

1 QCD × dark QCD

Das Verhalten der QCD-Kopplungskonstanten ist im Standardmodell allein nicht im Stande ein asymptotic safety Szenario zu entwickeln, wie in Abschnitt ?? gezeigt wird. Durch die Erweiterung der QCD um eine weitere Eichgruppe, die dark QCD, ergeben sich qualitativ völlig neue Möglichkeiten im Hochenergieverhalten der Kopplungskonstanten.

1.1 Die Standardmodell QCD

Im Standardmodell wird die QCD durch die Symmetriegruppe $SU(N_c)$ dargestellt, unter der sich die Quarks in der *fundamentalen Darstellung* und die Gluonen in der *adjungierten Darstellung* transformieren. Im SM gibt es $N_{\text{Flavour}} = 6$ verschiedene Quarkflavour und $N_{\text{Colour}} = 3$ Colours, da die QCD Flavour-Blind ist, d.h. da die Wechselwirkung unabhängig von der Flavour-Quantenzahl ist, ist die Erweiterung auf N_c Colour und n_f Flavour jedoch trivial. Die Lagrangedichte kann als

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_i^f \left(i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ij} - g_1 \gamma^\mu t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A - m_f \delta_{ij} \right) \psi_j^f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \quad (1)$$

geschrieben werden [?]. Dabei stellt ψ_b^f ein Quarkfeld mit Colour i und Flavour $f \in \{1, 2, \dots, n_f\}$ und mit der Masse m_f dar, g_1 ist die Kopplungskonstante der QCD. Die Indizes $i, j \in \{1, 2, \dots, N_c\}$ gehören zur fundamentalen Darstellung, während $A \in \{1, 2, \dots, N_c^2 - 1\}$ zur adjungierten Darstellung gehört. Man nennt $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_c})^T$ ein Colour-Multiplett¹ unter der fundamentalen Darstellung, wenn es unter Anwendung der $SU(N_c)$ gemäß

$$\psi(x) \longrightarrow \underbrace{U(x)}_{\in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x) U(x)^\dagger \quad (2)$$

transformiert. Die Gluonfelder \mathcal{A}_μ^A mit Erzeugern $t^A \in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}$ transformieren dagegen in der adjungierten Darstellung [?]

$$t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A(x) \longrightarrow U(x) t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A(x) U(x)^\dagger - i(\partial_\mu U(x)) U(x)^\dagger \quad . \quad (3)$$

Die Dynamik und Propagation der Gluonen wird dabei durch den Feldstärketensor vermittelt,

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g f^{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C \quad , \quad [t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C \quad . \quad (4)$$

¹Der Flavour-Index f wird ab jetzt weggelassen.

Versucht man die QCD im Feynmanformalismus zu quantisieren, werden außerdem Eichfixierung und Faddeev-Popov-de-Witt Ghosts benötigt [?], diese können jedoch nach der Modellbildung hinzugefügt werden, sodass sie hier nicht auftauchen.

1.2 Dark QCD

In [?] wird die dQCD eingeführt, um die DM Massendichte Ω_{DM} im Universum zu erklären. Dazu wird das Niederenergieverhalten der neu eingeführten Kopplungskonstanten g_2 auf die Confinement Scale Λ_{dQCD} untersucht, die analog zur QCD Confinement Scale Λ_{QCD} die Größenordnung der Baryonmasse bestimmt. Die Theorie ist aber, ebenfalls analog zur QCD, auch bis zu beliebig hohen Energieskalen anwendbar und soll hier auf ihr Hochenergieverhalten untersucht werden.

