

Eberhard Zeidler Hrsg.

Springer-Handbuch der Mathematik IV

Begründet von I.N. Bronstein
und K.A. Semendjaew

Weitergeführt von G. Grosche,
V. Ziegler und D. Ziegler

Herausgegeben von E. Zeidler



Springer Spektrum

Springer-Handbuch der Mathematik IV

Herausgeber und Autor:

Prof. Dr. Eberhard Zeidler, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, Deutschland

Springer-Handbuch der Mathematik IV

Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew
Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler
Herausgegeben von E. Zeidler



Herausgeber

Prof. Dr. Eberhard Zeidler

Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften

Leipzig

Deutschland

ISBN 978-3-658-00288-6

DOI 10.1007/978-3-658-00289-3

ISBN 978-3-658-00289-3 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Der Verlag und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefrei und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.

Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.springer-spektrum.de

Vorwort

Theoria cum praxi

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Die Mathematik spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen unserer modernen Gesellschaft. Sie ist eine Querschnittswissenschaft und zugleich eine Schlüsseltechnologie mit vielfältigen engen Verbindungen zu anderen Wissenschaften. Das betrifft die Naturwissenschaften, die Ingenieurwissenschaften, die Informatik und Informationstechnologie, die Wirtschafts- und Finanzwissenschaft, die Sozialwissenschaften sowie die Medizin. Mathematik ist abstrakt und zugleich sehr praktisch. Das vorliegende

SPRINGER-HANDBUCH DER MATHEMATIK,
das sich um einen breit angelegten Brückenschlag zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen bemüht, stellt eine wesentliche Erweiterung des SPRINGER-TASCHENBUCHES DER MATHEMATIK dar, das 2012 im Verlag Springer Spektrum erschienen ist. Das Springer-Handbuch umfasst die folgenden vier Teile:

- TEIL I: Analysis.
- TEIL II: Algebra, Geometrie, Grundlagen der Mathematik.
- TEIL III: Variationsrechnung und Physik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Numerik und Wissenschaftliches Rechnen, Wirtschafts- und Finanzmathematik, Algorithmik und Informatik.
- TEIL IV: Funktionalanalysis, Dynamische Systeme, Mannigfaltigkeiten, Topologie, Mathematische Physik.

Als mehrbändiges Nachschlagewerk ist das Springer-Handbuch in erster Linie für wissenschaftliche Bibliotheken gedacht, die ihren Leserinnen und Lesern parallel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik das umfangreichere Material des Springer-Handbuchs (in elektronischer Form und Papierform) zur Verfügung stellen wollen. Für individuell interessierte Leserinnen und Leser sei auf folgendes hingewiesen. Die Teile I bis III des Springer-Handbuchs der Mathematik enthalten die entsprechenden Kapitel des Springer-Taschenbuches der Mathematik, die durch wichtiges zusätzliches Material ergänzt werden. Dagegen sind die neun Kapitel von Teil IV nicht im Springer-Taschenbuch der Mathematik enthalten.

Teil I enthält neben dem einführenden Kapitel und dem Kapitel 1 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zur höheren komplexen Funktionentheorie und zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Teil II enthält neben den Kapiteln 2–4 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu folgenden Gebieten: multilineare Algebra, höhere Zahlentheorie, projektive Geometrie, algebraische Geometrie und Geometrien der modernen Physik.

Teil III enthält neben den Kapiteln 5–9 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu stochastischen Prozessen.

Teil IV enthält die folgenden Zusatzkapitel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik:

- Kapitel 10: Höhere Analysis (Tensoranalysis und spezielle Relativitätstheorie, Integralgleichungen, Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, moderne Maß- und Integrationstheorie).
- Kapitel 11: Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
- Kapitel 12: Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
- Kapitel 13: Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit.
- Kapitel 14: Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften.
- Kapitel 15: Mannigfaltigkeiten.
- Kapitel 16: Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie.
- Kapitel 17: Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen - Mathematik der Symmetrie.
- Kapitel 18: Topologie - Mathematik des qualitativen Verhaltens.
- Kapitel 19: Krümmung, Topologie und Analysis (Eichtheorie in Mathematik und Physik).

Hier werden im Rahmen der mathematischen Physik die Bedürfnisse der modernen Physik berücksichtigt. Am Ende von Teil IV findet man eine Tafel zur Geschichte der Mathematik. Die sorgfältig zusammengestellten Literaturangaben am Ende jedes Kapitels sollen dem Leser helfen, bei auftretenden Fragen geeignete moderne Bücher zu konsultieren, wobei zwischen einführender Literatur und anspruchsvollen Standardwerken gewählt werden kann.

Das vorliegende Springer-Handbuch der Mathematik wendet sich an:

- Fortgeschrittene Studierende der Mathematik und angrenzender naturwissenschaftlicher, technischer, wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen, Graduierte, Doktoranden
- Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Informatiker, Wirtschaftsmathematiker in Forschung, Lehre und Praxis
- wissenschaftliche Bibliotheken, akademische Institutionen und Firmen.

Die Bedürfnisse eines derart breiten Leserkreises werden berücksichtigt, indem der Bogen von elementaren Kenntnissen bis hin zu anspruchsvollen mathematischen Resultaten sehr weit gespannt wird und das Werk ein breites Spektrum mathematischer Gebiete überdeckt. Großer Wert wird dabei auf folgende Aspekte gelegt:

- ausführliche Motivation und Erläuterung der Grundideen,
- leichte Fasslichkeit, Anschaulichkeit, und Übersichtlichkeit,
- die Verbindung zwischen reiner und angewandter Mathematik,
- vielseitige Anwendungen der Mathematik und Praxisnähe, sowie
- die Diskussion des historischen Hintergrunds.

Es wird gezeigt, dass die Mathematik mehr ist als eine trockene Ansammlung von Formeln, Definitionen, Theoremen und Rechenrezepten. Sie ist ein unverzichtbarer Partner der modernen Technik, und sie hilft wesentlich bei der optimalen Gestaltung von Industrie- und Wirtschaftsprozessen. Gleichzeitig ist die Mathematik ein wichtiger Bestandteil unserer menschlichen Kultur und ein wundervolles Erkenntnisorgan des Menschen, das ihn etwa in der Hochtechnologie, der Elementarteilchenphysik und der Kosmologie in Bereiche vorstoßen lässt, die ohne Mathematik nicht zu verstehen sind, weil sie von unserer täglichen Erfahrungswelt extrem weit entfernt sind.

Während das Springer-Taschenbuch der Mathematik den Anforderungen des Bachelor-Studiums angepasst ist, bezieht sich das Springer-Handbuch der Mathematik sowohl auf das Bachelor-Studium als auch auf das weiterführende Master-Studium.

Bei den Anwendungen der Mathematik spielen Phänomene eine große Rolle, die in Natur und Technik auftreten. Das mathematische Verständnis dieser Phänomene erleichtert dem Anwender in den Naturwissenschaften und in den Ingenieurwissenschaften den Überblick über die Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen mathematischen Disziplinen. Deshalb wird in diesem Springer-Handbuch der Mathematik die Sicht auf wichtige Phänomene besonders betont. Das betrifft:

- Mathematik der Grenzübergänge (Analysis und Funktionalanalysis),
- Mathematik des Optimalen (Variationsrechnung, optimale Steuerung, lineare und nichtlineare Optimierung),
- Mathematik des Zufalls (Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und stochastische Prozesse),
- Mathematik der Zeit und des Chaos (dynamische Systeme),
- Mathematik der Stabilität von Gleichgewichtszuständen in Natur und Technik, von zeitabhängigen Prozessen und von Algorithmen auf Computern,
- Mathematik der Komplexität von Algorithmen auf Computern,
- Mathematik der Symmetrie (Gruppentheorie),
- Mathematik der Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Funktionalanalysis),
- Mathematik des qualitativen Verhaltens von Gleichgewichtszuständen und zeitabhängigen Prozessen in Natur und Technik (Topologie),
- Mathematik der Wechselwirkungskräfte in der Natur (nichtlineare partielle Differentialgleichungen und nichtlineare Funktionalanalysis, Differentialgeometrie der Faserbündel und Eichtheorie),
- Mathematik der Strukturen (Kategorientheorie).

Interessant ist die Tatsache, dass klassische Ergebnisse der Mathematik heutzutage im Rahmen neuer Technologien völlig neue Anwendungen erlauben. Das betrifft etwa die Zahlentheorie, die lange Zeit als ein reines Vergnügen des menschlichen Geistes galt. Beispielsweise wird die berühmte Riemannsche Zetafunktion der analytischen Zahlentheorie, die in Kapitel 2 betrachtet wird, in der modernen Quantenfeldtheorie zur Berechnung von Streuprozessen von Elementarteilchen im Rahmen der Renormierungstheorie eingesetzt. Der klassische Satz von Fermat–Euler über Teilbarkeitseigenschaften von Zahlen wird heute wesentlich benutzt, um die Übermittlung von Nachrichten in raffinierter Weise zu verschlüsseln. Das findet man ebenfalls in Kapitel 2.

Das „Springer-Handbuch der Mathematik“ knüpft an eine lange Tradition an. Das „Taschenbuch der Mathematik“ von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew wurde von Dr. Viktor Ziegler aus dem Russischen ins Deutsche übersetzt. Es erschien 1958 im Verlag B. G. Teubner in Leipzig, und bis zum Jahre 1978 lagen bereits 18 Auflagen vor. Unter der Herausgabe von Dr. Günter Große und Dr. Viktor Ziegler und unter wesentlicher redaktioneller Mitarbeit von Frau Dorothea Ziegler erschien 1979 die völlig überarbeitete 19. Auflage, an der Wissenschaftler der Leipziger Universität und anderer Hochschulen des mitteldeutschen Raumes mitwirkten.¹ Diese Neubearbeitung wurde ins Russische übersetzt und erschien 1981 im Verlag für Technisch-Theoretische Literatur in Moskau. Ferner wurden eine englische und eine japanische Übersetzung publiziert.

Motiviert durch die stürmische Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen erschien in den Jahren 1995 und 1996 ein völlig neuverfasstes, zweibändiges „Teubner-Taschenbuch der Mathematik“ im Verlag B. G. Teubner, Stuttgart und Leipzig.² Das daraus entstandene, vorliegende „Springer-Handbuch der Mathematik“ enthält zwei völlig neu geschriebene Kapitel über Wirtschafts- und Finanzmathematik sowie über Algorithmik und Informatik.

¹Bis 1995 erschienen sieben weitere Auflagen.

²Die englische Übersetzung des ersten Bandes erschien 2003 im Verlag Oxford University Press, New York, als „Oxford Users‘ Guide to Mathematics“.

Die moderne Konzeption und Koordination des Kapitels 8 über Wirtschafts- und Finanzmathematik lag in den erfahrenen Händen von Herrn Prof. Dr. Bernd Luderer (TU Chemnitz). In das von Herrn Prof. Dr. Juraj Hromkovič (ETH Zürich) verfasste Kapitel 9 über Algorithmik und Informatik flossen seine reichen Lehrerfahrungen ein. Im Mittelpunkt steht das zentrale Problem der Komplexität von Algorithmen. Erinnert sei daran, dass eines der berühmten sieben Millenniumsprobleme der Mathematik aus dem Jahre 2000 eine tiefe Frage der Komplexitätstheorie betrifft. Das Kapitel 7 über Numerik und Wissenschaftliches Rechnen wurde von Herrn Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig) wesentlich überarbeitet, und die übrigen Kapitel wurden aktualisiert. Der Herausgeber möchte den Kollegen Hackbusch, Hromkovič und Luderer sowie allen seinen Koautoren für ihre engagierte Arbeit sehr herzlich danken. Das betrifft:

- Prof. Dr. Hans-Rudolf Schwarz (7.1–7.6) und
Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (7.7),
- Prof. Dr. Bernd Luderer (8.1, 8.13),
Prof. Dr. Jochen Blath (8.2, 8.3),
Prof. Dr. Alexander Schied (8.4, 8.5),
Prof. Dr. Stephan Dempe (8.6–8.10) und
Prof. Dr. Gert Wanka (8.11, 8.12),
- Prof. Dr. Juraj Hromkovič (9.1–9.9) und
Prof. Dr. Siegfried Gottwald (9.10).

Ein herzliches Dankeschön geht auch an Frau Micaela Krieger-Hauwede für das sorgfältige Anfertigen vieler Abbildungen in den Teilen I bis III, das Lesen der Korrekturen und die einfühlsame, ästhetisch gelungene Textgestaltung. Frau Kerstin Föltting danke ich sehr herzlich für das sorgfältige Anfertigen der Abbildungen und der L^AT_EX-Version von Teil IV sowie für zahlreiche Hinweise zur Verbesserung der Darstellung. Den Mitarbeitern des Leipziger Max-Planck-Institutes für Mathematik in den Naturwissenschaften, Regine Lübke (Sekretariat), Katarzyna Baier und Ingo Brüggemann (Bibliothek), Oliver Heller und Rainer Kleinrensing (EDV-Abteilung) sei sehr herzlich für die technische Unterstützung bei der Fertigstellung des Springer-Handbuches der Mathematik gedankt. Ferner danke ich sehr herzlich Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Springer Spektrum für die Koordination des gesamten Projekts und für die kompetente Aktualisierung des Literaturverzeichnisses. Schließlich sei allen Leserinnen und Lesern gedankt, die in der Vergangenheit durch ihre Hinweise zur Verbesserung der Darstellung beigetragen haben.

Alle Beteiligten hoffen, dass dieses Nachschlagewerk in allen Phasen des Studiums und danach im Berufsleben ein nützlicher Begleiter sein wird, der die Einheit der Mathematik betont.

Leipzig, im Sommer 2012

Der Herausgeber

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
10 Höhere Analysis	1
10.1 Die Grundideen der modernen Analysis	1
10.1.1 Die Grundstruktur der mathematischen Formulierung physikalischer Theorien	3
10.1.2 Drei tiefe Sätze der Analysis	5
10.1.3 Glattheit	11
10.2 Tensoranalysis, Differentialformen und mehrfache Integrale	12
10.2.1 Tensordefinition	13
10.2.2 Beispiele für Tensoren	14
10.2.3 Beispiele für Pseudotensoren	17
10.2.4 Tensoralgebra	18
10.2.5 Tensoranalysis	21
10.2.6 Tensorgleichungen und das Indexprinzip der mathematischen Physik	25
10.2.7 Der Cartansche Kalkül der alternierenden Differentialformen	26
10.2.8 Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie	39
10.2.9 Anwendungen in der Elektrodynamik	44
10.2.10 Die geometrische Interpretation des elektromagnetischen Feldes als Krümmung eines Hauptfaserbündels (Eichfeldtheorie)	51
10.3 Integralgleichungen	53
10.3.1 Allgemeine Begriffe	53
10.3.2 Einfache Integralgleichungen, die durch Differentiation auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden können	54
10.3.3 Integralgleichungen, die durch Differentiation gelöst werden können	56
10.3.4 Die Abelsche Integralgleichung	57
10.3.5 Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art	59
10.3.6 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art und die Fredholmsche Alternative	61
10.3.7 Integralgleichungen zweiter Art mit Produktkernen und ihre Zurückführung auf lineare Gleichungssysteme	66
10.3.8 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischen Kernen (Hilbert–Schmidt-Theorie)	70
10.3.9 Anwendung auf Randwertaufgaben, Fourierreihen und die schwingende Saite; die Methode der Greenschen Funktion	74
10.3.10 Integralgleichungen und klassische Potentialtheorie	77
10.3.11 Singuläre Integralgleichungen und das Riemann–Hilbert–Problem	78
10.3.12 Wiener–Hopf–Integralgleichungen	80
10.3.13 Näherungsverfahren	80
10.4 Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der math. Physik	83
10.4.1 Definition von Distributionen	84
10.4.2 Das Rechnen mit Distributionen	86
10.4.3 Die Grundlösung linearer partieller Differentialgleichungen	89
10.4.4 Anwendung auf Randwertprobleme	91
10.4.5 Anwendung auf Anfangswertprobleme	92
10.4.6 Die Fouriertransformation	93
10.4.7 Pseudodifferentialoperatoren	96
10.4.8 Fourierintegraloperatoren	98

10.5	Moderne Maß- und Integrationstheorie	101
10.5.1	Maß	102
10.5.2	Integral	104
10.5.3	Eigenschaften des Integrals	106
10.5.4	Grenzwertsätze	107
10.5.5	Eigenschaften des Lebesgueintegrals auf dem \mathbb{R}^n	108
10.5.6	Das eindimensionale Lebesgue–Stieltjes–Integral	109
10.5.7	Maße auf topologischen Räumen	110
	Literatur zu Kapitel 10	111

11 Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen 115

11.1	Grundideen	115
11.1.1	Integralgleichungen als Operatorgleichungen und Fredholmoperatoren	119
11.1.2	Differentialgleichungen als Operatorgleichungen und verallgemeinerte Ableitungen	120
11.1.3	Das Konvergenzproblem für Fourierreihen	123
11.1.4	Das Dirichletproblem und das Vervollständigungsprinzip	124
11.1.5	Das Dirichletproblem und die Methode der finiten Elemente (numerische Funktionalanalysis)	128
11.1.6	Ein Blick in die Geschichte der Funktionalanalysis	129
11.2	Räume	131
11.2.1	Topologische Räume	131
11.2.2	Metrische Räume	136
11.2.3	Lineare Räume	138
11.2.4	Banachräume	147
11.2.5	Hilberträume	155
11.2.6	Sobolevräume	160
11.2.7	Lokalkonvexe Räume	165
11.3	Existenzsätze und ihre Anwendungen	167
11.3.1	Vollständige Orthonormalsysteme und spezielle Funktionen der mathematischen Physik	167
11.3.2	Quadratische Minimumprobleme und das Dirichletproblem	170
11.3.3	Die Gleichung $\Lambda u = Ku = f$ für kompakte symmetrische Operatoren K und Integralgleichungen (Hilbert–Schmidt-Theorie)	173
11.3.4	Die Gleichung $Au = f$ für Fredholmoperatoren	176
11.3.5	Die Fortsetzung von Friedrichs und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik	182
11.3.6	Halbgruppen	186
11.4	Näherungsverfahren und numerische Funktionalanalysis	186
11.4.1	Iterationsverfahren	186
11.4.2	Das Ritzsche Verfahren und die Methode der finiten Elemente	188
11.4.3	Das duale Ritzsche Verfahren (Trefftzsches Verfahren)	190
11.4.4	Das universelle Galerkinverfahren (Projektionsverfahren)	192
11.4.5	Projektions-Iterationsverfahren	197
11.4.6	Der Hauptsatz der numerischen Funktionalanalysis	198
11.5	Die Prinzipien der linearen Funktionalanalysis	199
11.5.1	Das Hahn–Banach-Theorem und Optimierungsaufgaben	199
11.5.2	Das Bairesche Kategorieprinzip	204
11.5.3	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	205
11.5.4	Das Theorem über offene Abbildungen und korrekt gestellte Probleme	205
11.5.5	Das Theorem über den abgeschlossenen Graphen	206
11.5.6	Das Theorem über den abgeschlossenen Wertebereich (Fredholmsche Alternative)	208
11.5.7	Kompaktheit und ein Extremalprinzip	209
11.6	Das Spektrum	214
11.6.1	Grundbegriffe	214
11.6.2	Die Spektralschar selbstadjungierter Operatoren	216

11.6.3	Funktionen von Operatoren	219
11.6.4	Störungstheorie	222
11.6.5	Streutheorie	224
11.6.6	Operatorfunktionen und die Interpolation von Räumen und Operatoren	224
11.7	Operatoralgebren (Algebra und Analysis)	226
11.7.1	Grundbegriffe	226
11.7.2	Kompakte Operatoren und Operatorenideale	228
11.7.3	Darstellungstheorie für Operatoralgebren	229
11.7.4	Anwendungen auf die Spektraltheorie normaler Operatoren	231
11.8	Differentialoperatoren und Reihenentwicklungen der mathematischen Physik	232
Literatur zu Kapitel 11		235
12	Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen	237
12.1	Fixpunktsätze und ihre Anwendungen auf Differential- und Integralgleichungen	237
12.1.1	Der Fixpunktsatz von Banach und Iterationsverfahren	237
12.1.2	Der Fixpunktsatz von Schauder und Kompaktheit	240
12.1.3	Der Fixpunktsatz von Bourbaki–Kneser und Halbordnung	240
12.2	Methode der Unter- und Oberlösungen, Iterationsverfahren in halbgeordneten Banachräumen	241
12.3	Differentiation von Operatoren	241
12.4	Das Newtonverfahren	243
12.5	Der Satz über implizite Funktionen	245
12.6	Bifurkationstheorie	246
12.6.1	Notwendige Bifurkationsbedingung	246
12.6.2	Eine wichtige hinreichende Bedingung für Bifurkation	247
12.6.3	Hinreichende und notwendige Bifurkationsbedingung für Probleme mit Variationsstruktur	247
12.6.4	Stabilitätsverlust und Bifurkation	248
12.6.5	Die allgemeine Methode der Bifurkationsgleichung (Methode von Ljapunov–Schmidt)	249
12.7	Extremalprobleme	250
12.7.1	Minimumprobleme	250
12.7.2	Sattelpunktprobleme	253
12.7.3	Das Gebirgspasstheorem	253
12.7.4	Die Ljusternik–Schnirelman-Theorie für Eigenwertprobleme	253
12.8	Monotone Operatoren	254
12.9	Der Abbildungsgrad und topologische Existenzsätze	255
12.10	Nichtlineare Fredholmoperatoren	258
Literatur zu Kapitel 12		259
13	Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit	261
13.1	Grundideen	261
13.1.1	Einführende Beispiele	262
13.1.2	Klassifikation dynamischer Systeme	264
13.1.3	Konstruktion dynamischer Systeme durch autonome Differentialgleichungssysteme	265
13.2	Dynamische Systeme in der Ebene	265
13.2.1	Qualitatives Verhalten linearer Systeme in der Umgebung stationärer Punkte	265
13.2.2	Nichtlineare Störungen	267
13.2.3	Grenzzyklen	267

13.3	Stabilität	268
13.3.1	Stabilität von stationären Punkten	268
13.3.2	Strukturelle Stabilität	269
13.4	Bifurkation	269
13.4.1	Grundidee	269
13.4.2	Entstehung neuer Gleichgewichtszustände (erste Elementarkatastrophe)	269
13.4.3	Hopfbifurkation	270
13.5	Ljapunovfunktion	270
13.6	Die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeit	272
13.7	Attraktoren	276
13.8	Diskrete dynamische Systeme und Iterationsverfahren	277
13.9	Fraktale	278
13.10	Übergang zum Chaos	279
13.10.1	Kontinuierliche dynamische Systeme	279
13.10.2	Diskrete dynamische Systeme und Periodenverdopplung	280
13.11	Ergodizität	282
13.12	Störung quasiperiodischer Bewegungen	283
13.12.1	Grundideen	283
13.12.2	Typische Resonanzerscheinungen	284
13.12.3	Relaxation (quasistatische Näherung)	285
13.13	Singularitätentheorie (Katastrophentheorie)	286
13.13.1	Reguläres und singuläres Verhalten	286
13.13.2	Strukturelle Stabilität	288
13.13.3	Wesentliche Terme in der Taylorentwicklung und Normalformen	289
13.13.4	Parameterfamilien und Elementarkatastrophen	290
13.14	Information und Chaos	292
13.15	Entropie, Strukturbildung und Mathematik der Selbstorganisation	293
13.16	Unendlichdimensionale dynamische Systeme	294
13.16.1	Grundideen	294
13.16.2	Die Poissons-Gleichung	295
13.16.3	Das Eigenwertproblem für die Laplace-Gleichung	297
13.16.4	Die Wärmeleitungsgleichung	297
13.16.5	Die Wellengleichung	298
13.16.6	Die Schrödinger-Gleichung	299
13.17	Flüsse und Semiflüsse auf Banachräumen und Operator-differentialgleichungen	301
13.17.1	Konstruktion von Flüssen und Semiflüssen	302
13.17.2	Anwendung auf homogene Differentialgleichungen	303
13.17.3	Anwendung auf inhomogene Differentialgleichungen	303
13.17.4	Die Formel von Dyson für zeitabhängige Differentialgleichungen	304
13.18	Die allgemeine Dynamik von Quantensystemen	304
13.18.1	Bewegung eines Quantenteilchens auf der x -Achse	306
13.18.2	Das Wasserstoffatom	307
13.18.3	Streuprozesse	308
	Literatur zu Kapitel 13	309

14 Nichtlineare partielle Differentialgleichungen	311
14.1 Grundideen	312
14.2 Reaktions-Diffusionsgleichungen	316
14.2.1 Fortschreitende Wellen	316
14.2.2 Globale Attraktoren	317
14.2.3 Ein allgemeiner Existenzsatz für quasilineare parabolische Systeme	318
14.3 Nichtlineare Wellengleichungen	319
14.3.1 Die Lebensdauer von glatten Lösungen	319
14.3.2 Ein allgemeiner Existenzsatz für nichtlineare symmetrische hyperbolische Systeme	320
14.3.3 Der quasilineare Spezialfall	321
14.3.4 Anwendungen	321
14.4 Die Gleichungen der Hydrodynamik	322
14.4.1 Die Eulerschen Gleichungen für ideale Flüssigkeiten	322
14.4.2 Die Navier–Stokesschen Differentialgleichungen für viskose Flüssigkeiten und Turbulenz	323
14.5 Variationsprobleme	326
14.5.1 Grundidee	326
14.5.2 Die allgemeinen Euler–Lagrange–Gleichungen	329
14.5.3 Symmetrie und Erhaltungsgrößen in der Natur (das Noethertheorem)	330
14.5.4 Ein Existenzsatz für stationäre Erhaltungsgleichungen	332
14.5.5 Ein allgemeiner Existenzsatz für Variationsprobleme	333
14.6 Die Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie	334
14.6.1 Das Variationsproblem der Elastostatik	334
14.6.2 Anwendung auf nichtlineares Henckymaterial und lineares Material	336
14.6.3 Die Grundgleichungen der Elastodynamik	337
14.6.4 Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz der nichtlinearen Elastodynamik	339
14.6.5 Balkenbiegung und Bifurkation	339
14.7 Die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie	341
14.8 Die Gleichungen der Eichfeldtheorie und Elementarteilchen	341
14.8.1 Grundideen	341
14.8.2 Konventionen	343
14.8.3 Die Diracgleichung für die Bewegung eines relativistischen Elektrons	344
14.8.4 Das Postulat der lokalen Eichinvarianz und die Maxwell–Dirac–Gleichungen der Quantenelektrodynamik	346
14.8.5 Die Grundideen der Quantenfeldtheorie	347
14.8.6 $SU(N)$ -Eichfeldtheorie	349
14.9 Die Geometrisierung der modernen Physik	352
Literatur zu Kapitel 14	354
15 Mannigfaltigkeiten	357
15.1 Grundbegriffe	357
15.1.1 Definition einer Mannigfaltigkeit	358
15.1.2 Konstruktion von Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n	360
15.1.3 Orientierbarkeit	361
15.1.4 Klassischer Tensorkalkül auf Mannigfaltigkeiten	362
15.1.5 Differentiation von klassischen Tensorfeldern	363
15.1.6 Tangentenvektoren und Tangentialraum	364
15.1.7 Kotangentenvektoren und Kotangentialraum	366
15.1.8 Untermannigfaltigkeiten	367
15.1.9 Mannigfaltigkeiten mit Rand	368
15.1.10 Mannigfaltigkeiten als topologische Räume	368

15.2	Glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten	369
15.3	Konstruktion von Mannigfaltigkeiten	371
15.4	Invariante Analysis auf Mannigfaltigkeiten	373
15.4.1	Tensoralgebra	373
15.4.2	Tensorfelder	375
15.4.3	Differentialformen	375
15.4.4	Transformation von Tensorfeldern mittels Diffeomorphismen	379
15.4.5	Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten	381
15.4.6	Lieableitung von Tensorfeldern	382
15.4.7	Der Satz von Frobenius	385
15.5	Anwendungen in der Thermodynamik	389
15.6	Klassische Mechanik und symplektische Geometrie	391
15.6.1	Grundidee	391
15.6.2	Klassische Mechanik auf Mannigfaltigkeiten	392
15.6.3	Symplektische Geometrie	393
15.7	Anwendungen in der statistischen Physik	394
15.7.1	Das Grundmodell der statistischen Physik	394
15.7.2	Anwendungen auf die Quantenstatistik	396
15.7.3	Klassische Gibbssche Statistik im Phasenraum	397
15.8	Operatoralgebren in der Physik und nichtkommutative Geometrie	398
Literatur zu Kapitel 15		399

16 Riemannsche Geometrie und allg. Relativitätstheorie 401

16.1	Der klassische Kalkül	401
16.1.1	Messung von Längen, Winkeln und Volumina	402
16.1.2	Krümmung	403
16.1.3	Paralleltransport	404
16.1.4	Geodätische Kurven (verallgemeinerte Geraden)	404
16.1.5	Anwendung auf die nichteuclidische Geometrie	405
16.1.6	Der δ -Operator und der Laplaceoperator	407
16.1.7	Die Volumenform	408
16.1.8	Der $*$ -Operator von Hodge	408
16.2	Der invariante Kalkül	409
16.2.1	Messung von Längen, Winkeln und Volumina	409
16.2.2	Metrik auf eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeiten	410
16.2.3	Kovariante Differentiation und Paralleltransport auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang	410
16.2.4	Torsion und Krümmung auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang	412
16.2.5	Kovariante Differentiation und Krümmung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten	413
16.2.6	Geodätische	413
16.3	Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten	415
16.3.1	Längentreue Abbildungen	415
16.3.2	Winkeltreue (konforme) Abbildungen	417
16.4	Kählermannigfaltigkeiten	418
16.5	Anwendungen auf die allgemeine Relativitätstheorie	419
16.5.1	Physikalische Grundidee	419
16.5.2	Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie	420
16.5.3	Die Schwarzschildmetrik eines Zentralkörpers	421
16.5.4	Schwarze Löcher	422
16.5.5	Die Expansion des Weltalls (Urknall)	422

Literatur zu Kapitel 16	425
17 Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen	427
17.1 Grundideen	428
17.2 Gruppen	437
17.2.1 Grundbegriffe	437
17.2.2 Morphismen von Gruppen	438
17.2.3 Darstellungen von Gruppen	440
17.2.4 Kategorien und Funktoren zur Beschreibung allgemeiner Strukturprinzipien der modernen Mathematik	442
17.3 Darstellungen endlicher Gruppen	444
17.4 Liealgebren	446
17.4.1 Grundbegriffe	446
17.4.2 Beispiele von Liealgebren	447
17.4.3 Darstellungen von Liealgebren	449
17.5 Liegruppen	450
17.5.1 Grundbegriffe	450
17.5.2 Der enge Zusammenhang zwischen Liegruppen und ihren Liealgebren (das Liesche Linearisierungsprinzip)	451
17.5.3 Struktur von Liegruppen	453
17.5.4 Beispiele	453
17.5.5 Physikalische Interpretation der Liealgebra einer Liegruppe	454
17.5.6 Darstellungen	455
17.6 Darstellungen der Permutationsgruppe und Darstellungen klassischer Gruppen	456
17.7 Anwendungen auf den Elektronenspin	461
17.8 Anwendungen auf das Quarkmodell der Elementarteilchen	464
17.9 Darstellungen kompakter Liegruppen und spezielle Funktionen der mathematischen Physik	472
17.10 Transformationsgruppen und Symmetrie von Mannigfaltigkeiten	474
17.11 Differentialgleichungen und Symmetrie	478
17.11.1 Invariante Funktionen	479
17.11.2 Invariante Differentialgleichungen	480
17.11.3 Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen	481
17.11.4 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen	482
17.12 Die innere Symmetrie Liescher Gruppen und ihrer Liealgebren	483
17.13 Differentialformen mit Werten in einer Liealgebra	485
Literatur zu Kapitel 17	486
18 Topologie – Mathematik des qualitativen Verhaltens	487
18.1 Das Ziel der Topologie	487
18.2 Die Bedeutung der Eulerschen Charakteristik	491
18.2.1 Der Hauptsatz der topologischen Flächentheorie	491
18.2.2 Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten	492
18.2.3 Morsetheorie für Extremalprobleme auf Mannigfaltigkeiten	493
18.2.4 Der Satz von Gauß-Bonnet-Chern	493
18.3 Homotopie (Deformation)	495
18.3.1 Erweiterung stetiger Abbildungen	496
18.3.2 Der Abbildungsgrad	496

18.3.3	Die Fundamentalgruppe	497
18.3.4	Überlagerungsmannigfaltigkeiten	499
18.4	Der anschauliche Hintergrund der Dualität zwischen Homologie und Kohomologie	500
18.5	De Rhamsche Kohomologie	503
18.6	Homologie	506
18.6.1	Die Homologie eines Dreiecks	506
18.6.2	Singuläre Homologie topologischer Räume	508
18.6.3	Singuläre Kohomologie topologischer Räume	510
18.6.4	Der Satz von de Rham über Differentialgleichungen für Formen auf Mannigfaltigkeiten	510
18.7	Exakte Sequenzen	511
18.7.1	Die Mayer–Vietoris-Sequenz	512
18.7.2	Homologie- und Kohomologieguppen mit beliebigen Koeffizienten	513
18.7.3	Höhere Homotopiegruppen	515
18.7.4	Die exakte Homotopiesequeenz eines Faserbündels	516
18.7.5	Fundamentalgruppe und Symmetrie	518
Literatur zu Kapitel 18		519
19	Krümmung, Topologie und Analysis	521
19.1	Grundideen	521
19.2	Bündel	523
19.3	Produktbündel und Eichfeldtheorie	525
19.4	Paralleltransport in Hauptfaserbündeln und Krümmung	528
19.4.1	Die Zusammenhangsform \mathbb{A} auf \mathbb{H}	529
19.4.2	Die Krümmungsform \mathbb{F} auf \mathbb{H}	529
19.4.3	Geometrische Interpretation	529
19.5	Paralleltransport in Vektorraumbündeln und kovariante Richtungsableitung	531
19.6	Anwendung auf die Methode des repère mobile von É. Cartan	534
19.6.1	Die globalen Strukturgleichungen von Cartan	536
19.6.2	Die lokalen Strukturgleichungen von Cartan	537
19.7	Die Wegabhängigkeit des Paralleltransports	537
19.8	Die Struktur Riemannscher Flächen	539
19.8.1	Algebraische Funktionen als komplexe Kurven	541
19.8.2	Kompakte Riemannsche Flächen	545
19.8.3	Der Uniformisierungssatz	547
19.8.4	Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen	549
19.9	Garbenkohomologie und die Konstruktion meromorpher Funktionen	549
19.9.1	Garben	550
19.9.2	Die Lösung des Cousinschen Problems	551
19.9.3	Die Lösung des Problems von Mittag–Leffler	552
19.9.4	Garbenkohomologie	552
19.10	Charakteristische Klassen für Vektorraumbündel	554
19.10.1	Grundideen	554
19.10.2	Die Kohomologiealgebra $H^*(M)$ einer Mannigfaltigkeit M	556
19.10.3	Der Weil-Morphismus und charakteristische Klassen	558
19.10.4	Chernklassen	559
19.11	Das Atiyah–Singer–Indextheorem	561
19.11.1	Die analytische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren	562

19.11.2 Die topologische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren	564
19.11.3 Das Indextheorem für elliptische Komplexe	565
19.11.4 Anwendungen auf den de Rham Komplex	567
19.11.5 Anwendung auf den Dolbeaut-Komplex	568
19.11.6 Das Theorem von Riemann–Roch–Hirzebruch	568
19.12 Minimalflächen	569
19.13 Stringtheorie	572
19.14 Supermathematik und Superstringtheorie	576
Literatur zu Kapitel 19	577
Zeittafel zur Geschichte der Mathematik	581
Literatur zur Geschichte der Mathematik	600
Mathematische Symbole	605
Index	612

KAPITEL 10

HÖHERE ANALYSIS

Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.

Galileo Galilei (1564-1642)

Jeder wirkliche Fortschritt der Mathematik geht stets Hand in Hand mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorien erleichtern und umständliche ältere Entwicklungen beseitigen ... Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Denkens.¹

David Hilbert (1900)

10.1 Die Grundideen der modernen Analysis und ihr Verhältnis zu den Naturwissenschaften

Die Analysis ist diejenige mathematische Disziplin, die sich mit dem Begriff des *Grenzwerts* beschäftigt. Bis auf Ansätze in der Antike bei Archimedes (287-212 v.Chr.) trat der Grenzwertbegriff erst voll im Zusammenhang mit der Schaffung der Differential- und Integralrechnung durch Newton und Leibniz Ende des 17. Jahrhunderts in Erscheinung. Seit diesem Zeitpunkt ist die Entwicklung der Analysis untrennbar mit der Entwicklung der Physik verbunden, wobei sich beide Wissenschaften gegenseitig befriedet haben. Tabelle 10.1 zeigt wichtige physikalische Disziplinen und eine Auswahl von damit verbundenen mathematischen Theorien.

Ihre volle Kraft entfaltet die Analysis dabei im Zusammenspiel mit anderen mathematischen Disziplinen wie Geometrie, Topologie, Algebra, Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

¹David Hilbert (1862-1943) war einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten. In Göttingen setzte er die große Tradition von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) und Bernhard Riemann (1826-1866) fort. Hilbert erzielte in allen Gebieten der Mathematik (Algebra und Zahlentheorie, Geometrie, Analysis und Logik) fundamentale Ergebnisse. Beispielsweise wird die moderne Quantentheorie in der Sprache der Hilberträume formuliert.

Auf dem zweiten mathematischen Weltkongress in Paris im Jahre 1900 formulierte Hilbert seine berühmten 23 Probleme, die die Entwicklung der Mathematik des 20. Jahrhunderts wesentlich beeinflusst haben [vgl. Aleksandrov 1983].

Tabelle 10.1

physikalische Disziplin	mathematische Theorie
klassische Mechanik	dynamische Systeme (gewöhnliche Differentialgleichungen), Variationsrechnung, Stabilitätstheorie, partielle Differentialgleichungen (Hamilton-Jacobi-Theorie), Liegruppen (Symmetrie), symplektische Geometrie, Riemannsche Geometrie, Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten (Zustandsräume)
geometrische Optik	Variationsrechnung, projektive Geometrie, symplektische Geometrie (Lagrangemannigfaltigkeiten), Topologie (Morsetheorie, Maslovindex und Kaustik), Fourierintegraloperatoren und Pseudodifferentialoperatoren (Distributionen)
klassische statistische Mechanik	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Maßtheorie, Informationstheorie (Entropie), Ergodentheorie, symplektische Geometrie
phänomenologische Thermodynamik/ physikalische Chemie/ mathematische Biologie/ Halbleiter	Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten, Systeme von partiellen Differentialgleichungen (Reaktions-Diffusionsprozesse), stochastische Prozesse und das unendlichdimensionale Wienerintegral auf Räumen von Trajektorien (Diffusion), unendlichdimensionale dynamische Systeme (Halbgruppen/Semiflüsse) und nichtlineare Funktionalanalysis
Hydrodynamik	partielle Differentialgleichungen, unendlichdimensionale dynamische Systeme (Halbgruppen / Semiflüsse), stochastische Prozesse (Turbulenz), nichtlineare Funktionalanalysis
Elastizitätstheorie	partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Integralgleichungen, unendlichdimensionale dynamische Systeme, algebraische Invariantentheorie (effektive Formulierung von Materialgesetzen), Liegruppen (Symmetrie), Bifurcationstheorie (Ausbeulung von Stäben und Platten), nichtlineare Funktionalanalysis
Elektrodynamik	Vektoranalysis, Tensoranalysis, Differentialformen, Krümmung von Hauptfaserbündeln, Riemannsche Geometrie, partielle Differentialgleichungen, Potentialtheorie und Integralgleichungen, Theorie der Distributionen (verallgemeinerte Funktionen), Differentialtopologie (de Rham'sche Kohomologie und Homologie)
spezielle Relativitätstheorie	Tensoranalysis, Riemannsche Geometrie
allgemeine Relativitätstheorie (Kosmologie)	Tensoranalysis, Riemannsche Geometrie, nichtlineare partielle Differentialgleichungen, unendlichdimensionale dynamische Systeme (Hamiltonsche Systeme), nichtlineare Funktionalanalysis
Quantenmechanik/ Quantenchemie/ Quantenfeldtheorie/ Quantenstatistik/ Festkörpertheorie/ Superstringtheorie	<ul style="list-style-type: none"> (i) Hilberträume, Spektraltheorie von Operatoren und Streutheorie, harmonische Analysis, C^*-Algebren und von-Neumann-Algebren, nichtkommutative Geometrie, Quantengruppen; (ii) unendlichdimensionale dynamische Systeme (unitäre Flüsse / Gruppen); partielle Differentialgleichungen; Integralgleichungen; (iii) Wahrscheinlichkeitsrechnung (stochastische Prozesse), Feynmanintegral (unendlichdimensionales Integral); (iv) Darstellungstheorie von Liealgebren und Liegruppen, Super-Liealgebren und Super-Liegruppen (graduierte Algebren); (v) Superanalysis zur einheitlichen Beschreibung von Fermionen und Bosonen; (vi) komplexe Mannigfaltigkeiten, algebraische Geometrie, Zahlentheorie; (vii) Topologie (z. B. Knotentheorie, K-Theorie, charakteristische Klassen, Indextheorie von Atiyah-Singer);
Eichfeldtheorie für eine einheitliche Theorie der fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur (Standardmodell der Elementarteilchen)	Liegruppen und Liealgebren, Krümmung von Hauptfaserbündeln, Vektorbündel, Topologie (charakteristische Klassen → topologische Ladungen)

Tabelle 10.2

Phänomen in der Natur	mathematisches Modell
Gewinnung der Grundgleichungen der Physik	Variationsrechnung (Prinzip der stationären Wirkung)
Wechselwirkungen	mathematische Nichtlinearitäten
zeitabhängige Prozesse (i) reversibel (ii) irreversibel (iii) chaotisches Verhalten (Turbulenzen)	dynamische Systeme (i) Flüsse (einparametrische Gruppen) (ii) Semiflüsse (Halbgruppen) (iii) z. B. seltsame Attraktoren mit einer gebrochenen Dimension
Symmetrie (Erhaltungsgesetze)	Liegruppen (Liealgebren)
Strukturbildung in Physik, Chemie und Biologie	dynamische Systeme, Differentialtopologie und algebraische Geometrie, Singularitätentheorie (Katastrophentheorie) (a) strukturelle Stabilität (b) strukturelle Instabilität (Bifurkation) (c) Generizität (d) Transversalität
globale Effekte	Topologie (topologische Räume [z. B. Mannigfaltigkeiten] und topologische Abbildungen [z. B. Diffeomorphismen zwischen Mannigfaltigkeiten]) (i) Homologie = Struktur von <i>geometrischen</i> Objekten (topologische Räume, Mannigfaltigkeiten) (ii) Kohomologie = Struktur von <i>analytischen</i> Objekten (z. B. Funktionen, Differentialformen) auf geometrischen Objekten (iii) Homotopie = Deformation
Quantenzahlen	(a) irreduzible Darstellungen von Liealgebren (z. B. $su(N)$) (b) topologische Invarianten = topologische Ladungen (z. B. Eulerzahl, charakteristische Klassen, Abbildungsgrad) (c) Solitonen (Instantonen, magnetische Monopole)
Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise sowie Konvergenz von Näherungsverfahren	Funktionalanalysis

10.1.1 Die Grundstruktur der mathematischen Formulierung physikalischer Theorien

In Tabelle 10.2 stellen wir einige allgemeine Prinzipien dar, die wir kurz erläutern wollen.

Bis auf wenige Ausnahmen ergeben sich alle Grundgleichungen der Physik aus *Variationsprinzipien*² (Prinzip der stationären Wirkung). Dadurch entstehen Systeme von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen, je nachdem ob das System endlich viele Freiheitsgrade (klassische Mechanik) oder unendlich viele Freiheitsgrade (Feldtheorie) besitzt.

Erhaltungssätze folgen aus *Symmetrieeigenschaften* des Variationsintegrals (Noethertheorem; vgl. 14.5). Zum Beispiel ergibt sich die Erhaltung der Energie, falls sich das System homogen bezüglich der Zeit verhält, d. h., neben einem ablaufenden Prozess \mathbb{P} ist auch jeder Prozess möglich, der sich aus \mathbb{P} durch eine Zeittranslation ergibt.

²Die Variationsrechnung wurde von Leonhard Euler (1707-1783) geschaffen und von Joseph Louis Lagrange (1736-1813) weiter ausgebaut. Euler war der produktivste Mathematiker aller Zeiten. Bisher sind 72 Bände seiner gesammelten mathematischen und physikalischen Werke erschienen; zahlreiches Material harrt noch der Herausgabe (davon 15 Bände mit Briefen).

Alle Gleichungen der Physik, die *Wechselwirkungen* in der Natur beschreiben, sind *nichtlinear*. Eine scheinbare Ausnahme bilden die linearen Maxwellgleichungen. Diese enthalten jedoch nur einen Teil der elektromagnetischen Phänomene. Die vollständige Theorie (Quantenelektrodynamik), die die Wechselwirkungen zwischen elektromagnetischen Feldern (Photonen) und Elementarteilchen (Elektronen und Positronen) berücksichtigt, ist tatsächlich nichtlinear.

Ferner ist die lineare Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik und Quantenchemie eine Näherung der relativistischen Dirac-Gleichung, die ihre volle Kraft erst durch Ankopplung an das elektromagnetische Feld entfaltet (nichtlineare Gleichung der Quantenelektrodynamik; vgl. 14.8.4).

Nur in wenigen Spezialfällen kann man die Gleichungen der Physik explizit lösen (z. B. Solitonen). Um konsistente *Näherungsverfahren* auf Computern zu erhalten, benötigt man einerseits abstrakte *Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise* für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Variationsprobleme, Variationsungleichungen, Integralgleichungen usw. und andererseits *Konvergenzbeweise mit Fehlerabschätzungen*, die theoretisch zeigen, dass die Näherungsverfahren gegen die Lösungen konvergieren. Das geschieht heutzutage alles im Rahmen der *Funktionalanalysis* (vgl. die Kapitel 7, 11 und 14). Die Probleme werden dabei als

- (i) Operatorgleichungen (stationäre Prozesse),
- (ii) Operatordifferentialgleichungen (instationäre Prozesse) oder als
- (iii) Extremalprobleme für Funktionale

in *unendlichdimensionalen* Räumen (Hilberträume, Banachräume, Hilbert- oder Banachmannigfaltigkeiten usw.) formuliert. Eine besondere Rolle spielen in diesem Zusammenhang *Lebesgueräume* und *Sobolevräume* von Funktionen mit *verallgemeinerten* Ableitungen, zu deren Definition die moderne Maß- und Integrationstheorie (das Lebesgueintegral) benötigt wird (vgl. 10.5 und 11.2.6).

