Metryki i ich zastosowania
Distance Metrics and Their Applications

Dominika Schabowska

27.02.2025

Streszczenie

Czym właściwie jest odległość i jak ją mierzyć w różnych kontekstach? W artykule podejmujemy próbę odpowiedzi na to pytanie, przedstawiając pojęcie metryki jako uogólnienia intuicyjnego rozumienia dystansu. Zamiast skupiać się na ścisłych dowodach i aksjomatach, tekst prowadzi czytelnika przez przykłady i zastosowania różnych metryk, ukazując ich praktyczną wartość i różnorodność. Czy to w analizie danych, porównywaniu ciągów znaków czy optymalizacji tras – wybór odpowiedniej metryki ma znaczenie. Artykuł ma charakter popularnonaukowy i kierowany jest do osób zainteresowanych matematyką stosowaną, informatyką oraz sztuczną inteligencją.

Słowa kluczowe

Metryka; Przestrzeń Metryczna; Odległość; Metryka Euklidesowa; Metryka Manhattan; Metryka Czebyszewa; Zastosowania Metryk

Abstract

What exactly is distance, and how can it be measured in different contexts? In this article, we explore this question by introducing the concept of a metric—a generalization of our intuitive understanding of distance. Rather than focusing on formal proofs or axioms, the text guides the reader through examples and real-world applications of various metrics, highlighting their practical relevance and diversity. Whether in data analysis, string comparison, or route optimization, choosing the right metric truly matters. The article is written in a popular-science style and is aimed at readers interested in applied mathematics, computer science, and artificial intelligence.

Key words

Metric; Metric Space; Distance; Euclidean Metric; Manhattan Metric; Chebyshev Distance; Metric Applications

Wstęp

W tym artykule można znaleźć podstawowe informacje o metrykach. Zaczniemy od przypomnienia definicji metryki i jej wyjaśnienia. Następnie przejdziemy do przedstawienia przykładów metryk wraz z ich praktycznymi zastosowaniami. Celem tego artykułu nie jest omówienie teorii topologicznej (jej tu nie znajdziecie), lecz proste wyjaśnienie matematycznych pojęć oraz poznanie najczęściej używanych metryk i ich zastosowań w praktyce.

Będę wręcz unikać formalnych definicji i twierdzeń, aby treść była jak najbardziej przystępna dla czytelnika. Przedstawię jedynie te pojęcia, które uważam za kluczowe do zrozumienia przestrzeni metrycznej.

Problem z jakim studiujący matematykę się spotyka to trudność w zrozumieniu idei oraz przyswajanie specyficznego języka matematyki. Nie zapominajmy o najczęściej zadawanym pytaniu "Kiedy mi się to faktycznie przyda?". Mam nadzieję, że ten artykuł pomoże zrozumieć temat metryk i wyjaśni, jak dobierać odpowiednią metrykę w zależności od sytuacji.

Spis treści

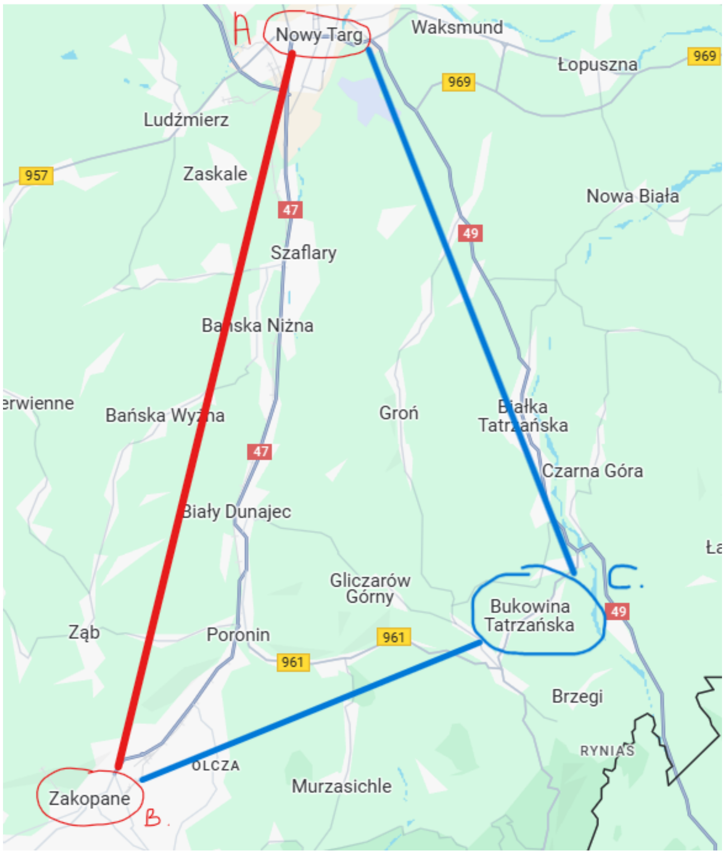
1 Metryka to odległość ?

