

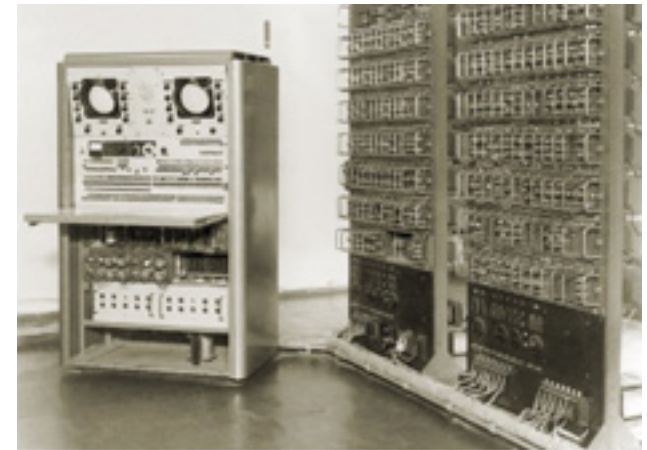
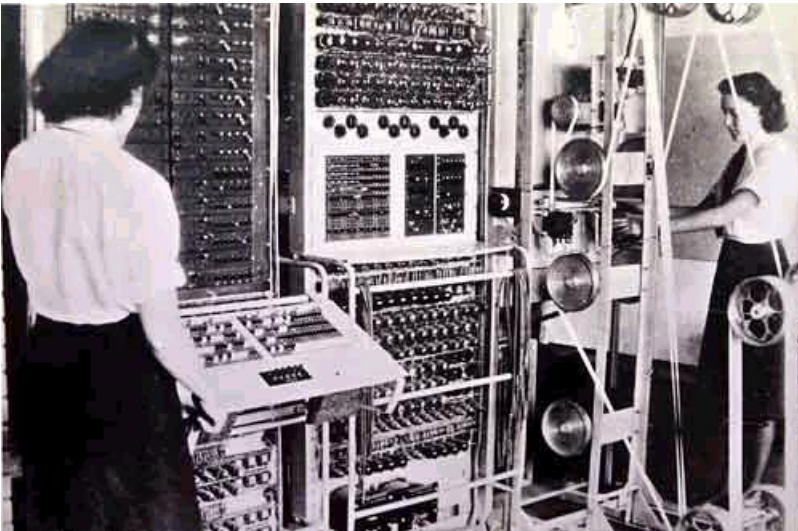
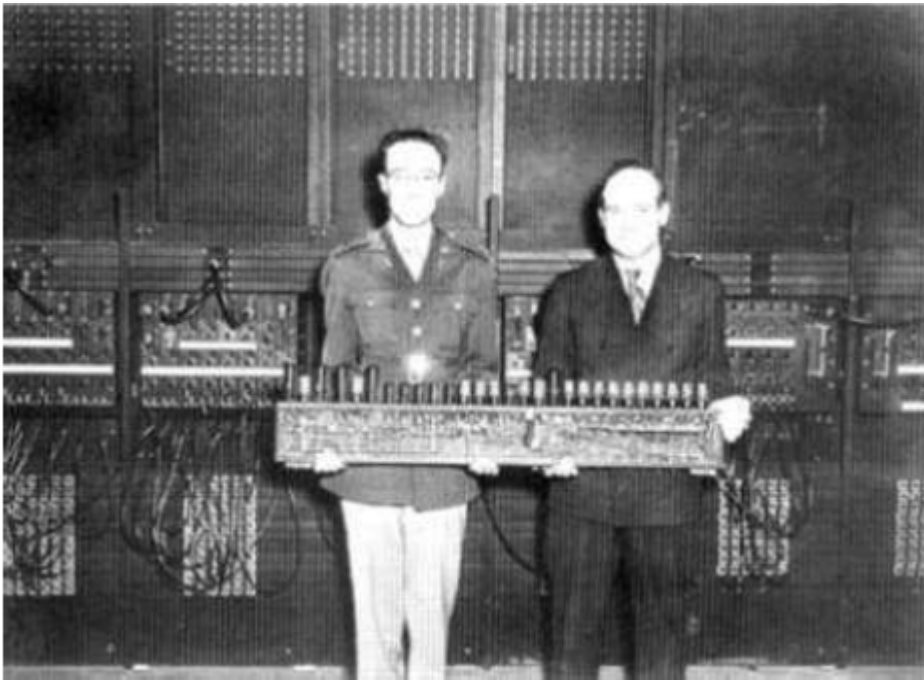
Analiza numeryczna (L). Wykład I.
DZIWNE RZECZY!

