

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Matching mit dem Standardmodell</b>	<b>1</b>
1.1	Extrapolation eines Fixpunktes . . . . .	1
1.2	Extrapolation von $\alpha^{*3}$ . . . . .	4
1.3	Extrapolation von $\alpha^{*2}$ . . . . .	6
1.4	Extrapolation von $\alpha^{*4}$ . . . . .	8
	<b>Literatur</b>	<b>9</b>

# 1 Matching mit dem Standardmodell

Abschließend soll nun diskutiert werden, inwieweit die Einführung der dQCD Abweichungen von Standardmodell bewirkt. Sei  $M$  eine charakteristische Massenskala des joint-Sektors. Da diese Teilchen QCD-Ladung tragen, ist  $M > \mathcal{O}(100 \text{ GeV})$ , sonst wären diese in aktuellen Experimenten bereits gefunden worden [3][4]. In [4] und [7] wird das Verhältnis der differentiellen Wirkungsquerschnitte von 3- und 2-Jet Zerfällen als sinnvolle Observable für hochenergie QCD eingeführt und daran argumentiert, dass die *Partonverteilungsfunktionen* (PDF) der neuen Teilchen sowie die Auswirkungen auf die PDFs der SM Teilchen vernachlässigbar sind. Sie zeigen weiter, dass solche Verhältnisse nicht sensitiv auf die Gluon PDF sind und schließen daraus, dass das Laufen von  $\alpha_{\text{QCD}}$  den wichtigsten Einfluss auf solche Observablen hat. Aus diesem Grund wird nun das Laufen von  $\alpha_{\text{QCD}}$  im SM mit  $\alpha_1$  aus der QCD×dQCD verglichen.

Die bisher untersuchten  $\beta$ -Funktionen gelten nur für Energien oberhalb der Massenskala  $M$  der schwersten neuen Teilchen [4]. Man kann nun bis zur Energieskala  $Q$  eine effektive Theorie einführen, bei der schwere Teilchen mit Massen  $m > Q$  ausintegriert werden. Durch dieses Vorgehen ist es möglich, die volle QCD×dQCD bei  $Q$  zu entkoppeln und das bekannte Verhalten der SM QCD zu erhalten [5]. Für das dunkle Materie Szenario berechnen Bai und Schwaller eine Entkopplungsskala von  $Q \gtrsim 500 \text{ GeV}$ . An dem entsprechenden Phasenraumdiagramm in Abbildung 1 ist zu sehen, dass in ihrem Szenario  $\alpha^{*2}$  und  $\alpha^{*3}$  als interessante UV-Fixpunkte in Frage kommen. Als Entkopplungsskala werden die CMS Daten  $Q = 474 \text{ GeV}$  mit  $\alpha_{\text{QCD}}^{\text{exp}}(Q) = 0.0936 \pm 0.0041$  verwendet [6]. Die Entkopplungsskala ist aus theoretischer Sicht beliebig, die Wahl  $Q \approx M$  ist jedoch die üblichste und anschaulichste Wahl. Im Folgenden wird erklärt, wie in einem Modell mit zwei Kopplungskonstanten ein Fixpunkt extrapoliert werden kann, danach wird diese Methode auf einige der gefundenen Modelle angewandt.

## 1.1 Extrapolation eines Fixpunktes

Um das UV-Verhalten einer  $\beta$ -Funktion mit den bisher gemessenen Werten für die Kopplungskonstanten im SM vergleichen zu können, ist es notwendig die kritische Hyperfläche eines Fixpunktes auch in einem Bereich zu kennen, der zu groß für eine Taylorentwicklung geringer Ordnung ist. Das Auffinden der kritischen Hyperfläche ist insbesondere für höherdimensionale Probleme analytisch kaum möglich und daher eine numerische Aufgabe. Stehen nun  $n$  Messwerte an der selben Renormierungsskala  $\mu_0$  zur Verfügung und gibt es einen Punkt  $\alpha_0 \in M_c$  der diese enthält, dann sind alle Kopplungskonstanten  $\alpha(\mu)$  bis auf  $(\dim(M_c) - n)$  freie Parameter festgelegt<sup>1</sup> und laufen in den Fixpunkt hinein. Existiert so ein  $\alpha_0 \in M_c$  nicht, kommt der untersuchte Fixpunkt für ein asymptotic safety Szenario nicht in Frage.

