

Abschlussarbeit Fallstudien der math. Modellbildung

Manuela Lambacher, Dominik Otto, Andreas Wiedemann

26. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	3
1.1	Das Marchenko-Pastur-Gesetz	3
1.2	Beweis des Marcenko-Pastur Gesetzes	4

1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

1.1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Sei Y_N eine $N \times M(N)$ -Matrix mit unabhängigen zentrierten Einträgen mit Varianz 1,

$$\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] = C_q < \infty \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

und $M(N) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \alpha \in [1, \infty).$$

Sei weiterhin die Wishart-Matrix gegeben als

$$W_N = \frac{1}{N} Y_N Y_N^T,$$

und habe die empirische Eigenwertverteilung

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda_j}$$

und das Zustandsdichtemaß $\overline{L}_N = \mathbb{E}[L_N]$. Dann gilt die Konvergenz

$$\overline{L}_N \xrightarrow{w} f_\alpha(x) dx \quad (N \rightarrow \infty)$$

im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} , wobei

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})_+^2)((1 + \sqrt{\alpha})_+^2 - x)}$$

1.2 Beweis des Marcenko-Pastur Gesetzes

Die Konvergenz soll im Folgenden mittels der Momentenmethode gezeigt werden. Als ersten Schritt bringt man $N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ in eine Form, die eine weitergehende Untersuchung ermöglicht:

$$\begin{aligned}
 N^{l+1}\langle \overline{L_N}, x^l \rangle &= N^{l+1} \cdot \int x^l \overline{L_N}(dx) = N^{l+1} \cdot \frac{1}{N} \cdot \mathbb{E}[\text{tr}(W_N^l)] = N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l W_{j_p, j_{p+1}} \right] \\
 &= N^l \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=1}^l \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k) \cdot Y_N(j_2, k) \right) \cdot \left(\prod_{p=2}^l \sum_{k=1}^{M(N)} Y_N(j_p, k) \cdot Y_N(j_{p+1}, k) \right) \right] \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \mathbb{E} \left[\prod_{p=2}^l \sum_{k_1, k_2=1}^{M(N)} Y_N(j_1, k_1) \cdot Y_N(j_2, k_1) \cdot Y_N(j_p, k_2) \cdot Y_N(j_{p+1}, k_2) \right] \\
 &= (\dots) \text{ (es wird analog zum vorherigen Schritt für alle } p \text{ verfahren)} \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^N \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^{M(N)} \mathbb{E}[Y_N(j_1, k_1) Y_N(j_2, k_1) Y_N(j_2, k_2) Y_N(j_3, k_2) \dots Y_N(j_l, k_l) Y_N(j_1, k_l)] \\
 &= \sum_{s_1, s_2=1}^l \sum_{\substack{J: v(J)=s_1 \\ K: v(K)=s_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)]
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 J &= (j_1, j_2, j_2, \dots, j_l, j_l, j_1), K = (k_1, k_1, \dots, k_l, k_l), \\
 v : \mathbb{N}^{2l} &\rightarrow \mathbb{N}, \quad v(X) := \text{Anzahl der verschiedenen Indizes in } X
 \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden können also als Eulergraphen auf $s_1 + s_2$ verschiedenen Knoten und $2l$ Kanten zwischen der Menge der k -Knoten und der j -Knoten für alle Paare $(j_i, k_i), (j_{i+1}, k_i)$ interpretiert werden.

Setze $s = s_1 + s_2$, dann ergeben sich folgende drei Fälle:

- $s < l + 1$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_N(J, k)] &\leq \prod_{n=1}^l \left(\sup_{j, k, N} \mathbb{E} \left[|Y_N(j, k)|^l \right] \right)^{\frac{1}{l}} \\
 &= \prod_{n=1}^l C_l^{\frac{1}{l}} = C_l
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Außerdem gilt:

$$\#\{J : v(J) = s_1\} \leq \binom{N}{s_1} s_1^l \leq N^{s_1} s_1^l \quad (1.3)$$

$$\#\{K : v(K) = s_2\} \leq \binom{M(N)}{s_2} s_2^l \leq M(N)^{s_2} s_2^l \quad (1.4)$$

