Nichtlineare Dynamik

31. Oktober 2013

Fehler in der Mitschrift an alexander.book@gmx.de oder
dominik.o@gmx.net

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Dynamische Systeme

Definition 1.1.1 (dynamische Systeme)**.** Wir behandeln zwei Arten von dynamischen Systemen:

1. *kontinuierliches dynamisches System*: Es gibt eine kontinulierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{R}$

2. *diskretes dynamisches System*: Es gibt eine kontinulierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichnet T entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Z}$, je nachdem, welches dynamische System im Kontext verwendet wird.

Es gibt einen *(Zustands-)Phasenraum* X, der den Zustand eines Systems mit verschiedenen Größen beschreibt ($X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$). $x \in X$ beschreibt somit einen möglichen Zustand eines *dynamischen Systems*. Falls $\dim(X) < \infty$, so nennt man es *endlich dimensionales dynamisches System*. Andernfalls ($\dim(X) = \infty$) nennt man es *unendlich dimensionales dynamisches System*. Mit *Dynamik* bezeichnet man die zeitliche Veränderung des Zustands eines dynamischen Systems.

Generell beginnt ein dynamisches System bei einer Anfangszeit t_o und einem Zustand $x(t_0) = x_0 \in X$. Anhand dieses Punktes wird jedem andern Zeitpunkt ein eindeutiger Zustand zugewiesen ($x(t_0) = x_0 \Rightarrow \forall t \in T\ \exists! x_t \in \mathbb{R}^n : x(t) = x_t$) Diese Zuordnung wird durch die *Flussabbildung* definiert:

$$\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X,\ \forall t \in T : x(t) := \phi(t - t_0, x_0)$$

Definition 1.1.2 (Klassifikation von dynamischen Systemen)**.** Man unterscheidet dynamische Systeme in lineare und nicht-lineare Systeme:

1. *Lineares dynamisches System*: $\phi(t,\cdot)\colon X \to X$ ist linear. Man schreibt dann auch $\phi(t,x) = \phi(t)x$. Dabei ist $\phi(t)$ ein linearer Operator für alle $t \in T$

2. *Nichtlineares dynamisches System*: $\phi(t,\cdot)\colon X \to X$ ist nicht linear.

Definition 1.1.3 (Phasendiagramm)**.** Durch ein dynamischen Systems (X, ϕ) wird jedem Zustand $x \in X$ ein *Orbit* zugeordnet:

$$\Gamma_x := \{\, y \in X \,|\, \exists t \in T : \phi(t,x) = y\}$$

Ein *Phasendiagramm* ist die Skizze des Orbits Γ_x für einige $x \in X$.

Bemerkung Durch jeden Punkt $x \in X$ verläuft genau ein Orbit Γ_x. Insbesondere können sich Orbits nicht traversal (selbst) schneiden.

1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung ϕ

Die Flussabbildung genügt folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x \in X : \phi(0,x) = x$

2. $\phi(\cdot, x)$ ist stetig für alle $x \in X$.

3. $\phi(t,\cdot)$ ist stetig für alle $t \in T$.

4. $\phi(t,\cdot)\colon X \to X$ ist ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und Umkehrabbildung ist stetig)

5. $\phi(s+t,x) = \phi\left(s, \phi(t,x)\right)$ für alle $s,t \in T,\ x \in X$

1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme können auch implizit angegeben werden. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dynamischen Systeme für diese Vorlesung vorgestellt.

1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)

GDG-Systeme sind ein Beispiel für kontinuierliche dynamische Systeme. Betrachtet man eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld ist. Durch das zugehörige AWP $x(0) = x_0$ wird die Lösung $x(t) = \phi(t, x_0)$ festgelegt, falls v hinreichende Struktur besitzt. Falls v beispielsweise lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. Dies induziert ein dynamisches System (X, ϕ), wobei $X = \mathbb{R}^n$, bzw. X das Definitionsgebiet des Vektorfeldes ist.