Paweł Woźny

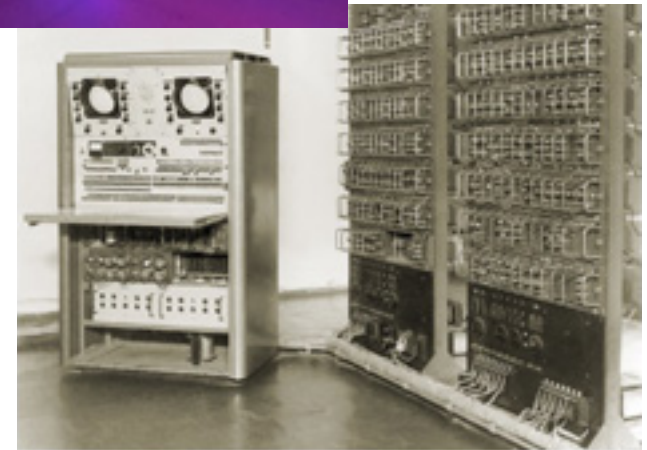
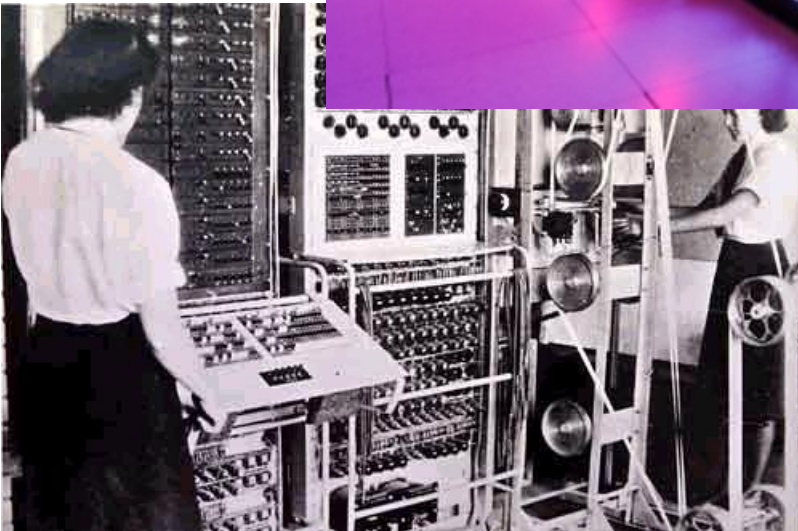
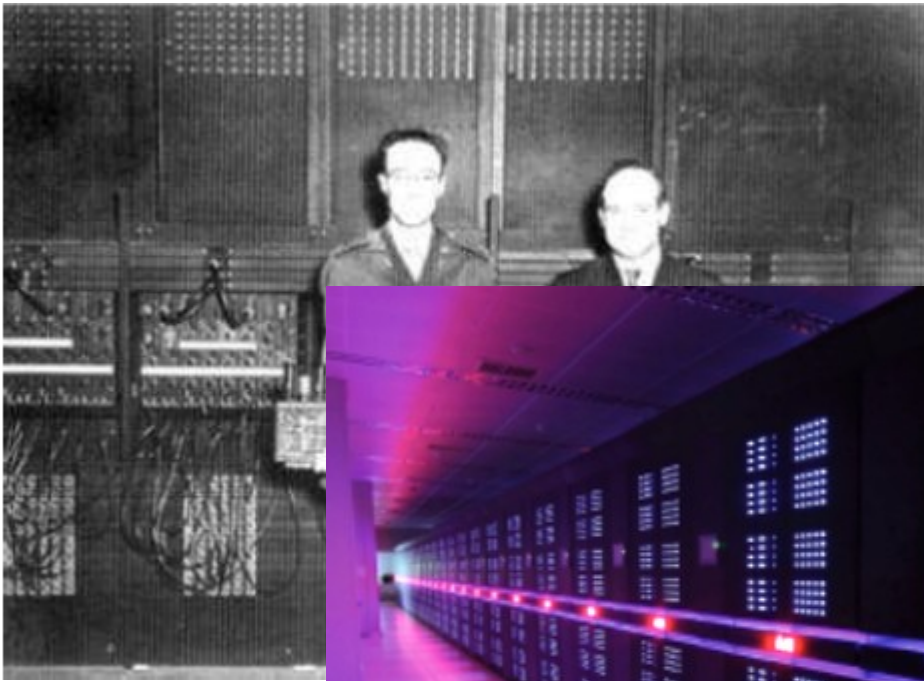
Wstęp, czyli trochę historii...



Wstęp, czyli trochę historii...



Wstęp, czyli trochę historii...



Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa

1958 Pierwszy Polski komputer XYZ

1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

- 1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa
- 1958 Pierwszy Polski komputer XYZ
- 1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro
- 1961 Seryjna produkcja ZAM 2
Odra 1001 (Elwro)

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

- 1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa
- 1958 Pierwszy Polski komputer XYZ
- 1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro
- 1961 Seryjna produkcja ZAM 2
Odra 1001 (Elwro)
- 1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
(komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)
Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

- 1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa
- 1958 Pierwszy Polski komputer XYZ
- 1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro
- 1961 Seryjna produkcja ZAM 2
Odra 1001 (Elwro)
- 1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
(komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)
Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej
- 1963 Katedra Budowy Maszyn Matematycznych, Politechnika Warszawska
Katedra Konstrukcji Maszyn Cyfrowych, Politechnika Wrocławska
Odra 1003

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

- 1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa
- 1958 Pierwszy Polski komputer XYZ
- 1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro
- 1961 Seryjna produkcja ZAM 2
Odra 1001 (Elwro)
- 1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
(komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)
Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej
- 1963 Katedra Budowy Maszyn Matematycznych, Politechnika Warszawska
Katedra Konstrukcji Maszyn Cyfrowych, Politechnika Wrocławska
Odra 1003
- 1964 Zakład Obliczeń Numerycznych, Uniwersytet Warszawski

