Metody Numeryczne

Równania liniowe – układy n równań z n niewiadomymi

Prosty układ równań liniowych

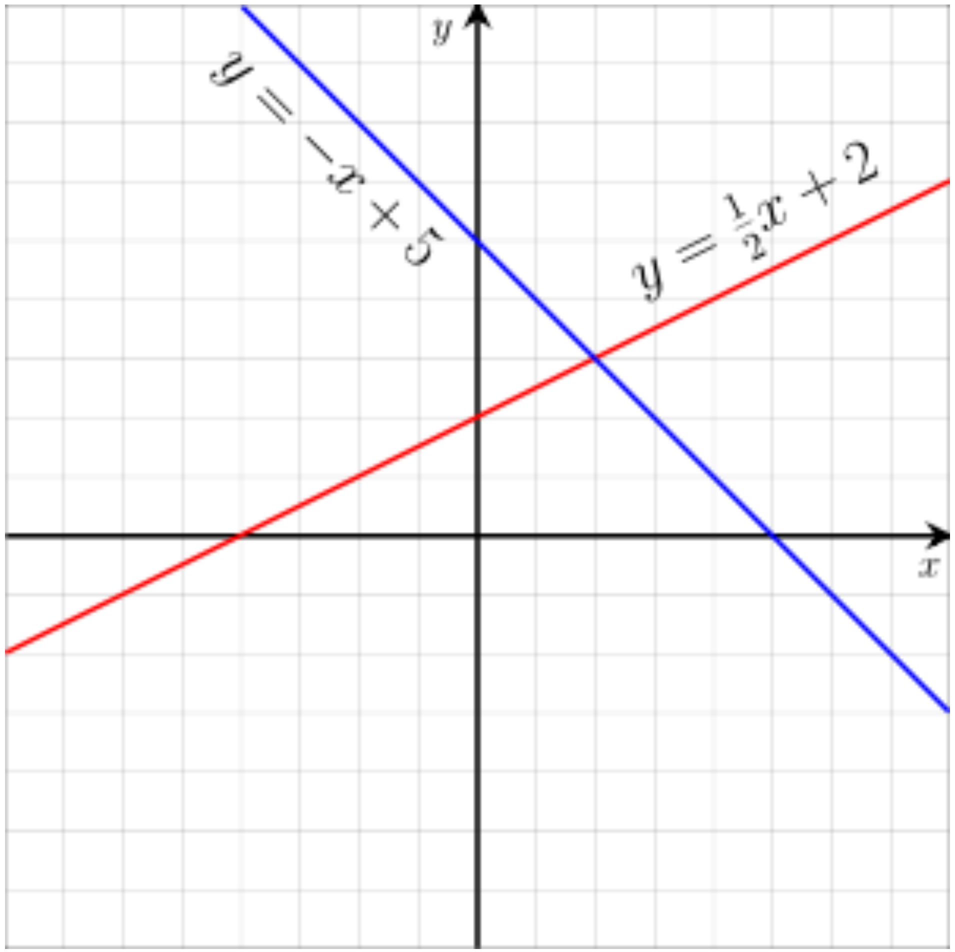
$$x + y = 5$$

$$-\frac{1}{2}x + y = 2$$

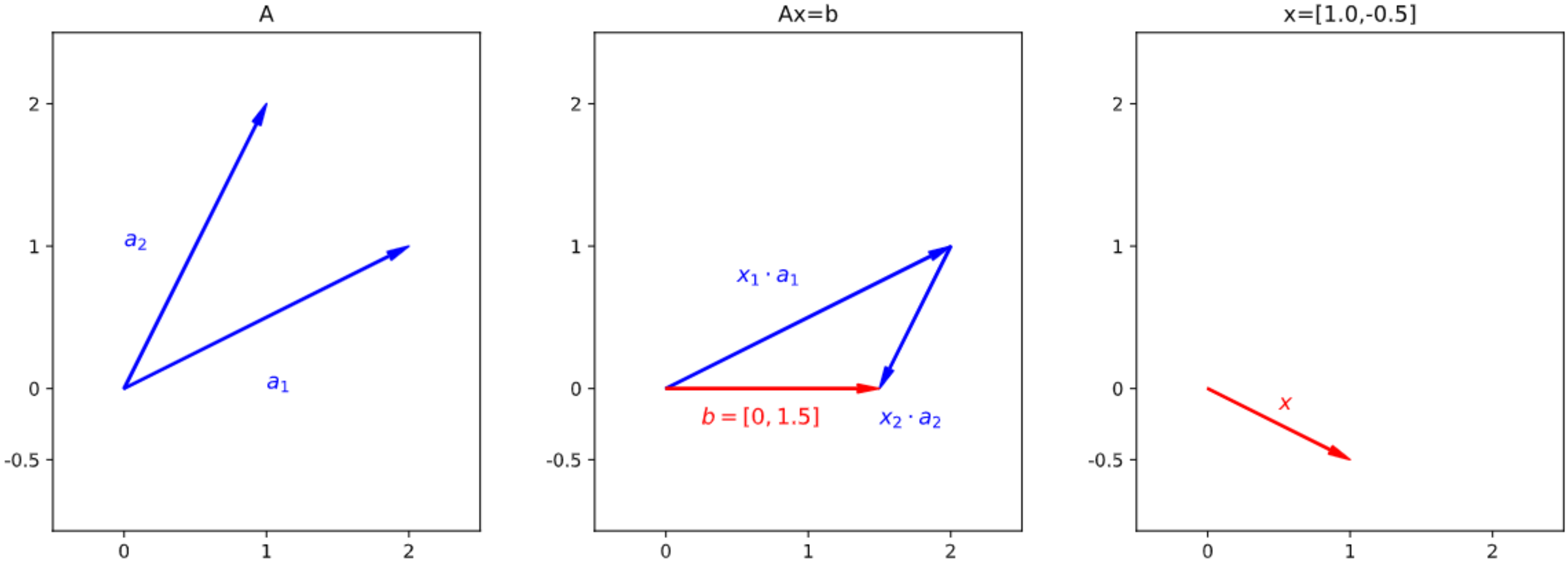
$$\frac{3}{2}x = 3$$

$$x = 2$$

$$y = 3$$



Interpretacja geometryczna



Układ *n* równań z *n* niewiadomymi

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = b_1, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = b_2, \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = b_n.
\end{array}
$$

Postać macierzowa układu równań

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Lub w skrócie

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Kiedy układ równań ma rozwiązanie?

- Twierdzenie Kroneckera-Capelliego:

  Układ równań z *m* niewiadomymi ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy macierze *A* i [*A* | *b*] mają ten sam rząd. Rozwiązanie jest unikalne gdy ten rząd wynosi *m.* W przeciwnym wypadku jest ich nieskończenie wiele.

Konsekwencja TKC

- Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby układ n równań z n niewiadomymi (równanie macierzowe z kwadratową macierzą A) miał jednoznaczne rozwiązanie to

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

Jak policzyć wyznacznik?

- 2x2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- 3x3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Wyznaczniki wyższego wymiaru

Analitycznie

- Wzór Leibniza - bardzo niepraktyczny, złożoność obliczeniowa O(n! n)
- Rozwinięcie Laplace’a – lepsza złożoność – O(n!) – praktyczny tylko na kartce

Numerycznie:

- Iloczyn wartości singularnych
- Iloczyn wartości własnych

Wzory Cramera

- Gotowe wzory na rozwiązanie układu równań.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{array}{c} \text{i-ta kolumna} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Wzory Cramera cd

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$$

Potencjalnie przydatne w obliczeniach analitycznych
Złożoność (
- z rozwinięcie Laplace'a $O((n+1)!)$
- z numerycznym obliczaniem wyznacznika $O(n^4)$

W obliczeniach numerycznych są lepsze metody

Uwarunkowanie układu równań

- Dla układu *m* równań z *m* niewiadomymi można policzyć stałą uwarunkowania κ i wynosi ona

$$\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$