Somit ergibt sich aus (1.2) – (1.4):

$$\frac{1}{N^{l+1}} \sum_{\substack{J:v(J)=s_1 \\ K:v(K)=s_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] < C_l(l+1)^l \frac{N^{s_1} M(N)^{s_2}}{N^{l+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (1.5)$$

- $s > l + 1$

Nach Lemma aus der Vorlesung existiert in diesem Fall eine einfache, echte Kante. Da die Matrixeinträge unabhängig sind, kann der Erwartungswert für diesen Matrixeintrag ausgeklammert werden. Alle Einträge sind jedoch zentriert, und damit folgt direkt $\mathbb{E}[Y_N(J, K)] = 0$.

- $s = l + 1$

Die verbliebenen Graphen auf $l + 1$ verschiedenen Knoten haben die Struktur von Doppelbäumen und sollen im Weiteren genauer untersucht werden.

Zusammenfassung: Zu $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L}_N, x^l \rangle$ tragen nur die Graphen auf $l + 1$ verschiedenen Knoten bei:

$$\begin{aligned} \beta_l &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L}_N, x^l \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{l+1}} \sum_{s_1, s_2=1}^l \sum_{\substack{J:v(J)=s_1 \\ K:v(K)=s_2}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{l+1}} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] \end{aligned}$$

Berechnung der β_l mittels Catalanpfade

Die Doppelbaumstruktur dieser Graphen lässt sich wie folgt nutzen:

Wähle für einen Doppelbaum r Knoten aus den k -Knoten und $l + 1 - r$ Knoten aus den j -Knoten. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] &= \sum_{r=1}^l \binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \\ &\quad \cdot \#\{\text{Doppelbäume mit } l+1-r \text{ } j\text{-Knoten und } r \text{ } k\text{-Knoten}\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ein Doppelbaum mit r k -Knoten und $(l + 1 - r)$ j -Knoten kann wie folgt als Catalan-Pfad der Länge l interpretiert werden:

Wähle als Wurzel des Baumes einen j -Knoten und gliedere den Baum in Ebenen, wobei die Wurzel in der 0.Ebene liegt. (Die k -Knoten liegen also in ungeraden Ebenen, die j -Knoten in geraden Ebenen) Verweise jede Kante mit einer Richtung, sodass bei jeder Doppelkante eine Kante von dem Knoten wegführt und eine zu ihm hinführt. Durchlaufe den Baum mit Hilfe der Tiefensuche und nummeriere die Kanten in der Reihenfolge, wie sie hierbei durchlaufen werden. Konstruiere den Catalan-Pfad wie folgt:

- Wird ein Knoten zum ersten Mal erreicht: $(+1)$
- Kehrt man zu einem bereits besuchten Knoten zurück: (-1)

Da der Baum durch Tiefensuche durchlaufen wird, gibt die Entfernung eines Knotens zur Wurzel die Anzahl der nötigen Schritte wieder, die benötigt werden, um ihn zum ersten Mal zu erreichen. Da die j -Knoten in den geraden Ebenen und die k -Knoten in den ungeraden Ebenen liegen, ergibt sich, dass sich die j -Knoten stets auf den geraden Niveaus und die k -Knoten stets auf den ungeraden Niveaus des Catalan-Pfades befinden.

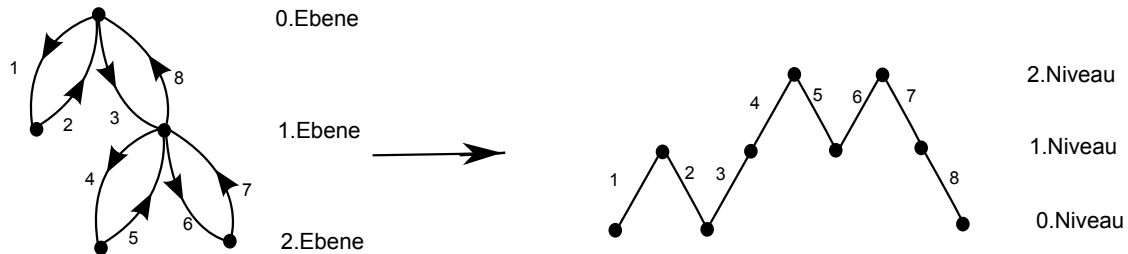


Abbildung 1.1: Doppelbaum auf 5 Knoten und dem zugehörigen Catalan-Pfad

Die Abbildung von den Doppelbäumen auf die Catalanpfade ist eine Bijektion:

