Fallstudien der math. Modellbildung

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

8. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Wittaker-Shannon-Sampling Theorem

1.1 The Wittaker-Shannon-Sampling Theorem

1.2 Proof of the Theorem

1.3 Meaning, real-life applications and limitations

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

2.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Sei Y_N eine $N \times M(N)$-Matrix mit unabhängigen zentrierten Einträgen mit Varianz 1,

$$\sup_{j,k,N} \mathbb{E}\left[|Y_N(j,k)|^q\right] = C_q < \infty \qquad \forall q \in \mathbb{N}$$

und $M(N) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \in [1, \infty).$$

Sei weiterhin die Wishart-Matrix gegeben als

$$W_N = \frac{1}{N} Y_N Y_N^T,$$

und habe die empirische Eigenwertverteilung

$$L_N = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda_j}$$

und das Zustandsdichtemaß $\overline{L_N} = \mathbb{E}[L_N]$. Dann gilt die Konvergenz

$$\overline{L_N} \xrightarrow{\text{w}} f_\alpha(x)dx \quad (N \to \infty)$$

im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$, wobei

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(x-(1-\sqrt{\alpha})_+^2((1+\sqrt{\alpha})_+^2}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
N^{l+1}\langle\overline{L_N},x^l\rangle &= N^{l+1}\cdot\int x^l\overline{L_N}(dx) = N^{l+1}\cdot\frac{1}{N}\cdot\mathbb{E}[tr(W_N^l)] = N^l\sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\mathbb{E}\left[\prod_{p=1}^{l}W_{j_p,j_{p+1}}\right]\\
&= N^l\sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\mathbb{E}\left[\prod_{p=1}^{l}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M(N)}Y_N(j_p,k)\cdot Y_N(j_{p+1},k)\right]\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{M(N)}Y_N(j_1,k)\cdot Y_N(j_2,k)\right)\cdot\left(\prod_{p=2}^{l}\sum_{k=1}^{M(N)}Y_N(j_p,k)\cdot Y_N(j_{p+1},k)\right)\right]\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\mathbb{E}\left[\prod_{p=2}^{l}\sum_{k_1,k_2=1}^{M(N)}Y_N(j_1,k_1)\cdot Y_N(j_2,k_1)\cdot Y_N(j_p,k_2)\cdot Y_N(j_{p+1},k_2)\right]\\
&= \dots\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\sum_{k_1,\dots,k_l=1}^{M(N)}\mathbb{E}[Y_N(j_1,k_1)Y_N(j_2,k_1)Y_N(j_2,k_2)Y_N(j_3,k_2)\dots Y_N(j_l,k_l)Y_N(j_1,k_l)]
\end{aligned}$$

Meine Ideen, wie es weiter geht. Hakt noch ein bisschen, sollte aber in die richtige Richtung gehen :)

$$= \sum_{r_1,r_2=1}^{l}\sum_{\substack{J:v(J)=r_1\\K:v(K)=r_2}}\mathbb{E}[Y_N(J,K)] \tag{2.1}$$

Die einzelnen Summanden können also als Eulergraphen auf r_1+r_2Knoten und $2l$ Kanten interpretiert werden. Damit ergeben sich die drei Fälle (setze $r=r_1+r_2$)

- $r<l+1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_N(J,k)] &\leq \prod_{n=1}^{l}\left(\sup_{j,k,N}\mathbb{E}\left[|Y_N(j,k)|^l\right]\right)^{\frac{1}{l}}\\
&= \prod_{n=1}^{l}C_l^{\frac{1}{l}} = C_l
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\#\{J:v(J)=r_1\}\leq\binom{N}{r_1}r_1^l\leq N^{r_1}r_1^l$$

$$\#\{K:v(K)=r_2\}\leq\binom{M(N)}{r_2}r_2^l\leq M(N)^{r_2}r_2^l$$

Somit gilt:

$$\frac{1}{N^{l+1}} \sum_{\substack{J:v(J)=r_1 \\ K:v(K)=r_2}} \mathbb{E}[Y_N(J,K)] < C_l(l+1)^l \frac{N^{r_1} M(N)^{r_2}}{N^{l+1}} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

- $r > l+1$
  Nach Lemma aus der Vorlesung exisitert eine einfache, echte Kante und somit $\mathbb{E}[Y_N(J,K)] = 0$

- $r = l+1$
  Es tragen also nur die Graphen auf $l+1$ verschiedenen Knoten zu $\lim_{N\to\infty}\langle\overline{L_N}, x^l\rangle$ bei. Diese Graphen haben die Struktur eines Doppelbaumes, denen man geordnete, nicht überkreuzende Paarzerlegungen und damit auch Catalanpfade zuordnen kann.

