# Metody Numeryczne

Rozkład LU

# Jakie układy równań łatwo rozwiązać?

- Układy z macierzą trójkątną

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Układ z macierzą trójkątną

- Bardzo proste wzory (tzw. Backward substitution)

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$
$$x_{n-1} = (b_{n-1} - x_n a_{n-1,n})/a_{n-1,n-1}$$
$$x_{n-2} = (b_{n-2} - x_{n-1} a_{n-2,n-1} - x_n a_{n-2,n})/a_{n-1,n-1}$$
$$\vdots$$
$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} x_k a_{jk}\right)/a_{jj}$$

- Mała złożoność $O(n^2)$
- Backward substitution jest stabilne wstecznie.

# Zamiana układu równań - dekompozycja

- Aby rozwiązać układ równań stosujemy dekompozycję macierzy

$$A = CD$$

Wtedy rozwiązanie układu równań ma postać

$$Ax = b$$

$$CDx = b$$

$$\begin{cases} Cy = b \\ Dx = y \end{cases}$$

Jeżeli D jest trójkątna, a C trójkątna lub łatwa do odwrócenia układ równań można łatwo rozwiązać.

# Rozkład LU

- Najpopularniejszy sposób rozwiązywania układów równań liniowych

$$A = LU$$

- L jest trójkątna dolna (z 1 na przekątnej), U jest trójkątna górna

# Eliminacja Gaussa

- Rozkład LU konstruuje się przez eliminację Gaussa

$$\underbrace{L_{m-1} \cdots L_2 L_1}_{L^{-1}} A = U$$

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{m-1}^{-1}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_1} \underset{L_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_2} \underset{L_2 L_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_3} \underset{L_3 L_2 L_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}}$$

# Konstrukcja macierzy $L_k$

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\ell_{mk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ell_{jk} = \frac{x_{jk}}{x_{kk}} \qquad (k < j \leq m)$$

# Macierz L

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{m-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{m1} & \ell_{m2} & \cdots & \ell_{m,m-1} & 1 \end{bmatrix}$$

# Algorytm

$$
\begin{aligned}
&U = A,\ \ L = I \\
&\textbf{for } k = 1 \textbf{ to } m-1 \\
&\qquad \textbf{for } j = k+1 \textbf{ to } m \\
&\qquad\qquad \ell_{jk} = u_{jk}/u_{kk} \\
&\qquad\qquad u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - \ell_{jk} u_{k,k:m}
\end{aligned}
$$

Złożoność obliczeniowa $O(2/3\ m^3)$

# Niestabilność

- Jeżeli w macierzy będą 0 w niewłaściwych miejscach to eliminacja będzie niemożliwa
- Jeżeli zamiast zer będą bardzo małe liczby jest duży potencjał na błędy numeryczne.

# Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozkład LU

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{20} \end{bmatrix}$$

Zaokrąglenia

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{bmatrix}$$

Iloczyn

$$\tilde{L}\tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A \neq \tilde{L} \cdot \tilde{U}$$

# Pivoting (przestawianie)

Wybieramy wiersz zaczynający się od największego elementu i zamieniamy go z bieżącym

$$
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
 & \times & \times & \times & \times \\
 & \times & \times & \times & \times \\
 & \boldsymbol{x_{ik}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \times & \times & \times & \times
\end{bmatrix}
\xrightarrow{P_1}
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
 & \boldsymbol{x_{ik}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \times & \times & \times & \times \\
 & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \times & \times & \times & \times
\end{bmatrix}
\xrightarrow{L_1}
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
 & \boldsymbol{x_{ik}} & \times & \times & \times \\
 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\
 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times}
\end{bmatrix}
$$

$$L_{m-1}P_{m-1}\cdots L_2P_2L_1P_1A = U.$$

# Przykład

$$P_1 \quad \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ -\frac{1}{4} & & 1 & \\ -\frac{3}{4} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

$$P_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{3}{7} & 1 & \\ & \frac{2}{7} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

# Przykład cd

$$P_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$L_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underset{P}{\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{4} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}$$

# Algorytm

$U = A, \;\; L = I, \;\; P = I$

**for** $k = 1$ **to** $m - 1$

Select $i \geq k$ to maximize $|u_{ik}|$

$u_{k,k:m} \leftrightarrow u_{i,k:m}$ (interchange two rows)

$\ell_{k,1:k-1} \leftrightarrow \ell_{i,1:k-1}$

$p_{k,:} \leftrightarrow p_{i,:}$

**for** $j = k + 1$ **to** $m$

$\ell_{jk} = u_{jk}/u_{kk}$

$u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - \ell_{jk} u_{k,k:m}$

# Uwagi o LU

- LU z pivotingiem jest stabilna wstecznie (stała uwarunkowania mnoży rząd błędu) dla wszystkich praktycznych macierzy
- Istnieją macierze, w których elementy A i U mają różne rzędy wielkości (U dużo większy), takie macierze muszą mieć bardzo specyficzną strukturę i praktycznie nie występują w zastosowaniach

# Co z macierzą odwrotną?

- Rzadko, ale czasami potrzebujemy macierzy odwrotnej
- Wyznaczenie takiej macierzy jest równoważne rozwiązaniu $m$ układów równań

$$A\,x^{(i)} = e_i$$

- Złożoność wprost to $\mathrm{O}(\frac{2}{3}m^3 + 2 \cdot m \cdot m^2) = O(\frac{8}{3}m^3)$
- Możemy skorzystać z faktu, że mamy sporo zer w układzie równań i zredukować odrobinę złożoność - do $O(2m^3)$

# Jak się to robi w praktyce