---

<sup>1</sup>Für  $n \geq \dim(M_c)$  also eindeutig.

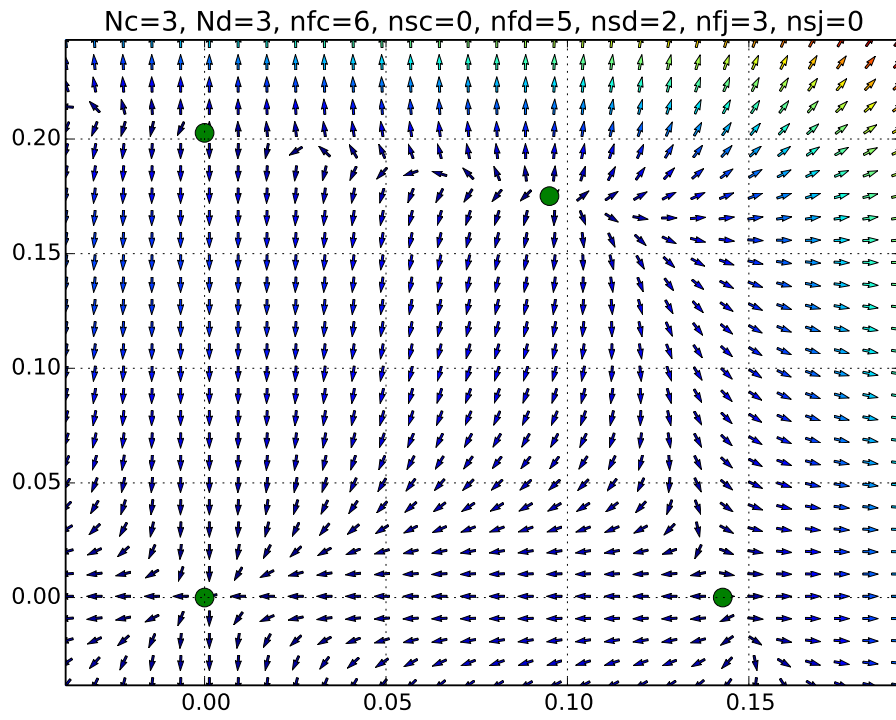


Abbildung 1: Phasenraumdiagramm mit wechselwirkendem IR-Fixpunkt, mit  $SM+N_d = 3$ ,  $n_{fd} = 5$ ,  $n_{sd} = 2$  und  $n_{fj} = 3$ .

Ein besonderer Vorteil einer Erweiterung  $G \rightarrow G_1 \times G_2$  ist die Möglichkeit einen UV-Fixpunkt eindeutig extrapolieren zu können, da die kritische Hyperfläche die Dimension  $\dim(\alpha^*) = 0$ ,  $\dim(\text{Trajektorie}) = 1$  oder  $\dim(\text{Phasenraum}) = 2$  hat. Im ersten Fall,  $\dim M_c = 0$  besteht sie nur aus dem Fixpunkt selbst, dieser Fall ist also eher als eine mathematische, triviale Lösung zu betrachten, die keine physikalische Bedeutung im Sinne laufender Kopplungskonstanten hat. Im Fall  $\dim M_c = 2$  besteht sie aus dem gesamten Phasenraum. Weil in diesem Fall jede Trajektorie in den Fixpunkt hineinläuft kann keine Vorhersage für die Größen der Kopplungskonstanten gemacht werden, dafür ist aber das UV-Verhalten von dem Startwert  $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$  unabhängig. Wie bereits gezeigt ist dieser Fall hier nicht möglich. Der für die Extrapolation interessanteste Fall ist also  $\dim M_c = 1$ , da die UV-Hyperfläche dann aus zwei Trajektorien  $s^{+/-} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  besteht<sup>2</sup> und deshalb eindeutige Wertepaare  $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  vorhersagt. Wenn eine Kopplungskonstante (o.E.)  $\alpha_1(t_0)$  bei einer Renormierungsskala  $t_0$  bekannt ist, und unter der Annahme, dass der Fixpunkt für  $t \rightarrow \infty$  erreicht wird, ist somit auch  $\alpha_2(t_0)$  sowie das gesamte Verhalten beider Kopplungskonstanten bekannt.

