

Fallstudien der math. Modellbildung

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

11. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Wittaker-Shannon-Sampling Theorem	3
1.1	The Wittaker-Shannon-Sampling Theorem	3
1.2	Proof of the Theorem	3
1.3	Meaning, real-life applications and limitations	4
2	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	5
2.1	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	5

1 Whittaker-Shannon-Sampling Theorem

1.1 The Whittaker-Shannon-Sampling Theorem

If $x \in L^2(\mathbb{R}^d)$ is a ω -bandlimited function, there exists a $\tau_0 > 0$ such that for all $\tau \in (0, \tau_0]$

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} x(\tau k) \prod_{i=1}^d \text{sinc}\left(\frac{t_i - k_i \tau_i}{\tau_i}\right).$$

1.2 Proof of the Theorem

Define $\tau_0 = \frac{1}{\omega} := \left(\frac{1}{\omega_0}, \dots, \frac{1}{\omega_d}\right)$, $\Omega_\omega := \prod_{i=1}^d \left(-\frac{1}{2}\omega_i, \frac{1}{2}\omega_i\right)$ and choose $\tau \in (0, \tau_0)$ arbitrarily.

$$x \in L_w^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall f \notin \Omega_\omega : \mathcal{F}(x)(f) = 0 \quad (1.1)$$

The consequence of this condition and of the linearity of $\mathcal{F}(x)$ is:

$$\forall f \in \Omega_\omega, k \in \mathbb{N} : \mathcal{F}(x)\left(f + \frac{k}{\tau}\right) = \mathcal{F}(x)(f) + k \underbrace{\mathcal{F}(x)\left(\frac{1}{\tau}\right)}_{\notin \Omega}$$

Thus the formula can be rewritten.

$$\forall f \in \Omega_\omega : \mathcal{F}(x)(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x)\left(f + \frac{k}{\tau}\right) \quad (1.2)$$

(1.1) and (1.2) allow us to say:

$$\mathcal{F}(x)(f) = \chi_{\Omega_{1/\tau}}(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x)\left(f + \frac{k}{\tau}\right)$$

With the aid of the Poisson summation formula (Theorem 0.3) you can conclude:

$$\mathcal{F}(x)(f) = \chi_{\Omega_1}(\tau f) \det(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) e^{-2\pi i n \tau f} \quad (1.3)$$

1 Whittaker-Shannon-Sampling Theorem

Now we want to prove that $\mathcal{F} \left(\prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \right) (f) = \det(\tau) \chi_{\Omega_1}(\tau f) e^{-2\pi i n \tau f}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1} \left(\det(\tau) \chi_{\Omega_1}(\tau f) e^{-2\pi i n \tau f} \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \det(\tau) \chi_{\Omega_1}(\tau f) e^{-2\pi i n \tau f} e^{2\pi i f t} df \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \det(\tau) \chi_{\Omega_1}(\tau f) e^{2\pi i f (t - n\tau)} df \\
&= \int_{-\frac{1}{2\tau_1}}^{\frac{1}{2\tau_1}} \dots \int_{-\frac{1}{2\tau_d}}^{\frac{1}{2\tau_d}} \prod_{j=1}^d \tau_j e^{2\pi i f_j (t_j - n\tau_j)} df_1 \dots df_d \\
&= \prod_{j=1}^d \int_{-\frac{1}{2\tau_j}}^{\frac{1}{2\tau_j}} \tau_j e^{2\pi i f_j (t_j - n\tau_j)} df_j \\
&= \prod_{j=1}^d \left[\frac{\tau_j}{2\pi i (t_j - n\tau_j)} e^{2\pi i f_j (t_j - n\tau_j)} \right]_{f_j = -\frac{1}{2\tau_j}}^{\frac{1}{2\tau_j}} \\
&= \prod_{j=1}^d \frac{\tau_j}{2\pi i (t_j - n\tau_j)} \left(e^{\pi i \frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j}} - e^{-\pi i \frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j}} \right) \\
&= \prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right)
\end{aligned}$$

Hence formula (1.3) is:

$$\mathcal{F}(x)(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) \mathcal{F} \left(\prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \right) (f)$$

Through applying the inverse transform on both sides, the theorem is proved.

$$\begin{aligned}
x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x))(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) \mathcal{F} \left(\prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right) \right) \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) \prod_{j=1}^d \text{sinc} \left(\frac{t_j - n\tau_j}{\tau_j} \right)
\end{aligned}$$