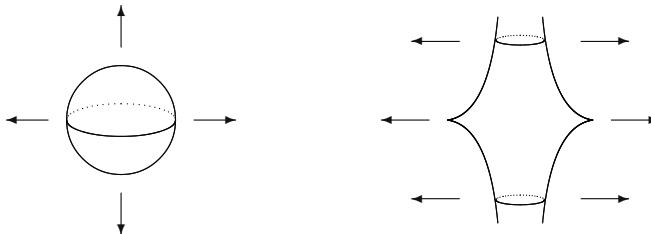
Die abstrakten Existenzbeweise der Funktionalanalyse erlauben jedoch auch tiefere physikalische Einsichten. Henri Poincaré (1854-1912) schuf Ende des vorigen Jahrhunderts im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen zur Himmelsmechanik (z. B. Dreikörperproblem) die Topologie und die qualitative Theorie dynamischer Systeme. Die Zeitentwicklung der meisten physikalischen Systeme führt wegen der unendlichen Anzahl der Freiheitsgrade auf *unendlichdimensionale* dynamische Systeme (vgl. 13.16). Um diese parallel zum klassischen endlichdimensionalen Fall qualitativ untersuchen zu können (Stabilität, Attraktoren, Chaos usw.), benötigt man das unendlichdimensionale dynamische System zunächst als ein mathematisches Objekt in einem Zustandsraum. Dieses Objekt ergibt sich durch abstrakte Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für Operatordifferentialgleichungen im Rahmen der Funktionalanalysis.³ Die *Zustandsräume* sind in der Regel Sobolevräume oder Mannigfaltigkeiten, die lokal wie Sobolevräume aussehen (vgl. 11.2.6). Mit Hilfe solcher Existenzbeweise konnte beispielsweise 1983 nachgewiesen werden, dass das dynamische System, welches die Bewegung zäher (viskoser) Flüssigkeiten im Rahmen der Navier-Stokes-Differentialgleichungen beschreibt, einen Attraktor von gebrochener Dimension d besitzt, wobei d der Anzahl der Freiheitsgrade entspricht, die die Physiker bei Turbulenz beobachten (vgl. 14.4.2).

Man unterscheidet zwischen lokaler und globaler Analysis. Im Mittelpunkt der *globalen Analysis* steht der Begriff der *Mannigfaltigkeit*, der ein zentraler Begriff der modernen Mathematik und Physik ist (vgl. Abschnitt 14.9 über die Geometrisierung der Physik). Ein einfaches Beispiel für eine Mannigfaltigkeit bietet die Erdoberfläche. Lokal kann man diese auf einer ebenen Landkarte darstellen. Die Erdoberfläche besitzt aber darüber hinaus globale Eigenschaften, die man den Landkarten nicht entnehmen kann.

³ Existenzbeweise für unendlichdimensionale dynamische Systeme erfordern einen sehr aufwendigen analytischen Apparat – im Unterschied zum endlichdimensionalen Fall mit seinen durchsichtigen Existenzbeweisen für gewöhnliche Differentialgleichungen auf der Basis des Fixpunktsatzes von Banach (vgl. 12.1).

Es gibt physikalische Effekte, die von der globalen Struktur des Kosmos herrühren. Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie (Standardmodell des Urknalls) gibt es für den heutigen expandierenden Kosmos zwei Möglichkeiten:

(i) Das “gekrümmte Weltall” besitzt ein *endliches Volumen* (analog zu einer Sphäre (Abb. 10.1(a))). Dann zieht sich das Weltall nach vielen Millarden Jahren wieder auf einen heißen Feuerball zusammen (elliptische nichteuklidische Geometrie).



(a) expandierendes Weltall mit endlichem Volumen (Sphäre)

(b) expandierendes Weltall mit unendlichem Volumen (Pseudosphäre)

Abb. 10.1

(ii) Das “gekrümmte Weltall” besitzt ein *unendliches Volumen* (analog zu einer Pseudosphäre (Abb. 10.1(b))). Dann expandiert das Weltall bis in alle Ewigkeit. Am Ende steht ein absolut finnischer Kosmos, in dem möglicherweise auch die Protonen zerfallen sind (hyperbolische nichteuklidische Geometrie).

Favorisiert wird (ii) mit einer beschleunigten Expansion (vgl. 16.5).

Viele Physiker glauben, dass es Zusammenhänge zwischen der globalen Struktur des Kosmos und den Eigenschaften von Elementarteilchen geben muss, die in einer zukünftigen allgemeinen Theorie des Mikrokosmos und des Makrokosmos mathematisch zu formulieren sind.

Globale Eigenschaften werden in der Topologie studiert, die die allgemeinste Form der Geometrie darstellt und gleichzeitig die Formulierung des Grenzwertbegriffs gestattet (vgl. 11.2.1 und Kapitel 18).

10.1.2 Drei tiefe Sätze der Analysis

Drei der tiefsten Sätze der Analysis sind das *theorema egregium*⁴ von Gauß, der allgemeine *Integralsatz von Stokes* für Differentialformen und der *Satz von Gauß–Bonnet–Chern*. Das soll jetzt diskutiert werden.

Das Theorema egregium von Gauß: Dieser Satz besagt, dass die Gaußsche Krümmung einer Fläche allein durch Messungen auf der Fläche bestimmt werden kann ohne Benutzung des sie umgebenden dreidimensionalen Raumes (vgl. 16.1.2).

Das bedeutet, dass “Krümmung” eine fundamentale *innere Eigenschaft* der Fläche (Mannigfaltigkeit) darstellt. Die dadurch angeregte Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffs auf beliebige Mannigfaltigkeiten, deren Definition frei ist von einem umgebenden Raum, bildet den Ausgangspunkt dafür, dass in der modernen Physik die fundamentalen Kräfte durch Krümmungen von Mannigfaltigkeiten beschrieben werden (vgl. 14.9 über die Geometrisierung der Physik).

⁴Die Bezeichnung stammt von Gauß selbst (das “vorzügliche Theorem”). Dieses Theorem veröffentlichte er 1827 in seiner Flächentheorie (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*) im Anschluss an seine umfangreichen, physisch sehr anstrengenden Landvermessungsarbeiten von 1821 bis 1825 im Königreich Hannover.

Der allgemeine Integralsatz von Stokes: Es gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (10.1)$$

Diese prägnante Formel beinhaltet einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Analysis und Topologie. Genauer stellt sie die Verbindung her zwischen den beiden topologischen Grundbegriffen „Homologie“ (geometrische Struktur einer Mannigfaltigkeit) und „Kohomologie“ (analytische Gebilde = Differentialformen auf der Mannigfaltigkeit).

Die Formel (10.1) verwandelt ein Integral über M in ein Randintegral (vgl. 10.2.7.5). Wir wollen zeigen, dass sich hinter (10.1) sehr viele wichtige Phänomene verbergen.

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung: Der Prototyp für (10.1) ist die klassische Formel

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a), \quad (10.2)$$

die man den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung nennt. Vom geometrischen Standpunkt aus stellt (10.2) den Zusammenhang zwischen Tangente (Ableitung) und Flächeninhalt (Integral) her.

Klassischer Satz von Gauß und Erhaltungsgesetze der Physik: Im dreidimensionalen Raum entspricht (10.2) dem Integralsatz von Gauß

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{j} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dF \quad (10.3)$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} am Rand $\partial\Omega$ des Gebiets Ω (Abb. 10.2) und $x = (x_1, x_2, x_3)$ sowie $dx = dx_1 dx_2 dx_3$.

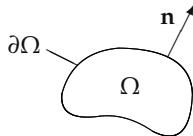


Abb. 10.2

Interpretiert man \mathbf{j} als elektrischen Stromdichtevektor, dann beschreibt (10.3) die Bilanz zwischen der im Gebiet Ω vorhandenen Ladung und der über den Rand $\partial\Omega$ einströmenden Ladung. Tatsächlich ist (10.3) der Ausgangspunkt dafür, dass alle Gleichungen der Form

$$\varrho_t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (10.4)$$

Erhaltungsgesetze der Physik beinhalten. Zum Beispiel entspricht (10.4) der Erhaltung der elektrischen Ladung, falls ϱ gleich der elektrischen Ladungsdichte und \mathbf{j} gleich dem elektrischen Stromdichtevektor ist.

Die Formulierung von (10.2) für N -dimensionale Gebiete Ω lautet

$$\int_{\Omega} \partial_j f dx = \int_{\partial\Omega} f n_j dF, \quad j = 1, \dots, N, \quad (10.5)$$

wobei $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ den äußeren Einheitsnormalenvektor am Rand $\partial\Omega$ darstellt. Ferner ist $x = (x_1, \dots, x_N)$ und $\partial_j f = \partial f / \partial x_j$.

Die Formel der partiellen Integration als Schlüssel zur modernen Theorie der partiellen Differentialgleichungen: Setzt man speziell $f = \varphi\psi$, dann erhält man aus (10.5) die Formel der partiellen Integration

$$\int_{\Omega} \varphi \partial_j \psi \, dx = - \int_{\Omega} \psi \partial_j \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi \psi n_j \, dF. \quad (10.6)$$

Diese Formel ist der Schlüssel zur Weiterentwicklung der klassischen Differentialrechnung und die Basis der modernen Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Erstens gestattet es diese Formel, verallgemeinerte Ableitungen für Funktionen zu definieren und damit Sobolevräume einzuführen (vgl. 11.2.6). Zweitens erlaubt es (10.6), mathematische Objekte einzuführen (verallgemeinerte Funktionen oder Distributionen), die stets beliebig oft differenzierbar sind (vgl. 10.4). Im Unterschied zum klassischen Differentialkalkül wird damit die *Differentiation* zu einer *universellen Operation*, die stets ausführbar ist.

Um zum Beispiel eine verallgemeinerte Lösung U der Differentialgleichung

$$-\Delta U = \varrho \quad (10.7)$$

auf dem dreidimensionalen Gebiet Ω zu definieren, multiplizieren wir diese Gleichung mit einer Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, d. h., φ ist glatt und verschwindet in einem Randstreifen von Ω . Zweimalige partielle Integration ergibt dann⁵

$$-\int_{\Omega} U \Delta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varrho \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (10.8)$$

Eine Funktion U heißt *verallgemeinerte Lösung* der klassischen Gleichung (10.7) genau dann, wenn die Integralidentität (10.8) erfüllt ist. Man beachte, dass in (10.8) überhaupt keine klassischen Ableitungen von U benötigt werden. Gleichung (10.7) beschreibt zum Beispiel das elektrostatische Potential U einer Ladungsdichte ϱ . Im Unterschied zur klassischen Theorie (10.7) sind in (10.8) auch unstetige Ladungsverteilungen ϱ erlaubt.

Man kann in diesem Rahmen noch einen weiteren entscheidenden Schritt tun, indem man mit dem gleichen Kalkül kontinuierliche und diskrete Ladungen einheitlich behandelt. Befindet sich beispielsweise im Punkt $x = 0$ eine elektrische Ladung der Stärke Q , dann benutzen die Physiker seit den dreißiger Jahren die sogenannte Diracsche Deltafunktion $\delta(x)$, d. h., sie verwenden formal die Ladungsdichte

$$\text{„}\varrho(x) = Q\delta(x)\text{“}. \quad (\text{D})$$

Tatsächlich ist δ keine klassische Funktion, sondern eine Distribution (verallgemeinerte Funktion). In der von Laurent Schwartz um 1950 geschaffenen Theorie der Distributionen lautet das (D) entsprechende verallgemeinerte Problem zur Ausgangsgleichung (10.7) folgendermaßen:

$$-\int_{\Omega} U \Delta \varphi \, dx = Q\varphi(0) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (10.9)$$

Hinter dieser Formel verbirgt sich folgende physikalische Intuition. Aus der Regel „Integration der Dichte = Ladung“ erhalten wir

$$\text{„}\int_{\Omega} \delta(x) \, dx = 1\text{“}.$$

⁵Summieren wir über j von 1 bis 3, dann gilt explizit

$$\int_{\Omega} \varrho \varphi \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta U) \varphi \, dx = \int_{\Omega} (-\partial_j^2 U) \varphi \, dx = \int_{\Omega} \partial_j U \partial_j \varphi \, dx = \int_{\Omega} U (-\partial_j^2 \varphi) \, dx.$$

Bei der partiellen Integration verschwinden alle Randintegrale, weil die Testfunktionen φ in einem Randstreifen gleich null sind.

Da sich in den Punkten $x \neq 0$ keine Ladungen befinden, muss die Dichte dort verschwinden, d. h., es ist $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$. Daraus folgt formal

$$\int_{\Omega} \varrho \varphi \, dx \equiv \int_{\Omega} Q\delta(x)\varphi(x) \, dx = Q\varphi(0) \int_{\Omega} \delta(x) \, dx = Q\varphi(0).$$

In diesem Sinne ergibt sich (10.9) aus (10.8) mit $\varrho = Q\delta$.

Diese Methode der Formulierung verallgemeinerter Lösungen lässt sich auf alle linearen Differentialgleichungen und große Klassen nichtlinearer Differentialgleichungen der Naturwissenschaften anwenden.

Klassische Greensche Formeln: Auch die in der Elektrodynamik häufig benutzten beiden Greenschen Formeln

$$\int_{\Omega} \psi \Delta \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{grad} \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dF, \quad (10.10)$$

$$\int_{\Omega} \psi \Delta \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi \Delta \psi \, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \, dF \quad (10.11)$$

ergeben sich sofort aus (10.6) durch einmalige bzw. zweimalige partielle Integration und lassen sich auf beliebige lineare partielle Differentialoperatoren verallgemeinern.

Der klassische Satz von Stokes: Für Flächen M im dreidimensionalen Raum erhält man aus (10.1) den klassischen Satz von Stokes

$$\int_M \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dF = \int_{\partial M} \mathbf{v} \, dx, \quad (10.12)$$

der zum Beispiel die Wirbelbildung in einer Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} beschreibt.

Die Maxwellschen Gleichungen: Die Vektoroperationen „div“ und „rot“ erlauben eine elegante Formulierung der *Maxwellschen Gleichungen* für das elektrische Feld \mathbf{E} und das magnetische Feld \mathbf{H} im Vakuum bei Anwesenheit von elektrischen Ladungen und Strömen:⁶

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= \varrho, & \text{rot } \mathbf{E} &= -\mathbf{H}_t, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, & \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \mathbf{E}_t \end{aligned} \quad (10.13)$$

(ϱ = elektrische Ladungsdichte, \mathbf{j} = elektrischer Stromdichtevektor). Anschaulich beinhalten diese Gleichungen Aussagen über die Quellen und Wirbel des elektrischen und magnetischen Feldes. Beispielsweise ist der in „ $\text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{H}_t$ “ auftretende Term $-\mathbf{H}_t$ verantwortlich für die Existenz elektromagnetischer Wellen (Licht, Radiowellen). Tatsächlich wurde dieser Term von Maxwell (1831-1879) bei der Formulierung seiner Grundgleichungen im Jahre 1864 hinzugefügt, um die Existenz elektromagnetischer Wellen vorhersagen zu können, die erst 1888 von Heinrich Hertz (1857-1894) experimentell nachgewiesen wurden.

Eine noch elegantere Formulierung der Maxwellschen Gleichungen in der Sprache der Differentialformen: Die wenigen, wundervollen Gleichungen (10.13) beherrschen alle klassischen elektrodynamischen Effekte. Trotzdem ist die Sprache der Vektoranalysis noch nicht vollkommen, weil die Gleichungen (10.13) eine grundlegende Symmetrieeigenschaft besitzen, die man ihnen in der vorliegenden Form in keiner Weise ansieht. Während Einstein beim Aufbau seiner speziellen Relativitätstheorie im Jahre 1905 die klassische Mechanik grundlegend revidieren musste, war das für die Elektrodynamik nicht nötig, weil die Maxwellschen Gleichungen gegenüber

⁶Die Gleichungen (10.13) beziehen sich auf ein Maßsystem, in dem die Lichtgeschwindigkeit c und die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ϵ_0 gleich eins sind.

Lorenztransformationen invariant sind (Wechsel von Raum- und Zeitkoordinaten beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen Inertialsystem). Eine Formulierung, die diese relativistische Invarianz ausdrückt und gleichzeitig die Form der Maxwellschen Gleichungen in beliebigen Bezugssystemen angibt, lautet in der Sprache der Differentialformen

$$dF = 0, \quad -\delta F = J. \quad (10.14)$$

Hierbei entspricht die 2-Form F dem elektromagnetischen Feld (\mathbf{E}, \mathbf{H}) , und die 1-Form J korrespondiert zu den Ladungen und Strömen ϱ, \mathbf{j} . Die Differentiationsoperatoren d und δ besitzen die Eigenschaft

$$\begin{aligned} d^2 &= 0 && (\text{de Rham Kohomologie}), \\ \delta^2 &= 0 && (\text{Weyl-Hodge Homologie}). \end{aligned} \quad (10.15)$$

Wenden wir δ auf (10.14) an, dann erhalten wir $-\delta^2 F = \delta J$, also

$$\delta J = 0 \quad (\text{Erhaltung der elektrischen Ladung}).$$

Ferner besitzt die Gleichung $F = dA$ wegen $dF = 0$ und der trivialen Kohomologie des \mathbb{R}^4 (Lemma von Poincaré) eine Lösung A . Dabei entspricht A dem sogenannten Viererpotential. Die Einzelheiten findet man in 10.2.9. Wir erwähnen an dieser Stelle nur, dass das Viererpotential den Schlüssel zur modernen Eichfeldtheorie der Elementarteilchenphysik darstellt. Dabei ergeben sich verallgemeinerte Maxwellsche Gleichungen, bei denen die Komponenten des Viererpotentials Matrizen sind (d. h., sie gehören einer Liealgebra an). In der Sprache der modernen Differentialgeometrie gilt grob gesprochen

$$\begin{aligned} \text{Viererpotential } A &= \text{Zusammenhang eines Hauptfaserbündels } \mathbb{H}, \\ \text{Feld } F &= \text{Krümmung von } \mathbb{H}. \end{aligned}$$

In der Sprache der Differentialtopologie enthalten die Maxwellschen Gleichungen die mathematischen Phänomene „Homologie“ und „Kohomologie“ und spiegeln deren Dualität wider.

Der Satz von Gauß–Bonnet–Chern:⁷ Für eine $2n$ -dimensionale orientierte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit gilt

$$\int_M \gamma = \chi(M). \quad (10.16)$$

Die einfachste Variante dieses Satzes in der klassischen Flächentheorie besagt, dass die Relation

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K \, dF = \chi(M) \quad (10.17)$$

gültig ist, wobei K die Gaußsche Krümmung (vgl. 4.3.3.3.) und $\chi(M)$ die sogenannte *Eulerzahl* der geschlossenen Fläche M im \mathbb{R}^3 bezeichnet. Für eine Sphäre vom Radius r ist beispielsweise $K = 1/r^2$ und $\chi(M) = 2$. Für den Torus hat man $\chi(M) = 0$. Die Bedeutung der Formel (10.17) besteht darin, dass eine analytische Größe (die Gaußsche Krümmung K aus dem theorema egregium) mit einer rein topologischen Invarianten (der Eulerzahl $\chi(M)$) verbunden wird. Die Eulerzahl $\chi(M)$ hat ihren anschaulichen Ursprung in der Eulerschen Polyederformel. Trianguliert man die Fläche M in (10.17), dann gilt

$$\chi(M) = \text{Anzahl der Eckpunkte} - \text{Anzahl der Kanten} + \text{Anzahl der Dreiecke}.$$

⁷Der klassische Satz von Gauß–Bonnet–Dyck für Flächen wurde 1944 von Chern in einer tiefsinnigen Arbeit auf höhere Dimensionen verallgemeinert. Das war ein Markstein in der Entwicklung der modernen Mathematik. Tatsächlich erfordert der Beweis dieses Satzes, d. h. die Konstruktion der Differentialform γ im Integranden, sehr abstrakte Überlegungen, die typisch für die moderne Geometrie sind (Theorie der charakteristischen Klassen).

Die Zahl $\chi(M)$ ist dabei von der gewählten Triangulierung unabhängig und stellt eine topologische Invariante dar, d. h., bei topologischen Transformationen von M ändert sich $\chi(M)$ nicht. Topologische Transformationen entstehen anschaulich dadurch, dass man sich die Fläche aus Gummi bestehend vorstellt und den Gummi beliebig verbiegt, ohne ihn zu zerreissen.⁸

Die Differentialform γ repräsentiert eine sogenannte *charakteristische Klasse* (die *Eulerklasse* im Rahmen der de Rhamschen Kohomologie). Die Theorie der charakteristischen Klassen stellt eine der tiefsten mathematischen Erkenntnisse zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Analysis und Topologie dar. Zum echten Verständnis der Theorie der charakteristischen Klassen benötigt man Vektorbündel über der Basismannigfaltigkeit M . Diese Vektorbündel entstehen anschaulich dadurch, dass man in jedem Punkt E von M (z. B. eine Kurve oder Fläche) einen linearen Raum \mathbb{L}_E anheftet, so dass die Räume \mathbb{L}_E (die man Fasern nennt) in „glatter Weise“ von den Punkten E abhängen. Abb. 10.3(a) zeigt einen Zylindermantel, den man als Vektorbündel auffassen kann. An jeden Punkt E der Basismannigfaltigkeit M (Kreislinie) wird eine Gerade \mathbb{L}_E angeheftet (die „Mantellinie“ des Zylinders) (vgl. Kapitel 19).

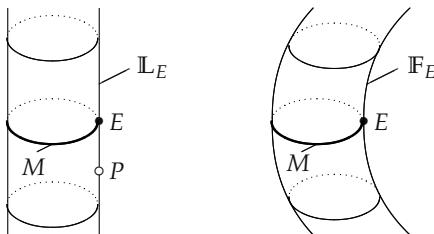
Mannigfaltigkeiten und Faserbündel in der Physik: Vom physikalischen Standpunkt aus sind *Mannigfaltigkeiten* und *Vektorbündel* (oder allgemeinere Faserbündel) sehr natürliche Objekte, was die folgende allgemeine Überlegung zeigen soll.⁹

(a) Um physikalische Prozesse in Raum und Zeit zu beschreiben, benötigt man Bezugssysteme. In jedem Bezugssystem messen die Beobachter Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und eine Zeitkoordinate $x_4 = t$.

(b) Verschiedene Beobachter (z. B. auf der Erde und in einer fernen Galaxie) müssen ihre unterschiedlichen Koordinaten x_1, \dots, x_4 ineinander umrechnen, um Informationen über Beobachtungen im Weltall austauschen zu können.

(c) Die physikalischen Prozesse besitzen einen „absoluten Charakter“, d. h., sie finden auch ohne Fixierung eines Bezugssystems statt. Eine „absolute Größe“ ist dabei ein „Ereignis“ E , dem in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedliche Raum- und Zeitkoordinaten entsprechen.

Das natürliche globale mathematische Objekt zur Beschreibung dieser Situation ist eine *Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit* M , die aus der Menge aller Ereignisse E besteht. Bei Wahl einer geeigneten Karte (Bezugssystem) werden dem „Punkt“ E lokale Koordinaten zugeordnet, die bei Kartenwechseln ineinander umgerechnet werden können (wie bei Landkarten auf der Erde).



(a) Vektorbündel

(b) Faserbündel

Abb. 10.3

(d) Physikalische Felder $\Phi = \Phi(E)$ sind Objekte (z. B. Tensoren oder Spinoren), die von Raum und Zeit, genauer von dem Ereignis E abhängen. Alle möglichen Feldwerte zu einem Ereignis E

⁸Genauer sind topologische Transformationen bijektive (eineindeutige) Abbildungen, die zusammen mit ihrer inversen Abbildung stetig sind.

⁹In Abb. 10.3(a) stellt die Kreislinie M die „Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit“ dar. Die „Ereignisse“ E sind die Punkte der Kreislinie M . Den lokalen „Raum-Zeit-Koordinaten“ entsprechen in diesem Bilde unterschiedliche lokale Koordinaten der Kreislinie M (z. B. unterschiedliche Parametrisierungen durch einen Winkel φ). Ein Punkt P der Mantellinie \mathbb{L}_E korrespondiert zur „Stärke eines physikalischen Feldes“ in dem Raum-Zeitpunkt E .

bilden einen linearen Raum \mathbb{L}_E , den man sich im Punkt E an die Mannigfaltigkeit M angeheftet denken kann. Das ergibt ein *Vektorbündel*.

Heftet man nichtlineare Objekte \mathbb{F}_E (Fasern) an jeden Punkt einer Basismannigfaltigkeit M , dann entstehen sogenannte *Faserbündel* (Abb. 10.3(b)). In dem wichtigen Spezialfall

Faser $\mathbb{F}_E = \text{Liegruppe (Symmetrie)}$

ergeben sich sogenannte *Hauptfaserbündel*, die für ein tieferes mathematisches Verständnis der Eichfeldtheorien der modernen Elementarteilchentheorie erforderlich sind und die vorhandenen physikalischen Symmetrien mathematisch reflektieren (vgl. 14.8).

Topologische Ladungen: Die Formel (10.16) beschreibt eine sogenannte „topologische Ladung“ oder „topologische Quantenzahl“. Charakteristisch für die Elementarteilchenphysik sind Quantenzahlen (Hyperladung, Isospin, Seltsamkeit, Charm¹⁰ usw.). Es ist erstaunlich, dass bei der Vielgestaltigkeit der Formen in der Welt Quantenprozesse durch *ganze Zahlen* wesentlich bestimmt werden.

In der Topologie ordnen die Mathematiker den Objekten ebenfalls ganze Zahlen (topologische Invarianten) zu, die bei „vernünftigen“ Gestaltänderungen (topologischen „Gummitransformationen“) fest bleiben (z. B. die Bettischen Zahlen, die Eulerzahl oder der Abbildungsgrad). Es gibt zahlreiche Hinweise darauf, dass hier ein tiefer Zusammenhang zwischen Topologie und Quantentheorie besteht, der jedoch bisher nur in Ansätzen erkannt worden ist. Zum Beispiel möchte man verstehen, warum elektrische Ladungen nur als Vielfache einer Elementarladung auftreten. Die Eichfeldtheorie sagt die Existenz magnetischer Monopole voraus, deren magnetische Ladung tatsächlich eine topologische Invariante ist.

In den folgenden Kapiteln wird der wesentliche Inhalt der Tabellen 10.1 und 10.2 so behandelt, dass ein breiter Leserkreis die mathematische Grundsubstanz verstehen kann. Eine ausführliche Darstellung mit gründlichen physikalischen Motivationen und vielen Anwendungen findet man in [Zeidler 1984ff, Vols. 1–4].

10.1.3 Glattheit

In der modernen Analysis spielen glatte Funktionen eine besondere Rolle. Die Basisstrategie besteht darin, allgemeine (nichtglatte) Situationen durch glatte Situationen zu approximieren. Wir vereinbaren die folgende Terminologie. Es bezeichne Ω eine nichtleere offene Menge des \mathbb{R}^n , und $\overline{\Omega}$ bezeichne den Abschluss von Ω , d. h., $\overline{\Omega}$ entsteht aus Ω durch Hinzufügen des Randes $\partial\Omega$.

Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gehört definitionsgemäß zur Klasse $C^k(\Omega)$ genau dann, wenn f stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzt. Speziell für $k = 0$ schreiben wir $C(\Omega)$, d. h., die Funktionen aus $C(\Omega)$ sind stetig auf Ω .

Die stetige Funktion $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ gehört zur Klasse $C^k(\overline{\Omega})$ genau dann, wenn f zur Klasse $C^k(\Omega)$ gehört und sich alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen lassen.

Die Funktion f gehört zur Klasse $C^\infty(\Omega)$ genau dann, wenn sie auf Ω stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung hat.

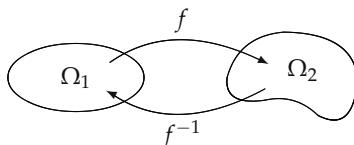


Abb. 10.4

¹⁰Diese Quantenzahlen ergeben sich aus der Darstellungstheorie der Liealgebra $su(N)$ (vgl. Kapitel 17).

Ferner gehört f zur Klasse der sogenannten Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$ genau dann, wenn f zu $C^\infty(\Omega)$ gehört und außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω gleich null ist.

Sind Ω_1 und Ω_2 Teilmengen des \mathbb{R}^n , dann heißt eine Abbildung $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ ein *Homöomorphismus* genau dann, wenn f bijektiv (eineindeutig) ist und sowohl f als auch die inverse Abbildung $f^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ stetig sind (Abb. 10.4).

Ein Homöomorphismus heißt ein *C^k -Diffeomorphismus* genau dann, wenn f und f^{-1} der Klasse C^k angehören.¹¹

Es sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Tupel von nichtnegativen ganzen Zahlen. Wir setzen¹² $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und definieren durch

$$\partial^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial^{\alpha_1} \xi_1 \partial^{\alpha_2} \xi_2 \cdots \partial^{\alpha_n} \xi_n}$$

eine beliebige partielle Ableitung $\partial^\alpha u$ von u der Ordnung $|\alpha|$. Dabei ist $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

10.2 Tensoranalysis, Differentialformen und mehrfache Integrale

Viele physikalische und geometrische Größen haben einerseits eine vom gewählten Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, andererseits kann man ihnen in jedem Koordinatensystem gewisse Maßzahlen zuordnen, die sich beim Wechsel der Koordinatensysteme ändern (z. B. die Komponenten des elektromagnetischen Feldes). In der Physik entspricht der Wechsel von Koordinatensystemen dem Wechsel von Beobachtungssystemen. Die Tensoranalysis untersucht das Transformationsverhalten einer Klasse wichtiger Größen. Dadurch ist es möglich, physikalische Gleichungen in einer solchen Form aufzuschreiben, dass sie in jedem Koordinatensystem gültig sind.

Die folgenden Betrachtungen lassen sich sofort auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Das geschieht in Kapitel 15. Dort werden wir auch zeigen, wie sich ein invariantener Tensorkalkül auf Mannigfaltigkeiten aufbauen lässt, der keinerlei Koordinaten benutzt. Es ist nützlich, dass man sowohl die im vorliegenden Abschnitt benutzte Sprache der Koordinaten als auch die in Kapitel 15 verwendete invariante Sprache beherrscht. Physiker ziehen die Koordinatensprache vor, während Mathematiker gern invariant arbeiten. Der invariante Kalkül hat den Vorteil, dass er sich auch auf unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten verallgemeinern lässt, die physikalische Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden beschreiben.

Physikalische Anwendungen des Tensorkalküls beziehen sich z. B. auf die spezielle Relativitätstheorie und die Maxwellsche Theorie des Elektromagnetismus (vgl. 10.2.8 ff), die Thermodynamik (vgl. 15.5), die symplektische Geometrie und klassische Mechanik (vgl. 15.6) sowie die Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie (vgl. 16.5).

Einen Spezialfall der Tensoranalysis stellt der Cartansche Kalkül der Differentialformen dar, der wegen seiner Geschmeidigkeit und Eleganz ein fundamentales Instrument der modernen Analysis, Differentialgeometrie und Physik darstellt.

Einsteinische Summenkonvention: Um das häufig auftretende Summationssymbol einzusparen, vereinbaren wir, über gleiche obere und untere Indizes von 1 bis n zu summieren:

$$a_j b^j = \sum_{j=1}^n a_j b^j, \quad a_j^j = \sum_{j=1}^n a_j^j, \quad a_{km}^j b_r^{km} = \sum_{k,m=1}^n a_{km}^j b_r^{km}.$$

In $\frac{\partial x^k}{\partial x^m}$ zählt k als oberer und m als unterer Index.

¹¹Genauer müssen wir voraussetzen, dass $f \in C^k(\Omega_1)$ und $f^{-1} \in C^k(\Omega_2)$ gilt, wobei Ω_1 und Ω_2 offen sind.

¹²Das Symbol „:=“ beschreibt die Definition einer Größe. Im vorliegenden Fall wird $|\alpha|$ als Abkürzung für $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ eingeführt.

Das Prinzip vom richtigen Indexbild: Der im folgenden dargestellte Tensorkalkül hat den Vorteil, dass er „von selbst“ arbeitet. Bei allen Gleichungen und Operationen hat man lediglich darauf zu achten, dass das Indexbild stimmt. Das bedeutet, dass auf der rechten und linken Seite jeder Relation die gleichen Indizes stehen müssen. Dabei werden solche Indizes nicht mitgezählt, über die nach der Einsteinschen Summenkonvention summiert wird.

Zum Beispiel stimmt das Indexbild in

$$a_j^i = b_k^j c_k^i, \quad a_{ij} = b_i^{kr} c_{krj}, \quad a = a_i^i,$$

während es in $a_j = b_r c_s$ nicht stimmt.

10.2.1 Tensordefinition

Ausgangspunkt für den Tensorkalkül sind das Transformationsgesetz für Zeitableitungen

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \quad (10.18)$$

sowie das Transformationsgesetz

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (10.19)$$

für die partiellen Ableitungen einer Funktion f . Hierbei fassen wir $x = (x^1, \dots, x^n)$ und $x' = (x'^1, \dots, x'^n)$ als unterschiedliche (krummlinige) Koordinaten des gleichen Punktes P auf. Das Transformationsgesetz für die Koordinaten lautet

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.20)$$

mit der Umkehrtransformation¹³

$$x^i = x^i(x'^1, \dots, x'^n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.21)$$

Im folgenden setzen wir

$$A_i^{i'}(P) := \frac{\partial x^{i'}(P)}{\partial x^i}, \quad A_{i'}^i(P) := \frac{\partial x^i(P)}{\partial x^{i'}}.$$

Definition: (i) Unter einem *kontravarianten Tensorfeld* a^i verstehen wir, dass jedem Punkt P die reellen Zahlen $a^1(P), \dots, a^n(P)$ zugeordnet sind, die sich bei einem Koordinatenwechsel (10.20) wie die Zeitableitungen in (10.18) transformieren, d. h.

$$a^{i'}(P) = A_i^{i'}(P)a^i(P).$$

(ii) Unter einem *kovarianten Tensorfeld* a_i verstehen wir, dass jedem Punkt P die reellen Zahlen $a_1(P), \dots, a_n(P)$ zugeordnet sind, die sich bei einem Koordinatenwechsel (10.20) wie die partiellen Ableitungen in (10.19) transformieren, d. h.

$$a_{i'}(P) = A_{i'}^i(P)a_i(P).$$

(iii) Ist jedem Punkt P eine reelle Zahl $a(P)$ zugeordnet, die sich bei einem beliebigen Koordinatenwechsel (10.20) nicht ändert, dann heißt a ein *skalares Feld*.

¹³Genauer verlangen wir, dass (10.20) einen Diffeomorphismus (der Klasse C^∞) von einer offenen Menge U des \mathbb{R}^n auf eine offene Menge U' des \mathbb{R}^n darstellt.

Anstelle von Tensorfeldern oder skalaren Feldern sprechen wir im folgenden auch nur kurz von Tensoren oder Skalaren.

Allgemeiner Tensorbegriff: Es kommt häufig vor, dass sich Größen wie Produkte von kontravarianten Tensoren a^i und kovarianten Tensoren a_j transformieren. Unter einem k -fach kontravarianten und m -fach kovarianten Tensorfeld verstehen wir, dass jedem Punkt P reelle Zahlen

$$a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}(P)$$

zugeordnet sind,¹⁴ die sich bei einem Koordinatenwechsel (10.20) wie das Produkt

$$a^{i_1}(P) \cdots a^{i_k}(P) a_{j_1}(P) \cdots a_{j_m}(P)$$

transformieren, d. h., es gilt

$$a_{j'_1 \dots j'_m}^{i'_1 \dots i'_k} = \varepsilon A_{i'_1}^{i'_1} A_{i'_2}^{i'_2} \cdots A_{i'_k}^{i'_k} A_{j'_1}^{j'_1} \cdots A_{j'_m}^{j'_m} a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} \quad (10.22)$$

in jedem Punkt P mit $\varepsilon = 1$.

Mit $\Delta(P)$ bezeichnen wir die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(x'^1, \dots, x'^n)}$ im Punkt P .

Konstruktion von Tensorfeldern: Ein Tensorfeld $a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}(P)$ kann dadurch konstruiert werden, dass man sich diese Zahlen in einem festen x^j -Koordinatensystem vorgibt und die entsprechenden Komponenten in einem beliebigen x'^j -Koordinatensystem gemäß (10.22) berechnet.

Tensordichten: Gilt (10.22) mit

$$\varepsilon = |\Delta(P)|^\alpha,$$

dann heißt $a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}$ eine *Tensordichte* vom Gewicht α (k -fach kontravariant und m -fach kovariant).

Pseudotensoren: Gilt (10.22) mit

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \Delta(P) |\Delta(P)|^\alpha,$$

dann heißt $a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}$ eine *Pseudotensordichte* vom Gewicht α (k -fach kontravariant und m -fach kovariant). Im Spezialfall $\alpha = 0$ sprechen wir von einem *Pseudotensor*. Pseudotensoren sind geometrische oder physikalische Größen, die von der Orientierung der Koordinatensysteme abhängen.

10.2.2 Beispiele für Tensoren

► **BEISPIEL 1** (krummlinige Koordinaten im \mathbb{R}^n): Die folgenden Betrachtungen werden in Abb. 10.5 für den Fall der Ebene ($n = 2$) anschaulich dargestellt. Es sei Ω eine offene Menge des

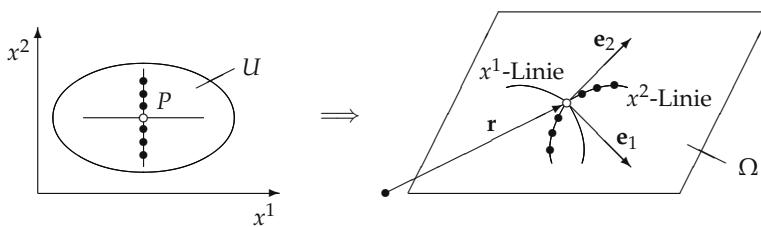


Abb. 10.5

¹⁴Die Indizes $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m$ laufen von 1 bis n .

\mathbb{R}^n . Dem Punkt P mit dem Radiusvektor \mathbf{r} ordnen wir die Koordinaten (x^1, \dots, x^n) zu (z. B. Polarkoordinaten). Variieren wir x^j und halten wir die übrigen x^i fest, dann entsteht eine Kurve, die wir die x^j -Koordinatenlinie durch den Punkt P nennen. Der Vektor

$$\mathbf{e}_j := \frac{\partial \mathbf{r}(P)}{\partial x_j} \quad (10.23)$$

ist ein Tangentenvektor an die x^j -Koordinatenlinie im Punkt P .

Das System $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ heißt die *natürliche Basis* im Punkt P bezüglich des krummlinigen x^i -Koordinatensystems.¹⁵

Bezeichne $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n'}$ die natürliche Basis bezüglich eines $x^{j'}$ -Koordinatensystems, dann gilt die Transformationsformel

$$\mathbf{e}'_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \mathbf{e}_{j'} \quad (10.24)$$

d. h., die natürliche Basis transformiert sich wie ein *kovariantes Tensorfeld*.

Es sei $\mathbf{v}(P)$ ein Vektorfeld auf Ω (z. B. Geschwindigkeitsfeld). Zerlegen wir $\mathbf{v}(P)$ bezüglich der natürlichen Basis im Punkt P , dann erhalten wir

$$\mathbf{v}(P) = v^j(P) \mathbf{e}_j.$$

Beim Übergang zum $x^{j'}$ -System ergibt sich $\mathbf{v}(P) = v^{j'}(P) \mathbf{e}'_j$. Aus (10.24) folgt

$$v^{j'}(P) = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} v^j(P),$$

d. h., die Komponenten v^j bilden ein *kontravariantes Tensorfeld*.

► **BEISPIEL 2** (Bogenlänge und metrisches Tensorfeld): Wir betrachten die gleiche Situation wie in Beispiel 1. Eine Kurve C in Ω kann man bei Wahl der krummlinigen Koordinaten x^1, \dots, x^n durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1(t), \dots, x^n(t))$$

mit dem Kurvenparameter t darstellen (z. B. $t = \text{Zeit}$). Wegen

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = \mathbf{e}_j \dot{x}^j$$

gilt für die Bogenlänge s von C die Beziehung¹⁶

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad \text{mit } g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

Dafür schreibt man kurz

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (10.25)$$

Bezüglich des $x^{j'}$ -Koordinatensystems erhält man

$$ds^2 = g_{i'j'} dx^{i'} dx^{j'}.$$

¹⁵Im allgemeinen Fall ist \mathbf{e}_j kein Einheitsvektor. In der physikalischen Literatur verwendet man zum Teil anstelle von \mathbf{e}_j den normierten Vektor $\bar{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_j / |\mathbf{e}_j|$. Die Wahl von $\bar{\mathbf{e}}_j$ ist jedoch nicht zweckmäßig, weil dadurch die Eleganz der Formeln des Tensorkalküls zerstört wird.

¹⁶Für $n = 2$ (Ebene) und $n = 3$ (Raum) bezeichnet $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ das klassische Skalarprodukt. Für $n \geq 4$ wählen wir irgendein inneres Produkt (\mathbf{v}, \mathbf{w}) auf dem n -dimensionalen Vektorraum und setzen $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j := (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Mit \dot{x}^j bezeichnen wir die Zeitableitung dx^j/dt .

Dabei bilden die g_{ij} ein *zweifach kovariantes Tensorfeld*, das man auch das metrische Tensorfeld nennt; g_{ij} ist symmetrisch, d. h. $g_{ij} = g_{ji}$.

Mit g^{ij} bezeichnen wir die Elemente der inversen Matrix zu (g_{ij}) . Dann bilden die g^{ij} ein *zweifach kontravariantes, symmetrisches Tensorfeld*, d. h. $g^{ij} = g^{ji}$.

Bezeichnet g die Determinante der Matrix (g_{ij}) , dann gilt

$$g' = \Delta^2 g$$

bei der Koordinatentransformation (10.20), d. h., g bildet eine *skalare Dichte vom Gewicht 2*. Ferner ist

$$|g'|^{1/2} = |\Delta| |g|^{1/2},$$

d. h., $|g|^{1/2}$ bildet eine *skalare Dichte vom Gewicht 1*.

Führen wir die Vektoren $\mathbf{e}^i := g^{ij} \mathbf{e}_j$ ein, dann transformieren sich die \mathbf{e}^i wie ein *kontravariantes Tensorfeld*. Zerlegen wir das Vektorfeld $\mathbf{v}(P)$ in der Form

$$\mathbf{v}(P) = v_j(P) \mathbf{e}^j,$$

dann bilden die Komponenten v_j ein *kovariantes Tensorfeld*.

► **BEISPIEL 3** (Polarkoordinaten): In der Ebene wählen wir ein kartesisches (x, y) -Koordinatensystem mit den orthonormierten Basisvektoren \mathbf{i} und \mathbf{j} (Abb. 10.6). Übergang zu Polarkoordinaten $x^1 := \varrho$, $x^2 := \varphi$ bedeutet:

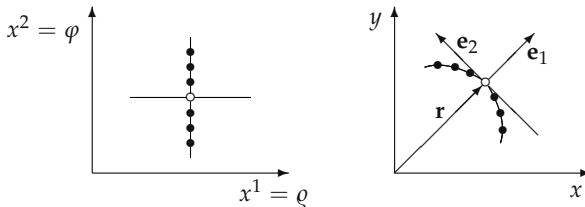


Abb. 10.6

Die ϱ -Koordinatenlinien bzw. φ -Koordinatenlinien sind Geraden durch den Ursprung ($\varphi = \text{const}$) bzw. Kreise um den Ursprung ($\varphi = \text{const}$). Der Radiusvektor \mathbf{r} eines Punktes P der (x, y) -Ebene ist gegeben durch $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \varrho \cos \varphi \mathbf{i} + \varrho \sin \varphi \mathbf{j}$. Daraus erhalten wir die natürliche Basis

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \varrho(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}).$$

Das Differential der Bogenlänge ist gegeben durch

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{11} d\varrho^2 + 2g_{12} d\varrho d\varphi + g_{22} d\varphi^2$$

mit $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, also

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \varrho^2, \quad ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2.$$

Ferner ist $g^{11} = 1$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = \varrho^{-2}$ sowie $g = \varrho^2$.

► **BEISPIEL 4** (Kugelkoordinaten): Beziehen wir die kartesischen (x, y, z) -Koordinaten auf Kugelkoordinaten (vgl. 1.7.9.3.), dann gilt für das Quadrat der Bogenlänge

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = r^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 + dr^2,$$

d. h. $x^1 := \theta$, $x^2 := \varphi$, $x^3 := r$ und

$$g_{11} = r^2 = \frac{1}{g^{11}}, \quad g^{22} = r^2 \cos^2 \theta = \frac{1}{g^{22}},$$

$$g_{33} = 1 = \frac{1}{g^{33}}, \quad g^{ij} = g_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j,$$

sowie $g = \det g_{ij} = r^4 \cos^2 \theta$.

► **BEISPIEL 5** (Bogenlänge auf einer Fläche): Bezieht man eine Fläche F im \mathbb{R}^3 auf die Koordinaten (Parameter) x^1, x^2 und bezeichnet \mathbf{r} den Radiusvektor eines Flächenpunktes, dann besitzt die Fläche die Parameterdarstellung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$$

(Abb. 10.7). Die natürliche Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ wird wiederum durch (10.23) erklärt. Dann sind $\mathbf{e}_j, j = 1, 2$, Tangentialvektoren an die Fläche, die sich bei Koordinatentransformationen (Parameterwechsel) der Form (10.20) mit $n = 2$ wie ein kovariantes Tensorfeld transformieren. Ist $\mathbf{v}(P)$ ein tangentiales Vektorfeld auf der Fläche F , dann besitzt es die eindeutige Darstellung $\mathbf{v}(P) = v^j(P)\mathbf{e}_j$, wobei die Komponenten v^j ein kontravariantes Tensorfeld bilden. Das Differential der Bogenlänge ist wie in (10.25) gegeben; g_{ij} bildet ein zweifach kovariantes, symmetrisches Tensorfeld, d. h. $g_{ij} = g_{ji}$.

