

Abschlussarbeit Fallstudien der math. Modellbildung

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

24. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	3
1.1	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	3
1.2	Beweis des Marcenko-Pastur Gesetzes	4

1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

1.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Sei Y_N eine $N \times M(N)$ -Matrix mit unabhängigen zentrierten Einträgen mit Varianz 1,

$$\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] = C_q < \infty \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

und $M(N) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \in [1, \infty).$$

Sei weiterhin die Wishart-Matrix gegeben als

$$W_N = \frac{1}{N} Y_N Y_N^T,$$

und habe die empirische Eigenwertverteilung

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j}$$

und das Zustandsdichtemaß $\overline{L}_N = \mathbb{E}[L_N]$. Dann gilt die Konvergenz

$$\overline{L}_N \xrightarrow{w} f_\alpha(x) dx \quad (N \rightarrow \infty)$$

im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} , wobei

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})_+^2)((1 + \sqrt{\alpha})_+^2 - x)}$$

1.2 Beweis des Marcenko-Pastur Gesetzes

Zuerst bringen wir $N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ in eine Form, die eine weitergehende Untersuchung ermöglicht:

$$\begin{aligned}
 N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l \rangle &= N^{l+1} \cdot \int x^l \overline{L_N}(dx) = N^{l+1} \cdot \frac{1}{N} \cdot \mathbb{E}[\text{tr}(W_N^l)] = N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l W_{j_p, j_{p+1}} \right] \\
 &= N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k) \cdot Y_N(j_2, k) \right) \cdot \left(\prod_{p=2}^l \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=2}^l \sum_{k_1, k_2=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k_1) \cdot Y_N(j_2, k_1) \cdot Y_N(j_p, k_2) \cdot Y_N(j_{p+1}, k_2) \right] \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^{M(N)} \mathbb{E}[Y_N(j_1, k_1) Y_N(j_2, k_1) Y_N(j_2, k_2) Y_N(j_3, k_2) \dots Y_N(j_l, k_l) Y_N(j_1, k_l)] \\
 &= \sum_{r_1, r_2=1}^l \sum_{\substack{J: v(J)=s_1 \\ K: v(K)=s_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)]
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 J &= (j_1, j_2, j_2, \dots, j_l, j_l, j_1), K = (k_1, k_1, \dots, k_l, k_l), \\
 v : \mathbb{N}^{2l} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad v(X) := \text{Anzahl der verschiedenen Indizes in } X
 \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden können also als Eulergraphen auf $s_1 + s_2$ Knoten und $2l$ Kanten interpretiert werden. Damit ergeben sich die drei Fälle (setze $s = s_1 + s_2$)

- $s < l + 1$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_N(J, k)] &\leq \prod_{n=1}^l \left(\sup_{j, k, N} \mathbb{E} \left[|Y_N(j, k)|^l \right] \right)^{\frac{1}{l}} \\
 &= \prod_{n=1}^l C_l^{\frac{1}{l}} = C_l
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Außerdem gilt:

$$\#\{J : v(J) = s_1\} \leq \binom{N}{s_1} s_1^l \leq N^{s_1} s_1^l \quad (1.3)$$

$$\#\{K : v(K) = s_2\} \leq \binom{M(N)}{s_2} s_2^l \leq M(N)^{s_2} s_2^l \quad (1.4)$$

Somit ergibt sich aus (2.2) – (2.4):

$$\frac{1}{N^{l+1}} \sum_{\substack{J:v(J)=s_1 \\ K:v(K)=s_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] < C_l(l+1)^l \frac{N^{s_1} M(N)^{s_2}}{N^{l+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (1.5)$$

- $s > l + 1$

Nach Lemma aus der Vorlesung existiert eine einfache, echte Kante und somit $\mathbb{E}[Y_N(J, K)] = 0$, da die Matrixeinträge unabhängig sind.

