1 Untersuchung einer β-Funktion

An Gleichung **??** erkennt man, dass die β-Funktion einer QFT eine Seite eines Systems N gekoppelter, gewöhnlicher, nichtlinearer Differentialgleichungen der Form

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_k(\mu) = P_k^{M_L}(g_1, \ldots, g_N) =: \beta_k(g_1, \ldots, g_N), \quad k = 1, \ldots, N \tag{1}$$

ist. Dabei stellt jedes P_k ein Polynom maximal M_L-ten Grades in den Kopplungskonstanten dar. Der Grad des Polynoms hängt nur von der Ordnung der Störungstheorie ab, im Bild von Feynmangraphen entspricht dies der maximalen Anszahl L von Quantenschleifen, die in der Berechnung berücksichtigt werden. Hier ist es naheliegend, das DGL-System als Problem im $\mathbb{R}^N$ zu betrachtet. Mit $g := (g_1, \ldots, g_N)^{\mathrm{T}}$ und $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_N)^{\mathrm{T}}$ lässt sich (1) auch als

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = \beta(g) \tag{2}$$

schreiben. Dann heißt $\mathbb{R}^N$ auch der Phasenraum der β-Funktion.

Definition 1.1. Eine *Trajektorie im Phasenraum* ist eine Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}^N$, die die Gleichung (2) löst.
Ein *Fixpunkt der β-Funktion* ist ein Punkt $g^* \in \mathbb{R}^N$, für den $\beta(g^*) = 0$ gilt.

Damit eine QFT physikalisch sinnvoll ist, muss sie Vorhersagen für alle Energieskalen machen können. Um eine auch für hohe Energieskalen μ gültige Theorie zu beschreiben muss demnach der Wert $\lim_{\mu\to\infty} g(\mu)$ existieren, ebenso muss der Wert $\lim_{\mu\to 0} g(\mu)$ existieren, wenn die Theorie auch für niedrige Energieskalen gültig sein soll. Damit die Grenzwerte existieren muss $\lim {}^{\mathrm{d}}\!/\!_{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = 0$ sein, es sind also gerade die Fixpunkte der β-Funktion, die als Grenzwerte in Frage kommen.

Im Laufe der Untersuchung der β-Funktion haben sich die folgenden Bezeichnungen entwickelt.

Gaußscher Fixpunkt: Ist der Punkt $g^* = 0$ ein Fixpunkt der β-Funktion, so spricht man von einem Gaußschen Fixpunkt.

Banks-Zaks Fixpunkt: Ein Fixpunkt $g^* \neq 0$, der physikalsich sinnvoll und perturbativ ist, heißt Banks-Zaks oder Caswell-Banks-Zaks Fixpunkt.

Landau Pol: Besitzt die Lösung des Problems (2) mit Anfangswert $g(\mu_0) = g_0$ eine Polstelle $\mu_{\mathrm{Pol}} < \infty$, sodass $g(\mu) \xrightarrow{\mu\to\mu_{\mathrm{Pol}}} \infty$, dann spricht man von einem Landau-Pol.

1.1 Vereinfachung des mathematischen Problems

Die Berechnung einer Trajetkorie als Lösung zum Anfangswertproblem (2) mit Anfangswert $g(\mu_0) = g_0$ ist in der Regel analytisch nicht möglich. Durch einige einfache Schritte lässt sich das Problem jedoch zunächst in eine einfacher zuhandhabende Form überführen und sich das Verhalten in der Nähe eines Fixpunktes vorhersagen.

In [3] schlägt S. Weinberg die Einführung der dimensionslosen Kopplungskonstanten

$$\bar{g}_i(\mu) := \mu^{-d_i} g_i(\mu) \tag{3}$$

vor, wobei d_i die Massendimension der Kopplungskonstanten g_i ist. Bei der Untersuchung der QCD×dQCD-β-Funktion wird klar, dass die Erweiterung

$$\alpha(\mu)_i := \mathcal{N}\left(\mu^{-d_i} g_i(\mu)\right)^n \tag{4}$$

den Grad M_L der β-Funktion verringern kann und somit das Problem weiter vereinfacht (vgl. [2], [4]). Dabei dient $\mathcal{N}$ als Normierungskonstante, die insbesondere von dimensionslosen Größen wie Teilchenzahlen oder Größen der Symmetriegruppe abhängen kann.