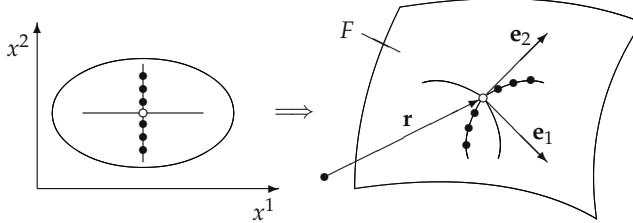


Abb. 10.7

Stellt F beispielsweise die Oberfläche einer Kugel vom Radius r dar, dann ist

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = r^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\varphi^2$$

mit $x^1 := \theta$ (geographische Breite), $x^2 := \varphi$ (geographische Länge) und

$$g_{11} = r^2, \quad g_{22} = r^2 \cos^2 \theta, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

10.2.3 Beispiele für Pseudotensoren

► **BEISPIEL 1** (Pseudoskalar): Wir wählen ein festes x^j -Koordinatensystem und ordnen ihm die Zahl $\eta = 1$ zu. Ferner wird einem beliebigen x^j -Koordinatensystem die Zahl

$$\eta' = \text{Vorzeichen der Funktionaldeterminante } \Delta$$

zugeordnet.¹⁷ Dann ist η ein *Pseudoskalar*.

Wir sagen, dass das x^j -System die gleiche (bzw. unterschiedliche) Orientierung wie das x^j -System besitzt, falls $\eta' = 1$ (bzw. $= -1$) gilt.

Ist $a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}$ ein Tensorfeld (bzw. Pseudotensorfeld), dann ist

$$\eta a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}$$

¹⁷Wir betrachten nur solche Koordinatentransformationen (10.20), bei denen das Vorzeichen von Δ für alle Punkte konstant ist (d. h. positiv oder negativ).

ein Pseudotensorfeld (bzw. Tensorfeld) vom gleichen Typ (d. h. k -fach kontravariant und m -fach kovariant).

► **BEISPIEL 2** (Levi-Civita Pseudotensoren): Wir setzen¹⁸

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} := \text{Vorzeichen der Permutation } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Die Indizes $i_1 \dots i_n$ laufen von 1 bis n . Dann ist

$$E_{i_1 \dots i_n} := |g|^{1/2} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$$

ein n -fach kovarianter, schiefsymmetrischer¹⁹ Pseudotensor. Ferner ist

$$E^{i_1 \dots i_n} := |g|^{-1/2} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}$$

ein n -fach kontravarianter, schiefsymmetrischer Pseudotensor.

Duale Ergänzung: Ist $a^{i_1 \dots i_p}$ ein p -fach kontravarianter, schiefsymmetrischer Tensor ($p \leq n$), dann entsteht durch

$$*a_{i_{p+1} \dots i_n} := \frac{1}{p!} E_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} a^{i_1 \dots i_p}$$

ein $(n-p)$ -fach kovarianter, schiefsymmetrischer Pseudotensor, den man die duale Ergänzung zu $a^{i_1 \dots i_p}$ nennt.

Ist $a_{i_{p+1} \dots i_n}$ ein $(n-p)$ -fach kovarianter, schiefsymmetrischer Tensor, dann erhält man die duale Ergänzung (einen p -fach kontravarianten, schiefsymmetrischen Pseudotensor) durch

$$*a^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{(n-p)!} E^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} a_{i_{p+1} \dots i_n}.$$

Zweimalige Bildung der dualen Ergänzung ergibt den Ausgangstensor.

► **BEISPIEL 3** (Vektorprodukt): Wir benutzen die Bezeichnungen aus 10.2.2 (Beispiel 1). Für das Vektorprodukt der beiden Vektoren $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$, $\mathbf{w} = w^j \mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, erhalten wir

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \eta E_{ijk} v^i w^j \mathbf{e}^k = \eta \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}. \quad (10.26)$$

Dabei ist $\eta = 1$ (bzw. $= -1$), falls das System $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ rechtshändig (bzw. linkshändig) ist.

10.2.4 Tensoralgebra

Im folgenden werden algebraische Operationen beschrieben, die es gestatten, aus Tensorfeldern (kurz Tensoren) neue Tensorfelder zu konstruieren. Alle Indizes laufen von 1 bis n . Ferner sind die Operationen in jedem Punkt P zu nehmen. Um die Notation zu vereinfachen, verzichten wir auf die Angabe von P .

Man beachte, dass der Kalkül „von selbst“ arbeitet im Sinne des weiter oben angegebenen „Prinzips vom richtigen Indexbild“.

Multiplikation eines Tensors mit einem Skalar: Multipliziert man die Koordinaten eines Tensors $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ mit einem Skalar a , dann sind die Zahlen $b_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = a \cdot a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ wiederum die Koordinaten eines Tensors (k -fach kovariant, l -fach kontravariant).

¹⁸Speziell gilt $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = 0$, falls zwei Indizes gleich sind.

¹⁹Bei einer Permutation der Indizes multipliziert sich E_{\dots} mit dem Vorzeichen der Permutation.

Addition von Tensoren: Addiert man die Koordinaten $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ und $b_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ zweier Tensoren, dann bilden die Zahlen

$$c_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} + b_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$$

die Koordinaten eines Tensors (*Summentensor*). Diese Operation ist nur durchführbar, wenn die Summanden vom gleichen Typ sind (gleiche Anzahl unterer und oberer Indizes).

Multiplikation von Tensoren: Multipliziert man die Koordinaten $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ und $b_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q}$ zweier Tensoren, dann sind die Zahlen

$$c_{i_1 \dots i_k r_1 \dots r_p}^{j_1 \dots j_l s_1 \dots s_q} = a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} b_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q}$$

wiederum die Koordinaten eines Tensors (*Produkttensor*). Die Reihenfolge der Faktoren ist entscheidend.

Verjüngung eines Tensors: Gegeben sei ein Tensor mit mindestens je einem oberen und unteren Index, z. B. a_{lm}^{ijk} . Summiert man über einen oberen und unteren Index (etwa j, m), also

$$b_l^{ik} := a_{lj}^{ijk} = \sum_{j=1}^n a_{lj}^{ijk},$$

dann sind die so entstehenden Zahlen b_l^{ik} wiederum die Koordinaten eines Tensors (*verjüngter Tensor*). Es kann auch über mehrere Indexpaare summiert werden, z. B.

$$c^i := a_{jk}^{ijk} = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}^{ijk}.$$

► **BEISPIEL:** Es sei a_i^j ein einfach kovarianter und einfach kontravarianter Tensor. Dann ist $a = a_i^i = \sum_{i=1}^n a_i^i$ ein Skalar (Spur des Tensors).

Überschiebung von Tensoren: Multipliziert man zwei Tensoren und führt man anschließend über einige Indexpaare eine Verjüngung durch, dann entsteht wieder ein Tensor. Diese Operation heißt *Überschiebung*.

► **BEISPIEL:**

$$c_{ij}^k = a_i b_j^k, \quad d_j := c_{ij}^i = a_i b_j^i.$$

Permutation der Indizes: Unterwirft man die oberen oder die unteren Indizes der Koordinaten eines Tensors getrennt einer Permutation, dann entsteht ein Tensor vom gleichen Typ, z. B.

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij}^{klm} = a_{ij}^{klm}.$$

Symmetrisieren: Von gleichartigen (z. B. unteren) Indizes der Koordinaten des gegebenen Tensors wird eine feste Anzahl N ausgewählt. Auf diese Indizes übt man alle möglichen $N!$ Permutationen aus und bildet das arithmetische Mittel der so erhaltenen Koordinaten. Die Symmetrisierung wird durch runde Klammern symbolisiert.

► **BEISPIELE:**

$$\begin{aligned} a_{(ij)} &= \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), & a_{i(jk)}^l &= \frac{1}{2}(a_{ijk}^l + a_{ikj}^l), \\ a_{(ijk)} &= \frac{1}{6}(a_{ijk} + a_{ikj} + a_{jki} + a_{jik} + a_{kij} + a_{kji}). \end{aligned}$$

Analog werden obere Indizes behandelt. Ein Tensor heißt symmetrisch in einigen gleichartigen (z. B. unteren) Indizes, wenn sich die Koordinaten bei einer Permutation dieser Indizes nicht ändern, z. B. ist a_{ij} in i, j symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ gilt.

Antisymmetrisieren: Man geht wie beim Symmetrisierungsprozess vor, versieht jedoch im arithmetischen Mittel die ungeraden Permutationen mit einem Minuszeichen. Die Antisymmetrisierung wird durch eckige Klammern symbolisiert.

► BEISPIELE:

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}), \quad a_{i[jk]}^l = \frac{1}{2}(a_{ijk}^l - a_{ikj}^l),$$

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{6}(a_{ijk} - a_{ikj} + a_{jki} - a_{jik} + a_{kij} - a_{kji}).$$

Ein Tensor heißt *schiefsymmetrisch* in einigen gleichartigen (z. B. unteren) Indizes, wenn seine Koordinaten bei einer geraden Permutation dieser Indizes unverändert bleiben, während bei einer ungeraden Permutation der Faktor (-1) auftritt, z. B. ist a_{ij} schiefsymmetrisch in i, j , wenn $a_{ij} = -a_{ji}$ gilt.

Einen m -fach kontravarianten und in allen Indizes schiefsymmetrischen Tensor $a^{i_1 \dots i_m}$ nennt man *m -Vektor* (Multivektor). Ein m -Vektor heißt *zerfallend*, wenn es m einfach kontravariante Tensoren $a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, \dots, a_m^{i_m}$ gibt mit

$$a^{i_1 \dots i_m} = a_1^{[i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m]} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & \dots & a_1^{i_m} \\ a_2^{i_1} & \dots & a_2^{i_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^{i_1} & \dots & a_m^{i_m} \end{vmatrix}.$$

Einheitstensor: Der Einheitstensor δ_i^j ist ein einfach kovarianter und einfach kontravarianter Tensor zweiter Stufe, der in jedem Koordinatensystem folgende Werte besitzt: $\delta_i^j = 1$ für $i = j$ und $\delta_i^j = 0$ für $i \neq j$.

δ -Tensor: Der δ -Tensor wird durch die Determinante

$$\delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \dots & \delta_{i_1}^{j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_m}^{j_1} & \dots & \delta_{i_m}^{j_m} \end{vmatrix}$$

definiert.

Alternierende Multiplikation: Sind $a_{i_1 \dots i_r}, b_{j_1 \dots j_s}$ die Koordinaten zweier in allen Indizes schiefsymmetrischen Tensoren, dann bezeichnet man als *alternierendes Produkt* $C = A \wedge B$ den Tensor C mit den Koordinaten

$$c_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = \frac{1}{r!s!} \delta_{i_1 \dots i_r l_{r+s}}^{j_1 \dots j_s} a_{i_1 \dots i_r} b_{j_1 \dots j_s}.$$

Es gilt $B \wedge A = (-1)^{rs} A \wedge B$ und $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$. Speziell für $A = (a_i), B = (b_j)$ ist $c_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$.

Senken und Heben von Indizes: Gegeben sei ein zweifach kovariantes, symmetrisches

Tensorfeld g_{ij} mit $\det(g_{ij}) \neq 0$ für alle Punkte. (10.27)

Mit g^{ij} bezeichnen wir die Elemente der inversen Matrix zu (g_{ij}) . Ferner sei $g := \det(g_{ij})$. Dann gilt

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j.$$

Durch die Wahl von g_{ij} wird eine Riemannsche Geometrie mit dem Bogenelement

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

festgelegt (vgl. Kapitel 16). Beispielsweise kann man g_{ij} wie in 10.2.2 (Beispiel 2 oder Beispiel 5) wählen.

Mit Hilfe von g_{ij} und g^{ij} lassen sich Indizes in natürlicher Weise senken und heben, z. B.

$$b_i = g_{ij} b^j, \quad b^i = g^{ij} b_j$$

sowie

$$b^{ij} = g^{ik} g^{jm} b_{km}, \quad b_{ij} = g_{ik} g_{jm} b^{km}.$$

Ist genauer b^j ein kontravarianter Tensor, dann ist $b_i = g_{ij} b^j$ ein kovarianter Tensor. Man hat streng zwischen b_i und b^i zu unterscheiden (analog zwischen b^{ij} und b_{ij}). Es handelt sich um die Koordinaten unterschiedlicher Tensoren.

Diese Prozedur lässt sich auf allgemeine Tensoren mit beliebig vielen unteren und oberen Indizes anwenden.

10.2.5 Tensoranalysis

Grundidee: Wir bezeichnen partielle Ableitungen kurz durch $\partial_j := \partial/\partial x^j$. Ziel der Tensoranalysis ist es, durch einen Differentiationsprozess aus einem Tensorfeld wieder ein Tensorfeld zu erzeugen. Dieses Ziel ist nur auf nichttriviale Weise zu erreichen, weil die partielle Ableitung

$$\partial_s a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} \tag{10.28}$$

eines Tensorfeldes $a^{...}$ in der Regel nicht wieder ein Tensorfeld darstellt. Um diese Schwierigkeit zu beheben, fügt man in (10.28) zusätzliche Terme hinzu. Auf diese Weise erhält man die sogenannte kovariante Ableitung $\nabla_s a^{...}$, die tatsächlich wiederum ein Tensorfeld darstellt. Die zusätzlichen Terme hängen von der Vorgabe eines metrischen Tensorfeldes g_{ij} ab.

Für die allgemeine Theorie der Mannigfaltigkeiten ist es wichtig, Differentiationsprozesse von gewissen Tensorfeldern herauszukristallisieren, für die allein geeignete Linearkombinationen partieller Ableitungen wieder Tensorfelder des gleichen Typs ergeben, d. h., es wird kein metrisches Tensorfeld g_{ij} benötigt. In diesem Zusammenhang gibt es die folgenden drei fundamentalen klassischen Möglichkeiten.

(i) Cartanableitung von Cartanfeldern (p -fach kovariante, schiefsymmetrische Tensoren): Verallgemeinerung der *Rotation*.

(ii) Weylableitung von Weylfeldern (p -fach kontravariante, schiefsymmetrische Tensordichten vom Gewicht 1): Verallgemeinerung der *Divergenz*.

(iii) Lieableitung beliebiger Tensorfelder in Richtung eines Vektorfeldes: Verallgemeinerung der *Richtungsableitung*.

Der Cartansche Kalkül der alternierenden Differentialformen basiert auf der Cartanableitung (i).

Um (i)-(iii) zu erhalten, verwendet man die folgende Strategie: Man sucht solche Ausdrücke für die kovariante Ableitung $\nabla_s a^{...}$, die unabhängig von dem metrischen Tensorfeld g_{ij} sind.

Im folgenden beachte man, dass der Kalkül der kovarianten Differentiation „von selbst“ arbeitet im Sinne des weiter oben formulierten „Prinzips vom richtigen Indexbild“.

10.2.5.1 Kovariante Ableitung

Wir geben uns ein Tensorfeld g_{ij} mit den Eigenschaften (10.27) vor. Mit Hilfe von g_{ij} konstruieren wir die sogenannten *Christoffelsymbole*²⁰

$$\Gamma_{ij}^k := g^{km} \Gamma_{ij,m}, \quad \Gamma_{ij,m} := \frac{1}{2} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}).$$

Es gelten die Symmetriebeziehungen $\Gamma_{ij,m} = \Gamma_{ji,m}$ und $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ sowie

$$\Gamma_{kj}^k = \partial_j \ln |g|^{1/2}.$$

Die Christoffelsymbole bilden *keine* Tensorfelder.

Kovariante Ableitung einer Funktion (skalares Feld): Es sei $f(x^1, \dots, x^n)$ ein skalares Feld. Setzen wir

$$\nabla_i f := \partial_i f,$$

dann ist $\nabla_i f$ ein kovariantes Tensorfeld.

Kovariante Ableitung allgemeiner Tensorfelder: Ist a_j ein kovariantes bzw. a^j ein kontravariantes Tensorfeld, dann ist

$$\nabla_i a^j := \partial_i a^j + \Gamma_{is}^j a^s \quad \text{bzw.} \quad \nabla_i a_j := \partial_i a_j - \Gamma_{ij}^s a_s \quad (10.29)$$

wiederum ein Tensorfeld, dessen Typ durch das Indexbild gegeben ist, d.h., $\nabla_i a^j$ ist einfach kovariant und einfach kontravariant bzw. $\nabla_i a_j$ ist zweifach kovariant.

Ist $a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}$ ein Tensorfeld, dann ist $\nabla_i a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}$ wiederum ein Tensorfeld vom Typ des angegebenen Indexbildes (d.h. k -fach kontravariant und $(m+1)$ -fach kovariant). Explizit gilt

$$\nabla_i a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} := \partial_i a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} + \sum_{\alpha=1}^k \Gamma_{is}^{i_\alpha} a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_k} - \sum_{\alpha=1}^m \Gamma_{ij_\alpha}^s a_{j_1 \dots s \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}. \quad (10.30)$$

Dabei steht der Summationsindex s an α -ter Stelle. Diese Formel ergibt sich dadurch, dass man für jeden Index von a_{\dots} einen Term wie in (10.29) hinzufügt. Beispielsweise ist

$$\nabla_j a_{km}^i = \partial_j a_{km}^i + \Gamma_{js}^i a_{km}^s - \Gamma_{jk}^s a_{sm}^i - \Gamma_{jm}^s a_{ks}^i.$$

Ferner setzen wir

$$\nabla^j := g^{jk} \nabla_k$$

entsprechend der Indexhebung aus 10.2.4.

Ist das metrische Tensorfeld g_{ij} konstant (wie etwa in Beispiel 2 von 10.2.2 für ein kartesisches Koordinatensystem), dann verschwinden die Christoffelsymbole. Deshalb ist in diesem Spezialfall $\nabla_j = \partial_j$.

Rechenregeln: (i) Summenregel:

$$\nabla_i (a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} + b_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}) = \nabla_i a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} + \nabla_i b_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}.$$

(ii) Produktregel:

$$\nabla_i a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} b_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q} = (\nabla_i a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}) b_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q} + a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} \nabla_i b_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q}.$$

²⁰Im Fall der Situation von 10.2.2 (Beispiele 2 und 5) ist $\Gamma_{ij,k} = \mathbf{e}_k \partial_j \mathbf{e}_i$ und $\Gamma_{ij}^k = \mathbf{e}^k \partial_j \mathbf{e}_i$, d.h., die Christoffelsymbole beschreiben die Änderung der natürlichen Basisvektoren \mathbf{e}_i .

(iii) Verjüngungsregel: Es ist gleichgültig, ob man vor oder nach der Anwendung von ∇_i verjüngt. Ist beispielsweise a_{jm}^k ein Tensorfeld, dann gilt

$$\sum_{k=1}^n \nabla_i a_{km}^k = \nabla_i \sum_{k=1}^n a_{km}^k.$$

Deshalb besitzt das Symbol $b_{im} := \nabla_i a_{km}^k$ eine eindeutige Bedeutung und ergibt ein Tensorfeld vom angegebenen Indextyp (zweifach kovariant).

(iv) Lemma von Ricci: $\nabla_i g_{jk} = \nabla_i g^{jk} = 0, \nabla_i g = 0$.

Kovariante Richtungsableitung: Ist $C : x^j = x^j(t)$ eine Kurve mit dem reellen Parameter t und ist $a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}$ ein Tensorfeld, dann heißt

$$\frac{D a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}}{dt} := \left(\nabla_s a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} \right) \frac{dx^s}{dt}$$

die kovariante Richtungsableitung von $a_{\dots \dots}$ bezüglich der Kurve C .

Definitionsgemäß ist das Tensorfeld a^j längs der Kurve C genau dann parallel, wenn

$$\frac{D a^j}{dt} = 0$$

gilt. Analog lautet die Definition für $a_{\dots \dots}$.

Ferner bezeichnet man

$$D_v a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} := \left(\nabla_s a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} v^s \right)$$

als die kovariante Richtungsableitung von $a_{\dots \dots}$ bezüglich v^j .

Krümmungstensor, Paralleltransport, geodätische Linien und Riemannsche Geometrie:
Vgl. 16.1.

► **BEISPIEL** (Divergenz und Rotation): Ist v^i ein einfach kontravariantes Tensorfeld, dann bezeichnet man das skalare Feld

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} v^i)$$

als *Divergenz* des Feldes v^i . Dagegen heißt das zweifach kovariante, schiefsymmetrische Tensorfeld

$$\nabla_i v_j - \nabla_j v_i = \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^j}$$

Rotation des kovarianten Tensorfeldes v_i .

10.2.5.2 Metrikfreie Differentiationsprozesse

Die Cartanableitung: Unter einem Cartanfeld versteht man ein kovariantes schiefsymmetrisches Tensorfeld. Ist $a_{i_1 \dots i_p}$ ein Cartanfeld, dann bildet auch

$$d_i a_{i_1 \dots i_p} := \partial_{[i} a_{i_1 \dots i_p]}$$

ein Cartanfeld. Dieser Ausdruck verallgemeinert die Rotation der klassischen Vektoranalysis. (Die eckigen Klammern entsprechen dem Antisymmetrisieren von $\partial_i a_{i_1 \dots i_p}$ bezüglich der Indizes i, i_1, \dots, i_p).

► **BEISPIEL:** $d_i a_j = \frac{1}{2}(\partial_j a_i - \partial_i a_j)$.

Der Zusammenhang mit der kovarianten Ableitung ist durch

$$d_i a_{i_1 \dots i_p} = \nabla_{[i} a_{i_1 \dots i_p]}$$

gegeben.

Die Weylableitung: Unter einem Weylfeld versteht man eine kontravariante schiefsymmetrische Tensorschicht vom Gewicht eins. Ist $a^{i_1 \dots i_p}$ ein Weylfeld, dann ist auch

$$(\delta a)^{i_2 \dots i_p} := -\partial_s a^{s i_2 \dots i_p}$$

ein Weylfeld. Dieser Ausdruck verallgemeinert die (negative) Divergenz der klassischen Vektoranalysis.

Der Zusammenhang mit der kovarianten Ableitung ergibt sich folgendermaßen. Ist $b^{i_1 \dots i_p}$ ein kontravariante schiefsymmetrische Tensorfeld, dann gilt

$$\nabla_s b^{s i_1 \dots i_p} = |g|^{-1/2} \partial_s (|g|^{1/2} b^{s i_2 \dots i_p}). \quad (10.31)$$

Ist $a^{i_1 \dots i_p}$ ein Weylfeld und setzen wir

$$b^{i_1 \dots i_p} := |g|^{-1/2} a^{i_1 \dots i_p},$$

dann bildet $b^{i_1 \dots i_p}$ ein kontravariante schiefsymmetrische Tensorfeld. Aus (10.31) folgt dann

$$(\delta a)^{i_2 \dots i_p} = -|g|^{1/2} \nabla_s (|g|^{-1/2} a^{s i_2 \dots i_p}).$$

Die Lieableitung: Es sei v^j ein festes kontravariante Tensorfeld. Ist f ein skalares Feld (d.h. eine Funktion), dann definieren wir die Lieableitung

$$L_v f := v^s \partial_s f$$

in Richtung von v^j . Diese Lieableitung, die gleich der klassischen Richtungsableitung ist, stellt wiederum ein skalares Feld dar.

Ist a^k bzw. a_k ein kontravariante bzw. kovariante Tensorfeld, dann ist die Lieableitung²¹

$$L_v a^k := v^s \partial_s a^k - a^s \partial_s v^k \quad \text{bzw.} \quad L_v a_k := v^s \partial_s a_k + a_s \partial_k v^s \quad (10.32)$$

in Richtung von v^j wiederum ein Tensorfeld des gleichen Typs (d.h., $L_v a_k$ ist kovariant bzw. $L_v a^k$ ist kontravariant).

Ist $a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k}$ ein beliebiges Tensorfeld, dann ist die Lieableitung

$$L_v a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} := v^s \partial_s a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} + \sum_{\alpha=1}^m a_{j_1 \dots s \dots j_m}^{i_1 \dots i_k} \partial_{j_\alpha} v^s - \sum_{\alpha=1}^k a_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots s \dots i_k} \partial_s v^{i_\alpha} \quad (10.33)$$

bezüglich v^j wiederum ein Tensorfeld vom gleichen Typ. In (10.33) steht der Summationsindex s an α -ter Stelle. Die Formel (10.33) ergibt sich daraus, dass man für jeden Index einen Term wie in (10.32) hinzufügt. Beispielsweise erhält man

$$L_v a_{ij}^k = v^s \partial_s a_{ij}^k + (a_{sj}^k \partial_i v^s + a_{is}^k \partial_j v^s - a_{ij}^s \partial_s v^k).$$

Der Zusammenhang mit der kovarianten Ableitung wird durch

$$L_v a^k = v^s \nabla_s a^k - a^s \nabla_s v^k, \quad L_v a_k = v^s \nabla_s a_k + a_k \nabla_s v^s$$

gegeben.

²¹ Anstelle von $L_v a^k$ schreibt man auch $(L_v a)^k$.

10.2.6 Tensorgleichungen und das Indexprinzip der mathematischen Physik

In der Differentialgeometrie und in der mathematischen Physik möchte man die Gleichungen in einer solchen Form aufschreiben, dass sie in jedem Koordinatensystem gültig sind und das Transformationsverhalten der Größen sofort abgelesen werden kann. Das lässt sich durch den Tensorkalkül in einfacher Weise erreichen, indem man alle Gleichungen als Tensorgleichungen schreibt. Das sind Gleichungen für Tensoren, deren Indexbild stimmt (im Sinne des oben formulierten Prinzips vom richtigen Indexbild). Hat man eine Gleichung (G) in einem speziellen Koordinatensystem Σ vorliegen, die noch nicht die Form einer Tensorgleichung besitzt, dann schreibe man diese Gleichung als Tensorgleichung (G), die im Spezialfall des Koordinatensystems Σ in (G) übergeht.

Liegt beispielsweise die Situation von Beispiel 1 in 10.2.2 vor, dann beachte man, dass sich z. B. in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem folgende Vereinfachungen ergeben:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g^{ij} = \delta_{ij}, & g &= 1, & \nabla_i &= \nabla^i = \partial_i, \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i}, & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{j}, & \mathbf{e}_3 &= \mathbf{k}, \\ v^i &= g^{ij} v_j = v_i, & \mathbf{e}^i &= g^{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (10.34)$$

► **BEISPIEL 1** (Poissongleichung): Sind x^1, x^2, x^3 kartesische Koordinaten, dann lautet die Poissongleichung

$$-\Delta U = \varrho \quad (10.35)$$

explizit: $-\sum_{j=1}^3 \partial_j \partial_j U = \varrho$. Wegen (10.34) ist das identisch mit

$$-g^{ij} \nabla_i \nabla_j U = \varrho. \quad (10.36)$$

Das ist eine Tensorgleichung, die in einem beliebigen Koordinatensystem gilt und somit die Formulierung von (10.35) für beliebige krummlinige Koordinatensysteme darstellt.

► **BEISPIEL 2** (die Navier–Stokeschen Differentialgleichungen der Hydrodynamik): Sind x^1, x^2, x^3 kartesische Koordinaten, dann lauten die Navier–Stokeschen Differentialgleichungen für zähe Flüssigkeiten

$$\varrho \mathbf{v}_t + \varrho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} - \eta \Delta \mathbf{v} = \mathbf{K} - \mathbf{grad} p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (10.37)$$

(ϱ = Dichte, \mathbf{v} = Geschwindigkeitsfeld, η = Zähigkeitskonstante, \mathbf{K} = äußere Kraftdichte, p = Druck). Setzen wir $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$, $\mathbf{K} = K^j \mathbf{e}_j$, dann lautet (10.37) in Komponenten

$$\varrho v_t^j + \varrho v^k \partial_k v^j - \eta \sum_{k=1}^3 \partial_k \partial_k v^j = K^j - \partial_j p, \quad \partial_k v^k = 0.$$

Wegen (10.34) ist das identisch mit

$$\varrho v_t^j + \varrho v^k \nabla_k v^j - \eta g^{km} \nabla_k \nabla_m v^j = K^j - \nabla^j p, \quad \nabla_k v^k = 0. \quad (10.38)$$

Das ist eine Tensorgleichung. (Man beachte, dass das Indexbild stimmt.) Somit stellt (10.38) die Navier–Stokeschen Gleichungen in beliebigen krummlinigen Koordinatensystemen dar.

► **BEISPIEL 3** (die Gleichungen der Elastodynamik): Sind x^1, x^2, x^3 kartesische Koordinaten, dann lauten die Grundgleichungen der Elastodynamik

$$\varrho \mathbf{u}_{tt} + \text{div } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{K} \quad (10.39)$$

(ϱ = Dichte, \mathbf{u} = Verschiebungsvektor, τ = Spannungstensor, \mathbf{K} = äußere Kraftdichte). Setzen wir $\mathbf{u} = u^j \mathbf{e}_j$, $\mathbf{K} = K^j \mathbf{e}_j$, $\tau = \tau^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, dann gilt

$$\varrho u_{tt}^j + \partial_i \tau^{ij} = K^j.$$

Wegen (10.34) ist das identisch mit

$$\varrho u_{tt}^j + \nabla_i \tau^{ij} = K^j. \quad (10.40)$$

Diese Tensorgleichung stellt (10.39) in beliebigen krummlinigen Koordinaten dar. Insbesondere beinhaltet (10.40), dass sich τ^{ij} wie ein zweifach kontravarianter Tensor transformiert.

► **BEISPIEL 4** (Formeln der Vektoranalysis): Sind x^1, x^2, x^3 kartesische Koordinaten und setzen wir $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$, $\mathbf{w} = w^j \mathbf{e}_j$, dann erhalten wir wegen (10.34) die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= (\nabla_j f) \mathbf{e}^j, & \operatorname{div} \mathbf{v} &= \nabla_j v^j, \\ \mathbf{rot} \mathbf{v} &= \eta E^{ijk} \nabla_i v_j \mathbf{e}_k, & \Delta f &= \operatorname{div} \mathbf{grad} f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f, \\ \Delta \mathbf{v} &= (g^{ij} \nabla_i \nabla_j v^k) \mathbf{e}_k, & (\mathbf{v} \mathbf{grad}) \mathbf{w} &= (v^j \nabla_j w^k) \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (10.41)$$

mit $v_k = g_{kj} v^j$ und $\mathbf{e}^k = g^{kj} \mathbf{e}_j$. Wegen des richtigen Indexbildes ergeben sich in (10.41) jeweils Größen, die sich wie ein Skalar transformieren.²² Deshalb stellt (10.41) Ausdrücke dar, die in jedem krummlinigen Koordinatensystem gültig sind. Benutzt man nun die in 10.2.5 angegebenen Formeln für die kovariante Ableitung ∇_j , dann erhält man anstelle von (10.41) die in allen krummlinigen Koordinatensystemen gültigen Formeln:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= (\partial_j f) \mathbf{e}^j, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= |g|^{-1/2} \partial_j (|g|^{1/2} v^j), \\ \mathbf{rot} \mathbf{v} &= \eta |g|^{-1/2} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \\ \Delta f &= |g|^{-1/2} \partial_i (|g|^{1/2} g^{ij} \partial_j f). \end{aligned} \quad (10.42)$$

10.2.7 Der Cartansche Kalkül der alternierenden Differentialformen

Dieser außerordentlich elegante Kalkül verallgemeinert die klassische Vektoranalysis auf beliebige Dimensionen. Wie jeder gute Kalkül in der Mathematik arbeitet der Cartansche Kalkül „von selbst“. Es besteht ein sehr enger Zusammenhang zwischen alternierenden Differentialformen und kovarianten schiefsymmetrischen Tensorfeldern.

Im vorliegenden Abschnitt betonen wir die zahlreichen Anwendungen des Kalküls und rechnen mit Differentialformen in formaler Weise. Das entspricht dem formalen Rechnen mit komplexen Zahlen $a + ib$ unter Verwendung der Relation $i^2 = -1$.

Einen strengen Aufbau des Kalküls auf Mannigfaltigkeiten findet man in Kapitel 15. Wir verwenden hier das Zeichen \wedge als ein formales Produktzeichen mit der Eigenschaft

$$a \wedge b = -b \wedge a. \quad (10.43)$$

Daraus folgt $a \wedge a = -a \wedge a$, d.h. $a \wedge a = 0$. Die Bedeutung eines derartigen alternierenden Produkts für die Mathematik wurde Mitte des 19. Jahrhunderts von Hermann Graßmann erkannt.

²²Hier ist η ein Pseudoskalar mit $\eta = 1$ (bzw. $\eta = -1$), falls das System $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ rechtshändig (bzw. linkshändig) ist. Da E^{ijk} ein Pseudotensor ist, bildet ηE^{ijk} einen Tensor.

Im folgenden laufen alle Indizes von 1 bis n , und wir benutzen die Einsteinsche Summenkonvention.

Definition: Unter einer *alternierenden Differentialform r-ten Grades* in den n unabhängigen Variablen x^1, \dots, x^n versteht man einen formalen Ausdruck der Gestalt

$$\omega = \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Die Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_r}$ sind Funktionen der unabhängigen Variablen x^1, \dots, x^n , die bei der Vertauschung zweier benachbarter Indizes das Vorzeichen wechseln, z. B. $a_{123} = -a_{213}$, $a_{112} = -a_{112} = 0$.

Das Symbol \wedge ist als formales Produktzeichen aufzufassen, wobei $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, also $dx^i \wedge dx^i = 0$, gelten soll. Daraus folgt, dass $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ stets null ist, wenn zwei Indizes zusammenfallen. Sind alle Indizes verschieden, ändert dieses Produkt sein Vorzeichen bei einer ungeraden Permutation der Indizes, während es bei einer geraden Permutation ungeändert bleibt. Die gleiche Eigenschaft besitzt $a_{i_1 \dots i_r}$. Für $r > n$ sind alle Differentialformen identisch gleich null. Funktionen kann man als Differentialformen 0-ten Grades auffassen.²³ Im folgenden nehmen wir stets an, dass die Koeffizienten a_{\dots} hinreichend glatt sind (z. B. Klasse C^∞).

► BEISPIEL 1: $n = 2$:

$$\begin{aligned} r = 0 : \quad \omega &= a(x^1, x^2), \\ r = 1 : \quad \omega &= a_1 dx^1 + a_2 dx^2, \\ r = 2 : \quad \omega &= \frac{1}{2!} (a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + a_{21} dx^2 \wedge dx^1) = a_{12} dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

► BEISPIEL 2: $n = 3$:

$$\begin{aligned} r = 0 : \quad \omega &= a(x^1, x^2, x^3), \\ r = 1 : \quad \omega &= a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3, \\ r = 2 : \quad \omega &= \frac{1}{2!} (a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + a_{21} dx^2 \wedge dx^1 + a_{13} dx^1 \wedge dx^3 \\ &\quad + a_{31} dx^3 \wedge dx^1 + a_{23} dx^2 \wedge dx^3 + a_{32} dx^3 \wedge dx^2) \\ &= a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + a_{31} dx^3 \wedge dx^1 + a_{23} dx^2 \wedge dx^3, \\ r = 3 : \quad \omega &= \frac{1}{3!} (a_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + a_{132} dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 + a_{213} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ &\quad + a_{231} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + a_{312} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + a_{321} dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^1) \\ &= a_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

10.2.7.1 Algebraische Operationen

Zwei Differentialformen r -ten Grades

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \\ \theta &= \frac{1}{r!} b_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \end{aligned}$$

sind genau dann gleich, wenn $a_{i_1 \dots i_r} = b_{i_1 \dots i_r}$ für alle Indizes $i_1, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n$ gilt.

²³Wir betrachten die Situation der Beispiele 1 und 5 in 10.2.2. Bei einem strengen Aufbau ist dann dx^i eine Abbildung mit $dx^i(v^j e_j) := v^i$.

Ferner entspricht $dx^i \wedge dx^j$ der Abbildung

$$(dx^i \wedge dx^j)(v^k e_k, w^m e_m) = v^i w^j - v^j w^i.$$

Die Summe $\omega + \theta$ erhält man durch formale Addition

$$\omega + \theta = \frac{1}{r!} (a_{i_1 \dots i_r} + b_{i_1 \dots i_r}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Schreibt man

$$\omega + \theta = \frac{1}{r!} c_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r},$$

dann ist

$$c_{i_1 \dots i_r} = a_{i_1 \dots i_r} + b_{i_1 \dots i_r}.$$

Das alternierende Produkt $\omega \wedge \theta$ der beiden Differentialformen

$$\omega = \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r},$$

$$\theta = \frac{1}{s!} b_{j_1 \dots j_s} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s},$$

ergibt sich durch formale Multiplikation

$$\omega \wedge \theta = \frac{1}{r!} \frac{1}{s!} a_{i_1 \dots i_r} b_{j_1 \dots j_s} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}.$$

$\omega \wedge \theta$ ist vom $(r+s)$ -ten Grad. Es gilt

$$\omega \wedge \theta = \frac{1}{(r+s)!} c_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$$

mit (vgl. 10.2.4)

$$c_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = \frac{1}{r! s!} \delta_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_r l_1 \dots l_s} a_{k_1 \dots k_r} b_{l_1 \dots l_s}.$$

Summe und alternierendes Produkt genügen folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \omega + \theta &= \theta + \omega, & \omega + (\theta + \tau) &= (\omega + \theta) + \tau, \\ \omega \wedge \theta &= (-1)^{rs} \theta \wedge \omega, & (\omega \wedge \theta) \wedge \tau &= \omega \wedge (\theta \wedge \tau), \\ && \omega \wedge (\theta + \tau) &= \omega \wedge \theta + \omega \wedge \tau. \end{aligned}$$

► BEISPIEL 3:

$$\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2, \quad \theta = b_1 dx^1 + b_2 dx^2,$$

$$\omega + \theta = (a_1 + b_1) dx^1 + (a_2 + b_2) dx^2,$$

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta &= a_1 b_1 dx^1 \wedge dx^1 + a_1 b_2 dx^1 \wedge dx^2 + a_2 b_1 dx^2 \wedge dx^1 + a_2 b_2 dx^2 \wedge dx^2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

10.2.7.2 Differentiation

Unter dem alternierenden Differential $d\omega$ einer Differentialform r -ten Grades

$$\omega = \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

versteht man die Differentialform $(r+1)$ -ten Grades

$$d\omega := \frac{1}{r!} da_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \tag{10.44}$$

mit dem gewöhnlichen totalen Differential

$$da_{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} dx^i.$$

Das ergibt²⁴

$$d\omega = \frac{1}{r!} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

► BEISPIEL 4:

$$\begin{aligned} \omega &= a_1 dx^1 + a_2 dx^2, \\ d\omega &= da_1 \wedge dx^1 + da_2 \wedge dx^2 \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial a_1}{\partial x^2} dx^2 \right) \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial a_2}{\partial x^2} dx^2 \right) \wedge dx^2 \\ &= \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

► BEISPIEL 5:

$$\begin{aligned} \omega &= a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3, \quad da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j, \\ d\omega &= da_1 \wedge dx^1 + da_2 \wedge dx^2 + da_3 \wedge dx^3 \\ &= \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^3} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Wie Tabelle 10.3 zeigt, steht dieser Differentiationsprozess für $n = 2, 3$ im engen Zusammenhang mit den Differentialoperatoren der Vektoranalysis.

Die Regel von Poincaré: Es gilt stets $d^2 = 0$, d. h.

$$dd\omega = 0. \tag{10.45}$$

Beispielsweise für $n = 3$ beinhaltet diese Regel nach Tabelle 10.3 die beiden Aussagen $\text{rot grad } a = 0$ und $\text{div rot } a = 0$.

Produktregel: Man hat

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta \quad (r = \text{Grad von } \omega).$$

10.2.7.3 Differentialgleichungen für Formen

Das allgemeinste nichtlineare System partieller Differentialgleichungen lässt sich als ein System für Differentialformen schreiben. Deshalb besitzen Gleichungssysteme für Differentialformen eine fundamentale Bedeutung.

Die Gleichung von Poincaré: Wichtige lineare Systeme partieller Differentialgleichungen kann man in der eleganten Form

$$d\omega = b \quad \text{auf } \Omega \tag{10.46}$$

²⁴Benutzt man die Cartanableitung d_i (vgl. 10.2.5.2), dann gilt

$$d\omega = \frac{1}{r!} d_i a_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Tabelle 10.3

Grad	Differentialformen für $n = 3$	Korrespondierender Ausdruck der Vektoranalysis
$r = 0$	$a(x^1, x^2, x^3)$ $da = \frac{\partial a}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial a}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial a}{\partial x^3} dx^3$ (totales Differential)	$a(x^1, x^2, x^3)$ (skalares Feld) $\mathbf{grad} a = \frac{\partial a}{\partial x^1} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial x^2} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial x^3} \mathbf{k}$ (Gradient eines skalaren Feldes)
$r = 1$	$\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3$ $\int \omega = \int \left(a_1 \frac{dx^1}{dt} + a_2 \frac{dx^2}{dt} + a_3 \frac{dx^3}{dt} \right) dt$ (Kurvenintegral) $d\omega = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2$	$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ (Vektorfeld) $\int \omega = \int \mathbf{a} d\mathbf{r} = \int \left(\mathbf{a} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt$ (Kurvenintegral) $\mathbf{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) \mathbf{k}$ (Rotation eines Vektorfeldes) $\int d\omega = \int (\mathbf{rot} \mathbf{a}) \mathbf{n} dF$
$r = 2$	$\omega = a_{23} dx^2 \wedge dx^3 + a_{31} dx^3 \wedge dx^1 + a_{12} dx^1 \wedge dx^2$ $\int \omega = \int \left(a_{23} \frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2)} + a_{31} \frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u^1, u^2)} + a_{12} \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)} \right) du^1 du^2$ (Flächenintegral) $d\omega = \left(\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial a_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$	$\mathbf{a} = a_{23} \mathbf{i} + a_{31} \mathbf{j} + a_{12} \mathbf{k}$ (Vektorfeld) $\int \omega = \int \mathbf{a} \mathbf{n} dF$ (Flächenintegral; \mathbf{n} Normaleinheitsvektor) $\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial a_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3}$ (Divergenz eines Vektorfeldes) $\int d\omega = \int \text{div } \mathbf{a} dV$
$r = 3$	$\omega = a_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ $\int \omega = \int a_{123} dx^1 dx^2 dx^3$ (Volumenintegral) $d\omega \equiv 0$	$a_{123}(x^1, x^2, x^3)$ (skalares Feld) $\int \omega = \int a_{123} dV$ (Volumenintegral)

darstellen, wobei die r -Form b gegeben ist und die $(r-1)$ -Form ω auf Ω gesucht wird. Diese Gleichung verallgemeinert wichtige Gleichungen für skalare Potentiale und Vektorpotentiale in der klassischen Vektoranalysis. Hat (10.46) eine Lösung ω , dann folgt aus $dd\omega = 0$ die sogenannte *Integrabilitätsbedingung*

$$db = 0 \quad \text{auf } \Omega \tag{10.47}$$

als notwendige Lösbarkeitsbedingung für die gegebene rechte Seite b .

Lemma von Poincaré: Es sei Ω ein sternförmiges Gebiet des \mathbb{R}^n bezüglich des Punktes P_0 , d.h., es gilt $P_0 \in \Omega$, und mit jedem Punkt P gehört auch die Verbindungsstrecke $\overline{P_0P}$ zu Ω (Abb. 10.8).

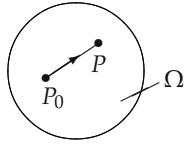


Abb. 10.8

Unter dieser Voraussetzung besitzt die Gleichung (10.46) genau dann eine Lösung ω , wenn die Integrabilitätsbedingung (10.47) erfüllt ist. Ist ω_{spez} irgendeine spezielle Lösung von (10.46), dann erhält man die allgemeine Lösung von (10.46) durch

$$\omega = \omega_{\text{spez}} + d\omega_1,$$

wobei ω_1 eine beliebige $(r-2)$ -Form ist, falls $r \geq 2$ gilt. Für $r=1$ muss man $d\omega_1$ durch eine beliebige Konstante ersetzen. Explizit kann man

$$\omega_{\text{spez}} := \frac{1}{(r-1)!} x^i V_{i_2 \dots i_r} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

wählen mit $b = \frac{1}{r!} b_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ und

$$V_{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n) := \int_0^1 b_{i_1 \dots i_r}(tx^1, \dots, tx^n) t^{r-1} dt.$$

Die allgemeine Form des Poincaréschen Lemmas für kontrahierbare Gebiete Ω des \mathbb{R}^n und kontrahierbare Mannigfaltigkeiten findet man in 18.5.

► **BEISPIEL 6 (grad a = b):**

$$\omega = a(x^1, x^2, x^3), \quad b = b_1 dx^1 + b_2 dx^2 + b_3 dx^3,$$

$$da = \frac{\partial a}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial a}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial a}{\partial x^3} dx^3,$$

$$db = \left(\frac{\partial b_3}{\partial x^2} - \frac{\partial b_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial b_1}{\partial x^3} - \frac{\partial b_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x^1} - \frac{\partial b_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2.$$

Die Differentialgleichung $d\omega = b$ lautet nach Koeffizientenvergleich

$$\frac{\partial a}{\partial x^1} = b_1, \quad \frac{\partial a}{\partial x^2} = b_2, \quad \frac{\partial a}{\partial x^3} = b_3,$$

d.h. **grad a = b**. Die notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung $db = 0$ bedeutet ausgeschrieben

$$\frac{\partial b_3}{\partial x^2} - \frac{\partial b_2}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial b_1}{\partial x^3} - \frac{\partial b_3}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial b_2}{\partial x^1} - \frac{\partial b_1}{\partial x^2} = 0,$$

kurz **rot b = 0**. Somit ist die Vektorgleichung

$$\mathbf{grad} \mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{10.48}$$

in dem sternförmigen Gebiet Ω genau im Fall **rot b = 0** lösbar. Die allgemeine Lösung hat die Form $a = a_{\text{spez}} + \text{const}$. Insbesondere besitzt die Gleichung **grad a = 0** auf Ω die allgemeine Lösung $a = \text{const}$.