Lemma 1.2.1. *Die durch dieses AWP induziert ϕ genügt den Eigenschaften einer Flussabbildung*

Beweis Sei $\phi(t, x)$ die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$. D.h. $x(t) = \phi(t, x)$ ist die eindeutige Lösung des zugehörigen AWP $x(0) = x_0$. Folglich ist $\phi(t + s, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung für alle $s \in \mathbb{R}$, denn:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t + s, x_0) = v\big(\phi(t + s, x_0)\big)$$

Aber $\phi(t + s, x_0)|_{t=0} = \phi(s, x_0)$ ist die Anfangsbedingung dieser Lösung. Also löst $\phi(t + s, x_0)$ das AWP $x(0) = \phi(s, x_0)$. Deswegen gilt $\phi(t + s, x_0) = \phi\left(t, (\phi(s, x_0)\right)$

1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)

Betrachte einen Homöomorphismus $\psi\colon X \to X$. Dieser induziert ein diskretes dynamisches System wie folgt:

$$\phi(k, x) := \begin{cases} \psi^k(x), & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \psi^0(x) = x, & \text{falls } k = 0 \\ \psi^{-k}(x) := (\psi^{-1})^{-k}(x), & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

ϕ ist damit die Flussabbildung eines diskreten dynamischen Systems (X, ϕ).

1.3 Gleichgewichtspunkte

Definition 1.3.1. Ein Punkt $x_G \in X$ heißt *Gleichgewichtszustand(-punkt)* des dynamischen Systems (X, ϕ), falls gilt

$$\forall t \in T : \phi(t, x_G) = x_G$$

1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen

Sei x_G ein Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induzierte dynamischen Systems. Dann gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_G) = x_G$$

Differenzieren liefert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t, x_G) = 0$$

Somit liegt jeder Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems in der Nullstellenmenge des Vektorfeldes v.

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt } \Leftrightarrow x_G \in v^{-1}(\{0\})$$

1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen

Sei ψ ein Homöomorphismus. Sei (X, ϕ) das durch ψ induzierte dynamische System. Somit muss für jeden Gleichgewichtspunkt x_G des dynamischen Systems gelten:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi(k, x_G) = \psi^k(x_G) = x_G$$

Für $k = 1$ folgt $x_G = \psi(x_G)$. Also sind alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems Fixpunkte von ψ.

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt } \Leftrightarrow x_G \text{ Fixpunkt von } \psi$$

1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen

Im linearen Fall ist für beide Typen GDG- bzw. Hom-Systeme ein trivialer Gleichgewichtspunkt $x_G = 0$ gegeben.

1. GDG-System: Gegeben sei die Differentialgleichung

   $$\dot{x} = v(x) = Ax,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in \mathbb{R}^n$$

   Dann ist die Flussabbildung gegeben durch $\phi(t,x) = \exp{(tA)}x$. Zur Wiederholung: Die exponential Matrix ist definiert durch $\exp{(A)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ und konvergiert für jedes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gleichmäßig.

   Die Bedingung ein Gleichgewichtspunkt zu sein ist $\phi(t,x) = 0$. Also erfüllt $x_G = 0$ trivialer weise dieser Bedingung.

2. Hom-System: Sei ψ eine lineare Funktion, also

   $$\psi(x) = Ax,\ A \in \mathbb{R}^{n\times},\ x \in \mathbb{R}^n$$

   Damit ψ ein Homöomorphismus wird, muss $\det{(A)} \neq 0$ gelten. Die Bedingung für ein Gleichgewichtspunkt ist diesesmal

   $$\psi(x) = x$$

   $x_G = 0$ erfüllt dies Bedingung und ist daher ein Gleichgewichtspunkt.

1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten

Gleichgewichtspunkte des DGD-Systems Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = x - x^3 = v(x),\ x \in \mathbb{R} = X$ Die Gleichgewichtspunkte sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x) &= x - x^3 = 0 \\ &= x(1-x^2) = 0 \\ \Rightarrow x_G^1 = 0, x_G^{2/3} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Gleichgewichtspunkte des Hom-Systems Betrachten den Homöomorphismus $\psi(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$. Die Gleichgewichtspunkte des von ψ induzierten dynamischen Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi(x) = x \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x &= 0 \\ x_G^1 = 0, x_G^{2/3} &= \pm 1 \end{aligned}$$

1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, $x_G \in X$ ein Gleichgewichtspunkt, (X, d) ein metrischer Raum.