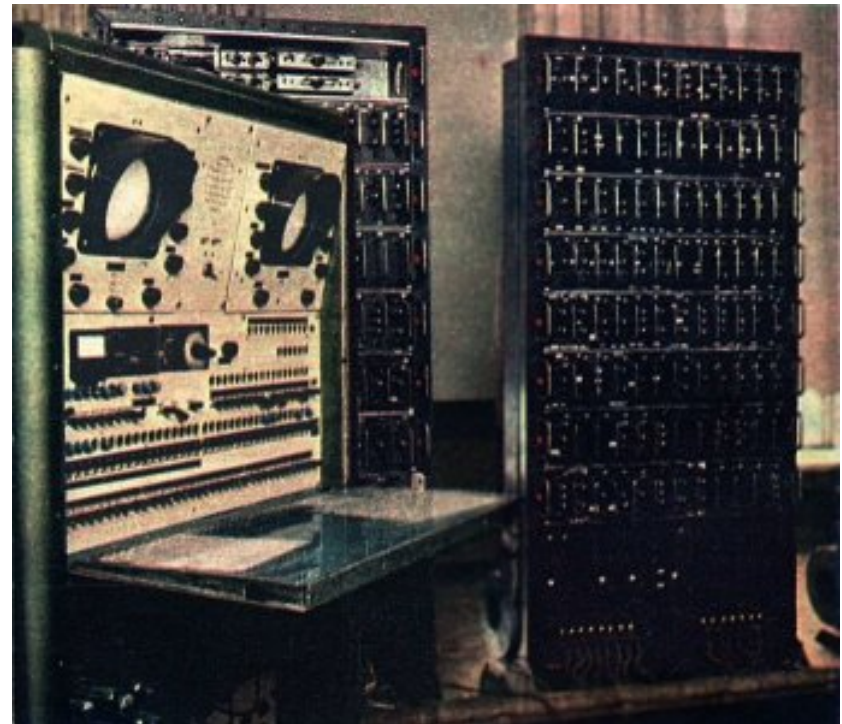
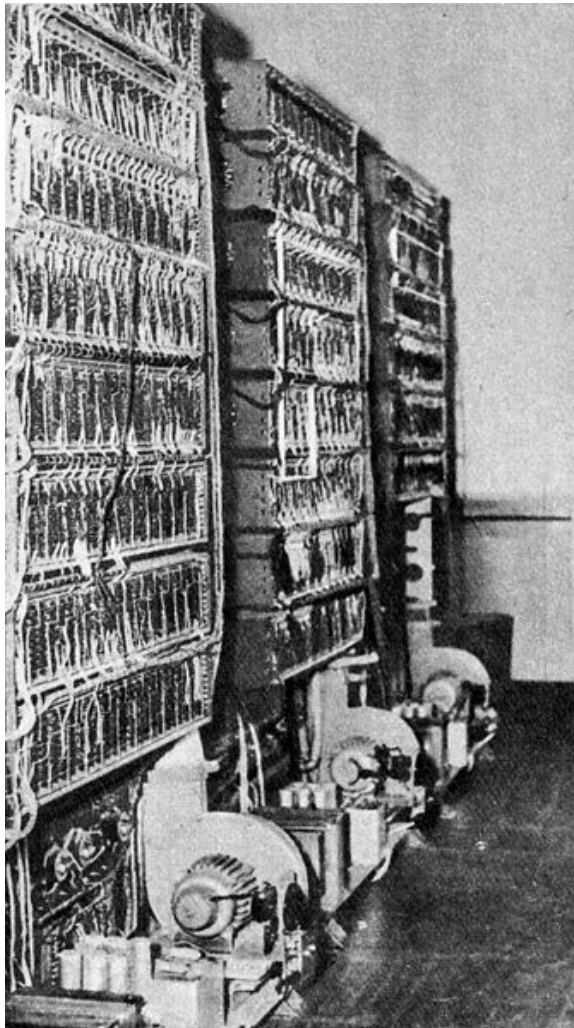
Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

- 1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa
- 1958 Pierwszy Polski komputer XYZ
- 1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro
- 1961 Seryjna produkcja ZAM 2
Odra 1001 (Elwro)
- 1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
(komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)
Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej
- 1963 Katedra Budowy Maszyn Matematycznych, Politechnika Warszawska
Katedra Konstrukcji Maszyn Cyfrowych, Politechnika Wrocławska
Odra 1003
- 1964 Zakład Obliczeń Numerycznych, Uniwersytet Warszawski
- 1967 Seryjna produkcja Odry 1204 (Elwro)

