# Analiza numeryczna (L). Wykład VIII.

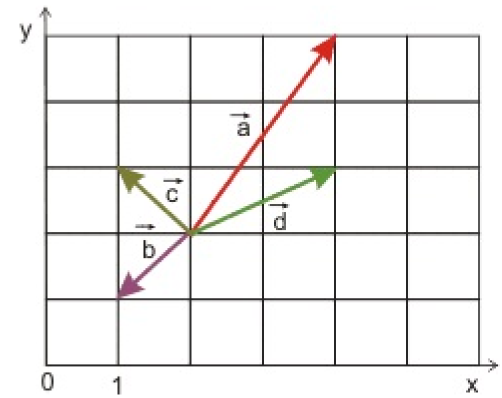
## *Krzywe Béziera*

Paweł Woźny

Wrocław, 5 grudnia 2018 r.

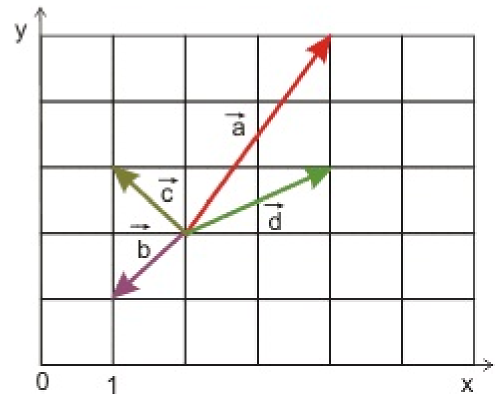
# Punkty i wektory

- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt



# Punkty i wektory

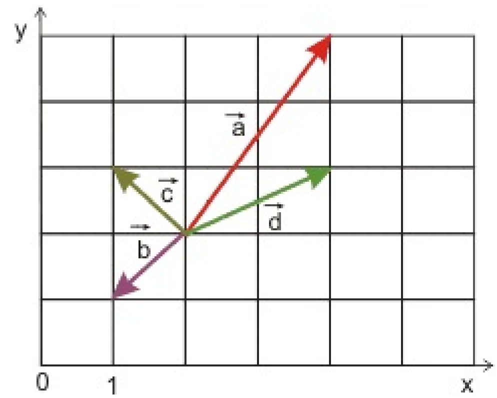
- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt.




**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

# Punkty i wektory

- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt.

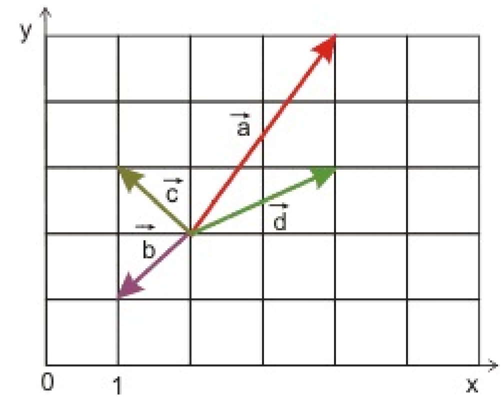



**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie

# Punkty i wektory

- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt.

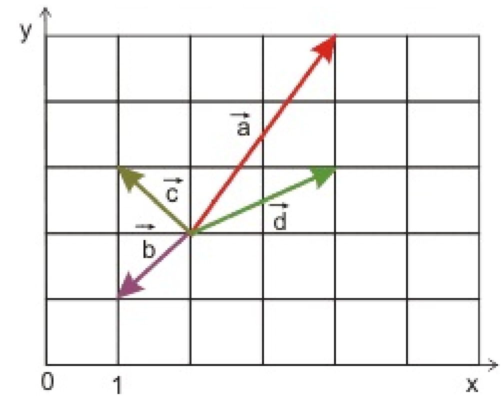



**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$

# Punkty i wektory

- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt.

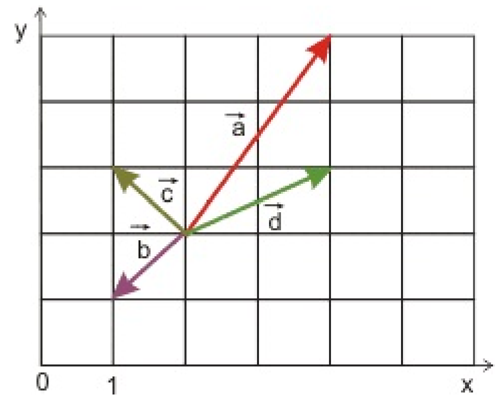



**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right) A + \frac{2}{3}B$

# Punkty i wektory

- punkt $-$ punkt $=$ wektor,
- liczba $\cdot$ wektor $=$ wektor,
- wektor $\pm$ wektor $=$ wektor,
- punkt $\pm$ wektor $=$ punkt.

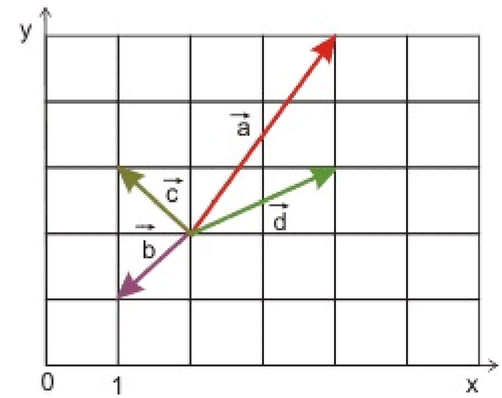



**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right) A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A)$

# Punkty i wektory

- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt.