- Wohldefiniertheit: Da der Graph eulersch ist, ist $\sum_{i=1}^{2l} s_i = 0$; Der Graph ist immer über 0, ansonsten würde es ein m geben, sodass $\sum_{i=1}^{2m-1} s_i = -1$, $\sum_{i=1}^{2m} s_i = 0$, $s_{2m-1} = -1$. Also könnten wir einen Doppelbaum mit Knoten $1, 2, \dots, 2m$ konstruieren, und da $s_{2m-1} = -1$ ist, würde eine Kante von diesem Knoten zurück zu einem der ersten $2m$ Knoten gehen, was dem Aufbau eines Doppelbaums widersprechen würde. Insgesamt haben wir also einen Catalanpfad konstruiert.
- Surjektivität: Starte bei der Wurzel. Füge für jede Aufstiegs-kante einen Knoten in die nächst höhere Ebene und eine Kante als Verbindung hinzu. Füge für jede Abstiegs-kante eine Kante in die nächst niedrigere Ebene hinzu, bis die Doppelbaumstruktur vollständig ist. Damit ist jeder Catalanpfad Urbild eines Doppelbaums.
- Injektivität: kann analog zur Übung durch rekursives Entfernen von identischen Kanten gezeigt werden.

1 Das Marchenko-Pastur-Gesetz

Die betrachteten Doppelbäume haben s.o. ein kombinatorisches Gewicht von

$$\binom{N}{l+1-r} (l+1-r)! \binom{M(N)}{r} r! \quad (1.7)$$

Für N hinreichend groß ist dies genähert $N^{l+1-r} M(N)^r$. Damit folgt:

$$\frac{1}{N^{l+1}} N^{l+1-r} M(N)^r = \left(\frac{M(N)}{N} \right)^r \rightarrow \alpha^r \quad (1.8)$$

und damit:

$$\begin{aligned} \beta_l &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{J, K: v(J)+v(K)=l+1} \frac{1}{N^{l+1}} \mathbb{E}[Y_N(J, K)] = \sum_{r=1}^l \sum_{p_r \in C_l} \alpha^r = \sum_{p \in C_l} \alpha^r \end{aligned}$$

wobei $r = \#\{\text{Abstiege von ungeraden auf gerade Niveaus in } C_l\}$, und p_r Catalan-Pfad mit r entsprechenden Abstiegen.

Mit $\beta_0 := 1, \gamma_0 := 1$ und

$$\gamma_l := \sum_{p \in C_l} \alpha^{l-r} \quad (l \geq 1)$$

gelten die Relationen

$$\beta_l = \alpha \gamma_l = \alpha \sum_{r=0}^{l-1} \beta_r \gamma_{l-1-r} \quad (1.9)$$

für alle $l \geq 1$:

($l - r$ ist dabei die Anzahl der Abstiegsanten von geraden auf ungerade Niveaus im Catalan-Pfad.)

- Betrachte die Position im Pfad, an der zum ersten Mal die 0 erreicht wird. Diese ist immer gerade, da die 0 genau dann erreicht wird, wenn man im zugehörigen Doppelbaum zur Wurzel zurückkehrt. Sei also $2j, j \in \{1, \dots, l\}$, diese Position. Teile nun den Pfad in einen vorderen Teil P_1 der Länge $2j$ und einen hinteren Teil P_2 der Länge $2l - 2j$. In dem erzeugenden Baum entspricht P_1 dem äußersten Teilbaum, P_2 dem restlichen Baum. P_2 ist also ein beliebiger Catalan-Pfad. P_1 hat die besondere Struktur, dass die 0 erst an letzter Position erreicht wird, die erste und letzte Kante sind somit als Aufstiegs- bzw. Abstiegsante festgelegt und können für die kombinatorische Analyse vernachlässigt werden. Löscht man diese beiden Kanten und subtrahiert 1 von allen Elementen von P_1 , erhält man einen neuen Pfad \tilde{P}_1 , der ein beliebiger Catalan-Pfad der Länge $2j - 2$ ist. Dies folgt direkt aus der Struktur des Doppelbaumes: \tilde{P}_1 entspricht dem äußersten Teilbaum ohne die ursprüngliche Wurzel, wodurch man einen neuen, beliebigen Doppelbaum erhält.