Beispiel 1.2. Für ein eindimensionales Problem

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = X g(\mu)^3 + Y g(\mu)^5 \tag{5}$$

und für den einfachen Fall $[g] = 0$ definiere

$$\alpha(\mu) = \mathcal{N} g(\mu)^2 \quad . \tag{6}$$

Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} = \mathcal{N} 2g \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu} g = \frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} \tag{7}$$

und damit

$$\frac{1}{2\mathcal{N}} \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = X g(\mu)^4 + Y g(\mu)^6 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2\mathcal{N}} \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = \frac{X}{\mathcal{N}^2} \alpha(\mu)^2 + \frac{Y}{\mathcal{N}^3} \alpha(\mu)^3 \tag{9}$$

$$\Rightarrow \qquad \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = \tilde{X} \alpha(\mu)^2 + \tilde{Y} \alpha(\mu)^3 \tag{10}$$

mit $\tilde{X} = 2X\mathcal{N}^{-1}$ und $\tilde{Y} = 2Y\mathcal{N}^{-2}$.

Naheliegend wird wieder $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^{\mathrm{T}}$ und $\beta(\alpha) = \beta(g \circ \alpha)$ geschrieben.

Der physikalisch sinnvolle Wertebereich für die Energieskala μ ist $(0, \infty)$. Mit der Renormierungsgruppenzeit (RG-Zeit) t, definiert als

$$t(\mu) := \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \Leftrightarrow \mu(t) := e^t \quad , \tag{11}$$

gibt es eine Bijektion $(0, \infty) \xrightarrow{t} (-\infty, \infty)$, die es erlaubt die Kopplungskonstante als

$$\tilde{\alpha}(t) := \alpha\left(e^t\right) = \alpha(\mu) \tag{12}$$

zu schreiben. Der Parameter Λ ist beliebig und hat keine physikalische Bedeutung, er wird später lediglich die Extrapolation der Fixpunkte übersichtlicher gestalten. Es folgt

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = \mu \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\mu}}_{=\mu^{-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{\alpha}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{\alpha}(t) \quad . \tag{13}$$

Damit ist Gleichung (2) äquivalent zu der autonomen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \alpha(t) = \beta(\alpha) \quad , \tag{14}$$

wobei $\tilde{\alpha}$ wieder zu α umbenannt wurde.

1.2 Verhalten in einer Umgebung eines Fixpunktes

Um das Verhalten der Kopplungskonstanten $\alpha(t)$ in der Nähe eines Fixpunktes zu untersuchen wird die Stabilitätsmatrix wie folgt eingeführt.

Definition 1.3. Sei α^* ein Fixpunkt der β-Funktion im $\mathbb{R}^N$ und sei β in α^* zweimal stetig differenzierbar. Die Matrix

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} := \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j}\right)_{1 \leq i, j \leq N} \tag{15}$$

heißt *Stabilitätsmatrix der β-Funktion* [3]. Außgewertet am Punkt α^* ist die Schreibweise $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_{\alpha^*}$ oder kurz $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_{*}$.
Ein Fixpunkt α^* heißt *hyperbolisch*, wenn alle Eigenwerte von $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_{*}$ einen von Null verschiedenen Realteil besitzen [6].

Der Zusammenhang zu der Stabilität des Fixpunktes ist folgendermaßen zu erkennen.

In der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes α^* kann Gleichung (14) durch ihre Linearisierung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) \simeq \left.\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right|_* \left(\alpha(t) - \alpha^*\right) \tag{16}$$

beschrieben werden. Mit den Eigenvektoren[1] $\{e_i\}$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}$ und

$$\alpha(t) - \alpha^* =: \sum_{i=1}^{N} K_i(t) e_i \tag{17}$$

ergibt sich aus (16) für die Koeffizienten $\{K_i\}$ das entkoppelte DGL-System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} K_i(t)e_i + \alpha^*\right) = \left.\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right|_* \sum_{i=1}^{N} K_i(t)e_i \tag{18}$$

$$\overset{\text{Koeffizientenvergleich}}{\Rightarrow} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_i(t) = K_i(t)\lambda_i \tag{19}$$

mit der Lösung

$$K_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t} K_i(0) \tag{20}$$

für $K_i(0) \in \mathbb{R}$ klein. Die Lösung für $\alpha(t)$ lässt sich dann schreiben als

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\lambda_i t} K_i(0) e_i + \alpha^* \quad . \tag{21}$$

Dieses Ergebnis ist unter anderem in [5], [3] und [4] zu sehen. In der Fixpunktumgebung werden nun drei lineare Unterräume unterschieden [6].

1. Die *stabile Mannigfaltigkeit* M_S besteht aus allen Punkten im Phasenraum, die in den Fixpunkt hinein laufen.

2. Die *instabile Mannigfaltigkeit* besteht aus allen Punkten im Phasenraum, die aus dem Fixpunkt heraus laufen.

3. Die *Zentrumsmannigfaltigkeit* besteht aus den restlichen Punkten in der Fixpunktumgebung.

Definition 1.4. Die Menge der in den Fixpunkt hineinlaufenden Kurven heißt *kritische (UV-)Hyperfläche* M_C (critical manifold)[2].