1.3 Meaning, real-life applications and limitations

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

2.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Sei Y_N eine $N \times M(N)$ -Matrix mit unabhängigen zentrierten Einträgen mit Varianz 1,

$$\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] = C_q < \infty \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

und $M(N) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \in [1, \infty).$$

Sei weiterhin die Wishart-Matrix gegeben als

$$W_N = \frac{1}{N} Y_N Y_N^T,$$

und habe die empirische Eigenwertverteilung

$$L_N = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j}$$

und das Zustandsdichtemaß $\overline{L}_N = \mathbb{E}[L_N]$. Dann gilt die Konvergenz

$$\overline{L}_N \xrightarrow{w} f_\alpha(x) dx \quad (N \rightarrow \infty)$$

im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} , wobei

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})_+^2)((1 + \sqrt{\alpha})_+^2 - x)}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
 N^{l+1} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle &= N^{l+1} \cdot \int x^l \overline{L_N}(dx) = N^{l+1} \cdot \frac{1}{N} \cdot \mathbb{E}[\text{tr}(W_N^l)] = N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l W_{j_p, j_{p+1}} \right] \\
 &= N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k) \cdot Y_N(j_2, k) \right) \cdot \left(\prod_{p=2}^l \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=2}^l \sum_{k_1, k_2=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k_1) \cdot Y_N(j_2, k_1) \cdot Y_N(j_p, k_2) \cdot Y_N(j_{p+1}, k_2) \right] \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^{M(N)} \mathbb{E}[Y_N(j_1, k_1) Y_N(j_2, k_1) Y_N(j_2, k_2) Y_N(j_3, k_2) \dots Y_N(j_l, k_l) Y_N(j_1, k_l)]
 \end{aligned}$$

Meine Ideen, wie es weiter geht. Hakt noch ein bisschen, sollte aber in die richtige Richtung gehen :)

$$= \sum_{r_1, r_2=1}^l \sum_{\substack{J: v(J)=r_1 \\ K: v(K)=r_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] \tag{2.1}$$

Die einzelnen Summanden können also als Eulergraphen auf $r_1 + r_2$ Knoten und $2l$ Kanten interpretiert werden. Damit ergeben sich die drei Fälle (setze $r = r_1 + r_2$)

- $r < l + 1$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_N(J, k)] &\leq \prod_{n=1}^l \left(\sup_{j, k, N} \mathbb{E} [|Y_N(j, k)|^l] \right)^{\frac{1}{l}} \\
 &= \prod_{n=1}^l C_l^{\frac{1}{l}} = C_l
 \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
 \#\{J : v(J) = r_1\} &\leq \binom{N}{r_1} r_1^l \leq N^{r_1} r_1^l \\
 \#\{K : v(K) = r_2\} &\leq \binom{M(N)}{r_2} r_2^l \leq M(N)^{r_2} r_2^l
 \end{aligned}$$

2 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Somit gilt:

$$\frac{1}{N^{l+1}} \sum_{\substack{J: v(J)=r_1 \\ K: v(K)=r_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] < C_l(l+1)^l \frac{N^{r_1} M(N)^{r_2}}{N^{l+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

- $r > l + 1$

Nach Lemma aus der Vorlesung existiert eine einfache, echte Kante und somit $\mathbb{E}[Y_N(J, K)] = 0$, da die Matrixeinträge unabhängig sind.

- $r = l + 1$

Es tragen also nur die Graphen auf $l + 1$ verschiedenen Knoten zu $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L}_N, x^l \rangle$ bei. Diese Graphen haben die Struktur eines Doppelbaumes, denen man geordnete, nicht überkreuzende Paarzerlegungen und damit auch Catalanpfade zuordnen kann.

Weitere Analyse von β_l :

Wähle für einen Doppelbaum r Knoten aus den k -Knoten und $l + 1 - r$ Knoten aus den j -Knoten. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] &= \sum_{r=1}^l \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \\ &\quad \cdot \#\{\text{Doppelbäume mit } l+1-r \text{ } j\text{-Knoten und } r \text{ } k\text{-Knoten}\} \\ &= \sum_{r=1}^l \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \cdot \binom{2l-2}{2r-2} C_{l-r} \end{aligned}$$

Formel für Anzahl der Doppelbäume folgt aus der folgenden Konstruktion (Anm: das -2 folgt immer, da die beiden Wurzelkanten fest 0 im Catalanpfad sind; Die Catalanzahl für $l-r$, weil von dem gesamten Pfad der Länge $2l-2r$ Stücke flach sind und die übrigen wie beim normalen Catalanpfad aufgeteilt werden können)

