Metody numeryczne

Aproksymacja jednostajna (najlepsza)

dr hab. inż. Jerzy Baranowski

Zadanie najlepszej aproksymacji

Norma supremum (jednostajna)

- Do oceny jakości aproksymacji stosujemy normę

$$\|f - p\| = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - p(x)|$$

- Zadanie najlepszej aproksymacji polega na tym, aby znaleźć taki wielomian $p^* \in \mathscr{P}_n$, że

$$p^* = \arg\min_{p \in \mathscr{P}_n} \|f - p\|$$

$\mathscr{P}_n$ - zbiór wielomianów stopnia n

Warunki istnienia

Ekwioscylacje czyli alternat

- Twierdzenie Weierstrassa gwarantuje istnienie wielomianu
- **Ekwioscylacja** - funkcja f wraz ze wzrostem argumentu oscyluje między wartościami $\pm||f||$
- **Twierdzenie o ekwioscylacji (tzw. alternacie)**

Istnieje jednoznacznie określony wielomian $p^* \in \mathscr{P}_n$ aproksymujący funkcję f w przedziale $[-1,1]$. Jeśli f jest funkcją rzeczywistą to p^* też takie jest. Wielomian $p \in \mathscr{P}_n$ jest równy wielomianowi p^* wtedy, i tylko wtedy gdy $f - p$ ekwioscyluje w co najmniej $n + 2$ punktach.

