

Fallstudien der math. Modellbildung

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

18. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Whittaker-Shannon Interpolation Theorem	3
1.1	The Whittaker-Shannon Interpolation Theorem	3
1.2	Proof of the Theorem	3
1.3	Meaning, real-life applications and limitations	5
2	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	6
2.1	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	6
2.2	Beweis des Marchenko-Pastur Gesetzes	7

1 Whittaker-Shannon Interpolation Theorem

1.1 The Whittaker-Shannon Interpolation Theorem

If $x \in L^2(\mathbb{R}^d)$ is a ω -bandlimited function, there exists a $\tau_0 > 0$ such that for all $\tau \in (0, \tau_0]$

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} x(\tau k) \prod_{i=1}^d \text{sinc}\left(\frac{t_i - k_i \tau_i}{\tau_i}\right).$$

1.2 Proof of the Theorem

Define $\tau_0 = \frac{1}{\omega} := \left(\frac{1}{\omega_0}, \dots, \frac{1}{\omega_d}\right)$ and choose $\tau \in (0, \tau_0]$ arbitrarily.

Besides denote $\Omega := \prod_{i=1}^d \left[-\frac{1}{2}\omega_i, \frac{1}{2}\omega_i\right]$ and $T := \prod_{i=1}^d \left[-\frac{1}{2\tau_i}, \frac{1}{2\tau_i}\right]$.

$$x \in L_w^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall f \notin \Omega : \mathcal{F}(x)(f) = 0 \quad (1.1)$$

The consequence of this condition and of the linearity of $\mathcal{F}(x)$ is:

$$\forall f \in T, k \in \mathbb{Z}^d : \mathcal{F}(x)\left(f + \frac{k}{\tau}\right) = \mathcal{F}(x)(f) + \underbrace{\mathcal{F}(x)\left(\frac{k}{\tau}\right)}_{\notin \Omega} = \mathcal{F}(x)(f)$$

Thus the formula can be rewritten.

$$\forall f \in \Omega_\omega : \mathcal{F}(x)(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(x)\left(f + \frac{k}{\tau}\right) \quad (1.2)$$

(1.1) and (1.2) allow us to say:

$$\mathcal{F}(x)(f) = \chi_T(f) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(x)\left(f + \frac{k}{\tau}\right)$$

With the aid of the Poisson summation formula (Theorem 0.3) you can conclude:

$$\mathcal{F}(x)(f) = \chi_T(\tau f) \det(\tau) \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x(n\tau) e^{-2\pi i n \tau f} \quad (1.3)$$

Mit dieser Poissonschen Summenformel habe ich ziemliche Probleme:

Macht unsere Notation im Skript da Sinn, bzw. wie soll das mit $k, n \in \mathbb{Z}^d$ funktionieren?

1 Whittaker-Shannon Interpolation Theorem

Außerdem haben wir auch ganz andere Voraussetzungen, als z.B. bei Wikipedia, da muss die Funktion u.a. in C^∞ liegen!

Wir müssen auch klären, ob wir die Poisson-Regel überhaupt anwenden dürfen, die Stetigkeit, bzw. die beliebige diff'barkeit ergeben sich mir jetzt nicht so, laut dieser Bemerkung am Ende von Übung 3 geht es ja aber...

Und schließlich an Andi: Hast du die Formel richtig angewandt? Wo kommt das $\det \tau$ her? Ich würde auch sagen, dass im Exponent kein Minus steht?

Das ist echt ein kack, aber bis auf diesen Schritt finde ichs ziemlich gut :) Bist du da selbst drauf gekommen oder hast du das iwo aus dem Internet? Falls letzteres, könntest du uns den Link schicken?