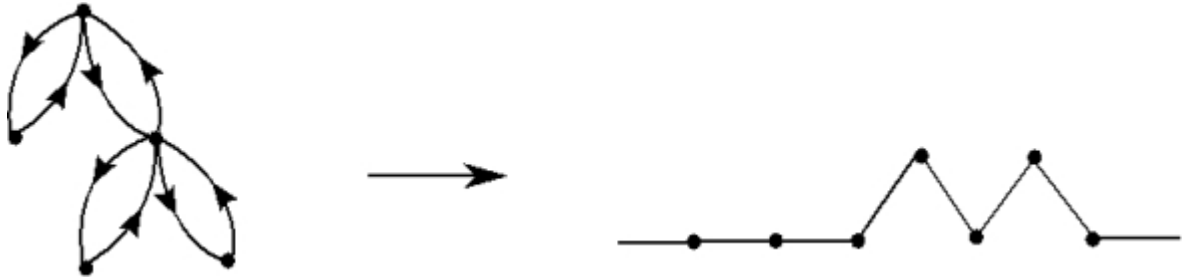
Ein Doppelbaum mit (r) k -Knoten und $(l + 1 - r)$ j -Knoten kann wie folgt als Catalan-Pfad der Länge l interpretiert werden:

Wähle als Wurzel des Baumes einen j -Knoten und gliedere den Baum in Ebenen, wobei die Wurzel in der 0.Ebene liegt. (Die k -Knoten liegen also in ungeraden Ebenen, die j -Knoten in geraden Ebenen) Verweise jede Kante mit einer Richtung, sodass bei jeder Doppelkante eine Kante von dem Knoten wegführt und eine zu ihm hinführt. Konstruiere den Catalan-Pfad wie folgt:

- Alle Kanten zwischen der Wurzel und der ersten Ebene sind Flachstücke (+0)
- Wenn eine Kante von ungerader Ebene aufwärts auf gerade Ebene führt: +1
- Wenn eine Kante von gerader Ebene abwärts auf ungerade Ebene führt: -1

- Die restlichen Kanten sind alle Flachstücke

Beispiel:



Lässt man die Wurzel außen vor, liegen r k -Knoten in den ungeraden Ebenen und $l - r$ j -Knoten in den geraden Ebenen. Damit ergibt sich aus dieser Konstruktion, dass $l - r$ die Anzahl der Aufstiege (und Abstiege) und $2r$ die Anzahl der Flachstücke im Catalan-Pfad sind. Denn: zu jedem j -Knoten führt genau eine Kante aus einer unteren Ebene hin und es führt genau eine Kante in eine untere Ebene zurück (Doppelbaum!).

Die Abbildung von den Doppelbäumen auf die Catalanpfade ist eine Bijektion, da:

- Da der Graph eulersch ist, ist $\sum_{i=1}^{2l} s_i = 0$; Der Graph ist immer über 0, ansonsten würde es ein m geben, sodass $\sum_{i=1}^{2m-1} s_i = -1$, $\sum_{i=1}^{2m} s_i = 0$, $s_{2m-1} = -1$. Also könnten wir einen Doppelbaum mit Knoten $1, 2, \dots, 2m$ konstruieren, und da $s_{2m-1} = -1$ ist, würde eine Kante von diesem Knoten zurück zu einem der ersten $2m$ Knoten gehen, was dem Aufbau eines Doppelbaums widersprechen würde. Insgesamt haben wir also einen Catalanpfad konstruiert.
- Surjektivität: für jeden Catalanpfad der Länge l der Form $\{s_i\}$, $i \leq 2l, i \in \mathbb{N}$ kann ein Doppelbaum als Urbild wie folgt konstruiert werden: für i gerade: $s_i = -1 \rightarrow$ gehe von $j_{i/2}$ abwärts, bei $s_i = 0$ aufwärts; für i ungerade bei $s_i = 1$ aufwärts, bei $s_i = 0$ abwärts.
- Injektivität analog zur Übung (bzw muss man das unbedingt nochmal zeigen?)

Die betrachteten Doppelbäume haben s.o. ein kombinatorisches Gewicht von

$$\binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r!$$

Für N hinreichend groß ist dies genähert $N^{l+1-r} M(N)^r$. Damit folgt:

$$\frac{1}{N^{l+1}} N^{l+1-r} M(N)^r = \left(\frac{M(N)}{N} \right)^r \rightarrow \alpha^r$$

und damit:

$$\begin{aligned}\beta_l &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{J, K: v(J) + v(K) = l+1} \frac{1}{N^{l+1}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] = \sum_{r=1}^l \alpha^r \binom{2l-2}{2r-2} C_{l-r} \\ &= \sum_{r=1}^l \sum_{p_r \in C_l} \alpha^r = \sum_{p \in C_l} \alpha^r\end{aligned}$$

wobei $r = \frac{1}{2} \# \{\text{Flachstücke in } C_l\} = l - \# \{\text{Anstiege in } C_l\}$, und p_r Catalanpfad mit r Flächenstücken.