Für die Extrapolation werden außerdem die folgende Beobachtungen ausgenutzt.

1. Eine Trajektorie, welche in einen Sattelpunkt hineinläuft, ist gleichzeitig eine Separatrix, d.h. sie teilt den Phasenraum in Gebiete mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten für  $t \rightarrow \infty$ .
2. Ein Sattelpunkt und ein attraktiver Fixpunkt sind mit einer Separatrix verbunden, ebenso ist ein Sattelpunkt mit einem repulsiven Fixpunkt mit einer Separatrix verbunden, sofern die Fixpunkte existieren und in der Nähe des Sattelpunktes liegen.

Da das gesuchte  $M_c$  folglich immer eine Separatrix ist, kann wie folgt verfahren werden. Zunächst werden zwei Gebiete  $L$  und  $R$  definiert, die zu qualitativ verschiedenen Trajektorien führen. Beispielsweise lassen sich oft Abschätzungen der Art finden: Wenn es ein  $t_1$  gibt mit

$$\alpha_j(t_1) > \max \left\{ \alpha_j^{*i} \mid \text{alle Fixpunkte } \alpha^{*i} \right\} , \quad (1)$$

dann kann der gewünschte Fixpunkt nicht mehr für  $t > t_1$  erreicht werden. Am Fixpunkt wird eine Orthonormalbasis  $\{f_1, f_2\}$  gewählt<sup>3</sup> und der Phasenraum in Ebenen mit Abstand  $\epsilon$  eingeteilt, die nullte Ebene geht dabei durch den Fixpunkt. Rekursiv werden dann

$$s^{L/R}[n+1] = s^{L/R}[n] + \epsilon f_1 + d^{L/R} \delta f_2 \quad (2)$$

definiert. Für festes  $\delta$  wird  $d^{L/R}$  so eingestellt, dass die Trajektorie mit Anfangswert

<sup>2</sup>Jeweils eine in, eine entgegen der Richtung des attraktiven Eigenvektors.

<sup>3</sup>Der Einfachheit halber kann die Basis aus Eigenvektoren oder die  $\alpha_{1,2}$ -Achsen gewählt werden, sofern dies zu keinen numerischen Schwierigkeiten führt.

$s^L[n+1]$  in den Bereich  $L$  hineinläuft, analog für  $R$ . Mit

$$s^L[0] := \alpha^* - \delta/2 f_2 \quad \text{und} \quad s^R[0] := \alpha^* + \delta/2 f_2 \quad (3)$$

ergibt sich so ein Schlauch  $(s^L[n], s^R[n])_{n=0,1,\dots}$  der Breite  $\delta$ , der die Separatrix beinhaltet. Näherungsweise wird nun

$$\alpha[n] := \frac{s^L[n] + s^R[n]}{2} \quad (4)$$

definiert und so sortiert, dass  $\alpha[0] \simeq \alpha(t_0)$  und  $\alpha[n] \rightarrow \alpha^*$  für steigendes  $n$ . Die entsprechende RG-Zeit  $t$  wird dann über

$$t[n+1] = \frac{\|\alpha[n+1] - \alpha[n]\|}{\|\beta(\alpha[n])\|} + t[n] \quad (5)$$

mit  $t[0] = t_0$  berechnet.

Um die so erhaltenen laufenden Kopplungen mit dem Standardmodell zu vergleichen wird noch die SM QCD Kopplung in  $\mathcal{O}(\alpha^3)$  berechnet. Dies geschieht implizit über

$$F(\alpha(t)) = t - t_0 + F(\alpha(t_0)) \quad (6)$$

mit

$$F(\alpha) := \int (\beta_{\text{QCD}})^{-1} d\alpha = \int (X_1 \alpha^2 + Y_1 \alpha^3)^{-1} d\alpha = \frac{Y_1}{X_1^2} \ln \left( \frac{\alpha Y_1 + X_1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha X_1} \quad (7)$$

und  $n_{\text{f}} = n_{\text{s}} = 0$ . Der Einfachheit halber wird  $\Lambda_0 = Q$  gewählt, sodass  $t_0 = 0$  und  $\alpha(0)$  die Startwerte sind.

## 1.2 Extrapolation von $\alpha^{*3}$

Im Folgenden sind  $\alpha_1(t)$  und  $\alpha_2(t)$  die Kopplungskonstanten der QCD×dQCD entlang auf der UV-Hyperfläche, während  $\alpha(t)$  die SM QCD Kopplungskonstante darstellt.

