

Fallstudien der math. Modellbildung

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

9. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Wittaker-Shannon-Sampling Theorem	3
1.1	The Wittaker-Shannon-Sampling Theorem	3
1.2	Proof of the Theorem	3
1.3	Meaning, real-life applications and limitations	3
2	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	4
2.1	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	4

1 Witteraker-Shannon-Sampling Theorem

1.1 The Witteraker-Shannon-Sampling Theorem

1.2 Proof of the Theorem

1.3 Meaning, real-life applications and limitations

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

2.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Sei Y_N eine $N \times M(N)$ -Matrix mit unabhängigen zentrierten Einträgen mit Varianz 1,

$$\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] = C_q < \infty \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

und $M(N) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \in [1, \infty).$$

Sei weiterhin die Wishart-Matrix gegeben als

$$W_N = \frac{1}{N} Y_N Y_N^T,$$

und habe die empirische Eigenwertverteilung

$$L_N = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j}$$

und das Zustandsdichtemaß $\overline{L}_N = \mathbb{E}[L_N]$. Dann gilt die Konvergenz

$$\overline{L}_N \xrightarrow{w} f_\alpha(x) dx \quad (N \rightarrow \infty)$$

im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} , wobei

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})_+^2)((1 + \sqrt{\alpha})_+^2 - x)}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
 N^{l+1} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle &= N^{l+1} \cdot \int x^l \overline{L_N}(dx) = N^{l+1} \cdot \frac{1}{N} \cdot \mathbb{E}[\text{tr}(W_N^l)] = N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l W_{j_p, j_{p+1}} \right] \\
 &= N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k) \cdot Y_N(j_2, k) \right) \cdot \left(\prod_{p=2}^l \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=2}^l \sum_{k_1, k_2=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k_1) \cdot Y_N(j_2, k_1) \cdot Y_N(j_p, k_2) \cdot Y_N(j_{p+1}, k_2) \right] \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^{M(N)} \mathbb{E}[Y_N(j_1, k_1) Y_N(j_2, k_1) Y_N(j_2, k_2) Y_N(j_3, k_2) \dots Y_N(j_l, k_l) Y_N(j_1, k_l)]
 \end{aligned}$$

Meine Ideen, wie es weiter geht. Hakt noch ein bisschen, sollte aber in die richtige Richtung gehen :)

$$= \sum_{r_1, r_2=1}^l \sum_{\substack{J: v(J)=r_1 \\ K: v(K)=r_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] \tag{2.1}$$

Die einzelnen Summanden können also als Eulergraphen auf $r_1 + r_2$ Knoten und $2l$ Kanten interpretiert werden. Damit ergeben sich die drei Fälle (setze $r = r_1 + r_2$)

- $r < l + 1$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_N(J, k)] &\leq \prod_{n=1}^l \left(\sup_{j, k, N} \mathbb{E} [|Y_N(j, k)|^l] \right)^{\frac{1}{l}} \\
 &= \prod_{n=1}^l C_l^{\frac{1}{l}} = C_l
 \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
 \#\{J : v(J) = r_1\} &\leq \binom{N}{r_1} r_1^l \leq N^{r_1} r_1^l \\
 \#\{K : v(K) = r_2\} &\leq \binom{M(N)}{r_2} r_2^l \leq M(N)^{r_2} r_2^l
 \end{aligned}$$

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Somit gilt:

$$\frac{1}{N^{l+1}} \sum_{\substack{J:v(J)=r_1 \\ K:v(K)=r_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] < C_l(l+1)^l \frac{N^{r_1} M(N)^{r_2}}{N^{l+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

- $r > l + 1$

Nach Lemma aus der Vorlesung existiert eine einfache, echte Kante und somit $\mathbb{E}[Y_N(J, K)] = 0$, da die Matrixeinträge unabhängig sind.

- $r = l + 1$

Es tragen also nur die Graphen auf $l + 1$ verschiedenen Knoten zu $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L}_N, x^l \rangle$ bei. Diese Graphen haben die Struktur eines Doppelbaumes, denen man geordnete, nicht überkreuzende Paarzerlegungen und damit auch Catalanpfade zuordnen kann.