- $s = l + 1$

Es tragen also nur die Graphen auf $l + 1$ verschiedenen Knoten zu $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ bei. Diese Graphen haben die Struktur eines Doppelbaumes

Diese Doppelbaumstruktur lässt sich wie folgt nutzen:

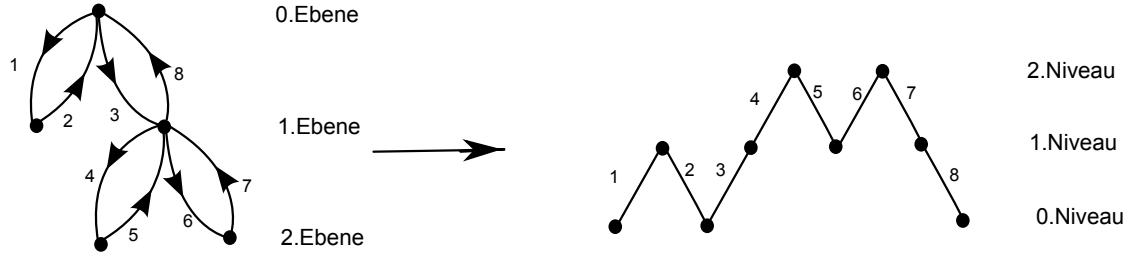
Wähle für einen Doppelbaum r Knoten aus den k -Knoten und $l + 1 - r$ Knoten aus den j -Knoten. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] &= \sum_{r=1}^l \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \\ &\quad \cdot \#\{\text{Doppelbäume mit } l+1-r \text{ } j\text{-Knoten und } r \text{ } k\text{-Knoten}\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ein Doppelbaum mit r k -Knoten und $(l + 1 - r)$ j -Knoten kann wie folgt als Catalan-Pfad der Länge l interpretiert werden:

Wähle als Wurzel des Baumes einen j -Knoten und gliedere den Baum in Ebenen, wobei die Wurzel in der 0.Ebene liegt. (Die k -Knoten liegen also in ungeraden Ebenen, die j -Knoten in geraden Ebenen) Verweise jede Kante mit einer Richtung, sodass bei jeder Doppelkante eine Kante von dem Knoten wegführt und eine zu ihm hinführt. Durchlaufe den Baum mit Hilfe der Tiefensuche und nummeriere die Kanten in der Reihenfolge, wie sie bei der Tiefensuche durchlaufen werden. Konstruiere den Catalan-Pfad wie folgt:

- Wird ein Knoten zum ersten Mal erreicht: $(+1)$
- Kehrt man zu einem bereits besuchten Knoten zurück: (-1)



Abbildungung 1.1: Doppelbaum auf 5 Knoten und dem zugehörigen Catalan-Pfad

Da der Baum durch Tiefensuche durchlaufen wird, gibt die Entfernung eines Knotens zur Wurzel die Anzahl der nötigen Schritte wieder, die benötigt werden, um ihn zum ersten Mal zu erreichen. Da die j -Knoten in den geraden Ebenen und die k -Knoten in den ungeraden Ebenen liegen, ergibt sich, dass sich die j -Knoten stets auf den geraden Niveaus und die k -Knoten stets auf den ungeraden Niveaus des Catalan-Pfades befinden. Die Abbildung von den Doppelbäumen auf die Catalanpfade ist eine Bijektion, da:

- Da der Graph eulersch ist, ist $\sum_{i=1}^{2l} s_i = 0$; Der Graph ist immer über 0, ansonsten würde es ein m geben, sodass $\sum_{i=1}^{2m-1} s_i = -1$, $\sum_{i=1}^{2m} s_i = 0$, $s_{2m-1} = -1$. Also könnten wir einen Doppelbaum mit Knoten $1, 2, \dots, 2m$ konstruieren, und da $s_{2m-1} = -1$ ist, würde eine Kante von diesem Knoten zurück zu einem der ersten $2m$ Knoten gehen, was dem Aufbau eines Doppelbaums widersprechen würde. Insgesamt haben wir also einen Catalanpfad konstruiert.
- Surjektivität: Starte bei der Wurzel. Füge für jede Aufstiegs-kante einen Knoten in die nächst höhere Ebene und eine Kante als Verbindung hinzu. Füge für jede Abstiegs-kante eine Kante in die nächst niedrigere Ebene hinzu, bis die Doppelbaumstruktur vollständig ist. (Sollen wir das noch in Formeln übersetzen oder reicht das so?)
- Injektivität analog zur Übung (bzw muss man das unbedingt nochmal zeigen?)