Wegen

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \propto \begin{pmatrix} -\frac{Z_1}{Y_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 > 0 \quad (8)$$

und  $Z_1 > 0$ ,  $Y_1 > 0$  ist  $\alpha_1$  steigend, während  $\alpha$  als SM Kopplung für hohe Energien fällt, wie in Abbildung 2 zu sehen ist. Aus  $\alpha$ -sensiblen Observablen sollte es hier möglich sein, entsprechend hohe Grenzen an die neuen Teilchenmassen  $M$  zu setzen.

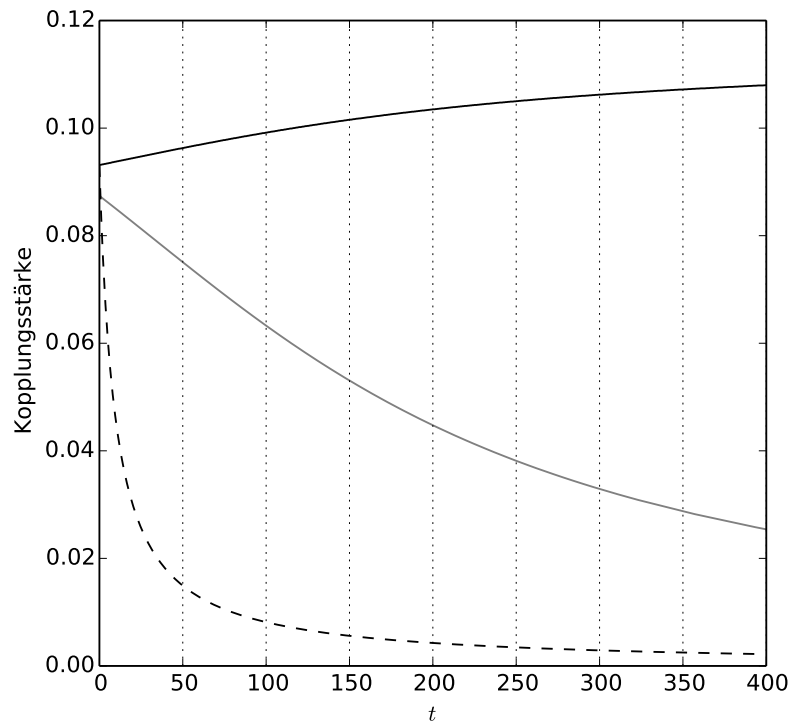


Abbildung 2: Das Laufen von  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha$  für  $(N_c, N_d, n_{f_c}, n_{s_c}, n_{f_d}, n_{s_d}, n_{f_j}, n_{s_j}) = (3, 3, 6, 1, 6, 0, 3, 0)$ .

### 1.3 Extrapolation von $\alpha^{*2}$

	$N_c$	$N_d$	$n_{f_c}$	$n_{s_c}$	$n_{f_d}$	$n_{s_d}$	$n_{f_j}$	$n_{s_j}$
a	3	2	6	0	3	0	1	0
b	3	3	6	0	9	0	1	0
c	3	3	6	0	10	0	2	0
d	3	4	6	0	17	0	1	0
e	3	5	6	0	24	0	1	0

Tabelle 1: Die Teilcheninhalte der Modelle a bis e.

