Fallstudien der math. Modellbildung

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

6. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Wittaker-Shannon-Sampling Theorem

1.1 The Wittaker-Shannon-Sampling Theorem

1.2 Proof of the Theorem

1.3 Meaning, real-life applications and limitations

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

2.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

Sei Y_N eine $N \times M(N)$-Matrix mit unabhängigen zentrierten Einträgen mit Varianz 1,

$$\sup_{j,k,N} \mathbb{E}\left[|Y_N(j,k)|^q\right] = C_q < \infty \qquad \forall q \in \mathbb{N}$$

und $M(N) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \in [1, \infty).$$

Sei weiterhin die Wishart-Matrix gegeben als

$$W_N = \frac{1}{N} Y_N Y_N^T,$$

und habe die empirische Eigenwertverteilung

$$L_N = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda_j}$$

und das Zustandsdichtemaß $\overline{L_N} = \mathbb{E}[L_N]$. Dann gilt die Konvergenz

$$\overline{L_N} \xrightarrow{\text{w}} f_\alpha(x)dx \quad (N \to \infty)$$

im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$, wobei

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})_+^2((1 + \sqrt{\alpha})_+^2}$$

$$\begin{aligned}
N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l \rangle &= N^{l+1} \cdot \int x^l \overline{L_N}(dx) = N^{l+1} \cdot \frac{1}{N} \cdot \mathbb{E}[tr(W_N^l)] = N^l \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N} \mathbb{E}\left[\prod_{p=1}^{l} W_{j_p,j_{p+1}}\right] \\
&= N^l \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N} \mathbb{E}\left[\prod_{p=1}^{l} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p,k) \cdot Y_N(j_{p+1},k)\right] \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_1,k) \cdot Y_N(j_2,k)\right) \cdot \left(\prod_{p=2}^{l} \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p,k) \cdot Y_N(j_{p+1},k)\right)\right] \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N} \mathbb{E}\left[\prod_{p=2}^{l} \sum_{k_1,k_2=1}^{M(N)} Y_N(j_1,k_1) \cdot Y_N(j_2,k_1) \cdot Y_N(j_p,k_2) \cdot Y_N(j_{p+1},k_2)\right] \\
&= \dots \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N} \sum_{k_1,\dots,k_l=1}^{M(N)} \mathbb{E}[Y_N(j_1,k_1) \cdot Y_N(j_2,k_1) \cdot Y_N(j_2,k_2) \cdot Y_N(j_3,k_2) \dots Y_N(j_l,k_l) \cdot Y_N(j_1,k_l)]
\end{aligned}$$