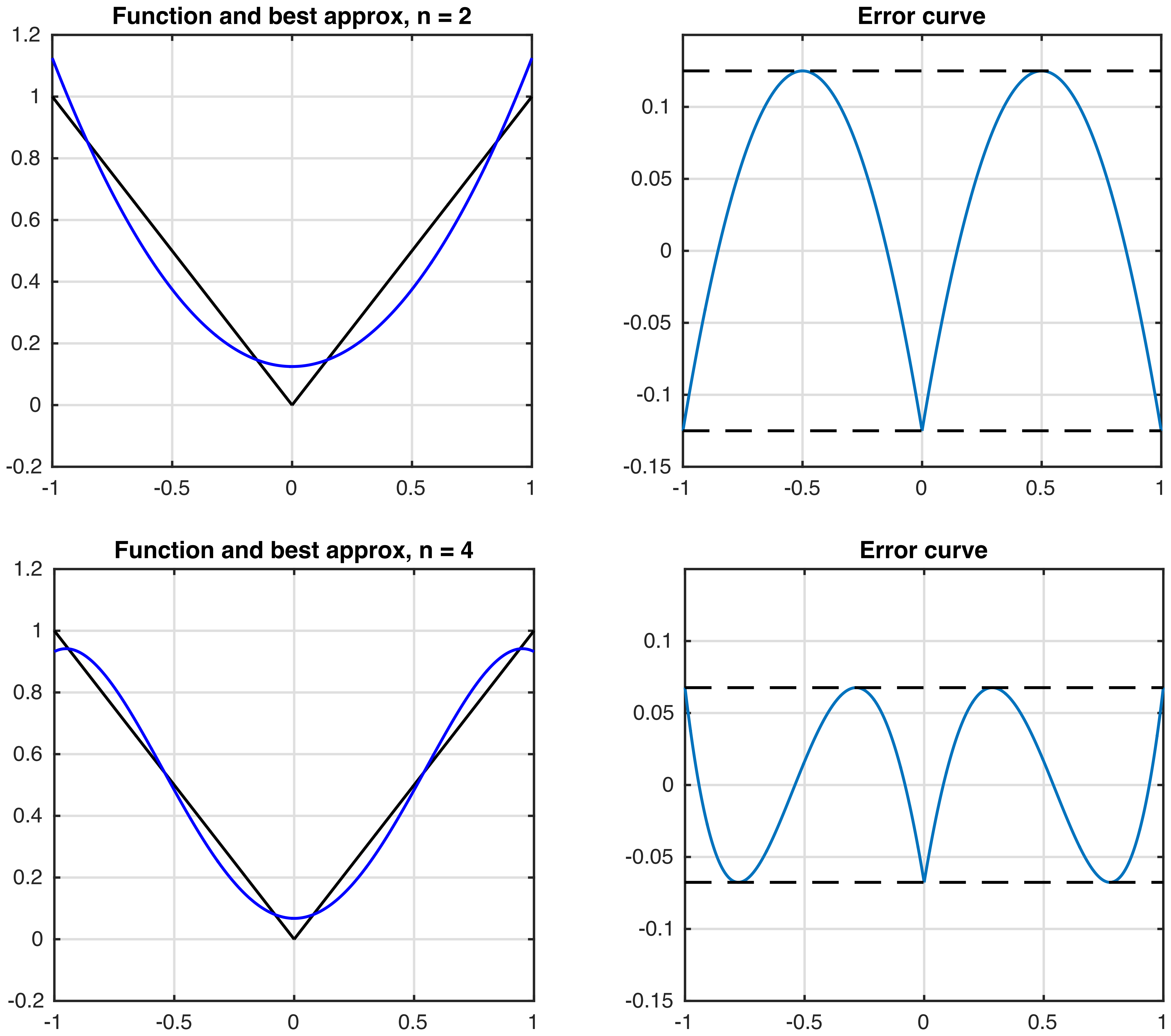
Analiza krzywej błędu

Przykłady

- Krzywa błędu nie musi być różniczkowalna

- Błąd jest zbliżony na całym przedziale

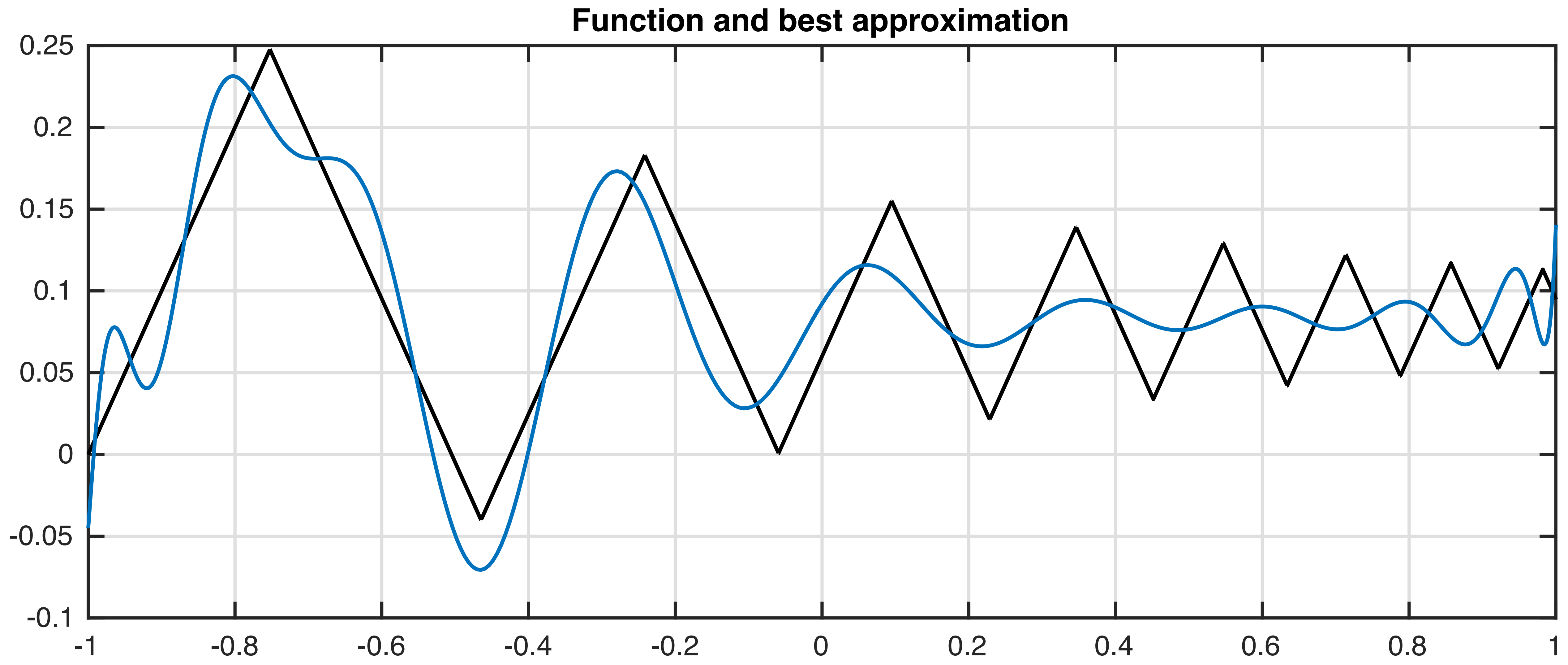
- Podnoszenie rzędu zmniejsza błąd