Metryka to narzędzie matematyczne, stosowane do mierzenia odległości między dwoma punktami. Właściwie na tym można by zakończyć opisywanie metryki, gdyby nie pojawiające się dalej pytania:

- W jaki sposób mierzymy tę odległość?
- Między jakimi punktami?
- Czego dokładnie dotyczy ta odległość?
- Czy punkty to zawsze konkretne miejsca w przestrzeni, czy mogą to być inne obiekty, np. słowa czy miasta na mapie?
- W jakiej przestrzeni mierzymy odległość?
- Czy chodzi o intuicyjnie rozumianą odległość, czy może o bardziej abstrakcyjne pojęcie?

Prawdopodobnie już wiesz, że istnieją różne metryki, z których każda określa odległość według innego wzoru. Tylko po co tyle metod?

Wyobraź sobie, że jedziesz na wakacje do innego miasta. Twoim celem jest dotarcie z punktu A do punktu B, ale każdy z pasażerów ma inny pomysł na trasę. Jedna osoba woli najkrótszą trasę w linii prostej, inna chciałaby po drodze odwiedzić ciekawe miejsca.



Rysunek 1: Przykłady mierzenia odległości w metryce euklidesowej (czerwona), Manhattan (niebieski).

Zaczynacie dyskutować nad obraniem odpowiedniej trasy do Waszych potrzeb. Podobnie działają metryki – każda z nich opisuje odległość w inny sposób, dostosowany do konkretnej sytuacji.

Metryki stosuje się nie tylko w przestrzeni euklidesowej, gdzie odległość mierzymy „po prostej", ale także w innych przestrzeniach. Przykładowo, w siatkach miejskich, gdzie można poruszać się wyłącznie po liniach poziomych i pionowych, stosuje się metrykę Manhattan. Innym przykładem jest mierzenie odległości wzdłuż koryta rzeki lub innej naturalnej przeszkody, gdzie stosuje się tzw. metrykę rzeki.

W kolejnej sekcji zapraszam do zapoznania się z definicją metryki i przestrzeni metrycznej oraz w zrozumieniu jej.

2 Definicja metryki

Metryka to funkcja określająca odległość między dwoma punktami w danej przestrzeni. Musi spełniać określone warunki, takie jak:

- Nieujemność – odległość nie może być ujemna.
- Symetria – odległość z punktu x do y jest taka sama jak z y do x.
- Tożsamość nierozróżnialnych – odległość między dwoma punktami wynosi zero tylko wtedy, gdy są to te same punkty.
- Nierówność trójkąta – przechodząc przez dodatkowy punkt, nie skracamy drogi.