In der Mechanik entspricht $\mathbf{K} = \mathbf{b}$ der Kraft, und $U = -a$ ist das Potential.

► BEISPIEL 7 ($\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{b}$):

$$\begin{aligned}\omega &= a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3, \\ b &= b_{23} dx^2 \wedge dx^3 + b_{31} dx^3 \wedge dx^1 + b_{12} dx^1 \wedge dx^2.\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung $d\omega = b$ lautet nach Koeffizientenvergleich (vgl. Tabelle 10.3)

$$\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} = b_{23}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} = b_{31}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} = b_{12},$$

kurz $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{b}$. Die notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung $db = 0$ bedeutet ausgeschrieben

$$\frac{\partial b_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial b_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial b_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

kurz $\text{div } \mathbf{b} = 0$. Die allgemeine Lösung besitzt die Gestalt

$$\omega = \omega_{\text{spez}} + da, \quad a_i = (a_i)_{\text{spez}} + \frac{\partial a}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Somit ist die Vektorgleichung

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{10.49}$$

in dem sternförmigen Gebiet Ω genau für $\text{div } \mathbf{b} = 0$ lösbar. Die allgemeine Lösung besitzt die Gestalt $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{spez}} + \text{grad } a$, a beliebig. Speziell ist die allgemeine Lösung von $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$ gleich $\mathbf{a} = \text{grad } a$. In der Elektrodynamik entspricht \mathbf{b} dem Magnetfeld und \mathbf{a} dem Vektorpotential.

► BEISPIEL 8 ($\text{div } \mathbf{a} = b_{123}$):

$$\begin{aligned}\omega &= a_{23} dx^2 \wedge dx^3 + a_{31} dx^3 \wedge dx^1 + a_{12} dx^1 \wedge dx^2, \\ b &= b_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung $d\omega = b$ lautet nach Koeffizientenvergleich (Tabelle 10.3)

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial a_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = b_{123},$$

kurz $\text{div } \mathbf{a} = b_{123}$. Die notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung $db = 0$ ist stets erfüllt. Die allgemeine Lösung besitzt die Gestalt $\omega = \omega_{\text{spez}} + d\omega_1$ mit der Beziehung $\omega_1 = c_1 dx^1 + c_2 dx^2 + c_3 dx^3$, ausgeschrieben

$$a_{23} = (a_{23})_{\text{spez}} + \frac{\partial c_3}{\partial x^2} - \frac{\partial c_2}{\partial x^3}.$$

Die übrigen Größen a_{31} und a_{12} erhält man durch zyklische Vertauschung. Somit ist die Vektorgleichung

$$\text{div } \mathbf{a} = b_{123} \tag{10.50}$$

in dem sternförmigen Gebiet Ω stets lösbar. Die allgemeine Lösung ist von der Form $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{spez}} + \text{rot } \mathbf{c}$. Speziell besitzt $\text{div } \mathbf{a} = 0$ die allgemeine Lösung $\mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{c}$.

Die Lösung der Differentialgleichung $d\omega = b$ auf Mannigfaltigkeiten wird in 18.4 und 18.6 betrachtet.

10.2.7.4 Variablenwechsel

Der Variablenwechsel von Differentialformen ergibt sich „von selbst“, indem man die übliche Transformationsformel für Differentiale benutzt. Die Bedeutung des Cartanschen Kalküls beruht darauf, dass alle Operationen unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem sind. Ferner ergibt sich in 10.2.7.5 automatisch das richtige Transformationsverhalten von mehrfachen Integralen.

Neue Koordinaten: Geht man von den unabhängigen Variablen x^1, \dots, x^n zu den neuen Variablen y^1, \dots, y^n über, dann muss man in

$$\omega = \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

die Differentiale dx^i durch $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$ ersetzen. Das ergibt

$$\omega = \frac{1}{r!} a'_{j_1 \dots j_r} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_r} \quad (10.51)$$

mit $a'_{j_1 \dots j_r} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{j_r}} a_{i_1 \dots i_r}$. Somit bilden die Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_r}$ von ω ein r -fach *kovariantes, schiefsymmetrisches Tensorfeld*.

Der Summe (dem alternierenden Produkt bzw. der Ableitung) von Differentialformen entspricht die Summe (das alternierende Produkt bzw. die Cartanableitung) der entsprechenden kovarianten schiefsymmetrischen Tensorfelder.

► BEISPIEL 9:

$$\begin{aligned} \omega &= a_{12} dx^1 \wedge dx^2, \quad x^j = x^j(y^1, y^2), \\ \omega &= a_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^1}{\partial y^2} dy^2 \right) \wedge \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} dy^2 \right) \\ &= a_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} - \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \right) dy^1 \wedge dy^2 = a_{12} \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(y^1, y^2)} dy^1 \wedge dy^2. \end{aligned}$$

► BEISPIEL 10:

$$\begin{aligned} \omega &= a_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad x^j = x^j(y^1, y^2, y^3), \\ \omega &= a_{123} \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)} dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3. \end{aligned}$$

Wir benutzen dabei die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(y^1, y^2)} = \begin{vmatrix} \partial_1 x^1 & \partial_1 x^2 \\ \partial_2 x^1 & \partial_2 x^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)} = \begin{vmatrix} \partial_1 x^1 & \partial_1 x^2 & \partial_1 x^3 \\ \partial_2 x^1 & \partial_2 x^2 & \partial_2 x^3 \\ \partial_3 x^1 & \partial_3 x^2 & \partial_3 x^3 \end{vmatrix}$$

mit $\partial_j x^i := \partial x^i / \partial y^j$.

Parameter: Hängen in einer Differentialform r -ten Grades die x^i von r Parametern u^1, \dots, u^r ab, d.h. $x^i = x^i(u^1, \dots, u^r)$, dann kann man nach dem gleichen Verfahren die Differentialform auf u^1, \dots, u^r beziehen.

► BEISPIEL 11:

$$\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2, \quad x^1 = x^1(t), \quad x^2 = x^2(t),$$

$$\omega = \left(a_1 \frac{dx^1}{dt} + a_2 \frac{dx^2}{dt} + a_3 \frac{dx^3}{dt} \right) dt.$$

► BEISPIEL 12:

$$\omega = a_{23} dx^2 \wedge dx^3 + a_{31} dx^3 \wedge dx^1 + a_{12} dx^1 \wedge dx^2, \quad x^i = x^i(u^1, u^2),$$

$$\begin{aligned} \omega &= a_{23} \left(\frac{\partial x^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2} du^2 \right) \wedge \left(\frac{\partial x^3}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^3}{\partial u^2} du^2 \right) \\ &\quad + a_{31} \left(\frac{\partial x^3}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^3}{\partial u^2} du^2 \right) \wedge \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^1}{\partial u^2} du^2 \right) \\ &\quad + a_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^1}{\partial u^2} du^2 \right) \wedge \left(\frac{\partial x^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2} du^2 \right) \\ &= \left(a_{23} \frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2)} + a_{31} \frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u^1, u^2)} + a_{12} \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)} \right) du^1 \wedge du^2. \end{aligned}$$

Invarianzprinzip: Alle Operationen für Differentialformen (Summe, alternierendes Produkt, Differentiation, Integration) sind unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung.

10.2.7.5 Integration von Differentialformen

Der Cartansche Kalkül gestattet eine einheitliche Behandlung von Kurvenintegralen, Flächenintegralen und Volumenintegralen und deren Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen (r -fache Integrale). Es ergeben sich automatisch die richtigen Transformationsformeln bei Variablenwechsel von Integralen. Ferner erhält man eine sehr elegante Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

auf höhere Dimensionen. Das ist der allgemeine Satz von Stokes

$$\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega, \tag{10.52}$$

der z. B. die Integralsätze von Gauß und Stokes der klassischen Vektoranalysis als Spezialfälle umfasst. Ferner enthält (10.52) die Formel der partiellen Integration, die eine Schlüsselrolle für die moderne Analysis spielt (vgl. (10.1) und die daran anschließende Diskussion).

Integration von n -Formen: Es sei Ω ein Gebiet im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n , und es sei

$$\omega = \frac{1}{n!} a_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}. \tag{10.53}$$

Definitionsgemäß ergibt sich das Integral $\int_{\Omega} \omega$ durch

$$\int_{\Omega} \omega := \int_{\Omega} \frac{1}{n!} a_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}. \tag{10.54}$$

Das bedeutet, dass man formal das Produktzeichen \wedge weglässt und dann das so entstehende klassische mehrfache Integral verwendet. Das Produktzeichen \wedge ist jedoch wichtig, um formal sofort das richtige Transformationsverhalten zu erhalten.

Transformation von Integralen: Transformiert man ω auf die neuen Variablen y^1, \dots, y^n mit der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} > 0 \quad \text{auf } \Omega', \quad (10.55)$$

wobei Ω in Ω' übergeht, dann erhält man nach 10.2.7.4 die transformierte Form

$$\omega = \frac{1}{n!} a_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Somit gilt

$$\int_{\Omega} \omega = \int_{\Omega'} \frac{1}{n!} a_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n. \quad (10.56)$$

Das ist genau die klassische Transformationsformel, d. h., es gilt

$$\int_{\Omega} \omega = \int_{\Omega'} \omega.$$

Hat man in (10.55) anstelle von „>“ das Zeichen „<“, dann ergibt sich $\int_{\Omega} \omega = - \int_{\Omega'} \omega$.

► **BEISPIEL 13:** Nach Beispiel 9 gilt

$$\int_{\Omega} a_{12} dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\Omega'} a_{12} \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(y^1, y^2)} dy^1 \wedge dy^2,$$

falls die Funktionaldeterminante $\partial(x^1, x^2)/\partial(y^1, y^2)$ positiv ist. Das entspricht der klassischen Transformationsformel

$$\int_{\Omega} a_{12} dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\Omega'} a_{12} \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(y^1, y^2)} dy^1 \wedge dy^2.$$

Integration von r -Formen mit $r < n$: Es sei F eine r -dimensionale Fläche im n -dimensionalen Raum mit der Parameterdarstellung

$$x^1 = x^1(u^1, \dots, u^r), \quad \dots, \quad x^n = x^n(u^1, \dots, u^r),$$

wobei die Parameter das Gebiet G des r -dimensionalen Raumes durchlaufen, und es sei

$$\omega(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^r) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

vorgegeben. Bezieht man ω auf die Parameter u^1, \dots, u^r , dann entsteht (vgl. Beispiel 12)

$$\omega(u^1, \dots, u^r) = b du^1 \wedge \dots \wedge du^r.$$

Das Integral über ω wird nun in natürlicher Weise durch

$$\int_F \omega := \int_G b du^1 \wedge \dots \wedge du^r$$

erklärt, wobei rechts ein klassisches Integral steht. Bezieht man F auf andere Parameter v^1, \dots, v^r mit

$$\frac{\partial(u^1, \dots, u^r)}{\partial(v^1, \dots, v^r)} > 0 \quad \text{auf } G', \quad (10.57)$$

wobei G in G' übergeht, dann gilt $\omega = b \frac{\partial(u^1, \dots, u^r)}{\partial(v^1, \dots, v^r)} dv^1 \wedge \dots \wedge dv^r$. Somit ist

$$\int_F \omega = \int_{G'} b \frac{\partial(u^1, \dots, u^r)}{\partial(v^1, \dots, v^r)} dv^1 \cdots dv^r.$$

Nach der klassischen Transformationsformel für Integrale ist somit die Definition von $\int_F \omega$ unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung von F . Genauer sind alle Parameterdarstellungen von F zulässig, die die Orientierung erhalten, d. h., es gilt (10.57).

Analog wird $\int_F \omega$ erklärt, falls die Fläche F durch mehrere lokale Parameterdarstellungen beschrieben wird. Dann zerlegt man F in Teilflächen, die alle durch Parameterdarstellungen beschrieben werden können, und addiert die entsprechenden Teileintegrale. Der Kalkül liefert in jedem Fall automatisch Ergebnisse, die unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Parameterdarstellungen sind.

► **BEISPIEL 14:** Gegeben seien $\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2$ und die Kurve C in der Parameterdarstellung $x^1 = x^1(t), x^2 = x^2(t)$, $a \leq t \leq b$. Nach Beispiel 11 gilt

$$\int_C \omega = \int_a^b \left(a_1 \frac{dx^1}{dt} + a_2 \frac{dx^2}{dt} \right) dt.$$

Das ist genau die Regel zur Berechnung eines Kurvenintegrals.

► **BEISPIEL 15:** Gegeben seien $\omega = a_{23} dx^2 \wedge dx^3 + a_{31} dx^3 \wedge dx^1 + a_{12} dx^1 \wedge dx^2$ und die Fläche F in der Parameterdarstellung

$$x^1 = x^1(u^1, u^2), \quad x^2 = x^2(u^1, u^2), \quad x^3 = x^3(u^1, u^2).$$

Nach Beispiel 12 gilt

$$\begin{aligned} \int_F \omega &= \int \left(a_{23} \frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2)} + a_{31} \frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u^1, u^2)} + a_{12} \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)} \right) du^1 du^2 \\ &= \int \mathbf{a} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \right) du^1 du^2 = \int \mathbf{a} \mathbf{n} dF \end{aligned}$$

mit dem Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} (Abb. 10.9(b)) und

$$\mathbf{a} = a_{23} \mathbf{i} + a_{31} \mathbf{j} + a_{12} \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(u^1, u^2) = x^1(u^1, u^2) \mathbf{i} + x^2(u^1, u^2) \mathbf{j} + x^3(u^1, u^2) \mathbf{k}.$$

Das ist nichts anderes als ein Flächenintegral.

Der allgemeine Stokessche Satz: Es sei F eine r -dimensionale Fläche im n -dimensionalen Raum ($2 \leq r \leq n$; für $r = n$ ist F ein n -dimensionales Gebiet) mit der Parameterdarstellung

$$x^1 = x^1(u^1, \dots, u^r), \quad \dots, \quad x^n = x^n(u^1, \dots, u^r).$$

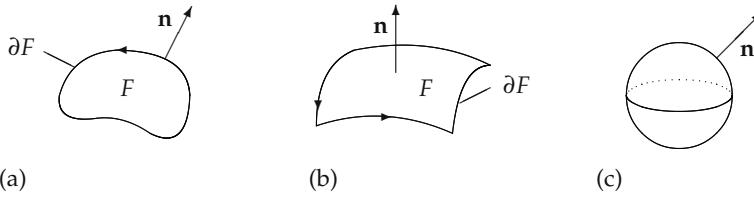


Abb. 10.9

Der Rand von F werde mit ∂F bezeichnet und besitze die Parameterdarstellung

$$x^1 = x^1(v^1, \dots, v^r), \quad \dots, \quad x^n = x^n(v^1, \dots, v^r).$$

Ist ferner

$$\omega = \frac{1}{(r-1)!} a_{i_1 \dots i_{r-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}}$$

eine Differentialform $(r-1)$ -ten Grades, dann gilt

$$\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega. \quad (10.58)$$

Kohärente Orientierung des Randes ∂F : Da die Integrale in (10.58) von der Orientierung der Fläche F und des Randes ∂F abhängen, muss diese Orientierung in geeigneter Weise fixiert werden. Explizit bedeutet das folgendes: Zu jedem Randpunkt gibt es eine Umgebung U auf der Fläche F mit der Parameterdarstellung

$$x^1 = x^1(w^1, \dots, w^r), \quad \dots, \quad x^n = x^n(w^1, \dots, w^r), \quad w^1 \leq 0,$$

wobei das Randstück $\partial F \cap U$ durch $w^1 = 0$ beschrieben wird. Ferner ist

$$\frac{\partial(u^1, \dots, u^r)}{\partial(w^1, \dots, w^r)} > 0, \quad \frac{\partial(v^2, \dots, v^r)}{\partial(w^2, \dots, w^r)} > 0.$$

Kann man F und ∂F nicht durch eine einzige Parameterdarstellung gewinnen, dann zerlege man F und ∂F in geeigneter Weise.

► **BEISPIEL 16:** $n = 2$ (Ebene), $r = 2$: F sei ein Gebiet der Ebene mit der Randkurve ∂F : $x^1 = x^1(t)$, $x^2 = x^2(t)$. Beim Durchlaufen der Kurve im Sinne wachsender t -Werte soll F zur Linken liegen (vgl. Abb. 10.9(a)). Ferner sei

$$\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2, \quad d\omega = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2.$$

(10.58) bedeutet dann

$$\int_F \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^1} \right) dx^1 dx^2 = \int_{\partial F} a_1 dx^1 + a_2 dx^2.$$

Das ist der klassische Satz von Gauß in der Ebene.

► **BEISPIEL 17:** $n = 3$ (Raum), $r = 2$: F sei eine Fläche im Raum mit der Parameterdarstellung

$$x^1 = x^1(u^1, u^2), \quad x^2 = x^2(u^1, u^2), \quad x^3 = x^3(u^1, u^2),$$

und der Randkurve ∂F ,

$$x^1 = x^1(t), \quad x^2 = x^2(t), \quad x^3 = x^3(t),$$

die so orientiert ist, dass sie bei wachsenden t -Werten die Normalenvektoren

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \right) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \right|^{-1}$$

entgegen dem Uhrzeigersinn umläuft (vgl. Abb. 10.9(b)).

Ferner sei $\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3$. Nach Tabelle 10.3 bedeutet (10.58):

$$\int_F (\mathbf{rot} \mathbf{a}) \mathbf{n} dF = \int_{\partial F} \mathbf{a} d\mathbf{r}.$$

Das ist der klassische Satz von Stokes.

► BEISPIEL 18: $n = 3$ (Raum), $r = 3$: F sei ein räumliches Gebiet mit dem Rand ∂F ,

$$x^1 = x^1(u^1, u^2), \quad x^2 = x^2(u^1, u^2), \quad x^3 = x^3(u^1, u^2),$$

der so orientiert ist, dass der Normalenvektor \mathbf{n} nach außen zeigt (Abb. 10.9(c)). Es sei

$$\omega = a_{23} dx^2 \wedge dx^3 + a_{31} dx^3 \wedge dx^1 + a_{12} dx^1 \wedge dx^2.$$

Nach Tabelle 10.3 bedeutet (10.58):

$$\int_F \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_{\partial F} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dF.$$

Das ist der Satz von Gauß im Raum (vgl. 4.2.2.10.).

10.2.7.6 Operationen für Differentialformen, die von einem metrischen Tensor abhängen

Die vorangegangenen Operationen für Differentialformen hängen nicht von einem metrischen Tensor ab. Deshalb lassen sie sich sofort auf allgemeine Mannigfaltigkeiten übertragen (vgl. Kapitel 15). Im folgenden setzen wir voraus, dass ein metrisches Tensorfeld g_{ij} mit dem Bogen-element $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ und der Eigenschaft (10.27) gegeben ist. Die sich daraus weiter unten ergebenden Operationen $\delta\omega$ und $*\omega$ kann man unmittelbar auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern (vgl. 16.1 und 16.2). Indizes werden wie in 10.2.4 gehoben oder gesenkt.

Der δ -Operator: Für

$$\omega = \frac{1}{r!} a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \tag{10.59}$$

definieren wir

$$\delta\omega := -\frac{1}{(r-1)!} \nabla^i a_{i i_2 \dots i_r} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten x^j . Es gilt stets $\delta^2 = 0$, d.h. $\delta\delta\omega = 0$.

► BEISPIEL 19 (Divergenz):

$$\omega = a_i dx^i, \quad \delta\omega = -\nabla^i a_i = -\nabla_i a^i = -|g|^{1/2} \partial_i (|g|^{1/2} a^i).$$

► BEISPIEL 20:

$$\omega = \frac{1}{2} a_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad \delta\omega = -\nabla^i a_{ij} dx^j, \quad a_{ij} = -a_{ji},$$

mit

$$\nabla^i a_{ij} = g_{jk} \nabla_i a^{ik} = g_{jk} |g|^{-1/2} \partial_i (|g|^{1/2} a^{ik}).$$

***-Operator von Hodge:** Ist ω wie in (10.59) gegeben, dann setzen wir

$$*\omega := \frac{1}{r!(n-r)!} E_{i_1 \dots i_n} a^{i_1 \dots i_r} dx^{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}.$$

($E_{...}$ findet man in 10.2.3). Durch den $*$ -Operator gehen r -Formen in $(n-r)$ -Formen über; $*\omega$ ist von der Wahl der lokalen Koordinaten x^j unabhängig, falls man nur orientierungserhaltende Koordinatentransformationen benutzt, d.h., es gilt

$$\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(x^{1'}, \dots, x^{n'})} > 0$$

für den Übergang von x^1, \dots, x^n zu $x^{1'}, \dots, x^{n'}$. Im Fall „ < 0 “ geht $*\omega$ in $-*\omega$ über. Ferner gilt $**\omega = (-1)^{r(n-r)} (\text{sgn } g)\omega$.

► **BEISPIEL 21:** Wir benutzen kartesische Koordinaten x^1, x^2, x^3 mit dem euklidischen Bogenelement $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, d.h., es ist $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ mit $g_{ij} = \delta_{ij}$. Dann gilt

$$*dx^1 = dx^2 \wedge dx^3, \quad *(dx^2 \wedge dx^3) = dx^1, \quad *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 1.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich durch zyklisches Vertauschen der Koordinaten, z.B. $*(dx^3 \wedge dx^1) = dx^2$. Ferner ist

$$\begin{aligned} **dx^1 &= dx^1, \\ **(dx^2 \wedge dx^3) &= dx^2 \wedge dx^3, \\ **(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = *1. \end{aligned}$$

Aus der Linearität des $*$ -Operators erhält man ferner z.B.

$$\begin{aligned} *(a_{23} dx^2 \wedge dx^3 + a_{13} dx^1 \wedge dx^3) &= a_{23} *(dx^2 \wedge dx^3) + a_{13} *(dx^1 \wedge dx^3) \\ &= a_{23} dx^1 - a_{13} dx^2. \end{aligned}$$

Den Zusammenhang zwischen den Operatoren δ , d und $*$ findet man in 16.1.8.

10.2.8 Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie

Grundidee: Unter einem *Inertialsystem* verstehen wir ein kartesisches Koordinatensystem mit den räumlichen Koordinaten x, y, z und der Zeitkoordinate t , in dem ein kräftefreier Körper ruht oder sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegt. Einstein postulierte 1905:

(R) In Inertialsystemen verlaufen alle physikalischen Prozesse in gleicher Weise.²⁵

Das ist das sogenannte Einsteinsche Relativitätsprinzip. Speziell postulierte Einstein, dass die Geschwindigkeit c des Lichtes in allen Inertialsystemen gleich ist. Das führt zu einer gründlichen Revision unserer Vorstellungen von Raum und Zeit. Um das anschaulich zu erläutern, betrachten wir die folgende Situation. Beobachtet man von einem fahrenden Auto aus einen fahrenden Zug, dann hängt die beobachtete Geschwindigkeit des Zuges nach klassischen Vorstellungen wesentlich davon ab, welche Geschwindigkeit das Auto besitzt. Analog erwartet man, dass die in

²⁵Das bedeutet genauer, dass gleiche Anfangs- und Randbedingungen den gleichen Prozessverlauf ergeben. (R) verallgemeinert das klassische Galileische Relativitätsprinzip, wonach in Inertialsystemen alle mechanischen Prozesse in gleicher Weise ablaufen.

einem Auto gemessene Geschwindigkeit des Lichtes in unterschiedlichen Autos verschieden ist. Soll die Geschwindigkeit des Lichtes in allen Autos gleich sein, dann lässt sich das nur dadurch erklären, dass die Zeitmessung in den Autos unterschiedlich ist. Die genaue Formel wird durch die Lorenztransformation gegeben.

Die klassischen Vorstellungen von Raum und Zeit sowie die klassische Physik ergeben sich, wenn man annimmt, dass alle auftretenden Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Diese Bedingung ist im täglichen Leben erfüllt, sie ist aber z. B. in modernen Teilchenbeschleunigern verletzt. Für die richtige Beschreibung von Streuprozessen in Teilchenbeschleunigern muss man unbedingt die Relativitätstheorie benutzen. Ferner erfordert ein tieferes Verständnis der Maxwellsschen Elektrodynamik die spezielle Relativitätstheorie (vgl. 10.2.9).

Die spezielle Lorenztransformation: Wir betrachten zunächst zwei Inertialsysteme Σ bzw. Σ' mit den kartesischen Koordinaten x, y, z bzw. x', y', z' sowie den Zeiten t bzw. t' .

Wir nehmen ferner an, dass zur Zeit $t = 0$ die beiden Systeme zusammenfallen und sich Σ' in Σ mit der konstanten Geschwindigkeit v entlang der x -Achse bewegt ($v < c$) (Abb. 10.10).

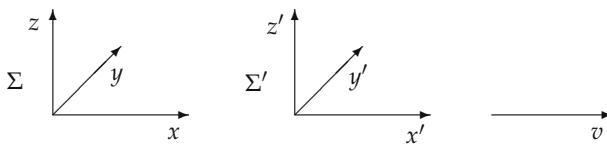


Abb. 10.10

Dann ergibt sich die sogenannte *spezielle Lorenztransformation* bezüglich der x -Achse

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (10.60)$$

Ist der Wert v/c klein, dann erhalten wir aus (10.60) näherungsweise die klassische Transformationsformel von Galilei

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (10.61)$$

die einer absoluten Zeitmessung entspricht. Die Formel (10.61) wird im täglichen Leben benutzt, weil die dort auftretenden Geschwindigkeiten v sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c sind.

Eine spezielle Lorenztransformation bezüglich y ergibt sich aus (10.60), indem man x mit y vertauscht.

► **BEISPIEL 1** (Zeitdilatation): Wir nehmen an, dass in Σ am Ort $x = 0, y = 0, z = 0$ zu den Zeitpunkten t_1 und $t_2 = t_1 + \Delta t$ zwei Signale ausgesandt werden. Ein Beobachter in Σ' bemerkt nach (10.60) beide Signale zu den Zeitpunkten $t'_j = t_j / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Somit gilt für $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ die Beziehung

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Wegen $\Delta t' > \Delta t$ erscheinen deshalb beide Signale in Σ' gegenüber Σ gedehnt.

► **BEISPIEL 2** (Längenkontraktion): Wir betrachten einen Stab der Länge L , der in Σ auf der x -Achse ruht mit den beiden Endpunkten x_1 und $x_2 = x_1 + L$. Ein Physiker in Σ' beobachtet nach (10.60) die Bewegungsgleichungen

$$x'_j = \Gamma(x_j - vt), \quad t'_j = \Gamma(t - vx_j/c^2), \quad \Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

für die Endpunkte des Stabes. Daraus erhält er

$$x_j = \Gamma(x'_j + vt'_j).$$

Um die Länge L' des Stabes in Σ' zur Zeit t' zu messen, setzen wir $t'_1 = t'_2 = t'$. Daraus folgt $L' = x'_2 - x'_1$, also $L = \Gamma L'$, d.h.

$$L' = L\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Wegen $L' < L$ tritt somit in Σ' eine Längenkontraktion gegenüber Σ auf.

► **BEISPIEL 3** (Additionstheorem der Geschwindigkeiten): Findet in Σ die Bewegung

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

statt, dann beobachtet man in Σ' die Bewegung $x' = x'(t')$, $y' = y'(t')$, $z' = z'(t')$. Für die Geschwindigkeiten $V := dx(t)/dt$ und $V' := dx'(t')/dt'$ mit $x(t) = x'(t')$ erhalten wir nach (10.60) die Beziehung

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \Big/ \frac{dt}{dt'} = \frac{\dot{x} - v}{1 - v\dot{x}/c^2}.$$

Wegen $\dot{x} = V$ ergibt sich daraus das sogenannte Additionstheorem der Geschwindigkeiten

$$V' = \frac{V - v}{1 - Vv/c^2}.$$

Sind v/c und V/c klein, dann erhalten wir daraus näherungsweise das klassische Additionstheorem $V' = V - v$, das wir im täglichen Leben benutzen, um z.B. die Relativgeschwindigkeit zwischen einem Auto und einem Zug zu bestimmen.

Die allgemeine Lorenztransformation: Unter einer Lorenztransformation versteht man eine Transformation zwischen zwei Inertialssystemen Σ und Σ' , die sich zusammensetzt aus einer Drehung und drei speziellen Lorenztransformationen der Form (10.60) bezüglich der x -Achse (bzw. y -Achse, z -Achse). Vom physikalischen Standpunkt aus handelt es sich dabei um eine Transformation zwischen Σ und Σ' , wobei zur Zeit $t = 0$ beide Systeme zusammenfallen und Σ' sich in Σ mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Eine Poincarétransformation setzt sich definitionsgemäß aus einer Lorenztransformation, einer räumlichen und zeitlichen Translation

$$x' = x + \text{const}, \quad y' = y + \text{const}, \quad z' = z + \text{const}, \quad t' = t + \text{const},$$

einer möglichen Zeitspiegelung $t' = -t$ und einer möglichen Raumspiegelung (z.B. $x' = -x$) zusammen.

Alle Lorenztransformationen (bzw. Poincarétransformationen) bilden eine Gruppe (die *Lorenzgruppe* bzw. die *Poincarégruppe*).

Die Minkowskimetrik: Es sei Σ ein Inertialssystem. Wir setzen

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct.$$

Dann ist (x^1, \dots, x^4) ein Punkt des \mathbb{R}^4 . Ferner sei

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -1 \quad \text{und} \quad g_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Bezeichnet σ einen reellen Parameter, dann stellt W , gegeben durch

$$x^j = x^j(\sigma), \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{10.62}$$

eine Kurve im \mathbb{R}^4 dar. Für jeden festen Wert σ ergibt sich ein Raumpunkt zu einem festen Zeitpunkt. Das ist ein *Ereignis*. Somit beschreibt (10.62) eine Folge von Ereignissen, die man auch

eine *Weltlinie* W nennt. Wählt man die Zeit als Parameter ($\sigma = t$), dann entspricht die Weltlinie (10.62) der Bewegung $x^1 = x^1(t)$, $x^2 = x^2(t)$, $x^3 = x^3(t)$. Entscheidend ist nun, dass wir durch

$$s := \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i(\sigma) \dot{x}^j(\sigma)} d\sigma \quad (10.63)$$

die Bogenlänge s der Weltlinie W definieren. Dabei ist $\dot{x}^j := dx^j/d\sigma$. Aus (10.63) folgt

$$\dot{s}^2 = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (10.64)$$

Dafür schreiben wir kurz $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Bei beliebigen Koordinatentransformationen bildet g_{ij} einen zweifach kovarianten, symmetrischen Tensor (metrischer Tensor).

Satz 1: Bei Lorenztransformationen²⁶ bleiben die Werte von g_{ij} konstant, d.h., es ist $g_{i'j'} = g_{ij}$.

Dieser Satz entspricht dem Einsteinschen Relativitätsprinzip (R). Man beachte, dass Lorenztransformationen dem Übergang zwischen Inertialsystemen entsprechen und diese gleichberechnigt sind.

► **BEISPIEL 4:** Wählen wir in (10.62) die Zeit als Parameter (d.h. $\sigma = t$), dann gilt $s = c\tau$ mit der sogenannten *Eigenzeit*

$$\tau = \int_{t_0}^t \left[1 - \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{1}{c} \frac{dx^\alpha(t)}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt. \quad (10.65)$$

Die Eigenzeit τ wird von einer Uhr angezeigt, die sich auf der Bahn

$$x^\alpha = x^\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (10.66)$$

bewegt. Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir fordern, dass sich die Uhr mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt, d.h., es gilt $[...] > 0$ in (10.65). Handelt es sich bei (10.66) um einen Lichtstrahl, dann ist $[...] = 0$ in (10.65). In diesem Fall ist die Eigenzeit τ identisch gleich null.

Für Überlichtgeschwindigkeit ergibt sich $[...] < 0$. Dann ist τ rein imaginär. Somit sind in der speziellen Relativitätstheorie nur Bewegungen sinnvoll, die höchstens Lichtgeschwindigkeit besitzen. Einstein postulierte allgemeiner:

(P) *Physikalische Wirkungen können sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.*

Die Bedeutung der Tensoranalysis für die spezielle Relativitätstheorie: Nach dem Relativitätsprinzip (R) weiter oben müssen die Gleichungen der Physik in jedem Inertialsystem die gleiche Gestalt haben. Dieses Ziel kann man leicht dadurch erreichen, dass man diese Gleichungen als Tensorgleichungen schreibt und Satz 1 beachtet.

Beispielsweise ist die Eigenzeit τ eine skalare Größe, d.h., sie ist unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem (Bezugssystem). Dagegen ändert sich die Systemzeit t bei Wechsel der Bezugssysteme. Das erhellt die Bedeutung von skalaren Größen für die Physik.

Die Grundgleichungen der relativistischen Mechanik: Im folgenden summieren wir über gleiche obere und untere lateinische (bzw. griechische) Indizes von 1 bis 4 (bzw. 1 bis 3). Die Bewegung eines Teilchens $x^j = x^j(\tau)$, $j = 1, \dots, 4$, wird durch

$$\frac{Dp^j}{d\tau} = \mathbb{K}^j, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (10.67)$$

²⁶Die gleiche Aussage gilt auch für Poincarétransformationen.

beschrieben mit dem Viererimpuls $p^j = m_0 \frac{dx^j}{d\tau}$, der Ruhmasse m_0 , der Eigenzeit τ und der Viererkraft \mathbf{K}^j .

Diskussion: Die Gleichung (10.67) ist eine Tensorgleichung, die in einem beliebigen Koordinatensystem gilt. Bei einem beliebigen Wechsel des Koordinatensystems (Bezugssystems) transformieren sich diese Größen, wie es das Indexbild angibt, d.h., p^j und \mathbf{K}^j sind kontravariante Tensoren, während τ und m_0 Skalare sind.

Es sei jetzt Σ ein Inertialsystem mit den orthonormierten Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Dann gilt $g_{ij} = \text{const}$. Folglich ist $D/d\tau = d/d\tau$. Wir setzen

$$\mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{p} = p^\alpha \mathbf{e}_\alpha = m_0 \dot{\mathbf{x}}/\Gamma, \quad \mathbf{K} = K^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \Gamma \mathbf{K}^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

mit $\Gamma = \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}$. Der Punkt bezeichnet die Ableitung nach der Zeit t in Σ . Wegen $\frac{D}{d\tau} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\Gamma} \frac{d}{dt}$ ist (10.67) für $j = 1, 2, 3$ äquivalent zu

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{K} \quad \text{mit dem Impuls } \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} \quad (10.68)$$

und der Masse $m = m_0 / \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}$, die von der Geschwindigkeit abhängt. Die Gleichung (10.68) verallgemeinert die klassische Newtonsche Bewegungsgleichung (Kraft = zeitliche Änderung des Impulses).

Das relativistische Variationsproblem: Besitzt das Kraftfeld \mathbf{K} ein Potential U , d.h. $\mathbf{K} = -\text{grad } U$, dann ist die Lagrangefunktion durch

$$L := -m_0 c^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2} - U(\mathbf{x})$$

gegeben. Jede Lösung des Variationsproblems

$$\int_a^b L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt = \text{stationär!}, \quad (10.69)$$

$\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)$ sind fest vorgegeben,

genügt den Euler–Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (10.70)$$

(vgl. 14.5.2). Gleichung (10.70) ist identisch mit der Bewegungsgleichung (10.68).

Ist die Geschwindigkeit $|\dot{\mathbf{x}}|$ des Massenpunktes gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c klein, d.h., \mathbf{x}^2/c^2 ist klein, dann erhält man in erster Näherung für die Lagrangefunktion den Ausdruck

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{x}}^2 - U - m_0 c^2.$$

Das ist bis auf die Konstante $-m_0 c^2$ die klassische Lagrangefunktion L = kinetische Energie $\frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{x}}^2$ – potentielle Energie U .

Die Hamiltonfunktion: Um den Ausdruck für die Energie H zu erhalten, benutzen wir den sogenannten Hamiltonformalismus (vgl. 15.6), d.h., mit Hilfe der Impulskomponenten

$$p^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

wird die Hamiltonfunktion $H := \sum_{\alpha=1}^3 p^\alpha \dot{x}^\alpha - L$ eingeführt. Dann ist

$$H = mc^2 + U$$

mit $m = m_0 / \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}$ gleich der Energie des Teilchens. Das ist die berühmte Einsteinsche Energieformel. Ruht das Teilchen und liegt kein Kraftfeld vor ($\dot{\mathbf{x}} = 0, U = 0$), dann ist die Ruhenergie des Teilchens durch $H = m_0 c^2$ gegeben. Auf dieser Formel beruht die Energieproduktion der Sonne (Synthese von Helium aus Wasserstoff) sowie die Energieerzeugung durch Kernspaltung.

Nunmehr erhalten wir für die vierte Komponente p^4 des Viererimpulses in einem Inertialsystem die folgende physikalische Interpretation:

$$cp^4 = m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau} = mc^2 = \text{Ruhenergie} + \text{kinetische Energie}.$$

Geodätische Linien: Für ein kräftefreies Teilchen ergibt sich aus (10.67) die Bewegungsgleichung

$$\frac{D}{d\tau} \left(\frac{dx^j}{d\tau} \right) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (10.71)$$

Das ist die Gleichung einer geodätischen Linie bezüglich der Minkowskimetrik g_{ij} (vgl. 16.1).

Allgemeine Relativitätstheorie: In der klassischen Newtonschen Gravitationstheorie breitet sich die Wirkung der Gravitationskraft mit unendlicher Geschwindigkeit aus. Eine Änderung der Masse der Sonne führt beispielsweise augenblicklich zu einer Änderung der Erdbahn. Das widerspricht dem obigen Postulat (P), wonach sich physikalische Wirkungen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Um die Gravitationstheorie so zu modifizieren, dass (P) gilt, schuf Einstein 1915 seine allgemeine Relativitätstheorie, die wir in 16.5 darstellen. Dann geht (10.71) in die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes über, wobei das Gravitationsfeld durch ein metrisches Tensorfeld g_{ij} beschrieben wird, das sich im Unterschied zur speziellen Relativitätstheorie von der Minkowskimetrik unterscheidet.

10.2.9 Anwendungen in der Elektrodynamik

Die Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes besitzt wichtige Bezüge zu unterschiedlichen Gebieten der Mathematik. Wir wollen hier zeigen, wie sich die Maxwellschen Gleichungen in verschiedenen mathematischen Sprachen formulieren lassen. Wir benutzen dabei die Bezeichnungen der speziellen Relativitätstheorie (vgl. 10.2.8). Indizes werden wie in 10.2.4 mit Hilfe des metrischen Tensors g_{ij} gehoben oder gesenkt. Über gleiche obere und untere lateinische (bzw. griechische) Indizes wird von 1 bis 4 (bzw. 1 bis 3) summiert. Zum Beispiel ist

$$j^i = g^{ik} j_k, \quad F^{ik} = g^{ir} g^{ks} F_{rs}.$$

Wir benutzen das internationale MKSA-System (Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampère).

Die Sprache der Differentialformen: Die eleganteste Formulierung der *Maxwellschen Gleichungen* der Elektrodynamik im Vakuum lautet

$$-\delta F = \mu_0 j, \quad dF = 0. \quad (10.72)$$

Dabei ist F eine 2-Form, die das *elektromagnetische Feld* beschreibt, und j ist eine 1-Form, die *Ladungen* und *Ströme* beschreibt. Explizit gilt

$$F = \frac{1}{2} F_{ik} dx^i \wedge dx^k, \quad j = j_k dx^k, \quad F_{ik} = -F_{ki}, \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Ferner ist μ_0 (bzw. ϵ_0) die magnetische Permeabilitätskonstante (bzw. Dielektrizitätskonstante) des Vakuums. Bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, dann gilt $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$.

Relativistische Invarianz: Die Maxwellschen Gleichungen (10.72) gelten in jedem Koordinatensystem (physikalisches Bezugssystem). Da der metrische Tensor g_{ij} in jedem Inertialsystem die gleiche Form hat und δ nur von g_{ij} abhängt, besitzen die Maxwellschen Gleichungen in jedem Inertialsystem die gleiche Form, d. h., sie sind relativistisch invariant. Während Einstein die klassische Mechanik modifizieren musste, um eine relativistische Mechanik zu erhalten, konnte er die Maxwellschen Gleichungen unverändert übernehmen.

Mathematische Folgerungen: Mit Hilfe des Kalküls der Differentialformen ergeben sich aus (10.72) sofort eine Reihe wichtiger Aussagen, die man mit Hilfe anderer mathematischer Sprachen (z. B. der klassischen Vektoranalysis) nicht so elegant erhält.

Wegen $\delta^2 = 0$ folgt aus (10.72)

$$\delta j = 0 \quad (\text{Ladungserhaltung}). \quad (10.73)$$

Nach dem Poincaré-Lemma (vgl. 10.2.7.3) erhalten wir wegen $dF = 0$ die Existenz einer 1-Form $A = A_k dx^k$ mit

$$F = dA \quad (\text{Viererpotential des elektromagnetischen Feldes}). \quad (10.74)$$

Satz 1: Genügt das Viererpotential A den Gleichungen

$$\delta A = 0 \quad (\text{Lorenz-Eichbedingung}) \quad (10.75)$$

und

$$-(d\delta + \delta d)A = \mu_0 j \quad (\text{Wellengleichung}), \quad (10.76)$$

dann genügt $F = dA$ den Maxwellschen Gleichungen (10.72).

Beweis: Wir benutzen lediglich $d^2 = 0$ und $\delta^2 = 0$. Aus $F = dA$ folgt $dF = ddA = 0$. Ferner implizieren (10.75) und (10.76) sofort $-\delta dA = \mu_0 j$, d. h. $-\delta F = \mu_0 j$.

Satz 2: Die allgemeinste Lösung der Gleichung (10.74), d. h., das allgemeinste Viererpotential A ist gegeben durch

$$A = A_{\text{spez}} + df, \quad (10.77)$$

wobei f eine beliebige Funktion ist.

Das folgt sofort aus dem Poincaré-Lemma (vgl. 10.2.7.3). Den Übergang von A_{spez} zu A in (10.77) bezeichnet man als *Eichtransformation*. Wegen $ddf = 0$ ist $F = dA_{\text{spez}}$, d. h., F ist eichinvariant in dem Sinne, dass F nicht von der Wahl der Eichfunktion f abhängt.

Inertialsysteme: Die Gleichungen (10.72) bis (10.77) gelten in beliebigen Koordinatensystemen (Bezugssystemen). Wir betrachten jetzt ein beliebiges Inertialsystem Σ mit den kartesischen Raumkoordinaten x^1, x^2, x^3 und der Zeit $t = x^4/c$. Ferner setzen wir

$$\mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{E} = E^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{H} = H^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{j} = j^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad j^4 = c\rho, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

sowie $\mathbf{A} = A^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, $A^4 = U/c$, $\mathbf{S} = S^\alpha \mathbf{e}_\alpha$. Dabei gilt:

\mathbf{x} = Ortsvektor,

\mathbf{E} = elektrischer Feldstärkevektor,

\mathbf{B} = magnetischer Feldstärkevektor,

ρ = elektrische Ladungsdichte,²⁷

\mathbf{j} = Stromdichtevektor der elektrischen Ladungen,²⁷

U = elektrisches Potential (skalares Potential),

\mathbf{A} = magnetisches Potential (Vektorpotential),

η = Dichte der elektromagnetischen Energie = $2^{-1}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})$,

\mathbf{S} = Stromdichtevektor der elektromagnetischen Energie = $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$.

Der Zusammenhang zwischen F_{km} und \mathbf{E}, \mathbf{B} wird durch

$$(F_{km}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & -E^1/c \\ B^3 & 0 & -B^1 & -E^2/c \\ -B^2 & B^1 & 0 & -E^3/c \\ E^1/c & E^2/c & E^3/c & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die Sprache der Tensoranalysis: Wir bezeichnen F_{km} als *Tensor des elektromagnetischen Feldes*. Dann entsprechen die Gleichungen (10.72) bis (10.77) den folgenden Gleichungen:²⁸

$$\nabla_k F^{km} = \mu_0 j^m, \quad \nabla_{[i} F_{km]} = 0 \quad (\text{Identität von Bianchi}). \quad (10.78)$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$|g|^{-1/2} \partial_k (|g|^{1/2} F^{km}) = \mu_0 j^m, \quad \partial_{[i} F_{km]} = 0.$$

Wegen der Schiefsymmetrie von F_{km} ist $\partial_{[i} F_{km]} = 0$ äquivalent zu

$$\partial_i F_{km} + \partial_k F_{mi} + \partial_m F_{ik} = 0 \quad (\text{Identität von Bianchi}).$$

Ferner gilt

$$\nabla_k j^k = 0 \quad (\text{Ladungserhaltung}). \quad (10.79)$$

Das ist äquivalent zu $\partial_k (|g|^{1/2} j^k) = 0$. Gleichung (10.74) bedeutet

$$F_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i, \quad (10.80)$$

d. h. $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$. Außerdem gilt

$$\nabla_i A^i = 0 \quad (\text{Lorenz-Eichbedingung}), \quad (10.81)$$

$$\nabla_i \nabla^i A_m = \mu_0 j_m \quad (\text{Wellengleichung}). \quad (10.82)$$

Dabei ist die Lorenz-Eichbedingung äquivalent zu $\partial_i (|g|^{1/2} A^i) = 0$. Schließlich ist

$$A_m = A_m^{\text{spez}} + \partial_m f \quad (\text{Eichtransformation}). \quad (10.83)$$

Der Energie-Impulstensor T^{km} : Dieser symmetrische Tensor wird durch

$$T^{km} := \left(\frac{1}{4} g^{km} F^{rs} F_{rs} - g^{mr} F^{ks} F_{rs} \right) \mu_0^{-1}$$

definiert. Außerdem definieren wir den Lorenzkrafttensor

$$K^m := T^{km} j_m.$$

Satz 3 (Erhaltung von Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes): Ist F_{km} eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen (10.72), dann gilt

$$\nabla_k T^{km} = -K^m. \quad (10.84)$$

²⁷Ist Ω ein Gebiet, dann gilt $\int_{\Omega} q \, dx = \text{elektrische Ladung in } \Omega$, $\int_0^t dt \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dF = \text{elektrische Ladung, die im Zeitintervall } [0, t] \text{ aus } \Omega \text{ herausfließt}$. Dabei ist \mathbf{n} der äußere Einheitsnormalenvektor am Rand von Ω .