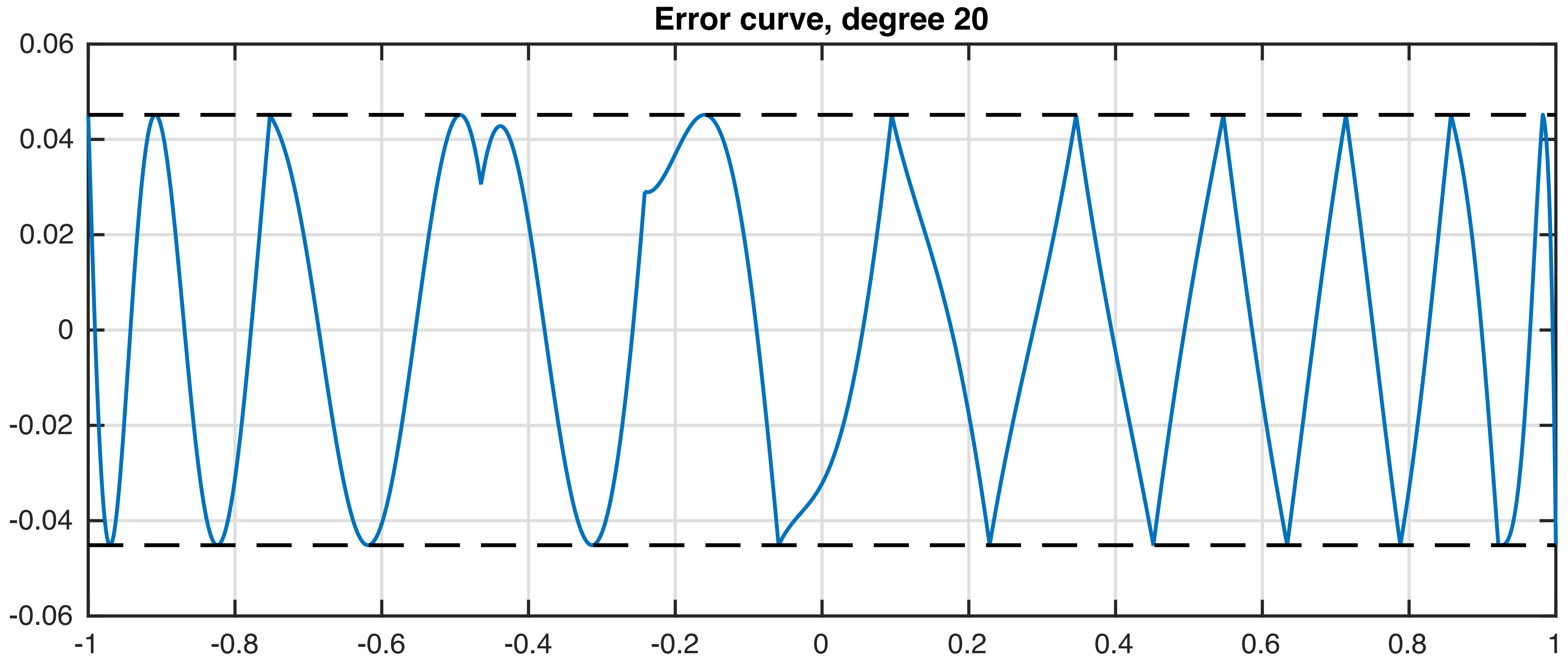


Regularność może być dowolna

Im dziwniejsza funkcja tym gorzej

- Krzywa błędu może mieć też i inne ekstrema
- $n + 2$ to oszacowanie dolne liczby ekwioscylacji