Die Lagrangedichte der dQCD kann analog zu (1) als

$$\mathcal{L}_{\text{dQCD}} = \bar{\xi}_r^f \left(i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{rs} - g_2 \gamma^\mu \tilde{t}_{ts}^M \tilde{\mathcal{A}}_\mu^M - \tilde{m}_f \delta_{rs} \right) \xi_s^f - \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}^M \tilde{F}^{M\mu\nu} \quad (5)$$

definiert werden. Die Fermionen ξ^f der dQCD sollen in der fundamentalen Darstellung der $SU(N_d)$ sein, entsprechend laufen die Indizes $r, s \in \{1, 2, \dots, N_d\}$ und $f \in \{1, 2, \dots, n_{f_d}\}$, während die Felder der Eichbosonen $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^M$ wieder in der adjungierten Darstellung transformieren, $M \in \{1, 2, \dots, N_d^2 - 1\}$, der Feldstärketensor $\tilde{F}_{\mu\nu}^M$ wird wie in (4) definiert. Wie sich in Abschnitt ?? zeigen wird, begünstigt eine hohe Teilchenzahl die auftretenden Fixpunkte dahingehend, dass sie betragsmäßig kleiner werden und somit unter perturbative Kontrolle kommen, ohne ihr UV-attraktives Verhalten zu verlieren, wie es bei einer Theorie mit ausschließlich Fermionen der Fall wäre. Skalare ϕ^f und χ^f unter der QCD bzw. dQCD können über

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^S = \left(\left[i\delta_{ji} \partial_\mu - g_1 t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A - \frac{1}{2} (m_f^S)^2 \delta_{ji} \right] \phi_i^f \right)^\dagger \left(\left[i\delta_{ji} \partial^\mu - g_1 t_{ji}^A \mathcal{A}^{A\mu} - \frac{1}{2} (m_f^S)^2 \delta_{ji} \right] \phi_i^f \right) \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{\text{dQCD}}^S = \left(\left[i\delta_{sr} \partial_\mu - g_2 \tilde{t}_{sr}^M \tilde{\mathcal{A}}_\mu^M - \frac{1}{2} (\tilde{m}_f^S)^2 \delta_{sr} \right] \chi_r^f \right)^\dagger \left(\left[i\delta_{sr} \partial^\mu - g_2 \tilde{t}_{sr}^M \tilde{\mathcal{A}}^{M\mu} - \frac{1}{2} (\tilde{m}_f^S)^2 \delta_{sr} \right] \chi_r^f \right) \quad (7)$$

eingeführt werden (vgl. [?]). Der Flavour-Index f läuft wieder über alle n_{s_c} QCD Skalare bzw. alle n_{s_d} dQCD Skalare. Die Colour-Indizes i, j und r, s über alle N_c Colours bzw. N_d dark Colours.

Bis zu diesem Punkt sind die QCD und dQCD voneinander unabhängig, in dem Sinne, dass es keine zusammenhängenden Feynmangraphen gibt, in denen Teilchen des QCD- und dQCD-Sektors gleichzeitig auftreten. Um dies zu ermöglichen wird ein joint-Sektor eingeführt, Teilchen die unter beiden Symmetriegruppen geladen sind und somit an \mathcal{A}_μ^C

und $\widetilde{\mathcal{A}}_\mu^C$ mit der entsprechenden Kopplungskonstanten koppeln [?]. Unter der Annahme, dass sie ebenfalls in den fundamentalen Darstellungen beider Symmetriegruppen transformieren, können die entsprechenden Teile der Lagrangedichte als

$$\mathcal{L}_{\text{joint}} = \bar{\zeta}_{ir}^f \left(i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ij} \delta_{rs} - g_1 \gamma^\mu t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A \delta_{rs} - g_2 \gamma^\mu \widetilde{t}_{rs}^M \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^M \delta_{ij} - m_f^{\text{joint}} \delta_{ij} \delta_{rs} \right) \zeta_{js}^f \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_{\text{joint}}^S = \left(\left[i\delta_{ji} \delta_{sr} \partial_\mu - g_1 t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A \delta_{sr} - g_2 \widetilde{t}_{sr}^M \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^M \delta_{ji} - \frac{1}{2} \left(m_f^{\text{joint}} \right)^2 \delta_{ji} \delta_{sr} \right] \eta_{ir}^f \right)^\dagger \quad (9)$$

$$\left(\left[i\delta_{ji} \delta_{sr} \partial_\mu - g_1 t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A \delta_{sr} - g_2 \widetilde{t}_{sr}^M \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^M \delta_{ji} - \frac{1}{2} \left(m_f^{\text{joint}} \right)^2 \delta_{ji} \delta_{sr} \right] \eta_{ir}^f \right) \quad (10)$$

geschrieben werden. Dabei laufen die Indizes $i, j \in \{1, 2, \dots, N_c\}$, $r, s \in \{1, 2, \dots, N_d\}$ und $f \in \{1, 2, \dots, n_{fc}\}$ für die Fermionen ζ bzw. $f \in \{1, 2, \dots, n_{sc}\}$ für Skalare η .