Definicja 2.1. *Odwzorowanie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ nazywamy metryką (w X), jeżeli:*

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

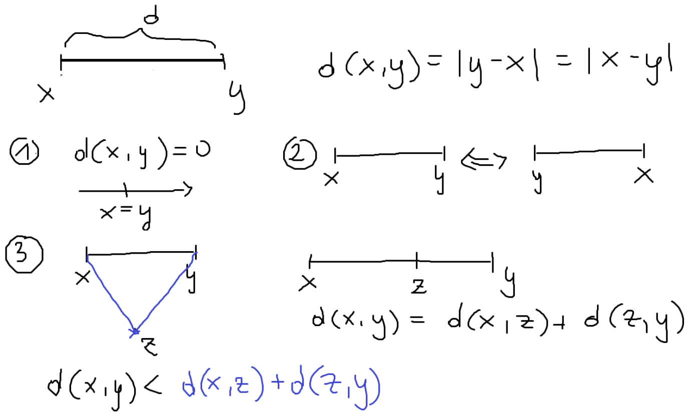
Parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Z powyższej definicji wynika, że przestrzeń metryczna to zbiór X z zadaną na nim metryką, oznaczaną przez funkcję d(x,y). Punkty x, y to obiekty ze zbioru X, dla których odległość wyznaczamy.

Pierwszy warunek oznacza, że jeśli odległość między dwoma punktami jest równa 0, to punkty są takie same. Ich odległość nie istnieje, więc są w tym samym miejscu.

Drugi warunek definicji oznacza jedynie tyle, że odległość z punktu x do punktu y jest taka sama, jak odległość z punktu y do x.

Trzeci warunek nazywany jest inaczej warunkiem trójkąta (poznanym już jako warunek na istnienie trójkąta w szkole). Oznacza sytuację, gdy z punktu x do punktu y dokładamy przystanek z, stąd nierówność, ponieważ odległość się wydłuża. Równość zachodzi tylko wtedy, gdy punkty są współliniowe. Rysunek 2 obrazuje warunki definicji, dla odległości mierzonej wartością bezwzględną.



Rysunek 2: Ilustracja definicji metryki, mierzonej za pomocą wartości bezwzględnej.

Wniosek 2.1. *Gdy d jest metryką w zbiorze X, to parę (X, d) nazywa się przestrzenią metryczną, elementy zbioru X nazywa się punktami, a liczbę $d(x, y)$ nazywa się odległością punktu x od punktu y.*

Uwaga 2.1. *Warto zauważyć, że skoro definiujemy metrykę jako odległość, to jej wartości są nieujemne. Przeciwdziedzina funkcji d z powyższej definicji to przedział $[0, \infty)$.*

Istotnie, dla dowolnych $x, y \in X$ otrzymujemy

$$0 = d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \Rightarrow 0 \leqslant d(x, y).$$

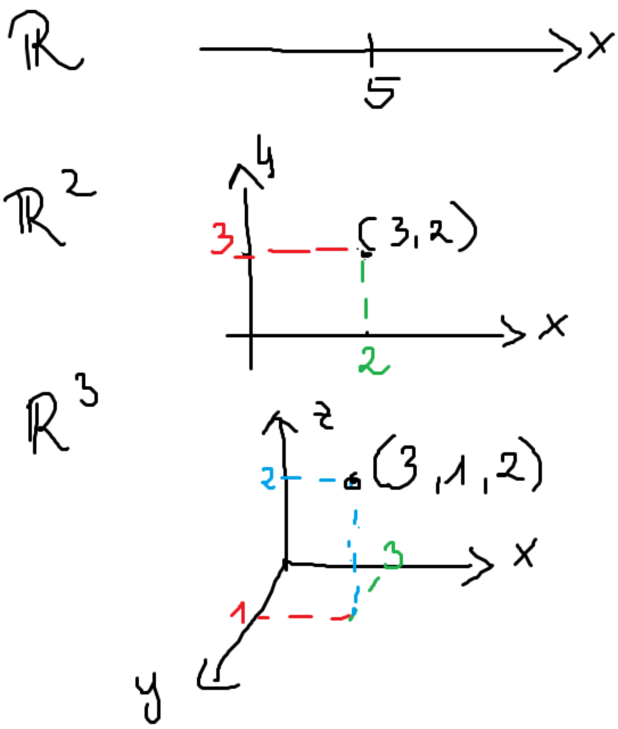
Można podać mnóstwo innych metryk, określających odległości, ale tak aby spełniały aksjomaty definicji metryki. W kolejnej części artykułu poznasz najczęściej używane metryki.