[1] Die Eigenvektoren müssen gegebenenfalls zu einer Basis ergänzt werden.

[2] Bemerkung: M_S, die instabile Mannigfaltigkeit und die Zentrumsmannigfaltigkeit sind nur in einer Umgebung des Fixpunktes definiert, M_C im gesamten Phasenraum. Außerdem werden jedem Fixpunkt eigene Mannigfaltigkeiten und eine eigene kritische Hyperfläche zugeordnet.

Aus Gleichung (21) wird dann klar, dass M_s der durch die Eigenvektoren mit negativem Eigenwert aufgespannte Untervektorraum ist. Ein Eigenvektor mit positivem Eigenwert wird oft auch als IR-attraktiv, mit einem negativen Eigenwert als IR-repulsiv bezeichnet [5]. Da in dieser Arbeit jedoch das UV-Verhalten von Interesse ist, werden die folgenden Bezeichnungen verwendet.

1. Ein Fixpunkt heißt *attraktiver (UV-)Fixpunkt*, wenn $\dim(M_\mathrm{c}) = N$.

2. Ein Fixpunkt heißt *repulsiver (UV-)Fixpunkt*, wenn $\dim(M_\mathrm{c}) = 0$.

3. Falls ein Fixpunkt weder attraktiv noch repulsiv ist, d.h. wenn es sowohl Trajektorien gibt die in ihn hinein-, als auch welche die hinauslaufen, wird er *Sattelpunkt* genannt.

1.3 Sonderfall: nicht hyperbolische Fixpunkte

Bei allgemeinen Betrachtungen (vgl. [5]) wird der nicht hyperbolische Fall $\lambda_i = 0$ oft als unwichtiger Sonderfall nicht weiter betrachtet. Bei der Untersuchung einer konkreten β-Funktion kommt dieser Sonderfall aber auf natürliche Weise schnell zu stande.

Eine dimensionslose Kopplungskonstante $\alpha_1 := \mathcal{N} g_1^2$ muss, damit die physikalische Kopplungskonstante g_1 reell ist, positiv sein. Es muss demnach $\beta_1(\alpha) \geq 0$ auf der gesamten α_1-Achse gelten. Falls es nun einen Fixpunkt $\alpha^* = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^\mathrm{T}$ und es einen Eigenvektor $e_k \in M_\mathrm{s}$ gibt[3], dann folgt aus (19)

$$\beta(K_k(t) e_k) \cdot e_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_k(t) = K_k(t) \lambda_k \tag{22}$$

???

Sein nun also α^* ein Fixpunkt, $\{e_i\}$ die Basis aus Eigenvektoren der Stabilitätsmatrix und der Eigenwert $\lambda_k = 0$, alle anderen $\lambda_i \neq 0$ für $i \neq k$. In zweiter Ordnung gilt

$$\beta_i(\alpha) \simeq \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial \beta_i(\alpha)}{\partial \alpha_m} \left(\alpha_m - \alpha_m^*\right) + \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{N} \left(\alpha_m - \alpha_m^*\right) \frac{\partial^2 \beta_i(\alpha)}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} \left(\alpha_n - \alpha_n^*\right) \quad , \tag{23}$$

sodass für die Koeffizienten $\{K_i\}$ in der $\{e_i\}$-Basis folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_i(t) = \lambda_i K_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left(e_j \cdot \nabla \lambda_i\right) K_i(t) K_j(t) \quad . \tag{24}$$

[3] Dabei soll M_s nicht nur aus der α_1-Achse bestehen. Da M_s ein linearer Unterraum ist, gibt es zumindest eine Linearkombination $\left(\sum_{i=1}^{N} c_i e_i\right) \in M_\mathrm{s}$, die folgende Argumentation kann dann analog geführt werden.

