

Fallstudien der math. Modellbildung

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

22. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Whittaker-Shannon Interpolation formula	3
1.1	Preliminary notes and Sampling	3
1.1.1	Sampling	3
1.2	The Whittaker-Shannon Interpolation formula	5
1.3	Proof of the Theorem	5
1.4	Meaning, real-life applications and limitations	7
1.4.1	Uncertainty Principle	7
2	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	8
2.1	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	8
2.2	Beweis des Marchenko-Pastur Gesetzes	9

1 Whittaker-Shannon Interpolation formula

Sampling and reconstructing a signal from its samples are probably two of the most important properties of modern communication. Even very simple things of our daily life, like making a phone call to our dear friend Massimo, are not possible without digitalizing analog signals, for example our voice.

Whereas digitalizing can be done rather straightforward by sampling, the real art is regaining the original signal from these samples or assessing the information lost in the sampling process.

In the following, we'd like to try to give a small survey of the famous Whittaker-Shannon interpolation formula, its applications in real-life but also its limitations, keeping in mind the relationship of Fourier transform and the Heisenberg uncertainty principle.

1.1 Preliminary notes and Sampling

Definition 1.1.1 (Fourier transform) *The Fourier transform $\mathcal{F}(f)$ of a d -dimensional, integrable function $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is given by*

$$\mathcal{F}f(w) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i w x} dx \quad (1.1)$$

So, the Fourier transform converts a time domain function into a frequency domain function. For example, the Fourier transform of an audio signal identifies the frequency spectrum as peaks in the frequency domain.

If $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, then we can define the inverse Fourier transform:

Definition 1.1.2 (Inverse Fourier transform)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(w) e^{2\pi i w x} dw \quad (1.2)$$

Definition 1.1.3 (bandlimited function) *For $Q = \prod_{i=1}^d \omega_i[-1/2, 1/2)$, $\omega \in \mathbb{R}^d$, we define*

$$L_Q^2(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{supp}(\mathcal{F}f) \subset Q\} \quad (1.3)$$

If $f \in L_Q^2(\mathbb{R}^d)$, then it is called ω -bandlimited.

1.1.1 Sampling

To convert a continuous function f into a sequence of discrete values is called sampling. In a mathematical way, sampling can be described as a multiplication of f with a dirac-comb

$$s(t, \Delta T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n\Delta T),$$

1 Whittaker-Shannon Interpolation formula

where ΔT is the sampling intervall and δ is the Dirac-function.
The sampled function \tilde{f} of our original f is denoted by

$$\tilde{f}(t) = s(t, \Delta T)f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t) \delta(t - n\Delta T) \quad (1.4)$$

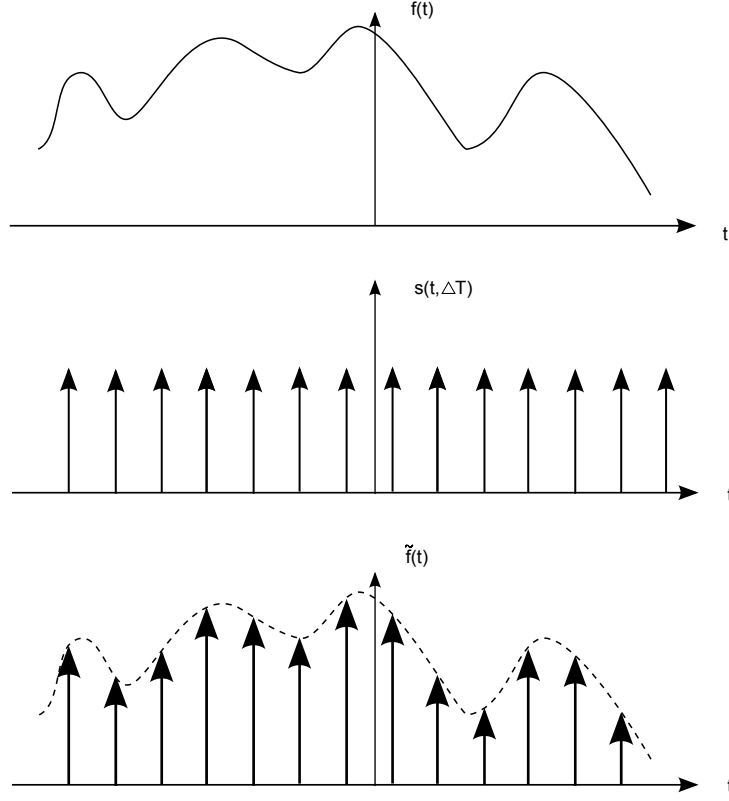


Abbildung 1.1: (a) continuous function f , (b) the dirac-comb, (c) sampled function as product of (a) and (b)