Początki informatyki w Polsce: wybrane wydarzenia

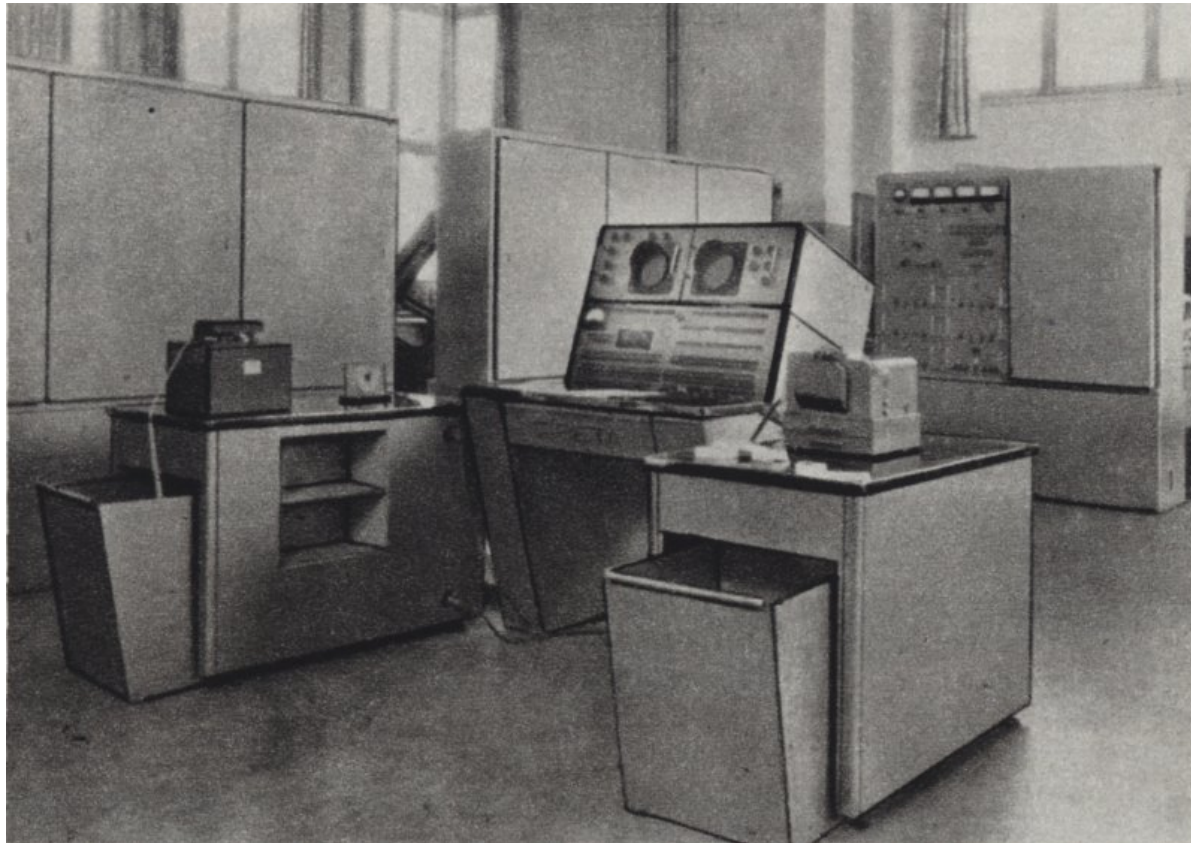
- 1948 Grupa Aparatów Matematycznych, Państwowy Instytut Matematyczny, Warszawa
- 1958 Pierwszy Polski komputer XYZ
- 1959 Wrocławskie Zakłady Elektroniczne Elwro
- 1961 Seryjna produkcja ZAM 2
Odra 1001 (Elwro)
- 1962 Katedra Metod Numerycznych, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
(komputer Elliott 803; kierownik: Stefan Paszkowski)
Specjalność maszyny matematyczne, Wydział Łączności Politechniki Wrocławskiej
- 1963 Katedra Budowy Maszyn Matematycznych, Politechnika Warszawska
Katedra Konstrukcji Maszyn Cyfrowych, Politechnika Wrocławska
Odra 1003
- 1964 Zakład Obliczeń Numerycznych, Uniwersytet Warszawski
- 1967 Seryjna produkcja Odry 1204 (Elwro)
- 1975 Utworzenie Instytutów Informatyki na Uniwersytecie Warszawskim,
Uniwersytecie Wrocławskim i Politechnice Warszawskiej

Komputery w Polsce – początki



1958: Pierwszy Polski komputer XYZ

Komputery w Polsce – początki



1961: Seryjna produkcja ZAM 2

Komputery w Polsce – początki



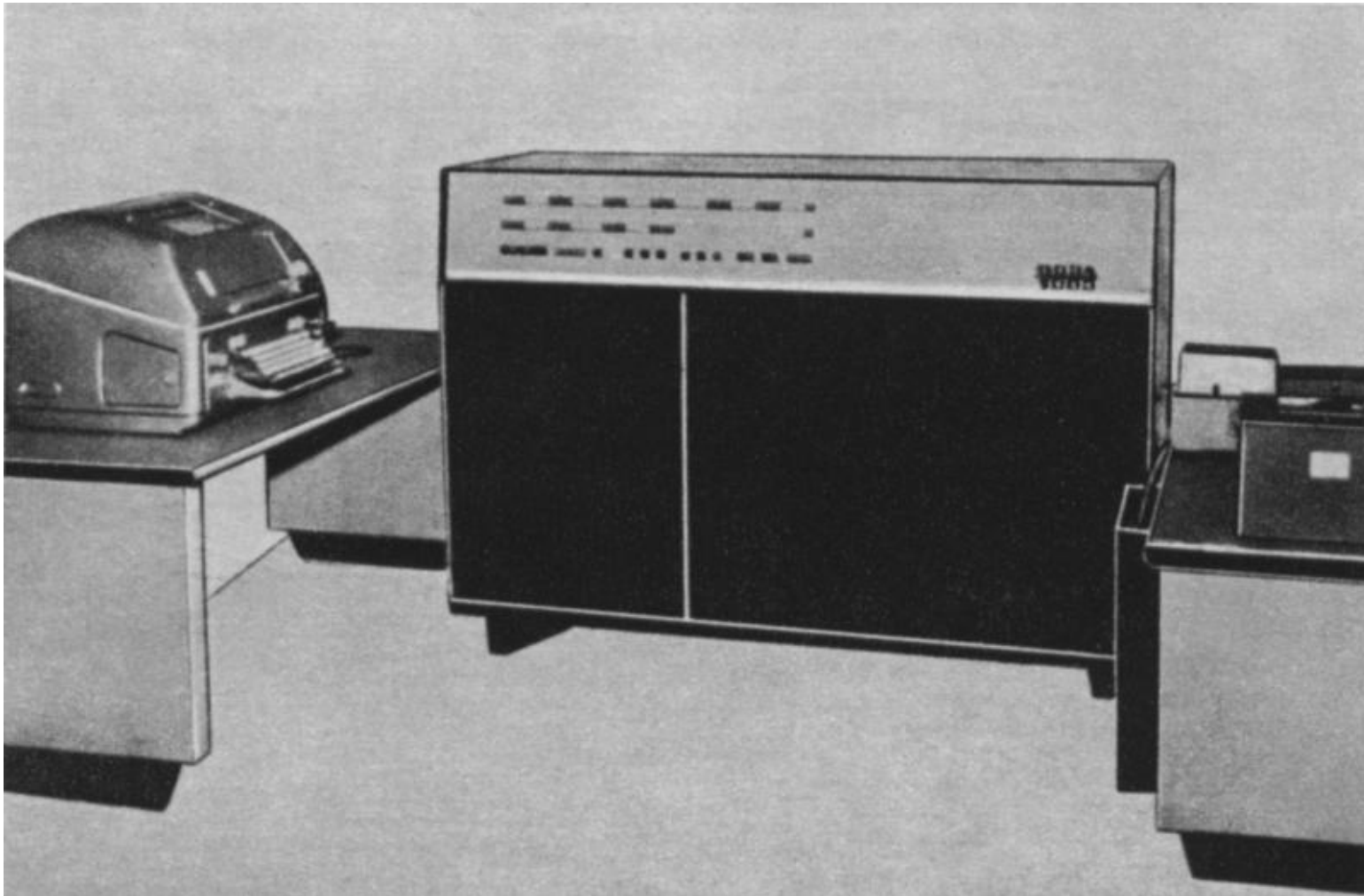
1962: Komputer Elliott 803 (KMN, IM, UW r)