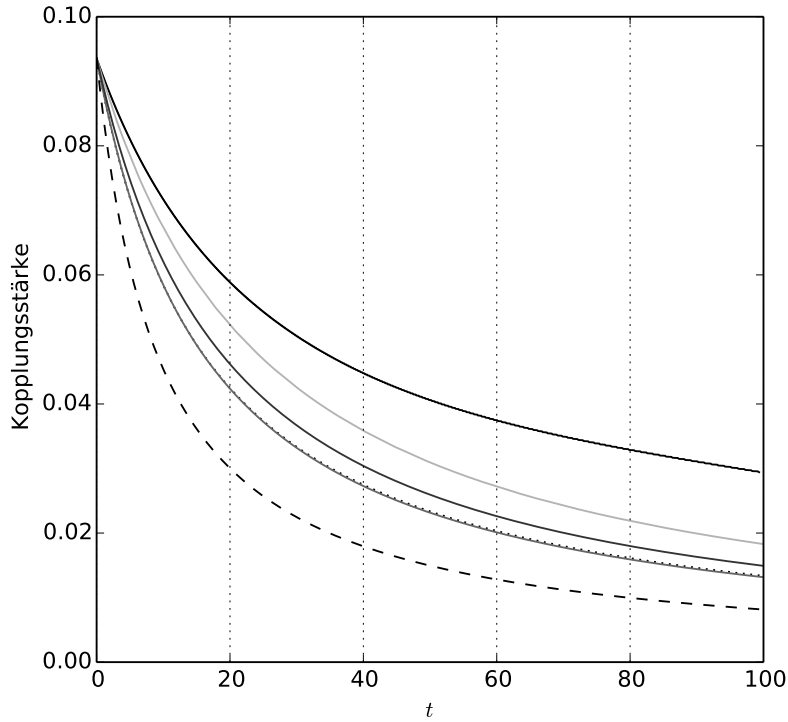


Abbildung 3: Die laufenden Kopplungen  $\alpha_1$  der Modelle a bis e sowie das SM  $\alpha$ .

Die laufenden Kopplungen für die Beispielmmodelle a bis e (vgl. Tabelle 1) sind in Abbildung 3 zu sehen, die relativen Abweichungen  $\Delta\alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha)/\alpha$  in Abbildung 4. Hier verhält sich  $\alpha_1$  qualitativ wie  $\alpha$ , die relativen Abweichungen bei  $\mu = 1 \text{ TeV} \sim t \approx 0.746$  betragen hier  $\approx 3\text{-}5\%$ , bei  $\mu = 2 \text{ TeV} \sim t \approx 1.439$  bereits  $6\text{-}10\%$  und liegen damit im Bereich der erwarteten Messungenauigkeiten (vgl. [5]).

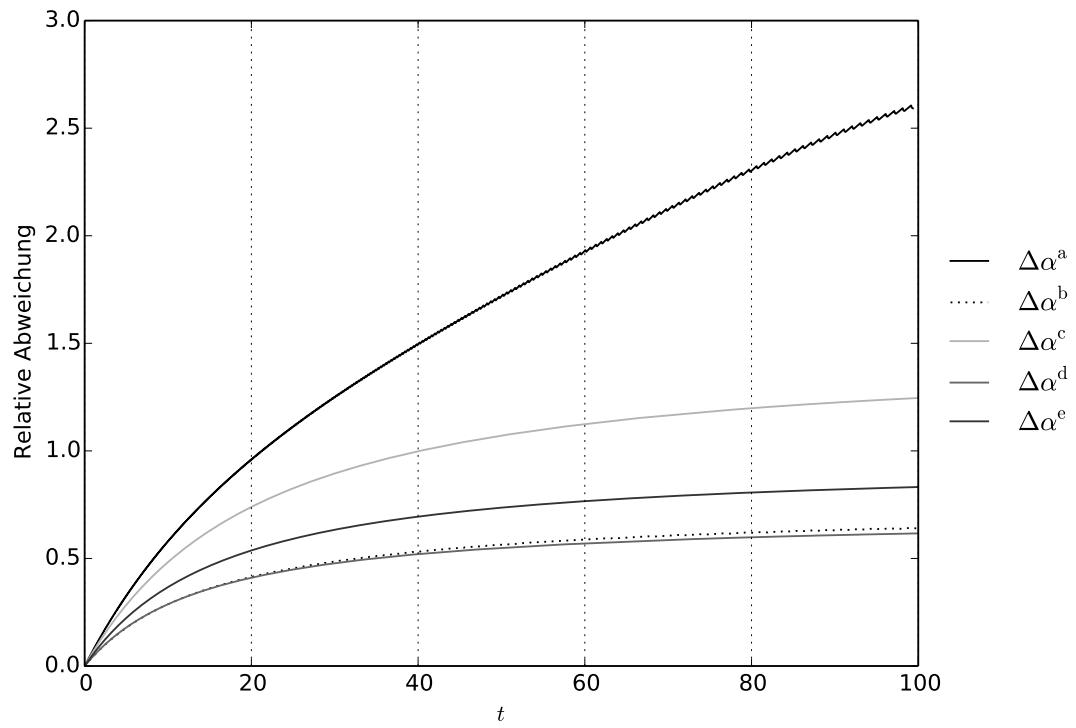


Abbildung 4: Die laufenden Kopplungen  $\alpha_1$  der Modelle a bis e sowie das SM  $\alpha$ .



