Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 2

10 października 2018 r.

Zajęcia 16 października 2018 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L2.1. 1 punkt Udowodnij, że dodatnia liczba rzeczywista ma skończone rozwinięcie dwójkowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $m/2^n$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi.

L2.2. 1 punkt Ustalmy liczbę $B \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

L2.3. 1 punkt Znajdź wszystkie liczby zmiennopozycyjne, które można przedstawić w postaci

$$x = \pm(0.1e_{-2}e_{-3}e_{-4})_2 \cdot 2^{\pm c}, \qquad e_{-2}, e_{-3}, e_{-4}, c \in \{0, 1\}, \tag{1}$$

gdzie $(\ldots)_2$ oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział $[A, B]$, zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w $[A, B]$ (wykonaj odpowiedni rysunek)? Co z tego wynika?

L2.4. 1 punkt *Zaokrągleniem* niezerowej liczby rzeczywistej $x = sm2^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, c jest liczbą całkowitą, a $m \in [\frac{1}{2}, 1)$, jest liczba zmiennopozycyjna $\operatorname{rd}(x) = sm_t^r 2^c$, gdzie $m_t^r \in [\frac{1}{2}, 1)$ oraz $| m - m_t^r | \leq \frac{1}{2}2^{-t}$. Wykaż, że

$$\frac{|\operatorname{rd}(x) - x|}{|x|} \leq 2^{-t}.$$

L2.5. 1 punkt Zapoznaj się ze standardem IEEE 754[1] reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych. Omówi go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.

L2.6. 1 punkt Załóżmy, że x, y są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości $d := \sqrt{x^2 + y^2}$ algorytmem postaci

```
u:=x*x;
u:=u+y*y;
d:=sqrt(u)
```

[1] Patrz np. http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość d należy do zbioru X_{fl}. Następnie zaproponuj `algorytm` wyznaczania d pozwalający unikać zjawiska nadmiaru, jeśli $\sqrt{2}\max(|x|,|y|) \in X_{\text{fl}}$. Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

L2.7. $\boxed{\textsf{1 punkt}}$ Można wykazać, że przy $x_1 = 2$ ciąg

$$x_{k+1} = 2^k \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

jest zbieżny do π. Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska.

L2.8. $\boxed{\textbf{\textsf{Włącz komputer!}}}\boxed{\textsf{2 punkty}}$ Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $x^5 + \sqrt{x^{10} + 2018}$, **b)** $x^{-6}(-1 + x^2/2 - x^4/24 + \cos x)$, **c)** $\log_5 x - 6$,

d) $3\sin x - 4\sin^3 x$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego. Sprawdź czy sposób ten **działa w praktyce**.

(–) Paweł Woźny