Die geraden/ungeraden Niveaus im ursprünglichen Pfad sind in \tilde{P}_1 ungerade/gerade

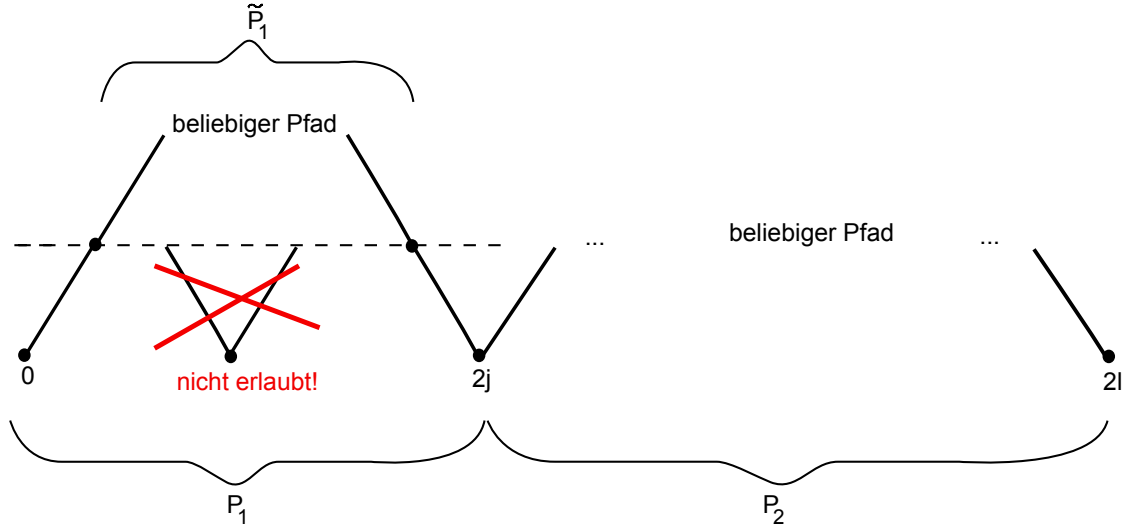


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung der Rekursion

(Durch die Verschiebung um 1 nach unten). r und $l - r$ haben sich also genau vertauscht! Damit ergibt sich aus den Definition für β_l und γ_l die Formel:

$$\begin{aligned} \beta_l &= \alpha \sum_{j=1}^{l-1} \gamma_{j-1} \beta_{l-j} = \alpha \sum_{j=0}^l \gamma_j \beta_{l-j-1} \\ &= \alpha \sum_{k=0}^l \beta_k \gamma_{l-1-k} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Das zusätzliche α wird in der Formel durch das Löschen der Abwärtskante in P_1 hervorgerufen.

- γ wird analog rekursiv dargestellt: Im Gegensatz zu vorher tragen nun die Abwärtskanten von gerade zu ungerade zum Gewicht von α bei. Sei wieder $2j$, $j \in \{1, \dots, l\}$, die Position, an der zum ersten Mal die 0 erreicht wird..

Teile wiederum den Pfad in einen vorderen Teil P_1 der Länge $2j$ und einen hinteren beliebigen Catalanpfad P_2 der Länge $2l - 2j$. In P_1 sind wieder die erste und letzte Kante festgelegt. Beim Löschen dieser Kante werden die Ebenen vertauscht.

