Das Zweikörperproblem und die Bahnberechnung

Prof. Dr. rer. nat. Johannes Üpping
johannes.uepping@th-owl.de
Technische Hochschule Ostwestfalen-Lippe

15. June 2025

Abstract

Die Vorlesung behandelt das Zweikörperproblem, beginnend mit der Impulserhaltung und dem Drehimpulserhaltungssatz, welche die Bewegung in einer Ebene erzwingen und konstanten Drehimpuls gewährleisten. Daraus folgt Keplers Flächensatz. Es wird gezeigt, wie sich die Energieerhaltung mit der Form der Bahn (Parabel, Kreis, Ellipse, Hyperbel) korreliert und wie diese Zusammenhänge zur Berechnung von Bahngeschwindigkeiten und der Fluchtgeschwindigkeit führen. Die Ableitung der Formel für die Bahngeschwindigkeit und die Bestimmung der Fluchtgeschwindigkeit aus den Energiebetrachtungen stehen im Fokus. Die Vorlesung verknüpft theoretische Grundlagen mit konkreten Berechnungen und erläutert die physikalischen Prinzipien hinter den Kepler'schen Gesetzen.

Keywords Zweikörperproblem · Drehimpuls · Energie · Bahn · Gravitation · Fluchtgeschwindigkeit · Kepler · Bewegung

1 Das Zweikörperproblem und der Drehimpulserhaltungssatz

Wir betrachten nun das Zweikörperproblem und schreiben die Gleichung für die x-Komponente noch einmal auf. Wir haben diese Gleichung bereits zuvor betrachtet. Sie lautet: x-Zweitpunkt ist gleich minus g Groß M plus Klein M durch R hoch 3 mal x. Um diese Differenzialgleichung zu lösen, benötigen Sie nicht nur diese eine Gleichung, sondern alle drei Raumkomponenten und somit insgesamt sechs Integrationen. Diese Integrationen erfordern keine Vereinfachungen, jedoch müssen Sie bestimmte Erhaltungssätze aus der Physik nutzen. Dies stellt die größte Vereinfachung dar, die wir hier vornehmen. Die detaillierte Durchführung dieser Integrationen ist jedoch relativ langwierig, aber die Ergebnisse, die ich Ihnen gleich zeigen werde, sind davon grundsätzlich korrekt. Wenn Sie dies nachlesen möchten, finden Sie entsprechende Informationen in jedem Buch über theoretische Physik oder klassische Mechanik. Ein Beispiel ist der Nolting, eine mehrbändige Reihe.

Ein wichtiger Aspekt, für den wir vielleicht das erste Experiment benötigen, ist die Impulserhaltung. Diese besagt, dass die Bewegung eines Planeten in einer Ebene stattfindet, oder allgemeiner, die Bewegungen der beiden Körper in einer Ebene liegen. Stellen wir uns diese Ebene vor. Die beiden Körper umwandern sich innerhalb dieser Ebene und können diese in der Plus-Minus-Richtung nach oben oder unten nicht verlassen. Wenn wir das berechnen, finden wir, dass das Flächenelement DA mit einem Halb L durch M mal DT verbunden ist. Hierbei ist DA ein Flächenelement, L der Systemdrehimpuls, M die Masse des kleinen Körpers und DT ein Zeitelement.

Betrachten wir nun das System, könnten wir uns vorstellen, dass sich hier der Brennpunkt oder der Schwerpunkt befindet. Der Radiusvektor zum Punkt T1 und T2 zeigen in verschiedene Richtungen. Innerhalb dieser Fläche A1 haben wir ein kleines Flächenelement mit einem Delta T, welches eine Breite DT und eine Fläche DA aufweist. Bei der Integration integrieren wir über solche Kreise. In der Physik zeigt sich, dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist. Das bedeutet, dass der Drehimpuls in einem System, in dem keine äußeren Kräfte wirken, konstant bleibt. Wenn wir zwei Körper im luftleeren Raum umkreisen lassen, sind die äußeren Kräfte minimal. Unter der Vernachlässigung anderer Planeten und Massen bleibt der Drehimpuls erhalten. Dies lässt sich durch ein schönes Demonstrationsexperiment nachweisen.

Da der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist, ist L konstant. Da auch die Masse M konstant bleibt, folgt daraus eine Proportionalität zwischen DA und DT.