Now we want to prove that $\mathcal{F}\left(\prod_{j=1}^d \operatorname{sinc}\left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j}\right)\right)(f) = \det(\tau)\chi_T(\tau f)e^{-2\pi i n \tau f}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\det(\tau)\chi_T(\tau f)e^{-2\pi i n \tau f}\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \det(\tau)\chi_T(\tau f)e^{-2\pi i n \tau f} e^{2\pi i f t} df \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \det(\tau)\chi_T(\tau f)e^{2\pi i f(t - n\tau)} df \\ &= \int_{-\frac{1}{2\tau_1}}^{\frac{1}{2\tau_1}} \dots \int_{-\frac{1}{2\tau_d}}^{\frac{1}{2\tau_d}} \prod_{j=1}^d \tau_j e^{2\pi i f_j(t_j - n\tau_j)} df_1 \dots df_d \\ &= \prod_{j=1}^d \int_{-\frac{1}{2\tau_j}}^{\frac{1}{2\tau_j}} \tau_j e^{2\pi i f_j(t_j - n\tau_j)} df_j \\ &= \prod_{j=1}^d \left[\frac{\tau_j}{2\pi i(t_j - n\tau_j)} e^{2\pi i f_j(t_j - n\tau_j)} \right]_{f_j = -\frac{1}{2\tau_j}}^{\frac{1}{2\tau_j}} \\ &= \prod_{j=1}^d \frac{\tau_j}{2\pi i(t_j - n\tau_j)} \left(e^{\pi i \frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j}} - e^{-\pi i \frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j}} \right) \\ &= \prod_{j=1}^d \operatorname{sinc}\left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j}\right) \end{aligned}$$

Hence formula (1.3) is:

$$\mathcal{F}(x)(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x(n\tau) \mathcal{F}\left(\prod_{j=1}^d \operatorname{sinc}\left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j}\right)\right)(f)$$

Through applying the inverse transform on both sides, the theorem is proved.

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x))(t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x(n\tau) \mathcal{F} \left(\prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \right) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x(n\tau) \prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \end{aligned}$$

1.3 Meaning, real-life applications and limitations

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

2.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Sei Y_N eine $N \times M(N)$ -Matrix mit unabhängigen zentrierten Einträgen mit Varianz 1,

$$\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] = C_q < \infty \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

und $M(N) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \in [1, \infty).$$

Sei weiterhin die Wishart-Matrix gegeben als

$$W_N = \frac{1}{N} Y_N Y_N^T,$$

und habe die empirische Eigenwertverteilung

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j}$$

und das Zustandsdichtemaß $\overline{L}_N = \mathbb{E}[L_N]$. Dann gilt die Konvergenz

$$\overline{L}_N \xrightarrow{w} f_\alpha(x) dx \quad (N \rightarrow \infty)$$

im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} , wobei

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})_+^2)((1 + \sqrt{\alpha})_+^2 - x)}$$

2.2 Beweis des Marcenko-Pastur Gesetzes

Zuerst bringen wir $N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ in eine Form, die eine weitergehende Untersuchung ermöglicht:

$$\begin{aligned}
 N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l \rangle &= N^{l+1} \cdot \int x^l \overline{L_N}(dx) = N^{l+1} \cdot \frac{1}{N} \cdot \mathbb{E}[\text{tr}(W_N^l)] = N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l W_{j_p, j_{p+1}} \right] \\
 &= N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k) \cdot Y_N(j_2, k) \right) \cdot \left(\prod_{p=2}^l \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=2}^l \sum_{k_1, k_2=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k_1) \cdot Y_N(j_2, k_1) \cdot Y_N(j_p, k_2) \cdot Y_N(j_{p+1}, k_2) \right] \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^{M(N)} \mathbb{E}[Y_N(j_1, k_1) Y_N(j_2, k_1) Y_N(j_2, k_2) Y_N(j_3, k_2) \dots Y_N(j_l, k_l) Y_N(j_1, k_l)] \\
 &= \sum_{r_1, r_2=1}^l \sum_{\substack{J: v(J)=r_1 \\ K: v(K)=r_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)]
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 J &= (j_1, j_2, j_2, \dots, j_l, j_l, j_1), K = (k_1, k_1, \dots, k_l, k_l), \\
 v : \mathbb{N}^{2l} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad v(X) := \text{Anzahl der verschiedenen Indizes in } X
 \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden können also als Eulergraphen auf $r_1 + r_2$ Knoten und $2l$ Kanten interpretiert werden. Damit ergeben sich die drei Fälle (setze $r = r_1 + r_2$)