Komputery w Polsce – początki



1962: Komputer Elliott 803 (KMN, IM, UW)

Komputery w Polsce – początki



1962: Komputer Odra 1003 (Elwro)

Komputery w Polsce – początki



1967: Seryjna produkcja [Odry 1204](#) (Elwro)

Informatyka w Polsce

- Jan Madey, Maciej M. Sysło, *Początki informatyki w Polsce*, Informatyka, numery 9, 10, rok 2000.
- http://pl.wikipedia.org/wiki/Historia_informatyki_w_Polsce

Przykład 1. Co się do licha dzieje...

- Przeanalizujemy następujący program:

```
x:=1.0:
```

```
while 1<>1+x
```

```
do
```

```
    x:=x/2.0
```

```
od:
```

Przykład 1. Co się do licha dzieje...

- Przeanalizujemy następujący program:

```
x:=1.0:
```

```
while 1<>1+x
```

```
do
```

```
  x:=x/2.0
```

```
od:
```

```
print(x); print(1+x);
```

```
if x<>0 then print("TAK!!!") fi;
```

```
if 1=1+x then print("TAK!!!") fi;
```

Przykład 1. Co się do licha dzieje...

- Przeanalizujemy następujący program:

```
x:=1.0:

while 1<>1+x
do
  x:=x/2.0
od:

print(x); print(1+x);

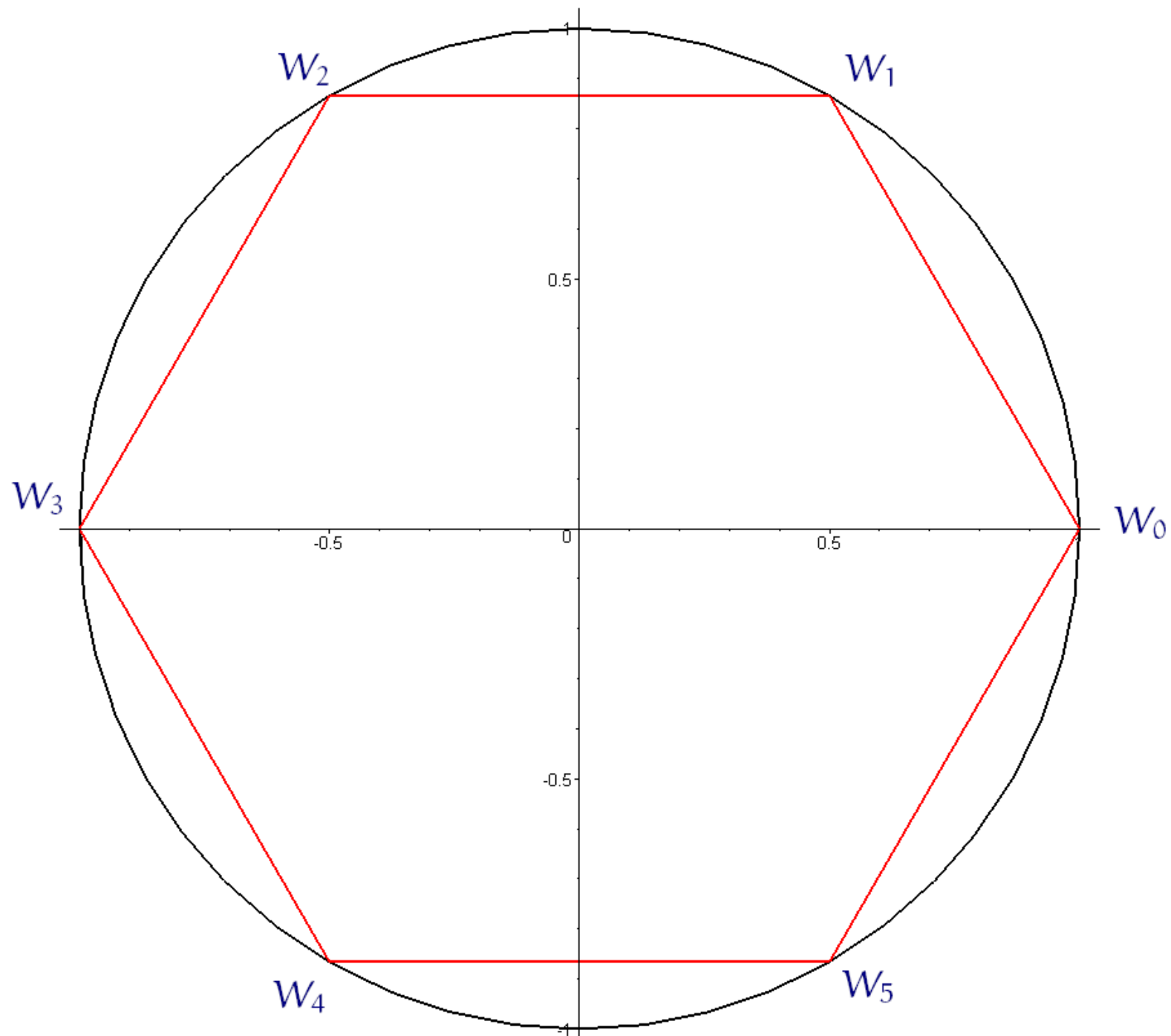
if x<>0 then print("TAK!!!") fi;

if 1=1+x then print("TAK!!!") fi;
```