3 Przykłady metryk i ich zastosowania

Do tej pory mówiliśmy o punktach, ale nie o ich wymiarach.

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^n$, gdzie n to dodatnia liczba naturalna, opisująca ilość współrzędnych dla punktów należących do tej przestrzeni.

Przykładowo, jeśli punkt jest z przestrzeni $\mathbb{R}$ to jest to punkt na prostej, a do jego opisu wystarczy jedna wartość. Przestrzeń $\mathbb{R}^2$ przedstawiania jest w układzie kartezjańskich dla dwóch współrzędnych. Punkty w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mają trzy współrzędne, co da się jeszcze graficznie przedstawić (rys. 3), w przeciwieństwie do wyższych wymiarów.



Rysunek 3: Ilustracja przestrzeni $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$.

Załóżmy, że punkty x, y należą do przestrzeni $X = \mathbb{R}^n$, więc przedstawiają się następująco

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

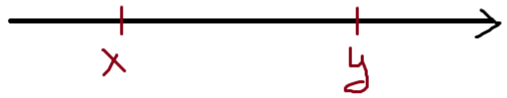
gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ to są ich współrzędne. W kolejnej sekcji opiszemy konkretne sposoby mierzenia odległości tych punktów za pomocą różnych metryk.

3.1 Metryka euklidesowa

Najpopularniejszy typ mierzenia odległości to metryka Euklidesowa. Jeśli nie jest wskazane inaczej, to zakładamy, że to właśnie jej wzorem liczymy odległość.

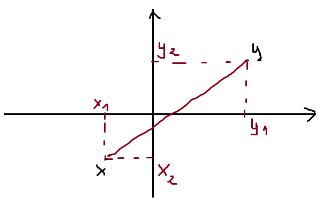
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

W przypadku jednowymiarowym powyższy wzór redukuje się do wartości bezwzględnej różnic wartości punktów x, y, czyli dla n = 1. W taki sposób wyraża się odległość między dwiema liczbami na prostej.



$$d(x, y) = |x - y| = |y - x|$$

Natomiast dla n = 2, czyli na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, otrzymujemy



$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$x = (x_1, x_2)$$
$$y = (y_1, y_2)$$

Wzór ten jest wykorzystywany już na etapie szkoły średniej do obliczania długości odcinka. Metryka euklidesowa określa odległość w linii prostej i jest powiązana z normą euklidesową.

Odległości euklidesowe (a także ich kwadraty) są obliczane na podstawie danych surowych, a nie standaryzowanych. Taka metoda ma pewne zalety – na przykład dodanie nowych, nawet odstających obiektów do zbioru danych nie wpływa na odległość między już istniejącymi obiektami. Niemniej jednak wyniki mogą być zaburzone przez różnice w jednostkach miar pomiędzy poszczególnymi wymiarami, co może prowadzić do znacznie odmiennych rezultatów.

3.2 Metryka Czebyszewa (maksymalna)

Odległość pomiędzy porównywanymi obiektami w tej metryce to największa z odległości uzyskanych dla poszczególnych cech (współrzędnych) tych obiektów

$$d(x, y) = max\{|x_i - y_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Przykład zastosowania:

- W grze w szachy król może poruszać się o jedno pole w dowolnym kierunku — pionowo, poziomo lub po przekątnej. Oznacza to, że w jednym ruchu może zmienić zarówno współrzędną pionową, jak i poziomą, ale tylko o jeden krok. Załóżmy, że chcemy określić, ile minimalnych ruchów potrzebuje król, aby przejść z pola (x_1, y_1) na pole (x_2, y_2). Wtedy

  $$\text{minimalna liczba ruchów króla} = max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

  czyli dokładnie tyle, ile wynosi metryka Czebyszewa między tymi dwoma punktami. Na przykład, jeśli król ma przejść z pola A1 (1,1) do pola D3 (4,3), to

  $$max(|1 - 4|, |1 - 3|) = max(3, 2) = 3$$

  Król w jednym ruchu może przesunąć się po przekątnej, więc przez pierwsze 3 ruchy może pokonać po skosie (np. B2, C3), a w ostatnim ruchu wykona krok poziomy (np. D3). Dzięki temu ta metryka doskonale oddaje minimalny koszt przemieszczenia się króla na szachownicy.