- $r < l + 1$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_N(J, k)] &\leq \prod_{n=1}^l \left(\sup_{j, k, N} \mathbb{E} \left[|Y_N(j, k)|^l \right] \right)^{\frac{1}{l}} \\
 &= \prod_{n=1}^l C_l^{\frac{1}{l}} = C_l
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Außerdem gilt:

$$\#\{J : v(J) = r_1\} \leq \binom{N}{r_1} r_1^l \leq N^{r_1} r_1^l \quad (2.3)$$

$$\#\{K : v(K) = r_2\} \leq \binom{M(N)}{r_2} r_2^l \leq M(N)^{r_2} r_2^l \quad (2.4)$$

Somit ergibt sich aus (2.2) – (2.4):

$$\frac{1}{N^{l+1}} \sum_{\substack{J:v(J)=r_1 \\ K:v(K)=r_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] < C_l(l+1)^l \frac{N^{r_1} M(N)^{r_2}}{N^{l+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (2.5)$$

- $r > l + 1$

Nach Lemma aus der Vorlesung existiert eine einfache, echte Kante und somit $\mathbb{E}[Y_N(J, K)] = 0$, da die Matrixeinträge unabhängig sind.

- $r = l + 1$

Es tragen also nur die Graphen auf $l + 1$ verschiedenen Knoten zu $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L}_N, x^l \rangle$ bei. Diese Graphen haben die Struktur eines Doppelbaumes

Diese Doppelbaumstruktur lässt sich wie folgt nutzen:

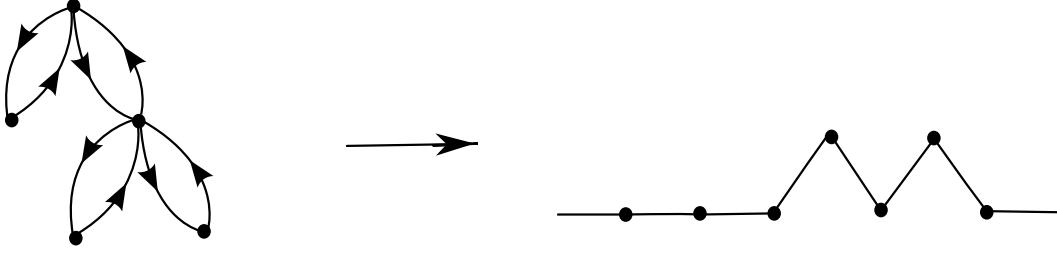
Wähle für einen Doppelbaum r Knoten aus den k -Knoten und $l + 1 - r$ Knoten aus den j -Knoten. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] &= \sum_{r=1}^l \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \\ &\quad \cdot \#\{\text{Doppelbäume mit } l+1-r \text{ } j\text{-Knoten und } r \text{ } k\text{-Knoten}\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ein Doppelbaum mit r k -Knoten und $(l + 1 - r)$ j -Knoten kann wie folgt als Catalan-Pfad der Länge l interpretiert werden:

Wähle als Wurzel des Baumes einen j -Knoten und gliedere den Baum in Ebenen, wobei die Wurzel in der 0.Ebene liegt. (Die k -Knoten liegen also in ungeraden Ebenen, die j -Knoten in geraden Ebenen) Verweise jede Kante mit einer Richtung, sodass bei jeder Doppelkante eine Kante von dem Knoten wegführt und eine zu ihm hinführt. Konstruiere den Catalan-Pfad wie folgt:

- Alle Kanten zwischen der Wurzel und der ersten Ebene sind Flachstücke: $(+0)$
- Wenn eine Kante von ungerader Ebene aufwärts auf gerade Ebene führt: $(+1)$
- Wenn eine Kante von gerader Ebene abwärts auf ungerade Ebene führt: (-1)
- Die restlichen Kanten sind alle Flachstücke: $(+0)$



Abbildungung 2.1: Doppelbaum mit 5 Knoten und dem zugehörigen Catalan-Pfad

Lässt man die Wurzel außen vor, liegen r k -Knoten in den ungeraden Ebenen und $l-r$ j -Knoten in den geraden Ebenen. Damit ergibt sich aus dieser Konstruktion, dass $l-r$ die Anzahl der Aufstiege (und Abstiege) und $2r$ die Anzahl der Flachstücke im Catalan-Pfad sind. Denn: zu jedem j -Knoten führt genau eine Kante aus einer unteren Ebene hin und es führt genau eine Kante in eine untere Ebene zurück (Doppelbaum!).