Die betrachteten Doppelbäume haben s.o. ein kombinatorisches Gewicht von

$$\binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \quad (1.7)$$

Für N hinreichend groß ist dies genähert $N^{l+1-r} M(N)^r$. Damit folgt:

$$\frac{1}{N^{l+1}} N^{l+1-r} M(N)^r = \left(\frac{M(N)}{N} \right)^r \rightarrow \alpha^r \quad (1.8)$$

und damit:

$$\begin{aligned}\beta_l &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \frac{1}{N^{l+1}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] = \sum_{r=1}^l \sum_{p_r \in C_l} \alpha^r = \sum_{p \in C_l} \alpha^r\end{aligned}$$

wobei $r = \#\{\text{Abstiege von ungeraden auf gerade Niveaus in } C_l\}$, und p_r Catalan-Pfad mit r entsprechenden Abstiegen.

Formel ist leider falsch. Wir brauchen die Formel aber anscheinend gar nicht.

Mit $\beta_0 := 1, \gamma_0 := 1$ und

$$\gamma_l := \sum_{p \in C_l} \alpha^{l-r} \quad (l \geq 1)$$

gelten die Relationen

$$\beta_l = \alpha \gamma_l = \alpha \sum_{r=0}^{l-1} \beta_r \gamma_{l-1-r} \quad (1.9)$$

für alle $l \geq 1$:

($l - r$ ist dabei die Anzahl der Abstiegs-kanten von geraden auf ungerade Niveaus im Catalan-Pfad.)

- Betrachte die Position im Pfad, an der zum ersten Mal die 0 erreicht wird. Diese ist immer gerade, da die 0 genau dann erreicht wird, wenn man im zugehörigen Doppelbaum zur Wurzel zurückkehrt. Sei also $2j, j \in \{1, \dots, l\}$, diese Position. Teile nun den Pfad in einen vorderen Teil P_1 der Länge $2j$ und einen hinteren Teil P_2 der Länge $2l - 2j$. In dem erzeugenden Baum entspricht P_1 dem äußersten Teilbaum, P_2 dem restlichen Baum. P_2 ist also ein beliebiger Catalan-Pfad. P_1 hat die besondere Struktur, dass die 0 erst an letzter Position erreicht wird, die erste und letzte Kante sind somit als Aufstiegs- bzw. Abstiegs-kante festgelegt und können für die kombinatorische Analyse vernachlässigt werden. Löscht man diese beiden Kanten und subtrahiert 1 von allen Elementen von P_1 , erhält man einen neuen Pfad \tilde{P}_1 , der ein beliebiger Catalan-Pfad der Länge $2j - 2$ ist. Dies folgt direkt aus der Struktur des Doppelbaumes: \tilde{P}_1 entspricht dem äußersten Teilbaum ohne die ursprüngliche Wurzel, wodurch man einen neuen, beliebigen Doppelbaum erhält.