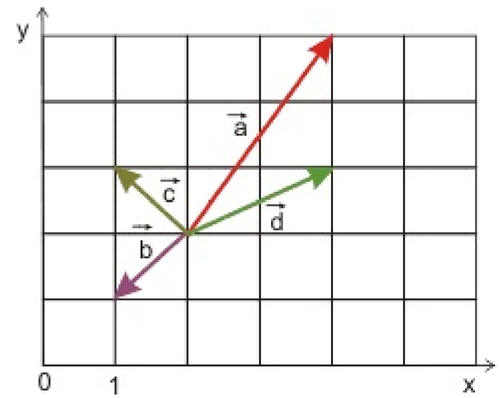



**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right) A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow$ $\boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$

# Punkty i wektory

- punkt $-$ punkt $=$ wektor,
- liczba $\cdot$ wektor $=$ wektor,
- wektor $\pm$ wektor $=$ wektor,
- punkt $\pm$ wektor $=$ punkt.

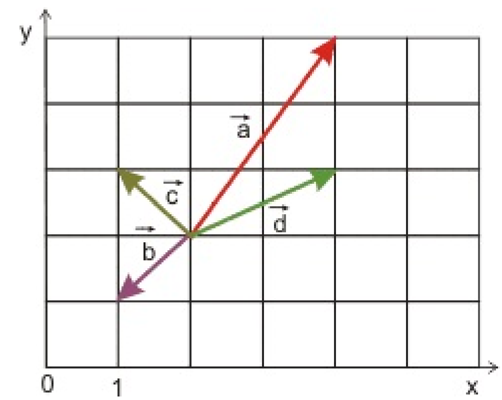



**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right) A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad$ $\boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $9A - 8B$

# Punkty i wektory

- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt.

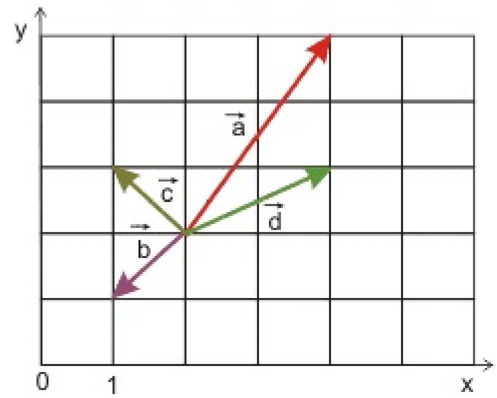



**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right)A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $9A - 8B = 9A + (1 - 9)B$

# Punkty i wektory

- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt.

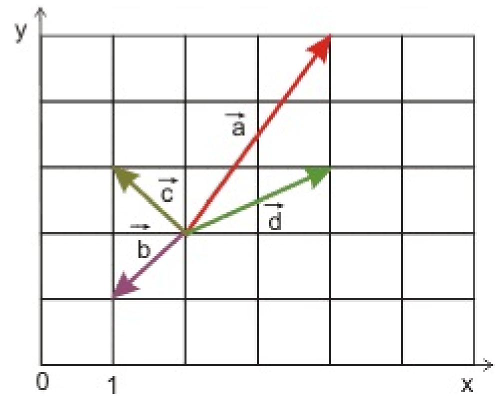



**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right)A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $9A - 8B = 9A + (1-9)B = B + 9(A - B) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$

# Punkty i wektory

- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt.

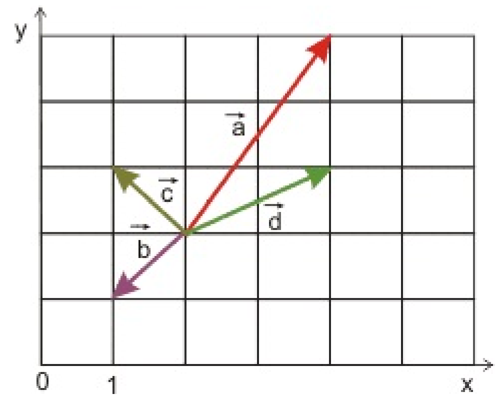



**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right) A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $9A{-}8B = 9A + (1-9)B = B + 9(A - B) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $2A + 3B = ???$

# Punkty i wektory

- punkt − punkt = wektor,
- liczba · wektor = wektor,
- wektor ± wektor = wektor,
- punkt ± wektor = punkt.




**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $A, B$ będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right)A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt + wektor = punkt}}$
- $9A - 8B = 9A + (1 - 9)B = B + 9(A - B) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt + wektor = punkt}}$
- $2A + 3B = ??? \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{Problem, bo } 2 + 3 \neq 1}$

# Punkty i wektory

**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

# Punkty i wektory

**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $W_0, W_1, \ldots, W_n$ będą punktami na płaszczyźnie

# Punkty i wektory

**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $W_0, W_1, \ldots, W_n$ będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$

# Punkty i wektory

**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $W_0, W_1, \ldots, W_n$ będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$.
- Wyrażenie
$$\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \ldots + \alpha_n W_n$$
nazywamy kombinacją barycentryczną punktów

# Punkty i wektory

**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $W_0, W_1, \ldots, W_n$ będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$.
- Wyrażenie
$$\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \ldots + \alpha_n W_n$$
nazywamy kombinacją barycentryczną punktów i utożsamiamy z punktem postaci
$$\underbrace{W_0}_{\text{punkt}} + \underbrace{\alpha_1(W_1 - W_0) + \alpha_2(W_2 - W_0) + \ldots + \alpha_n(W_n - W_0)}_{\text{wektor}}$$

# Punkty i wektory

**Pytanie.** A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech $W_0, W_1, \ldots, W_n$ będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$.
- Wyrażenie
$$\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \ldots + \alpha_n W_n$$
nazywamy kombinacją barycentryczną punktów i utożsamiamy z punktem postaci
$$\underbrace{W_0}_{\text{punkt}} + \underbrace{\alpha_1(W_1 - W_0) + \alpha_2(W_2 - W_0) + \ldots + \alpha_n(W_n - W_0)}_{\text{wektor}}.$$

**Fakt.** Kombinacja barycentryczna punktów określona jest jednoznacznie

# Wielomiany Bernsteina

- Wielomiany Bernsteina

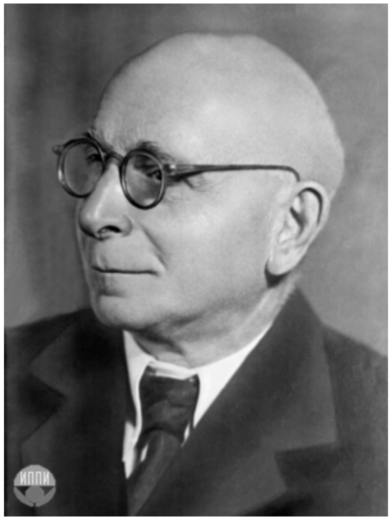
$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N})$$

# Wielomiany Bernsteina

- Wielomiany Bernsteina

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}).$$

- Używając wielomianów $B_k^n$, Bernstein podaje w roku 1912 prosty i konstruktywny dowód aproksymacyjnego twierdzenia Weierstrassa.