Die Abbildung von den Doppelbäumen auf die Catalanpfade ist eine Bijektion, da:

- Da der Graph eulersch ist, ist $\sum_{i=1}^{2l} s_i = 0$; Der Graph ist immer über 0, ansonsten würde es ein m geben, sodass $\sum_{i=1}^{2m-1} s_i = -1$, $\sum_{i=1}^{2m} s_i = 0$, $s_{2m-1} = -1$. Also könnten wir einen Doppelbaum mit Knoten $1, 2, \dots, 2m$ konstruieren, und da $s_{2m-1} = -1$ ist, würde eine Kante von diesem Knoten zurück zu einem der ersten $2m$ Knoten gehen, was dem Aufbau eines Doppelbaums widersprechen würde. Insgesamt haben wir also einen Catalanpfad konstruiert.
- Surjektivität: für jeden Catalanpfad der Länge l der Form $\{s_i\}$, $i \leq 2l, i \in \mathbb{N}$ kann ein Doppelbaum als Urbild wie folgt konstruiert werden: für i gerade: $s_i = -1 \rightarrow$ gehe von $j_{i/2}$ abwärts, bei $s_i = 0$ aufwärts; für i ungerade bei $s_i = 1$ aufwärts, bei $s_i = 0$ abwärts.
- Injektivität analog zur Übung (bzw muss man das unbedingt nochmal zeigen?)

Die betrachteten Doppelbäume haben s.o. ein kombinatorisches Gewicht von

$$\binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \quad (2.7)$$

Für N hinreichend groß ist dies genähert $N^{l+1-r} M(N)^r$. Damit folgt:

$$\frac{1}{N^{l+1}} N^{l+1-r} M(N)^r = \left(\frac{M(N)}{N} \right)^r \rightarrow \alpha^r \quad (2.8)$$

und damit:

$$\begin{aligned}
 \beta_l &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{J, K: v(J) + v(K) = l+1} \frac{1}{N^{l+1}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] = \sum_{r=1}^l \alpha^r \binom{2l-2}{2r-2} C_{l-r} \quad (2.9) \\
 &= \sum_{r=1}^l \sum_{p_r \in C_l} \alpha^r = \sum_{p \in C_l} \alpha^r
 \end{aligned}$$

wobei $r = \frac{1}{2} \# \{\text{Flachstücke in } C_l\} = l - \# \{\text{Anstiege in } C_l\}$, und p_r Catalanpfad mit $2r$ Flächenstücken.

An Manu: kannst du diese Formel für β_l genauer erklären? Ich verstehe nicht wirklich, was du da machst...

Mach ich. Also ich hab lang nicht verstanden, was das Kombinatorik-zeug vorne dran mit den Catalanpfaden zu tun hat. Du hattest glaub ich C_l als Anzahl der Catalanpfade. Beim Überlegen für (10) dem nächsten Punkt hab ich mir dann die Formel für die Pfade gebaut, die im Grunde nur auf deiner Konstruktion basiert (und von der bist du ja hoffentlich überzeugt:))

→ Also wir brauchen die Anzahl der Catalanpfade, durch die wir unsere Doppelbäume beschreiben, weil's eine Bijektion ist. Nur haben wir andere Catalanpfade als die normalen:)

Die Catalanpfade, die wir in der Vorlesung gebaut haben, mit der Anzahl C_l (Catalanzahlen), sind dadurch definiert, dass du bei jedem Schritt $+$ oder -1 gehst, und das nichtüberkreuzend.

Bei unseren Catalanpfaden hast du aber noch deine "Flachstücke" mit 0 eingebaut! Und zwar $2r$ von denen. Also wie viele gibts von denen für ein bestimmtes r ? Nach Konstruktion mit einem Knoten, sagen wir mal den j_1 , als Wurzel, sind der erste und letzte Schritt in dem Pfad auf jeden Fall flach, also 0 . Da gibt's keine andere Möglichkeit. Von den restlichen $2l-2$ Schritten im Pfad sind noch $2r-2$ flach, die suchen wir als erstes raus.

Das macht dann die $\binom{2l-2}{2r-2}$.