The following theorem will be essential for our further work:

Theorem 1.1.4 (perturbed sampling in L^2) *Let $Q = \prod_{i=1}^d \omega_i[-1/2, 1/2)$ and $f \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ such that $f|_{\tau\mathbb{Z}^d} \in l^2$. We write $f = \eta + \epsilon$, where $\mathcal{F}\eta = \mathcal{F}f$ on Q . Then it holds*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f^c(\tau k) - \epsilon^c(\tau k)) \prod_{i=1}^d \text{sinc}(\tau_i^{-1} x_i - k_i) + \epsilon(x), \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^d), \quad (1.5)$$

where $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$.

1.2 The Whittaker-Shannon Interpolation formula

If $x \in L^2(\mathbb{R}^d)$ is a ω -bandlimited function, there exists a $\tau_0 > 0$ such that for all $\tau \in (0, \tau_0]$

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} x(\tau k) \prod_{i=1}^d \text{sinc}\left(\frac{t_i - k_i \tau_i}{\tau_i}\right). \quad (1.6)$$

In other words, every bandlimited L^2 function can be perfectly reconstructed from its samples, if the sampling rate is above the Nyquist rate! Holy Shit!

Of course, this perfect reconstruction is only possible in a theoretical manner, since we would need infinitely many sampling points. But we can interpolate the original signal with arbitrary precision, if we just add enough sampling points.

(hier könnte man sich etwas über Nyquist auslassen...)

1.3 Proof of the Theorem

Define $\tau_0 = \frac{1}{\omega} := \left(\frac{1}{\omega_0}, \dots, \frac{1}{\omega_d}\right)$ and choose $\tau \in (0, \tau_0]$ arbitrarily.

Besides denote $\Omega := \prod_{i=1}^d \left[-\frac{1}{2}\omega_i, \frac{1}{2}\omega_i\right]$ and $T := \prod_{i=1}^d \left[-\frac{1}{2\tau_i}, \frac{1}{2\tau_i}\right]$.

$$x \in L_w^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall f \notin \Omega : \mathcal{F}(x)(f) = 0 \quad (1.7)$$

The consequence of this condition and of the linearity of $\mathcal{F}(x)$ is:

$$\forall f \in T, k \in \mathbb{Z}^d : \mathcal{F}(x)\left(f + \frac{k}{\tau}\right) = \mathcal{F}(x)(f) + \underbrace{\mathcal{F}(x)\left(\frac{k}{\tau}\right)}_{\notin \Omega} = \mathcal{F}(x)(f)$$

Thus the formula can be rewritten.

$$\forall f \in \Omega : \mathcal{F}(x)(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(x)\left(f + \frac{k}{\tau}\right) \quad (1.8)$$

(1.1) and (1.2) allow us to say:

$$\mathcal{F}(x)(f) = \chi_T(f) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(x)\left(f + \frac{k}{\tau}\right)$$

For using the Poisson summation formula (Theorem 0.3) we have to check the requirements.

- i) Since $\mathcal{F}(x)$ has a compact support and is continuous, $\mathcal{F}(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Hence the fourier transform is reversible.

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x))(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(x)(f) e^{2\pi i f t} df$$

1 Whittaker-Shannon Interpolation formula

With that in mind you can't make a secret of:

$$x'(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(x)(f) e^{2\pi i f t} 2\pi i f_1 df, \dots, \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(x)(f) e^{2\pi i f t} 2\pi i f_d df \right)$$

You can easily see now that $x \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

ii) Another implication of the compact support is

$$\exists C, \varepsilon > 0 : |\mathcal{F}(x)(f)| \leq C(1 + |f|)^{-d-\varepsilon}$$

iii) Die dritte Bedingung ist schwieriger.

With the aid of the Poisson summation formula (Theorem 0.3) you can conclude:

$$\mathcal{F}(x)(f) = \chi_T(f) \det(\tau) \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x(n\tau) e^{-2\pi i n \tau f} \quad (1.9)$$

