FAKULTA MECHATRONIKY,
INFORMATIKY A MEZIOBOROVÝCH
STUDIÍ TUL

Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic

SEM2 – LS 2023/2024

Pavel Exner, Petr Rálek
NTI, FM TUL

pavel.exner@tul.cz, petr.ralek@tul.cz

[edit: 14. dubna 2024]

Obyčejná diferenciální rovnice – ODR

- Ordinary Differential Equation – ODE.
- Rovnice obsahující derivace neznámé funkce $y = y(x)$ jedné nezávislé proměnné.
- V parciálních dif. rovnicích je pak funkce $y = y(x_1, \dots, x_n)$ závislá na n proměnných.
- x budeme značit **nezávisle proměnnou**.
- Cílem je najít funkci $y = y(x)$, **závisle proměnnou**.
- Setkáme se s různými značeními pro derivace:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = \dot{y}(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y''(x) = \ddot{y}(x).$$

Obyčejná diferenciální rovnice – ODR

$$F(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu (obsahuje derivace řádu n).
Pokud to lze, můžeme ji přepsat do tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}).$$

ODR, ve které pravá strana nezávisí přímo na nezávislé proměnné x

$$y^{(n)} = f(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}),$$

říkáme **autonomní**.
Řešení

- obecné – množina funkcí, lišících se v n neznámých konstantách (z integrace),
- partikulární – jedna vybraná funkce z obecného řešení, kde jsme neznáme konstanty vypočítali z počátečních podmínek.

Obyčejná diferenciální rovnice – ODR

Lineární ODR rozumíme rovnici

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)\dot{y} + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x),$$

kde $a_i(x)$ a $b(x)$ jsou spojité funkce proměnné x.
Pokud je dále $b(x) = 0$, tedy

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)},$$

říkáme rovnici **homogenní**.
Označíme-li řešení homogenní lineární rovnice y_h a řešení nehomogenní rovnice y_p, můžeme obecné řešení ODR vyjádřit jako součet

$$y = y_h + y_p.$$

Co je vhodné si zopakovat...

- definice řešení ODR
- definice Cauchyovy úlohy
- věta o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy
- spojitost a lipschitzovost f
- analytické postupy řešení – separace proměnných, variace konstant

Příklad I

Aerodynamická brzda – odporová síla vzduchu

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2, \qquad v = v(t), t \in [0, T], v_0 = 100\, km \cdot h^{-1}$$

- celková síla $F = ma = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ je rovna odporové síle vzduchu
- $v_0 = v(0)$ je počáteční rychlost
- popisuje zpomalování objektu v čase $[0, T]$

Příklad II

rozjezd auta – síla pohonu a odporová síla

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Pt - cv, \qquad v = v(t), t \in [0, T], v_0$$

- celková síla $F = ma = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ je rovna rozdílu síly pohonu a síly valivého odporu
- v_0 je počáteční rychlost
- popisuje rozjezd auta v čase $[0, T]$

Příklad III

tlumený oscilátor – pružina, tlumič, buzení

$$m\ddot{y} + \eta\dot{y} + ky = f(t), \qquad y = y(t), t > 0, y_0, \dot{y}_0$$

- celková síla $F = ma = m\ddot{y}$ je rovna druhé derivaci výchylky oscilárotu y
- y_0 je počáteční výchylka, $\dot{y}_0$ je počáteční rychlost
- $\eta\dot{y}$ vyjadřuje vliv tlumení, η (tuhost tlumiče)
- ky vyjadřuje vliv pružiny, k (tuhost pružiny)
- f je funkce vyjadřující vnější buzení oscilátoru

Numerické řešení - explicitní Eulerova metoda

Mějme ODR prvního řádu

$$\dot{y} = f(x, y), \qquad x \in [a, b], \ y(a).$$

Zaveďme krok $h = \frac{b-a}{n}$ a body $x_i = a + ih$ pro $i = 0, \ldots, n$.
Použijeme počáteční podmínku

$$y_0 = y(a).$$

Eulerovu metodu získáme, pokud derivaci $\dot{y}$ aproximujeme dopřednou diferencí:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx \dot{y} = f(x_i, y_i), \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Metodu nazýváme také dopředná Eulerova.

Numerické řešení – chyba explicitní Eulerovy metody

Rozdíl aproximovaného a přesného řešení

$$|y_i - y(x_i)| \le hM(x_i)E_L(x_i - a) \qquad i = 0, \ldots, n,$$

kde

$$M(x_i) = \frac{1}{2} \max_{s \in [a, x_i]} |\ddot{y}(s)| \qquad E_L = \frac{e^{Lt} - 1}{L} \text{ pro } L > 0.$$

Chyba je úměrná h, tudíž řekneme, že je 1. řádu.
L je lipschitzovská konstanta funkce f.
Zaokrouhlovací chyba je omezena takto:

$$|r_i| = |\tilde{x}_i - x_i| \le \frac{\epsilon}{h} E_L(x_i - a) \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Připomeňte si chybu aproximace dopřednou diferencí!