Für alle $\lambda_i \neq 0$ reicht es, die Gleichungen in Ordnung $\mathcal{O}(K_i)$, also (19) zu lösen, für $\lambda_k = 0$ verschwindet jedoch die erste Ordnung, sodass sich als DGL

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left(e_j \cdot \nabla\lambda_k\right) K_k(t) K_j(t) \quad . \tag{25}$$

ergibt. Auf M_s sind $K_i(t) \equiv 0$ für alle i mit $\lambda_i > 0$, sodass die DGL weiter vereinfacht werden kann,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_k(t) \overset{t\to\infty}{\simeq} \frac{1}{2} \left(e_k \cdot \nabla\lambda_k\right) K_k(t)^2 \quad . \tag{26}$$

Die Lösung ist

$$K_k(t) = \frac{1}{K_k(0)^{-1} - \frac{1}{2}\left(e_k \cdot \nabla\lambda_k\right) t} \quad , \tag{27}$$

wird e_k so gewählt, dass $K_k(t) \geq 0$, dann ergibt sich die Bedingung

$$e_k \cdot \nabla\lambda_k < 0 \quad , \tag{28}$$

damit $K_k(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ ohne einen Pol zu passieren, der die Reihenentwicklung der β-Funktion unzulässig machen würde. Falls mehr als ein Eigenwert gleich Null ist, ergibt sich in (25) ein System gekoppelter DGLs.

1.4 Fixpunktextrapolation

Um das UV-Verhalten einer β-Funktion mit den bisher gemessenen Werten für die Kopplungskonstanten im SM vergleichen zu können, ist es notwendig die kritische Hyperfläche eines Fixpunktes auch in einem Bereich zu kennen, der zu groß für eine Taylorentwicklung geringer Ordnung ist. Das auffinden der kritischen Hyperfläche ist insbesondere für höherdimensionale Probleme analytisch kaum möglich und daher eine numerische Aufgabe. Für ein System aus zwei Kopplungskonstanten wird in 3 ein Verfahren vorgestellt. Stehen nun n Messwerte an der selben Renormierungsskala μ_0 zur Verfügung und gibt es einen Punkt $\alpha_0 \in M_\mathrm{c}$ der diese enthält, dann sind alle Kopplungskonstanten $\alpha(\mu)$ bis auf $(\dim(M_\mathrm{c}) - n)$ freie Parameter festgelegt[4] und laufen in den Fixpunkt hinein. Existiert so ein $\alpha_0 \in M_\mathrm{c}$ nicht, kommt der untersuchte Fixpunkt für ein asymptotic safety Szenario nicht in Frage.

[4] Für $n \geq \dim(M_\mathrm{c})$ also eindeutig.

2 Laufende Kopplungen im Standardmodell

Die Eichkopplungen der Starken, Schwachen und Elektromagnetischen Wechselwirkung [1]

2.1 QED

2.2 QCD

3 β-Funktion im $\mathbb{R}^2$

Durch die Erweiterung einer Eichgrupppe G mit Kopplungskonstante g (bzw. α) auf die kombinierte Eichgruppe $G_1 \times G_2$ mit den Kopplungskonstanten g_1 und g_2 (bzw. α_1 und α_2)

3.1 Stabilitätsbedingungen

Für ein System mit zwei Kopplungskonstanten vereinfacht sich die Untersuchung erheblich, da der Phasenraum der $\mathbb{R}^2$ ist und die Eigenwerte von $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ explizit als

$$\lambda_{+/-} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right)^2 - \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}} \tag{29}$$

angegeben werden können. In dem Fall, dass bei α^* ein Eigenwert verschwindet, ist $\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\Big|_* = \lambda_+|_*\lambda_-|_* = 0$ und

$$\lambda_+|_* = \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\Big|_* \qquad \lambda_-|_* = 0 \qquad \text{für } \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\Big|_* \geq 0 \tag{30}$$

$$\lambda_+|_* = 0 \qquad \lambda_-|_* = \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\Big|_* \qquad \text{für } \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\Big|_* \leq 0 \quad . \tag{31}$$

Außerdem

$$\frac{\partial\lambda_{+/-}}{\partial\alpha_i}\Big|_* = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{\lambda_{-/+}}\frac{\partial\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_i}\right]_* \quad , \tag{32}$$

wobei $\lambda_{+/-}|_*$ der verschwindende Eigenwert ist.

3.2 Fixpunktextrapolation

Ein besonderer Vorteil einer Erweiterung $G \to G_1 \times G_2$ ist die Möglichkeit einen UV-Fixpunkt eindeutig extrapolieren zu können, da die kritische Hyperfläche die Dimension $\dim(\alpha^*) = 0$, $\dim(\text{Trajektorie}) = 1$ oder $\dim(\text{Phasenraum}) = 2$ hat. Im ersten Fall, $\dim M_c = 0$ besteht sie nur aus dem Fixpunkt selbst, dieser Fall ist also eher als eine mathematische, triviale Lösung zu betrachten, die keine physikalische Bedeutung im Sinne laufender Kopplungskonstanten hat. Im Fall $\dim M_c = 2$ besteht sie aus dem gesamten Phasenraum. Weil in diesem Fall jede Trajektorie in den Fixpunkt hineinläuft kann keine Vorhersage für die Größen der Kopplungskonstanten gemacht werden, dafür ist aber das