Wniosek. W komputerze istnieje przynajmniej jedna taka liczba $x \neq 0$, dla której

$$1 + x = 1.$$

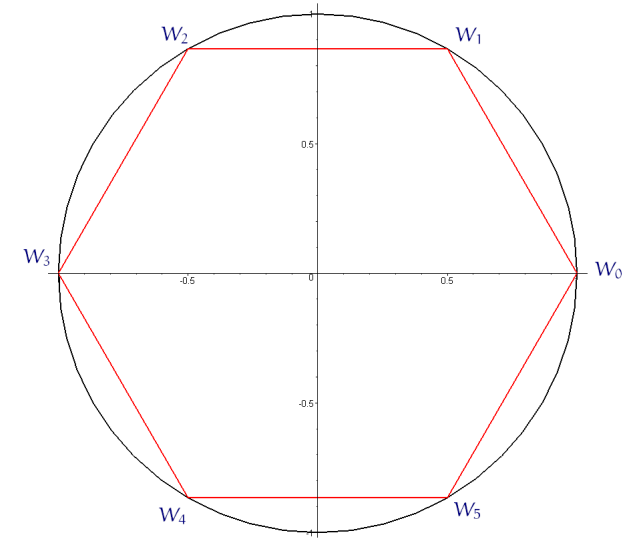
Przykład 2. Wielokąty foremne



Przykład 2. Wielokąty foremne

- Można wykazać, że wierzchołki W_0, W_1, \dots, W_{N-1} N -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = 1$, gdzie $W_0 = (1, 0)$, mają współrzędne

$$W_i = \left(\cos \left(2\pi \frac{i}{N} \right), \sin \left(2\pi \frac{i}{N} \right) \right).$$



Przykład 2. Wielokąty foremne

- Można wykazać, że wierzchołki W_0, W_1, \dots, W_{N-1} N -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = 1$, gdzie $W_0 = (1, 0)$, mają współrzędne

$$W_i = \left(\cos \left(2\pi \frac{i}{N} \right), \sin \left(2\pi \frac{i}{N} \right) \right).$$

- Program:

```
kat:=0.0: krok:=2*Pi/N:
```

```
W[0]:=[1.0,0.0]:
```

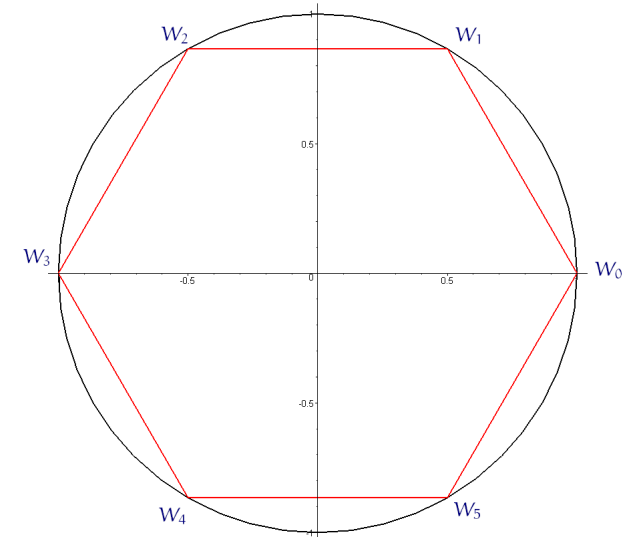
```
for i from 1 to N-1
```

```
do
```

```
    kat:=kat+krok;
```

```
    W[i]:=[cos(kat),sin(kat)]
```

```
od:
```



Przykład 2. Wielokąty foremne

- Można wykazać, że wierzchołki W_0, W_1, \dots, W_{N-1} N -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = 1$, gdzie $W_0 = (1, 0)$, mają współrzędne

$$W_i = \left(\cos \left(2\pi \frac{i}{N} \right), \sin \left(2\pi \frac{i}{N} \right) \right).$$

- Program:

```
kat:=0.0: krok:=2*Pi/N:
```

```
W[0]:=[1.0,0.0]:
```

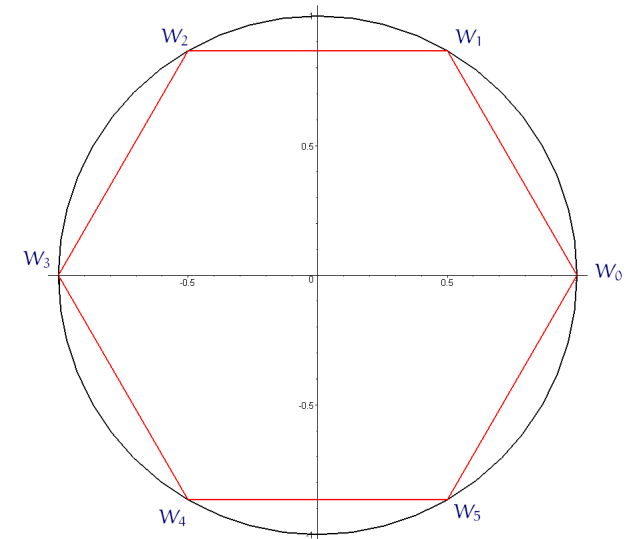
```
for i from 1 to N
```

```
do
```

```
    kat:=kat+krok;
```

```
    W[i]:=[cos(kat),sin(kat)]
```

```
od:
```