Jak wyznaczyć najlepszą aproksymację

Ogólna idea

- Szukamy wielomianu, dla którego błąd (nie znany z góry) E będzie ekwioscylował

- Wyznaczamy współczynniki wielomianu i wartości E w przyjętym zestawie punktów. E nie koniecznie jest maksimum błędu. Wielomian spełnia równanie

$$b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + \ldots b_n x_i^n + (-1)^i E = f(x_i)$$

- Znajdujemy miejsca zerowe krzywej błędu. Wyznaczamy maksima i minima błędu pomiędzy miejscami zerowymi jako nowe punkty.

- Przestajemy, gdy wartości minimów i maksimów są sobie bliskie co do modułu.

Jak wyznaczyć najlepszą aproksymację

Algorytm Remeza

1. Wyznaczamy wartości funkcji w $n+2$ węzłach Czebyszewa (x_i)

2. Wyznaczamy wielomian p i błąd E rozwiązując układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & -1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n & (-1)^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n+1}) \end{bmatrix}$$

3. Wyznaczamy miejsca zerowe $f - p$. Wyznaczamy maksima/minima E_i pomiędzy miejscami zerowymi (i brzegami przedziału). To nowy zestaw punktów (x_i).

4. $E_m = \min_i |E_i|$, $E_M = \max_i |E_i|$. Jeżeli $E_M - E_m \leq \varepsilon$ STOP.

5. W przeciwnym przypadku powrót do kroku 2.

Stała Lebesgue'a

Ocena jakości

- Stała Lebesgue'a określa nam jak duży może być wielomian interpolacyjny między punktami interpolacji:

$$\Lambda = \sup_{x \in [-1,1]} \lambda(x)$$

gdzie $\lambda(x) = \sum_{j=0}^{n} |\ell_j(x)|$

- Można uogólnić na aproksymację, jako to jak aproksymacja zwiększa normę aproksymowanej funkcji (zob. ATAP rozdział 15)

Jakość aproksymacji wielomianowej

Oszacowania

- Obliczenia najlepszej aproksymacji mogą być kłopotliwe.
- Najlepsza aproksymacja jest jednak pewnym punktem odniesienia.
- Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[-1,1]$, $p \in \mathscr{P}_n$ jej wielomianową aproksymacją, która posiada stałą Lebesgue'a Λ, a $p^* \in \mathscr{P}_n$ jej najlepszą aproksymacją wtedy

