

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 4

24 października 2018 r.

Zajęcia 30 października 2018 r.  
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

**L4.1.** 1 punkt Niech  $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$  będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji  $f$  ciągłej w przedziale  $[a_0, b_0]$ , niech ponadto  $m_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ ,  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$  oraz  $e_n := \alpha - m_n$ .

(a) Wykaż, że  $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$  ( $n = 0, 1, \dots$ ).

(b) Ile wynosi długość przedziału  $[a_n, b_n]$  ( $n = 0, 1, \dots$ )?

(c) Wykaż, że

$$(1) \quad |e_n| \leq 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad (n \geq 0).$$

(d) Czy może zdarzyć się, że  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ ?

**L4.2.** 1 punkt Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero  $\alpha$  z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba  $\varepsilon > 0$ ?

**L4.3.** **Włącz komputer!** 1 punkt Miejsmem zerowym funkcji  $f(x) = xe^{-x} - 0.06064$  jest  $\alpha = 0.0646926359947960\dots$ . Przyjmijmy  $a_0 := 0$  i  $b_0 := 1$  i użyjmy metody bisekcji. Dla  $0 \leq n \leq 15$  porównać rzeczywiste wartości błędów  $e_n$  z ich oszacowaniami (1) (oznaczenia – jak w zadaniu **L4.1**). Czy wielkości  $|e_n|$  maleją monotonicznie wraz ze wzrostem  $n$ ?

**L4.4.** **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę bisekcji, wyznaczyć wszystkie zera funkcji  $f(x) = x^2 - \ln(x+2)$  z błędem bezwzględnym nie większym niż  $10^{-10}$ . *Wskazówka:* Naskicować wykresy funkcji  $g(x) = x^2$  i  $h(x) = \ln(x+2)$ .

**L4.5.** **Włącz komputer!** 1 punkt Odwrotność liczby  $R$  można obliczać bez wykonywania dzielenia za pomocą wzoru

$$x_{n+1} := x_n(2 - x_n R) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Uzasadnij ten fakt stosując metodę Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji  $f$ . Następnie **sprawdź eksperymentalnie** na wybranych przykładach przydatność tej metody w praktyce obliczeniowej. Spróbuj ustalić w jaki sposób wybierać  $x_0$  oraz ile średnio iteracji trzeba wykonać, aby uzyskać dokładność bliską maszynowej?

- L4.6.** **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Newtona, zaproponuj algorytm numerycznego obliczania  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  ( $a > 0$ ) bez wykonywania dzielenia. Opracowaną metodę **sprawdź eksperymentalnie** (patrz zadanie **L4.5**).
- L4.7.** **Włącz komputer!** 1 punkt Niech będzie  $a = m 2^c$ , gdzie  $c$  jest liczbą całkowitą, a  $m$  – ułamkiem z przedziału  $[\frac{1}{2}, 1)$ . Zaproponować efektywną metodę obliczania  $\sqrt{a}$ , otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji  $f$ . **Ustal eksperymentalnie** dla jakich wartości  $x_0$  metoda jest zbieżna.
- L4.8.** **Włącz komputer!** 1 punkt  $r$ -krotne zero  $\alpha$  funkcji  $f(x)$  jest jedynym zerem funkcji  $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$ . Jaką postać ma wzór opisujący metodę Newtona zastosowaną do funkcji  $g(x)$ ? **Wykonując odpowiednie testy numeryczne**, sprawdź otrzymaną w ten sposób metodę. Czy jest ona warta polecenia?

(–) Paweł Woźny