Miara Czebyszewa jest stosowna w tych przypadkach, w których chcemy zdefiniować dwa obiekty jako "inne" wtedy, gdy różnią się one w jednym dowolnym wymiarze.

- Przykładowo w kontroli jakości produktów czasem używa się jej do wykrywania niezgodności. Jeśli jakakolwiek cecha produktu przekroczy określony próg tolerancji (nawet tylko jedna), produkt zostaje odrzucony.

- W detekcji anomalii (np. w systemach finansowych, medycznych) lub zapewnieniu bezpieczeństwa jakakolwiek duża różnica w jednym wymiarze może być sygnałem zagrożenia.

Interesuje nas największe odchylenie, nawet jeśli pozostałe cechy są zgodne — metryka Czebyszewa dobrze to wychwytuje.

3.3 Metryka miejska (inaczej: odległość Manhattan lub odległość taksówkowa)

Jej nazwa wywodzi się z faktu, że mierząc odległość między punktami, możemy poruszać się tylko wzdłuż prostopadłych linii, na podobieństwo ulic przypominających plan Manhattanu.

Metryka ta dana jest wzorem

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Zauważmy, że w metryce taksówkowej, aby przemieścić się z punktu x do punktu y, możemy poruszać się jedynie wzdłuż linii pionowych (różnica w drugich współrzędnych) oraz poziomych (różnica w pierwszych współrzędnych). Sumujemy te odległości, więc kolejność wykonywania zakrętów nie ma znaczenia. Taki sposób przemieszczania przypomina poruszanie się po siatce ulic, jaką spotyka się w niektórych miastach.

W praktyce metryka taksówkowa często daje wyniki zbliżone do odległości euklidesowej. Jednak jej dużą zaletą jest mniejsza wrażliwość na pojedyncze, znacznie odbiegające wartości (tzw. obserwacje odstające), ponieważ nie są one potęgowane – jak ma to miejsce przy obliczaniu odległości euklidesowej. Dzięki temu różnice ekstremalne mają mniejszy wpływ na ostateczny wynik.

3.4 Odległość Minkowskiego

Odległość Minkowskiego to uogólniona miara między punktami w przestrzeni euklidesowej, parametryzowana przez wartość m:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

Dla $m = 1$ odpowiada metryce miejskiej (L_1), dla $m = 2$ — euklidesowej (L_2), a dla $m \to \infty$ — metryce Czebyszewa (L_∞). Miara ta, zwana również metryką L^m, pozwala dostosować sposób mierzenia odległości do charakteru danych.

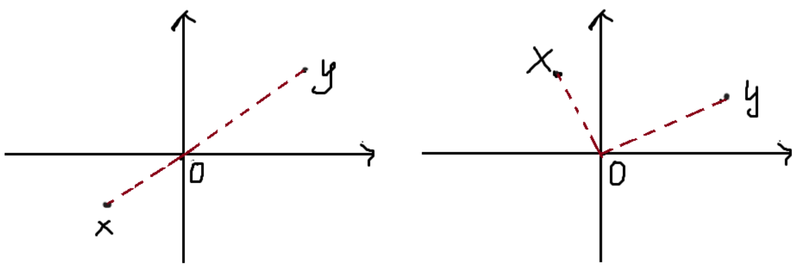
3.5 Metryka węzła kolejowego (inaczej: metryka centrum, kolejowa, metra paryskiego)

Załóżmy, że na płaszczyźnie wyróżniony jest punkt O (przykładowo początek układu współrzędnych) — „węzeł”, przez który przechodzą proste, szyny, we wszystkich kierunkach.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Jeśli x oraz y są współliniowe z punktem O, to znajdują się na takim samym torze, a ich odległość mierzona jest w metryce euklidesowej.