Anders als bei den β_l haben wir durch das Löschen der Abwärtskante allerdings kein α verloren, da nun ja die Abwärtskanten von gerade zu ungerade das Gewicht α haben.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_l &= \sum_{k=0}^l \beta_k \gamma_{l-1-k} \\ &= \frac{\beta_l}{\alpha} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Beweis von Formel (12)

$$\begin{aligned}
 Q_n &:= \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(x) x(x - \alpha - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{(x - (1 - \sqrt{\alpha})^2)((1 + \sqrt{\alpha})^2 - x)} (x - \alpha - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{(1-\sqrt{\alpha})^2}^{(1+\sqrt{\alpha})^2} \sqrt{-\alpha^2 + 2\alpha x + 2\alpha - x^2 + 2x - 1} (x - \alpha - 1)^n dx \\
 &\stackrel{x=y+\alpha+1}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}} \sqrt{4\alpha - y^2} y^n dy \\
 &\stackrel{y=2\sqrt{\alpha}z}{=} \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1-n/2} \cdot 2^n \alpha^{n/2} \cdot 4\sqrt{\alpha} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz = \frac{2}{\pi} \cdot 2^n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} z^n dz \\
 &\stackrel{\text{Übung 1}}{=} \sigma(z^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ C_{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Falls wir noch Platz füllen müssen, können wir hier die Rechnung aus der Übung auch wiederholen ;)) Bei den „Verständnis-Fragen“ habe ich jedoch etwas Probleme: f_{α} ist für $x=0$ gar nicht definiert? Durch die Rechnung ergibt sich aber der Bezug zu $\sigma(x)$, wo man dann doch beim Halbkreisgesetz wäre.

Nachdem $\{\alpha^{-1-n/2}x(x - \alpha - 1)^n | n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{1\}$ genauso eine Basis aller Polynome darstellt wie $\{x^l | l \in \mathbb{N}_0\}$ (Details siehe unten), ist f_{α} genau dann durch die Q_n (und $\int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(x) dx$) bestimmt, wenn sie auch durch die normalen Momente eindeutig bestimmt ist.

Theorem 1.2.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ mit $m_l(\mu) = \int x^l \mu(dx) < \infty \forall l \in \mathbb{N}_0$. Dann ist μ das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß mit diesen Momenten, wenn die Potenzreihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} m_l(f_{\alpha}) \frac{z^l}{l!}$$

einen positiven Konvergenzradius besitzt.

Da die Momente m_l endliche Linearkombination der verallgemeinerten Momente sind, behaupte ich hier einfach mal, dass es auch funktioniert, wenn man in dem Theorem die verallgemeinerten Momente verwendet. (..was meint ihr, funktioniert das für den Konvergenzradius??)

Also ist zu zeigen: $Q_n < \infty$ (folgt aus (12)) und $\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{z^n}{n!}$ besitzt positiven Konvergenzradius.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wobei

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{C_{\frac{n}{2}}}{n!} = ((\frac{k}{2} + 1)! \frac{k}{2}!)^{-1}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Wurzelkriterium für Konvergenzradius:

$$(\frac{k}{2} + 1)! \frac{k}{2}! \geq 1 \Rightarrow |a_n| \leq 1 \Rightarrow$$

$$r = (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} > 1$$

Beweis von Formel (14)

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x(x - \alpha - 1)^n \quad (1.12)$$

Anwendung des binomischen Lehrsatzes ergibt:

$$\begin{aligned} R_n &= \alpha^{-1-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-\alpha - 1)^k \\ &= \alpha^{-1-n/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} (-\alpha - 1)^k \rangle \\ &= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \beta_{n+1-k} \end{aligned}$$

wegen $\beta_l = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \overline{L_N}, x^l \rangle$ und der Linearität des Integrals.

Um die Rekursionsformel zu zeigen benötigt man folgende Formel:

$$\sum_{n \geq t} \binom{m-n}{m-u-t} \binom{n}{t} = \binom{m+1}{u} \quad (1.13)$$

Dies kann man kombinatorisch begründen. Stellt man sich das Pascalsche Dreieck vor, so gibt t die Diagonale und der Index n die Zeile vor. Der Binomialkoeffizient $\binom{m+1}{u}$ ist die Anzahl der Pfade im Baumdiagramm...Fortsetzung folgt.

