyperbel zu einer Ellipse mit unendlicher Halbachse. Wenn wir den Abstand 'a' gegen unendlich gehen lassen, nähert sich die Gesamtenergie Null, was bedeutet, dass das Teilchen ungebunden ist. Setzen wir diesen Wert in die Formel ein, erhalten wir die Fluchtgeschwindigkeit.

Die Fluchtgeschwindigkeit ist also die Geschwindigkeit, die erforderlich ist, um eine Hyperbelbahn zu erreichen, und wird durch $V_{Flucht} \geq \sqrt{2GM/R}$ gegeben. Für die Erde beträgt diese Geschwindigkeit etwa 11,2 Kilometer pro Sekunde. TEST