Now we want to prove that $\mathcal{F} \left(\prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \right) (f) = \det(\tau) \chi_T(f) e^{-2\pi i n \tau f}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left(\det(\tau) \chi_T(f) e^{-2\pi i n \tau f} \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \det(\tau) \chi_T(f) e^{-2\pi i n \tau f} e^{2\pi i f t} df \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \det(\tau) \chi_T(f) e^{2\pi i f (t - n\tau)} df \\ &= \int_{-\frac{1}{2\tau_1}}^{\frac{1}{2\tau_1}} \dots \int_{-\frac{1}{2\tau_d}}^{\frac{1}{2\tau_d}} \prod_{j=1}^d \tau_j e^{2\pi i f_j (t_j - n\tau_j)} df_1 \dots df_d \\ &= \prod_{j=1}^d \int_{-\frac{1}{2\tau_j}}^{\frac{1}{2\tau_j}} \tau_j e^{2\pi i f_j (t_j - n\tau_j)} df_j \\ &= \prod_{j=1}^d \left[\frac{\tau_j}{2\pi i (t_j - n\tau_j)} e^{2\pi i f_j (t_j - n\tau_j)} \right]_{f_j = -\frac{1}{2\tau_j}}^{\frac{1}{2\tau_j}} \\ &= \prod_{j=1}^d \frac{\tau_j}{2\pi i (t_j - n\tau_j)} \left(e^{\pi i \frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j}} - e^{-\pi i \frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j}} \right) \\ &= \prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \end{aligned}$$

Hence formula (1.3) is:

$$\mathcal{F}(x)(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x(n\tau) \mathcal{F} \left(\prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \right) (f)$$

Through applying the inverse transform on both sides, the theorem is proved.

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x))(t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x(n\tau) \mathcal{F} \left(\prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \right) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x(n\tau) \prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \end{aligned}$$

1.4 Meaning, real-life applications and limitations

1.4.1 Uncertainty Principle

Warum haben wir das nur für $d=1$ gemacht??

Theorem 1.4.1 (Uncertainty principle) *Let $g \in L^2(\mathbb{R})$ and $a, b \in \mathbb{R}$ two arbitrary scalars. Then*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 |g(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega - b)^2 |\mathcal{F}g(\omega)|^2 d\omega \right) \geq \frac{\|g\|_2^2}{4\pi} \quad (1.10)$$

(die hoch 1/2 im Skript sind falsch denke ich)

Which means, that an analyzing function (window) cannot be arbitrarily concentrated in the time- and frequency-domain at the same time.

If $g \in L^2(\mathbb{R})$ with $\|g\|_2 = 1$, then, because of the Plancherel equality $\|g\|_2 = \|\mathcal{F}g\|_2$, both $|g|^2$ and $|\mathcal{F}g|^2$ are probability distributions on \mathbb{R} . With this, (1.10) can be written as

$$\text{var}|g|^2 \cdot \text{var}|\mathcal{F}g|^2 \geq \frac{1}{4\pi},$$

the famous Heisenberg uncertainty principle!

Physically, this result says that position distribution and momentum distribution of a quantum particle cannot be sharply peaked at the same time. Mathematically, one can say that position and momentum are Fourier transforms of one another.

If we return to our example of audio signals, (1.10) can be understood in the following way:

If the signal f is very short, it is not possible to determine the frequencies λ exactly, while on the other hand sound at one exact frequency corresponds to a perfect sine wave with no beginning or ending.

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

2.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Sei Y_N eine $N \times M(N)$ -Matrix mit unabhängigen zentrierten Einträgen mit Varianz 1,

$$\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] = C_q < \infty \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

und $M(N) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \in [1, \infty).$$

Sei weiterhin die Wishart-Matrix gegeben als

$$W_N = \frac{1}{N} Y_N Y_N^T,$$

und habe die empirische Eigenwertverteilung

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j}$$

und das Zustandsdichtemaß $\overline{L}_N = \mathbb{E}[L_N]$. Dann gilt die Konvergenz

$$\overline{L}_N \xrightarrow{w} f_\alpha(x) dx \quad (N \rightarrow \infty)$$

im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} , wobei

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})_+^2)((1 + \sqrt{\alpha})_+^2 - x)}$$

2.2 Beweis des Marcenko-Pastur Gesetzes

Zuerst bringen wir $N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ in eine Form, die eine weitergehende Untersuchung ermöglicht:

$$\begin{aligned}
 N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l \rangle &= N^{l+1} \cdot \int x^l \overline{L_N}(dx) = N^{l+1} \cdot \frac{1}{N} \cdot \mathbb{E}[\text{tr}(W_N^l)] = N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l W_{j_p, j_{p+1}} \right] \\
 &= N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k) \cdot Y_N(j_2, k) \right) \cdot \left(\prod_{p=2}^l \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=2}^l \sum_{k_1, k_2=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k_1) \cdot Y_N(j_2, k_1) \cdot Y_N(j_p, k_2) \cdot Y_N(j_{p+1}, k_2) \right] \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^{M(N)} \mathbb{E}[Y_N(j_1, k_1) Y_N(j_2, k_1) Y_N(j_2, k_2) Y_N(j_3, k_2) \dots Y_N(j_l, k_l) Y_N(j_1, k_l)] \\
 &= \sum_{r_1, r_2=1}^l \sum_{\substack{J: v(J)=s_1 \\ K: v(K)=s_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)]
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 J &= (j_1, j_2, j_2, \dots, j_l, j_l, j_1), K = (k_1, k_1, \dots, k_l, k_l), \\
 v : \mathbb{N}^{2l} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad v(X) := \text{Anzahl der verschiedenen Indizes in } X
 \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden können also als Eulergraphen auf $s_1 + s_2$ Knoten und $2l$ Kanten interpretiert werden. Damit ergeben sich die drei Fälle (setze $s = s_1 + s_2$)

- $s < l + 1$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_N(J, k)] &\leq \prod_{n=1}^l \left(\sup_{j, k, N} \mathbb{E} \left[|Y_N(j, k)|^l \right] \right)^{\frac{1}{l}} \\
 &= \prod_{n=1}^l C_l^{\frac{1}{l}} = C_l
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Außerdem gilt:

$$\#\{J : v(J) = s_1\} \leq \binom{N}{s_1} s_1^l \leq N^{s_1} s_1^l \quad (2.3)$$

$$\#\{K : v(K) = s_2\} \leq \binom{M(N)}{s_2} s_2^l \leq M(N)^{s_2} s_2^l \quad (2.4)$$

Somit ergibt sich aus (2.2) – (2.4):

$$\frac{1}{N^{l+1}} \sum_{\substack{J:v(J)=s_1 \\ K:v(K)=s_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] < C_l(l+1)^l \frac{N^{s_1} M(N)^{s_2}}{N^{l+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (2.5)$$

- $s > l + 1$

Nach Lemma aus der Vorlesung existiert eine einfache, echte Kante und somit $\mathbb{E}[Y_N(J, K)] = 0$, da die Matrixeinträge unabhängig sind.

- $s = l + 1$

Es tragen also nur die Graphen auf $l + 1$ verschiedenen Knoten zu $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ bei. Diese Graphen haben die Struktur eines Doppelbaumes

Diese Doppelbaumstruktur lässt sich wie folgt nutzen:

Wähle für einen Doppelbaum r Knoten aus den k -Knoten und $l + 1 - r$ Knoten aus den j -Knoten. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] &= \sum_{r=1}^l \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \\ &\quad \cdot \#\{\text{Doppelbäume mit } l+1-r \text{ } j\text{-Knoten und } r \text{ } k\text{-Knoten}\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ein Doppelbaum mit r k -Knoten und $(l + 1 - r)$ j -Knoten kann wie folgt als Catalan-Pfad der Länge l interpretiert werden:

Wähle als Wurzel des Baumes einen j -Knoten und gliedere den Baum in Ebenen, wobei die Wurzel in der 0.Ebene liegt. (Die k -Knoten liegen also in ungeraden Ebenen, die j -Knoten in geraden Ebenen) Verweise jede Kante mit einer Richtung, sodass bei jeder Doppelkante eine Kante von dem Knoten wegführt und eine zu ihm hinführt. Durchlaufe den Baum mit Hilfe der Tiefensuche und nummeriere die Kanten in der Reihenfolge, wie sie bei der Tiefensuche durchlaufen werden. Konstruiere den Catalan-Pfad wie folgt:

- Wird ein Knoten zum ersten Mal erreicht: $(+1)$
- Kehrt man zu einem bereits besuchten Knoten zurück: (-1)