Wiederholung: d heißt Metrik auf X, falls $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ und für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.4.1. Ein Gleichgewichtspunkt x_G heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X, t \in T, t > 0 : d(x, x_G) < \delta \Rightarrow d\left(\phi(t, x), x_G\right) < \varepsilon$$

- *instabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G nicht stabil ist.
- *asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G stabil ist und gilt

$$\exists b > 0\ \forall x \in X : d(x, x_G) < b \Rightarrow \lim_{t \to \infty} d\left(\phi(t, x), x_G\right) = 0$$

1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov

Indirekte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1-Vektorfeld ($v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von v erzeugten GDG-Systems. Es bezeichne $\sigma(A)$ die Menge aller Eigenwerte der Matrix A.

Lemma 1.4.1. *Betrachte die Jacobi-Matrix $J_v(x)$ an der Stelle $x = x_G$.*

- *Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda < 0$, dann ist x_G asymptotisch stabil.*
- *Falls $\exists \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda > 0$, dann ist x_G instabil.*

- *Falls v ein lineares dynamisches System induziert und es gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \mathrm{Re} \leq 0 \textit{ und } \lambda \textit{ halb einfach, falls } \mathrm{Re}\,\lambda = 0$$

dann ist x_G stabil. Dabei ist ein Eigenwert λ halb einfach*, falls seine geometrische Vielfachheit, seiner algebraischen Vielfachheit entspricht.*

Indirekt Methode von Lyapunov für Hom-Systeme

Sei ψ ein C^1-Homöomorphismus (C^1-Diffeomorphismus), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten Hom-Systems.

Lemma 1.4.2. *Betrachte die Jacobi-Matrix von ψ an der Stelle x_G*

- *Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| < 1$, dann ist x_G asymptotisch stabil*
- *Falls $\exists \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| > 1$, dann ist x_G instabil.*
- *Falls ψ ein lineares dynamisches System erzeugt und gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| \leq 1 \textit{ und } \lambda \textit{ halbeinfach, falls } |\lambda| = 1$$

dann ist x_G stabil.

1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov

Direkte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1-Vektorfeld, x_G ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 1.4.2. Eine *(strikte) Lyapunov-Funktion V* ist eine Funktion $V \in C^1(U, \mathbb{R})$, sodass $x_G \in U,\ U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

1. $V(x_G) = 0$
2. $\forall x \in U \setminus \{x_G\} : V(x) > 0$
3. $\forall x \in U : \langle \nabla V(x), v(x) \rangle \overset{(<)}{\leq} 0$
   $(\Rightarrow \partial_t V(\phi(t,x)) = \langle \nabla V(\phi(t,x)), v(\phi(t,x)) \rangle \overset{(<)}{\leq} 0)$

Lemma 1.4.3. *Falls eine Lyapunov-Funktion für v um x_G existiert dann ist x_G stabil. Gilt strikte Ungleichheit in* (3)*, dann ist x_G sogar asymptotisch stabil.*

Bemerkung Falls $U = \mathbb{R}^2$ und V eine strikte Lyapunov-Funktion zu x_G, dann ist x_G global asymptotisch stabil.

Beweis Fall " $\leq$ " :
Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $\overline{B_\varepsilon(x_G)} \subset U$. Sei m das Minimum von V auf $\partial B_\varepsilon(x_G)$. Dies existiert, da $\partial B_\varepsilon(x_G)$ kompakt und V stetig (Satz von Weierstraß). Dann folgt mit Bedingung 1), 2) : $m > 0$.
Definiere $\tilde{U} := \{x \in B_\varepsilon(x_G) \mid V(x) < m\} \neq \emptyset$ offen. ($x_G \in \tilde{U}$ und insbesondere ex. $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_G) \subset \tilde{U}$, wie auch in jedem anderen Punkt von $\tilde{U}$).
$x_0 \in \tilde{U} \Rightarrow V(x_0) < m$ und damit $V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m$

$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \notin \partial B_\varepsilon(x_G)\ \forall t \geq 0$

$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \in B_\varepsilon(x_G)$

$\Rightarrow x_G$ ist Lyapunov-stabil

Beispiel $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

- Gleichgewichtspunkte:

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0, x = 0 \ \vee x = \pm 1$$

$$\Rightarrow x_G^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_G^{2/3} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Konstruktion einer Lyapunov Funktion
  $II \cdot y - I \cdot x$

$$-x\dot{y} + y\dot{y} = -x^3 y = -x^3 \dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(-0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 = C$$