Przykład 2. Wielokąty foremne

- Można wykazać, że wierzchołki W_0, W_1, \dots, W_{N-1} N -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = 1$, gdzie $W_0 = (1, 0)$, mają współrzędne

$$W_i = \left(\cos \left(2\pi \frac{i}{N} \right), \sin \left(2\pi \frac{i}{N} \right) \right).$$

- Program:

```
kat:=0.0: krok:=2*Pi/N:
```

```
W[0]:=[1.0,0.0]:
```

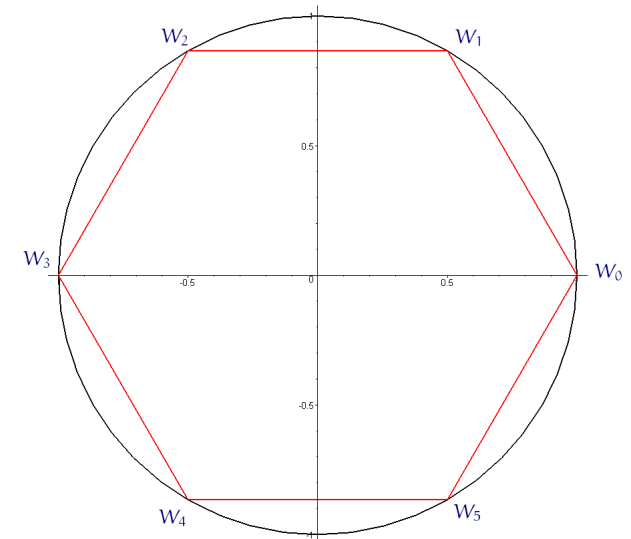
```
for i from 1 to M*N
```

```
do
```

```
    kat:=kat+krok;
```

```
    W[i]:=[cos(kat),sin(kat)]
```

```
od:
```



Przykład 3. Obliczanie pochodnej

- Jak wiadomo

$$f'(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Przykład 3. Obliczanie pochodnej

- Jak wiadomo

$$f'(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- Oznacza to, że

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dla małych h .

Przykład 3. Obliczanie pochodnej

- Jak wiadomo

$$f'(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- Oznacza to, że

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dla małych h .

- Wykorzystamy powyższą obserwację do numerycznego wyznaczania pochodnej funkcji e^{2x} . Przyjmijmy

$$f(x) := e^{2x}, \quad x := 0.5, \quad h \equiv h_i := 2^{-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Przykład 4. Związki rekurencyjne

- Rozważmy następujący związek rekurencyjny:

$$x_0 := \frac{1}{3}, \quad x_1 := -\frac{1}{9}, \quad x_{n+2} = \frac{8}{3}x_{n+1} + x_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Przykład 4. Związki rekurencyjne

- Rozważmy następujący związek rekurencyjny:

$$x_0 := \frac{1}{3}, \quad x_1 := -\frac{1}{9}, \quad x_{n+2} = \frac{8}{3}x_{n+1} + x_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

- Oczywiście

$$x_2 = \frac{1}{27}, \quad x_3 = -\frac{1}{81}, \quad x_4 = \frac{1}{243}, \quad x_5 = -\frac{1}{729}, \quad \text{itd.}$$

Przykład 4. Związki rekurencyjne

- Rozważmy następujący związek rekurencyjny:

$$x_0 := \frac{1}{3}, \quad x_1 := -\frac{1}{9}, \quad x_{n+2} = \frac{8}{3}x_{n+1} + x_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

- Można sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem jest

$$x_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Przykład 4. Związki rekurencyjne

- Rozważmy następujący związek rekurencyjny:

$$x_0 := \frac{1}{3}, \quad x_1 := -\frac{1}{9}, \quad x_{n+2} = \frac{8}{3}x_{n+1} + x_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

- Można sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem jest

$$x_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}.$$

- Program:

```
x[0]:=1.0/3.0;    x[1]:=-1.0/9.0;

  for n from 2 to N
    do
      x[n]:=8.0*x[n-1]/3.0+x[n-2]
    od
```

Przykład 5. Perfidny wielomian

- Zajmijmy się teraz wielomianem $f(x) := (x - 1)^8$.

Przykład 5. Perfidny wielomian

- Zajmijmy się teraz wielomianem $f(x) := (x - 1)^8$.
- Jak łatwo sprawdzić dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x) = f_2(x) = f_3(x),$$

gdzie

$$f_2(x) := x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1,$$

$$f_3(x) := ((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1.$$

Przykład 5. Perfidny wielomian

- Zajmijmy się teraz wielomianem $f(x) := (x - 1)^8$.
- Jak łatwo sprawdzić dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x) = f_2(x) = f_3(x),$$

gdzie

$$f_2(x) := x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1,$$

$$f_3(x) := ((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1.$$

- Wykorzystamy komputer do obliczenia wartości wielomianów f , f_2 i f_3 w 501 równoodległych punktach przedziału $[0.99, 1.01]$. Wyznamy więc liczby $f(x_i)$, $f_2(x_i)$ oraz $f_3(x_i)$ dla

$$x_i := 0.99 + \frac{0.02i}{500} \quad (i = 0, 1, \dots, 500).$$

Przykład 6. Równanie kwadratowe

- Rozważmy równanie kwadratowe postaci

$$w(x) = 0, \quad \text{gdzie} \quad w(x) := ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0). \quad (1)$$