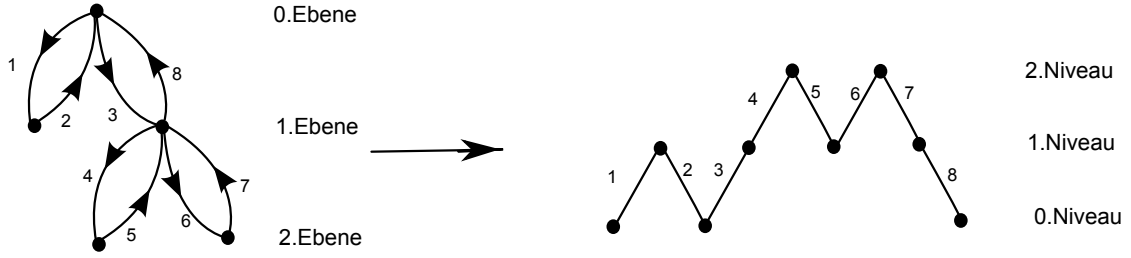


Abbildung 2.1: Doppelbaum auf 5 Knoten und dem zugehörigen Catalan-Pfad

Da der Baum durch Tiefensuche durchlaufen wird, gibt die Entfernung eines Knotens zur Wurzel die Anzahl der nötigen Schritte wieder, die benötigt werden, um ihn zum ersten Mal zu erreichen. Da die j -Knoten in den geraden Ebenen und die k -Knoten in den ungeraden Ebenen liegen, ergibt sich, dass sich die j -Knoten stets auf den geraden Niveaus und die k -Knoten stets auf den ungeraden Niveaus des Catalan-Pfades befinden. Die Abbildung von den Doppelbäumen auf die Catalanpfade ist eine Bijektion, da:

- Da der Graph eulersch ist, ist $\sum_{i=1}^{2l} s_i = 0$; Der Graph ist immer über 0, ansonsten würde es ein m geben, sodass $\sum_{i=1}^{2m-1} s_i = -1$, $\sum_{i=1}^{2m} s_i = 0$, $s_{2m-1} = -1$. Also könnten wir einen Doppelbaum mit Knoten $1, 2, \dots, 2m$ konstruieren, und da $s_{2m-1} = -1$ ist, würde eine Kante von diesem Knoten zurück zu einem der ersten $2m$ Knoten gehen, was dem Aufbau eines Doppelbaums widersprechen würde. Insgesamt haben wir also einen Catalanpfad konstruiert.
- Surjektivität: Starte bei der Wurzel. Füge für jede Aufstiegs-kante einen Knoten in die nächst höhere Ebene und eine Kante als Verbindung hinzu. Füge für jede Abstiegs-kante eine Kante in die nächst niedrigere Ebene hinzu, bis die Doppelbaumstruktur vollständig ist. (Sollen wir das noch in Formeln übersetzen oder reicht das so?)
- Injektivität analog zur Übung (bzw muss man das unbedingt nochmal zeigen?)

Die betrachteten Doppelbäume haben s.o. ein kombinatorisches Gewicht von

$$\binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \quad (2.7)$$

Für N hinreichend groß ist dies genähert $N^{l+1-r} M(N)^r$. Damit folgt:

$$\frac{1}{N^{l+1}} N^{l+1-r} M(N)^r = \left(\frac{M(N)}{N} \right)^r \rightarrow \alpha^r \quad (2.8)$$

und damit:

$$\begin{aligned}
 \beta_l &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \frac{1}{N^{l+1}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] = \sum_{r=1}^l \alpha^r \binom{2l-2}{2r-2} C_{l-r} \\
 &= \sum_{r=1}^l \sum_{p_r \in C_l} \alpha^r = \sum_{p \in C_l} \alpha^r
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

wobei $r = \#\{\text{Abstiege von ungeraden auf gerade Niveaus in } C_l\}$, und p_r Catalan-Pfad mit r entsprechenden Abstiegen.

Ich denke, dass die Formel nun ist:

$$\beta_l = \sum_{r=1}^l \alpha^r \binom{l-1}{r-1} C_{l-r}$$

und entsprechend für γ_l einfach die Einträge im Binomialkoeffizienten halbieren... Was meint ihr? Die Rechnung unten funktioniert dann weiterhin genauso! :)

Habe die Bemerkung mal auskommentiert, damit es etwas übersichtlicher wird!

Mit $\beta_0 := 1, \gamma_0 := 1$ und

$$\gamma_l := \sum_{p \in C_l} \alpha^{l-r} \quad (l \geq 1)$$

gelten die Relationen

$$\beta_l = \alpha \gamma_l = \alpha \sum_{r=0}^{l-1} \beta_r \gamma_{l-1-r} \tag{2.10}$$

für alle $l \geq 1$:

($l-r$ ist dabei die Anzahl der Abstiegsanten von geraden auf ungerade Niveaus im Catalan-Pfad.)