Nun betrachtet man:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m R_{m-n} R_n &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m-n}{k} (-\alpha - 1)^k \beta_{m-n+1-k} \alpha^{-1-\frac{m-n}{2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-\alpha - 1)^l \beta_{n+1-l} \alpha^{-1-\frac{n}{2}} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m-n}{k} \binom{n}{l} (-\alpha - 1)^{k+l} \beta_{m-n+1-k} \gamma_{n+1-l} \end{aligned}$$

Der Index k kann man durch $u := k + l$ ersetzen.

$$\sum_{n=0}^m R_{m-n} R_n = \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^n \sum_{u=l}^{m+l-n} \binom{m-n}{u-l} \binom{n}{l} (-\alpha-1)^u \beta_{m-n+1+l-u} \gamma_{n+1-l}$$

Mit $t := n - l$ kann l umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m R_{m-n} R_n &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^m \sum_{t=0}^n \sum_{u=n-t}^{m-t} \binom{m-n}{u-n+t} \binom{n}{t} (-\alpha-1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{t=0}^m \sum_{u=0}^{m-t} \sum_{n=t}^{m-t+u+t} \binom{m-n}{u-n+t} \binom{n}{t} (-\alpha-1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{t=0}^m \sum_{u=0}^{m-t} (-\alpha-1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \sum_{n=t}^{u+t} \binom{m-n}{m-u-t} \binom{n}{t} \end{aligned}$$

Mit Formel (2.14) gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m R_{m-n} R_n &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{t=0}^m \sum_{u=0}^{m-t} (-\alpha-1)^u \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \binom{m+1}{u} \\ &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \sum_{t=0}^{m-u} \beta_{m+1-u-t} \gamma_{1+t} \end{aligned}$$

Durch die Substitution $r := m + 1 - u - t$ und die Anwendung von Formel (10) ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^m R_{m-n} R_n &= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \left(\sum_{r=0}^{m+1-u} \beta_r \gamma_{m+2-u-r} - \beta_0 \gamma_{m+2-u} \right) \\
&= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \left(-\beta_{m+2-u} + \sum_{r=0}^{m+2-u} \beta_r \gamma_{m+2-u-r} - \alpha^{-1} \beta_{m+2-u} \right) \\
&= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \left(\frac{1}{\alpha} \beta_{m+3-u} - \frac{\alpha+1}{\alpha} \beta_{m+2-u} \right) \\
&= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+2} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \frac{1}{\alpha} \beta_{m+3-u} \\
&\quad - \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \frac{\alpha+1}{\alpha} \beta_{m+2-u} \\
&= \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+2} \left(\binom{m+2}{u} - \binom{m+1}{u-1} \right) (-\alpha-1)^u \frac{1}{\alpha} \beta_{m+3-u} \\
&\quad - \alpha^{-1-\frac{m}{2}} \sum_{u=0}^{m+1} \binom{m+1}{u} (-\alpha-1)^u \frac{\alpha+1}{\alpha} \beta_{m+2-u}
\end{aligned}$$

(...)

$R_m = Q_m$:

Dazu zeigen wir, dass $R_0 = Q_0$ und $R_1 = Q_1$, sowie dass die weiteren Folgenglieder von Q_m durch die gleiche Rekursionsformel gebildet werden können. Daraus folgt $R_m = Q_m \forall m$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha \beta_0 \gamma_0 = \alpha \\
\beta_2 &= \alpha \beta_0 \gamma_1 + \alpha \beta_1 \gamma_0 = \alpha \gamma_1 + \alpha \beta_1 = \beta_1 + \alpha \beta_1 \\
R_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x = \frac{\beta_1}{\alpha} = 1 \\
R_1 &= \alpha^{\frac{3}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) (x^2 - (\alpha+1)x) = \alpha^{\frac{3}{2}} (\beta_2 - (\alpha+1)\beta_1) = 0 \\
Q_0 &= C_0 = 1, \quad Q_1 = 0
\end{aligned}$$

Rekursion für Q_m :

$$\text{m ungerade: } \sum_{n=0}^m Q_{m-n} Q_n = Q_0 \underbrace{Q_m}_{=0} + \underbrace{Q_1}_{=0} Q_{n-1} + \dots = 0 = Q_{m+2}$$

$$\text{m gerade: } Q_{m+2} = C_{\frac{m}{2}+1} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} C_k C_{\frac{m}{2}-k} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} Q_{2k} Q_{m-2k} = \sum_{n=0}^m Q_n Q_{m-n}$$

wobei der letzte Schritt aus $Q_n Q_{m-n} = 0$ für $n = 2k + 1$ folgt.

