Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 8

21 listopada 2018 r.

Zajęcia 4 grudnia 2018 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L8.1. 1 punkt Znajdź naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

a)

x_k	-3	0	3
y_k	-1	0	2

,

b)

x_k	-2	-1	1	2
y_k	8	-1	3	-2

.

L8.2. 1 punkt Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 9x & \text{dla} \quad -1 \le x \le 0, \\ -5x^3 + 3x^2 + 9x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ 5x^3 - 27x^2 + 39x - 10 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2, \\ -x^3 + 9x^2 - 33x + 38 & \text{dla} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

L8.3. 1 punkt Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1, \\ -6x & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

L8.4. 1 punkt Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ spełniają układ równań

$$(1) \qquad \lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

L8.5. 2 punkty Niech dane będą wektory `x`$:=[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $(x_k < x_{k+1},\ 0 \le k \le n-1)$, `y`$:=[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz `z`$:=[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ $(0 \le k \le n)$. W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor

$$\mathtt{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)],$$

z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję f w przedziale $[x_0, x_n]$. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości

$$f'(h_0),\ f'(h_1), \ldots,\ f'(h_N),$$

gdzie $x_0 \le h_0 < h_1 < \ldots < h_N \le x_n$, natomiast N jest **dowolną** liczbą naturalną.

L8.6. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech s_x i s_y będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 27),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{27}$ $(k = 0, 1, \ldots, 27)$, natomiast

$$\begin{aligned}[][x_0, x_1, \ldots, x_{27}] := [&15.5, 12.5, 8, 10, 7, 4, 8, 10, 9.5, 14, 18, 17, 22, 25, 19,\\ &24.5, 23, 17, 16, 12.5, 16.5, 21, 17, 11, 5.5, 7.5, 10, 12],\\ [y_0, y_1, \ldots, y_{27}] := [&32.5, 28.5, 29, 33, 33, 37, 39.5, 38.5, 42, 43.5, 42, 40, 41.5, 37, 35,\\ &33.5, 29.5, 30.5, 32, 19.5, 24.5, 22, 15, 10.5, 2.5, 8, 14.5, 20].\end{aligned}$$

Opracuj **własną implementację** wyznaczania interpolacyjnej naturalnej funkcji sklejanej trzeciego stopnia. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \ldots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, M)$, a M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?

(–) Paweł Woźny