Numerické řešení - implicitní Eulerova metoda

Implicitní Eulerovu metodu získáme, pokud derivaci $\dot{y}$ aproximujeme zpětnou diferencí:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \approx \dot{y} = f(x_i, y_i), \qquad i = 0, \dots, n-1$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \qquad i = 0, \dots, n-1.$$

Metodu nazýváme také zpětná Eulerova.

Vidíme, že není možné hodnotu y_{i+1} explicitně spočítat. Pokud to lze, je potřeba ji pro konkrétní případ f nejprve z rovnice vyjádřit. V opačném případě po úpravě použijeme např. Newtonovu metodu pro řešení

$$g(y_{i+1}) = y_{i+1} - y_i - hf(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0.$$

Absolutní stabilita Eulerových metod I

- Absolutní stabilitu vyšetřujeme ve vztahu k diskretizačnímu kroku h pro konkrétní rovnici.
- Představíme-li si stabilní systém (řešení rovnice se časem ustaluje), potom chceme, aby i numerická metoda se takto chovala.
- Uvedeme na příkladu rovnice $\dot{y} = \lambda y$, jejímž řešením je funkce $y = e^{\lambda t}$, která pro $\lambda < 0$ konverguje k 0 (ustalující se řešení).

Absolutní stabilita Eulerových metod II

Pro expl. Euler. metodu dostaneme:

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1 + h\lambda)^i y_0,$$

tedy geometrickou posloupnost, která konverguje v případě $|1 + h\lambda| < 1$. Pro $\lambda < 0$ z této podmínky dostaneme diskretizační krok

$$0 < h \leq -\frac{2}{\lambda}.$$

Explicitní Eulerova metoda je tedy **podmíněně** stabilní.

Absolutní stabilita Eulerových metod III

Pro impl. Euler. metodu máme:

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_{i+1}$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{1-h\lambda}\, y_i = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^i y_0$$

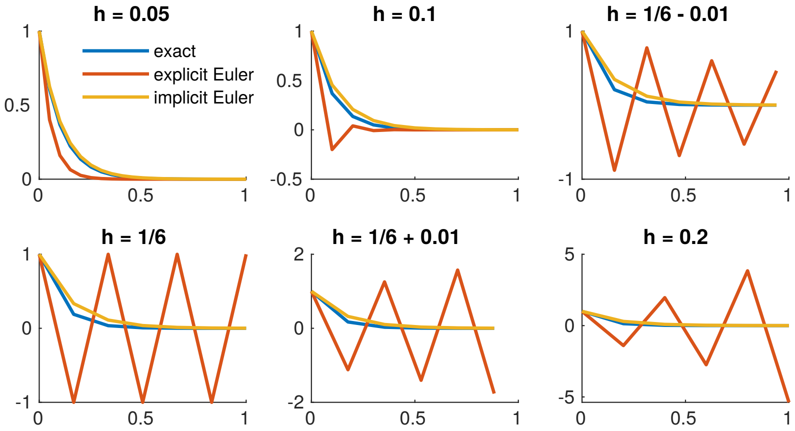
tedy geometrickou posloupnost, která konverguje v případě $|1-h\lambda| > 1$. Pro $\lambda < 0$ z této podmínky dostaneme diskretizační krok

$$h > 0.$$

Implicitní Eulerova metoda je tedy **nepodmíněně** stabilní.

Absolutní stabilita Eulerových metod IV

Demonstrace stability metod pro $\lambda = 12$. Mezní krok je $h = 1/6$.



Numerické řešení – obecná jednokroková metoda

Mějme ODR prvního řádu

$$\dot{y} = f(x, y), \qquad x \in [a, b],\ y(a).$$

a opět zaveďme krok $h = \frac{b-a}{n}$ a body $x_i = a + ih$ pro $i = 0, \dots, n$ a počáteční podmínku $y_0 = y(a)$.

Obecná explicitní jednokroková metoda má pak předpis

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h), \qquad i = 0, \dots, n-1.$$

Obecná implicitní jednokroková metoda má pak předpis

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_{i+1}, y_{i+1}, h), \qquad i = 0, \dots, n-1.$$

Pro volbu $\Phi = f$ dostáváme Eulerovu metodu (explicitní nebo implicitní).

Numerické řešení – pokračování

- pro různou volbu Φ dostáváme různé metody
- metody Runge-Kuttovy – celá třída metod s různými Φ
  Runge-Kutta 2.řádu, s volbou $w1, w2, a, b$:

$$\Phi(x, y, h) = w_1 k_1 + w_2 k_2, \qquad k_1 = f(x, y), \; k_2 = f(x + \alpha h, y + \beta h k_1)$$

- kombinací explicitní a implicitní metody můžeme získat metodu prediktor-korektor (explicitní metodou se odhadne řešení y_{i+1} – predikce – a to se použije v implicitní metodě, která řešení zpřesní – korekce)
- rovnice vyšších řádů se řeší převodem na soustavu rovnic 1. řádu.

Doplňující úkol

1. Implementujte explicitní Eulerovu metodu.
2. Implementujte implicitní Eulerovu metodu.
   (Pro náš jednoduchý případ můžete y_{i+1} přímo vyjádřit.)
3. Proveďte srovnání metod na jednoduchém příkladu $\dot{y} = \lambda y$.
4. Proveďte srovnání metod vzhledem k volbě diskretizačního krok h.