Die geraden/ungeraden Niveaus im ursprünglichen Pfad sind in \tilde{P}_1 ungerade/gerade (Durch die Verschiebung um 1 nach unten). r und $l - r$ haben sich also genau vertauscht! Damit ergibt sich aus den Definition für β_l und γ_l die Formel:

$$\begin{aligned}\beta_l &= \alpha \sum_{j=1}^{l-1} \gamma_{j-1} \beta_{l-j} = \alpha \sum_{j=0}^l \gamma_j \beta_{l-j-1} \\ &= \alpha \sum_{k=0}^l \beta_k \gamma_{l-1-k}\end{aligned} \quad (1.10)$$

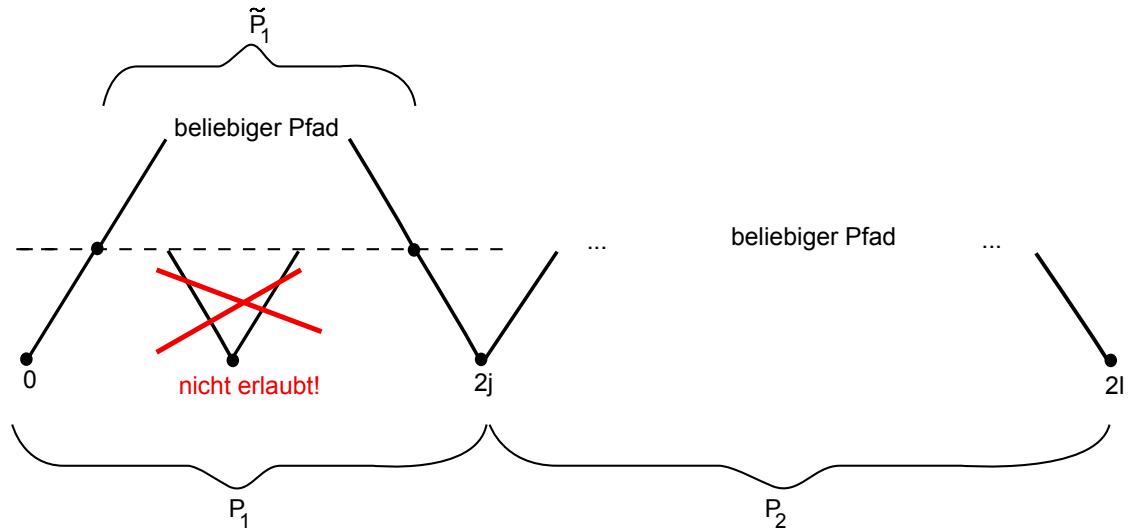


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung der Rekursion

Das zusätzliche α wird in der Formel durch das Löschen der Abwärtskante in P_1 hervorgerufen.

- γ wird analog rekursiv dargestellt: Im Gegensatz zu vorher tragen nun die Abwärtskanten von gerade zu ungerade zum Gewicht von α bei. Sei wieder $2j$, $j \in \{1, \dots, l\}$, die Position, an der zum ersten Mal die 0 erreicht wird..

Teile wiederum den Pfad in einen vorderen Teil P_1 der Länge $2j$ und einen hinteren beliebigen Catalanpfad P_2 der Länge $2l - 2j$. In P_1 sind wieder die erste und letzte Kante festgelegt. Beim Löschen dieser Kante werden die Ebenen vertauscht.

Anders als bei den β_l haben wir durch das Löschen der Abwärtskante allerdings kein α verloren, da nun ja die Abwärtskanten von gerade zu ungerade das Gewicht α haben.

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\gamma_l &= \sum_{k=0}^l \beta_k \gamma_{l-1-k} \\ &= \frac{\beta_l}{\alpha}\end{aligned}\tag{1.11}$$

Beweis von Formel (12)

$$\begin{aligned}
 Q_n &:= \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(x) x(x - \alpha - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})^2)((1 + \sqrt{\alpha})^2 - x)} (x - \alpha - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{-\alpha^2 + 2\alpha x + 2\alpha - x^2 + 2x - 1} (x - \alpha - 1)^n dx \\
 &\stackrel{x=y+\alpha+1}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{4\alpha - y^2} y^n dy \\
 &\stackrel{y=2\sqrt{\alpha}z}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \cdot 2^n \alpha^{n/2} \cdot 4\sqrt{\alpha} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz = \frac{2}{\pi} \cdot 2^n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz \\
 \stackrel{\text{Übung 1}}{=} \sigma(z^n) &= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ C_{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Falls wir noch Platz füllen müssen, können wir hier die Rechnung aus der Übung auch wiederholen ;)) Bei den „Verständnis-Fragen“ habe ich jedoch etwas Probleme: f_{α} ist für $x=0$ gar nicht definiert? Durch die Rechnung ergibt sich aber der Bezug zu $\sigma(x)$, wo man dann doch beim Halbkreisgesetz wäre.

