DEF. **Zdaniem logicznym** w logice nazywamy wyrażenie oznajmujące, o którym można powiedzieć, że jest fałszywe lub prawdziwe.

ozn. zdania: p, q, r itp.
Wartość logiczna zdania (czy prawda czy fałsz) :
$w(p) = 0$ fałsz
$w(p) = 1$ prawda

Zdanie złożone w logice jest zbudowane z dwóch zdań prostych, połączonych spójnikami „i” , „lub”.

*dysjunkcja jest negacją koniunkcji $(p / q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

SYMBOL LOGICZNY	SPÓJNIK	NAZWA ZDANIA ZŁOŻONEGO
$\wedge$	i	Koniunkcja
$\vee$	lub	Alternatywa
$\neg$, ~	Nieprawda, że…	Negacja (zaprzeczenie)
=>	Jeżeli…, to…	Implikacja
$\Leftrightarrow$	Wtedy i tylko wtedy, gdy…	Równoważność
/	Albo…, albo…	dysjunkcja

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	* p / q
0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Prawa De Morgana
I prawo De Morgana:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

II prawo De Morgana:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

ZAMKNIĘTY UKŁAD TWIERDZEŃ (KWADRAT LOGICZNY)

proste
$p \Rightarrow q$

odwrotne
$q \Rightarrow p$

równoważna

przeciwne
$\sim p \Rightarrow \sim q$

przeciwstawne
$\sim q \Rightarrow \sim p$

DEF <u>Prawem rachunku zdań</u> nazywamy zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe
(inaczej nazywane prawem logicznym lub tautologią)
Np.: p ˅ ¬p

<u>Metoda zerojedynkowa</u> polega na sprawdzeniu, czy wartość logiczna badanego zdania jest równa 1, dla każdego możliwego wartościowania zmiennych w niej występujących.
Przykład:
[(p ˅ q) ^ (q => p)] => (q ⇔ p)
L => P

p	q	p ˅ q	q=>p	(p˅q) ^(q=>p)	q⇔p	L => P
0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Zdanie nie jest prawem logicznym, ponieważ przy kolumnie L => P nie ma samych 1, więc zdanie nie jest zawsze prawdziwe.
nieobowiązkowa tabelka

Nazwa tautologii	Tautologia
prawo wyłączonego środka	$p \vee (\sim p)$
prawo sprzeczności	$\sim(p \wedge (\sim p))$
prawo podwójnej negacji	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
I prawo de Morgana	$(\sim(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$
II prawo de Morgana	$(\sim(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$
prawo odrywania	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
prawo negacji implikacji	$(\sim(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$
rozdzielność koniunkcji względem alternatywy	$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
rozdzielność alternatywy względem koniunkcji	$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

***Warunek konieczny i warunek wystarczający**
Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, to mówimy, że p jest warunkiem wystarczającym dla q, a q jest warunkiem koniecznym dla p.
Warunek wystarczający nazywany jest też warunkiem dostatecznym.

Przykłady:
Podzielność liczby całkowitej przez 2 i przez 3 jest warunkiem koniecznym i wystarczającym podzielności tej liczby przez 6.
Podzielność liczby całkowitej przez 10 jest warunkiem wystarczającym podzielności tej liczby przez 5.

Inny przykład:
jeżeli liczba jest podzielna przez 15, to jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.
Jest to oczywiste, bo liczba podzielna przez 15 jest podzielna przez 5. Zatem to, że ostatnią cyfrą liczby jest 0 lub 5 jest warunkiem koniecznym dla podzielności przez 15.
Nie jest to jednak warunek wystarczający — liczba może kończyć się na 0 lub 5, a jednak nie być podzielna przez 15 (np. 20, 35).
Warunkiem wystarczającym dla podzielności liczby przez 15, jest jej podzielność przez 5 i jednocześnie przez 3.

Kwantyfikatory

- Kwantyfikator ogólny (inaczej kw. duży lub kw. uniwersalny)
  Przykład:
  $\bigwedge_{x\in R} \quad x^2 \geq 0$
  [czyt.. Dla każdego x należącego do liczb rzeczywistych $x^2 > 0$]

- Kwantyfikator szczegółowy (inaczej kw. mały lub kw. egzystencjalny)
  Przykład:
  $\bigvee_{x\in R} \quad x^2 \geq 0$
  [czyt. istnieje takie x należące do R, że $x^2 \geq 0$]

UWAGA: inne oznaczenia pochodzące z języka angielskiego, międzynarodowe
(raczej nie stosowane w liceum)

- ∀ → **A**ll (wszystkie)
- ∃ → **E**xists (istnieje)

Przykład:
p: $\bigwedge_{x\in R} \quad x^2 \geq 5$
w(p)=0, ponieważ x=2 ∈ R $2^2 < 5$

q: $\bigvee_{x\in(-1,1)} \quad x^2 = 0$
w(q)=1, ponieważ istnieje x=0 ∈ (-1,1), że $x^2 = 0$

ZADANIA:

Zadanie 1 Sprawdź metodą zerojedynkową poniższe wyrażenia logiczne, czy są tautologiami:

a) $\sim (p \vee q) <=> \sim p \ \wedge \sim q$
b) $\left(p \vee (q \wedge r)\right) <=> (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
c) $\left((p \wedge q) => r\right) => \left(p => (q => r)\right)$
d) ~(~(~p$^\vee$q) => p) => (~p ⇔q)