²⁸Diese Gleichungen bleiben auch in der allgemeinen Relativitätstheorie gültig, falls man den metrischen Tensor g_{ij} der allgemeinen Relativitätstheorie wählt (vgl. 16.5). Physikalisch beschreiben diese Gleichungen dann die Ankopplung des elektromagnetischen Feldes an das Gravitationsfeld.

In einem Inertialsystem hat man

$$(T^{km}) = \begin{pmatrix} -\sigma^{\alpha\beta} & S^\alpha/c \\ S^\alpha/c & \eta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Dabei ist $\sigma^{\alpha\beta}$ der sogenannte dreidimensionale Maxwellsche Spannungstensor, der die Spannungs Kräfte des elektromagnetischen Feldes beschreibt (z.B. den Lichtdruck) und sich bei räumlichen Koordinatentransformationen wie ein Tensor verhält. In der Sprache der Vektoranalysis lautet (10.84):

$$\eta_t + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{j}\mathbf{E}, \quad (\mathbf{S}/c^2)_t + \mathbf{k} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad (10.85)$$

mit der Lorenzkraftdichte $\mathbf{k} = \varrho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ und $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta = \mathbf{D} \otimes \mathbf{E} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \eta I$. Integration von (10.85) ergibt:

Erhaltung der Energie des elektromagnetischen Feldes:²⁹

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dF = - \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dx.$$

Erhaltung des Impulses des elektromagnetischen Feldes:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\mathbf{S}/c^2) \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{k} \, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dF.$$

Bewegung eines geladenen Teilchens: Benutzen wir die Bezeichnungen aus 10.2.8, dann lautet die Gleichung für die Bewegung eines Teilchens der Ruhmasse m_0 und der Ladung Q :

$$m_0 \frac{Dp^k}{d\tau} = Q F^{km} p_k, \quad p^k = m_0 \frac{dx^k}{d\tau} \quad (10.86)$$

(τ = Eigenzeit). Diese Gleichung gilt in einem beliebigen Koordinatensystem; Q und m_0 sind Skalare.

In der Sprache der Vektoranalysis lautet (10.86) für ein beliebiges Inertialsystem:

$$\frac{dm\dot{x}}{dt} = Q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$$

mit der relativistischen Masse $m = m_0 / \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2/c^2}$.

Das Variationsprinzip der Elektrodynamik: In einem beliebigen Inertialsystem betrachten wir für ein beschränktes Raum-Zeitgebiet G im \mathbb{R}^4 das folgende Variationsproblem (Prinzip der stationären Wirkung):

$$\int_G \left(\frac{1}{4} F_{km} F^{km} + \mu_0 A_m j^m \right) dx dt = \text{stationär!}, \quad (10.87)$$

A_m ist fest vorgegeben auf dem Rand ∂G .

Dabei ist $F_{km} = \partial_k A_m - \partial_m A_k$. Gesucht wird A_m , $m = 1, 2, 3, 4$.

Satz 4: Ist A_m eine Lösung von (10.87), dann ist F_{km} eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen (10.78).

²⁹Der Term $-\mathbf{j}\mathbf{E}$ entspricht der erzeugten Wärmeenergie.

In der Sprache der Vektoranalysis lautet (10.87):

$$\int_G \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2/c^2) - \mu_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \varrho U \, dx \, dt = \text{stationär!},$$

\mathbf{A} und U sind fest vorgegeben auf dem Rand ∂G .

Die klassische Formulierung der Maxwellschen Gleichungen in der Sprache der Vektoranalysis: In einem beliebigen Inertialsystem lauten die Maxwellschen Gleichungen (10.72):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \varrho, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \mathbf{D}_t, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mathbf{B}_t. \end{aligned} \quad (10.88)$$

Die erste (bzw. zweite) Zeile entspricht $-\delta F = \mu_0 j$ (bzw. $dF = 0$). Die Beziehungen (10.73) bis (10.77) lauten jetzt folgendermaßen:

$$\varrho_t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (\text{Ladungserhaltung}). \quad (10.89)$$

Ferner ist

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U - \mathbf{A}_t, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{Potential}), \quad (10.90)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + U_t/c^2 = 0 \quad (\text{Lorenz-Eichbedingung}), \quad (10.91)$$

$$\frac{1}{c^2} U_{tt} - \Delta U = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \frac{1}{c^2} \mathbf{A}_{tt} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{Wellengleichung}). \quad (10.92)$$

Nach Satz 1 ergibt jede Lösung U, \mathbf{A} von (10.91) mit Hilfe von (10.90) eine Lösung \mathbf{E}, \mathbf{B} der Maxwellschen Gleichungen (10.88). Eichtransformationen der Potentiale entsprechen

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{spez}} - \operatorname{grad} f, \quad U = U_{\text{spez}} + f_t. \quad (10.93)$$

Die klassische Formulierung der Maxwellschen Gleichungen in der Sprache der Integrale:

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^3 mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} , und es sei \mathbb{F} eine Fläche mit dem Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} . Die Randkurve $\partial\mathbb{F}$ sei kohärent bezüglich \mathbb{F} orientiert (vgl. Abb. 10.9(b)). Integriert man die Maxwellschen Gleichungen (10.88) über Ω und benutzt man die klassischen Integralsätze von Gauß und Stokes, dann erhält man die integrale Form der Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{D} \mathbf{n} \, dF &= \int_{\Omega} \varrho \, dx, & \int_{\partial\mathbb{F}} \mathbf{H} \, dx &= \int_{\mathbb{F}} \mathbf{j} \mathbf{n} \, dF + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{F}} \mathbf{D} \mathbf{n} \, dF, \\ \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \mathbf{n} \, dF &= 0, & \int_{\partial\mathbb{F}} \mathbf{E} \, dx &= -\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{F}} \mathbf{B} \mathbf{n} \, dF. \end{aligned}$$

Diese Form der Maxwellschen Gleichungen ist wichtig, um das Sprungverhalten des elektromagnetischen Feldes entlang von Grenzflächen und Wellenfronten zu untersuchen. Ferner gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \mathbf{n} \, dF = 0 \quad (\text{Ladungserhaltung}).$$

Spezielle Lösungen der Maxwellschen Gleichungen

► **BEISPIEL 1** (Elektrostatik): Ist kein magnetisches Feld \mathbf{B} vorhanden und ist das elektrische Feld \mathbf{E} zeitunabhängig, dann gehen die Maxwellschen Gleichungen (10.88) in den Spezialfall

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

über. Der Potentialansatz $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$ erfüllt automatisch die Gleichung $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Aus $\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho$ erhalten wir die Poissons-Gleichung

$$-\varepsilon_0 \Delta U = \varrho$$

mit der speziellen Lösung

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dy, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

die man als *Volumenpotential* bezeichnet. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Ladungsdichte ϱ hinreichend glatt ist und außerhalb einer hinreichend großen Kugel verschwindet (z. B. $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$).

► **BEISPIEL 2** (ebene elektromagnetische Wellen): Wir setzen voraus, dass keine Ladungen und Ströme vorhanden sind (d. h. $\varrho \equiv 0$ und $\mathbf{j} \equiv 0$). Gegeben sei der Einheitsvektor \mathbf{e} und die glatte Vektorfunktion \mathbf{f} . Dann erhalten wir durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{e}\mathbf{x} - ct), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{e} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))/c$$

eine Lösung der Maxwellschen Gleichung (10.88), wobei \mathbf{E} und \mathbf{B} transversal zu \mathbf{e} sind. Vom physikalischen Standpunkt aus entspricht diese Lösung einer transversalen elektromagnetischen Welle im Vakuum, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit c in Richtung von \mathbf{e} ausbreitet (z. B. Radiowellen oder Lichtwellen).

► **BEISPIEL 3** (spezielle Lösung der Maxwellschen Gleichungen – retardierte Potentiale): Es sei

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{y}, t - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} dy, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}, t - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} dy$$

und

$$\mathbf{E}_1 = -\operatorname{grad} U - \mathbf{A}_t, \quad \mathbf{B}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Wir setzen voraus, dass ϱ und \mathbf{j} glatt sind sowie außerhalb einer hinreichend großen Kugel für alle Zeiten verschwinden. Dann ist $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen (10.88) (und zwar auf dem \mathbb{R}^3 für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$).

Außerdem sind die Lorenz-Eichbedingung (10.91) und die Wellengleichung (10.92) erfüllt.

Der Hauptsatz der Elektrodynamik (eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems für die Maxwellschen Gleichungen): Wir geben uns vor:

(i) die Ladungsdichte ϱ und den Stromdichtevektor \mathbf{j} wie in Beispiel 3;

(ii) das elektrische Feld \mathbf{E}_0 und das magnetische Feld \mathbf{B}_0 zur Anfangszeit $t = 0$; dabei seien \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 glatt (Klasse C_0^∞ auf \mathbb{R}^3). Ferner gelte

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, 0) = \varrho(\mathbf{x}, 0), \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^3.$$

Dann besitzen die Maxwellschen Gleichungen (10.88) genau eine Lösung \mathbf{E}, \mathbf{B} mit

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \mathbb{R}^3.$$

Diese Lösung ist explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial\mathbb{K}} \mathbf{rot}(\mathbf{B}_0(\mathbf{y}) - \mathbf{B}_1(\mathbf{y}, 0)) dF \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial\mathbb{K}} (\mathbf{E}_0(\mathbf{y}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{y}, 0)) dF \right), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial\mathbb{K}} \mathbf{rot}(\mathbf{E}_0(\mathbf{y}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{y}, 0)) dF \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial\mathbb{K}} (\mathbf{B}_0(\mathbf{y}) - \mathbf{B}_1(\mathbf{y}, 0)) dF \right) \end{aligned} \tag{10.94}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Dabei bezeichnet $\mathbb{K} := \{\mathbf{y} : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq ct\}$ eine Kugel vom Radius $r = ct$, d.h., r entspricht genau der Entfernung, die das Licht in der Zeit t zurücklegt. Nach (10.94) hängt das elektrische Feld \mathbf{E} zur Zeit t am Ort \mathbf{x} nur von den Werten von \mathbf{E} und \mathbf{B} zur Zeit $t = 0$ auf dem Kugelrand $\partial\mathbb{K}$ ab. Das entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Eine analoge Aussage gilt für das magnetische Feld \mathbf{B} . Somit beinhaltet die Formel (10.94):

Elektromagnetische Wirkungen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Ausbreitung von Singularitäten, Charakteristiken und elektromagnetische Wellen: Wir betrachten die Maxwellgleichungen (10.88) im Vakuum ohne Ladungen und Ströme (d.h. $\varrho \equiv 0$, $\mathbf{j} \equiv 0$). Es sei

$$\psi(\mathbf{x}, t) = 0$$

die Gleichung einer Wellenfront \mathbb{W} . Definitionsgemäß sind \mathbf{E} und \mathbf{B} stetig entlang \mathbb{W} , während die ersten partiellen Ableitungen längs \mathbb{W} springen können. Dann gilt

$$\frac{1}{c^2} \psi_t(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{grad} \psi)^2 = 0 \tag{10.95}$$

oder $\psi_t = 0$. Die Lösungen dieser beiden Gleichungen bezeichnet man als die Charakteristiken der Maxwell'schen Gleichungen. Eine spezielle Lösung ist zum Beispiel

$$\psi(\mathbf{x}, t) := \mathbf{x}\mathbf{e} - ct.$$

Das entspricht einer ebenen Wellenfront, die sich mit der Geschwindigkeit c in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e} ausbreitet.

Die Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen in der Sprache der symmetrischen hyperbolischen Systeme: Setzen wir

$$u = (E^1, E^2, E^3, B^1, B^2, B^3),$$

dann entspricht das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E} &= -\mathbf{B}_t, \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{D}_t \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \text{ für } t > 0, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \text{ für } t = 0 \text{ (Anfangsbedingung)}, \end{aligned} \tag{10.96}$$

dem System

$$\begin{aligned} A_0 u_t + \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha \partial_\alpha u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \text{ für } t > 0, \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \text{ für } t = 0 \text{ (Anfangsbedingung)}. \end{aligned}$$

Da die Matrizen A_0, A_1, A_2, A_3 reell und symmetrisch sind und A_0 positiv definit ist, handelt es sich um ein sogenanntes symmetrisches hyperbolisches System. Einen allgemeinen Existenzsatz für derartige Systeme findet man in 14.3.

Genügen die zur Zeit $t = 0$ vorgegebenen Felder $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ den Bedingungen $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$, dann genügt die Lösung von (10.96) automatisch den restlichen Maxwellschen Gleichungen $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ auf \mathbb{R}^4 für alle Zeiten $t \geq 0$.

10.2.10 Die geometrische Interpretation des elektromagnetischen Feldes als Krümmung eines Hauptfaserbündels (Eichfeldtheorie)

In der modernen Differentialgeometrie wird die Krümmung von Mannigfaltigkeiten durch die Krümmung von Hauptfaserbündeln \mathbb{H} beschrieben. Die Maxwellschen Gleichungen lassen sich in dieser Sprache formulieren. Dabei gilt:

- (a) Viererpotential $A = A_j dx^j \stackrel{\wedge}{=} \text{Zusammenhang von } \mathbb{H} = \mathbf{M}_4 \times U(1) \text{ (Paralleltransport).}$
- (b) elektromagnetischer Feldtensor $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \stackrel{\wedge}{=} \text{Krümmung von } \mathbb{H}.$

Ersetzt man die Liegruppe $U(1)$ durch $SU(N)$, dann erhält man eine Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen, die in der modernen Elementarteilchenphysik eine entscheidende Rolle spielt (Eichfeldtheorien).

Mit \mathbf{M}_4 bezeichnen wir den \mathbb{R}^4 versehen mit der Minkowskimetrik. Dann entspricht \mathbf{M}_4 einem Inertialsystem. Ferner bezeichne $U(1)$ die Menge aller komplexen Zahlen g mit $|g| = 1$. Bezüglich der Multiplikation bildet $U(1)$ eine Liegruppe. Jedes $g \in U(1)$ erlaubt die Darstellung $g = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Dabei heißt $i\mathbb{R}$ die Liealgebra von $U(1)$ mit der trivialen Lieklammer $[i\varphi, i\psi] = 0$ für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Man bezeichnet φ als *Phase* von g .

Hauptfaserbündel: Wir setzen $\mathbb{H} := \mathbf{M}_4 \times U(1)$. Die Punkte von \mathbb{H} sind gegeben durch die Paare (x, g) mit $x \in \mathbf{M}_4$ und $g \in U(1)$. Die Menge $F_x := \{(x, g) : g \in U(1)\}$ bezeichnet man als die Faser im Punkte x . Da F_x mit der Liegruppe $U(1)$ identifiziert werden kann, heißt \mathbb{H} ein Hauptfaserbündel (vom Produkttyp).

Paralleltransport: Gegeben sei eine Kurve $C : x^j = x^j(\sigma), j = 1, 2, 3, 4$, auf der Basismannigfaltigkeit \mathbf{M}_4 . Man sagt, dass

$$x = x(\sigma), \quad g = g(\sigma)$$

genau dann einen Paralleltransport in \mathbb{H} über der Kurve C beschreibt, wenn die Differentialgleichung

$$\dot{g}(\sigma) + \mathbb{A}_j(x(\sigma)) \dot{x}^j(\sigma) g(\sigma) = 0, \quad \mathbb{A}_j := iA_j, \tag{10.97}$$

erfüllt ist. Man bezeichnet die Differentialform

$$\mathbb{A} := \mathbb{A}_j dx^j + \mu$$

als die Zusammenhangsform von \mathbb{H} . Dabei ist μ die Maurer–Cartan-Form der Liegruppe $U(1)$, d.h., es gilt $\mu_{g(\sigma)}(\dot{x}(\sigma), \dot{g}(\sigma)) := g(\sigma)^{-1} \dot{g}(\sigma)$. Setzen wir $dx^j(\dot{x}(\sigma), \dot{g}(\sigma)) := \dot{x}^j(\sigma)$, dann kann man die Gleichung (10.97) kurz in der Form

$$\mathbb{A}(\dot{x}(\sigma), \dot{g}(\sigma)) = 0 \tag{10.98}$$

schreiben.

Eichtransformationen: Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir

$$g_+ = e^{if(x)} g, \quad g \in U(1), \tag{10.99}$$

als eine Eichtransformation. Aus $g \in U(1)$ folgt $g_+ \in U(1)$. Die zugehörige Eichtransformation von \mathbb{A} lautet definitionsgemäß

$$\mathbb{A}_+ := \mathbb{A} - \text{id} f, \quad \text{d.h.} \quad \mathbb{A}_j^+ := \mathbb{A}_j - i\partial_j f.$$

Satz 1: Ist $(x_+(\sigma), g(\sigma))$ eine Lösung von (10.97), dann ergibt sich die Gleichung für $(x_+(\sigma), g_+(\sigma))$, falls wir \mathbb{A} durch \mathbb{A}_+ ersetzen.

Führen wir A_j durch $\mathbb{A}_j := iA_j$ ein, dann erhalten wir

$$A_j^+ = A_j + \partial_j f, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (10.100)$$

Interpretieren wir A_j als Viererpotential der Elektrodynamik, dann stellt (10.100) eine *Eichtransformation des Viererpotentials* dar.

Kovariante Richtungsableitung: Es sei $g = g(x)$ eine Funktion auf M_4 mit Werten in der Gruppe $U(1)$. Parallel zur Tensoranalysis in 10.2.5 definieren wir für $g(\sigma) := g(x(\sigma))$ die kovariante Richtungsableitung

$$\frac{Dg(\sigma)}{d\sigma} = (\nabla_j g) \dot{x}^j(\sigma)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$\nabla_j := \partial_j + \mathbb{A}_j.$$

Die Gleichung (10.97) für den Paralleltransport lautet dann kurz

$$\frac{Dg}{d\sigma} = 0.$$

Satz 2: Bei einer Eichtransformation $\psi_+(x) = e^{if(x)}\psi(x)$ besitzt die kovariante Ableitung das folgende einfache Transformationsverhalten

$$\nabla_j^+ \psi_+ = e^{if} \nabla_j \psi,$$

falls wir $\nabla_j^+ := \partial_j + \mathbb{A}_j^+$ setzen.

Krümmung: In der Riemannschen Geometrie ergibt sich der Krümmungstensor R_{ikm}^j durch $\nabla_k \nabla_m u^j - \nabla_m \nabla_k u^j = R_{ikm}^j u^i$, d.h., die Krümmung misst die Abweichung von der Kommutativität der kovarianten Ableitung (vgl. 16.1). Parallel dazu setzen wir jetzt

$$\mathbb{F}_{km} := \nabla_k \nabla_m - \nabla_m \nabla_k,$$

d.h. $\mathbb{F}_{km} = \partial_k \mathbb{A}_m - \partial_m \mathbb{A}_k$.

Satz 3: Es gilt $\mathbb{F}_{km}^+ = \mathbb{F}_{km}$, d.h., \mathbb{F}_{km} ist eichinvariant.

Führen wir F_{km} durch $\mathbb{F}_{km} = -iF_{km}$ ein, dann gilt

$$F_{km} = \partial_k A_m - \partial_m A_k.$$

Interpretieren wir A_j als Viererpotential der Elektrodynamik, dann ist F_{km} der *elektromagnetische Feldtensor*.

Krümmungsform: Definieren wir die Krümmungsform durch

$$\mathbb{F} := d\mathbb{A} + \frac{1}{2}[\mathbb{A}, \mathbb{A}] \quad (10.101)$$

mit der Lieklammer $[\cdot, \cdot]$, dann erhalten wir wegen $[\mathbb{A}, \mathbb{A}] = 0$ im vorliegenden Spezialfall der Liegruppe $U(1)$ sofort $\mathbb{F} = d\mathbb{A}$.

Satz 4: Setzen wir $s(x) = (x, 1)$, dann gilt

$$s^*\mathbb{A} = \mathbb{A}_j dx^j, \quad s^*\mathbb{F} = \frac{1}{2}\mathbb{F}_{km} dx^k \wedge dx^m,$$

wobei $s^*\mathbb{A}$ bzw. $s^*\mathbb{F}$ das pull-back (vgl. 15.4) der Zusammenhangsform \mathbb{A} bzw. der Krümmungsform \mathbb{F} bezeichnet.

Kommentar: In der Theorie der Hauptfaserbündel ist nicht die Basismannigfaltigkeit M_4 , sondern das Hauptfaserbündel H das entscheidende Objekt. Deshalb sind die Zusammenhangsform \mathbb{A} und die Krümmungsform \mathbb{F} fundamentale Objekte auf H . Satz 4 zeigt, wie man daraus Formen auf der Basismannigfaltigkeit M_4 erhält, die im vorliegenden Fall mit dem Viererpotential und dem Feldtensor der Elektrodynamik zusammenhängen.

Für allgemeine Liegruppen verschwindet die Klammer $[\mathbb{A}, \mathbb{A}]$ in (10.101) nicht identisch. Gegenüber allgemeineren Eichfeldtheorien ist die Maxwellsche Elektrodynamik besonders einfach, weil die Liegruppe $U(1)$ kommutativ ist (Abelsche Eichfeldtheorie) (d. h., es gilt $gh = hg$ für alle $g, h \in U(1)$). Das impliziert das Verschwinden der Lieklammern.

10.3 Integralgleichungen

10.3.1 Allgemeine Begriffe

Bei einer Integralgleichung³⁰ handelt es sich um eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion φ , wobei in der Gleichung ein Integral auftritt, dessen Integrand von φ abhängt. Ferner können in einer solchen Gleichung auch Terme auftreten, in die die Funktion φ direkt eingeht, d. h. nicht in der Form eines Integrals.

► BEISPIELE:

1. $\int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy + f(x) = 0, \quad a \leq x \leq b;$
2. $\int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x);$
3. $\int_a^x K(x, y)\varphi(y) dy + f(x) = 0;$
4. $\int_a^x K(x, y)\varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x).$

In diesen vier Beispielen sind f und K gegebene Funktionen. Die unter dem Integral stehende bekannte Funktion K wird als *Kern* der Integralgleichung bezeichnet. K muss in dem Quadrat $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ definiert sein, während das Definitionsgebiet der Funktion f das Intervall $a \leq x \leq b$ ist.

³⁰Abschnitt 10.3 stellt eine völlig neubearbeitete Fassung des früher von Prof. Dr. M. Miller † verfassten Abschnitts 8.4. [Ergänzende Kapitel zu Bronstein/Semendjajew, 6. Auflage, Teubner, Leipzig, 1990] dar.

Gleichungen, in denen die unbekannte Funktion φ linear enthalten ist, heißen *lineare Integralgleichungen*. Die obigen vier Beispiele sind lineare Integralgleichungen. Dagegen ist

$$\int_a^b F(x, y, \varphi(y)) \, dy - \varphi(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

eine nichtlineare Integralgleichung, falls F nichtlinear von φ abhängt, zum Beispiel $F(x, y, \varphi) = a(x, y) \sin \varphi$.

Klassifikation: Integralgleichungen, bei denen beide Integrationsgrenzen konstant sind, bezeichnet man als *Fredholmsche Integralgleichungen* (Beispiel 1 und 2). Ist nur eine Integrationsgrenze konstant, so spricht man von einer *Volterraschen Integralgleichung* (Beispiel 3 und 4). Bei *Integralgleichungen erster Art* kommt die unbekannte Funktion nur unter dem Integralzeichen vor (Beispiel 1 und 3). Tritt die unbekannte Funktion sowohl unter dem Integral als auch außerhalb desselben auf, so liegt eine *Integralgleichung zweiter Art* vor (Beispiel 2 und 4). Gleichungen, in denen jedes Glied die unbekannte Funktion enthält, heißen *homogene Integralgleichungen*. Enthält eine Integralgleichung ein Glied ohne die unbekannte Funktion, so ist diese Gleichung *inhomogen*. Das von der unbekannten Funktion freie Glied – in den angeführten Beispielen mit $f(x)$ bezeichnet – heißt auch *Störungsfunktion*.

Strategie: Im folgenden behandeln wir elementare Ergebnisse der klassischen Theorie der Integralgleichungen. Zu diesem Zweck setzen wir den Kern K als stetig voraus und suchen stetige Lösungen, falls nicht ausdrücklich das Gegenteil betont wird. Alle Integrale sind im klassischen (Riemannschen) Sinne zu verstehen.

Die moderne Theorie der Integralgleichungen basiert auf der Anwendung *funktionalanalytischer Methoden*. Dabei wird jede Integralgleichung als *Operatorgleichung* in einem geeigneten Funktionenraum aufgefasst. Insbesondere lassen sich durch die Verwendung des modernen Lebesgueintegrals (vgl. 10.5) auch große Klassen unstetiger Kerne $K(x, y)$ erfassen. Das wird in 11.1.1 (Grundideen) und 11.3 (Existenzsätze) dargestellt. Nichtlineare Integralgleichungen werden mit den Methoden der nichtlinearen Funktionalanalysis untersucht (z. B. mit Hilfe der *Fixpunkttheorie* für Operatorgleichungen). Das findet man in 12.1.

10.3.2 Einfache Integralgleichungen, die durch Differentiation auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden können

1. Johann Bernoulli (1667-1748) behandelt in seiner „Ersten Integralrechnung“ (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 194, S. 35) folgende Aufgabe:

Es ist die Natur (d. h. die Gleichung $y = \varphi(x)$) der Kurve OB (vgl. Abb. 10.11) zu bestimmen, die so beschaffen ist, dass die Fläche OAB stets ein Drittel des umschriebenen Rechtecks $OABC$ ist.

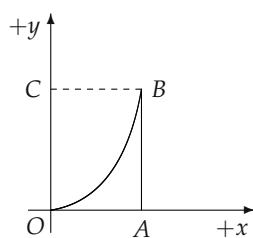


Abb. 10.11

Lösung: Wir erhalten

$$\int_0^x \varphi(x) \, dx = \frac{1}{3}x\varphi(x).$$

Diese Volterratische Integralgleichung, deren Kern $K(x, y) \equiv 1$ ist, wird durch Differentiation gelöst:

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}[x\varphi'(x) + \varphi(x)] \quad \text{oder} \quad \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = 2\frac{dx}{x}.$$

Als Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung (vgl. 1.12.4.4., Trennung der Variablen) ergibt sich die Schar von Parabeln $\varphi(x) = Cx^2$ (für $0 \leq x \leq +\infty$).

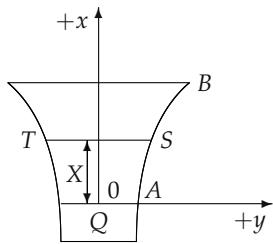


Abb. 10.12

2. Der schematisch gezeichnete Rotationskörper (Abb. 10.12) sei oben eingespannt und habe die Dichte ϱ . Er wird durch die Last Q und durch sein Eigengewicht so auf Zug beansprucht, dass die Zugspannung in allen zur Grundfläche parallelen Querschnitten die konstante Größe σ hat. Gesucht ist die Gestalt des Körpers, ausgedrückt durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ der Kurve AB . *Lösung:* Auf den Querschnitt ST wirkt die Gesamtkraft

$$Q + \varrho\pi \int_0^x [\varphi(x)]^2 dx.$$

Die Querschnittsfläche ist $\pi[\varphi(x)]^2$. Also muss gelten

$$Q + \varrho\pi \int_0^x [\varphi(x)]^2 dx = \sigma\pi[\varphi(x)]^2.$$

Diese Volterratische Integralgleichung wird durch Differentiation gelöst:

$$\varrho\pi[\varphi(x)]^2 = 2\sigma\pi \cdot \varphi(x) \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\varphi(x) = Ce^{\varrho x/2\sigma}.$$

Durch Substitution in die vorgelegte Integralgleichung finden wir

$$Q + \varrho\pi \int_0^x C^2 e^{\varrho x/\sigma} dx = \sigma\pi C^2 e^{\varrho x/\sigma},$$

d.h.

$$Q + \sigma\pi C^2 (e^{\varrho x/\sigma} - 1) = \sigma\pi C^2 e^{\varrho x/\sigma}.$$

Hieraus ergibt sich

$$C = \sqrt{\frac{Q}{\sigma\pi}}.$$

Die gesuchte Gleichung lautet somit

$$y = \varphi(x) = \sqrt{\frac{Q}{\sigma\pi}} \cdot e^{\varrho x/2\sigma}.$$

10.3.3 Integralgleichungen, die durch Differentiation gelöst werden können

Hierunter fallen in erster Linie die Volterraschen Integralgleichungen erster Art. Die Differentiation des Integrals $\int_a^x K(x,y)\varphi(y) dy$ nach x ist als Differentiation nach einem Parameter durchzuführen. Wir erhalten (die partielle Ableitung nach x der Kernfunktion $K(x,y)$ soll existieren und stetig sein)

$$\frac{d}{dx} \int_a^x K(x,y)\varphi(y) dy = \int_a^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x} \varphi(y) dy + K(x,x)\varphi(x).$$

► BEISPIEL 1:

$$\int_0^x e^{-y}\varphi(y) dy = e^{-x} + x - 1.$$

Differentiation nach x ergibt

$$-\int_0^x e^{-y}\varphi(y) dy + e^{-x}\varphi(x) = -e^{-x} + 1$$

oder (mit Hilfe der Ausgangsgleichung)

$$-e^{-x} - x + 1 + e^{-x}\varphi(x) = -e^{-x} + 1.$$

Hieraus folgt

$$\varphi(x) = xe^x.$$

Die Methode der Differentiation kann stets angewandt werden, wenn der Kern einer Volterraschen Integralgleichung erster Art ein Polynom ist.

► BEISPIEL 2:

$$\int_0^x [(x-y)^2 - 2]\varphi(y) dy = -4x. \quad (10.102)$$

Dreimalige Differentiation ergibt

$$2 \int_0^x (x-y)\varphi(y) dy - 2\varphi(x) = -4, \quad (10.103)$$

$$2 \int_0^x \varphi(y) dy - 2\varphi'(x) = 0, \quad (10.104)$$

$$\varphi(x) - \varphi''(x) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\varphi(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Zur Bestimmung von A und B setzen wir in (10.103) und (10.104) für x den Wert 0 ein:

$$\varphi(0) = 2, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Es ergibt sich $A = B = 1$, und die gesuchte Lösung von (10.102) lautet

$$\varphi(x) = e^x + e^{-x}.$$

10.3.4 Die Abelsche Integralgleichung

Als „Abelsche Integralgleichung“ bezeichnet man die Volterrasche Integralgleichung erster Art

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = f(x),$$

deren Kern $\frac{1}{\sqrt{x-y}}$ für $y = x$ unendlich wird.

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit $\frac{1}{\sqrt{\eta-x}}$ und integrieren von 0 bis η nach x :

$$\int_0^\eta \frac{1}{\sqrt{\eta-x}} \left(\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy \right) dx = \int_0^\eta \frac{f(x)}{\sqrt{\eta-x}} dx.$$

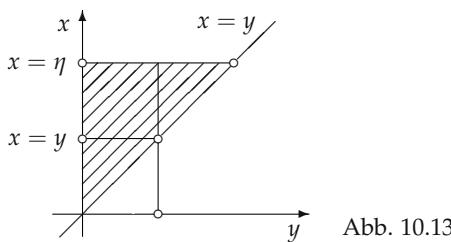


Abb. 10.13

Die auf der linken Seite dieser Formel stehende doppelte Integration ist dabei so auszuführen, dass zunächst in y -Richtung von 0 bis x integriert wird. Das Integrationsgebiet des Doppelintegrals ist demnach (vgl. Abb. 10.13) das oberhalb der Diagonale $x = y$ gelegene Dreieck in der y , x -Ebene. Vertauscht man also die Integrationsreihenfolge, so hat man zunächst in x -Richtung von $x = y$ bis $x = \eta$ zu integrieren und danach in y -Richtung von $y = 0$ bis $y = \eta$. Man erhält also

$$\int_0^\eta \varphi(y) \left(\int_y^\eta \frac{1}{\sqrt{\eta-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx \right) dy = \int_0^\eta \frac{f(x)}{\sqrt{\eta-x}} dx.$$

Mit Rücksicht auf

$$\int_y^\eta \frac{dx}{\sqrt{\eta-x} \sqrt{x-y}} = \pi$$

ergibt sich,³¹ wenn wir η durch y ersetzen:

$$\int_0^y \varphi(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}} dx.$$

Die gesuchte Funktion φ erhalten wir dann durch Differentiation:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \left[\int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}} dx \right].$$

Trotz der Singularität des Integranden konvergiert dieses Integral, weil f als stetig vorausgesetzt wird.

► BEISPIEL 1:

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = x.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \left[\int_0^y \frac{x}{\sqrt{y-x}} dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \left[-\frac{2}{3}(x+2y)\sqrt{y-x} \right]_0^y = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \left[\frac{4}{3}y^{3/2} \right] = \frac{2}{\pi} \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Auch Volterrascche Integralgleichungen zweiter Art können bisweilen durch Differentiationen gelöst werden.

► BEISPIEL 2:

$$\int_0^x (x-y)\varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x). \quad (10.105)$$

Zweimalige Differentiation nach x ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi(y) dy + f'(x) &= \varphi'(x), \\ \varphi(x) + f''(x) &= \varphi''(x). \end{aligned} \quad (10.106)$$

Die Funktion f wird als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und der Störungsfunktion f'' lautet

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{2} \left[C_1 + \int_0^x f''(t)e^{-t} dt \right] - \frac{e^{-x}}{2} \left[C_2 + \int_0^x f''(t)e^t dt \right] \quad (10.107)$$

³¹Dieses Integral kann durch die Substitution $x = y + (\eta - y)u$ ausgewertet werden. Es ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u-u^2}} = \arcsin(2u-1)]_0^1 = \pi.$$

oder nach partieller Integration

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \frac{e^x}{2} \left[C_1 - f'(0) - f(0) + \int_0^x f(t)e^{-t} dt \right] \\ &\quad - \frac{e^{-x}}{2} \left[C_2 - f'(0) + f(0) + \int_0^x f(t)e^t dt \right].\end{aligned}\tag{10.108}$$

Zur Bestimmung von C_1 und C_2 differenzieren wir die Gleichung (10.107) nach x

$$\varphi'(x) = \frac{e^x}{2} \left[C_1 + \int_0^x f''(t)e^{-t} dt \right] + \frac{e^{-x}}{2} \left[C_2 + \int_0^x f''(t)e^t dt \right]\tag{10.109}$$

und setzen in (10.105) bis (10.109) für x den Wert 0 ein. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= f(0), & \varphi'(0) &= f'(0), \\ \varphi(0) &= \frac{1}{2}(C_1 - C_2), & \varphi'(0) &= \frac{1}{2}(C_1 + C_2),\end{aligned}$$

also $C_1 = f'(0) + f(0)$, $C_2 = f'(0) - f(0)$. Setzen wir diese Werte in (10.108) ein, dann erhalten wir die folgende Lösung der Ausgangsgleichung (10.105):

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{e^x}{2} \int_0^x f(t)e^{-t} dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x f(t)e^t dt.$$

10.3.5 Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art

Wir wollen die Volterrascche Integralgleichung zweiter Art

$$\lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b,\tag{10.110}$$

auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ lösen. Der Kern $K = K(x,y)$ sei stetig auf dem Dreieck $D := \{(x,y) : a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$ (Abb. 10.14). Gegeben sind die stetige Funktion $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ und die reelle Zahl λ . Unter einer Lösung verstehen wir eine stetige Funktion $\varphi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, die (10.110) erfüllt.

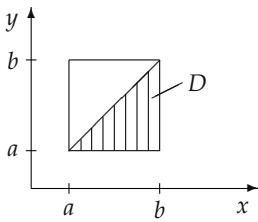


Abb. 10.14

Existenz- und Eindeutigkeitssatz: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt (10.110) genau eine Lösung φ .

Lösender Kern: Die Lösung φ von (10.110) lässt sich durch die Formel

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x R(x,y,\lambda)f(y) dy + f(x)\tag{10.111}$$

darstellen mit dem sogenannten *lösenden Kern* (Resolvente)

$$R(x, y, \lambda) := \sum_{m=1}^{\infty} K^{(m)}(x, y) \lambda^{m-1} \quad (10.112)$$

und den sogenannten *iterierten Kernen*

$$\begin{aligned} K^{(1)}(x, y) &:= K(x, y), \\ K^{(2)}(x, y) &:= \int_y^x K(x, t) K(t, y) dt, \\ K^{(m+1)}(x, y) &:= \int_y^x K(x, t) K^{(m)}(t, y) dt. \end{aligned}$$

Die sogenannte *Neumannsche Reihe* (10.112) konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[a, b]$.

Sukzessive Approximation: Lösen wir die Gleichung (10.110) durch das Iterationsverfahren

$$\lambda \int_a^x K(x, y) \varphi_n(y) dy + f(x) = \varphi_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

mit $\varphi_0(x) \equiv 0$, dann konvergiert die Folge (φ_n) gleichmäßig auf dem Intervall $[a, b]$ gegen die Lösung φ von (10.110).

► BEISPIELE:

1. Für die Gleichung

$$\int_0^x xy \cdot \varphi(y) dy + 1 = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq b < \infty,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} K^{(1)}(x, y) &= xy, \\ K^{(2)}(x, y) &= \frac{x^4 y - x y^4}{3}, \\ K^{(3)}(x, y) &= \frac{x^7 y - 2x^4 y^4 + x y^7}{18}, \\ K^{(4)}(x, y) &= \frac{x^{10} y - 3x^7 y^4 + 3x^4 y^7 - x y^{10}}{162}, \quad \dots \end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 5} + \frac{x^9}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{x^{12}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11} + \dots + 1.$$

2. Im Fall der Gleichung

$$\lambda \int_0^x (x - y) \varphi(y) dy + x + 1 = \varphi(x)$$

ergibt sich

$$K^{(1)} = x - y, \quad K^{(2)} = \frac{(x - y)^3}{3!}, \quad K^{(3)} = \frac{(x - y)^5}{5!}, \quad \dots$$

Die Lösung lautet

$$\varphi(x) = \lambda \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) + \lambda^2 \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) + \dots + x + 1.$$

Speziell für $\lambda = 1$ ist $\varphi(x) = e^x$.

10.3.6 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art und die Fredholmsche Alternative

Wir studieren die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art

$$\lambda \int_a^b K(x,y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (10.113)$$

zusammen mit der Eigenwertgleichung

$$\lambda \int_a^b K(x,y) \varphi(y) dy = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (10.114)$$

und der transponierten Eigenwertgleichung

$$\lambda \int_a^b K(y,x) \psi(y) dy = \psi(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (10.115)$$

Wir setzen voraus, dass der Kern $K = K(x,y)$ stetig ist auf dem Quadrat $Q := \{(a,b) : a \leq x, y \leq b\}$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Gegeben sind die reelle Zahl λ und die stetige Funktion $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Unter einer Lösung von (10.113) bzw. (10.115) verstehen wir eine stetige Funktion $\varphi, \psi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, die (10.113) bzw. (10.115) erfüllt.

Wir führen ferner das Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

ein und sagen, dass f genau dann orthogonal zu g ist, wenn $(f,g) = 0$ gilt. Schließlich setzen wir noch

$$K := \left(\int_a^b \int_a^b K(x,y)^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definition: Die reelle Zahl λ heißt ein Eigenwert von (10.113) genau dann, wenn (10.114) eine nichttriviale Lösung $\varphi \neq 0$ besitzt. Alle zugehörigen nichttrivialen Lösungen φ heißen Eigenfunktionen zu λ . Unter der Vielfachheit von λ verstehen wir die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenlösungen.³²

³²Die stetigen Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ heißen genau dann linear unabhängig (auf $[a,b]$), wenn aus

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_r \varphi_r(x) \equiv 0 \quad \text{auf } [a,b]$$

und $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ stets $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ folgt.

Schreibt man die Integralgleichung (10.113) mit $f \equiv 0$ als Operatorgleichung $\lambda A \varphi = \varphi$, dann entspricht in der Funktionalanalysis der Eigenwert $\lambda \neq 0$ von (10.113) dem Eigenwert λ^{-1} von A . Diese Inkonsistenz in der Bezeichnung hat historische Gründe. Will man diese Inkonsistenz vermeiden, dann muss man im vorliegenden Abschnitt 10.3 die „Eigenwerte“ λ als „charakteristische Zahlen“ bezeichnen. Mit Rücksicht auf den weit verbreiteten Gebrauch in der Literatur nehmen wir jedoch diese Inkonsistenz in Kauf.

Fredholmsche Alternative: Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben.

Fall 1: λ ist kein Eigenwert von (10.113). Dann besitzt (10.113) für jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genau eine Lösung φ . Außerdem ist λ auch kein Eigenwert von (10.115).

Fall 2: λ ist ein Eigenwert von (10.113). Dann ist λ auch ein Eigenwert von (10.115) mit der gleichen endlichen Vielfachheit wie für (10.113). Bezeichnet ψ_1, \dots, ψ_r eine Basis von Eigenfunktionen zu (10.115), dann hat die Ausgangsgleichung (10.113) für eine gegebene stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung φ , wenn die Lösbarkeitsbedingungen

$$(f, \psi_j) := \int_a^b f(x) \psi_j(x) \, dx = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (10.116)$$

erfüllt sind. Hierbei ist besonders bemerkenswert, dass die Anzahl der Lösbarkeitsbedingungen endlich ist.

Bezeichnet $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ eine Basis von Eigenfunktionen zu (10.114), dann erhält man die allgemeine Lösung von (10.113) durch

$$\varphi = \varphi_{\text{spez}} + \sum_{j=1}^r c_j \varphi_j, \quad (10.117)$$

wobei φ_{spez} eine spezielle Lösung von (10.113) ist und c_1, \dots, c_r beliebige reelle Zahlen sind.³³

Im Unterschied zu Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art sind Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art wegen des möglichen Auftretens von Eigenwerten nicht immer eindeutig lösbar.

Physikalische Interpretation der Fredholmschen Alternative: Bei Anwendungen in der Physik entspricht die Lösung φ häufig einer Schwingung unter dem Einfluss der äußeren Kraft f . Eigenfunktionen gehören zu Eigenschwingungen, während die zugehörigen Eigenwerte λ den Eigenfrequenzen entsprechen. Die Lösbarkeitsbedingung besagt anschaulich, dass keine Resonanz zwischen den Eigenschwingungen und den äußeren Kräften besteht.³⁴

Spektrum (Struktur der Eigenwerte): (i) Ist λ hinreichend klein, d. h., gilt

$$|\lambda|K < 1,$$

dann ist λ kein Eigenwert von (10.113). Die Ausgangsgleichung (10.113) besitzt für jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genau eine Lösung φ . Dabei gilt

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b R(x, y, \lambda) \varphi(y) \, dy + f(x) \quad (10.118)$$

mit dem *lösenden Kern* (Resolvente)

$$R(x, y, \lambda) := \sum_{m=1}^{\infty} K^{(m)}(x, y) \lambda^{m-1}$$

³³Das entspricht dem allgemeinen Prinzip für lineare Gleichungen: allgemeine Lösung des inhomogenen Problems = spezielle Lösung des inhomogenen Problems + allgemeine Lösung des homogenen Problems.

³⁴Bei derartigen Schwingungsproblemen ist der Kern K symmetrisch, d. h., es ist $K(x, y) = K(y, x)$ für alle $x, y \in [a, b]$. Dann ist die transponierte Gleichung (10.115) identisch mit der Eigenwertgleichung (10.114). Folglich beziehen sich hier die Lösbarkeitsbedingungen (10.116) auf die „Eigenschwingungen“ ψ_1, \dots, ψ_r des Ausgangsproblems (vgl. 10.3.8).

und den *iterierten Kernen*

$$\begin{aligned} K^{(1)}(x, y) &:= K(x, y), \\ K^{(2)}(x, y) &:= \int_a^b K(x, t)K(t, y) dt, \\ K^{(m+1)}(x, y) &:= \int_a^b K(x, t)K^{(m)}(t, y) dt. \end{aligned}$$

Die sogenannte Neumannsche Reihe (10.118) konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[a, b]$.

Benutzen wir die Methode der *sukzessiven Approximation*

$$\lambda \int_a^b K(x, y)\varphi_n(y) dy + f(x) = \varphi_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

mit $\varphi_0(x) \equiv 0$, dann konvergiert die Folge (φ_n) gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen die Lösung φ der Ausgangsgleichung (10.113).

(ii) *Analytische Fortsetzung und Eigenwerte.* Für jeden fest gewählten Punkt $(x, y) \in Q$ lässt sich $R(x, y, \lambda)$ zu einer meromorphen Funktion auf die komplexe λ -Ebene fortsetzen, d.h., $\lambda \mapsto R(x, y, \lambda)$ ist holomorph bis auf isolierte Pole. Genauer erhalten wir

$$R(x, y, \lambda) = \frac{A(x, y, \lambda)}{D(\lambda)}, \quad (10.119)$$

wobei die Funktionen $\lambda \mapsto A(x, y, \lambda)$ und $\lambda \mapsto D(\lambda)$ holomorph in der gesamten λ -Ebene sind. Exakt die Nullstellen von D sind die Pole von $\lambda \mapsto R(x, y, \lambda)$, und diese entsprechen den Eigenwerten der Ausgangsgleichung (10.113).

Somit besitzt (10.113) eine höchstens abzählbare Menge von Eigenwerten, die sich lediglich im Unendlichen häufen können. Explizit erhält man

$$A(x, y, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_n(x, y) \lambda^n, \quad D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta_n \lambda^n \quad (10.120)$$

mit $\delta_0 = 1$, $K_0(x, y) = K(x, y)$. Die weiteren Glieder ergeben sich aus den Rekursionsformeln

$$\delta_n = \frac{1}{n} \int_a^b K_{n-1}(x, x) dx$$

und

$$K_n(x, y) = K(x, y)\delta_n - \int_a^b K(x, t)K_{n-1}(t, y) dt.$$

Die Ausdrücke für A und D erhielt Fredholm in seiner klassischen Arbeit aus dem Jahre 1900, indem er in der Integralgleichung (10.113) das Integral durch eine Zwischensumme ersetzte, das zugehörige lineare Gleichungssystem löste und dann zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ überging.