$l - r$ im Exponenten von γ_l sind die Aufstiege/Abstiege im Doppelbaum.

An Manu: kannst du diese Formel für β_l genauer erklären? Ich verstehe nicht wirklich, was du da machst...

Beweis von $\beta_l = \alpha \gamma_l$:

$$\begin{aligned}\alpha \gamma_l &= \sum_{p \in C_l} \alpha^{l+1-r}, \\ \beta_l - \alpha \gamma_l &= \sum_{r=1}^l \alpha^r \binom{2l-2}{2r-2} C_{l-r} - \sum_{r=1}^l \alpha^{l+1-r} \binom{2l-2}{2l-2r} C_{r-1} \\ &\stackrel{\text{Symmetrie Binom.}}{=} \sum_{r=1}^l \binom{2l-2}{2l-2r} (C_{l-r} \alpha^r - C_{r-1} \alpha^{l+1-r}) \\ &\stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Für die einzelnen Summenglieder folgt:

$$\begin{aligned}\text{i-tes Summenglied: } &\binom{2l-2}{2l-2i} (C_{l-i} \alpha^i - C_{i-1} \alpha^{l+1-i}) \\ \text{(l+1-i)-tes Summenglied: } &\binom{2l-2}{2l-2-(l+1-i)} (C_{l-1-l+i} \alpha^{l+1-i} - C_{1+l-i-1} \alpha^{l+1-1-l+i}) \\ &= -\text{i-tes Summenglied}\end{aligned}$$

Ist l gerade, dann heben sich folglich alle Summenglieder weg und die Summe ist 0, ist l ungerade, bleibt nur das $(l+1)/2$ -te Summenglied übrig:

$$\begin{aligned}&\binom{2l-2}{l+1-2} (C_{l-\frac{l+1}{2}} \alpha^{\frac{l+1}{2}} - C_{\frac{l+1}{2}-1} \alpha^{l+1-\frac{l+1}{2}}) \\ &= \binom{2l-2}{l-1} (C_{\frac{l-1}{2}} \alpha^{\frac{l+1}{2}} - C_{\frac{l-1}{2}} \alpha^{\frac{l+1}{2}}) = 0\end{aligned}$$

Fehlt noch Beweis der zweiten Hälfte von (10), da komm ich nicht weiter.

Sorry dass das alles im rechten Rand verschwindet, ich kenn mich mit dieser Umgebung

nicht aus, kann das einer von euch umbauen? Bzw mir sagen wie das ganze linksbündig wird?

->Du hattest einfach zu viel in einer Zeile stehen! Latex macht von sich aus keine Zeilenumbrüche bei Formeln, steht zu viel in einer Zeile, verzieht sich alles, da die align-Umgebung alles zentriert.

Beweis Formel (12)

$$\begin{aligned}
 Q_n &= \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(x) x(x - \alpha - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})^2)((1 + \sqrt{\alpha})^2 - x)} (x - \alpha - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{-\alpha^2 + 2\alpha x + 2\alpha - x^2 + 2x - 1} (x - \alpha - 1)^n dx \\
 &\stackrel{x=y+\alpha+1}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{4\alpha - y^2} y^n dy \\
 &\stackrel{y=2\sqrt{\alpha}z}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \cdot 2^n \alpha^{n/2} \cdot 4\sqrt{\alpha} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz = \frac{2}{\pi} \cdot 2^n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz \\
 \stackrel{\text{Übung 1}}{=} \sigma(z^n) &= \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ C_{\frac{1}{2}}, & n \text{ gerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Falls wir noch Platz füllen müssen, können wir hier die Rechnung aus der Übung auch wiederholen ;)) Bei den „Verständnis-Fragen“ habe ich jedoch etwas Probleme: f_{α} ist für $x=0$ gar nicht definiert? Durch die Rechnung ergibt sich aber der Bezug zu $\sigma(x)$, wo man dann doch beim Halbkreisgesetz wäre.

Zur Eindeutigkeit von f_{α} sind diese „verallgemeinerten Momente“ ein Problem. Habt ihr in der großen W-Theorie Vorlesung dazu was gemacht?