•

$$\begin{aligned}
 \alpha \gamma_l &= \sum_{p \in C_l} \alpha^{l+1-r}, \\
 \beta_l - \alpha \gamma_l &= \sum_{r=1}^l \alpha^r \binom{2l-2}{2r-2} C_{l-r} - \sum_{r=1}^l \alpha^{l+1-r} \binom{2l-2}{2l-2r} C_{r-1} \\
 &\stackrel{\text{Symmetrie Binom.}}{=} \sum_{r=1}^l \binom{2l-2}{2l-2r} (C_{l-r} \alpha^r - C_{r-1} \alpha^{l+1-r}) \\
 &\stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Für die einzelnen Summenglieder folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{i-tes Summenglied: } & \binom{2l-2}{2l-2i} (C_{l-i}\alpha^i - C_{i-1}\alpha^{l+1-i}) \\
 (l+1-i)\text{-tes Summenglied: } & \binom{2l-2}{2l-2-2l+2i} (C_{l-1-l+i}\alpha^{l+1-i} - C_{1+l-i-1}\alpha^{l+1-1-l+i}) \\
 & = -i\text{-tes Summenglied}
 \end{aligned}$$

Ist l gerade, dann heben sich folglich alle Summenglieder weg und die Summe ist 0, ist l ungerade, bleibt nur das $(l+1)/2$ -te Summenglied übrig:

$$\begin{aligned}
 & \binom{2l-2}{l+1-2} (C_{l-\frac{l+1}{2}}\alpha^{\frac{l+1}{2}} - C_{\frac{l+1}{2}-1}\alpha^{l+1-\frac{l+1}{2}}) \\
 & = \binom{2l-2}{l-1} (C_{\frac{l-1}{2}}\alpha^{\frac{l+1}{2}} - C_{\frac{l-1}{2}}\alpha^{\frac{l+1}{2}}) = 0
 \end{aligned}$$

Damit gilt der erste Teil von (2.10)

- Betrachte die Position im Pfad, an der zum ersten Mal die 0 erreicht wird. Diese ist immer gerade, da die 0 genau dann erreicht wird, wenn man im zugehörigen Doppelbaum zur Wurzel zurückkehrt. Sei also $2j$, $j \in \{1, \dots, l\}$, diese Position. Teile nun den Pfad in einen vorderen Teil P_1 der Länge $2j$ und einen hinteren Teil P_2 der Länge $2l-2j$. In dem erzeugenden Baum entspricht P_1 dem äußersten Teilbaum, P_2 dem restlichen Baum. P_2 ist also ein beliebiger Catalan-Pfad. P_1 hat die besondere Struktur, dass die 0 erst an letzter Position erreicht wird, die erste und letzte Kante sind somit als Aufstiegs- bzw. Abstiegs-kante festgelegt und können für die kombinatorische Analyse vernachlässigt werden. Löscht man diese beiden Kanten und subtrahiert 1 von allen Elementen von P_1 , erhält man einen neuen Pfad \tilde{P}_1 , der ein beliebiger Catalan-Pfad der Länge $2j-2$ ist. Dies folgt direkt aus der Struktur des Doppelbaumes: \tilde{P}_1 entspricht dem äußersten Teilbaum ohne die ursprüngliche Wurzel, wodurch man einen neuen, beliebigen Doppelbaum erhält.

Die geraden/ungeraden Niveaus im ursprünglichen Pfad sind in \tilde{P}_1 ungerade/gerade (Durch die Verschiebung um 1 nach unten). r und $l-r$ haben sich also genau vertauscht! Damit ergibt sich aus den Definition für β_l und γ_l die Formel:

$$\begin{aligned}
 \beta_l &= \alpha \sum_{j=1}^{l-1} \gamma_{j-1} \beta_{l-j} = \alpha \sum_{j=0}^l \gamma_j \beta_{l-j-1} \\
 &= \alpha \sum_{k=0}^l \beta_k \gamma_{l-1-k}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Das zusätzliche α wird in der Formel durch das Löschen der Abwärtskante in P_1 hervorgerufen.

Also gilt auch der zweite Teil von (2.10).