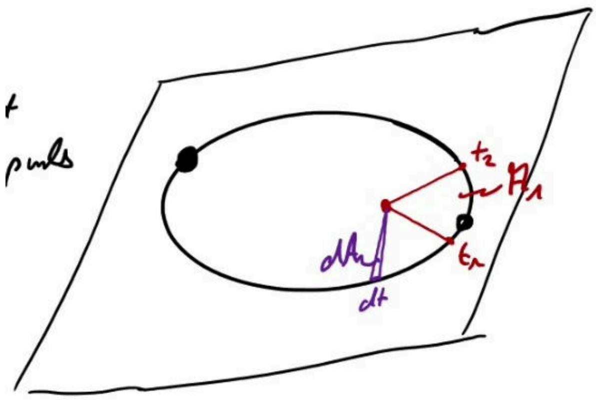


Figure 1: Das Zweikörperproblem und der Drehimpulserhaltungssatz

Figure 2: Das Zweikörperproblem und der Drehimpulserhaltungssatz

2 Das zweite Kepler'sche Gesetz: Flächensatz

Das zweite Kepler'sche Gesetz, auch Flächensatz genannt, besagt, dass der Radiusvektor, der einen Planeten mit der Sonne verbindet, in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen überstreicht. Stellen Sie sich eine Ellipse vor, bei der sich die Sonne im einem der Brennpunkte befindet. Betrachten wir zwei Zeitpunkte, T1 und T2, und die entsprechenden Positionen des Planeten auf der Ellipse. Die Fläche A1, die der Radiusvektor zu diesen Zeitpunkten mit der Sonne einschließt, ist nun entscheidend.

Nehmen wir einen weiteren Zeitpunkt T3 und T4, sodass die Zeitspanne zwischen T3 und T4 genauso lang ist wie die zwischen T1 und T2. Dann ist auch die Fläche A2, die nun von den neuen Positionen eingeschlossen wird, genauso groß wie A1. Der Satz besagt also: Wenn die Zeitintervalle gleich sind (dt1 = dt2), dann sind auch die überstrichenen Flächen gleich (A1 = A2).

Es ist bemerkenswert, dass Kepler diesen Satz empirisch durch die Auswertung von Daten fand, die von Tycho Brahe gesammelt wurden. Er konnte diese Beziehung ableiten, ohne die mathematische Lösung des Zweikörperproblems zu kennen. Eine vollständige Lösung erfordert jedoch weitere Schritte, wie die Integration unter Berücksichtigung der Energieerhaltung und weiterer Faktoren.

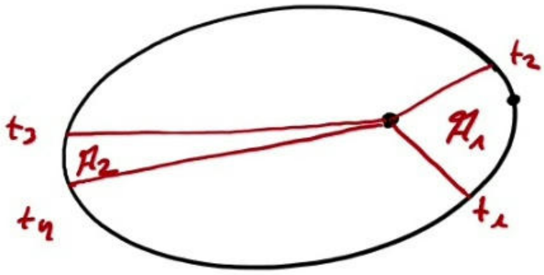


Figure 3: Das zweite Kepler'sche Gesetz: Flächensatz

[redacted]

Figure 4: Das zweite Kepler'sche Gesetz: Flächensatz

3 Kegelschnitte und Fluchtgeschwindigkeit

Wenn wir die Gleichungen betrachten, erhalten wir die Lösung für den Radiusvektor in Abhängigkeit vom Winkel: R = P / (1 + E * cos(Theta)). Diese Gleichung beschreibt einen Kegelschnitt, wobei P und E Konstanten sind, die vom jeweiligen System abhängen – beispielsweise Massen. Die Konstante E hat einen eigenen Namen: die numerische Exzentrizität. Diese Exzentrizität kann verändert werden. Stellen Sie sich eine Ellipse mit einem Schwerpunkt oder Brennpunkt vor; R ist der Radius in diesem Fall. Der Winkel Theta geht von 0 bis 360 Grad und beschreibt die Ellipse. Wir wissen bereits, dass eine numerische Exzentrizität von 1 eine Ellipse ergibt. Aber was kann an dieser Konfiguration geändert werden? P ist fest, aber die numerische Exzentrizität wird durch die Geschwindigkeit beeinflusst.

Betrachten wir die Erde (oder einen anderen Planeten) mit einem sehr hohen Turm. Von diesem Turm werfen wir eine andere Masse mit einer Geschwindigkeit V parallel zur Erdoberfläche. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, je nachdem, wie fest wir werfen. Wenn wir nur locker werfen (Fall 1), landet das Objekt einfach auf dem Boden – es handelt sich um eine Parabel. Wenn wir jedoch sehr fest werfen (Fall 2), und der Turm hoch genug ist, um die Atmosphäre zu umgehen, kann ein Kreis entstehen. Erhöhen wir die Geschwindigkeit noch weiter, entsteht eine Ellipse (Fall 3). Solange wir bei Fall 3 bleiben, kehrt das geworfene Objekt immer zum Ausgangspunkt zurück, allerdings über eine größere Distanz. Wenn wir die Geschwindigkeit noch weiter erhöhen (Fall 4), entsteht eine Hyperbel, und das Objekt verlässt den Einflussbereich des Planeten.