Mit folgendem Theorem aus der Vorlesung kann die Aussage nun bewiesen werden.

Theorem 1.2.2. Sei $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ mit endlichen Momenten und $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ eindeutig durch seine Momente bestimmt. Dann gilt:

$$\forall l \in \mathbb{N}_0 : m_l(\mu) \rightarrow m_l(\mu) \Rightarrow \mu_n \xrightarrow{W} \mu$$

Für $l \geq 1$ existieren $\lambda_0, \dots, \lambda_{l-1} \in \mathbb{R}$, sodass $x^l = \sum_{n=0}^{l-1} \lambda_n x(x - \alpha - 1)^n$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N} : \lim_{N \rightarrow \infty} m_l(\overline{L_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} x^l \overline{L_N}(dx) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{l-1} \lambda_n x(x - \alpha - 1)^n \overline{L_N}(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{l-1} \lambda_n \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} x(x - \alpha - 1)^n \overline{L_N}(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{l-1} \lambda_n R_n = \sum_{n=0}^{l-1} \lambda_n Q_n = m_l(f_\alpha) \end{aligned}$$

Für den Fall $l = 0$ erhalten wir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_0(\overline{L_N}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x) dx$$

, da $\overline{L_N}$ Wahrscheinlichkeitsmaß ist. (was ist mit f_α ? oder sind wir so genial, dass wir das nicht begründen müssen, warum das Integral 1 ist?)

Um zu zeigen, dass $f_\alpha(x) dx \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ eindeutig durch seine Momente bestimmt ist, betrachtet man folgende Potenzreihe:

$$\sum_{l=0}^{\infty} m_l(f_\alpha) \frac{z^l}{l!}$$

$m_l(f_\alpha)$ auszurechnen ist wahrscheinlich auch nicht so einfach. / siehe oben.

Bleibt zu zeigen, dass R_n endlich ist $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt wieder, da $m_l(\overline{L_N})$ endliche Linearkombination von R_n ist, dass die Momente endlich sind.

$$\alpha^{-1-n/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{L_N}(dx) x(x - \alpha - 1)^n = \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \langle \overline{L_N}, x^{n+1-k} \rangle$$

$$= \alpha^{-1-n/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\alpha - 1)^k \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \text{tr}(W_N^{n+1-k}) \right] < \infty \quad \forall N, n \in \mathbb{N}_0$$

wegen $\sup_{j,k,N} \mathbb{E}[|Y_N(j,k)|^q] < \infty$

(...okay letzten schritt sollte man sich mal genauer anschauen...)

\Rightarrow Theorem anwendbar $\Rightarrow \overline{L_N} \xrightarrow{w} f_\alpha(x)dx \quad (N \rightarrow \infty)$.

Schluss

Könnten wir auch als Einleitung hernehmen. Oder ganz lassen.

Eine Anwendung dieses berühmten Marchenko-Pastur-Gesetzes findet man zum Beispiel in der Neurobiologie. Um das Nervensystem zu erforschen, werden Impulsspitzen der Nervenzellen statistisch ausgewertet. Dies geschieht mithilfe des sogenannten “spiked population model“. Es handelt sich um ein multivariates statistisches Modell, bei dem die Populationsgröße sehr groß ist und die Stichprobenanzahl vergleichbar anwächst, so dass beide im Idealfall gegen Unendlich gehen. Mathematisch wird so vorgegangen, dass eine $N \times M(N)$ Zufallsmatrix betrachtet wird, wobei N die Größe der Stichprobe und M die Größe der Population ist, sodass $\frac{M}{N} \rightarrow \alpha$ für $N \rightarrow \infty$. Bestimmte Eigenwerte dieser Matrix werden als bekannt für diese Population vorausgesetzt, und das Ziel ist nun, die restlichen Eigenwerte bzw. deren Erwartungswert herauszufinden. Wie man sieht, ist dafür Marchenko-Pastur von großem Nutzen.

zu finden in: J. Baik, J.W.Silverstein: Eigenvalues of Large Sample Covariance Matrices of Spiked Population Models, 2004

und S.Johnston u.a., Comparative Investigation into Classical and Spiking Neuorin Implementations on FPGAs, 2005