Bleiben uns noch $2l-2-(2r-2)$ Schritte übrig, die mit $+/-1$ zu belegen sind. Und zwar nichtüberkreuzend. Was das gleiche ist wie wenn du einen $l-r$ -langen Catalanpfad bauen willst, weil du die $2r$ Flachstücke einfach mal ignorierst, die ändern ja nichts. Daher kommt das C_{l-r} . Und wir haben die Anzahl!

Über r aufsummieren, damit wir alle Fälle mit r Knoten aus $M(N)$, Rest aus N , haben. Das übrige Kombinatorik-zeug ist ja α^r , und schon steht die Formel da

Die Formel für die Anzahl der Catalanpfade ist ganz praktisch für (10), für β selber brauchen wir sie ja erst mal nicht, deshalb wieder umschreiben in $\sum_r \alpha^r \# \{\text{Catalanpfade mit } 2r \text{ Flachstücke}\}$. Wenn du sie mal die Anzahl nimmst, kannst auch über alle $2r$ -Catalanpfade aufsummieren, das hoch r ändert sich ja nicht. Und dann $= \sum_{r=1}^l \sum_{p_r \in C_l} \alpha^r = \sum_{p \in C_l} \alpha^r$.

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

kurze Erklärung der Schritte schreib ich auch noch irgendwann oben rein.

-> Danke für die Erklärung, davon sollten wir einiges in die spätere Endfassung aufnehmen, damit die Formeln klarer werden! Was ich vllt hätte hinschreiben sollen ist, dass es bei mir beim vorletzten = hakt, also da, wo du die p_r einführest...

Jetzt mit richtiger Defintion von p_r klarer?

Mit $\beta_0 := 1, \gamma_0 := 1$ und

$$\gamma_l := \sum_{p \in C_l} \alpha^{l-r} \quad (l \geq 1)$$

gelten die Relationen

$$\beta_l = \alpha \gamma_l = \alpha \sum_{r=0}^{l-1} \beta_r \gamma_{l-1-r} \quad (2.10)$$

für alle $l \geq 1$:

•

$$\begin{aligned} \alpha \gamma_l &= \sum_{p \in C_l} \alpha^{l+1-r}, \\ \beta_l - \alpha \gamma_l &= \sum_{r=1}^l \alpha^r \binom{2l-2}{2r-2} C_{l-r} - \sum_{r=1}^l \alpha^{l+1-r} \binom{2l-2}{2l-2r} C_{r-1} \\ &\stackrel{\text{Symmetrie Binom.}}{=} \sum_{r=1}^l \binom{2l-2}{2l-2r} (C_{l-r} \alpha^r - C_{r-1} \alpha^{l+1-r}) \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Für die einzelnen Summenglieder folgt:

$$\begin{aligned} \text{i-tes Summenglied: } &\binom{2l-2}{2l-2i} (C_{l-i} \alpha^i - C_{i-1} \alpha^{l+1-i}) \\ (l+1-i)\text{-tes Summenglied: } &\binom{2l-2}{2l-2-2l+2i} (C_{l-1-l+i} \alpha^{l+1-i} - C_{1+l-i-1} \alpha^{l+1-1-l+i}) \\ &= -i\text{-tes Summenglied} \end{aligned}$$

Ist l gerade, dann heben sich folglich alle Summenglieder weg und die Summe ist 0, ist l ungerade, bleibt nur das $(l+1)/2$ -te Summenglied übrig:

$$\begin{aligned} &\binom{2l-2}{l+1-2} (C_{l-\frac{l+1}{2}} \alpha^{\frac{l+1}{2}} - C_{\frac{l+1}{2}-1} \alpha^{l+1-\frac{l+1}{2}}) \\ &= \binom{2l-2}{l-1} (C_{\frac{l-1}{2}} \alpha^{\frac{l+1}{2}} - C_{\frac{l-1}{2}} \alpha^{\frac{l+1}{2}}) = 0 \end{aligned}$$

Damit gilt der erste Teil von (2.10)

- Zweiter Versuch. Der erste ist auskommentiert noch im TeX-Dokument...
Die Konstruktion der Catalan-Pfade aus der Doppelbaumstruktur ermöglicht eine weitere Interpretation von r bzw. $l - r$:

$$r = \#\{\text{Schritte von gerader Ebene zu höherer ungerader Ebene}\}$$

$$l - r = \#\{\text{Schritte von ungerader Ebene zu höherer gerader Ebene}\}$$

Seien dies die r - bzw. $l - r$ -Kanten, die im zugehörigen Catalan-Pfad an ungerader bzw. gerader Position liegen.