Komplexes Problem: Alle obigen Aussagen bleiben gültig für das komplexe Problem (10.113), d.h., λ ist eine komplexe Zahl, und alle Funktionen K, φ, f sind komplexwertig. In (10.117) müssen dann c_1, \dots, c_r komplexe Zahlen sein.

Anwendungen

► BEISPIEL 1: Die Integralgleichung

$$\lambda \int_0^1 (xy + \sqrt{xy}) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x) \quad (10.121)$$

lässt sich nach der Fredholmschen Methode (10.119) explizit lösen. Wir erhalten

$$\delta_0 = 1, \quad K_0(x, y) = xy + \sqrt{xy},$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^1 (x^2 + x) dx = \frac{5}{6}, \quad K_1(x, y) = \frac{5}{6}(xy + \sqrt{xy}) - \int_0^1 (xt + \sqrt{xt})(ty + \sqrt{ty}) dt \\ &= \frac{1}{2}xy + \frac{1}{3}\sqrt{xy} - \frac{2}{5}(x\sqrt{y} + y\sqrt{x}), \end{aligned}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{5}x^{3/2} \right) dx = \frac{1}{150}, \quad K_2(x, y) = 0.$$

Aus dem identischen Verschwinden von $K_2(x, y)$ folgt zunächst das Verschwinden von δ_3 . Damit verschwinden auch $K_3(x, y)$ und alle weiteren δ_i sowie auch alle folgenden $K_i(x, y)$ identisch. Der Ausdruck für den lösenden Kern wird demzufolge ein Quotient zweier abbrechender Potenzreihen in λ :

$$R(x, y, \lambda) = \frac{xy + \sqrt{xy} - [\frac{1}{2}xy + \frac{1}{3}\sqrt{xy} - \frac{2}{5}(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})]\lambda}{1 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{150}\lambda^2}. \quad (10.122)$$

Die Lösung von (10.121) lautet dann

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 R(x, y, \lambda) f(y) dy + f(x). \quad (10.123)$$

Für $f(x) := x$ erhalten wir zum Beispiel

$$\varphi(x) = \frac{150x + \lambda(60\sqrt{x} - 75x)}{\lambda^2 - 125\lambda + 150}.$$

Die Eigenwerte von (10.121) sind die λ -Pole von R . Setzen wir somit den Nenner in (10.122) gleich null, dann erhalten wir aus

$$\lambda^2 - 125\lambda + 150 = 0$$

die Eigenwerte $\lambda_{\pm} = \frac{5}{2}(25 \pm \sqrt{601})$.

Nach der in 10.3.7 beschriebenen Methode ergeben sich für $\lambda = \lambda_+$ die beiden folgenden linear unabhängigen Eigenfunktionen

$$\varphi_{\pm} = 6x - 119\sqrt{x} \pm 5\sqrt{601}x.$$

Die gleichen Eigenfunktionen erhält man für $\lambda = \lambda_-$.

Zusammenfassend ergibt sich somit das folgende Resultat für beliebige reelle³⁵ Zahlen λ und reelle, stetige Funktionen f auf $[a, b]$.

³⁵Eine analoge Aussage gilt für komplexe Zahlen λ und komplexe Funktionen. In (10.124) müssen dann c_{\pm} komplexe Zahlen sein.

(a) Ist $\lambda \neq \lambda_{\pm}$, dann besitzt die Ausgangsgleichung (10.121) für jedes f eine eindeutige Lösung, die durch (10.123) gegeben ist.

(b) Ist $\lambda = \lambda_+$ oder $\lambda = \lambda_-$, dann besitzt (10.121) für gegebenes f genau dann eine Lösung φ , wenn die Lösbarkeitsbedingung

$$(f, \varphi_{\pm}) := \int_0^1 f(x) \varphi_{\pm}(x) dx = 0$$

erfüllt ist.³⁶ Die allgemeine Lösung von (10.121) lautet dann

$$\varphi = \varphi_{\text{spez}} + c_+ \varphi_+ + c_- \varphi_- \quad (10.124)$$

mit den beliebigen reellen Zahlen c_{\pm} . Ferner ist φ_{spez} eine spezielle Lösung von (10.121), die sich nach der Methode aus 10.3.7 durch Lösung eines linearen Gleichungssystems ergibt (zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten).

► BEISPIEL 2: Wir wollen die Integralgleichung

$$\lambda \int_0^{\pi} \sin(x+y) \cdot \varphi(y) dy + 1 = \varphi(x) \quad (10.125)$$

mit Hilfe der Methode der iterierten Kerne lösen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} K^{(1)}(x, y) &= \sin(x+y), \quad f(x) = 1, \\ K^{(2)}(x, y) &= \int_0^{\pi} \sin(x+\eta) \sin(\eta+y) d\eta = \frac{\pi}{2} (\sin x \sin y + \cos x \cos y), \\ K^{(3)}(x, y) &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sin x \sin \eta + \cos x \cos \eta)(\sin y \cos \eta + \cos y \sin \eta) d\eta \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (\sin x \cos y + \cos x \sin y), \\ K^{(4)}(x, y) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 (\sin x \sin y + \cos x \cos y), \\ K^{(5)}(x, y) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 (\sin x \cos y + \cos x \sin y), \\ K^{(6)}(x, y) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^6 (\sin x \sin y + \cos x \cos y), \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_0^{\pi} (\sin x \cos y + \cos x \sin y) dy = 2 \cos x$$

und

$$\int_0^{\pi} (\sin x \sin y + \cos x \cos y) dy = 2 \sin x$$

³⁶Diese Bedingung ist z. B. für $f(x) = x$ nicht erfüllt. Folglich hat (10.121) mit $f(x) = x$ für $\lambda = \lambda_{\pm}$ keine Lösung.

ergibt sich als Lösung der vorgelegten Integralgleichung

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & 2\lambda \cos x \left(1 + \lambda^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \lambda^4 \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 + \dots \right) \\ & + \lambda^2 \pi \sin x \left(1 + \lambda^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \lambda^4 \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 + \dots \right) + 1\end{aligned}$$

oder

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda \cos x + \lambda^2 \pi \sin x}{1 - \lambda^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2} + 1. \quad (10.126)$$

Auf Grund von

$$K := \left(\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x+y) dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

besitzt (10.125) für alle λ mit $|\lambda|K < 1$, also $|\lambda| < \sqrt{2}/\pi$ die eindeutige Lösung (10.126).

Die Eigenwerte von (10.125) entsprechen den λ -Polen von φ in (10.126). Setzen wir somit den Nenner in (10.126) gleich null, dann ergeben sich die Eigenwerte von (10.125) als Nullstellen der Gleichung

$$1 - \lambda^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = 0,$$

d. h. $\lambda_{\pm} = \pm 2/\pi$. Die Ausgangsgleichung (10.125) besitzt für alle komplexen Zahlen λ mit $\lambda \neq \lambda_{\pm}$ eine eindeutige Lösung φ , die durch (10.126) gegeben ist.

10.3.7 Integralgleichungen zweiter Art mit Produktkernen und ihre Zurückführung auf lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art

$$\lambda \int_a^b K(x,y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (10.127)$$

wobei der Kern eine Produktstruktur besitzt, d. h., es gilt

$$K(x,y) = \alpha_1(x)\beta_1(y) + \dots + \alpha_n(x)\beta_n(y).$$

Die Funktionen α_j und β_j seien auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ stetig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass sowohl $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ als auch β_1, \dots, β_n auf $[a,b]$ linear unabhängig sind.³⁷

Reduktionssatz: Das Problem (10.127) ist äquivalent zur Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Explizit lautet dieses System folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccccccccc} B_1(1 - \lambda a_{11}) & - B_2 \lambda a_{12} & - & \dots & - B_n \lambda a_{1n} & = b_1, \\ - B_1 \lambda a_{21} & + B_2(1 - \lambda a_{22}) & - & \dots & - B_n \lambda a_{2n} & = b_2, \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ - B_1 \lambda a_{n1} & - B_2 \lambda a_{n2} & - & \dots & + B_n(1 - \lambda a_{nn}) & = b_n. \end{array} \quad (10.128)$$

³⁷Gilt das nicht, dann lassen sich gewisse α_j (bzw. β_j) durch die restlichen α_k (bzw. β_k) ausdrücken. In diesem Fall kann der Kern durch eine kleinere Linearkombination linear unabhängiger Faktoren erhalten werden.

Dabei setzen wir

$$\int_a^b \beta_i(y) \alpha_j(y) \, dy = a_{ij} \quad \text{und} \quad \int_a^b \beta_j(y) f(y) \, dy = b_j.$$

Ist B_1, \dots, B_n eine Lösung von (10.128), dann erhält man die Lösung der Integralgleichung (10.127) durch

$$\varphi(x) = \lambda B_1 \alpha_1(x) + \dots + \lambda B_n \alpha_n(x) + f(x). \quad (10.129)$$

Der Lösungsansatz (10.129) folgt aus (10.127). Setzt man den Ausdruck (10.129) in (10.127) ein, dann ergibt sich sofort (10.128).

Diskussion: (i) Eigenwertproblem. Wir setzen

$$D(\lambda) := \begin{vmatrix} (1 - \lambda a_{11}) & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & (1 - \lambda a_{22}) & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & (1 - \lambda a_{nn}) \end{vmatrix}.$$

Die Eigenwertgleichung (10.127) mit $f(x) \equiv 0$ entspricht dem Eigenwertproblem (10.128) mit $b_j = 0$ für alle j . Die Eigenwerte λ von (10.127) ergeben sich deshalb als Nullstellen von D , d.h., wir haben die Gleichung

$$D(\lambda) = 0$$

zu lösen.

(ii) Inhomogene Gleichung. Ist λ kein Eigenwert, dann hat (10.128) eine eindeutige Lösung (B_1, \dots, B_n) .

Ist λ ein Eigenwert, dann besitzt (10.128) genau dann eine Lösung, wenn

$$\sum_{j=1}^n b_j B_j = 0$$

für alle Lösungen (B_1, \dots, B_n) der transponierten Eigenwertgleichung gilt. Diese ergibt sich aus (10.128), indem man dort a_{ij} durch a_{ji} ersetzt sowie $b_j = 0$ für alle j setzt.

Die Aussagen (i), (ii) stellen die *Fredholmsche Alternative* für (10.127) dar (vgl. 10.3.6). Im vorliegenden Fall ergibt sich die Fredholmsche Alternative direkt aus den Lösungseigenschaften linearer Gleichungssysteme.

Anwendungen

► BEISPIEL 1: Für die Integralgleichung

$$\int_0^1 (xy + \sqrt{xy}) \varphi(y) \, dy + x = \varphi(x)$$

gilt

$$\alpha_1(x) = x, \quad \beta_1(y) = y, \quad \alpha_2(x) = \sqrt{x}, \quad \beta_2(y) = \sqrt{y}, \quad f(x) = x,$$

$$a_{11} = \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{3}, \quad a_{12} = \int_0^1 y^{3/2} \, dy = \frac{2}{5},$$

$$a_{21} = \int_0^1 y^{3/2} \, dy = \frac{2}{5}, \quad a_{22} = \int_0^1 y \, dy = \frac{1}{2},$$

$$b_1 = \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{3}, \quad b_2 = \int_0^1 y^{3/2} \, dy = \frac{2}{5}.$$

Aus

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) B_1 - \frac{2}{5} B_2 = \frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{5} B_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) B_2 = \frac{2}{5}$$

finden wir $B_1 = \frac{49}{26}$ und $B_2 = \frac{30}{13}$. Die eindeutige Lösung der vorgelegten Integralgleichungen lautet somit

$$\varphi(x) = \frac{75}{26}x + \frac{30}{13}\sqrt{x}.$$

► BEISPIEL 2: Für

$$\lambda \int_1^2 \left(xy + \frac{1}{xy} \right) \varphi(y) \, dy = \varphi(x)$$

gilt

$$\alpha_1(x) = x, \quad \beta_1(y) = y, \quad \alpha_2(x) = \frac{1}{x}, \quad \beta_2(y) = \frac{1}{y},$$

$$a_{11} = \int_1^2 y^2 \, dy = \frac{7}{3}, \quad a_{12} = \int_1^2 \frac{1}{y^2} \, dy = 1 = a_{21}, \quad a_{22} = \int_1^2 \frac{1}{y} \, dy = \frac{1}{2}.$$

Wir erhalten das homogene lineare Gleichungssystem

$$\left(1 - \frac{7}{3}\lambda\right) B_1 - \lambda B_2 = 0, \quad -\lambda B_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) B_2 = 0.$$

Dieses System ist genau dann nichttrivial lösbar, wenn die Determinante

$$D(\lambda) := \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{7}{3}\lambda\right) & -\lambda \\ -\lambda & \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Aus $1 - \frac{17}{6}\lambda + \frac{1}{6}\lambda^2 = 0$ erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = \frac{17 + \sqrt{265}}{2} = 16,6394, \quad \lambda_2 = \frac{17 - \sqrt{265}}{2} = 0,3606.$$

Für λ_1 wird $B_2 = -2,2732B_1$, und für λ_2 ergibt sich $B_2 = +0,4399B_1$. Die Eigenfunktionen für λ_1 bzw. λ_2 sind deshalb

$$\varphi_1(x) = x - 2,2732 \frac{1}{x} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2(x) = x + 0,4399 \frac{1}{x}.$$

► BEISPIEL 3: Für

$$\lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2y^2) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x) \quad (10.130)$$

gilt

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= x, & \beta_1(y) &= y, & \alpha_2(x) &= x^2, & \beta_2(y) &= y^2, \\ a_{11} &= \frac{2}{3}, & a_{12} = a_{21} &= 0, & a_{22} &= \frac{2}{5}, & b_1 &= \int_{-1}^1 yf(y) dy, & b_2 &= \int_{-1}^1 y^2f(y) dy. \end{aligned}$$

Aus dem Gleichungssystem

$$B_1 \left(1 - \frac{2}{3}\lambda \right) = \int_{-1}^1 yf(y) dy, \quad B_2 \left(1 - \frac{2}{5}\lambda \right) = \int_{-1}^1 y^2f(y) dy$$

ergibt sich als Lösung von (10.130) die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{x\lambda \int_{-1}^1 yf(y) dy}{1 - \frac{2}{3}\lambda} + \frac{x^2\lambda \int_{-1}^1 y^2f(y) dy}{1 - \frac{2}{5}\lambda} + f(x).$$

Die homogene Integralgleichung

$$\lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2y^2) \varphi(y) dy = \varphi(x) \quad (10.131)$$

ist genau für die aus

$$\begin{vmatrix} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

sich ergebenden Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ lösbar. Die zugehörigen Eigenfunktionen für λ_1 bzw. λ_2 sind

$$\varphi_1(x) = x \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2(x) = x^2.$$

Aus $(\varphi_1, \varphi_2) := \int_{-1}^1 \varphi_1(x)\varphi_2(x) dx = 0$ geht hervor, dass die beiden Eigenfunktionen zueinander orthogonal sind.

Gleichung (10.130) ist für die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ nur lösbar, wenn $f(x)$ zu den Eigenfunktionen $\varphi_1(x) = x$ bzw. $\varphi_2(x) = x^2$ orthogonal ist. Diese Bedingung erfüllen z. B.

$$\text{für } \lambda_1 = \frac{3}{2} \quad \text{Funktionen der Form } f(x) = k_0 + k_2x^2 + k_4x^4 + \dots$$

und

$$\text{für } \lambda_2 = \frac{5}{2} \quad \text{Funktionen der Form } f(x) = k_1x + k_3x^3 + k_5x^5 + \dots .$$

10.3.8 Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischen Kernen (Hilbert–Schmidt-Theorie)

Bei Schwingungsproblemen in der Physik wird man häufig auf eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art

$$\lambda \int_a^b K(x,y) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (10.132)$$

mit dem reellen symmetrischen Kern K geführt, d. h., K ist auf dem Quadrat Q mit $Q := \{(x,y) : a \leq x, y \leq b\}$ stetig, und es gilt $K(x,y) = K(y,x)$ für alle $x,y \in [a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ (vgl. 10.3.9). Ferner sei $K(x,y) \not\equiv 0$.

Für symmetrische Kerne besitzt (10.132) ein sehr übersichtliches Lösungsverhalten. Dabei spielt das Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

eine besondere Rolle. Das ist der Ansatzpunkt für die funktionalanalytische Verallgemeinerung der klassischen Integralgleichungstheorie im Rahmen der Hilbertraummethoden (vgl. 11.3.3). Außerdem führen wir die sogenannte Norm

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ein.

- Spektralsatz:**
- (i) Die Gleichung (10.132) hat mindestens einen Eigenwert λ .
 - (ii) Alle Eigenwerte λ von (10.132) sind reell.
 - (iii) Es existiert eine höchstens abzählbare Menge von Eigenwerten, die sich nicht im Endlichen häufen können.
 - (iv) Zwei Eigenfunktionen φ und ψ zu verschiedenen Eigenwerten von (10.132) sind orthogonal zueinander, d. h., es gilt

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx = 0.$$

- (v) Jeder Eigenwert hat endliche Vielfachheit.

Entwicklung nach Eigenfunktionen (das Superpositionsprinzip und verallgemeinerte Fourierreihen): Eine wichtige physikalische Frage lautet:

Kann man durch Superposition der Eigenschwingungen jeden Zustand erhalten? Wir wollen zeigen, dass man darauf eine positive Antwort geben kann. Vom mathematischen Standpunkt aus hat man die Reihenentwicklung

$$g(x) = \sum_j c_j \varphi_j(x) \quad (10.133)$$

zu rechtfertigen, wobei $\{\varphi_j\}$ das System der Eigenfunktionen von (10.132) mit $f \equiv 0$ darstellt. Genauer wählen wir $\{\varphi_j\}$ so, dass

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk} \quad (10.134)$$

für alle diejenigen Eigenfunktionen gilt, die zu einem festen Eigenwert gehören. Da Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten automatisch orthogonal sind, gilt dann (10.134) für alle j, k . Multiplizieren wir (10.133) mit $\varphi_k(x)$ und integrieren wir formal über $[a, b]$, dann erhalten wir

$$\int_a^b g(x)\varphi_k(x) \, dx = \sum_j c_j \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x) \, dx = \sum_j c_j \delta_{jk} = c_k.$$

Somit muss notwendigerweise

$$c_k = (g, \varphi_k)$$

gelten. Gleichung (10.133) geht dann über in die sogenannte *verallgemeinerte Fourierreihe*

$$g(x) = \sum_j (g, \varphi_j) \varphi_j(x). \quad (10.135)$$

Definition: Das System $\{\varphi_j\}$ heißt genau dann ein vollständiges Orthonormalsystem, wenn die Orthogonalitätsrelation (10.134) gilt und die Reihe (10.135) für jede Funktion $g \in L_2(a, b)$ im Sinne der Norm $\|\cdot\|$ konvergiert, d. h., es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{j=1}^n (g, \varphi_j) \varphi_j \right\| = 0.$$

Explizit entspricht das der Konvergenz im quadratischen Mittel:³⁸

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(g(x) - \sum_{j=1}^n (g, \varphi_j) \varphi_j(x) \right)^2 \, dx = 0.$$

Entwicklungssatz: (i) Ist die Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ quellenmäßig darstellbar, d. h., gibt es eine stetige Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \int_a^b K(x, y)h(y) \, dy \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

dann konvergiert die verallgemeinerte Fourierreihe (10.135) gleichmäßig auf $[a, b]$.

(ii) Folgt aus $\int_a^b K(x, y)\varphi(y) \, dy = 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $\varphi \in L_2(a, b)$ stets, dass $\varphi(x) = 0$ für fast alle $x \in [a, b]$ gilt (vgl. 10.5), dann besitzt das Ausgangsproblem (10.132) ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}$ von Eigenfunktionen.

Kenntnis aller Eigenfunktionen: In den Anwendungen kann man häufig leicht eine gewisse Anzahl von Eigenlösungen $\{\varphi_j, \lambda_j\}$ bestimmen, wobei λ_j Eigenwert zu φ_j ist und die Orthogonalitätsrelation $(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$ für alle j, k erfüllt ist. Dann interessiert, ob man alle Eigenlösungen erhalten hat. In diesem Zusammenhang gilt das folgende wichtige Resultat.

³⁸Der Raum $L_2(a, b)$ besteht definitionsgemäß aus allen messbaren Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|^2 := \int_a^b f(x)^2 \, dx < \infty.$$

Das Integral ist dabei im Sinne von Lebesgue zu verstehen (vgl. 10.5). Speziell gehört jede Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zu $L_2(a, b)$, die auf $[a, b]$ beschränkt und bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist; $L_2(a, b)$ ist ein Hilbertraum.

Vollständigkeitskriterium: Bildet $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem, dann gibt es außer λ_j keine weiteren Eigenwerte, und jede Eigenlösung von (10.132) ist eine endliche Linearkombination gewisser φ_j .

Dichtheitskriterium: Die $\{\varphi_j\}$ bilden genau dann ein vollständiges Orthonormalsystem, wenn die lineare Hülle der φ_j in $L_2(a, b)$ dicht³⁹ ist.

Die Schmidtsche Reihe zur Lösung der inhomogenen Integralgleichung: Ausgangspunkt ist die sogenannte Schmidtsche Reihe

$$\varphi(x) = \lambda \sum_j \frac{(f, \varphi_j) \varphi_j(x)}{\lambda - \lambda_j} + f(x). \quad (10.136)$$

Gegeben sei die stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Fall 1: Ist λ kein Eigenwert von (10.132), dann besitzt (10.132) für gegebenes f eine eindeutige Lösung φ , die durch die auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergente Reihe (10.136) gegeben wird.

Fall 2: Ist $\lambda = \lambda_k$ ein Eigenwert von (10.132), dann besitzt (10.132) für gegebenes f genau dann eine Lösung, wenn die Lösbarkeitsbedingung

$$(f, \varphi_j) = 0 \quad (10.137)$$

für alle zu λ_k gehörigen Eigenfunktionen φ_j erfüllt ist. Eine spezielle Lösung von (10.132) ist dann durch (10.136) gegeben. Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$.

Entwicklung des Kerns nach den Eigenfunktionen: Wir betrachten die Reihe

$$K(x, y) = \sum_j \frac{\varphi_j(x) \varphi_j(y)}{\lambda_j}, \quad a \leq x, y \leq b. \quad (10.138)$$

Dabei ist λ_j Eigenwert zu φ_j , und es wird über alle Eigenwerte (entsprechend ihren Vielfachheiten) summiert. Außerdem sei die Orthogonalitätsbedingung $(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$ für alle j, k erfüllt.

(i) Gilt $(K\varphi, \varphi) := \int_a^b \int_a^b K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy \geq 0$ für alle⁴⁰ stetigen Funktionen $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dann konvergiert die Reihe (10.138) gleichmäßig (Satz von Mercer).

(ii) Der Kern K ist genau dann ein Produktkern, wenn die Integralgleichung (10.132) nur endlich viele Eigenwerte besitzt. Dann gilt (10.138).

(iii) Hat die Integralgleichung (10.132) unendlich viele Eigenwerte, dann konvergiert (10.138) im quadratischen Mittel, d. h., es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b \left(K(x, y) - \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j(x) \varphi_j(y)}{\lambda_j} \right)^2 dx dy = 0.$$

Ferner gilt (10.138), falls die dort rechts stehende Reihe gleichmäßig konvergiert.

Berechnung der Eigenlösungen durch ein Variationsproblem: Für ein tieferes Verständnis der Struktur von Schwingungsprozessen ist es wichtig, dass man die Eigenwerte (Eigenfrequenzen) und die Eigenfunktionen (Eigenschwingungen) durch Variationsprobleme charakterisieren kann (Variationsproblem von Hilbert und das Courantsche Maximum-Minimum-Prinzip). Das findet man im Rahmen der Funktionalanalysis in 11.3.3.

³⁹Explizit heißt dies, dass es zu jedem $f \in L_2(a, b)$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Linearkombination der Form $\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_k \varphi_k(x)$ gibt mit $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. Damit ist die Frage nach der Vollständigkeit eines Orthonormalsystems auf ein Problem der Approximationstheorie zurückgeführt.

⁴⁰Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass $\lambda_j \geq 0$ für alle Eigenwerte gilt. Das ist z. B. bei Schwingungsprozessen der Fall.

Anwendungen

► BEISPIEL 1: Die Integralgleichung

$$\lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2y^2) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x) \quad (10.139)$$

besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ und die Eigenfunktionen

$$\varphi_1(x) := \sqrt{\lambda_1} x \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2(x) := \sqrt{\lambda_2} x^2.$$

Die Faktoren sind so bestimmt worden, dass $(\varphi_j, \varphi_j) = \int_{-1}^1 \varphi_j(x) \varphi_j(x) dx = 1$ gilt (vgl. (10.130)).

Die zu (10.138) gehörige Darstellung des Kernes lautet hier

$$K(x, y) = xy + x^2y^2 = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2}.$$

► BEISPIEL 2: Wir wollen die Integralgleichung

$$\lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2y^2) \varphi(y) dy + f(x) = \varphi(x) \quad (10.140)$$

mit Hilfe der Schmidtschen Reihe (10.136) lösen. Diese lautet hier

$$\varphi(x) = \frac{\lambda(f, \varphi_1)\varphi_1(x)}{\lambda - \lambda_1} + \frac{\lambda(f, \varphi_2)\varphi_2(x)}{\lambda - \lambda_2} \quad (10.141)$$

mit $(f, \varphi_j) = \int_{-1}^1 f(x) \varphi_j(x) dx$.

Fall 1: Ist $\lambda \neq \lambda_1$ und $\lambda \neq \lambda_2$, dann stellt (10.141) die eindeutige Lösung von (10.140) dar.

Fall 2: Für $\lambda = \lambda_1$ hat (10.140) genau dann eine Lösung, wenn $(f, \varphi_1) = 0$ gilt. Dann erhält man aus (10.141) die spezielle Lösung

$$\varphi_{\text{spez}}(x) = \frac{\lambda_1(f, \varphi_2)\varphi_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Die allgemeine Lösung von (10.140) lautet dann $\varphi(x) = \varphi_{\text{spez}}(x) + c\varphi_1(x)$ mit der beliebigen reellen Konstanten c .

Fall 3: Für $\lambda = \lambda_2$ hat (10.140) genau dann eine Lösung, wenn $(f, \varphi_2) = 0$ gilt. Dann erhält man aus (10.141) die spezielle Lösung

$$\varphi_{\text{spez}}(x) = \frac{\lambda_2(f, \varphi_1)\varphi_1(x)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Die allgemeine Lösung von (10.140) lautet dann $\varphi(x) = \varphi_{\text{spez}}(x) + c\varphi_2(x)$ mit der beliebigen reellen Konstante c .

► BEISPIEL 3: Die Integralgleichung

$$\int_{-1}^1 (xy + x^2y^2) \varphi(y) dy + (x+1)^2 = \varphi(x)$$

entspricht Fall 1 mit $f(x) := (x + 1)^2$. Die eindeutige Lösung lautet hier

$$\varphi(x) = \frac{25}{9}x^2 + 6x + 1.$$

► **BEISPIEL 4:** Die Integralgleichung

$$\frac{3}{2} \int_{-1}^1 (xy + x^2y^2) \varphi(y) dy + x^2 + 1 = \varphi(x)$$

entspricht Fall 2. Es ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\varphi(x) = 5x^2 + 1 + cx$$

mit der beliebigen reellen Konstante c .

► **BEISPIEL 5:** Die Integralgleichung

$$\frac{5}{2} \int_{-1}^1 (xy + x^2y^2) \varphi(y) dy + x^2 = \varphi(x) \quad (10.142)$$

entspricht Fall 2 mit $f(x) := x^2$. Wegen $(f, \varphi_2) = \int_{-1}^1 f(x)\varphi_2 dx > 0$ hat (10.142) keine Lösung.

10.3.9 Anwendung auf Randwertaufgaben, Fourierreihen und die schwingende Saite; die Methode der Greenschen Funktion

Wir wollen erläutern, warum sich Schwingungsprozesse auf Integralgleichungen mit symmetrischen Kernen zurückführen lassen. Es ergeben sich dabei wichtige Zusammenhänge zwischen der Fouriermethode zur Lösung partieller Differentialgleichungen, Fourierreihen, der Zurückführung von Randwertaufgaben auf Integralgleichungen mit Hilfe von Greenschen Funktionen und der Hilbert–Schmidt-Theorie für Integralgleichungen mit symmetrischen Kernen. Das Bemühen der Mathematiker, ein tieferes Verständnis für diese Zusammenhänge zu erhalten, hat wesentlich zur Entwicklung der Funktionalanalysis zu Beginn des 20. Jahrhunderts beigetragen. Die zugehörigen funktionalanalytischen Verallgemeinerungen findet man in 11.3.

Die eingespannte schwingende Saite: Die Gleichung

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, t > 0, \quad (\text{Differentialgleichung}), \quad (10.143)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (\text{Randbedingung}),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{Anfangslage}),$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{Anfangsgeschwindigkeit}),$$

beschreibt die Bewegung einer Saite der Länge L , die am Rand eingespannt ist. Dabei gilt: $u(x, t) =$ Auslenkung der Saite zur Zeit t am Ort x (Abb. 10.15). Die Zahl c entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Saitenwellen.

Die Idee der klassischen *Fouriermethode* ist folgende:

(a) Man bestimmt Eigenschwingungen der speziellen Produktform $u_k(x, t) = \varphi_k(x)\psi_k(t)$ mit $\varphi_k(0) = \varphi_k(L) = 0$.

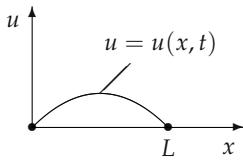


Abb. 10.15

(b) Die allgemeine Schwingung $u = u(x, t)$ ergibt sich dann nach dem *Superpositionsprinzip* durch

$$u(x, t) = \sum_k c_k u_k(x, t). \quad (10.144)$$

Wegen (a) gilt $u(0, t) = u(L, t) = 0$ für alle Zeiten t , d.h., die Randbedingung ist erfüllt. Ferner werden die Koeffizienten c_k so gewählt, dass die Anfangsbedingungen (Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit) gültig sind.

Zur Vereinfachung der Bezeichnungen wählen wir $L = \pi$ und $c = 1$. Setzen wir u_k in die partielle Differentialgleichung (10.143) ein, dann erhalten wir $\varphi_k(x)\psi_k''(t) = \varphi_k''(x)\psi_k(t)$, also

$$\frac{\psi_k''(t)}{\psi_k(t)} = \frac{\varphi_k''(x)}{\varphi_k(x)}.$$

Diese Bedingung lässt sich durch

$$\begin{aligned} \varphi_k''(x) &= \lambda_k \varphi_k(x), \quad 0 < x < \pi, \\ \varphi_k(0) &= \varphi_k(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (10.145)$$

und

$$\psi_k''(t) = \lambda_k \psi_k(t) \quad (10.146)$$

befriedigen mit der zunächst unbekannten reellen Zahl λ_k (Eigenwert in (10.145)). Gleichung (10.145) stellt ein sogenanntes *Rand-Eigenwertproblem* dar. Man prüft sofort nach, dass sich spezielle Lösungen von (10.145) durch

$$\varphi_k(x) = \sin kx, \quad \lambda_k = -k^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ergeben. Somit erhält man Lösungen von (10.146) durch

$$\psi_k(t) = \sin kt, \quad \cos kt.$$

Die Reihenentwicklung (10.144) lautet dann

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kt + b_k \cos kt) \sin kx. \quad (10.147)$$

Formal ergibt sich daraus

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k k \cos kt - b_k k \sin kt) \sin kx.$$

Für $t = 0$ erhalten wir somit die Fourierentwicklungen

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sin kx. \quad (10.148)$$

Zur Bestimmung der unbekannten Fourierkoeffizienten a_k und b_k verwenden wir das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_0^\pi f(x)g(x) dx$$

und die Orthogonalitätsrelationen

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \pi\delta_{km}/2, \quad k, m = 1, 2, \dots . \quad (10.149)$$

Multiplizieren wir (10.148) mit $\varphi_m(x) := \sin mx$ und integrieren wir anschließend formal über $[0, \pi]$, dann erhalten wir

$$(u_0, \varphi_m) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\varphi_k, \varphi_m) = \frac{\pi}{2} b_m$$

und einen analogen Ausdruck für u_1 . Daraus ergeben sich die Fourierkoeffizienten zu

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(x) \sin mx dx, \quad a_m = \frac{2}{m\pi} \int_0^\pi u_1(x) \sin mx dx. \quad (10.150)$$

Unser Ziel ist es, mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen für symmetrische Kerne die Reihenentwicklung (10.147) mit (10.150) zu rechtfertigen, d. h., wir wollen zeigen, dass diese Reihe eine Lösung des Ausgangsproblems darstellt.

Rand-Eigenwertproblem und äquivalente Integralgleichung: Anstelle von (10.145) betrachten wir das allgemeinere Rand-Eigenwertproblem

$$\varphi''(x) - \lambda \varphi(x) = h(x), \quad 0 < x < \pi, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \quad (10.151)$$

Der entscheidende Trick besteht darin, dass diese Aufgabe äquivalent ist zu der Integralgleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi G(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (10.152)$$

mit $f(x) := \int_0^\pi G(x, y)h(y) dy$ und der sogenannten Greenschen Funktion

$$G(x, y) := \begin{cases} (\pi - y)x & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq \pi, \\ (\pi - x)y & \text{für } 0 \leq y \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Dann stellt (10.152) eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art mit dem *stetigen symmetrischen Kern* G dar. Somit kann man alle Aussagen von 10.3.8 auf (10.152) anwenden. Daher ergeben sich für das Rand-Eigenwertproblem (10.151) die entsprechenden Aussagen. Insbesondere erhalten wir:

- (i) Die Funktionen $\varphi_k(x) := \sin kx$, $k = 1, 2, \dots$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(0, \pi)$. Außer $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, \dots$, gibt es keine weiteren Eigenwerte von (10.145).
- (ii) Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(\pi) = 0$ ist quellenmäßig darstellbar bezüglich G . Deshalb konvergiert die Fourierreihe

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (g, \varphi_k) \varphi_k(x) \quad (10.153)$$

gleichmäßig auf $[0, \pi]$.

Für jede Funktion $g \in L_2(0, \pi)$ (z. B. eine auf $[0, \pi]$ stetige Funktion g) konvergiert die Reihe (10.153) auf $L_2(0, \pi)$, d. h. im quadratischen Mittel.

Eine genauere Analyse ergibt das folgende Resultat für das Problem der schwingenden Saite [vgl. Zeidler 1995, Vol. 1].

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die schwingende Saite: Gegeben seien die beiden viermal stetig differenzierbaren Funktionen $u_0, u_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Randbedingungen

$$u_j^{(k)}(x) = 0 \quad \text{für } x = 0, \pi, \quad j = 0, 1, \quad k = 0, 2.$$

Dann besitzt das Rand-Anfangsproblem (10.143) der schwingenden Saite genau eine klassische Lösung, die durch die konvergente Reihenentwicklung (10.147) mit den Fourierkoeffizienten (10.150) gegeben ist.

Korollar: Erfüllen die Funktionen u_0 und u_1 nur die schwächeren Bedingungen⁴¹

$$u_0 \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, \pi), \quad u_1 \in L_2(0, \pi), \quad (10.154)$$

dann konvergiert die Reihe (10.147) mit (10.150) für jeden Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ im Sinne von $L_2(0, \pi)$, d. h. im quadratischen Mittel. Diese Reihe stellt dann eine sogenannte *verallgemeinerte Lösung* des Problems (10.143) der schwingenden Saite dar. Insbesondere ist die Differentialgleichung (10.143) im Sinne der Distributionentheorie erfüllt (vgl. 10.4), und die Randbedingungen gelten im Sinne verallgemeinerter Randwerte (vgl. 11.2.6).

Die Benutzung verallgemeinerter Lösungen ist charakteristisch für die moderne Analysis. Im vorliegenden Fall der schwingenden Saite bedeutet dies, dass die klassischen Formeln auch dann noch (verallgemeinerte) Lösungen ergeben, falls diese Formeln nur in einem verallgemeinerten Sinne (d. h. im quadratischen Mittel) konvergieren.

10.3.10 Integralgleichungen und klassische Potentialtheorie

Die Theorie der Integralgleichungen hat eine große Rolle bei der Lösung der Randwertaufgaben der klassischen Potentialtheorie gespielt. Um das zu erläutern, sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^3 mit dem glatten Rand $\partial\Omega \in C^2$ und dem äußeren Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} .

Dirichletproblem: Für eine gegebene Randfunktion $U_0 \in C(\partial\Omega)$ wird eine Funktion $U \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gesucht, so dass

$$\Delta U = 0 \quad \text{auf } \Omega \quad \text{und} \quad U = U_0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (10.155)$$

gilt. Wir interpretieren U physikalisch als das elektrostatische Potential eines elektrischen Feldes $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} U$, wobei der Rand ∂U einem metallischen elektrischen Leiter entspricht.

Eindeutigkeit: Das Problem (10.155) besitzt nach dem Maximumprinzip höchstens eine Lösung.⁴²

Existenz einer Lösung: Wir gehen aus von dem Ansatz

$$U(x) := \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \mathbb{K}(x, y) \, dO_y \quad \text{mit} \quad \mathbb{K}(x, y) := \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|x - y|}.$$

⁴¹Hier ist $\overset{\circ}{W}_2^1(0, \pi)$ ein Sobolevraum (vgl. 11.2.6). Zum Beispiel gilt (10.154), falls $u_0 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist mit $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$.

⁴²Sind U_1 und U_2 zwei Lösungen von (10.155), dann genügt die Differenz $U := U_1 - U_2$ der Gleichung (10.155) mit $U|_{\partial\Omega} = 0$. Nach dem Maximumprinzip nimmt U sein Maximum und Minimum bezüglich $\overline{\Omega}$ auf dem Rand an, d. h., es gilt $U \equiv 0$ auf Ω .

Physikalisch gesehen entspricht das dem Potential einer elektrischen Dipolschicht auf dem Rand $\partial\Omega$ mit der unbekannten Dichte φ . Die Funktion U genügt der Sprungrelation

$$U_{\pm}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} U(x \pm hn_x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \mathbb{K}(x, y) dO_y \pm \frac{1}{2} \varphi(x)$$

für alle $x \in \partial\Omega$. Daraus folgt

$$U_0(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \mathbb{K}(x, y) dO_y - \frac{1}{2} \varphi(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega. \quad (10.156)$$

Setzen wir $(K\varphi)(x) := \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \mathbb{K}(x, y) dO_y$, dann entspricht (10.156) der Operatorgleichung

$$U_0 = K\varphi - 2^{-1}\varphi, \quad \varphi \in X, \quad (10.157)$$

auf dem Banachraum $X := C(\partial\Omega)$ der stetigen Funktionen $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wenden jetzt Methoden der Funktionalanalysis an, d. h., wir benutzen die Theorie der Fredholmoperatoren (vgl. 11.3.4). Der Operator $K : X \rightarrow X$ ist kompakt, folglich ist $K - 2^{-1}I$ ein *Fredholmoperator vom Index null*. Mit potentialtheoretischen Methoden kann man zeigen, dass die homogene Gleichung $0 = K\varphi - 2^{-1}\varphi$ nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt [vgl. Kress 1989]. Nach der Theorie der Fredholmoperatoren hat somit die Ausgangsgleichung (10.157) für jedes $U_0 \in X$ genau eine Lösung $\varphi \in X$. Das zugehörige Potential U ist die *eindeutige Lösung des Dirichletproblems* (10.155).

10.3.11 Singuläre Integralgleichungen und das Riemann–Hilbert–Problem

Wir betrachten die singuläre Integralgleichung

$$(Au)(z) := a(z)u(z) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbb{K}(z, \zeta)}{\zeta - z} u(\zeta) d\zeta = h(z), \quad z \in \Gamma, \quad (10.158)$$

zusammen mit der *adjungierten Gleichung*

$$(A^D v)(z) := a(z)v(z) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbb{K}(\zeta, z)}{\zeta - z} v(\zeta) d\zeta = 0, \quad z \in \Gamma. \quad (10.159)$$

Dabei bezeichnet Γ die im mathematisch positiven Sinne durchlaufene glatte Randkurve eines beschränkten Gebietes Ω_- der komplexen Ebene mit dem äußeren Gebiet Ω_+ (Abb. 10.16).

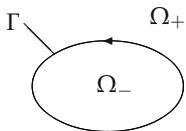


Abb. 10.16

Wir setzen voraus, dass der Kern $\mathbb{K} : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ Hölderstetig ist, d. h., für alle $z, w, \zeta, \omega \in \Gamma$ gilt

$$|\mathbb{K}(z, \zeta) - \mathbb{K}(w, \omega)| \leq c(|z - w| + |\zeta - \omega|)^{\alpha}$$

bei festem $\alpha \in (0, 1)$. Die kleinste mögliche Konstante c heißt die Hölderkonstante $H_\alpha(\mathbb{K})$ von \mathbb{K} . Mit $C^\alpha(\Gamma)$ bezeichnen wir die Menge aller Hölderstetigen Funktionen $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Bezuglich der Norm

$$\|u\| := \max_{z \in \Gamma} |u(z)| + H_\alpha(u)$$

wird $C^\alpha(\Gamma)$ ein komplexer Banachraum. Die Integrale in (10.158) und (10.159) sind im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen, d. h., es ist

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathbb{K}(z, \zeta)}{\zeta - z} u(\zeta) d\zeta := \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varrho} \frac{\mathbb{K}(z, \zeta)}{\zeta - z} u(\zeta) d\zeta$$

mit $\Gamma_\varrho := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - z| \geq \varrho\}$. Für eine Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f \neq 0$ auf Γ definieren wir den Abbildungsgrad (die Umschlingungszahl) durch

$$\deg_{\Gamma} f := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d(\arg f(z)),$$

d. h., $\text{Grad}_{\Gamma} f$ ist gleich der Anzahl der Umschlingungen des Nullpunktes durch die Bildkurve $f(\Gamma)$, wobei Umschlingungen im mathematisch positiven (negativen) Sinne positiv (negativ) gezählt werden. Als duales Paar (vgl. 11.3.4.3) wählen wir $\{X, X\}$ mit $X := C^\alpha(\Gamma)$ und

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Gamma} u(z)v(z) dz \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Schließlich setzen wir $b(z) := \mathbb{K}(z, z)$.

Existenzsatz: Gegeben seien die Funktionen $a, b \in X$ mit $a \pm b \neq 0$ auf Γ . Dann gilt:

(i) Der Operator $A : X \rightarrow X$ ist ein Fredholmoperator mit dem Index (vgl. 11.3.4)

$$\text{ind } A = \deg_{\Gamma} (a - b)(a + b)^{-1}.$$

(ii) Der Operator $A^D : X \rightarrow X$ ist dual zu A bezüglich des dualen Paares $\{X, X\}$. Es gilt $\text{ind } A = \dim N(A) - \dim N(A^D)$, wobei $N(A)$ bzw. $N(A^D)$ den Nullraum von A bzw. A^D bezeichnet.

(iii) Für eine gegebene Funktion $f \in X$ ist die singuläre Integralgleichung (10.158) genau dann lösbar, wenn

$$\langle f, v \rangle = 0 \quad \text{für alle Lösungen } v \in X \text{ von (10.159) gilt.}$$

(iv) Ist $\text{ind } A = 0$ und hat $Au = 0$, $u \in X$, nur die triviale Lösung $u = 0$, dann besitzt (10.158) für jedes $f \in X$ genau eine Lösung.

Typisch für derartige singuläre Integralgleichungen ist die Tatsache, dass der Index $\text{ind } A$ ungleich null sein kann.

Anwendung auf das Riemann–Hilbert–Problem : Wir suchen eine holomorphe Funktion $f : \Omega_{\pm} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(a + b)f_- = (a - b)f_+ + h \quad \text{auf } \Gamma. \tag{10.160}$$

Dabei wird $f_{\pm} \in C^\alpha(\overline{\Omega}_{\pm})$ gefordert, wobei f_{\pm} eine Fortsetzung von f auf $\overline{\Omega}_{\pm}$ darstellt. Ferner sei $f(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$ (gleichmäßige Konvergenz bezüglich aller Richtungen).

Das Problem (10.160) ist äquivalent zur Lösung der Integralgleichung (10.158) mit $\mathbb{K}(z, \zeta) \equiv b(z)$. Zwischen den Lösungen u und f von (10.158) und (10.160) besteht der Zusammenhang

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

10.3.12 Wiener–Hopf-Integralgleichungen

Zusammen mit der Wiener–Hopf-Gleichung

$$(Au)(x) := u(x) + \int_0^\infty K(x-y)u(y) \, dy = f(x), \quad x \geq 0, \quad (10.161)$$

betrachten wir die adjungierte Gleichung

$$(A^*v)(x) := v(x) + \int_0^\infty K(y-x)v(y) \, dy = 0, \quad x \geq 0, \quad (10.162)$$

mit der messbaren (z. B. stückweise stetigen) Funktion $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^\infty |K(y)| \, dy < \infty$. Ferner sei

$$K^+(x) := \int_{-\infty}^\infty e^{-ixy} K(y) \, dy \quad \text{mit } 1 + K^+(x) \neq 0 \text{ auf } \mathbb{R}.$$

Wir setzen $X := L_2^{\mathbb{C}}(0, \infty)$, d. h., X bezeichnet den komplexen Hilbertraum aller messbaren Funktionen $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_0^\infty |u(x)|^2 \, dx < \infty$ und dem Skalarprodukt (u, v) definiert durch

$$(u, v) := \int_0^\infty \overline{u(x)} v(x) \, dx. \quad \text{Dann gilt:}$$

(i) Der Operator $A : X \rightarrow X$ ist ein Fredholmoperator mit Index $\text{ind } A = \deg_{\mathbb{R}}(1 + K^+)$ (Anzahl der Umschlingungen der Kurve $x \mapsto 1 + K^+(\mathbb{R})$ um den Nullpunkt). Dabei gilt $\text{ind } A = \dim N(A) - \dim N(A^*)$.

(ii) Für eine gegebene Funktion $f \in X$ ist die Integralgleichung (10.161) genau dann lösbar, wenn $(f, v) = 0$ für alle Lösungen $v \in X$ der adjunktiven Gleichung (10.162) gilt.