2. W przeciwnym przypadku (gdy x, y nie są współliniowe z zerem) po wystartowaniu z punktu x i zatrzymaniu się w punkcie O musimy przejść na inną półprostą do punktu y. Odległość jest równa sumie odległości euklidesowych od x do O oraz od O do y.



Metrykę węzła kolejowego można zdefiniować następującą funkcją

$$d(x, y) = \begin{cases} ||x - y||_e & \text{, gdy } x,\ y,\ O \text{ są współliniowe,} \\ ||x||_e + ||y||_e & \text{, w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

3.6 Metryka rzeka

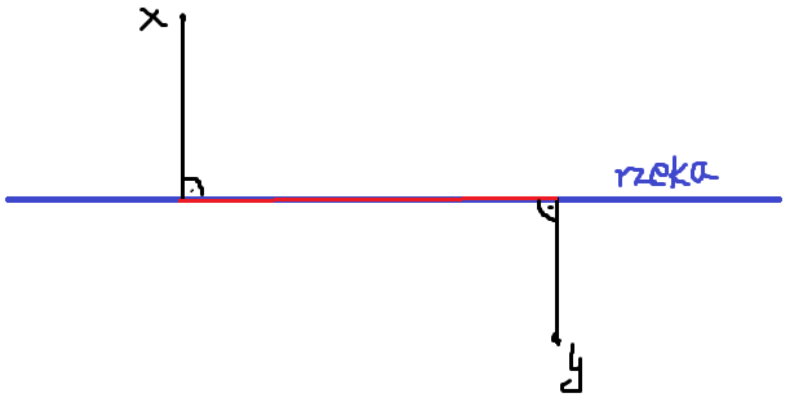
Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ jest gęstym lasem oraz pewna pozioma prosta jest rzeką. Aby zmierzyć odległość dwóch punktów $x, y \in \mathbb{R}^2$, musimy odnaleźć rzekę, wycinając ścieżkę do niej od x, a później z rzeki do y. Dotrzeć do rzeki można tylko ścieżkami, które są do niej prostopadłe.

Mamy dwa przypadki:

1. Jeśli punkty x i y są końcami odcinka prostopadłego do rzeki, to ich odległość jest równa zwykłej odległości euklidesowej na płaszczyźnie.

2. W przeciwnym przypadku, musimy utworzyć dwie ścieżki jedną od punktu x do rzeki, a drugą od rzeki do punktu y, zawsze prostopadle do rzeki. Teraz odległość między punktami będzie równa długości (euklidesowej) obu ścieżek oraz odległości tych ścieżek na rzece.

Tak utworzona funkcja jest metryką w $\mathbb{R}^2$ i nazywamy ją metryką rzeką.



3.7 Metryka dyskretna

Metrykę dyskretną, nazywaną również metryką zero-jedynkową, można zdefiniować w dowolnym niepustym zbiorze X. Odległość pomiędzy dwoma punktami x i y określona jest następująco:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = y, \\ 1, & \text{gdy } x \neq y. \end{cases}$$

Zatem funkcja ta przyjmuje wartość:

- 0, jeśli porównujemy punkt z samym sobą,
- 1, jeśli porównujemy dwa różne punkty.

Tak zdefiniowana funkcja jest metryką, zatem para (X, d) jest przestrzenią metryczną.

Przykłady zastosowań

- Teoria zbiorów i logika: metryka ta dobrze sprawdza się w analizie zbiorów, gdzie interesuje nas tylko to, czy elementy są równe, czy nie.
- Klasyfikacja binarna: w prostych przypadkach, gdzie liczy się wyłącznie zgodność/dyskrepancja między elementami.
- Porównywanie znaków, symboli lub etykiet: np. czy dwa ciągi znaków są identyczne (0), czy różne (1).

Interpretacja geometryczna W metryce dyskretnej wszystkie różne punkty są w tej samej odległości od siebie. Nie istnieje tu pojęcie „bliżej" lub „dalej" – punkt jest albo „tym samym" (odległość 0), albo „innym" (odległość 1). W związku z tym geometria tej przestrzeni jest nietypowa i nie przypomina klasycznej przestrzeni euklidesowej.