Weitere Analyse von β_l :

Wähle für einen Doppelbaum r Knoten aus den k -Knoten und $l + 1 - r$ Knoten aus den j -Knoten. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] &= \sum_{r=1}^l \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \\ &\quad \cdot \#\{\text{Doppelbäume mit } l+1-r \text{ } j\text{-Knoten und } r \text{ } k\text{-Knoten}\} \\ &= \sum_{r=1}^l \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \cdot \binom{2l-2}{2r-2} C_{l-r} \end{aligned}$$

Formel für Anzahl der Doppelbäume folgt aus der folgenden Konstruktion (Anm: das -2 folgt immer, da die beiden Wurzelkanten fest 0 im Catalanpfad sind; Die Catalanzahl für $l-r$, weil von dem gesamten Pfad der Länge $2l-2r$ Stücke flach sind und die übrigen wie beim normalen Catalanpfad aufgeteilt werden können)

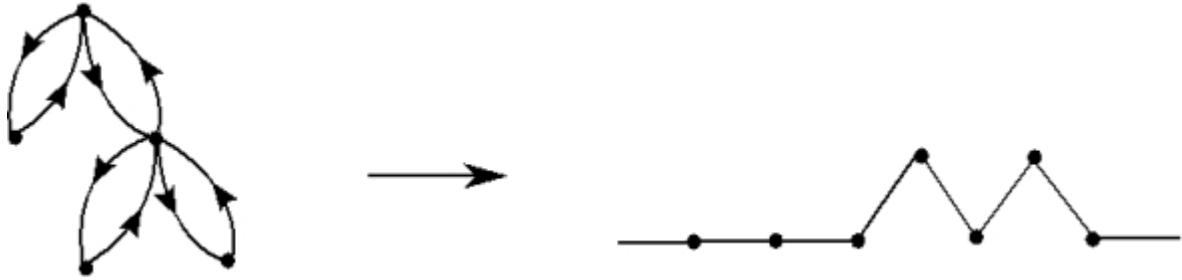
Ein Doppelbaum mit (r) k -Knoten und $(l + 1 - r)$ j -Knoten kann wie folgt als Catalan-Pfad der Länge l interpretiert werden:

Wähle als Wurzel des Baumes einen j -Knoten und gliedere den Baum in Ebenen, wobei die Wurzel in der 0.Ebene liegt. (Die k -Knoten liegen also in ungeraden Ebenen, die j -Knoten in geraden Ebenen) Verweise jede Kante mit einer Richtung, sodass bei jeder Doppelkante eine Kante von dem Knoten wegführt und eine zu ihm hinführt. Konstruiere den Catalan-Pfad wie folgt:

- Alle Kanten zwischen der Wurzel und der ersten Ebene sind Flachstücke (+0)
- Wenn eine Kante von ungerader Ebene aufwärts auf gerade Ebene führt: +1
- Wenn eine Kante von gerader Ebene abwärts auf ungerade Ebene führt: -1

- Die restlichen Kanten sind alle Flachstücke

Beispiel:



Lässt man die Wurzel außen vor, liegen r k -Knoten in den ungeraden Ebenen und $l - r$ j -Knoten in den geraden Ebenen. Damit ergibt sich aus dieser Konstruktion, dass $l - r$ die Anzahl der Aufstiege (und Abstiege) und $2r$ die Anzahl der Flachstücke im Catalan-Pfad sind. Denn: zu jedem j -Knoten führt genau eine Kante aus einer unteren Ebene hin und es führt genau eine Kante in eine untere Ebene zurück (Doppelbaum!).

Die Abbildung von den Doppelbäumen auf die Catalanpfade ist eine Bijektion, da:

- Da der Graph eulersch ist, ist $\sum_{i=1}^{2l} s_i = 0$; Der Graph ist immer über 0, ansonsten würde es ein m geben, sodass $\sum_{i=1}^{2m-1} s_i = -1$, $\sum_{i=1}^{2m} s_i = 0$, $s_{2m-1} = -1$. Also könnten wir einen Doppelbaum mit Knoten $1, 2, \dots, 2m$ konstruieren, und da $s_{2m-1} = -1$ ist, würde eine Kante von diesem Knoten zurück zu einem der ersten $2m$ Knoten gehen, was dem Aufbau eines Doppelbaums widersprechen würde. Insgesamt haben wir also einen Catalanpfad konstruiert.
- Surjektivität: für jeden Catalanpfad der Länge l der Form $\{s_i\}$, $i \leq 2l$, $i \in \mathbb{N}$ kann ein Doppelbaum als Urbild wie folgt konstruiert werden: für i gerade: $s_i = -1 \rightarrow$ gehe von $j_{i/2}$ abwärts, bei $s_i = 0$ aufwärts; für i ungerade bei $s_i = 1$ aufwärts, bei $s_i = 0$ abwärts.
- Injektivität analog zur Übung (bzw muss man das unbedingt nochmal zeigen?)