Dann ist

$$V(x,y) = -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 - C$$

eine Lyapunov-Funktion für jedes $x_G^i, (i = 1,2,3)$ bei geeigneter Wahl von C, denn

- $V(x_G^i) = 0$ mit $C = 0$ für x_G^1 und $C = -0,25$ für $x_G^{2/3}$
- $\langle \nabla V(x,y), v(x,y) \rangle = 0$
  $\nabla V(x,y) = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $HV(x,y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  $HV(x_G^1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow x_G^1$ ist Sattelpunkt von V
  $HV(x_G^{2/3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pos. definit $\Rightarrow x_G^{2/3}$ sind strikte lokale Minima von $V \Rightarrow V > 0$ für alle $x \neq x_G^{2/3}$ in einer gewissen Umgebung von $x_G^{2/3}$.
  $\Rightarrow x_G^{2/3}$ sind Lyapunov-stabil.
  $Jv(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv(x_G^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$
  $\Rightarrow Re(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow$ indirekte Methode: x_G^1 ist instabil

Direkte Methode für Hom-Systeme

Direkte Methode von Lyapunov funktioniert entsprechend des GDG-Falls wobei in der Definition einer Lyapunov-Funktion die Bedingng 3) zu ersetzen ist durch:

$$\forall x \in U : V(\Psi(x)) \overset{(<)}{\leq} V(x)$$

wobei Ψ der erzeugende Homöomorphismus des Hom-Systems sei.

2 Lineare Systeme

2.1 GDG-Fall

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax =: v(x)$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *Systemmatrix*

Satz 2.1.1 (Jordannormalform von A)**.** *Es existiert eine invertierbare lineare Transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass*

$$J = T^{-1}AT$$

in Jordan-Normalform ist. Es gilt außerdem

$$e^{Jt} = e^{T^{-1}AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(T^{-1}AT)^j = T^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}A^jT = T^{-1}e^{At}T$$

Dabei ist J die Matrix der Flußabbildung des J-Systems $\dot{\xi} = J\xi$*, A die Matrix des* A-Systems $\dot{x} = Ax$

Terminologie Man sagt, dass das J- und das A-*System* bezüglich der linearen Transformation T zueinander *konjugiert* oder *äquivalent* sind.

Bemerkung T bildet die Orbits des J-Systems bijektiv auf die Orbits des A-Systems ab. Sei dazu $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Orbits durch ξ

$$\begin{aligned} e^{Jt}\xi &= T^{-1}e^{At}T\xi \\ \Leftrightarrow Te^{Jt}\xi &= e^{At}T\xi = e^{At}x \end{aligned}$$

T bildet den Orbit durch ξ des J-Systems auf den Orbit durch $x = T\xi$ des A-Systems ab. Daher klassifiziert man lineare Differentialgleichungen modulo einer linearen Transformation T.

Beispiele von Phasendiagrammen

$n = 1$

$$\dot{x} = ax, \qquad a \in \mathbb{R}$$

3 Typen in Abhänigkeit von a:

- $a = 0 \Rightarrow$ alle Punkte sind Gleichgewichtspunkte
- $a > 0 \Rightarrow x = 0$ ist eine Quelle
- $a > 0 \Rightarrow x = 0$ ist eine Senke

$n = 2$

$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

- A habe EW $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ halbeinfach und Jordannormalform $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2 \end{cases}$$

  - $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \xi_1(t) &= \xi_{10} e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) &= \xi_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

    $\xi_{10}, \xi_{20} \in \mathbb{R}$ beliebig
    Elimination von t:
    $(\xi_{10} \neq 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1}{\xi_{10}} &= e^{\lambda_1 t} \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right) &= \lambda_1 t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right) \\ \Rightarrow \xi_2 = \xi_{20} \exp\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right)\right) &= \xi_{20} \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \end{aligned}$$

    $x = 0$ ist instabiler Knoten 2. Art

- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
  $x = 0$ ist stabiler Knoten 2. Art
- $0 < \lambda_1 = \lambda_2$
  $x = 0$ ist instabiler Knoten 1. Art
- $\lambda_1 = \lambda_2 <$
  $x = 0$ ist stabiler Knoten 1. Art
- $\lambda_1 < 0 \lambda_2$ $x = 0$ ist Sattelpunkt