UV-Verhalten von dem Startwert $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$ unabhängig. Der für die Extrapolation interessanteste Fall ist also $\dim M_c = 1$, da die UV-Hyperfläche dann aus zwei Trajektorien $s^{+/-} : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ besteht[5] und deshalb eindeutige Wertepaare $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ vorhersagt. Wenn eine Kopplungskonstante (o.E.) $\alpha_1(t_0)$ bei einer Renormierungsskala t_0 bekannt ist, und unter der Annahme, dass der Fixpunkt für $t \to \infty$ erreicht wird, ist somit auch $\alpha_2(t_0)$ sowie das gesamte Verhalten beider Kopplungskonstanten bekannt.

Für die Extrapolation werden außerdem die folgende Beobachtungen ausgenutzt.

1. Eine Trajektorie, welche in einen Sattelpunkt hineinläuft, ist gleichzeitig eine Separatrix, d.h. sie Teilt den Phasenrau in Gebiete mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten für $t \to \infty$.

2. Ein Sattelpunkt und ein attraktiver Fixpunkt sind mit einer Trajektorie verbunden, ebenso ist ein Sattelpunkt mit einem repulsiven Fixpunkt mit einer Separatrix verbunden, sofern die Fixpunkte existieren und in der Nähe des Sattelpunktes liegen.

Da das gesuchte M_c folglich immer eine Separatrix ist, kann wie folgt verfahren werden. Zunächst werden zwei Gebiete L und R definiert, die zu qualitativ verschiedenen Trajektorien führen. Beispielsweise lassen sich oft Abschätzungen der Art finden: Wenn es ein t_1 gibt mit

$$\alpha_j(t_1) > \max\left\{ \alpha_j^{*i} \middle| \text{alle Fixpunkte } \alpha^{*i} \right\} \quad , \tag{33}$$

dann kann der gewünschte Fixpunkt nicht mehr für $t > t_1$ erreicht werden. Am Fixpunkt wird eine Orthonormalbasis $\{f_1, f_2\}$ gewählt[6] und der Phasenraum in Ebenen mit Abstand ϵ eingeteilt, die nullte Ebene geht dabei durch den Fixpunkt. Rekursiv werden dann

$$s_n^{L/R} = s_{n-1}^{L/R} + \epsilon f_1 + d^{L/R} \delta f_2 \tag{34}$$

definiert. Für festes δ wird $d^{L/R}$ so eingestelle, dass die Trajektorie mit Anfangswert s_n^{L} in den Bereich L hineinläuft, analog für R. Mit $s_0^L := \alpha - \delta/2 f_2$ und $s_0^R := \alpha + \delta/2 f_2$ ergibt sich so ein Schlauch $\left(s_n^L, s_n^R\right)_{n=0,1,\ldots}$ der Breite δ, der die Separatrix beinhaltet.

[5] Jeweils eine in, eine entgegen der Richtung des attraktiven Eigenvektors.

[6] Der Einfachheit halber kann die Basis aus Eigenvektoren oder die $\alpha_{1,2}$-Achsen gewählt werden, sofern dies zu keinen numerischen schwierigkeiten führt.

Zeichenerklärung

- „o.E.“ für ohne Einschränkung.
- „$\simeq$“ für asymptotisch gleich.
  Beispiel 3.1.
  $$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{35}$$
  Für eine Linearisierung von f in der Umgebung von x_0. Für $|(x - x_0)| \to 0$ gilt $\left| f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right) \right| \to 0$ hinreichend schnell.
- „$[]$“ für die Massendimension in natürlichen Einheiten.
- „dim“ für die Dimension eines Vektorraums oder einer Mannigfaltigkeit.
- „diag$(a_1, a_2, \ldots)$“ für eine Diagonalmatrix mit Einträgen $a_1, a_2, \ldots$

Literatur

[1] Quantum chromodynamics. *K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014) and 2015 update.*

[2] Y. Bai and P. Schwaller. Scale of dark qcd. *Phys. Rev. D*, 89:063522, Mar 2014.

[3] S. W. Hawking and W. Israel, editors. *General relativity, An Einstein centenary survey*, The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge CB2 1RP, 1979. Cambridge [u.a.]: Univ. Pr.

[4] D. F. Litim and F. Sannino. Asymptotic safety guaranteed. *arxive*, Jun 2014.

[5] S. Weinberg. Critical phenomena for field theorists. In *Erice Subnucl.Phys.1976:1*, page 1, 1976.

[6] E. Zeidler. Springer-handbuch der mathematik iv. 2013.