Die betrachteten Doppelbäume haben s.o. ein kombinatorisches Gewicht von

$$\binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r!$$

Für N hinreichend groß ist dies genähert $N^{l+1-r} M(N)^r$. Damit folgt:

$$\frac{1}{N^{l+1}} N^{l+1-r} M(N)^r = \left(\frac{M(N)}{N} \right)^r \rightarrow \alpha^r$$

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

und damit:

$$\begin{aligned}\beta_l &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{J, K: v(J) + v(K) = l+1} \frac{1}{N^{l+1}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] = \sum_{r=1}^l \alpha^r \binom{2l-2}{2r-2} C_{l-r} \\ &= \sum_{r=1}^l \sum_{p_r \in C_l} \alpha^r = \sum_{p \in C_l} \alpha^r\end{aligned}$$

wobei $r = \frac{1}{2} \# \{\text{Flachstücke in } C_l\} = l - \# \{\text{Anstiege in } C_l\}$.

p_r sei Catalanpfad mit r Flächenstücken.

Gleichung (10) würde ich versuchen per Induktion zu beweisen (Es geht sicher schöner, aber ich weiß nicht wie), ich hänge aber noch beim Induktionsschritt.

$l - r$ im Exponenten von γ_l sind die Aufstiege/Abstiege im Doppelbaum.

Induktionsanfang: $l = 1$:

$$\beta_1 = \alpha \gamma_1 = \alpha \beta_0 \gamma_0 = \alpha$$

Induktionsschritt: Ich denke, dass aus der Rekursionsformel für Catalanzahlen $C_{l+1} = \sum_{k=0}^l C_k C_{l-k}$ folgt, dass

$$\beta_{l+1} = \sum_{k=0}^l \beta_k \beta_{l-k} = \alpha \sum_{k=0}^l \beta_k \gamma_{l-k}$$

aber das ist eher wage...

Wir brauchen zwei Beweise, einmal für $\beta = \alpha \gamma$ und einmal für $\gamma = \sum \beta \gamma$.

$$1.: \alpha \gamma_l = \sum_{p \in C_l} \alpha^{l+1-r}$$

Meine Ideen: Im Grunde ist das deshalb dasselbe wie β , nur werden hier statt der r Knoten aus M die $l+1-r$ aus N betrachtet. Man kann für jeden Catalanpfad mit r_i Flachstücken auch einen mit $l+1-r_i$ finden, aber das ist leider nicht bijektiv. Wenn man wieder überlegt, wie viele Catalanpfade es gibt etc, ist irgendwann zu zeigen, dass

$$\sum_{r=1}^l \binom{2l-2}{2r-2} (C_{l-r} \alpha^r - C_{r-1} \alpha^{l+1-r}) = 0 \text{ ist. Bring das nur leider nicht raus.}$$

Formel (12)

$$Q_n = \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(x) x (x - \alpha - 1)^n dx \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})^2)((1 + \sqrt{\alpha})^2 - x)} (x - \alpha - 1)^n dx \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{-\alpha^2 + 2\alpha x + 2\alpha - x^2 + 2x - 1} (x - \alpha - 1)^n dx \quad (2.4)$$

$$\stackrel{x=y+\alpha+1}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{4\alpha - y^2} y^n dy \quad (2.5)$$

$$\stackrel{y=2\sqrt{\alpha}z}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \cdot 2^n \alpha^{n/2} \cdot 4\sqrt{\alpha} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz = \frac{2}{\pi} \cdot 2^n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz \quad (2.6)$$

$$\stackrel{\text{Übung 1}}{=} \sigma(z^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ C_{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad (2.7)$$

(Falls wir noch Platz füllen müssen, können wir hier die Rechnung aus der Übung auch wiederholen ;)) Bei den „Verständnis-Fragen“ habe ich jedoch etwas Probleme: f_{α} ist für $x=0$ gar nicht definiert? Durch die Rechnung ergibt sich aber der Bezug zu $\sigma(x)$, wo man dann doch beim Halbkreisgesetz wäre.

Zur Eindeutigkeit von f_{α} sind diese „verallgemeinerten Momente“ ein Problem. Habt ihr in der großen W-Theorie Vorlesung dazu was gemacht?