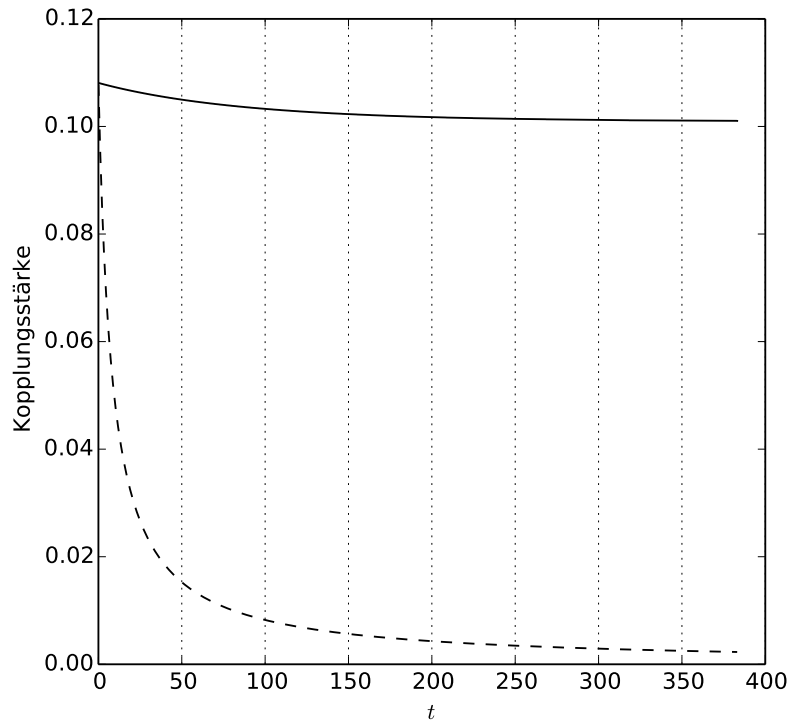


Abbildung 5: Das Laufen von  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha$  für  $(N_c, N_d, n_{f_c}, n_{s_c}, n_{f_d}, n_{s_d}, n_{f_j}, n_{s_j}) = (3, 2, 6, 1, 0, 1, 0, 9)$ .

#### 1.4 Extrapolation von $\alpha^{*4}$

Um diesen Fixpunkt mit Standardmodell Daten zu vergleichen wird die Entkopplungsskala  $Q$  auf die  $t$ -Masse  $Q \approx 173.21 \text{ GeV}$  [1] gelegt. Dazu ausgehend von der bekannte Kopplungskonstanten  $\alpha(M_Z = 91.1876) = 0.1185$  [2] zunächst mit effektiv 5 SM-Fermionen  $\alpha(Q) = 0.1081$  berechnet. In Abbildung 5 ist der weitere Verlauf

## Literatur

- [1] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, 38, 090001 (2014) and 2015 update.
- [2] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, 38, 090001 (2014) and 2015 update.
- [3] Y. Bai and P. Schwaller. Scale of dark qcd. *Phys. Rev. D*, 89:063522, Mar 2014.
- [4] Diego Becciolini, Marc Gillioz, Marco Nardecchia, Francesco Sannino, and Michael Spannowsky. Constraining new colored matter from the ratio of 3 to 2 jets cross sections at the LHC. *Phys. Rev.*, D91(1):015010, 2015. [Addendum: *Phys. Rev. D* 92, no. 7, 079905 (2015)].
- [5] A.V. Bednyakov. On the electroweak contribution to the matching of the strong coupling constant in the {SM}. *Physics Letters B*, 741:262 – 266, 2015.
- [6] Serguei Chatrchyan et al. Measurement of the ratio of the inclusive 3-jet cross section to the inclusive 2-jet cross section in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV and first determination of the strong coupling constant in the TeV range. *Eur. Phys. J.*, C73(10):2604, 2013.
- [7] Francesco Sannino.  $\alpha_s$  at LHC: Challenging asymptotic freedom. In *High-precision  $\alpha_s$  measurements from LHC to FCC-ee*, pages 11–19, 2015.