Weitere Analyse von β_l:
Wähle für einen Doppelbaum r Knoten aus den k-Knoten und $l+1-r$ Knoten aus den j-Knoten. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{J,K:v(J)+v(K)=l+1} \mathbb{E}[Y_N(J,K)] &= \sum_{r=1}^{l} \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \\ &\quad \cdot \#\{\text{Doppelbäume mit } l+1-r \ j\text{-Knoten und } r \ k\text{-Knoten}\} \\ &= \sum_{r=1}^{l} \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \cdot C_l\end{aligned}$$

Ein Doppelbaum mit (r) k-Knoten und $(l+1-r)$ j-Knoten kann wie folgt als Catalan-Pfad der Länge l interpretiert werden:
Wähle als Wurzel des Baumes einen j-Knoten und gliedere den Baum in Ebenen, wobei die Wurzel in der 0.Ebene liegt.(Die k-Knoten liegen also in ungeraden Ebenen, die j-Knoten in geradenen Ebenen) Verweise jede Kante mit einer Richtung, sodass bei jeder Doppelkante eine Kante von dem Knoten wegführt und eine zu ihm hinführt. Konstruiere den Catalan-Pfad wie folgt:

- Alle Kanten zwischen der Wurzel und der ersten Ebene sind Flachstücke $(+0)$
- Wenn eine Kante von ungerader Ebene aufwärts auf gerade Ebene führt: $+1$
- Wenn eine Kante von gerader Ebene abwärts auf ungerade Ebene führt: -1
- Die restlichen Kanten sind alle Flachstücke

Aus dieser Konstruktion ergibt sich, dass $l-r$ die Anzahl der Aufstiege (und Abstiege) und $2r$ die Anzahl der Flachstücke im Catalan-Pfad sind. Lässt man die Wurzel außen vor, bleiben r k-Knoten in den ungeraden Ebenen und $l-r$ j-Knoten in den geraden

Ebenen. Denn: zu jedem j-Knoten führt genau eine Kante aus einer unteren Ebene hin und es führt genau eine Kante in eine untere Ebene zurück (Doppelbaum!).

Die Abbildung von den Doppelbäumen auf die Catalanpfade ist eine Bijektion, da:

- Da der Graph eulersch ist, ist $\sum_{i=1}^{2l}$ =0; Der Graph ist immer über 0, ansonsten würde es ein m geben, sodass $\sum_{i=1}^{2m-1} s^i = -1$, $\sum_{i=1}^{2m} s^i = 0$, $s_{2m-1} = -1$. Also könnten wir einen Doppelbaum mit Knoten 1,2,...2m konstruieren, und da $s_{2m-1} = -1$ ist, würde eine Kante von diesem Knoten zurück zu einem der ersten 2m Knoten gehen, was dem Aufbau eines Doppelbaums widersprechen würde. Insgesamt haben wir also einen Catalanpfad konstruiert.

- Surjektivität: für jeden Catalanpfad der Länge l der Form $\{s_i\}$, $i \leq 2l, i \in \mathbb{N}$ kann ein Doppelbaum als Urbild wie folgt konstruiert werden: für i gerade: $s_i = -1 \rightarrow$ gehe von $j_{i/2}$abwärts, bei $s_i = 0$ aufwärts; für i ungerade bei $s_i = 1$ aufwärts, bei $s_i = 0$ abwärts.

- Injektivität analog zur Übung (bzw muss man das unbedingt nochmal zeigen?)

Die betrachteten Doppelbäume haben s.o. ein kombinatorisches Gewicht von
$\binom{N}{l+1-r}(l+1-r)!\binom{M(N)}{r}r!$
für N hinreichend groß ist dies genähert $N^{l+1-r}M(N)^r$. Damit folgt:

$$\frac{1}{N^{l+1}}N^{l+1-r}M(N)^r = \left(\frac{M(N)}{N}\right)^r \rightarrow \alpha^r$$

und damit:

$$\beta_l = \lim_{N\to\infty} \sum_{J,K:v(J)+v(K)=l+1} \frac{1}{N^{l+1}}\mathbb{E}[Y_N(J,K)] = \sum_{r=1}^{l} \alpha^r\ C_l$$

$$= \sum_{p\in C_l} \alpha^r$$

wobei $r = \frac{1}{2}\#\{\text{Flachstücke in } C_l\} = l - \#\{\text{Anstiege in } C_l\}$. (An der Herleitung der Formel für β_l hakts noch ziemlich, sie sollte aber stimmen)
Gleichung (10) würde ich versuchen per Induktion zu beweisen (Es geht sicher schöner, aber ich weiß nicht wie /ebenfalls nicht, es schreit aber auch nach Induktion;), ich hänge aber noch beim Induktionsschritt.
γ_l sind die Aufstiege/Abstiege im Doppelbaum.
Induktionsanfang: $l = 1$:

$$\beta_1 = \alpha\gamma_1 = \alpha\beta_0\gamma_0 = \alpha$$

Induktionsschritt: Ich denke, dass aus der Rekursionsformel für Catalanzahlen $C_{l+1} = \sum_{k=0}^{l} C_k C_{l-k}$ folgt, dass

$$\beta_{l+1} = \sum_{k=0}^{l} \beta_k \beta_{l-k} = \alpha \sum_{k=0}^{l} \beta_k \gamma_{l-k}$$

aber das ist eher wage... Wir brauchen wh sogar zweimal Induktion einmal für $\beta = \alpha\gamma$ und einmal für $\gamma = \sum \beta\gamma$..