3.8 Metryka generowana przez normę

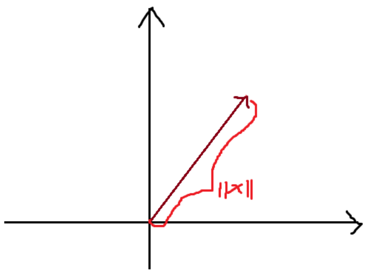
Zacznijmy od przypomnienia czym jest norma.

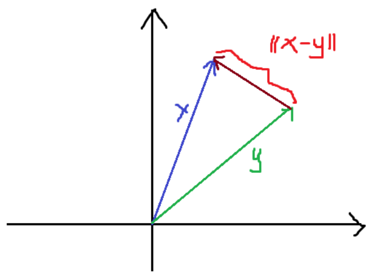
Definicja 3.1. *Odwzorowanie* $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ *nazywa się normą w przestrzeni* X*, jeśli dla wszystkich elementów* $x, y \in X$ *i skalarów* $\alpha \in K$ *spełnia następujące warunki*

1. $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$,
2. $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$,
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Przestrzeń X *z określoną normą* $||\cdot||$ *nazywa się przestrzenią unormowaną.*

Norma to funkcja, która każdemu wektorowi w przestrzeni wektorowej przypisuje liczbę rzeczywistą, reprezentującą jego długość.





Jeżeli $(X, ||\cdot||)$ jest przestrzenią unormowaną, to jako odległość (metrykę) punktów x, y można przyjąć długość (normę) wektora, będącego różnicą x, y, tj.

$$d(x, y) = ||x - y||, \ \textit{dla } x, \ y \in X.$$

Mówimy wtedy, że norma indukuje metrykę w postaci:

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Taka metryka spełnia wszystkie warunki wymagane od funkcji odległości:

- $d(x, y) \geqslant 0$ oraz $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ (z definicji normy),
- $d(x, y) = d(y, x)$ (ponieważ $||x - y|| = ||y - x||$),
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (z nierówności trójkąta dla normy).

W zależności od przyjętej normy, otrzymujemy różne metryki. Przykładowo:

- Norma euklidesowa $||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ generuje klasyczną metrykę euklidesową,
- Norma maksimum $||x||_\infty = \max_i |x_i|$ generuje metrykę Czebyszewa,
- Norma Manhattan (miejska) $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ generuje metrykę taksówkową.

Wszystkie powyższe metryki są więc przykładami metryk indukowanych przez różne normy w przestrzeni unormowanej.

Uwaga 3.1. *Aby metryki odległości działały poprawnie, cechy powinny mieć podobne zakresy wartości. W przeciwnym razie cechy o większym zakresie będą dominować w obliczeniach odległości, niezależnie od ich rzeczywistego znaczenia.*

Na przykład: przy porównywaniu osób na podstawie wieku (18–90 lat) i masy ciała (40–150 kg), masa ciała – ze względu na większy zakres – będzie miała większy wpływ na wynik, nawet jeśli oba atrybuty powinny być traktowane równoważnie.

Aby temu zapobiec, należy przeskalować dane:

- *poprzez normalizację (sprowadzenie wartości do wspólnego zakresu, np. [0,1]),*
- *standaryzację (z użyciem średniej i odchylenia standardowego).*

Jeśli natomiast chcemy świadomie ustalić, jak silny wpływ ma mieć każda cecha, możemy po przeskalowaniu zastosować metrykę ważoną, przypisując poszczególnym cechom ustalone wagi.

4 Podsumowanie

Metrykę można dowolnie definiować, o ile spełnione są jej aksjomaty. Istnieją jednak różne klasy metryk, które można podzielić na kilka głównych grup:

1. Metryki indukowane przez normy
   - Metryka euklidesowa
   - Metryka Manhattan
   - Metryka maksimum
   - Ogólnie metryki Minkowskiego
   - Metryki w przestrzeniach funkcji
2. Metryki niepochodzące od normy
   - Metryka dyskretna
   - metryka ultrametryczna $d(x, y) \leqslant max(d(x, z), d(z, y))$
   - Metryki w teorii grafów
   - Metryki w przestrzeniach probabilistycznych
3. Metryki definiowane przez specyficzne potrzeby
   - Metryka Hammingowa – liczba różnych znaków między dwoma ciągami o tej samej długości.
   - Metryka Jaccarda – używana w analizie zbiorów (np. w NLP i analizie danych).
   - Metryka edycyjna (Levenshteina) – liczba operacji potrzebnych do przekształcenia jednego ciągu znaków w drugi.

