Fallstudien der math. Modellbildung

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

6. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Wittaker-Shannon-Sampling Theorem **3**
1.1 The Wittaker-Shannon-Sampling Theorem 3
1.2 Proof of the Theorem 3
1.3 Meaning, real-life applications and limitations 3

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz **4**
2.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz 4

1 Wittaker-Shannon-Sampling Theorem

1.1 The Wittaker-Shannon-Sampling Theorem

1.2 Proof of the Theorem

1.3 Meaning, real-life applications and limitations

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

2.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Sei Y_N eine $N \times M(N)$-Matrix mit unabhängigen zentrierten Einträgen mit Varianz 1,

$$\sup_{j,k,N} \mathbb{E}\left[|Y_N(j,k)|^q\right] = C_q < \infty \qquad \forall q \in \mathbb{N}$$

und $M(N) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \in [1, \infty).$$

Sei weiterhin die Wishart-Matrix gegeben als

$$W_N = \frac{1}{N} Y_N Y_N^T,$$

und habe die empirische Eigenwertverteilung

$$L_N = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda_j}$$

und das Zustandsdichtemaß $\overline{L_N} = \mathbb{E}[L_N]$. Dann gilt die Konvergenz

$$\overline{L_N} \xrightarrow{\text{w}} f_\alpha(x)dx \quad (N \to \infty)$$

im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$, wobei

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(x - (1-\sqrt{\alpha})_+^2((1+\sqrt{\alpha})_+^2}$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l\rangle &= N^{l+1}\cdot\int x^l\overline{L_N}(dx) = N^{l+1}\cdot\frac{1}{N}\cdot\mathbb{E}[tr(W_N^l)] = N^l\sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\mathbb{E}\left[\prod_{p=1}^{l} W_{j_p,j_{p+1}}\right]\\
&= N^l\sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\mathbb{E}\left[\prod_{p=1}^{l}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p,k)\cdot Y_N(j_{p+1},k)\right]\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_1,k)\cdot Y_N(j_2,k)\right)\cdot\left(\prod_{p=2}^{l}\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p,k)\cdot Y_N(j_{p+1},k)\right)\right]\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\mathbb{E}\left[\prod_{p=2}^{l}\sum_{k_1,k_2=1}^{M(N)} Y_N(j_1,k_1)\cdot Y_N(j_2,k_1)\cdot Y_N(j_p,k_2)\cdot Y_N(j_{p+1},k_2)\right]\\
&= \dots\\
&= \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{N}\sum_{k_1,\dots,k_l=1}^{M(N)}\mathbb{E}[Y_N(j_1,k_1)Y_N(j_2,k_1)Y_N(j_2,k_2)Y_N(j_3,k_2)\dots Y_N(j_l,k_l)Y_N(j_1,k_l)]
\end{aligned}
$$