Zur Eindeutigkeit von f_{α} sind diese „verallgemeinerten Momente“ ein Problem. Habt ihr in der großen W-Theorie Vorlesung dazu was gemacht?

Ann: Theorem der Vorlesung auch für verallgemeinerte Momente anwendbar: f eind. bestimmt wenn $Q_n < \infty$ (folgt aus (12)) und $\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{z^n}{n!}$ positiven Konvergenzradius besitzt.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wobei

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{C_{\frac{n}{2}}}{n!} = ((\frac{k}{2} + 1)! \frac{k}{2}!)^{-1}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Wurzelkriterium für Konvergenzradius:

$$\begin{aligned}
 (\frac{k}{2} + 1)! \frac{k}{2}! &\geq 1 \Rightarrow |a_n| \leq 1 \Rightarrow \\
 r &= (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} > 1
 \end{aligned}$$

Beweis von Formel (14)

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x(x - \alpha - 1)^n \quad (1.12)$$

1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Anwendung des binomischen Lehrsatzes ergibt:

$$\begin{aligned}
 R_n &= \alpha^{-1-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-\alpha - 1)^k \\
 &= \alpha^{-1-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} (-\alpha - 1)^k \rangle \\
 &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \beta_{n+1-k}
 \end{aligned}$$

wegen $\beta_l = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ und der Linearität des Integrals.

Um die Rekursionsformel zu zeigen benötigt man folgende Formel:

$$\sum_{n \geq t} \binom{m-n}{m-u-t} \binom{n}{t} = \binom{m+1}{u} \quad (1.13)$$

Dies kann man kombinatorisch begründen. Stellt man sich das Pascalsche Dreieck vor, so gibt t die Diagonale und der Index n die Zeile vor. Der Binomialkoeffizient $\binom{m+1}{u}$ ist die Anzahl der Pfade im Baumdiagramm...Fortsetzung folgt.

Nun betrachtet man:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^m R_{m-n} R_m &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m-n}{k} (-\alpha - 1)^k \beta_{m-n+1-k} \alpha^{-1-\frac{m-n}{2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-\alpha - 1)^l \beta_{n+1-l} \alpha^{-1-\frac{n}{2}} \\
 &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m-n}{k} \binom{n}{l} (-\alpha - 1)^{k+l} \beta_{m-n+1-k} \gamma_{n+1-l}
 \end{aligned}$$

Für $k > n$ gilt $\binom{n}{k} = 0$. Dadurch kann man den Index k durch $u := k + l$ ersetzen.

$$\sum_{n=0}^m R_{m-n} R_m = \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{u \geq l} \binom{m-n}{u-l} \binom{n}{l} (-\alpha - 1)^u \beta_{m-n+1+l-u} \gamma_{n+1-l}$$

Mit $t := n - l$ kann l umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^m R_{m-n} R_n &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{t \leq n} \sum_{u \geq n-t} \binom{m-n}{u-n+t} \binom{n}{t} (-\alpha - 1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \\
 &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \binom{m-n}{u-n+t} \binom{n}{t} (-\alpha - 1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \\
 &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{t=0}^{m-u} \sum_{u=0}^{m+1} (-\alpha - 1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \sum_{n=0}^m \binom{m-n}{m-u-t} \binom{n}{t}
 \end{aligned}$$

Mit Formel (2.14) gilt schließlich:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^m R_{m-n} R_n &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{t=0}^{m-u} \sum_{u=0}^{m+1} (-\alpha-1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \binom{m+1}{u} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \sum_{t=0}^{m-u} \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t}\end{aligned}$$