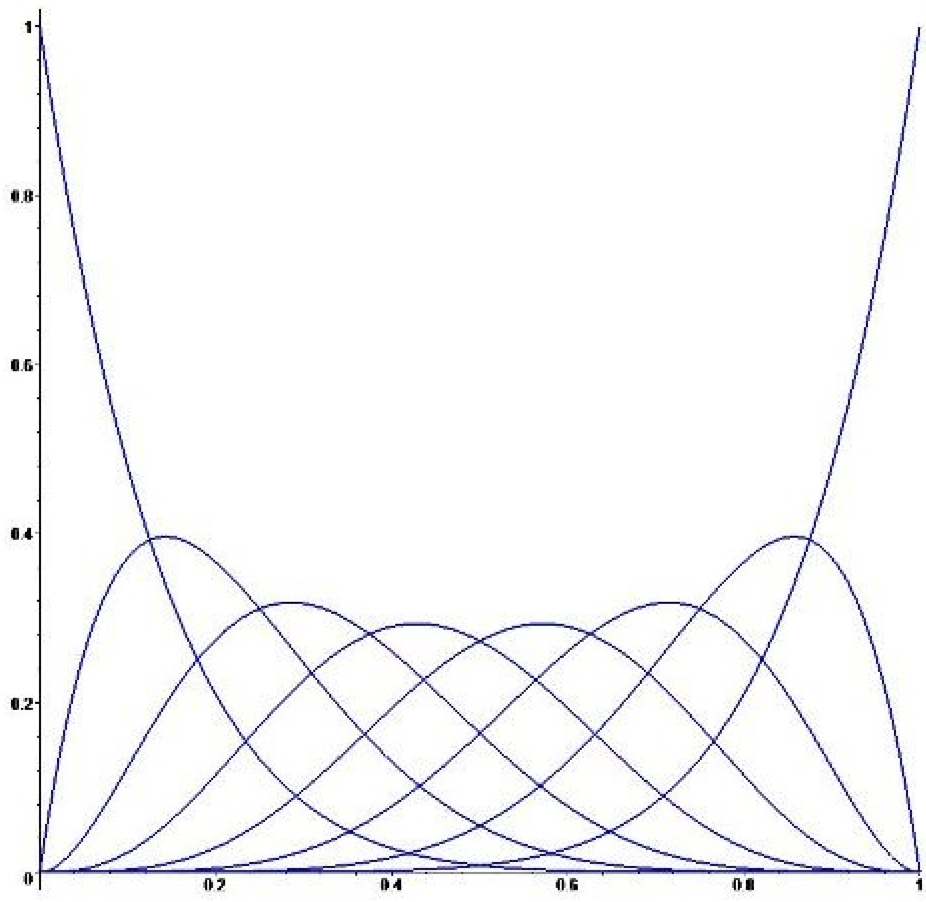


S. N. Bernstein (1880–1968)

# Wielomiany Bernsteina

- Wielomiany Bernsteina (1912)

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}).$$




$\Leftarrow\ B_k^7(x),\ x \in [0, 1]$

# Wielomiany Bernsteina

- Wielomiany Bernsteina (1912)

$$B^n_k(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\; n \in \mathbb{N}).$$

- Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$B^n_0(x) + B^n_1(x) + \ldots + B^n_{n-1}(x) + B^n_n(x) = 1$$

# Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

# Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.
- Krzywą parametryczną postaci

$$P(t) := B_0^n(t)W_0 + B_1^n(t)W_1 + \ldots + B_n^n(t)W_n \qquad (0 \le t \le 1)$$

nazywamy krzywą Béziera stopnia $n$

# Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$
- Krzywą parametryczną postaci

$$P(t) := B_0^n(t)W_0 + B_1^n(t)W_1 + \ldots + B_n^n(t)W_n \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

nazywamy krzywą Béziera stopnia $n$, a punkty $W_k$ – jej punktami kontrolnymi

# Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$
- Krzywą parametryczną postaci

$$P(t) := B_0^n(t)W_0 + B_1^n(t)W_1 + \ldots + B_n^n(t)W_n \qquad (0 \le t \le 1)$$

  nazywamy krzywą Béziera stopnia $n$, a punkty $W_k$ – jej punktami kontrolnymi.

- Zauważmy, że $P(t)$ ($t$ – dowolne) jest kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych

# Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

- Krzywą parametryczną postaci

$$P(t) := B_0^n(t)W_0 + B_1^n(t)W_1 + \ldots + B_n^n(t)W_n \qquad (0 \le t \le 1)$$

  nazywamy krzywą Béziera stopnia $n$, a punkty $W_k$ – jej punktami kontrolnymi.

- Zauważmy, że $P(t)$ ($t$ – dowolne) jest kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych – czyli punktem na płaszczyźnie,

$$P\ :\ [0, 1] \longrightarrow \text{ punkt w } \mathbb{R}^2$$

# Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

- Krzywą parametryczną postaci

$$P(t) := B_0^n(t)W_0 + B_1^n(t)W_1 + \ldots + B_n^n(t)W_n \qquad (0 \le t \le 1)$$

  nazywamy krzywą Béziera stopnia $n$, a punkty $W_k$ – jej punktami kontrolnymi.