Aus der Konstruktion der Catalan-Pfade aus der Doppelbaum-Struktur ergibt sich, dass das erste und letzte Element immer Flachstücke sind. Habe ein solcher Pfad der Länge l die Bezeichnung \tilde{C}_l . Für so ein \tilde{C}_l gilt, dass die 0 zum ersten Mal (abgesehen von dem beginnenden Flachstück) nach einer ungeraden Anzahl von Schritten erreicht wird. Auf 0 kommt der Pfad nämlich immer nach Erreichen eines Knotens in der ersten Ebene des erzeugenden Baumes, was nur nach einer ungeraden Anzahl von Kantendurchläufen möglich ist. Sei $2j + 1$ diese Position.

Teile \tilde{C}_l in zwei Teilpfade wie folgt (für $j > 0$):

Sei P_1 der Pfad von Position 1 bis $2j + 1$ und P_2 der zusammengesetzte Pfad von Position 0 bis 1 und von $2j + 2$ bis $2l$.

P_2 hat also Länge $2l - 2j$ und hat die Eigenschaft, dass das erste und letzte Element Flachstücke sind, P_2 ist also von der Form \tilde{C}_{l-j} . P_1 hat Länge $2j$, wobei das erste und letzte Element als auf- bzw. absteigende Kante festgelegt sind, da die 0 erst an letzter Position erreicht werden soll. Löscht man nun diese beiden Kanten, hat P_1 noch Länge $2j - 2$ und ist von der Form \tilde{C}_{j-1} , da (falls $j > 1$) nach einer aufsteigenden Kante stets ein Flachstück und vor einer absteigenden Kante ebenfalls stets ein Flachstück liegt. (vgl. Konstruktion). Habe dieser Pfad den Namen \tilde{P}_1 .

Die Kanten, die in P_1 an gerader/ungerader Position lagen, liegen auch in \tilde{P}_1 an gerader/ungerader Position, wohingegen sich bei P_2 diese Eigenschaft genau umgekehrt hat, die r - und $l - r$ -Kanten haben ihre Positionen vertauscht. Aus der Definition von β_l und γ_l ergibt sich somit die rekursive Formel

$$\beta_l = \alpha \sum_{j=1}^l \beta_{j-1} \gamma_{l-j} = \alpha \sum_{j=0}^{l-1} \beta_j \gamma_{l-1-j} \quad (2.12)$$

Das zusätzliche α wird durch das Löschen der Aufwärtskante bei der Konstruktion von \tilde{P}_1 hervorgerufen. Also gilt auch die zweite Relation von (2.10).

Beweis von Formel (12)

$$\begin{aligned}
 Q_n &:= \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(x) x (x - \alpha - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})^2)((1 + \sqrt{\alpha})^2 - x)} (x - \alpha - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{-\alpha^2 + 2\alpha x + 2\alpha - x^2 + 2x - 1} (x - \alpha - 1)^n dx \\
 &\stackrel{x=y+\alpha+1}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{4\alpha - y^2} y^n dy \\
 &\stackrel{y=2\sqrt{\alpha}z}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \cdot 2^n \alpha^{n/2} \cdot 4\sqrt{\alpha} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz = \frac{2}{\pi} \cdot 2^n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz \\
 &\stackrel{\text{Übung 1}}{=} \sigma(z^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ C_{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Falls wir noch Platz füllen müssen, können wir hier die Rechnung aus der Übung auch wiederholen ;)) Bei den „Verständnis-Fragen“ habe ich jedoch etwas Probleme: f_{α} ist für $x=0$ gar nicht definiert? Durch die Rechnung ergibt sich aber der Bezug zu $\sigma(x)$, wo man dann doch beim Halbkreisgesetz wäre.