(iii) Ist $\text{ind } A = 0$ und hat $Au = 0$, $u \in X$, nur die triviale Lösung $u = 0$, dann besitzt (10.161) für jedes $f \in X$ eine eindeutige Lösung $u \in X$.

Bemerkung (topologische Stabilität des Index): Bei den singulären Integralgleichungen (10.158) und den Wiener–Hopf-Gleichungen (10.161) beobachtet man die fundamentale Tatsache, dass der Index $\text{ind } A$ sich *nicht ändert*, falls man die Kenngrößen der Integralgleichung Deformationen unterwirft, die die entsprechende Umschlingungszahl unverändert lassen. Das ist ein Spezialfall des berühmten Atiyah–Singer-Indextheorems, das einen Zusammenhang zwischen Index und Topologie herstellt (vgl. Kapitel 19).

10.3.13 Näherungsverfahren

Wir erläutern hier einige Grundideen. Eine ausführliche moderne Darstellung von Näherungsverfahren zur Lösung von Integralgleichungen auf Computern findet man in [Hackbusch 1989].

10.3.13.1 Quadraturverfahren

Integralgleichungen kann man dadurch auf lineare Gleichungssysteme zurückführen, dass man die Integrale mit Hilfe von Quadraturformeln durch Summen ersetzt. Dabei ist es wichtig,

effektive Quadraturformeln zu verwenden. Benutzt man die Gaußsche Quadraturformel, dann spricht man von der Nyströmschen Methode. Hier setzt man näherungsweise

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a)(A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n)). \quad (10.163)$$

Bezeichnen t_1, \dots, t_n die Nullstellen des n -ten Legendreschen Polynoms

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n,$$

dann ist $2x_k = (a+b) + (b-a)t_k$ und

$$A_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(t-t_1)(t-t_2) \cdots (t-t_{k-1})(t-t_{k+1}) \cdots (t-t_n)}{(s-t_1)(s-t_2) \cdots (s-t_{k-1})(s-t_{k+1}) \cdots (s-t_n)} \, dt$$

mit $s := t_k$, $k = 1, \dots, n$. Für $n = 1, 2, \dots, 6$ findet man die t -Werte und A -Werte in Tabelle 10.4.

Tabelle 10.4

n	t	A	n	t	A
1	$t_1 = 0$	$A_1 = 1$	5	$t_1 = -0,9062$	$A_1 = 0,1185$
2	$t_1 = -0,5774$	$A_1 = 0,5$		$t_2 = -0,5384$	$A_2 = 0,2393$
	$t_2 = 0,5774$	$A_2 = 0,5$		$t_3 = 0$	$A_3 = 0,2844$
3	$t_1 = -0,7746$	$A_1 = 0,2778$		$t_4 = 0,5384$	$A_4 = 0,2393$
	$t_2 = 0$	$A_2 = 0,4444$		$t_5 = 0,9062$	$A_5 = 0,1185$
	$t_3 = 0,7746$	$A_3 = 0,2778$	6	$t_1 = -0,9324$	$A_1 = 0,0857$
4	$t_1 = -0,8612$	$A_1 = 0,1739$		$t_2 = -0,6612$	$A_2 = 0,1804$
	$t_2 = -0,3400$	$A_2 = 0,3261$		$t_3 = -0,2386$	$A_3 = 0,2340$
	$t_3 = 0,3400$	$A_3 = 0,3261$		$t_4 = 0,2386$	$A_4 = 0,2340$
	$t_4 = 0,8612$	$A_4 = 0,1739$		$t_5 = 0,6612$	$A_5 = 0,1804$
				$t_6 = 0,9324$	$A_6 = 0,0857$

Die gegebene Integralgleichung

$$\lambda \int_a^b K(x,y) \varphi(y) \, dy + f(x) = \varphi(y)$$

wird dann nach (10.163) näherungsweise durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_1(1 - \lambda A_1 k_{11}) - \varphi_2 \lambda A_2 k_{12} & - & \dots & - \varphi_n \lambda A_n k_{1n} & = f_1 \\ -\varphi_1 \lambda A_1 k_{21} & + \varphi_2(1 - \lambda A_2 k_{22}) & - & \dots & - \varphi_n \lambda A_n k_{2n} & = f_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varphi_1 \lambda A_1 k_{n1} & - \varphi_2 \lambda A_2 k_{n2} & - & \dots & + \varphi_n(1 - \lambda A_n k_{nn}) & = f_n \end{array}$$

ersetzt. Dabei ist $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ und $k_{ij} = K(x_i, y_j)$.

► **BEISPIEL 1:** Wir wollen die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art

$$\int_0^1 (xy + \sqrt{xy}) \varphi(y) \, dy + x = \varphi(x) \quad (10.164)$$

näherungsweise lösen. Wegen $a = 0$, $b = 1$ ist $x_k = \frac{1}{2}(1 + t_k)$.

Es sei $n = 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} t_1 &= -0,5774, & A_1 &= 0,5, & x_1 = y_1 &= 0,2113, & k_{11} &= 0,2559, \\ t_2 &= 0,5774, & A_2 &= 0,5, & x_2 = y_2 &= 0,7887, & k_{12} = k_{21} &= 0,5750, \\ & & & & & k_{22} &= 1,4107, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \cdot 0,8720 - \varphi_2 \cdot 0,2875 &= 0,2113, \\ -\varphi_1 \cdot 0,2875 + \varphi_2 \cdot 0,2946 &= 0,7887. \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir

$$\varphi_1 = 1,659, \quad \varphi_2 = 4,296.$$

Die exakte Lösung lautet

$$\varphi(x_1) = 1,670, \quad \varphi(x_2) = 4,325.$$

Die Übereinstimmung ist mit Rücksicht auf die geringe Zahl $n = 2$ befriedigend.

10.3.13.2 Iterationsverfahren

In 10.3.5 und 10.3.6 haben wir gezeigt, wie man lineare Volterrascche und Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art durch die Methode der sukzessiven Approximation lösen kann. Dahinter verbirgt sich als ein allgemeines Iterationsprinzip der sogenannte *Fixpunktsatz von Banach*. Diesen betrachten wir zusammen mit Anwendungen auf lineare und nichtlineare Integralgleichungen in 12.1.

10.3.13.3 Das Galerkinverfahren

Um die Integralgleichung

$$\lambda \int_a^b K(x,y) \varphi(y) dy - \varphi(x) = f(x) \tag{10.165}$$

mit Hilfe des Galerkinverfahrens⁴³ zu lösen, macht man für φ einen Ansatz in Form einer endlichen Linearkombination

$$\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x). \tag{10.166}$$

Die auf dem Intervall $[a, b]$ linear unabhängigen Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sind gegeben, z. B. $\varphi_k(x) := x^{k-1}$. Gesucht werden die Koeffizienten c_1, \dots, c_n , für die sich ein lineares Gleichungssystem ergibt. Hierzu setzen wir (10.166) in (10.165) ein. Das liefert

$$\begin{aligned} c_1 \lambda \int_a^b K(x,y) \varphi_1(y) dy + \dots \\ \dots + c_n \lambda \int_a^b K(x,y) \varphi_n(y) dy - c_1 \varphi_1(x) - \dots - c_n \varphi_n(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung der Reihe nach mit $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ und integrieren wir über $[a, b]$, dann ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem

$$c_1(\lambda \alpha_{j1} - \beta_{j1}) + \dots + c_n(\lambda \alpha_{jn} - \beta_{jn}) = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

⁴³Die Schreibweise „Galerkin“ ist heute allgemein üblich. Die korrekte Aussprache des Namens des russischen Ingenieurs Galerkin, der dieses Verfahren 1915 einführte, lautet „Galjórkine“.

zur Bestimmung von c_1, \dots, c_n . Dabei ist

$$a_{jk} := \int_a^b \int_a^b K(x, y) \varphi_j(x) \varphi_k(y) dx dy, \quad \beta_{jk} := \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx, \quad \gamma_j := \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx.$$

Konvergenz: Erhöht man die Anzahl der Basisfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, dann erwartet man, dass für $n \rightarrow \infty$ die Näherungslösungen gegen die Lösung der Ausgangsgleichung konvergieren.

Derartige Konvergenzaussagen werden mit Hilfe der Funktionalanalysis formuliert und bewiesen (vgl. 11.4.4). Vom abstrakten Standpunkt aus stellt das obige Galerkinverfahren ein Projektionsverfahren dar.

10.4 Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Die Theorie der Distributionen stellt eine wichtige Grundlage der modernen Analysis dar. Klassische Funktionen brauchen nicht stets differenzierbar zu sein. Distributionen sind verallgemeinerte Funktionen, die folgende Eigenschaften haben:

- (i) Distributionen besitzen Ableitungen beliebiger Ordnung.
- (ii) Klassische Funktionen können mit speziellen Distributionen identifiziert werden.
- (iii) Die Diracsche δ -Funktion der Physiker ist keine klassische Funktion, wohl aber eine Distribution.

Wegen (i) sind Distributionen die natürlichen Objekte für eine allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Speziell bleiben Lösungsformeln für partielle Differentialgleichungen auch dann sinnvoll, falls nicht die nötigen (häufig lästigen) Glattheitsbedingungen erfüllt sind (vgl. z. B. Beispiel 7 weiter unten).

In 14.4.2 werden wir zeigen, dass Distributionen in sehr natürlicher Weise benötigt werden, um das schwierige Turbulenzproblem zu behandeln. Die Grundidee besteht darin, dass das Geschwindigkeitsfeld und das Druckfeld einer turbulenten Strömung den Navier–Stokeschen Differentialgleichungen nicht im klassischen Sinne genügen, sondern nur in einem sehr schwachen Sinne, d. h. im Sinne der Theorie der Distributionen. Das entspricht der möglichen „Wildheit“ der turbulenten Strömung. Zum Beispiel ergibt sich der Druck p aus einer Gleichung der Form

$$\mathbf{grad} p = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Omega, \quad p \in L_2(\Omega). \quad (10.167)$$

Funktionen aus $L_2(\Omega)$ sind in der Regel nicht einmal stetig (vgl. 11.2.4.1). In der Theorie der Distributionen besitzt jedoch die Druckfunktion p stets *Ableitungen beliebiger Ordnung*. Deshalb ist (10.167) in diesem verallgemeinerten Sinne wohldefiniert. Das unterstreicht die Bedeutung der Distributionentheorie für die mathematische Physik.

Bezeichnungen: In diesem Abschnitt sei Ω eine nichtleere offene Menge des \mathbb{R}^n mit $n = 1, 2, \dots$ (z. B. $\Omega = \mathbb{R}^n$). Ferner benutzen wir die in 10.1.3 eingeführten Bezeichnungen. Insbesondere bezeichnet $C_0^\infty(\Omega)$ die Menge aller Funktionen u , die stetige partielle Ableitungen $\partial^\alpha u$ beliebiger Ordnung $|\alpha|$ besitzen und außerhalb einer (von u abhängigen) kompakten Teilmenge K von Ω verschwinden (Abb. 10.17(a)). Zum Beispiel gehört die Funktion u in Abb. 10.17(b) zu $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Im folgenden sind sämtliche auftretenden Integrale im Sinne von Lebesgue zu verstehen (vgl. 10.5). Man beachte, dass jedes klassische Integral gleichzeitig auch ein Lebesgueintegral ist.

Die Diracsche δ -Funktion: Wir betrachten einen Punkt der Masse $m = 1$, der sich im Ursprung $x = 0$ des \mathbb{R}^n befindet. Physiker ordnen diesem Massenpunkt die formale *Massendichte*

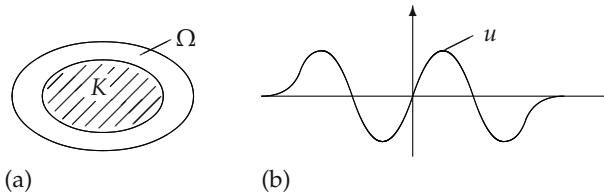


Abb. 10.17

δ zu und benutzen entsprechend dieser physikalischen Interpretation die folgenden formalen Regeln

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ +\infty & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

sowie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (10.168)$$

Tatsächlich gibt es *keine klassische Funktion* δ mit diesen Eigenschaften. Man kann aber die Relation (10.168) sinngemäß benutzen, um die Distribution δ in strenger Weise zu definieren (vgl. 10.4.1).

Führt man die Substitution $z = x - y$ aus, dann erhält man aus (10.168) formal die Relation

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-y) \varphi(x) dx = \varphi(y). \quad (10.169)$$

Die „Funktion“ $x \mapsto \delta(x-y)$ entspricht der Dichte einer Masse $m = 1$ im Punkt y .

10.4.1 Definition von Distributionen

Der Raum $\mathbb{D}(\Omega)$ der Testfunktionen: Eine komplexwertige Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gehört genau dann zu $\mathbb{D}(\Omega)$, wenn sie stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt und außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω gleich null ist, d. h., Real- und Imaginärteil von φ gehören zu $C_0^\infty(\Omega)$. Wir schreiben genau dann

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \quad \text{in } \mathbb{D}(\Omega) \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

wenn alle Funktionen φ_m und φ zu $\mathbb{D}(\Omega)$ gehören und folgendes gilt:

(i) Es gibt eine kompakte Teilmenge K von Ω , so dass alle Funktionen φ_m außerhalb von K gleich null sind.

(ii) Die Ableitungen⁴⁴ beliebiger Ordnung $\partial^\alpha \varphi_m$ konvergieren gleichmäßig gegen $\partial^\alpha \varphi$ auf Ω , d. h., für $m \rightarrow \infty$ ist

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi_m(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0.$$

Definition: Unter einer *Distribution* $F \in \mathbb{D}'(\Omega)$ verstehen wir ein *lineares folgenstetiges Funktional* $F : \mathbb{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Raum $\mathbb{D}(\Omega)$ der Testfunktionen. Explizit heißt das folgendes:

(i) Für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{D}(\Omega)$ und alle komplexen Zahlen a, b gilt

$$F(a\varphi + b\psi) = aF(\varphi) + bF(\psi).$$

Dabei ist $F(\varphi)$ eine komplexe Zahl.

⁴⁴Die Ableitung nullter Ordnung entspricht definitionsgemäß der Funktion selbst, d. h., es ist $\partial^\alpha \varphi = \varphi$ für $\alpha = 0$.

(ii) Aus $\varphi_m \rightarrow \varphi$ in $\mathbb{D}(\Omega)$ für $m \rightarrow \infty$ folgt $F(\varphi_m) \rightarrow F(\varphi)$.

► **BEISPIEL 1** (δ -Distribution): Setzen wir

$$\delta(\varphi) := \varphi(0) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n),$$

dann ist δ eine Distribution, d. h., es gilt $\delta \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$. Diese Definition wird motiviert durch die Relation (10.168) der Physiker.

► **BEISPIEL 2:** Für festes $y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\delta_y(\varphi) := \varphi(y) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt $\delta_y \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$. Diese sogenannte δ -Distribution im Punkt y entspricht nach (10.169) der „Funktion“ $x \mapsto \delta(x - y)$ der Physiker.

Reguläre Distributionen: Mit Hilfe der Relation

$$F(\varphi) := \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\Omega) \tag{10.170}$$

kann man jeder stetigen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Distribution F zuordnen, wobei f durch F eindeutig festgelegt ist. In diesem Sinne kann man stetige Funktionen als spezielle Distributionen auffassen.

Um diese *Identifikation* zwischen Funktionen und gewissen Distributionen auch auf große Klassen unstetiger Funktionen auszudehnen, bezeichnen wir mit $L_{1,\text{lokal}}(\Omega)$ die Menge aller Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, deren Real- und Imaginärteil auf jeder kompakten Teilmenge von Ω integrierbar ist. Jeder Funktion $f \in L_{1,\text{lokal}}(\Omega)$ entspricht dann vermöge (10.170) eine Distribution $F \in \mathbb{D}'(\Omega)$, wobei f durch F eindeutig festgelegt ist, und zwar bis auf Änderung der Werte auf einer Menge vom Maß, null (z. B. Änderung in endlich vielen Punkten). Genau alle so entstehenden Distributionen heißen *reguläre Distributionen*.

Konvention: Anstelle von F schreibt man häufig kurz f , d. h., man benutzt für die Funktion f und die zugehörige reguläre Distribution das gleiche Symbol.

► **BEISPIEL 3:** Der Funktion $f \equiv 1$ entspricht die reguläre Distribution F mit

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Dagegen ist die δ -Distribution keine *reguläre Distribution*.

Träger einer Funktion: Als den Träger $\text{supp } f$ der Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnet man den Abschluss der Menge aller Punkte $x \in \Omega$ mit $f(x) \neq 0$, d. h.

$$\text{supp } f := \text{Abschluss von } \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}.$$

► **BEISPIEL 4:** Setzen wir

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } -2 < x < 2, \\ 0 & \text{für } x \leq -2 \text{ oder } x \geq 2, \end{cases}$$

dann gilt $\text{supp } f = [-2, 2]$. Für $g(x) := \sin x$ ergibt sich $\text{supp } g = \mathbb{R}$.

Träger einer Distribution: Es sei $F \in \mathbb{D}'(\Omega)$. Bezeichnet Ω_* eine offene Teilmenge von Ω , dann schreiben wir genau dann

$$F \neq 0 \quad \text{auf } \Omega_*,$$

wenn es eine Funktion $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega_*)$ gibt, so dass $F(\varphi) \neq 0$ gilt. Ferner bezeichne $K_r(x)$ eine offene Kugel des \mathbb{R}^n mit dem Radius $r > 0$ und dem Mittelpunkt x . Definitionsgemäß, gehört der Punkt x genau dann zum Träger $\text{supp } F$ der Distribution F , wenn x zu Ω oder zum Rand $\partial\Omega$ gehört und

$$F \neq 0 \quad \text{auf } \Omega \cap K_r(x)$$

gilt, und zwar für alle Radien $r > 0$.

► **BEISPIEL 5:** Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $f(x) = 0$ für alle $x \notin [a, b]$. Dann gilt

$$\text{supp } f = \text{supp } F = [a, b],$$

falls F die zu f gehörige Distribution bezeichnet.

10.4.2 Das Rechnen mit Distributionen

Strategie: Operationen für Distributionen werden so erklärt, dass sie im Spezialfall regulärer Distributionen vermöge der Relation (10.170) den klassischen Operationen für Funktionen entsprechen.

Ableitung: Für jede Distribution $F \in \mathbb{D}'(\Omega)$ definieren wir die Ableitung $\partial^\alpha F$ durch

$$(\partial^\alpha F)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} F(\partial^\alpha \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\Omega), \quad (10.171)$$

wobei $|\alpha|$ die Ordnung der partiellen Ableitung $\partial^\alpha \varphi$ bezeichnet.

Dann ist $\partial^\alpha F$ wiederum eine Distribution, d. h., es gilt $\partial^\alpha F \in \mathbb{D}'(\Omega)$. Somit besitzen Distributionen *Ableitungen beliebiger Ordnung*.

Motivation: Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine hinreichend glatte Funktion, dann entspricht ihr die reguläre Distribution F mit

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Ferner gehört zu der klassischen Ableitung $\partial^\alpha f$ die reguläre Distribution G mit

$$G(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f) \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Partielle Integration ergibt die Schlüsselrelation

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f) \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f \partial^\alpha \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Ein Vergleich mit (10.171) zeigt, dass $G = \partial^\alpha F$ gilt, d. h., die klassische Ableitung $\partial^\alpha f$ entspricht der Distribution $\partial^\alpha F$.

► **BEISPIEL 1:** Es sei $n = 1$ und $\Omega = \mathbb{R}$. Der Funktion

$$h(x) = \frac{1}{2}|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

entspricht die reguläre Distribution

$$H(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \varphi(x) \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}).$$

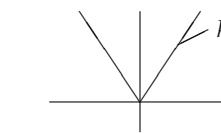
Diese Distribution H besitzt die Ableitung $H' = F$ mit

$$F(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}), \quad (10.172)$$

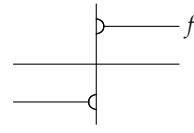
wobei wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x > 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{für } x < 0, \\ \text{beliebig} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

In allen Punkten $x \neq 0$ gilt $h'(x) = f(x)$ im klassischen Sinne. Im Punkt $x = 0$ besitzt h keine klassische Ableitung (Abb. 10.18).



(a)



(b)

Abb. 10.18

Ferner gilt

$$F' = \delta, \quad (10.173)$$

d. h., die Ableitung der Sprungfunktion f (im distributiven Sinne) ist gleich der δ -Distribution. Schließlich erhalten wir für die m -te Ableitung

$$\delta^{(m)}(\varphi) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2, \dots. \quad (10.174)$$

Benutzt man für Funktionen und die zugehörigen regulären Distributionen die gleichen Symbole, dann kann man kurz schreiben

$$h' = f, \quad h'' = f' = \delta, \quad h''' = \delta', \quad \text{usw.}$$

Beweis von (10.173): Um $H' = F$ mit (10.172) zu zeigen, haben wir nachzuweisen:

$$F(\varphi') \equiv H'(\varphi) = -H(\varphi') \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}).$$

Tatsächlich ergibt sich das durch partielle Integration, denn für alle $\varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x) dx &= \int_{-\infty}^0 -x\varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} x\varphi'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx - \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Die Relation (10.173) ist gleichbedeutend mit

$$F'(\varphi) = -F(\varphi') = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}).$$

Das folgt aus

$$-2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = 2\varphi'(0).$$

Beweis von (10.174): Das ergibt sich aus $\delta^{(m)}(\varphi) = (-1)^m \delta(\varphi^{(m)})$.

► BEISPIEL 2 (Wellen): Die Gleichung

$$c^{-2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (10.175)$$

beschreibt die Bewegung einer schwingenden Saite, wobei $u(x, t)$ die Auslenkung der Saite im Punkt x zur Zeit t und $c > 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet. Dann gilt:

(a) Besitzt die Funktion $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, dann ist

$$u(x, t) := W(x - ct) \quad (10.176)$$

eine klassische Lösung von (10.175), der eine glatte Welle entspricht, die sich von links nach rechts mit der Geschwindigkeit c ausbreitet (Abb. 10.19(a)).

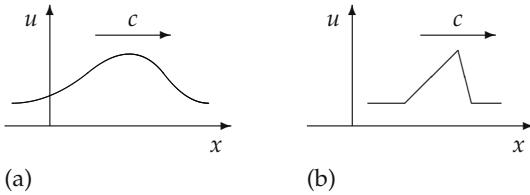


Abb. 10.19

(b) Ist die Funktion $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lediglich stetig, dann stellt u in (10.176) eine Lösung von (10.175) im distributiven Sinne dar. Das heißt, bezeichnet U die zu u gehörige reguläre Distribution, also

$$U(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t)\varphi(x, t) \, dx \, dt,$$

dann gilt

$$c^{-2}U_{tt} - U_{xx} = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2.$$

Explizit bedeutet das

$$c^{-2}U_{tt}(\varphi) - U_{xx}(\varphi) = c^{-2}U(\varphi_{tt}) - U(\varphi_{xx}) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^2).$$

Die distributive Lösung (10.176) von (10.175) erfasst auch nichtglatte Wellen (Abb. 10.19(b)).

Dieses Beispiel demonstriert die Nützlichkeit der Theorie der Distributionen, um Situationen zu beschreiben, die vom *physikalischen Standpunkt aus sehr vernünftig sind*, sich aber *nicht* durch klassische Lösung partieller Differentialgleichungen beschreiben lassen, weil die auftretenden Funktionen *nicht hinreichend glatt* sind.

Das Tensorprodukt von Distributionen: Für zwei Funktionen $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ und $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir das Tensorprodukt $u \otimes v$ durch

$$(u \otimes v)(x, y) := u(x)v(y) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m.$$

Sind $F \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $G \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^m)$ zwei Distributionen, dann erhalten wir durch⁴⁵

$$(F \otimes G)(\varphi) := F(G(\varphi(x, .)))$$

eine neue Distribution $F \otimes G \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, die man als das Tensorprodukt von F mit G bezeichnet. Das Tensorprodukt hat folgende Eigenschaften:

⁴⁵Mit $G(\varphi(x, .))$ bezeichnen wir den Wert von G für die Testfunktion $y \mapsto \varphi(x, y)$ bei festem x .

- (i) $(F \otimes G) \otimes H = F \otimes (G \otimes H)$ (Assoziativität),
- (ii) $F_x \otimes G_y = G_y \otimes F_x$ (Kommutativität),⁴⁶
- (iii) $(\partial_x^\alpha F) \otimes G = \partial_x^\alpha (F \otimes G)$ für alle α (Ableitung),
- (iv) $(F \otimes G)(\varphi \otimes \psi) = F(\varphi)G(\psi)$ für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$,
- (v) $\text{supp } (F \otimes G) = \text{supp } F \times \text{supp } G$.

Die Faltung von Funktionen: Wir setzen

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion $f * g$ heißt die Faltung von f mit g .

Satz: Gehören die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ zu $L_{1,\text{lokal}}(\mathbb{R}^n)$, und ist der Träger $\text{supp } f$ beschränkt, dann gehört auch $f * g$ zu $L_{1,\text{lokal}}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $f * g = g * f$.

Bezeichnet F bzw. G die reguläre Distribution zu f bzw. g , dann entspricht $f * g$ der regulären Distribution $F * G$ (im Sinne der nachfolgenden Definition).

Die Faltung von Distributionen: Es sei $F, G \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$, wobei der Träger $\text{supp } F$ beschränkt ist. Wir definieren die Faltung $F * G$ durch

$$(F * G)(\varphi) := (F \otimes G)(\varphi_*), \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n),$$

wobei wir $\varphi_*(x, y) := \varphi(x + y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ setzen.

Die Faltung $F * G$ ist wiederum eine Distribution, d. h., es gilt $F * G \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$. Für Distributionen $F, G, H \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit beschränktem Träger $\text{supp } F$ und komplexe Zahlen a, b gilt:

- (i) $F * (aG + bH) = a(F * G) + b(F * H)$ (Linearität),
- (ii) $F * G = G * F$ (Kommutativität),
- (iii) $(F * G) * H = F * (G * H)$, falls auch $\text{supp } G$ beschränkt ist (Assoziativität),
- (iv) $\partial^\alpha(F * G) = (\partial^\alpha F) * G = F * (\partial^\alpha G)$ für alle α mit $|\alpha| \geq 0$ (Ableitung),
- (v) $\delta * H = H * \delta = H$ (die δ -Distribution entspricht dem „Einselement“).

Das Produkt zwischen einer Distribution und einer glatten Funktion: Gegeben sei die Distribution $F \in \mathbb{D}'(\Omega)$ und die beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Definieren wir das Produkt ψF durch

$$(\psi F)(\varphi) := F(\psi\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{D}(\Omega),$$

dann ist ψF wiederum eine Distribution, d. h., es gilt $\psi F \in \mathbb{D}'(\Omega)$.

10.4.3 Die Grundlösung linearer partieller Differentialgleichungen

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung m -ter Ordnung

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \tag{10.177}$$

mit konstanten Koeffizienten, d. h., alle a_α sind komplexe Zahlen, die nicht gleichzeitig gleich null sind. Gegeben ist die Funktion f . Gesucht wird die Funktion u .

Es erweist sich als sehr nützlich, anstelle von (10.177) die allgemeinere Gleichung

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha U = F \tag{10.178}$$

⁴⁶Das bedeutet explizit $F(G(\varphi(x, .))) = G(F(\varphi(., y)))$.

zu studieren. Dabei ist die Distribution $F \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Gesucht wird die Distribution $U \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Sind F und U reguläre Distributionen, die f und u entsprechen, dann ist die Gleichung (10.177) im Sinne von (10.178) zu verstehen. Insbesondere enthält (10.178) den Spezialfall, dass f und u klassische glatte Lösungen von (10.177) sind. Der Vorteil von (10.178) gegenüber (10.177) besteht darin, dass auch *nichtglatte* Lösungen u erfasst werden.

Unter einer *Grundlösung* versteht man eine Lösung U von (10.178) mit $F = \delta$. Ist U_0 eine spezielle Grundlösung von (10.178), dann erhält man alle Grundlösungen von (10.178) durch

$$U = U_0 + H,$$

wobei $H \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine beliebige Lösung von (10.178) darstellt mit $F = 0$.

Satz von Malgrange–Ehrenpreis: Jede Gleichung der Form (10.178) besitzt eine Grundlösung.

Korollar (Existenz einer Lösung für das inhomogene Problem): Die Gleichung (10.178) besitzt eine Lösung der Form

$$U = U_0 * F,$$

falls U_0 eine beliebige Grundlösung von (10.178) ist und F eine reguläre Distribution darstellt, die einer Funktion $f \in L_{1,\text{lokal}}(\mathbb{R}^n)$ mit beschränktem Träger $\text{supp } f$ entspricht.

Dieses Korollar ergibt sich unter Benutzung der Eigenschaften der Faltung aus der folgenden kurzen Rechnung:

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} \partial^{\alpha} (U_0 * F) = \sum_{\alpha} (a_{\alpha} \partial^{\alpha} U_0) * F = \delta * F = F.$$

► **BEISPIEL 1:** Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u_0^{(n)} = \delta \quad \text{auf } \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

hat die Grundlösung

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Das ist im Sinne regulärer Distributionen zu verstehen. Ferner besitzt die Gleichung

$$u^{(n)} = f \quad \text{auf } \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

die Lösung $u = u_0 * f$ im Sinne regulärer Distributionen, d. h., es gilt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(x-y) f(y) dy.$$

Vorausgesetzt wird dabei, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist (oder allgemeiner zu $L_{1,\text{lokal}}(\mathbb{R})$ gehört) und außerhalb eines beschränkten Intervalls verschwindet.

► **BEISPIEL 2:** Die Poissons-Gleichung⁴⁷

$$-\Delta U = \varrho \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \tag{10.179}$$

hat für $\varrho = \delta$ die Grundlösung

$$U_0(x) = \frac{1}{4\pi|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

⁴⁷ Δu bezeichnet den Laplaceoperator im \mathbb{R}^3 , d. h. $\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}$.

im Sinne regulärer Distributionen. Ist die Funktion $\varrho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und verschwindet sie außerhalb einer Kugel, dann ist $U = U_0 * \varrho$ eine Lösung von (10.179) im Sinne regulärer Distributionen, d. h., es gilt

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(y)}{4\pi|x-y|} dy = \int_{\mathbb{R}^3} U_0(x-y)\varrho(y) dy.$$

Besitzt ϱ zusätzlich stetige erste partielle Ableitungen, dann ist U auch klassische Lösung von (10.179).

Vom physikalischen Standpunkt aus bedeutet ϱ die elektrische Ladungsdichte und U das elektrostatische Potential (in geeigneten Einheiten). Die elektrische Feldstärke ist dann durch $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} U$ gegeben. Die Grundlösung U_0 ist das elektrostatische Potential zu $\varrho = \delta$ (Ladungsdichte eines Punktes der Ladung Eins im Ursprung).

Tabelle 10.5 zeigt weitere Grundlösungen. In der Physik heißen geeignete spezielle Grundlösungen auch *Greensche Funktionen*.

Tabelle 10.5

Differentialgleichung	Grundlösung ($x \in \mathbb{R}^3$)
$u_t - \Delta u = \delta$ auf \mathbb{R}^4	$u(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{- x ^2/4t}}{8(\pi t)^{3/2}} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$ (reguläre Distribution)
$u_{tt} - \Delta u = \delta$ auf \mathbb{R}^4	$u(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(\int_{ x =t} \varphi(x, t) dO_x \right) dt$ für alle $\varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^4)$ (keine reguläre Distribution)

10.4.4 Anwendung auf Randwertprobleme

Wir betrachten das klassische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0 & \text{(Randbedingung).} \end{aligned} \tag{10.180}$$

Ist die stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann besitzt (10.180) genau eine Lösung u , die man durch die Formel

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y)f(y) dy \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \tag{10.181}$$

erhält. Die Funktion

$$G(x, y) := \begin{cases} x(1-y) & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ (1-x)y & \text{für } 0 \leq y \leq x \leq 1, \end{cases}$$

heißt die *Greensche Funktion* zu (10.180).

Setzen wir formal $f(y) = \delta(y - z)$, dann folgt aus (10.181) die Gleichung $u(x) = G(x, z)$. Die Physiker schreiben dafür kurz

$$\begin{aligned} -G''(x, z) &= \delta(x - z), & 0 < x < 1, \\ G(0, z) &= G(1, z) & \text{(Randbedingung).} \end{aligned}$$

Im strengen Sinne gilt für jedes feste $z \in (0, 1)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} -\mathbb{G}'' &= \delta_z & \text{auf } \mathbb{D}'(0, 1), \\ G(0, z) &= G(1, z) & \text{(Randbedingung),} \end{aligned}$$

wobei \mathbb{G} die zur Funktion $x \mapsto G(x, z)$ zugehörige reguläre Distribution bezeichnet.

Somit ist die Greensche Funktion G eine Grundlösung von (10.180), die zusätzlich der Randbedingung genügt.

10.4.5 Anwendung auf Anfangswertprobleme

Neben dem klassischen Anfangswertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), \end{aligned} \tag{10.182}$$

betrachten wir das sogenannte verallgemeinerte Anfangswertproblem im Sinne der Theorie der Distributionen

$$U_{tt} - \Delta U = F + U_0 \otimes \delta' + U_1 \otimes \delta, \quad \text{supp } U \subseteq \mathbb{R}_+^4. \tag{10.183}$$

Hier setzen wir $\mathbb{R}_+^4 = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0\}$. Unter einer Lösung von (10.183) verstehen wir eine Distribution $U \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^4)$, die (10.183) genügt, wobei die Distributionen $F \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^4)$ und $U_0, U_1 \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^3)$ gegeben sind.

Unter einer Lösung von (10.182) verstehen wir eine Funktion $u \in C^1(\mathbb{R}_+^4)$, die für $t > 0$ stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt und der Gleichung (10.182) genügt.

Satz: (i) *Klassische Lösung.* Sind u_0, u_1, f hinreichend glatte vorgegebene Funktionen, d. h. ist

$$u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3), \quad u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3), \quad f \in C^2(\mathbb{R}_+^4),$$

dann besitzt das klassische Anfangswertproblem (10.182) genau eine Lösung u . Diese ist für $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$ durch die sogenannte *Poissonformel* gegeben:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\theta(t)}{4\pi} \int_{|x-y|\leq t} \frac{f(y, t - |x - y|)}{|x - y|} dy \\ &\quad + \frac{\theta(t)}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} u_1(y) dO_y + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta(t)}{t} \int_{|x-y|=t} u_0(y) dO_y \right). \end{aligned}$$

Dabei setzen wir $\theta(t) = 1$ für $t > 0$ und $\theta(t) = 0$ für $t \leq 0$.

(ii) *Verallgemeinerte Lösung.* Gilt schwächer

$$u_0, u_1 \in L_{1,\text{lokal}}(\mathbb{R}^3), \quad f \in L_{1,\text{lokal}}(\mathbb{R}^4), \quad \text{supp } f \subseteq \mathbb{R}_+^4,$$

dann besitzt das verallgemeinerte Problem (10.183) genau eine Lösung U im Sinne regulärer Distributionen.⁴⁸ Diese Lösung ist ebenfalls durch die obige Poissonformel gegeben.

Speziell ist die Lösung u des klassischen Problems (10.182) aus (i) auch Lösung des verallgemeinerten Problems (10.183). Das motiviert die Bezeichnung „verallgemeinertes Problem“.

10.4.6 Die Fouriertransformation

Die Fouriertransformation stellt eines der wichtigsten Hilfsmittel der mathematischen Physik dar, weil sie die Operation der *Differentiation* in die einfache algebraische Operation der *Multiplikation* verwandelt.

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ benutzen wir im folgenden das euklidische Skalarprodukt

$$\langle x|y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

sowie die euklidische Norm $|x| := \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der Testfunktionen: Wir setzen

$$p_{k,r}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^k + 1) \sum_{|\alpha| \leq r} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

wobei $k, r = 0, 1, 2, \dots$ und $n = 1, 2, \dots$ gilt. Definitionsgemäß besteht der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ aus allen beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, die für $|x| \rightarrow \infty$ sehr rasch gegen Null gehen, d. h. genauer ist

$$p_{k,r}(\varphi) < \infty \quad \text{für alle } k, r.$$

Speziell gilt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Funktion $\varphi(x) := e^{-|x|^2}$ gehört zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, aber nicht zu $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben genau dann

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } m \rightarrow \infty, \tag{10.184}$$

wenn alle φ_m und φ zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gehören und

$$p_{k,r}(\varphi_m - \varphi) \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

bezüglich aller möglichen Indizes k und r gilt.

Bemerkung: Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein sogenannter *lokalkonvexer Raum* mit dem Halbnormensystem $\{p_{k,r}\}$ (vgl. 11.2.7). Der Konvergenzbegriff (10.184) entspricht der allgemeinen Definition der Konvergenz in lokalkonvexen Räumen. Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist wegen der Abzählbarkeit des Halbnormensystems ein metrischer Raum (vgl. 11.2.2). Deshalb ist eine Abbildung

$$A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{M}$$

in den metrischen Raum \mathbb{M} genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist, d. h., aus $\varphi_m \rightarrow \varphi$ für $m \rightarrow \infty$ folgt $A\varphi_m \rightarrow A\varphi$ (z. B. kann man $\mathbb{M} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, \mathbb{R} , \mathbb{C} wählen).

Die Fouriertransformation für Funktionen: Ist $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann existiert das Integral

$$\psi(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} \varphi(y) dy$$

⁴⁸Wir setzen $u(x,t) = 0$ sowie $f(x,t) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, $t < 0$, und $U, F, U_0, U_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ bezeichnen die u, f, u_0, u_1 entsprechenden regulären Distributionen.

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Die Funktion ψ heißt die *Fouriertransformierte* von φ . Es gilt $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die *inverse Fouriertransformation* ist durch die Formel

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} \psi(y) dy$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Definieren wir den Operator \mathbb{F} durch $\mathbb{F}\varphi := \psi$, dann ist

$$\mathbb{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

ein linearer Homöomorphismus, d.h., \mathbb{F} ist bijektiv, und sowohl \mathbb{F} als auch \mathbb{F}^{-1} sind folgenstetig.

Zur Vereinfachung der folgenden Formeln setzen wir $D_j = -i\partial_j$.

Satz: (i) Bei der Fouriertransformation geht die Differentiation in eine Multiplikation über und umgekehrt, d.h., es ist⁴⁹

$$\mathbb{F}(D^\alpha \varphi) = y^\alpha \mathbb{F}(\varphi), \quad D^\alpha (\mathbb{F}\varphi) = \mathbb{F}(x^\alpha \varphi)$$

für alle Multiindizes α und alle Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Die Faltung geht in ein Produkt über und umgekehrt, d.h., es ist

$$\mathbb{F}(\varphi * \chi) = (\mathbb{F}\varphi)(\mathbb{F}\chi), \quad \mathbb{F}(\varphi\chi) = (\mathbb{F}\varphi) * (\mathbb{F}\chi)$$

für alle Funktionen $\varphi, \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Es gilt die sogenannte Parsevalsche Identität

$$(\mathbb{F}\varphi | \mathbb{F}\chi)_0 = (\varphi | \chi)_0$$

für alle $\varphi, \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit dem Skalarprodukt $(\varphi | \chi)_0 := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} \chi(x) dx$.

(iv) Der Operator \mathbb{F} lässt sich eindeutig zu einem unitären Operator

$$\mathbb{F} : L_2^C(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2^C(\mathbb{R}^n)$$

auf den Hilbertraum $L_2^C(\mathbb{R}^n)$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot | \cdot)_0$ fortsetzen.⁵⁰

Temperierte Distributionen: Unter einer temperierten Distribution T verstehen wir ein *lineares stetiges Funktional*

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$$

auf dem Raum der Testfunktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben dafür $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Explizit heißt das folgendes:

(i) Es ist $T(a\varphi + b\chi) = aT(\varphi) + bT(\chi)$ für alle $\varphi, \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a, b \in \mathbb{C}$.

(ii) Aus $\varphi_m \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für $m \rightarrow \infty$ folgt $T(\varphi_m) \rightarrow T(\varphi)$.

► **BEISPIEL 1:** Es sei $q \in \mathbb{R}^n$. Setzen wir

$$\delta(\varphi) := \varphi(0) \quad \text{und} \quad \delta_q(\varphi) := \varphi(q) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

dann sind δ und δ_q temperierte Distributionen.

⁴⁹Das Produkt $y^\alpha \psi$ steht für die Funktion $y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \psi(y)$.

⁵⁰Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ gehört genau dann zu $L_2^C(\mathbb{R}^n)$, wenn Real- und Imaginärteil von u messbar sind und $(u | u)_0 < \infty$ gilt.

► **BEISPIEL 2:** Jeder Funktion $u \in L_2^C(\mathbb{R}^n)$ entspricht durch

$$T(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x) \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

eine temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. In diesem Sinne gilt

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L_2^C(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Die Fouriertransformation für temperierte Distributionen: Es sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir erklären die Fouriertransformierte FT von T durch

$$(\text{FT})(\varphi) := T(\mathbb{F}\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist FT ebenfalls eine temperierte Distribution, d. h. es gilt $\text{FT} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Der Operator \mathbb{F} wird dadurch zu einem linearen Operator

$$\mathbb{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

erweitert.

► **BEISPIEL 3:** Es gilt

$$\mathbb{F}\delta = (2\pi)^{-n/2}, \tag{10.185}$$

d. h., die Fouriertransformierte der Diracschen δ -Distribution ist eine konstante Funktion. Somit entspricht der δ -Distribution im Fourierraum ein klassisches Objekt, während δ selbst *kein* klassisches Objekt ist. Tatsächlich folgt die Relation (10.185) aus

$$(\mathbb{F}\delta)(\varphi) = \delta(\mathbb{F}\varphi) = (\mathbb{F}\varphi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \varphi(x) \, dx$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Die Skala der Räume H_s : Für jede reelle Zahl s definieren wir

$$(u | v)_s := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y)} \psi(y) (1 + |y|^2)^s \, dy.$$

Dabei ist φ (bzw. ψ) die Fouriertransformierte von u (bzw. v). Des Weiteren setzen wir $\|u\|_s := \sqrt{(u | u)_s}$.

Der Raum H_s besteht per Definition aus allen temperierten Distributionen $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u\|_s < \infty$. Es gilt:

- (i) H_s ist bezüglich des Skalarprodukts $(\cdot | \cdot)_s$ ein komplexer Hilbertraum.
- (ii) Die Menge $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in H_s .
- (iii) Für $t > s$ gilt $H_t \subset H_s$, und diese Einbettung ist stetig.
- (iv) Der Raum H_{-s} ist der antidualen Raum zu H_s , d. h., H_s besteht aus allen stetigen Abbildungen $f : H_s \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(au + bv) = \bar{a}f(u) + \bar{b}f(v)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $u, v \in H_s$.
- (v) Für $s > k + n/2$ mit $k = 0, 1, \dots$ sind die Elemente u aus H_s glatte Funktionen, d. h., es ist $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

► **BEISPIEL 4:** (i) $H_0 = L_2^C(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Für $s = 1, 2, \dots$ entspricht H_s dem Sobolevraum $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ der Funktionen $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ aus H_0 , deren distributive Ableitungen $\partial^\alpha u$ bis zur Ordnung s wieder Funktionen sind und zu H_0 gehören (vgl. 11.2.6).

10.4.7 Pseudodifferentialoperatoren

Mit Hilfe der modernen Theorie der Pseudodifferentialoperatoren kann man sowohl Differentialoperatoren als auch Integraloperatoren in einheitlicher Weise behandeln. Viele komplizierte Überlegungen der klassischen Analysis werden im Lichte der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren und der allgemeineren Theorie der Fourierintegraloperatoren sehr einfach und durchsichtig. Der entscheidende Vorzug der Klasse der Pseudodifferentialoperatoren besteht darin, dass sie abgeschlossen ist gegenüber Addition, Multiplikation sowie Übergang zum Adjungierten und diese Operationen sich in sehr eleganter Weise mit Hilfe des Symbols eines Pseudodifferentialoperators ausdrücken lassen.

Die *Schlüsselformel* für die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren lautet

$$(P\varphi)(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle} p(x,y) \psi(y) dy \quad (10.186)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dabei bezeichnet $\psi = \mathbb{F}\varphi$ die Fouriertransformierte von φ . Wir nennen p das Symbol von P .

► **BEISPIEL 1:** Für $p \equiv 1$ ist $P\varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

► **BEISPIEL 2** (Differentialoperatoren): Setzen wir $D_j := -i\partial_j$ und wählen wir eine feste Funktion $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$(aD^\alpha \varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|k\rangle} a(x) y^\alpha \psi(y) dy \quad (10.187)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Deshalb ist das Symbol von aD^α gleich $a(x)y^\alpha$.

Analog entspricht dem linearen Differentialoperator

$$(P\varphi)(x) := \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x)$$

der Ordnung M mit glatten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ das Symbol

$$p(x,y) := \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(x) y^\alpha.$$

Dieses gehört zur Klasse S^M im Sinne der unten angegebenen Definition.

Die Multiplikation zweier Differentialoperatoren spiegelt sich wegen der Produktregel in einfacher Weise in den Symbolen wieder. Der Symbolkalkül wird besonders transparent, wenn man die Differentiation in (10.186) unter dem Integral ausführt.

► **BEISPIEL 3:** Anwendung von $D = -id/dx$ auf

$$(P\varphi)(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} p(x,y) \psi(y) dy$$

ergibt

$$(DP\varphi)(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} (yp(x,y) + D_x p(x,y)) \psi(y) dy.$$

Deshalb ist $yp(x,y) + D_x p(x,y)$ das Symbol von DP .

► **BEISPIEL 4** (Integraloperatoren): Es sei $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten den Integraloperator

$$(P\varphi)(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-z) \varphi(z) dz$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nach der Faltungsregel für die Fouriertransformation gilt

$$(P\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle} k(y) \psi(y) dy.$$

Dabei ist k bzw. ψ die Fouriertransformierte von K bzw. φ . Folglich ist das Symbol $p(y) := k(y)$ des Integraloperators P gleich der Fouriertransformierten k des Kerns K .