- Zauważmy, że $P(t)$ ($t$ – dowolne) jest kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych – czyli punktem na płaszczyźnie,

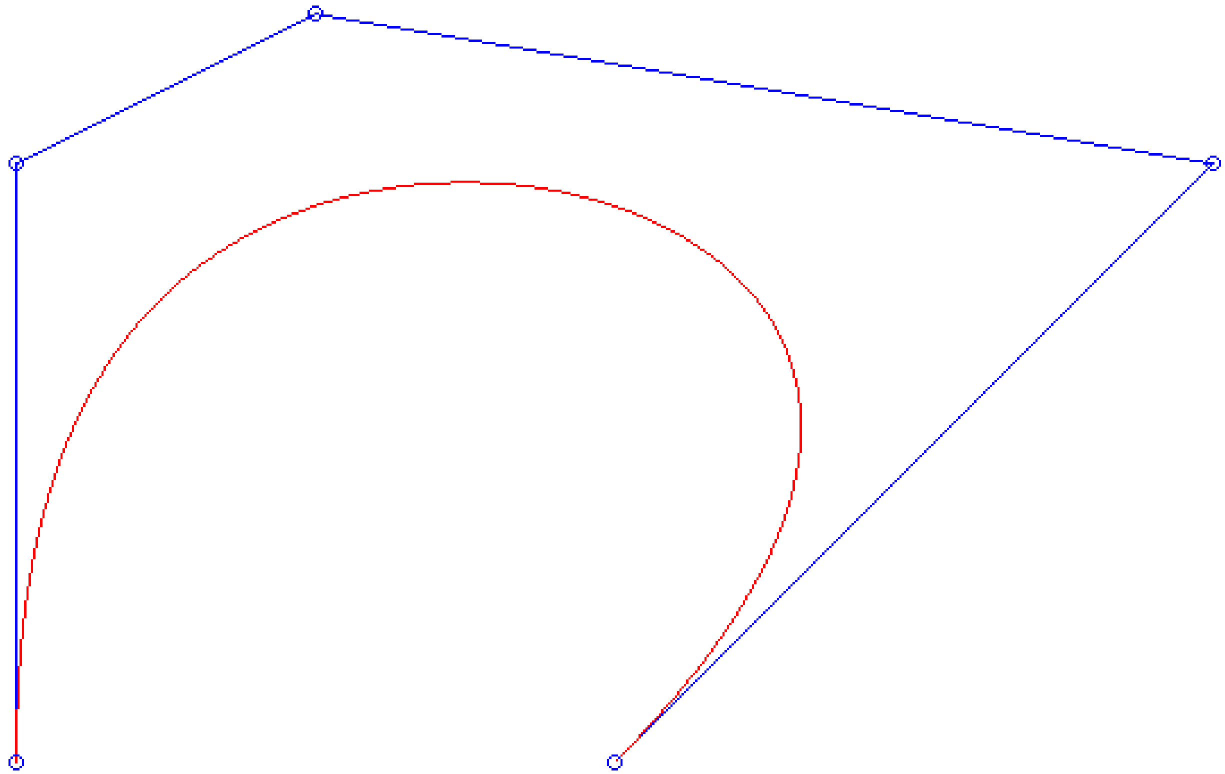
$$P\ :\ [0, 1] \longrightarrow \text{ punkt w } \mathbb{R}^2.$$

- Podstawowe własności

$$P(0) = W_0, \qquad P(1) = W_n, \qquad P([0, 1]) \subset \operatorname{conv}\{W_0, W_1, \ldots, W_n\},$$

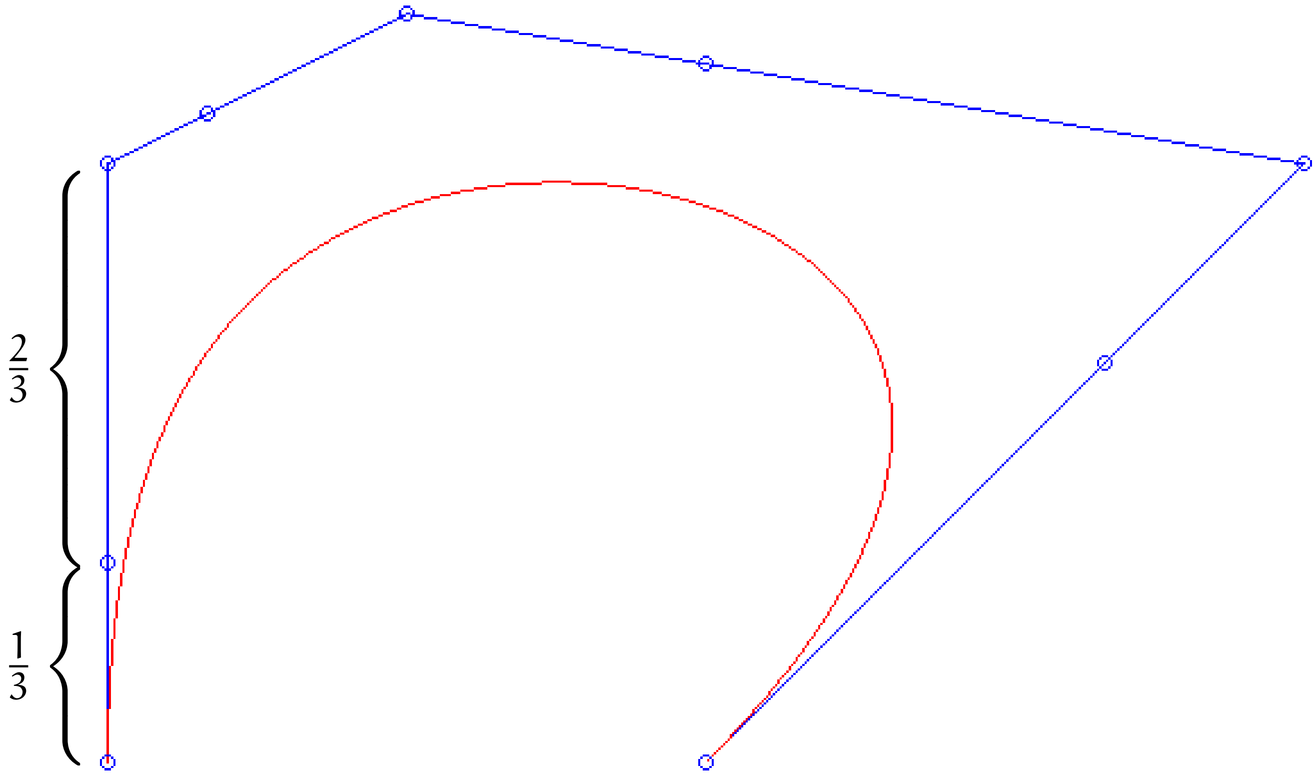
$$P'(0) = n(W_1 - W_0), \qquad P'(1) = n(W_n - W_{n-1})$$

# Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



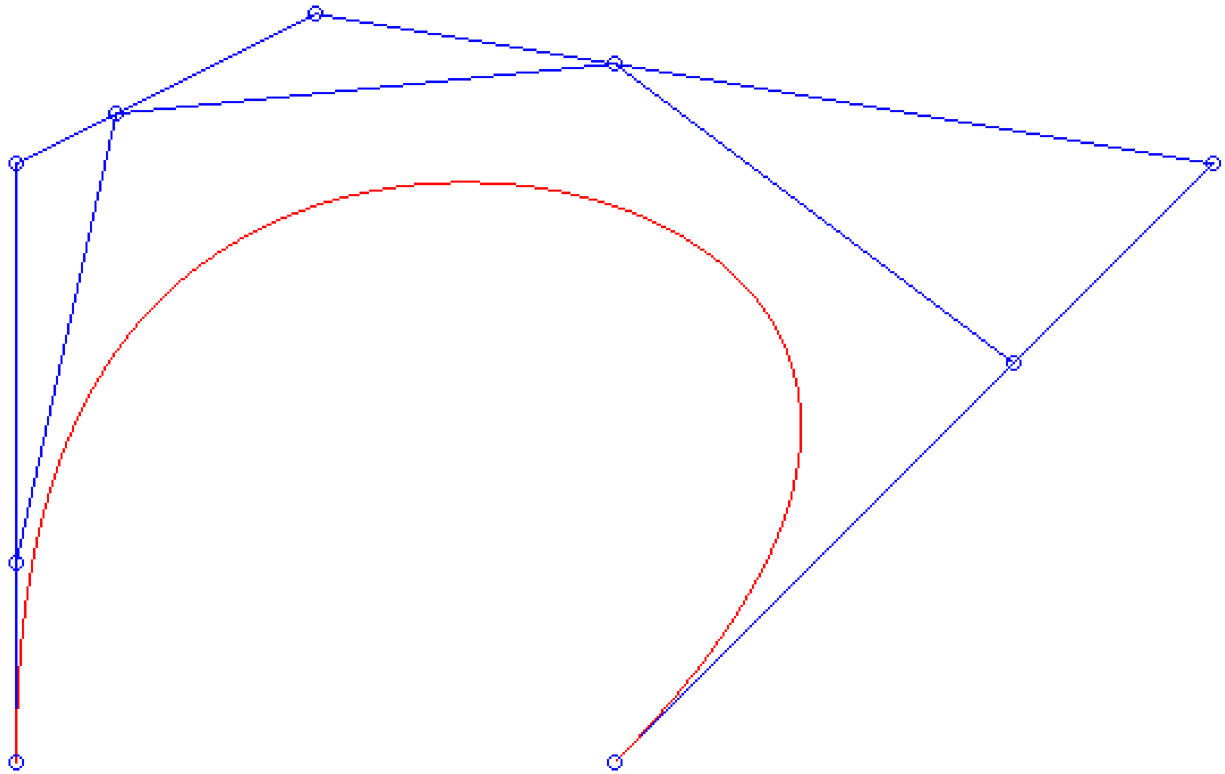
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

# Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



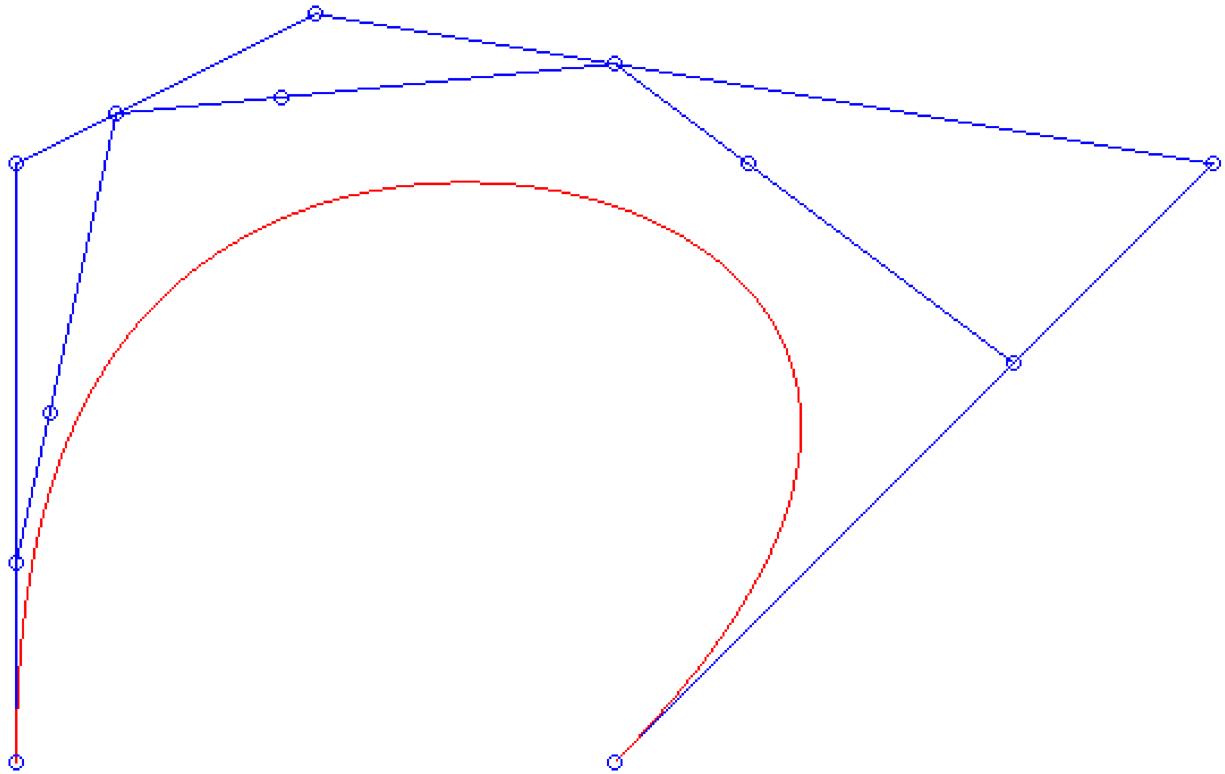

Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

# Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



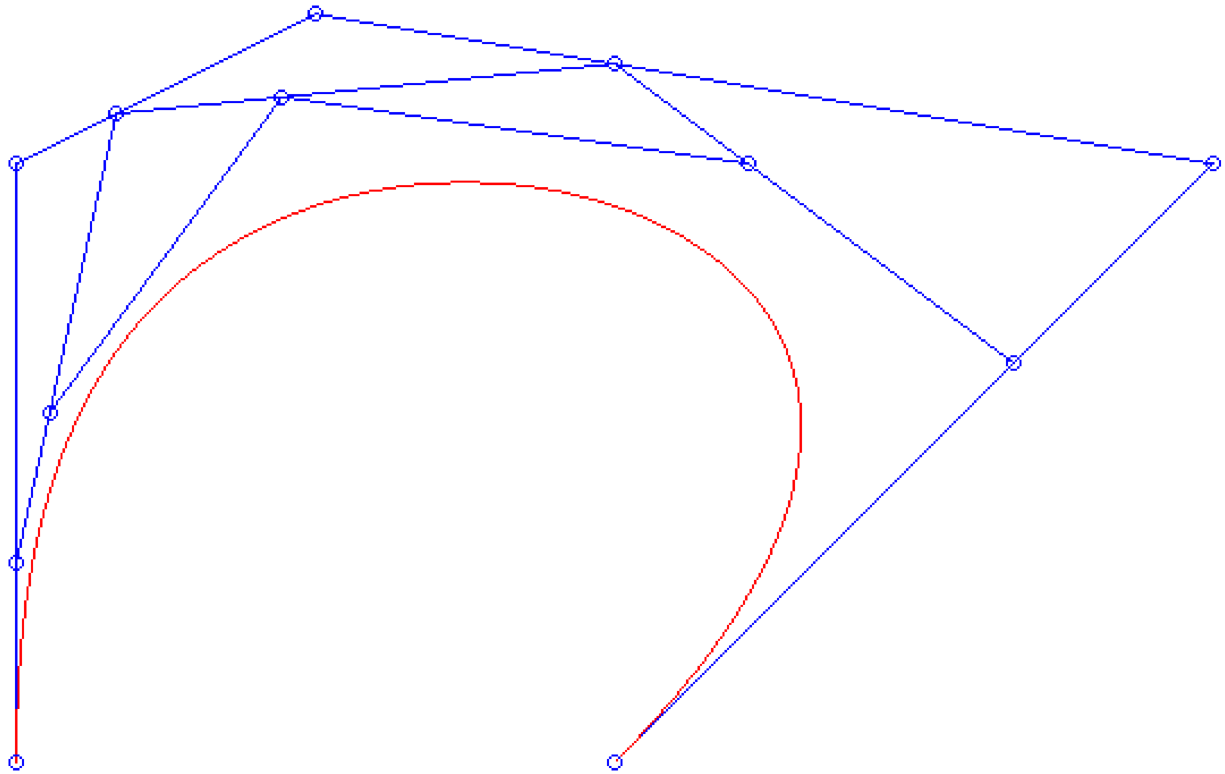
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

# Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



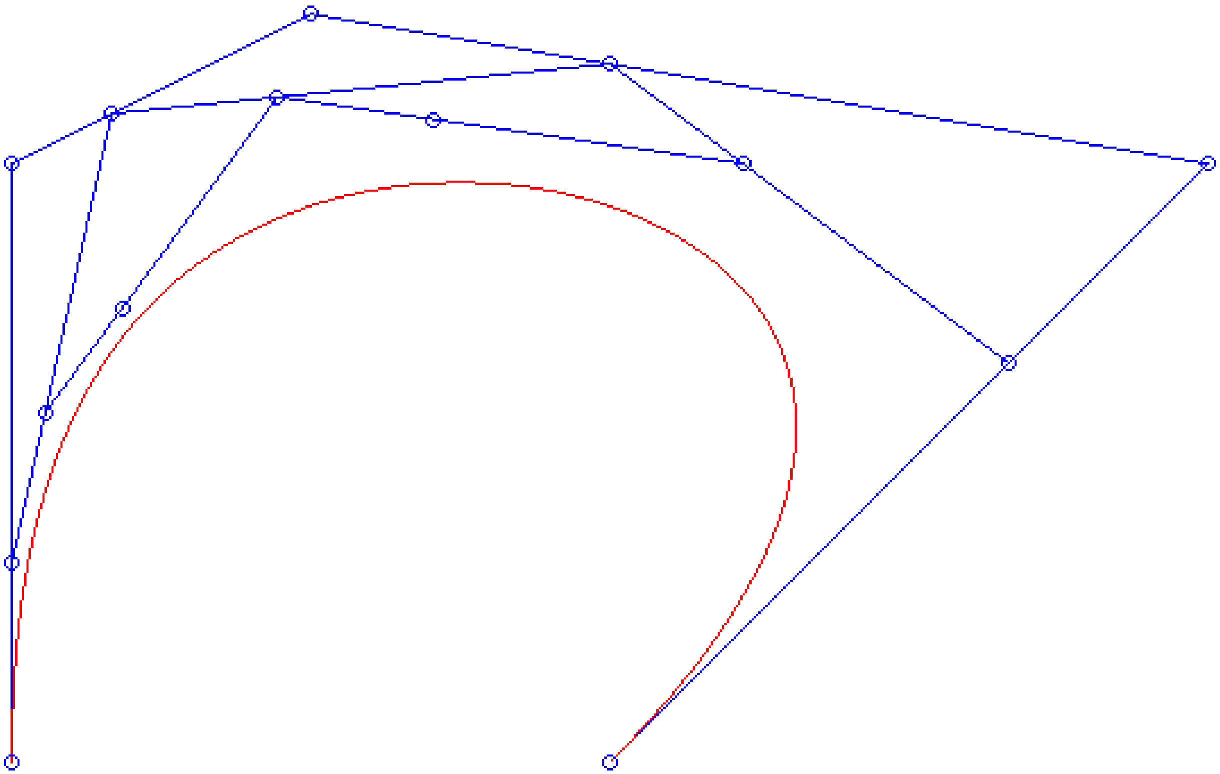
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

# Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



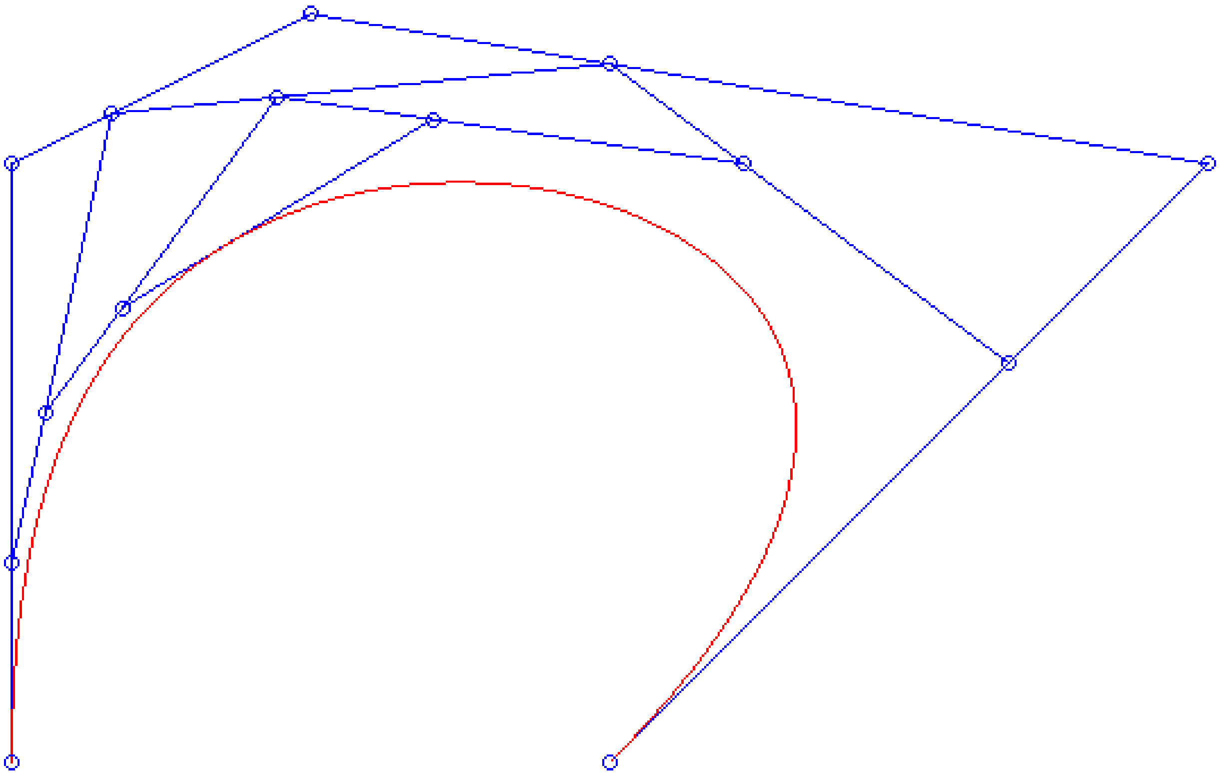
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $\mathbf{P}(1/3) = ?$

# Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



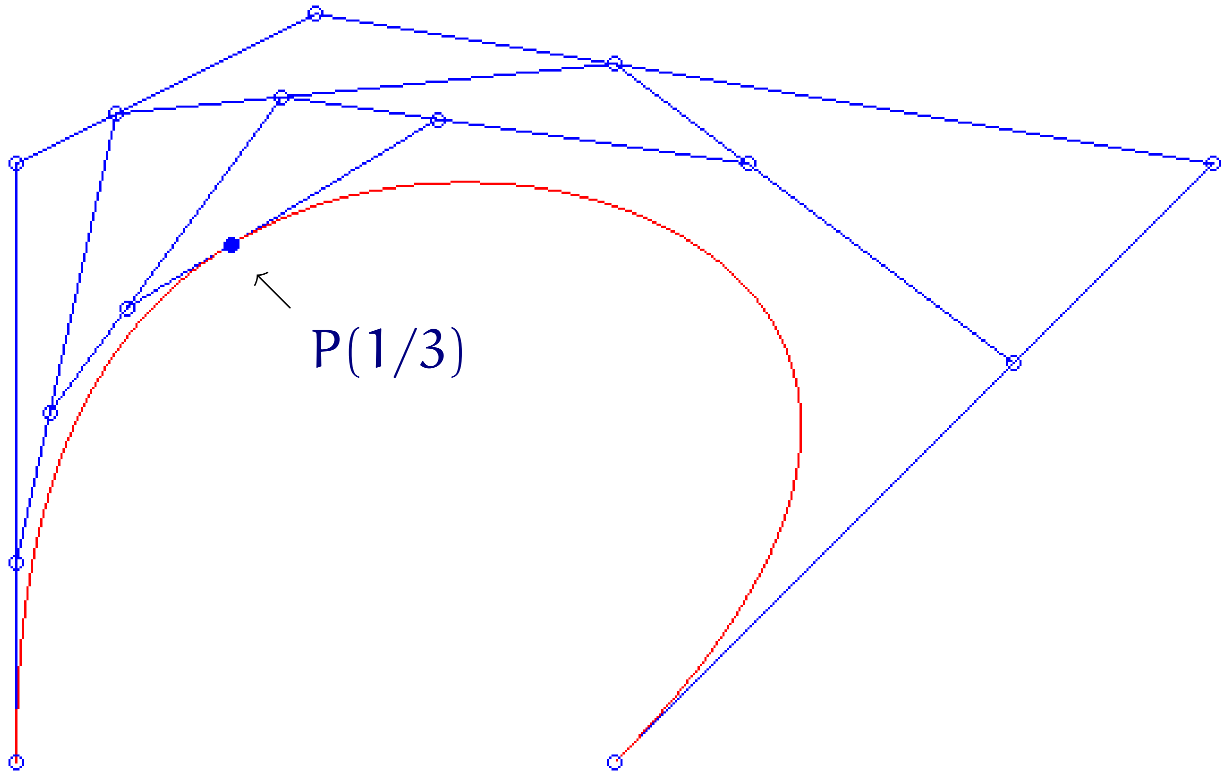
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $\mathrm{P}(1/3) = ?$

# Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $\mathrm{P}(1/3) = ?$

# Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



## Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(0, 1, \ldots, n)$ oraz liczba $t \in [0, 1]$

# Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(0, 1, \ldots, n)$ oraz liczba $t \in [0, 1]$.

- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-i)$ będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1-t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-i)$$

# Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(0, 1, \ldots, n)$ oraz liczba $t \in [0, 1]$.
- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n - i)$ będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n - i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$

# Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(0, 1, \ldots, n)$ oraz liczba $t \in [0, 1]$.

- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-i)$ będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1-t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.

- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$

# Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(0, 1, \ldots, n)$ oraz liczba $t \in [0, 1]$.

- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n - i)$ będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n - i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.

- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$.

- Czy można szybciej?

## Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(0, 1, \ldots, n)$ oraz liczba $t \in [0, 1]$.

- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-i)$ będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1-t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.

- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$.

- Czy można szybciej?

  Tak!

# Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(0, 1, \ldots, n)$ oraz liczba $t \in [0, 1]$.

- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n - i)$ będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n - i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.

- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$.

- Czy można szybciej?

Tak! $\Rightarrow$ Schemat Hornera

# Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{R}^2$ $(0, 1, \ldots, n)$ oraz liczba $t \in [0, 1]$.

- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-i)$ będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1-t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.

- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$.

- Czy można szybciej?

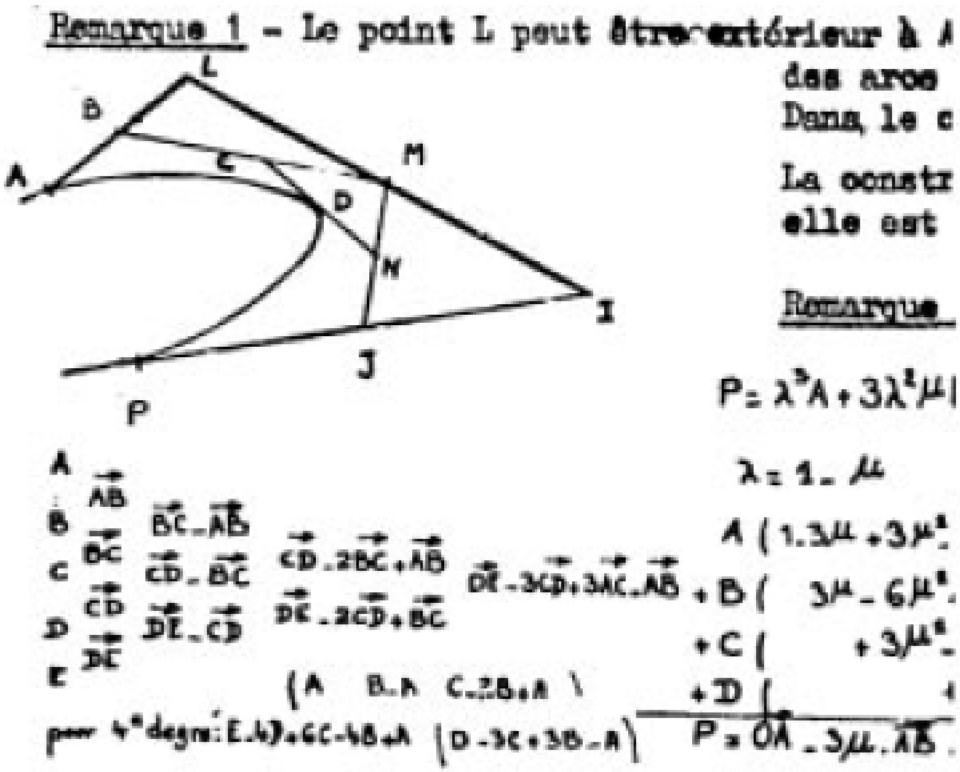
Tak! $\Rightarrow$ Schemat Hornera $\Rightarrow$ $P(t)$ obliczamy w czasie $O(n)$

# Trochę historii

Pierre Bézier (1910–1999)

Paul de Casteljau (ur. 1930)

# Trochę historii




Paul de Casteljau (ur. 1930)