Zur Eindeutigkeit von f_{α} sind diese „verallgemeinerten Momente“ ein Problem. Habt ihr in der großen W-Theorie Vorlesung dazu was gemacht?

Finde nichts zu verallgemeinerten Momenten. Müssen wir am Dienstag fragen.

Ann: Theorem der Vorlesung auch für verallgemeinerte Momente anwendbar: f eind. bestimmt wenn $Q_n < \infty$ (folgt aus (12)) und $\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{z^n}{n!}$ positiven Konvergenzradius besitzt.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

wobei

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{C_{\frac{n}{2}}}{n!} = ((\frac{k}{2} + 1)! \frac{k}{2}!)^{-1}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Wurzelkriterium für Konvergenzradius:

$$(\frac{k}{2} + 1)! \frac{k}{2}! \geq 1 \Rightarrow |a_n| \leq 1 \Rightarrow$$

$$r = (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} > 1$$

Beweis von Formel (14)

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x(x - \alpha - 1)^n \quad (2.13)$$

Anwendung des binomischen Lehrsatzes ergibt:

$$\begin{aligned} R_n &= \alpha^{-1-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-\alpha - 1)^k \\ &= \alpha^{-1-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} (-\alpha - 1)^k \rangle \\ &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \beta_{n+1-k} \end{aligned}$$

wegen $\beta_l = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ und der Linearität des Integrals.

Die Rekursionsformel sträubt sich noch ein bisschen, drei Summenformeln oder mehr ineinander verschachtelt, aber es sollte hoffentlich irgendwann aus der Darstellung von R_n und (10) folgen.

$R_m = Q_m$:

Dazu zeigen wir, dass $R_0 = Q_0$ und $R_1 = Q_1$, sowie dass die weiteren Folgenglieder von Q_m durch die gleiche Rekursionsformel gebildet werden können. Daraus folgt $R_m = Q_m \forall m$

Beweis:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha \beta_0 \gamma_0 = \alpha \\ \beta_2 &= \alpha \beta_0 \gamma_1 + \alpha \beta_1 \gamma_0 = \alpha \gamma_1 + \alpha \beta_1 = \beta_1 + \alpha \beta_1 \\ R_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x = \frac{\beta_1}{\alpha} = 1 \\ R_1 &= \alpha^{\frac{3}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) (x^2 - (\alpha + 1)x) = \alpha^{\frac{3}{2}} (\beta_2 - (\alpha + 1)\beta_1) = 0 \\ Q_0 &= C_0 = 1, \quad Q_1 = 0 \end{aligned}$$

Rekursion für Q_m :

$$\begin{aligned} \text{m ungerade: } \sum_{n=0}^m Q_{m-n} Q_n &= Q_0 \underbrace{Q_m}_{=0} + \underbrace{Q_1}_{=0} Q_{n-1} + \dots = 0 = Q_{m+2} \\ \text{m gerade: } Q_{m+2} &= C_{\frac{m}{2}+1} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} C_k C_{\frac{m}{2}-k} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} Q_{2k} Q_{m-2k} = \sum_{n=0}^m Q_n Q_{m-n} \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus $Q_n Q_{m-n} = 0$ für $n = 2k + 1$ folgt.

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Bleibt zu zeigen, dass damit $\overline{L_N} \xrightarrow{w} f_\alpha(x)dx$ ($N \rightarrow \infty$).

Unter der Annahme, dass diese seltsamen "verallgemeinerten Momente" genauso wie die normalen Momente verwendet werden können, können wir das Theorem aus der Vorlesung anwenden, um von der Konvergenz der Momente auf die schwache Konvergenz der W-maße zu kommen.

Voraussetzungen: 1. f_α ist durch Q_n eindeutig bestimmt, s.o. erfüllt;

2.

$$\begin{aligned} \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x(x - \alpha - 1)^n &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \langle \overline{L_N}, x^{n+1-k} \rangle \\ &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \text{tr}(W_N^{n+1-k}) \right] < \infty \quad \forall N, n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

wegen $\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] < \infty$

(...okay sicher bin ich mir bei dem Ganzen nicht aber das hier ist alles mehr so als Idee aufzufassen)

\Rightarrow Theorem (Woche 2, Seite 3 rechts) \Rightarrow schwache Konvergenz