Zadanie 2 Wyznacz wartości logiczne zdań:

a) $\frac{|\sqrt{71}-2\sqrt{29}|+|-2\sqrt{29}+176+\sqrt{71}|}{88}$ >0 => $\frac{|\sqrt{162}-\sqrt{243}|}{9}$-$\sqrt{3}$ = $\frac{\sqrt[6]{32}^{3}}{(16^{\frac{1}{2}})^{2}:\sqrt[3]{4^{2}}}$

b) $\frac{\sqrt{16-8\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt{3}} = -1 \vee 0 \in NW <=> \bigwedge_{x\in C}$ $|x - 2| = \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{148}} \cdot 8$ ^$\bigvee_{x\in N_+}$ $\left||x| + \sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$

i uzasadnij przykładami:

c) $\wedge_{x\in C}\ 2|k(k+1)$
d) $\vee_{x\in R}\ 2x + 5 = 6$
e) $\wedge_{x\in R} \bigwedge_{y\in R} \quad x^2 + y^2 > 0$
f) $\wedge_{x\in R} \bigvee_{y\in R} \quad x + y = 100$

Zadanie 3

Dane są trzy zdania prawdziwe:

p: Ania ma zawsze dobre pomysły.

q: Dawid dobrze gra w koszykówkę.

s: Basia nie jest najlepsza w matematyce.

Zapisz symbolicznie następujące zdanie: jeśli Dawid gra dobrze w koszykówkę i Basia jest najlepsza w matematyce, to Ania nie zawsze ma dobre pomysły. Oceń jego wartość logiczną.

Zadanie 4

Dane są dwa wyrażenia p: x < 5 q: x ≥ -1

Podaj przykłady dwóch liczb dla których prawdziwa jest:

a) Koniunkcja utworzona z tych wyrażeń.

b) Alternatywa utworzona z tych wyrażeń, a nieprawdziwa jest koniunkcja.

c) Koniunkcja zaprzeczeń obu wyrażeń.

d) Koniunkcja p i negacji q.

e) Alternatywa q i negacji p.

Zadanie 5 Oceń wartość logiczną poniższych zdań.

a) 3 : 2 = 6 <=> 4 · 70 = 4

b) 4 ≥ 2 ^ 7 < 8

c) ~ (3 > 4) $^\vee$ 1/4 < 1/3

d) 32 = 2 => 43 = 64

e) 40= 4 · 1 ^ 7 ≥ - 2

Zadanie 6 Zapisz za pomocą symboli matematycznych:

a) Dla każdego x rzeczywistego, jest kwadrat jest większy lub równy zero
b) Dla każdego n naturalnego $(-1)^n$ jest równe 1 lub -1
c) Zbiór liczb naturalnych nieparzystych
d) Zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 6

Zadanie 7

Oceń wartość logiczną zdania „Istnieje liczba całkowita, której kwadrat jest nie większy od tej liczby powiększonej o 1." I zapisz je, używając kwantyfikatorów i symboli matematycznych. Podaj jego negację.

Zadanie 8 Wyznacz wszystkie liczby spełniające formę zdaniową
$a(x):[(2x+3>0) \Rightarrow (3-0{,}5x \geq 0)]$.

Zadanie 9

Określ, czy podane wyrażenie jest zdaniem logicznym lub formą zdaniową. Odpowiedź uzasadnij, korzystając z odpowiednich definicji. Formy zdaniowe i zdania zapisz za pomocą kwantyfikatorów i symboli matematycznych.
a) Istnieje liczba rzeczywista a, której kwadrat jest nieujemny i mniejszy od dowolnej liczby naturalnej n.
b) Suma liczb x+1 i kwadratu liczby x jest równa 10.
c) Czy π jest liczbą wymierną?

ZAZNACZ POPRAWNE ODPOWIEDZI (test wielokrotnego wyboru)
1. Dane jest zdanie p: „Każdy Polak mieszka w Europie lub stolicą Polski jest Gdańsk".
a) Zdanie p jest fałszywe.
b) Zaprzeczeniem zdania p jest zdanie: „Istnieją Polacy, którzy nie mieszkają w Europie lub stolicą Polski nie jest Gdańsk".
c) Zaprzeczeniem zdania p jest zdanie: „Istnieją Polacy, którzy nie mieszkają w Europie i stolicą Polski nie jest Gdańsk".

2. Wartość logiczna następującego zdania jest równa 1:
a) $\forall x \in R : x^2 - 1 = 0$
b) $\forall x \in \{-1,1\} : x^2 - 1 = 0$
c) $\exists x \in R : x^2 - 1 = 0$

3. Koniunkcja p^q jest prawdziwa. Wówczas:
a) alternatywa p˅(¬q) jest prawdziwa,

b) koniunkcja (¬p) ^ (¬q) jest fałszywa,
c) implikacja p => (¬q) jest prawdziwa.

4. Rozważmy wyrażenie $\forall x \in R : (x_2 > 0 \vee x + 0).$:
a) Wyrażenie to jest formą zdaniową.
b) Wyrażenie to jest zdaniem logicznym prawdziwym.
c) Zaprzeczenie tego wyrażenia ma postać $\forall x \in R : (x^2 \leq 0 \wedge x \neq 0).$:

5. Zaprzeczeniem zdania: „Jeśli rozwiążę wszystkie zadania ze zbioru, to dostanę piątkę z testu” jest zdanie:
a) „Jeśli nie rozwiążę żadnego zadania ze zbioru, to nie dostanę piątki z testu”.
b) „Nie rozwiążę żadnego zadania ze zbioru i dostanę piątkę z testu”.
c) „Rozwiążę wszystkie zadania ze zbioru i nie dostanę piątki z testu:.

6. Wyrażenie $\forall x \in N : x \leq x^2$:
a) jest zdaniem logicznym prawdziwym,
b) można odczytać w następujący sposób: „Dowolna liczba naturalna nie jest większa niż kwadrat tej liczby”,
c) jego zaprzeczeniem jest wyrażenie $\exists x \in N : x \leq x^2$.