Przykład 6. Równanie kwadratowe

- Rozważmy równanie kwadratowe postaci

$$w(x) = 0, \quad \text{gdzie} \quad w(x) := ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0). \quad (1)$$

- Założmy, że $\Delta := b^2 - 4ac > 0$. Wiadomo, że wtedy rozwiązaniami równania (1) są liczby

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Przykład 6. Równanie kwadratowe

- Rozważmy równanie kwadratowe postaci

$$w(x) = 0, \quad \text{gdzie} \quad w(x) := ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0). \quad (1)$$

- Założmy, że $\Delta := b^2 - 4ac > 0$. Wiadomo, że wtedy rozwiązaniami równania (1) są liczby

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Program:

```
x[1] := (-b + sqrt(b*b - 4*a*c)) / (2*a);
```

```
x[2] := (-b - sqrt(b*b - 4*a*c)) / (2*a);
```

Przykład 6. Równanie kwadratowe

- Rozważmy równanie kwadratowe postaci

$$w(x) = 0, \quad \text{gdzie} \quad w(x) := ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0). \quad (1)$$

- Założmy, że $\Delta := b^2 - 4ac > 0$. Wiadomo, że wtedy rozwiązaniami równania (1) są liczby

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Program:

$$x[1] := (-b + \sqrt{b*b - 4*a*c}) / (2*a);$$

$$x[2] := (-b - \sqrt{b*b - 4*a*c}) / (2*a);$$

- Przeprowadzimy testy dla następujących danych:

$$1. \ a := 1.0, \ b := 10^9, \ c := 1.0. \quad 2. \ a := 1.0, \ b := 10^{10}, \ c := 1.0.$$

Przykład 7. Prawo łączności

- Już w szkole podstawowej mówiono nam, że dodawanie jest działaniem przemennym i łącznym,

$$a+b = b+a, \quad a+(b+c) = (a+b)+c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Przykład 7. Prawo łączności

- Już w szkole podstawowej mówiono nam, że **dodawanie** jest działaniem **przemienne** i **łącznym**,

$$a+b = b+a, \quad a+(b+c) = (a+b)+c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

- Obliczymy zatem **wartość** sumy

$$S_N := \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)}$$

przy pomocy następujących **programów**:

```
s:=0.0:
```

```
for k from 1 to N
do
    s:=s+1/(k*(k+1))
od:
```

```
s2:=0.0:
```

```
for k from N by -1 to 1
do
    s2:=s2+1/(k*(k+1))
od:
```

Przykład 8. Czy bankowcy mogą przypadkiem oszukać?

- Kapitalizacja odsetek:

$$W_n = W_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

- Oznaczenia:

W_0 – wkład początkowy; n – tyle razy naliczamy odsetki w ciągu roku;

r – oprocentowanie; W_n – stan konta po roku oszczędzania

Przykład 8. Czy bankowcy mogą przypadkiem oszukać?

- Kapitalizacja odsetek:

$$W_n = W_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

- Oznaczenia:

W_0 – wkład początkowy; n – tyle razy naliczamy odsetki w ciągu roku;

r – oprocentowanie; W_n – stan konta po roku oszczędzania

- Obserwacje:

1. Jeśli $r > 0$, to $W_n > W_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 8. Czy bankowcy mogą przypadkiem oszukać?

- Kapitalizacja odsetek:

$$W_n = W_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

- Oznaczenia:

W_0 – wkład początkowy; n – tyle razy naliczamy odsetki w ciągu roku;

r – oprocentowanie; W_n – stan konta po roku oszczędzania

- Obserwacje:

1. Jeśli $r > 0$, to $W_n > W_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2. Im częściej naliczamy odsetki ($r > 0$), tym więcej zarabiamy, tzn.

$$W_{n+1} > W_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Przykład 8. Czy bankowcy mogą przypadkiem oszukać?

- Kapitalizacja odsetek:

$$W_n = W_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

- Oznaczenia:

W_0 – wkład początkowy; n – tyle razy naliczamy odsetki w ciągu roku;

r – oprocentowanie; W_n – stan konta po roku oszczędzania

- Program:

```
w:=1.0
```

```
  for i from 1 to n
    do
      w:=w*(1+r/n)
    od:
```

```
W[n] := W[0] * w
```

Wzór i szereg Taylora

- Jeśli $f \in C^n[a, b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a, b) , to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego $[a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}.$$

Wzór i szereg Taylora

- Jeśli $f \in C^n[a, b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a, b) , to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego $[a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}.$$

- Przy pewnych założeniach dotyczących funkcji f (jakich?) zachodzi wzór

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k.$$

Wzór i szereg Taylora

- Jeśli $f \in C^n[a, b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a, b) , to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego $[a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}.$$

- Przy pewnych założeniach dotyczących funkcji f (jakich?) zachodzi wzór

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k.$$

- Przykłady:

$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1]$$

Wzór i szereg Taylora

- Jeśli $f \in C^n[a, b]$ i jeśli $f^{(n+1)}$ istnieje w przedziale otwartym (a, b) , to dla dowolnych punktów c i x z przedziału domkniętego $[a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ leżącego między c i x

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}.$$

- Przy pewnych założeniach dotyczących funkcji f (jakich?) zachodzi wzór

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k.$$

- Przykłady:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenia o szeregu naprzemiennym

- (Kryterium Leibniza) Szereg naprzemienny

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jest zbieżny, jeśli

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \quad \text{oraz} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

Twierdzenia o szeregu naprzemiennym

- (Kryterium Leibniza) Szereg naprzemienny

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jest zbieżny, jeśli

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \quad \text{oraz} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

- Niech dany będzie zbieżny szereg naprzemienny

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \quad (a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots).$$

Zachodzi następujące oszacowanie:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1},$$

gdzie

$$S_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k.$$