$$\|f - p\| \leq (\Lambda + 1)\|f - p^*\|$$

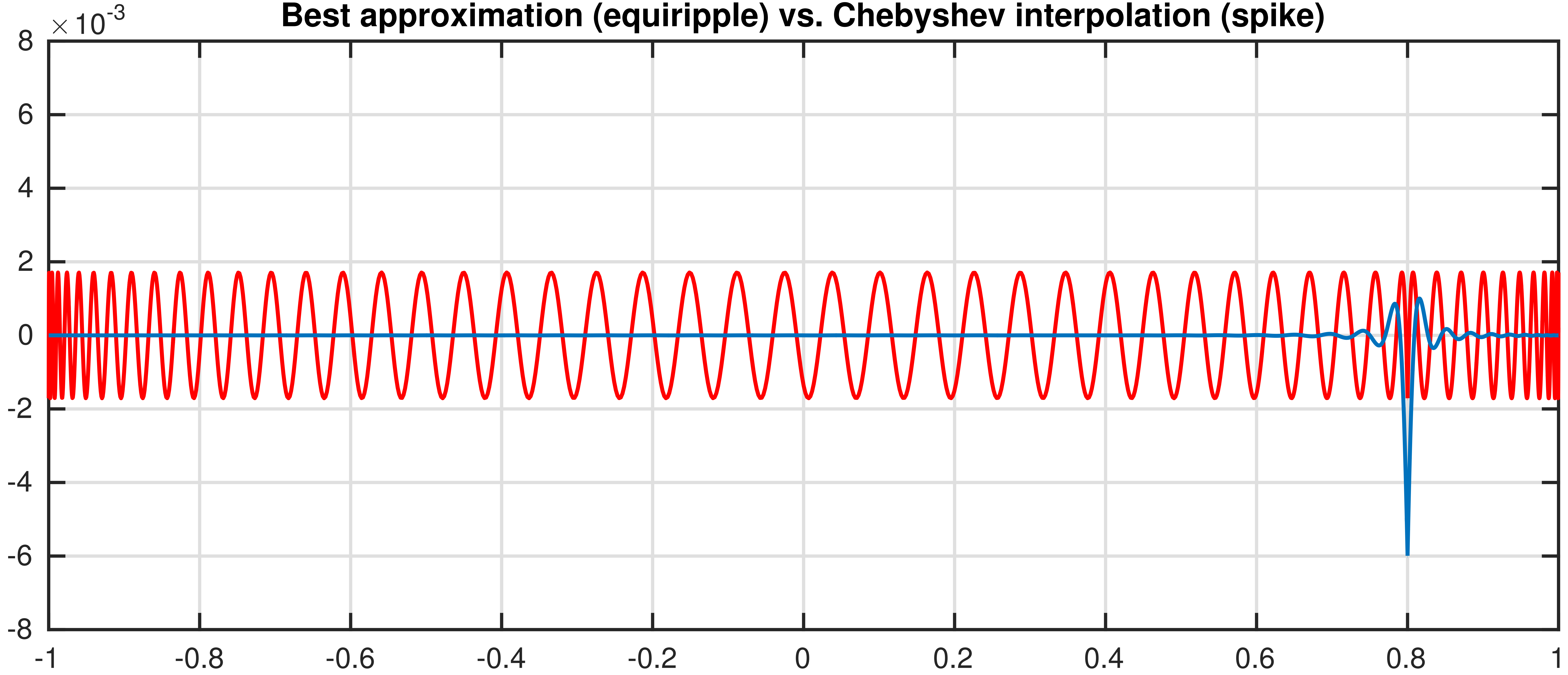
Więcej o stałej Lebesgue'a

Co z oszacowaniami

- Stała Lebesgue'a dla każdej aproksymacji dąży do nieskończoności wraz ze wzrostem n
- Dla interpolacji na węzłach równoodległych mamy $\Lambda_n = O(2^{n+1})$
- Dla interpolacji Czebyszewa $\Lambda_n = O\left(\frac{2}{\pi}\log n\right)$
- Dla aproksymacji wielomianami Czebyszewa $\Lambda_n = O\left(\frac{4}{\pi^2}\log n\right)$
- Praktycznie to oznacza, że np. dla $n = 10^{66}$ aproksymacja jednostajna jest nie więcej niż 100 razy lepsza.

Wielomiany Czebyszewa są „prawie” optymalne

Aproksymacja funkcji $f(x) = |x - 0.8|$, $n = 100$



Inne prawie najlepsze aproksymacje

Aproksymacja Caratheodory'ego–Fejer'a

- Załóżmy, że mamy już wielomian interpolacyjny wysokiego rzędu N dla funkcji f i chcemy znaleźć dobrą aproksymację rzędu n
- Okazuje się, że za pomocą pewnych operacji macierzowych na współczynnikach jego szeregu Czebyszewa i odpowiednie obcięcie szeregu Laurenta dostajemy bardzo dobre przybliżenie krzywej ekwioscylacji.
- Tak powstająca aproksymacja Caratheodory'ego–Fejer'a różni się od aproksymacji najlepszej znacznie mniej niż wynosi błąd najlepszej aproksymacji.
- Złożoność obliczeniowa jest na poziomie $O((N-n)^3)$ i nie wymaga iteracji jak algorytm Remeza.