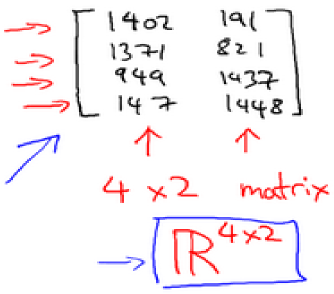
3、线性代数回顾(Linear Algebra Review)

3.1 矩阵和向量

参考视频: 3 - 1 - Matrices and Vectors (9 min).mkv

如图：这个是 4×2 矩阵，即 4 行 2 列，如m为行，n为列，那么$m \times n$即 4×2



矩阵的维数即行数×列数

矩阵元素（矩阵项）：$A = \begin{bmatrix} 1402 & 191 \\ 1371 & 821 \\ 949 & 1437 \\ 147 & 1448 \end{bmatrix}$

A_{ij}指第i行，第j列的元素。

向量是一种特殊的矩阵，讲义中的向量一般都是列向量，如： $y = \begin{bmatrix} 460 \\ 232 \\ 315 \\ 178 \end{bmatrix}$

为四维列向量（4×1）。

如下图为 1 索引向量和 0 索引向量，左图为 1 索引向量，右图为 0 索引向量，一般我们用 1 索引向量。

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$， $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

3.2 加法和标量乘法

参考视频: 3 - 2 - Addition and Scalar Multiplication (7 min).mkv

矩阵的加法：行列数相等的可以加。

例：

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 5\\3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0.5\\2 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0.5\\4 & 10\\3 & 2\end{bmatrix}$$

矩阵的乘法：每个元素都要乘

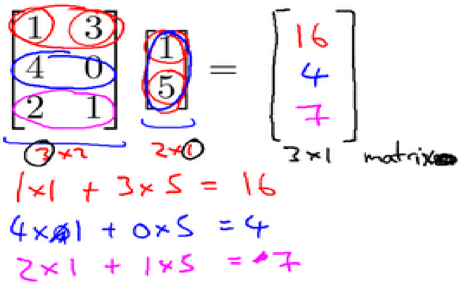
$$3\times\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 5\\3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\6 & 15\\9 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 5\\3 & 1\end{bmatrix}\times 3$$

组合算法也类似。

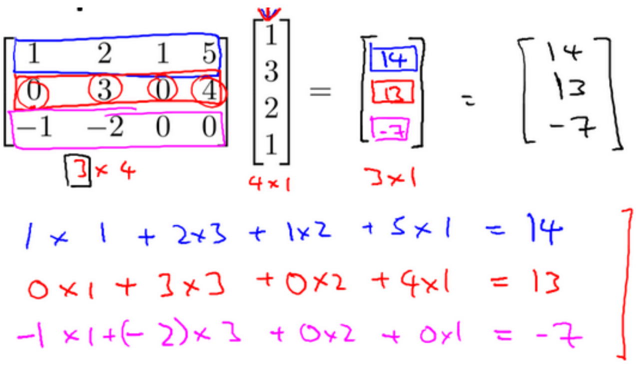
3.3 矩阵向量乘法

参考视频: 3 - 3 - Matrix Vector Multiplication (14 min).mkv

矩阵和向量的乘法如图：$m \times n$的矩阵乘以$n \times 1$的向量，得到的是$m \times 1$的向量



算法举例：



3.4 矩阵乘法

参考视频: 3 - 4 - Matrix Matrix Multiplication (11 min).mkv

矩阵乘法：

$m \times n$矩阵乘以$n \times o$矩阵，变成$m \times o$矩阵。

如果这样说不好理解的话就举一个例子来说明一下，比如说现在有两个矩阵A和B，那么它们的乘积就可以表示为图中所示的形式。

$$\begin{array}{ccccc} C & = & A & \times & B \\ \begin{pmatrix} C0 & C1 \\ C2 & C3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} A0 & A1 \\ A2 & A3 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} B0 & B1 \\ B2 & B3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} C0 &= A0 \times B0 + A1 \times B2 \\ C1 &= A0 \times B1 + A1 \times B3 \\ C2 &= A2 \times B0 + A3 \times B2 \\ C3 &= A2 \times B1 + A3 \times B3 \end{aligned}$$

3.5 矩阵乘法的性质

参考视频: 3 - 5 - Matrix Multiplication Properties (9 min).mkv

矩阵乘法的性质：

矩阵的乘法不满足交换律：$A \times B \neq B \times A$

矩阵的乘法满足结合律。即：$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

单位矩阵：在矩阵的乘法中，有一种矩阵起着特殊的作用，如同数的乘法中的 1,我们称这种矩阵为单位矩阵. 它是个方阵，一般用 I 或者 E 表示，本讲义都用 I 代表单位矩阵，从左上角到右下角的对角线（称为主对角线）上的元素均为 1 以外全都为 0。如：

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

对于单位矩阵，有$AI = IA = A$

3.6 逆、转置

参考视频: 3 - 6 - Inverse and Transpose (11 min).mkv

矩阵的逆：如矩阵A是一个$m \times m$矩阵（方阵），如果有逆矩阵，则：$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

我们一般在 **OCTAVE** 或者 **MATLAB** 中进行计算矩阵的逆矩阵。

矩阵的转置：设A为$m \times n$阶矩阵（即m行n列），第i行j列的元素是$a(i,j)$，即：$A = a(i,j)$

定义A的转置为这样一个$n \times m$阶矩阵B，满足$B = a(j,i)$，即 $b(i,j) = a(j,i)$（B的第i行第j列元素是A的第j行第i列元素），记$A^T = B$。(有些书记为 A'=B）

直观来看，将A的所有元素绕着一条从第 1 行第 1 列元素出发的右下方 45 度的射线作镜面反转，即得到A的转置。

例：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{vmatrix}$$

矩阵的转置基本性质:

$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

$(A \times B)^T = B^T \times A^T$

$(A^T)^T = A$

$(KA)^T = KA^T$

matlab 中矩阵转置：直接打一撇，x=y'。