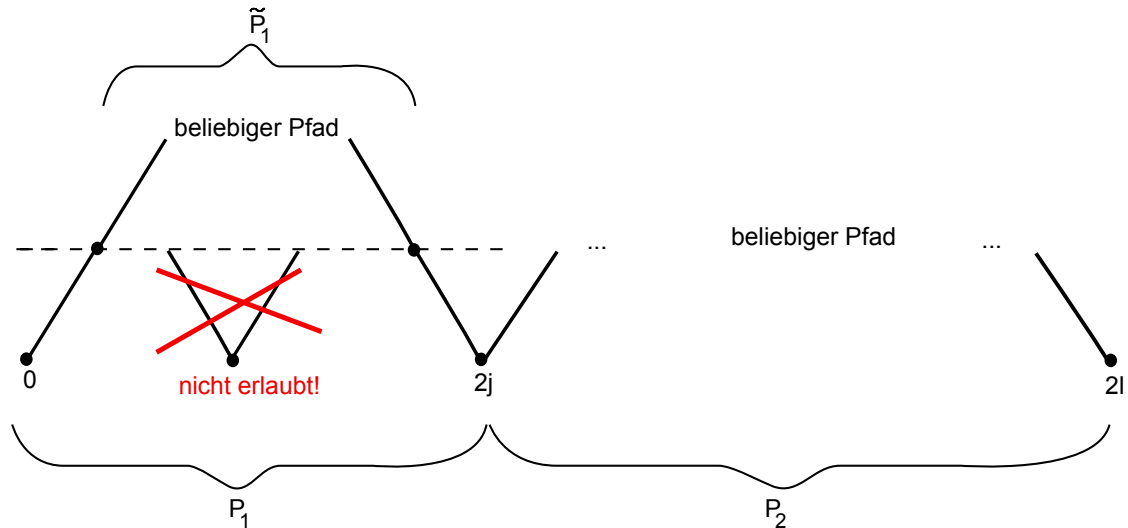


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Rekursion

Beweis von Formel (12)

$$\begin{aligned}
 Q_n &:= \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(x) x(x - \alpha - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})^2)((1 + \sqrt{\alpha})^2 - x)(x - \alpha - 1)^n} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{-\alpha^2 + 2\alpha x + 2\alpha - x^2 + 2x - 1}(x - \alpha - 1)^n dx \\
 &\stackrel{x=y+\alpha+1}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{4\alpha - y^2} y^n dy \\
 &\stackrel{y=2\sqrt{\alpha}z}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \cdot 2^n \alpha^{n/2} \cdot 4\sqrt{\alpha} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz = \frac{2}{\pi} \cdot 2^n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz \\
 \stackrel{\text{Übung 1}}{=} \sigma(z^n) &= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ C_{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Falls wir noch Platz füllen müssen, können wir hier die Rechnung aus der Übung auch wiederholen ;)) Bei den „Verständnis-Fragen“ habe ich jedoch etwas Probleme: f_{α} ist für $x=0$ gar nicht definiert? Durch die Rechnung ergibt sich aber der Bezug zu $\sigma(x)$, wo man dann doch beim Halbkreisgesetz wäre.

Zur Eindeutigkeit von f_{α} sind diese „verallgemeinerten Momente“ ein Problem. Habt ihr in der großen W-Theorie Vorlesung dazu was gemacht?

Finde nichts zu verallgemeinerten Momenten. Müssen wir am Dienstag fragen.

Ann: Theorem der Vorlesung auch für verallgemeinerte Momente anwendbar: f eind.

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

bestimmt wenn $Q_n < \infty$ (folgt aus (12)) und $\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{z^n}{n!}$ positiven Konvergenzradius besitzt.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

wobei

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{C_{\frac{n}{2}}}{n!} = ((\frac{k}{2} + 1)! \frac{k}{2}!)^{-1}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Wurzelkriterium für Konvergenzradius:

$$(\frac{k}{2} + 1)! \frac{k}{2}! \geq 1 \Rightarrow |a_n| \leq 1 \Rightarrow$$

$$r = (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} > 1$$

Beweis von Formel (14)

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x(x - \alpha - 1)^n \quad (2.13)$$

Anwendung des binomischen Lehrsatzes ergibt:

$$\begin{aligned} R_n &= \alpha^{-1-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-\alpha - 1)^k \\ &= \alpha^{-1-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} (-\alpha - 1)^k \rangle \\ &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \beta_{n+1-k} \end{aligned}$$

wegen $\beta_l = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ und der Linearität des Integrals.

Um die Rekursionsformel zu zeigen benötigt man folgende Formel:

$$\sum_{n \geq t} \binom{m-n}{m-u-t} \binom{n}{t} = \binom{m+1}{u} \quad (2.14)$$

Dies kann man kombinatorisch begründen. Stellt man sich das Pascalsche Dreieck vor, so gibt t die Diagonale und der Index n die Zeile vor. Der Binomialkoeffizient $\binom{m+1}{u}$ ist die Anzahl der Pfade im Baumdiagramm...Fortsetzung folgt.