In [?] zeigt Weinberg, dass durch die Reskalierung zu einer Energieskala μ alle Massen m gemäß m/μ skalieren und im Grenzwert hoher Energien gegen Null gehen. Entsprechend ist es bei der Untersuchung von UV-Fixpunkten zulässig, alle Massen gleich Null zu setzen.

Die bisher beschriebenen Lagrangedichten beinhalten ausschließlich Eichwechselwirkungen, es gibt jedoch weitere Arten von Wechselwirkungen bei denen keine Eichfelder beteiligt sind, 3-Skalar-Kopplungen, 4-Skalar-Kopplungen und Yukawa-Kopplungen. Im Folgenden wird kurz begründet, warum diese drei Arten der Kopplung im weiteren Verlauf der Arbeit nicht betrachtet werden.

Yukawa-Kopplung: Es gibt zwei Möglichkeiten eine lorentzinvariante Struktur der Yukawa-Terme zu erreichen. Dazu ist es hilfreich von Dirac-Fermionen ψ zu Weyl-Fermionen ψ_L und ψ_R überzugehen. Im Kern lassen sich die zwei Terme

$$\psi_R^\dagger \psi_L + \text{h.c.} \quad \text{und} \quad \psi_{L/R}^T \epsilon \psi_{L/R} + \text{h.c.} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

hinschreiben [?], dabei können auch einzelne $\psi_{L/R}$ durch $\xi_{L/R}$ oder $\zeta_{L/R}$ ersetzt werden. Diese Terme sind von Dirac- bzw. Majorana-Massen bekannt, und da für eine Yukawa-Kopplung lediglich ein skalares Feld hinzukommt ändert sich die Lorentzstruktur dadurch nicht. Es ist nun möglich, aus der Eichinvarianz Bedingungen an die Yukawa-Kopplungen zu erhalten [?][?]. Dazu wird exemplarisch der Yukawa-Term

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \subset Y^{ir,js,kt} \zeta_{ir} \underline{\zeta}_{js} \underline{\eta}_{kt} \quad (12)$$

untersucht. Der linke Index steht dabei jeweils für die $SU(N_c)$, der rechte für die $SU(N_d)$. Der ein- bzw. zweifache Unterstrich hilft lediglich die Terme im Endergebnis zu identifizieren, sodass dieses leicht an andere Yukawa-Terme angepasst werden kann. Außerdem wurde die Lorentzstruktur nicht mehr geschrieben. Die

Felder transformieren unter der kombinierten Eichgruppe gemäß

$$\zeta_{ir} \longrightarrow (\mathbb{1}_{il} + i\epsilon^A t_{il}^A) (\mathbb{1}_{ru} + i\delta^M \tilde{t}_{ru}^M) \zeta_{lu} \quad , \quad \eta_{ir} \text{ analog} \quad , \quad (13)$$

daraus folgt für die Invarianz von (12) in Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^A)$ bzw. $\mathcal{O}(\delta^M)$

$$Y^{lr,js,kt}(\mathbb{1}t_{li}^A) + Y^{ir,ms,kt}(\mathbb{1}t_{mj}^A) + Y^{ir,js,nt}(\mathbb{1}t_{nk}^A) \stackrel{!}{=} 0 \quad (14)$$

$$Y^{iu,js,kt}(\mathbb{1}\tilde{t}_{ur}^M) + Y^{ir,jv,kt}(\mathbb{1}\tilde{t}_{vs}^M) + Y^{ir,js,kw}(\mathbb{1}\tilde{t}_{wt}^M) \stackrel{!}{=} 0 \quad . \quad (15)$$