Durch die Substitution $r := m+1-u-t$ und die Anwendung von Formel (10) ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^m R_{m-n} R_n &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \left(\sum_{r=0}^{m+1-u} \beta_r \gamma_{m+2-u-r} - \beta_0 \gamma_{m+2-u} \right) \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \left(-\beta_{m+2-u} + \sum_{r=0}^{m+2-u} \beta_r \gamma_{m+2-u-r} - \alpha^{-1} \beta_{m+2-u} \right) \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \left(\frac{1}{\alpha} \beta_{m+3-u} - \frac{\alpha+1}{\alpha} \beta_{m+2-u} \right) \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+2} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \frac{1}{\alpha} \beta_{m+3-u} \\ &\quad - \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \frac{\alpha+1}{\alpha} \beta_{m+2-u} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+2} \left(\binom{m+2}{u} - \binom{m+1}{u-1} \right) (-\alpha-1)^u \frac{1}{\alpha} \beta_{m+3-u} \\ &\quad - \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \frac{\alpha+1}{\alpha} \beta_{m+2-u}\end{aligned}$$

(...)

$R_m = Q_m$:

Dazu zeigen wir, dass $R_0 = Q_0$ und $R_1 = Q_1$, sowie dass die weiteren Folgenglieder von Q_m durch die gleiche Rekursionsformel gebildet werden können. Daraus folgt $R_m = Q_m \forall m$

Beweis:

$$\beta_1 = \alpha \beta_0 \gamma_0 = \alpha$$

$$\beta_2 = \alpha \beta_0 \gamma_1 + \alpha \beta_1 \gamma_0 = \alpha \gamma_1 + \alpha \beta_1 = \beta_1 + \alpha \beta_1$$

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x = \frac{\beta_1}{\alpha} = 1$$

$$R_1 = \alpha^{\frac{3}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) (x^2 - (\alpha + 1)x) = \alpha^{\frac{3}{2}} (\beta_2 - (\alpha + 1)\beta_1) = 0$$

$$Q_0 = C_0 = 1, \quad Q_1 = 0$$

Rekursion für Q_m :

$$\text{m ungerade: } \sum_{n=0}^m Q_{m-n} Q_n = Q_0 \underbrace{Q_m}_{=0} + \underbrace{Q_1}_{=0} Q_{m-1} + \dots = 0 = Q_{m+2}$$

$$\text{m gerade: } Q_{m+2} = C_{\frac{m}{2}+1} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} C_k C_{\frac{m}{2}-k} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} Q_{2k} Q_{m-2k} = \sum_{n=0}^m Q_n Q_{m-n}$$

wobei der letzte Schritt aus $Q_n Q_{m-n} = 0$ für $n = 2k + 1$ folgt.

Bleibt zu zeigen, dass damit $\overline{L_N} \xrightarrow{w} f_{\alpha}(x) dx$ ($N \rightarrow \infty$).

Unter der Annahme, dass diese seltsamen "verallgemeinerten Momente" genauso wie die normalen Momente verwendet werden können, können wir das Theorem aus der Vorlesung anwenden, um von der Konvergenz der Momente auf die schwache Konvergenz der W-maße zu kommen.

Voraussetzungen: 1. f_{α} ist durch Q_n eindeutig bestimmt, s.o. erfüllt;

2.

$$\begin{aligned} \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x (x - \alpha - 1)^n &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \langle \overline{L_N}, x^{n+1-k} \rangle \\ &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \text{tr}(W_N^{n+1-k}) \right] < \infty \quad \forall N, n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

wegen $\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] < \infty$

(...okay sicher bin ich mir bei dem Ganzen nicht aber das hier ist alles mehr so als Idee aufzufassen)

\Rightarrow Theorem (Woche 2, Seite 3 rechts) \Rightarrow schwache Konvergenz