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Nun betrachtet man:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m R_{m-n} R_m &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m-n}{k} (-\alpha - 1)^k \beta_{m-n+1-k} \alpha^{-1-\frac{m-n}{2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-\alpha - 1)^l \beta_{n+1-l} \alpha^{-1-\frac{n}{2}} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m-n}{k} \binom{n}{l} (-\alpha - 1)^{k+l} \beta_{m-n+1-k} \gamma_{n+1-l} \end{aligned}$$

Für $k > n$ gilt $\binom{n}{k} = 0$. Dadurch kann man den Index k durch $u := k + l$ ersetzen.

$$\sum_{n=0}^m R_{m-n} R_m = \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{u \geq l} \binom{m-n}{u-l} \binom{n}{l} (-\alpha - 1)^u \beta_{m-n+1+l-u} \gamma_{n+1-l}$$

Mit $t := n - l$ kann l umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m R_{m-n} R_m &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{t \leq n} \sum_{u \geq n-t} \binom{m-n}{u-n+t} \binom{n}{t} (-\alpha - 1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \binom{m-n}{u-n+t} \binom{n}{t} (-\alpha - 1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{t=0}^{m+1-u} \sum_{u=0}^{m+1} (-\alpha - 1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \sum_{n=0}^m \binom{m-n}{m-u-t} \binom{n}{t} \end{aligned}$$

Mit Formel (2.14) gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m R_{m-n} R_m &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{t=0}^{m+1-u} \sum_{u=0}^{m+1} (-\alpha - 1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \binom{m+1}{u} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha - 1)^u \sum_{t=0}^{m+1-u} \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \end{aligned}$$

Durch die Substitution $r := m + 1 - u - t$ und die Anwendung von Formel (10) ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m R_{m-n} R_m &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha - 1)^u \sum_{r=0}^{m+1-u} \beta_r \gamma_{m+2-u-r} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha - 1)^u \left(-\beta_{m+2-u} + \sum_{r=0}^{m+2-u} \beta_r \gamma_{m+2-u-r} \right) \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha - 1)^u \left(\frac{1}{\alpha} \beta_{m+3-u} - \beta_{m+2-u} \right) \end{aligned}$$

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Und jetzt geht es nicht mehr so recht weiter.

Die Rekursionsformel sträubt sich noch ein bisschen, drei Summenformeln oder mehr ineinander verschachtelt, aber es sollte hoffentlich irgendwann aus der Darstellung von R_n und (10) folgen.

$R_m = Q_m$:

Dazu zeigen wir, dass $R_0 = Q_0$ und $R_1 = Q_1$, sowie dass die weiteren Folgenglieder von Q_m durch die gleiche Rekursionsformel gebildet werden können. Daraus folgt $R_m = Q_m \forall m$

Beweis:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha\beta_0\gamma_0 = \alpha \\ \beta_2 &= \alpha\beta_0\gamma_1 + \alpha\beta_1\gamma_0 = \alpha\gamma_1 + \alpha\beta_1 = \beta_1 + \alpha\beta_1 \\ R_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x = \frac{\beta_1}{\alpha} = 1 \\ R_1 &= \alpha^{\frac{3}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) (x^2 - (\alpha + 1)x) = \alpha^{\frac{3}{2}} (\beta_2 - (\alpha + 1)\beta_1) = 0 \\ Q_0 &= C_0 = 1, \quad Q_1 = 0\end{aligned}$$

Rekursion für Q_m :

$$\begin{aligned}\text{m ungerade: } \sum_{n=0}^m Q_{m-n} Q_n &= Q_0 \underbrace{Q_m}_{=0} + \underbrace{Q_1}_{=0} Q_{n-1} + \dots = 0 = Q_{m+2} \\ \text{m gerade: } Q_{m+2} &= C_{\frac{m}{2}+1} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} C_k C_{\frac{m}{2}-k} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} Q_{2k} Q_{m-2k} = \sum_{n=0}^m Q_n Q_{m-n}\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus $Q_n Q_{m-n} = 0$ für $n = 2k + 1$ folgt.

Bleibt zu zeigen, dass damit $\overline{L_N} \xrightarrow{w} f_\alpha(x) dx$ ($N \rightarrow \infty$).

Unter der Annahme, dass diese seltsamen "verallgemeinerten Momente" genauso wie die normalen Momente verwendet werden können, können wir das Theorem aus der Vorlesung anwenden, um von der Konvergenz der Momente auf die schwache Konvergenz der W-maße zu kommen.

Voraussetzungen: 1. f_α ist durch Q_n eindeutig bestimmt, s.o. erfüllt;

2.

$$\begin{aligned}\alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x(x - \alpha - 1)^n &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \langle \overline{L_N}, x^{n+1-k} \rangle \\ &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \text{tr}(W_N^{n+1-k}) \right] < \infty \quad \forall N, n \in \mathbb{N}_0\end{aligned}$$

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

wegen $\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] < \infty$

(...okay sicher bin ich mir bei dem Ganzen nicht aber das hier ist alles mehr so als Idee aufzufassen)

\Rightarrow Theorem (Woche 2, Seite 3 rechts) \Rightarrow schwache Konvergenz