Eine Berechnung über Young-Tableaux [?] zeigt, dass nur zwei Arten von Yukawa-Kopplungen mit einer Majorana-artigen Lorentzstruktur invariant sein können, Kopplungen innerhalb eines Sektors,

$$Y^{i,j,k} \psi_i \psi_j \phi_k + \tilde{Y}^{r,s,t} \xi_r \xi_s \chi_t + Y^{ir,js,kt} \zeta_{ir} \zeta_{js} \eta_{kt} + \text{h.c.} \quad , \quad (16)$$

und Kopplungen die je ein QCD- dQCD- und joint-Teilchen beinhalten,

$$Y^{i,r,js} \psi_i \xi_r \eta_{js}^* + \text{h.c.} \quad (17)$$

Mit dem Ansatz $Y^{i,j,k}$ antisymmetrisch in $i \leftrightarrow j$ und symmetrisch in $i \leftrightarrow k$ im ersten Term von (16) wird (14) zu

$$t_{ii}^A + t_{jj}^A + t_{kk}^A = 0 \quad \text{mit} \quad i \neq j \neq k \quad , \quad (18)$$

was genau für eine $SU(3)$ als $\text{Spt}^A = 0$ gültig ist. Da in dieser Arbeit das Hauptinteresse im Verhalten der Fixpunkte in Abhängigkeit von der Eichgruppe liegt, ist es nicht sinnvoll Yukawa-Terme zu berücksichtigen, die nur in drei von beliebig vielen $SU(N_c) \times SU(N_d)$ Eichgruppen erlaubt sind. Sinnvoller wäre es hier, den Fall $SU(3) \times SU(3)$ gesondert auf Yukawa-Beiträge zur β -Funktion zu untersuchen. Außerdem wird sich zeigen, dass es kein qualitativ neues UV-Verhalten gibt, dass nicht allein von Skalaren oder Fermionen hervorgerufen werden kann, sodass in Abschnitt ?? immer nur QCD-Fermionen (SM Quarks) mit dQCD/joint-Fermionen oder dQCD/joint-Skalaren betrachtet werden. Für den Term (17) folgt aus (14) und (15) für die Colour-Struktur der Yukawa-Kopplung

$$Y^{i,r,js} \propto \delta^{ij} \delta^{rs} \quad (19)$$

4-Skalar-Kopplung: Korrekturen durch 4-Skalar-Kopplungen tragen erst ab 3-Schleifen Ordnung zur β -Funktion der Eichkopplungen bei [?], da in dieser Arbeit jedoch nur 2-Schleifen β -Funktionen betrachtet werden, müssen sie nicht berücksichtigt werden.

3-Skalar-Kopplung: Da die Skalare und die entsprechenden Fermionen das gleiche

Verhalten unter den Symmetriegruppen haben, können in (??) und (??) die Fermionen durch die entsprechenden Skalare ersetzt werden und müssen aus den selben Gründen wie die Yukawa-Terme wegfallen. Die einzigen Terme, die kein Yukawa-Analogon besitzen, sind

$$\mathcal{L}_{3\text{-Skalar}} = \lambda_1 \phi^3 + \lambda_2 \chi^3 + \lambda_3 \eta^3 \quad , \quad (20)$$

sodass hier die Kombination $N \otimes N \otimes N$ auftaucht. Die Berechnung über Yang-Tableaus zeigt, dass es für $N = 3$ möglich ist ein Singlett zu erhalten, aus den folgenden Gründen werden diese 3-Skalar-Kopplungen jedoch nicht weiter berücksichtigt. Da untersucht werden soll, wie sich das UV-Verhalten der Eichkopplungen in Abhängigkeit verschiedener Parameter, insbesondere bei Variation von N_d , ändert, ist es sinnvoll, die Lagrangedichte nicht zwischenzeitlich zu verändern, damit die Ergebnisse miteinander vergleichbar sind. Außerdem werden diese Terme durch Eichsymmetrien verboten, sobald die SM $SU(2) \times U(1)$ in die Theorie integriert wird.