Die Unterschiede zwischen Parabel, Kreis, Ellipse und Hyperbel werden also durch die Geschwindigkeit gesteuert. Daraus ergibt sich die Frage nach der Geschwindigkeit, die benötigt wird, um einen Planeten zu verlassen – die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit. Um dies zu berechnen, müssen wir die Energie betrachten, die in dieser Bewegung um einen Schwerpunkt steckt.

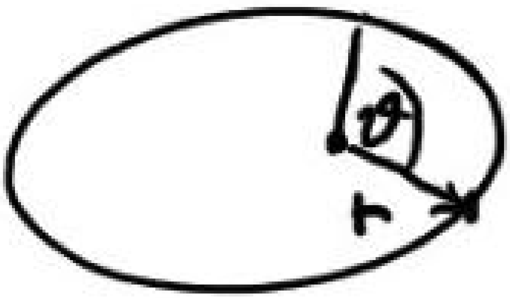
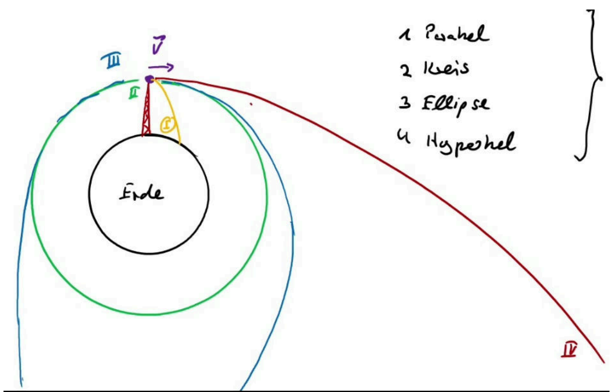


Figure 5: Kegelschnitte und Fluchtgeschwindigkeit



[redacted]

Figure 6: Kegelschnitte und Fluchtgeschwindigkeit

[redacted]

Figure 7: Kegelschnitte und Fluchtgeschwindigkeit

[redacted]

Figure 8: Kegelschnitte und Fluchtgeschwindigkeit

4 Energiebetrachtung für ein Zwei-Körper-System

Und wenn Sie jetzt die Energie in diesem System berechnen, dann gestaltet sich das relativ einfach. Wichtig ist, dass wir das zunächst nur für den kleineren Körper betrachten. Den größeren Körper könnten wir äquivalent behandeln, aber wir konzentrieren uns erstmal auf den kleineren. Die Gesamtenergie ist nichts anderes als die Summe der kinetischen und potenziellen Energie. Beide Energieformen sind uns bekannt: 1,5 * m * v^2 und -G * M * m / r. Achten Sie darauf, dass in der Kraft immer r^2 vorkam, in der Energie aber nur r. Da wir die Energieerhaltung kennen, können wir direkt sagen, dass dies eine Konstante ist, solange keine Energie aus dem System nach außen abfließt – was wir ausschließen wollen. Daraus lässt sich ableiten, dass ein leichterer Körper auf einer festen Bahn schneller sein muss als ein schwererer Körper, was nicht überraschend ist und auch aus dem Kraftansatz hätte folgen können.

Betrachtet man einen kompletten Umlauf, also alle Winkel von 0 bis 360 Grad, so erhält man eine interessante Beziehung, den sogenannten Virialsatz. Dieser besagt, dass der Mittelwert der kinetischen Energie betragsmäßig genau die Hälfte des Mittelwerts der potenziellen Energie ist. Die Herleitung dazu finden Sie in der klassischen Mechanik. Da dies ein wichtiger Satz ist, schreiben wir ihn nochmal auf: Das zeitliche Mittel der kinetischen Energie entspricht betragsmäßig dem zeitlichen Mittel der halben potenziellen Energie. Diesen Zusammenhang nutzen wir nun, um die Bahngeschwindigkeit zu bestimmen. Dazu betrachten wir auf der Bahn zwei spezielle Punkte.

Um die Geschwindigkeit zu bestimmen, müssen wir zuerst die quantitative Gesamtenergie ermitteln. Bisher wissen wir, dass sie konstant ist. Nun wollen wir bestimmen, wie hoch diese Konstante ist. Dazu nutzen wir die Energie am sogenannten Perihel, also dem Punkt, an dem der Schwerpunkt und der Körper am nächsten zusammen sind. Stellen Sie sich vor, der Schwerpunkt befindet sich hier und die Masse dort. Einen halben Umlauf später ist die Masse hier, und das Perhel ist der nächste Punkt. Als nächstes betrachten wir die Energie am Aphel, dem Punkt, der am weitesten vom Schwerpunkt entfernt ist. Achten Sie darauf, dass die Linie, die die beiden Massen zu unterschiedlichen Zeitpunkten mit dem Schwerpunkt verbindet, immer zweimal die große Halbachse beträgt, was wir später noch benötigen.