5 Przykłady zastosowania

Metryka to narzędzie nie tylko teoretyczne, ale także bardzo praktyczne, wykorzystywane w różnych dziedzinach, takich jak nawigacja w miastach, analiza danych w naukach ścisłych czy algorytmy komputerowe.

W uczeniu maszynowym i analizie danych:

- Metryka euklidesowa – do obliczania odległości między punktami w klasteryzacji (np. algorytm k-średnich).
- Metryka Manhattan – wykorzystywana w drzewach decyzyjnych i analizie tekstu.
- Metryka Minkowskiego – w różnych metodach klasyfikacji, np. k-NN (k-Nearest Neighbors).

Rozpoznawanie obrazów i dźwięku:

- Metryka Cosine Similarity – mierzy podobieństwo wektorów cech obrazów, dźwięków czy tekstu.
- Metryka Hammingowa – w porównywaniu kodów binarnych i danych w bazach genetycznych.

Wyszukiwanie informacji i analiza tekstu:

- Metryka Levenshteina (edycyjna) – do sprawdzania błędów ortograficznych, autokorekty i wyszukiwania podobnych słów (np. Google, T9 w telefonach).
- Metryka Jaccarda – do porównywania podobieństwa dokumentów (np. filtrowanie spamu).

GPS i mapy:

- Metryka euklidesowa
- Metryka Manhattan
- Metryka geodezyjna – mierzy odległość na powierzchni Ziemi, uwzględniając jej kulistość.

Robotyka i sterowanie autonomiczne:

- Metryka Czebyszewa – używana w nawigacji robotów, gdzie ruch może odbywać się w dowolnym kierunku (np. drony).

Genetyka i biologia molekularna:

- Metryka Hammingowa – porównywanie sekwencji DNA/RNA, wykrywanie mutacji.
- Metryka Levenshteina – analiza różnic między sekwencjami genetycznymi.

Medycyna i diagnostyka obrazowa:

- Metryka euklidesowa – w analizie obrazów medycznych (np. wykrywanie nowotworów na zdjęciach MRI).
- Metryka Wassersteina (Earth Mover's Distance) – porównywanie rozkładów danych w analizie obrazów medycznych.

Analiza rynków finansowych:

- Metryka euklidesowa i Manhattan – do mierzenia podobieństwa między profilami inwestorów lub strategiami giełdowymi.
- Metryka Mahalanobisa – do analizy ryzyka i wykrywania oszustw finansowych.

Mechanika kwantowa i fizyka teoretyczna:

- Metryka Hilberta – w przestrzeniach funkcji falowych w mechanice kwantowej.
- Metryka Lorentza – w teorii względności do obliczania odległości w czasoprzestrzeni.

Analiza numeryczna i optymalizacja:

- Metryka p-adyczna – w teorii liczb i kryptografii.
- Metryki w topologii – do badania zbieżności funkcji i przestrzeni funkcjonalnych.

Literatura

[1] Wikipedia: *Metric space*, https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space [dostęp: kwiecień 2025].

[2] Z. Gliczyński, *Topologia obliczeniowa (materiały dydaktyczne)*, Uniwersytet Jagielloński, 2013/14.
https://ww2.ii.uj.edu.pl/...

[3] PQStat Software, *Podręcznik użytkownika*, https://manuals.pqstat.pl/...

[4] K. Gałuszka, *Wstęp do analizy danych*, Uniwersytet Wrocławski, https://www.math.uni.wroc.pl/...

[5] MIMUW, *Wprowadzenie do przestrzeni metrycznych*, http://smurf.mimuw.edu.pl/...