Schauen wir uns die entsprechenden Energien am Perihel genauer an. Die Gesamtenergie E_0 am Perihel ist $1/2 * m * v_p^2 - G * M * m / r_p$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit r_p^2, so erhalten wir $E_0 * r_p^2 = 1/2 * m * v_p^2 * r_p^2 - G * M * m * r_p$. Das nennen wir Gleichung 1. Auf der anderen Seite betrachten wir das gleiche am Aphel. Auch hier ist die Energie E_0, da die Gesamtenergie gleich bleiben muss. Aufschreiben ergibt $1/2 * m * v_a^2 - G * M * m / r_a$. Multiplizieren wir auch dies mit r_p^2, so erhalten wir $E_0 * r_p^2 = 1/2 * m * v_a^2 * r_p^2 - G * M * m * r_p$. Das ist Gleichung 2.

Eine Zwischenfolgerung: Da der Drehimpuls erhalten bleibt, gilt $v_a * r_a = v_p * r_p$. Folglich ist $1/2 * m * v_p^2 * r_p^2 = 1/2 * m * v_a^2 * r_a^2$. Subtrahieren wir Gleichung 1 von Gleichung 2, so erhalten wir auf der linken Seite $E_0 * r_p^2 - E_0 * r_p^2 = 0$. Auf der rechten Seite kürzen sich die kinetischen Terme weg, und es bleiben nur die Gravitationsterme übrig. Klammern wir $-G * M * m$ aus, so erhalten wir $-G * M * m * (r_a - r_p) / (r_a^2 - r_p^2)$. Wir können dies vereinfachen, da $r_a^2 - r_p^2 = (r_a - r_p) * (r_a + r_p)$. Dies kürzt sich mit $(r_a - r_p)$, sodass wir $-G * M * m / (r_a + r_p)$ erhalten. Da $r_a + r_p = 2a$ (die doppelte große Halbachse), ist $E_0 = -G * M * m / 2a$. Damit haben wir die Gesamtenergie bestimmt: Die Gesamtenergie für die eine Masse ist $-G * M * m / 2a$.

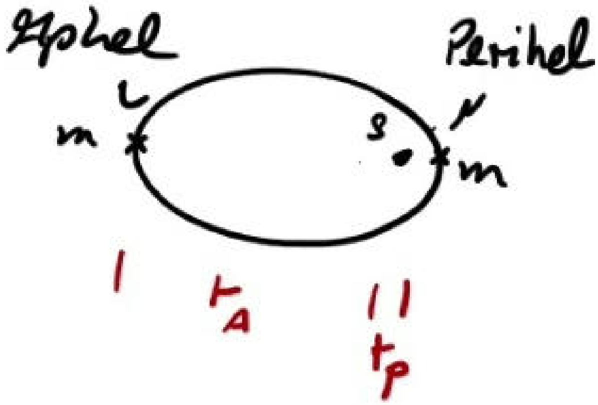


Figure 9: Energiebetrachtung für ein Zwei-Körper-System

5 Berechnung der Bahngeschwindigkeit und Fluchtgeschwindigkeit

Um die Bahngeschwindigkeit zu berechnen, gehen wir von der Gesamtenergie des Systems aus, die wir bereits kennen: 1,5mV^2 - GMm/R. Diese ist gleich -GMm/2A. Durch Auflösen dieser Gleichung nach V erhalten wir die Formel für die Bahngeschwindigkeit: V = √(2GM(1/R - 1/2A)). Diese Geschwindigkeit hängt vom Radiusvektor ab, da die restlichen Parameter konstant sind.

Betrachten wir nun den Fall des Wurfs von einem hohen Turm und die Frage, welche Geschwindigkeit erforderlich ist, um dem Gravitationsfeld zu entkommen. Stellen wir uns vor, wir haben eine kleine Kugel und möchten bestimmen, wie schnell wir sie werfen müssen, damit eine Hyperbel entsteht, die nicht offen ist. Im Grenzübergang wird eine Hyperbel zu einer Ellipse mit einer unendlichen Halbachse.

Wenn wir A gegen unendlich gehen lassen, nähert sich die Gesamtenergie Null, was bedeutet, dass das Teilchen ungebunden ist. Setzen wir diesen Grenzwert in die Formel ein, erhalten wir die Fluchtgeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit, die erforderlich ist, um eine hyperbolische Bahn zu erreichen. Die Fluchtgeschwindigkeit beträgt V-Flucht ≥ √(2GM/R). Für die Erde beträgt diese Geschwindigkeit etwa 11,2 Kilometer pro Sekunde.