Definition von Pseudodifferentialoperatoren: Es sei M eine reelle Zahl. Der durch die Formel (10.186) definierte lineare stetige Operator

$$P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

heißt genau dann ein *Pseudodifferentialoperator der Ordnung M* , wenn das sogenannte *Symbol p* der Klasse S^M angehört, d. h., es gilt:

(i) p ist glatt, d. h. $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

(ii) p wächst zusammen mit seinen Ableitungen für große Werte von $|y|$ nicht zu rasch. Genauer:

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta p(x, y)| \leq \text{const} \cdot (1 + |y|)^{M - |\beta|} \quad (10.188)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ und alle Multiindizes α, β , wobei die Konstante von α und β abhängt.

Gehört das Symbol p allen Klassen S^M an, dann schreiben wir $p \in S^{-\infty}$.

Die Wirkung von Pseudodifferentialoperatoren auf temperierte Distributionen: Analog zur Fouriertransformation erweitern wir P zu einem linearen Operator

$$P : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

indem wir für jede temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ setzen

$$(PT)(\varphi) := T(P\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Glattheitstheorem: (i) Gehört das Symbol p der Klasse S^M an, dann ist der Operator

$$P : H_s \rightarrow H_{s-M}$$

linear und stetig für alle reellen s .

(ii) Gilt $p \in S^{-\infty}$, dann folgt aus $u \in H_s$ für ein festes s stets $Pu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Solche Pseudodifferentialoperatoren bezeichnen wir als glatt.

Asymptotische Formeln: Es sei $p \in S^M$. Wir schreiben genau dann

$$p \sim p_M + p_{M-1} + p_{M-2} + \dots, \quad (10.189)$$

wenn $p_K \in S^K$ sowie $(p - p_M - \dots - p_{M-J+1}) \in S^{M-J}$ für alle $K = M, M-1, \dots$ und alle $J = 1, 2, \dots$ gelten.

Der Symbolkalkül: (i) *Multiplikation*. Sind P und Q zwei Pseudodifferentialoperatoren, dann gilt das auch für das Produkt PQ . Das Symbol s von PQ genügt der Beziehung

$$s \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_y^\alpha p(x, y) D_x^\alpha q(x, y).$$

Die Ordnung von PQ ist gleich der Summe der Ordnungen von P und Q .

(ii) *Adjungierter Operator*. Es sei P ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung M . Dann gibt es genau einen linearen Operator $P^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit

$$(P\varphi | \psi)_0 = (\varphi | P^*\psi)_0 \quad \text{für alle } \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dieser sogenannte formal adjungierte Operator P^* zu P ist ebenfalls ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung M mit dem Symbol

$$p^* \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_x^\alpha D_y^\alpha \overline{p(x, y)}.$$

(iii) *Parametrix*. Gegeben sei ein Pseudodifferentialoperator P der Ordnung $M > 0$ mit dem Symbol p , das der Abschätzung

$$p(x, y) \geq c|y|^M - d$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit positiven Konstanten c und d genügt. Dann gibt es einen Pseudodifferentialoperator Q der Ordnung $-M$ und glatte Pseudodifferentialoperatoren A, B (mit Symbolen in $S^{-\infty}$), so dass

$$QP = I + A, \quad PQ = I + B$$

gilt. Man nennt Q eine Parametrix zu P .

10.4.8 Fourierintegraloperatoren

Die *Schlüsselformel* der Theorie der Fourierintegraloperatoren lautet

$$(Pu)(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x, y)} p(x, y) \psi(y) dy. \quad (10.190)$$

Dabei ist $\psi = \mathbb{F}u$ die Fouriertransformierte von u .

Definition von Fourierintegraloperatoren: Unter einem Fourierintegraloperator verstehen wir einen Ausdruck der Form (10.190), wobei folgendes gilt:

(i) Das Symbol $p \in S^M$ gestattet die asymptotische Entwicklung

$$p \sim p_M + p_{M-1} + \dots.$$

Dabei sollen alle Funktionen p_K homogen vom Grad K bezüglich der Variablen y sein und mit Ausnahme von $y = 0$ beliebig oft stetig differenzierbar sein.

(ii) Die Phasenfunktion $\varphi = \varphi(x, y)$ genügt

$$\varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y)$$

für alle $\lambda > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ferner ist φ mit Ausnahme von $y = 0$ beliebig oft stetig differenzierbar und nicht entartet, d. h., es gilt $\varphi_x(x, y) \neq 0$, falls $y \neq 0$.

Erweiterung des Fourierintegraloperators auf Distributionen mit kompaktem Träger: Im klassischen Sinne stellt P einen Operator

$$P : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

dar, der auf glatte Funktionen wirkt. Für die Untersuchung allgemeiner Prozesse der Physik ist es jedoch wichtig, dass sich P zu einem linearen Operator der Form

$$P : \mathbb{E}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$$

erweitern lässt. Dabei bezeichnet $\mathbb{E}'(\mathbb{R}^n)$ den Raum aller Distributionen aus $\mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger.

Physikalische Interpretation. Der Ausdruck Pu in (10.190) stellt eine *Superposition von Wellen* mit unterschiedlichen Phasen $\varphi(x, y)$ und Amplituden $p(x, y)\psi(y)$ dar, die vom Ort x und dem zusätzlichen Parameter y abhängen. Derartige Integralformeln werden seit langer Zeit von Physikern benutzt, z. B. in der Optik und in der Quantentheorie.

Um das zu erläutern, sei \mathbf{x} ein Ortsvektor im \mathbb{R}^3 . Der Realteil und der Imaginärteil der Funktion

$$Ae^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}e^{-i\omega t} = A \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t) + iA \sin(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)$$

beschreibt dann eine ebene Welle mit der Amplitude A , die sich in Richtung des sogenannten Wellenzahlvektors \mathbf{k} ausbreitet. Aus der Kreisfrequenz ω erhält man die Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$ und die Frequenz $\nu = 1/T$. Die Wellenlänge λ ergibt sich aus der Wellenzahl $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$. Ferner heißt $c_p = \omega/|\mathbf{k}|$ die Phasengeschwindigkeit. Benutzen wir für kleine $|\mathbf{x}|$ die Taylorentwicklung⁵¹

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(0) + \mathbf{k}\mathbf{x} + \dots$$

mit $\mathbf{k} := \varphi_{\mathbf{x}}(0)$, dann erhalten wir näherungsweise

$$Ae^{i\varphi(\mathbf{x})} = Ae^{i\varphi(0)}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \dots .$$

Deshalb bezeichnen wir $\mathbf{k} = \varphi_{\mathbf{x}}(0)$ als den zur Phase φ im Punkt \mathbf{x} gehörigen Wellenzahlvektor.

In der geometrischen Optik geht man von den Maxwellschen Gleichungen

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \mathbf{H}_t, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \mathbf{E}_t, \quad \text{div } (\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \quad \text{div } (\mu \mathbf{H}) = 0 \quad (10.191)$$

für das elektrische Feld \mathbf{E} und das magnetische Feld \mathbf{H} aus. Die ortsabhängigen Funktionen ε und μ beschreiben die Dielektrizität und die magnetische Permeabilität des Materials. Bezeichnet c_M die Lichtgeschwindigkeit in dem Medium, dann erhält man den Brechungsindex n durch

$$n^2 = \frac{c^2}{c_M^2} = c^2 \varepsilon \mu,$$

wobei c der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum entspricht. Um asymptotische Ausdrücke für hohe Kreisfrequenzen ω zu erhalten, geht man von dem Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{i\omega S(\mathbf{x}, \mathbf{y})} (-i\omega)^{-j} \mathbf{E}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{i\omega S(\mathbf{x}, \mathbf{y})} (-i\omega)^{-j} \mathbf{H}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

mit der Phasenfunktion $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aus, wobei S die *Eikonalfunktion* heißt und \mathbf{y} einen Parameter bezeichnet. Setzt man diese Ausdrücke in die Maxwellschen Gleichungen (10.191) ein, dann erhält man durch Koeffizientenvergleich die sogenannte *Eikonalgleichung*

$$\varphi_x^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c}$$

und die sogenannten *Transportgleichungen* für \mathbf{E}_j und \mathbf{H}_j , $j = 0, 1, \dots$.

Die Flächen konstanter Phase

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{const}$$

⁵¹Wir schreiben $\varphi_{\mathbf{x}}$ für $\text{grad } \varphi$.

entsprechen den *Wellenfronten*. Die Lichtstrahlen stehen darauf senkrecht. Der Wellenzahlvektor

$$\mathbf{k} = \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

gibt die Richtung des Lichtstrahls und seine Wellenzahl $|\mathbf{k}|$ an. Schneiden oder berühren sich Wellenfronten im Punkt \mathbf{x} für einen Parameterwert \mathbf{y} , dann gilt

$$\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Solche kritischen Punkte sind Brennpunkte oder Kaustikpunkte. Die Menge sämtlicher Paare (\mathbf{x}, \mathbf{k}) mit

$$\mathbf{k} = \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

bezeichnet man als die kritische Wellenfrontmenge.

Fourierintegraloperatoren erlauben ein präzises Studium der Ausbreitung von Singularitäten bei physikalischen Prozessen. Dazu wird der Begriff der kritischen Wellenfrontmenge der geometrischen Optik auf Distributionen erweitert.

Die kritische Wellenfrontmenge $WF(u)$ einer Distribution u : Es sei $u \in \mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$. Die Schlusselformel lautet:

$$|\mathbb{F}(u\varphi)(y)| \leq \text{const}(N)(1 + |y|)^{-N} \quad (10.192)$$

für alle $y \in \Gamma_k$ und alle ganzen Zahlen N .

(i) *Unkritische Wellenzahlvektoren k* . Der Punkt (x, k) mit $x, k \in \mathbb{R}^n$ und $k \neq 0$ ist genau dann unkritisch, wenn es einen offenen Kegel Γ_k mit der Spitze im Nullpunkt gibt, der die Richtung k enthält, so dass (10.192) für eine geeignete feste Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(x) \neq 0$ gilt.

(ii) *Kritische Wellenzahlvektoren k* . Ein Punkt (x, k) mit $k \neq 0$ gehört genau dann zur Wellenfrontmenge $WF(u)$, wenn er nicht unkritisch ist.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Die Wellenfrontmenge $WF(\delta)$ der δ -Distribution besteht aus allen Punkten (x, k) mit $x = 0$ und $k \neq 0$.

Die Wellenfrontmenge einer glatten Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist leer.

Hauptsatz über die Ausbreitung von Singularitäten: Es sei $u \in \mathbb{E}'(\mathbb{R}^n)$, und P sei ein Fourierintegraloperator. Dann ist die Wellenfrontmenge $WF(Pu)$ des Bildes Pu in der Menge

$$\{(x, k) \in \mathbb{R}^{2n} : k = \varphi_x(x, y) \quad \text{und} \quad (\varphi_y(x, y), y) \in WF(u)\}$$

enthalten.

► **STANDARDBEISPIEL 2:** Aus (10.185) und (10.190) ergibt sich

$$(P\delta)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(x,y)} p(x, y) dy. \quad (10.193)$$

Ist p glatt und verschwindet $p(x, \cdot)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer kompakten y -Menge, dann ist $P\delta$ eine klassische Funktion. Im Fall allgemeinerer Symbole p stellt (10.193) nur eine formale Schreibweise für eine wohldefinierte temperierte Distribution $P\delta$ dar.⁵² Die kritische Wellenfrontmenge $WF(P\delta)$ besteht aus den Punkten $(x, k) \in \mathbb{R}^{2n}$ mit

$$k = \varphi_x(x, y) \quad \text{und} \quad \varphi_y(x, y) = 0 \quad \text{für ein } y \in \mathbb{R}^n.$$

⁵²Beispielsweise ergibt sich für $p \equiv 1$ und $\varphi(x, y) := \langle x | y \rangle$ die präzise Formel $P\delta = \delta$, der die formale Schreibweise

$$\delta(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x | y \rangle} dy$$

entspricht, die in der physikalischen Literatur häufig verwendet wird.

Das ist die klassische kritische Wellenfrontmenge der geometrischen Optik.

Pseudodifferentialoperatoren als ein Spezialfall: Pseudodifferentialoperatoren P sind spezielle Fourierintegraloperatoren mit der Phasenfunktion

$$\varphi(x, y) := \langle x | y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Insbesondere ist $WF(P\delta) = WF(\delta)$. Allgemein gilt

$$WF(Pu) \subseteq WF(u) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{E}'(\mathbb{R}^n),$$

d.h., Pseudodifferentialoperatoren verhalten sich regulärer als allgemeine Fourierintegraloperatoren, denn sie vergrößern nicht die kritische Wellenfrontmenge.

Anwendung auf das Anfangswertproblem für die Wellengleichung: Wir betrachten im dreidimensionalen Raum die Wellengleichung. Gegeben sind die Funktionen $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Gesucht wird die Funktion $u = u(x, t)$ mit

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u_t(x, 0) &= u_1(x). \end{aligned} \tag{10.194}$$

Bezeichnet v die Fouriertransformierte von u , d.h. ist

$$v(k, t) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ikx} u(x, t) dx,$$

dann erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v_{tt} = -|\mathbf{k}|^2 v$$

mit den Anfangsbedingungen $v = v_0$ und $v_t = v_1$. Daraus ergibt sich für die eindeutige klassische Lösung von (10.194) die Darstellungsformel

$$u(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{s=0}^1 e^{ixk + (-1)^s it|\mathbf{k}|} \frac{1}{2} \left(v_0(k) + (-1)^s \frac{v_1(k)}{i|\mathbf{k}|} \right) dk.$$

Das sind Fourierintegraloperatoren.

Mikrolokale Analysis: Da die Eigenschaften von Fourierintegraloperatoren wesentlich von der Phasenfunktion $\varphi(x, y)$ und der Amplitudenfunktion $p(x, y)$ bestimmt werden und diese nicht nur vom Ort x , sondern auch von dem zusätzlichen Freiheitsgrad y abhängen, bezeichnet man dieses Gebiet der Mathematik als mikrolokale Analysis. Definiert man Fourierintegraloperatoren auf Mannigfaltigkeiten, dann ist (x, y) ein Punkt des Kotangentialbündels. Eine ausführliche Darstellung findet man in [Egorov, Shubin (1991)] und in [Hörmander (1983)].

10.5 Moderne Maß- und Integrationstheorie

Die Maßtheorie ordnet Teilmengen A, B, \dots einer gegebenen Menge M nichtnegative Zahlen $\mu(A), \mu(B), \dots$ zu. Anschaulich kann man $\mu(A)$ als Masse (Ladung, Volumen) von A interpretieren. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung entspricht $\mu(A)$ der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A . Der zugehörige Integralbegriff

$$\int_M f(x) d\mu(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n(x) d\mu(x) \tag{10.195}$$

ergibt sich durch einen natürlichen Approximationsprozess (vgl. 10.5.2). Dabei wird das klassische Riemannsche Integral zum modernen Lebesgueschen Integral erweitert, mit dem es sich bequemer rechnen lässt als mit dem klassischen Integral. Insbesondere gelten für das Lebesguesche Integral wichtige Aussagen über die *Vertauschung von Grenzprozessen mit der Integration*. Diese Aussagen sind dafür verantwortlich, dass das Lebesguesche Integral die Grundlage für die moderne funktionalanalytische Theorie der Differential- und Integralgleichungen bildet (vgl. 11.3). Die Grundidee besteht darin, Mengen integrierbarer Funktionen zu benutzen, die wegen der Grenzwerteigenschaften des Lebesgueintegrals *vollständige* metrische Räume sind (z. B. Hilberträume oder Banachräume), d. h., man hat das fundamentale Cauchysche Konvergenzkriterium in diesen Funktionenräumen (Lebesgueräume, Sobolevräume) zur Verfügung, was für das klassische Integral nicht gilt. Beispielsweise ist eine streng mathematische Behandlung quantenmechanischer Probleme ohne Hilberträume nicht denkbar. Dazu benötigt man den Hilbertraum der komplexen Funktionen $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx < \infty$ im Sinne des Lebesgueschen Integrals.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt (10.195) den Erwartungswert von f dar, falls $\mu(M) = \int_M d\mu = 1$ gilt.

Die beiden wichtigsten Begriffe dieses Abschnitts⁵³ sind „Maß“ und „Integral“.

10.5.1 Maß

σ -Algebra: Gegeben sei eine Menge M . Ein nichtleeres System \mathcal{S} von Teilmengen von M heißt genau dann eine σ -Algebra, wenn folgendes gilt:

- (i) $M \in \mathcal{S}$ und $\emptyset \in \mathcal{S}$.
- (ii) Aus $A, B \in \mathcal{S}$ folgen $A \cup B \in \mathcal{S}$, $A \cap B \in \mathcal{S}$ und $A \setminus B \in \mathcal{S}$.
- (iii) Aus $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ folgen $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$ und $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$.

Sind nur (i) und (ii) erfüllt, dann heißt \mathcal{S} eine Mengenalgebra.

Definition des Maßes: Unter einem Maß, μ auf einer σ -Algebra \mathcal{S} verstehen wir eine Abbildung $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$, die jeder Menge A aus \mathcal{S} eine Zahl $\mu(A)$ zuordnet, so dass $\mu(\emptyset) = 0$ und folgendes gilt:

- (a) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, falls A und B disjunkt sind, d. h. $A \cap B = \emptyset$.
- (b) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, falls die Mengen A_1, A_2, \dots paarweise disjunkt sind.

Genau die Mengen in \mathcal{S} heißen *messbar*. Ferner bezeichnet man (μ, M, \mathcal{S}) als Maßraum.

Das Maß μ nennt man genau dann *vollständig*, wenn jede Teilmenge einer Menge vom Maß null auch zu \mathcal{S} gehört und (dann automatisch) das Maß null besitzt.

Das Maß μ heißt genau dann *endlich* (bzw. σ -endlich), wenn $\mu(M) < \infty$ gilt (bzw. eine Zerlegung $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ existiert mit $\mu(M_k) < \infty$ für alle k).

Ist \mathcal{S} nur eine Mengenalgebra, dann sprechen wir bei Erfülltsein von (a) und (b) von einem Prämaß. (Die Beziehung (b) gilt dann in natürlicher Weise nur, falls $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ zu \mathcal{S} gehört.)

⁵³Abschnitt 10.5 stellt eine völlig neubearbeitete Fassung des früher von Prof. Dr. D. Göhde verfassten Abschnitts 8.2. [Ergänzende Kapitel zu Bronstein/Semendjajew, 6. Auflage, Teubner, Leipzig, 1990] dar.

Standardbeispiele für Maße:

► **BEISPIEL 1** (das Lebesguemaß): Auf dem \mathbb{R}^n existiert genau ein translationsinvariantes vollständiges Maß, für welches der abgeschlossene Einheitswürfel das Maß eins besitzt. Dieses sogenannte Lebesguemaß verallgemeinert in natürlicher Weise den klassischen elementargeometrischen Inhalt (vgl. Beispiel 3).

Das Lebesguemaß ist σ -endlich. Es gibt pathologische Mengen des \mathbb{R}^n , denen kein Lebesguemaß zugeordnet werden kann.

► **BEISPIEL 2** (das Diracsche Punktmaß): Es sei p ein Punkt einer beliebigen Menge M , und S sei das System aller Teilmengen von M . Für alle $A \in S$ setzen wir

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } p \in A, \\ 0, & \text{falls } p \notin A. \end{cases}$$

Dann entsteht ein Maß auf M . Anschaulich besitzt der Punkt p die Masse eins, und alle anderen Punkte von M haben keine Masse.

Fast überall gültige Eigenschaften: Eine Eigenschaft gilt definitionsgemäß „fast überall auf M “, wenn sie für alle Punkte von M mit Ausnahme einer Menge vom Maß null erfüllt ist. Beispielsweise hat eine höchstens abzählbare Teilmenge von \mathbb{R} (z. B. die Menge aller rationalen Zahlen) das (Lebesguesche) Maß null. In diesem Sinne sind fast alle reellen Zahlen irrational.

Der Hauptsatz der Maßtheorie über die Konstruktion eines Maßes (Satz von Hahn): Jedes σ -endliche Prämaß μ_0 lässt sich zu einem eindeutig bestimmten⁵⁴ vollständigen Maß μ erweitern. Dabei ist μ ebenfalls σ -endlich.

Beweisidee: Das Maß μ wird in natürlicher Weise folgendermaßen konstruiert. Zu dem Prämaß μ_0 gehört die Mengenalgebra S_0 . Bezeichne $\sigma(S_0)$ die kleinste σ -Algebra, die S_0 enthält. Zu jeder Menge $A \in \sigma(S_0)$ wählen wir eine beliebige, höchstens abzählbare Überdeckung

$$A \subseteq \bigcup_k A_k, \quad A_k \in S_0 \quad \text{für alle } k$$

und setzen $\mu(A)$ in natürlicher Weise gleich dem Infimum aller möglichen Werte $\sum_k \mu_0(A_k)$. Dann ist μ ein Maß auf $\sigma(S_0)$.

Um ein vollständiges Maß zu erhalten, fügen wir noch alle Teilmengen von Mengen vom Maß null hinzu und ordnen ihnen das Maß null zu (Vervollständigung des Maßes).

Standardbeispiele zur Konstruktion von Maßen:

► **BEISPIEL 3** (das Lebesguemaß): Wir gehen aus von den halboffenen (endlichen oder unendlichen) Intervallen

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x < b_i, \quad i = 1, \dots, n\}$$

und ordnen jedem derartigen Intervall seinen elementargeometrischen Inhalt als Maß zu. Wir wählen S_0 gleich dem System aller endlichen Vereinigungen von paarweise disjunkten halboffenen Intervallen und bezeichnen mit $\sigma(S_0)$ die kleinste σ -Algebra, die S_0 enthält.

Dann wird der elementargeometrische Inhalt auf S_0 zu einem σ -endlichen Prämaß μ_0 , und der obige Satz von Hahn ergibt das eindeutig bestimmte Lebesguemaß μ auf \mathbb{R}^n .

Mengen vom Maß null: Eine Menge A des \mathbb{R}^n besitzt genau dann das Lebesguemaß null, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung durch höchstens abzählbar viele halboffene Intervalle gibt, deren Gesamtinhalt kleiner als ε ist.

⁵⁴Genauer ist jedes vollständige Erweiterungsmaß ν von μ_0 auch eine Erweiterung von μ .

Jede höchstens abzählbare Menge des \mathbb{R}^n besitzt das Maß null (z. B. die Menge der rationalen Zahlen in \mathbb{R}).

Ferner besitzt jede „vernünftige“ Kurve oder Fläche des \mathbb{R}^n mit einer Dimension $< n$ das Maß null.

Borelmengen: Definitionsgemäß ist die Borelalgebra des \mathbb{R}^n die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n enthält. Man kann zeigen, dass die Borelalgebra des \mathbb{R}^n gleich $\sigma(\mathcal{S}_0)$ ist. Die zu $\sigma(\mathcal{S}_0)$ gehörigen Mengen heißen die Borelmengen des \mathbb{R}^n .

Alle Borelmengen des \mathbb{R}^n sind messbar bezüglich des Lebesguemaßes. Beispielsweise sind alle offenen und abgeschlossenen Mengen des \mathbb{R}^n auch Borelmengen. Ferner ist jede Menge des \mathbb{R}^n eine Borelmenge, die man als Vereinigung oder Durchschnitt von höchstens abzählbar vielen Borelmengen (z. B. offenen oder abgeschlossenen Mengen) darstellen kann.

► **BEISPIEL 4** (das Lebesgue–Stieltjes-Maß): Gegeben sei eine monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Jedem halboffenen Intervall $J = [a, b)$ ordnen wir die Maßzahl

$$\mu_0(J) := g(b) - g(a - 0)$$

zu mit $g(a - 0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(a - \varepsilon)$.

Dann entsteht parallel zu Beispiel 3 ein vollständiges Maß auf \mathbb{R} , das man das durch g erzeugte Lebesgue–Stieltjes-Maß nennt. Alle Borelmengen in \mathbb{R} sind messbar bezüglich dieses Lebesgue–Stieltjes-Maßes. Im Spezialfall $g(x) := x$ ergibt sich das Lebesguemaß.

10.5.2 Integral

Einfache Funktionen: Es sei μ ein σ -endliches Maß auf der Menge M , und A sei eine messbare Teilmenge von M . Unter einer einfachen Funktion⁵⁵ $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (reelle Zahlen) oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) verstehen wir eine stückweise konstante Funktion

$$f(x) := \begin{cases} c_j & \text{für alle } x \in A_j, \quad j = 1, \dots, m, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $\mu(A_j) < \infty$ für alle j und beliebiges m . Die Mengen A_1, \dots, A_m sind dabei paarweise disjunkt. Das zugehörige Integral wird in natürlicher Weise durch

$$\int_A f \, d\mu := \sum_{j=1}^m c_j \mu(A_j)$$

definiert.

Allgemeine Integraldefinition: Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ heißt genau dann *integrierbar*, wenn folgendes gilt:

(i) f ist messbar, d. h., es gibt eine Folge einfacher Funktionen $f_n : A \rightarrow \mathbb{K}$, die fast überall auf A gegen f konvergiert.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0(\varepsilon)$, so dass

$$\int_A |f_n(x) - f_m(x)| \, d\mu < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0(\varepsilon)$$

⁵⁵In analoger Weise kann man die Integrationstheorie aufbauen, wenn man \mathbb{K} durch einen Banachraum ersetzt. Diese Allgemeinheit wird in der modernen Theorie der partiellen Differentialgleichungen und in der Theorie stochastischer Prozesse benötigt. Dann hat man den Betrag $|\cdot|$ überall durch die Norm $\|\cdot\|$ zu ersetzen.

gilt. Wir definieren dann das Integral durch

$$\int_A f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass dieser Grenzwert endlich und *unabhängig* von der Wahl der Folge (f_n) der einfachen Funktionen f_n ist. Speziell gilt

$$\int_A d\mu = \mu(A).$$

Das Integral $\int_A f \, d\mu$ bleibt unverändert, wenn man f auf einer Menge vom Maß null abändert.

Standardbeispiel für das Integral:

► **BEISPIEL 1** (Lebesgueintegral): Sei $M := \mathbb{R}^n$. Wählen wir das Lebesguemaß, dann entsteht das Lebesgueintegral

$$\int_A f \, d\mu \equiv \int_A f(x) \, dx,$$

welches das klassische Riemannsche Integral *umfasst* und *verallgemeinert*.

Wählen wir beispielsweise die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ irrational ist,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ rational ist,} \end{cases}$$

dann gilt $f(x) = 1$ für fast alle x . Deshalb ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b 1 \, dx = b - a,$$

falls das Intervall $[a, b]$ endlich ist. Das Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ existiert jedoch *nicht* im klassischen Sinne.

Äquivalente Charakterisierung messbarer Funktionen: Es sei (μ, M, \mathcal{S}) ein Maßraum mit einem σ -endlichen vollständigen Maß μ . Für die Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ auf der messbaren Teilmenge A von M sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (i) f ist messbar.
- (ii) Die Urbilder offener Mengen in \mathbb{K} sind messbare Mengen.
- (iii) Die Urbilder von Borelmengen⁵⁶ in \mathbb{K} sind messbare Mengen.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzt man (iii) zur Definition messbarer Funktionen.

Rechenregeln für messbare Funktionen: Grob gesprochen kann man sagen, dass nur pathologische Funktionen nicht messbar sind. Mit messbaren Funktionen kann man deshalb bequem rechnen. Es gilt:

- (i) Linearkombinationen und Produkte von messbaren Funktionen sind wieder messbar.
- (ii) Ändert man eine messbare Funktion auf einer Menge vom Maß null, dann ist auch die geänderte Funktion messbar.

⁵⁶Die Borelalgebra \mathbb{B} von $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist die kleinste σ -Algebra von \mathbb{K} , die alle offenen Teilmengen von \mathbb{K} enthält. Genau die zu \mathbb{B} gehörigen Mengen bezeichnet man als Borelmengen von \mathbb{K} .

(iii) Die Grenzwerte messbarer Funktionen sind wiederum messbar.

Speziell für einen topologischen Raum M ist jede fast überall stetige Funktion auch messbar.

► **BEISPIEL 2** (Lebesguemaß auf dem \mathbb{R}^n):

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ ist messbar, falls sie fast überall stetig ist.

(b) Die Teilmenge A von \mathbb{R}^n ist messbar, falls die Menge der Randpunkte von A das Maß null besitzt.

(c) Die Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ ist messbar, falls die Menge A messbar ist und die erweiterte Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ fast überall stetig ist, wobei wir $f(x) := 0$ für $x \notin A$ setzen.

10.5.3 Eigenschaften des Integrals

Additivität: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu.$$

Die Existenz des links stehenden Integrals folgt aus der Existenz der rechts stehenden Integrale.

Majorantenkriterium: Aus $|f(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in A$ folgt

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f(x)| d\mu \leq \int_A g(x) d\mu,$$

falls $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ messbar und $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ integrierbar ist. Die übrigen Integrale existieren dann ebenfalls.

Speziell existiert $\int_A f d\mu$ genau dann, wenn $\int_A |f| d\mu$ existiert.

σ -Additivität: Es sei $A = \bigcup_k A_k$, d.h., A ist die Vereinigung einer höchstens abzählbaren Familie von paarweisen disjunkten messbaren Mengen A_k . Dann gilt

$$\int_A f d\mu = \sum_k \int_{A_k} f d\mu,$$

falls die linke Seite existiert. In dem Fall existiert auch die rechte Seite.

Konvergenz bezüglich der Integrationsgebiete: Ist $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ integrierbar, dann gilt

$$\int_A f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f d\mu,$$

falls $A = \bigcup_k A_k$ ist mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ und alle Mengen A_k messbar sind.

Die Höldersche Ungleichung: Es sei $1 < p, q < \infty$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dann gilt

$$\left| \int_A fg d\mu \right| \leq \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

falls $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$ messbar sind und die rechts stehenden Integrale existieren. Dann existiert auch das linke Integral.

Absolute Stetigkeit: Ist die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ integrierbar, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass aus $\mu(A) < \delta(\varepsilon)$ stets folgt:

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Der Satz von Radon–Nikodym über Dichtefunktionen von Maßen: Es seien μ und ν Maße auf M bezüglich der σ -Algebra S , wobei aus $\mu(A) = 0$ stets $\nu(A) = 0$ folgt. Ferner sei μ σ -endlich, und ν sei endlich auf M .

Dann gibt es eine integrierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \text{für alle } A \in S$$

gilt. Man bezeichnet f als die Dichtefunktion des Maßes ν . Die Funktion f ist durch das Maß ν eindeutig bestimmt (bis auf Änderungen auf einer Menge vom μ -Maß null). Man schreibt auch $d\nu/d\mu = f$.

10.5.4 Grenzwertsätze

Das Majorantenkriterium von Lebesgue: Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, d\mu, \tag{10.196}$$

falls gilt:

- (i) Die Funktionen $f_n : A \rightarrow \mathbb{K}$ sind messbar und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert für fast alle $x \in A$.
- (ii) Es gilt $|f_n(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in A$ und alle n , wobei g auf A integrierbar ist. Dann existieren alle Ausdrücke in (10.196).

Das Monotoniekriterium von B. Levi: Es gilt (10.196), falls $\sup_n \left| \int_A f_n \, d\mu \right| < \infty$ ist und die Funktionen $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende (oder monoton fallende) Folge bilden.

Insbesondere existieren dann alle Grenzwerte und Integrale in (10.196) (genauer ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für fast alle $x \in A$ endlich).

Korollar für Reihen: Es gilt

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A g_n \, d\mu,$$

falls alle Funktionen $g_n : A \rightarrow [0, \infty)$ integrierbar sind und die rechts stehende Reihe konvergiert. Dann existiert auch der linke Ausdruck, wobei $\sum_n g_n(x)$ für fast alle $x \in A$ konvergiert.

Das Lemma von Fatou: Es ist

$$\int_A \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) \, d\mu,$$

falls alle Funktionen $f_n : A \rightarrow [0, \infty)$ integrierbar sind und der rechts stehende Ausdruck endlich ist. Dann existiert auch die linke Seite (genauer ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für fast alle $x \in A$ endlich).

10.5.5 Eigenschaften des Lebesgueintegrals auf dem \mathbb{R}^n

Der Satz von Fubini über iterierte Integration: Es gilt

$$\int_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) \, dx \right) \, dy,$$

falls die Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ auf der messbaren Teilmenge A des \mathbb{R}^{k+m} integrierbar ist⁵⁷ und durch null auf \mathbb{R}^{k+m} fortgesetzt wird.

Dann existieren auch die rechts stehenden Integrale (genauer existieren die inneren Integrale für fast alle $x \in \mathbb{R}^k$ bzw. für fast alle $y \in \mathbb{R}^m$).

Die Substitutionsregel: Es ist

$$\int_A f(x) \, dx = \int_{\psi(A)} f(\varphi(y)) |\det \varphi'(y)| \, dy,$$

falls $\psi : A \rightarrow \psi(A)$ ein C^1 -Diffeomorphismus von der offenen Menge A auf die offene Menge $\psi(A)$ ist. Wir setzen $\varphi := \psi^{-1}$ und nehmen an, dass das links stehende Integral existiert ($\det \varphi'(x)$ bezeichnet die Funktionaldeterminante).

Partielle Integration und der allgemeine Satz von Stokes: Diese grundlegenden Formeln, die den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung auf höhere Dimensionen verallgemeinern, findet man in (10.6) und 10.2.7.5.

Integration auf Mannigfaltigkeiten: Der klassische Begriff des Kurvenintegrals und des Oberflächenintegrals im \mathbb{R}^n stellt einen Spezialfall des Integrals für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten dar. Das findet man für allgemeine Mannigfaltigkeiten in 15.4.3 und für Riemannsche Mannigfaltigkeiten in 16.1.7.

Stetigkeit von Parameterintegralen: Wir betrachten das Integral

$$F(p) := \int_A f(x, p) \, dx.$$

Gegeben sei die Funktion $f : A \times P \rightarrow \mathbb{R}$, wobei A eine messbare Menge des \mathbb{R}^n ist. Die Parametermenge P sei eine offene Menge des \mathbb{R}^1 . Dann ist die Funktion $F : P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Die Funktion $x \mapsto f(x, p)$ ist auf A messbar für alle $p \in P$.
- (ii) Es gibt eine integrierbare Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $|f(x, p)| \leq g(x)$ für alle $p \in P$ und fast alle $x \in A$ gilt.
- (iii) Die Funktion $p \mapsto f(x, p)$ ist auf P stetig für fast alle $x \in A$.

Differenzierbarkeit eines Parameterintegrals: Die Funktion $F : P \rightarrow \mathbb{R}$ ist auf P differenzierbar mit

$$F'(p) = \int_A f_p(x, p) \, dx,$$

falls zusätzlich die partielle Ableitung $f_p(x, p)$ für alle $p \in P$ und fast alle $x \in A$ existiert und es eine integrierbare Funktion $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f_p(x, p)| \leq h(x)$ für alle $p \in P$ und fast alle $x \in A$ gilt.

⁵⁷Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, falls der Rand der beschränkten Menge A das Maß null hat und die beschränkte Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ fast überall stetig ist.

► **STANDARDBEISPIEL** (Fouriertransformation): Die Funktion

$$F(p) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x) dx$$

besitzt auf \mathbb{R} Ableitungen bis zur n -ten Ordnung, falls gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |x^k| |f(x)| dx < \infty$ für $k = 0, \dots, n$.

Dabei ist

$$F^{(k)}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k e^{-ipx} f(x) dx \quad \text{für alle } p \in P, \quad k = 1, \dots, n.$$

Als integrierbare Majorante kann man $x^k f(x)$ wählen, denn es gilt

$$|(-ix)^k e^{-ipx} f(x)| \leq |x^k| |f(x)| \quad \text{für alle } x, p \in \mathbb{R}.$$

10.5.6 Das eindimensionale Lebesgue–Stieltjes-Integral

Der folgende Spezialfall des allgemeinen Integralbegriffs spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie (Erwartungswerte und Momente) sowie in der Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren (vgl. 11.6.2) eine wichtige Rolle.

Es sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Das Integral

$$\int_A f dg \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f d\mu \tag{10.197}$$

entspricht dem durch g erzeugten Lebesgue–Stieltjes-Maß (Beispiel 4 aus 10.5.1), wobei wir wie üblich $f(x) = 0$ für $x \notin A$ setzen. Im Spezialfall $g(x) \equiv x$ ergibt sich das Lebesgueintegral.

Berechnung des Integrals: Im Unterschied zum Lebesgueintegral kann (10.197) für offene, halboffene oder abgeschlossene Intervalle A unterschiedliche Werte ergeben. Für $-\infty < a < b < \infty$ gilt beispielsweise wegen der Additivität des Integrals bezüglich der Gebiete die Relation

$$\int_{[a,b]} f dg = \int_{(a,b)} f dg + \int_{[a]} f dg = \int_{(a,b)} f dg + f(a)(g(a+0) - g(a-0))$$

mit $g(a \pm 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} g(a \pm \epsilon)$.

Im allgemeinen Fall hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dg = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g'(x) dx + \sum_k f(x_k) (g(x_k + 0) - g(x_k - 0)). \tag{10.198}$$

Dabei bezeichnen x_1, x_2, \dots die höchstens abzählbar vielen Sprungstellen von g , und g' ist die fast überall existierende Ableitung von g . Genauer gilt (10.198), falls $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem beschränkten Intervall fast überall stetig und beschränkt ist sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f dg$ existiert.

Funktionen von beschränkter Variation: Es sei $g(x) := g_1(x) - g_2(x)$ die Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann definieren wir in natürlicher Weise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dg := \int_{-\infty}^{\infty} f dg_1 - \int_{-\infty}^{\infty} f dg_2.$$

Ferner ist $\int_A f \, dg := \int_{-\infty}^{\infty} f \, dg$, falls wir $f(x) := 0$ für $x \notin A$ setzen.

Die Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ heißt genau dann von *beschränkter Variation*, wenn es eine Konstante C gibt, so dass

$$\sum_{j=0}^{n-1} |g(x_{j+1}) - g(x_j)| \leq C$$

für jede Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gilt. Die kleinste derartige Konstante C bezeichnet man als die Totalvariation $V_a^b(g)$ von g auf $[a, b]$. Eine Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie sich als Differenz $g = g_1 - g_2$ von zwei auf $[a, b]$ monoton wachsenden Funktionen darstellen lässt. Für eine beschränkte, fast überall stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$\left| \int_{[a,b]} f \, dg \right| \leq V_a^b(g) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

10.5.7 Maße auf topologischen Räumen

Borelmaße und Bairemaße: Es sei X ein topologischer Raum (z. B. eine Teilmenge des \mathbb{R}^n). Unter der Borelschen Algebra $\mathcal{B}(X)$ (bzw. der Baireschen Algebra $\mathcal{B}_0(X)$) verstehen wir die kleinste σ -Algebra von X , die alle offenen Mengen von X enthält (bzw. alle Urbilder offener Mengen bezüglich aller möglichen stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$). Es gilt $\mathcal{B}_0(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Unter einem Borelmaß μ (bzw. einem Bairemaß) auf X verstehen wir ein Maß auf $\mathcal{B}(X)$ (bzw. auf $\mathcal{B}_0(X)$) mit $\mu(X) < \infty$.

Ist X ein metrischer Raum, dann gilt $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_0(X)$, d. h., Borelsche Maße und Bairesche Maße stimmen überein.

Eine Funktion $F : X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen (z. B. $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{C}$) heißt genau dann eine *Borelfunktion*, wenn die Urbilder von offenen Mengen Borelmengen sind.

Der Satz von Riesz-Markov über die Dualität zwischen stetigen Funktionen und Maßen: Es sei X ein nichtleerer kompakter topologischer Raum (z. B. eine nichtleere kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n). Mit $C(X, \mathbb{K})$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann wird $C(X, \mathbb{K})$ bezüglich der Norm

$$\|f\| := \max_{x \in X} |f(x)|$$

ein Banachraum über \mathbb{K} . Genau alle linearen stetigen Funktionale F auf $C(X, \mathbb{K})$ erhält man durch

$$F(f) = \int_X f(x) \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C(X, \mathbb{K}),$$

wobei

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4) & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \end{cases}$$

gilt und μ_j Bairesche Maße auf X sind.

Ergodentheorie und Maßtheorie: Vgl. 13.11.

Literatur zu Kapitel 10

10.1 Grundideen der modernen Analysis und ihr Verhältnis zu den Naturwissenschaften

- [Aleksandrov 1983] Aleksandrov, P. (Hrsg.): Die Hilbertschen Probleme. Übers. a.d. Russ. 3. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig (1983)
- [Burg et al. 2002–09] Burg, K., Haf, H., Wille, F.: Höhere Mathematik für Ingenieure. 4. Auflage. Bd. 1–5. Teubner+Vieweg, Wiesbaden (2002–09)
- [Choquet-Bruhat et al. 1991] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M.: Analysis, Manifolds, and Physics, Vols. 1, 2. North-Holland, Amsterdam (1991)
- [Courant und Hilbert 1993] Courant, R., Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik. 4. Auflage. Springer, Berlin (1993)
- [Dautray und Lions] Dautray, R., Lions, J.: Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vols. 1–6. Transl. from the French. Springer, New York (2000)
- [Dubrovin et al. 1985–92] Dubrovin, B., Fomenko, A., Novikov, S.: Modern Geometry, Vols. 1–3. Transl. from the Russian. Springer, New York (1985–92)
- [Naber et al. 2006] Encyclopedia of Mathematical Physics, Vols. 1–5. Edited by Françoise, J., Naber, G. and Tsun, T.: Elsevier, Amsterdam (2006)
- [Engquist und Schmid 2001] Engquist, B., Schmid, W. (Hrsg.): Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond. Springer, New York (2001) (80 Artikel über die moderne Mathematik und ihre Anwendungen, die von führenden Experten verfasst wurden)
- [Feynman et al. 2001] Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.: Vorlesungen über Physik. Bd. 1–4. Zweisprachige Ausgabe in deutsch und englisch. Addison-Wesley, Reading, MA und Oldenbourg Verlag, München (2001)
- [Friedman 1998] Friedman, A.: Mathematics in Industrial Problems, Vols. 1–6. Springer, New York (1998)
- [Gerthsen 2004] Gerthsen Physik, 22. Auflage. Herausgegeben von D. Meschede. Springer, Berlin (2004)
- [Greiner 1991] Greiner, W. u.a.: Theoretische Physik, Vols. 1–13: Ein Lehr-und Übungsbuch. Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991). English edition: Springer, New York (1994ff)
- [Jug 1993] Jug, K.: Mathematik in der Chemie. 2. Auflage, Springer, Berlin (1993)
- [Landau und Lifschitz 1976] Landau, L., Lifschitz, E.: Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. 1: Mechanik, Bd. 2: Klassische Feldtheorie, Bd. 3: Quantenmechanik (nichtrelativistische Theorie), Bd. 4: Relativistische Quantentheorie, Bd. 5: Statistische Physik, Teil 1, Bd. 6: Hydrodynamik, Bd. 7: Elastizitätstheorie, Bd. 8: Elektrodynamik der Kontinua, Bd. 9: Statistische Physik, Teil 2, Bd. 10: Kinetik. Übers. aus dem Russischen. Akademie-Verlag, Berlin (1976ff)
- [Leis 1986] Leis, R.: Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics. Teubner, Stuttgart (1986)
- [Maurin 1997] Maurin, K.: Riemann's Legacy: Riemann's Ideas in Mathematics and Physics of the 20th Century. Kluwer, Dordrecht (1997)
- [Morse und Feshbach 1953] Morse, P., Feshbach, H.: Methods of Theoretical Physics, Vols. 1, 2. McGraw-Hill, New York (1953)
- [Odifreddi 2004] Odifreddi, P.: The Mathematical Century: The 30 Greatest Problems of the Last 100 Years. Princeton University Press, Princeton, NJ (2004)
- [Penrose 2007] Penrose, R.: The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe. Vintage, London (2007)
- [Rebhahn 2005] Rebhahn, E.: Theoretische Physik, Vols. 1, 2. Elsevier München (2005)
- [Reed und Simon 19981] Reed, M., Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics, Vols. 1–4. Academic Press, New York (1981)
- [Scheck 2006–09] Scheck, F.: Theoretische Physik, Bd. 1–5. Springer, Berlin (2006–09)
- [Storch und Wiebe 2006–2009] Storch, U., Wiebe, H.: Lehrbuch der Mathematik, Bd. 1–4. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2006–2009)
- [Thirring 1997] Thirring, W.: Classical Mathematical Physics, 3rd edition, Springer, New York (1997)
- [Thirring 1999] Thirring, W.: Quantum Mathematical Physics, 2nd edition, Springer, New York (1999)
- [Triebel 1989] Triebel, H.: Analysis und mathematische Physik, 3. Auflage. Teubner, Leipzig (1989)
- [Wußing 2008] Wußing, H.: 6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgechichtliche Zeitreise. Bd. 1, 2, Springer, Heidelberg (2008)

[Zeidler 1986] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Vol. I: Fixed-Point Theory, 3rd edition 1998; Vol. II A: Linear Monotone Operators, 2nd edition 1997; Vol. II B: Nonlinear Monotone Operators; Vol. III: Variational Methods and Optimization; Vol. IV: Applications to Mathematical Physics, 2nd edition 1995, Springer, New York (1986ff)

[Zeidler 1995] Zeidler, E.: Introduction to Applied Functional Analysis. Vol. 1: Applications to Mathematical Physics. Vol. 2: Main Principles and their Applications. Springer, New York (1995)

[Zeidler 2008] Zeidler, E.: Gedanken zur Zukunft der Mathematik. In: [Wußing 2008], Vol. 2, pp. 553–586.

[Zeidler 2006–2011] Zeidler, E.: Quantum Field Theory: A Bridge between Mathematicians and Physicists, Vol. 1: Basics in Mathematics and Physics, Vol. 2: Quantum Electrodynamics. Vol. 3: Gauge Theory, Springer, Berlin (2006–11)

10.2 Tensoranalysis, Differentialformen und mehrfache Integrale

Man vergleiche auch die Literatur zu Kapitel 15 (Mannigfaltigkeiten).

[Abraham et al. 1988] Abraham, R., Marsden, J., Ratiu, T.: Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. Springer, New York (1988)

[Agricola und Friedrich 2004] Agricola, I., Friedrich, T.: Vektoranalysis: Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik. 2. Auflage, Teubner+Vieweg, Wiesbaden (2004)

[Choquet-Bruhat et al. 1991] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M.: Analysis, Manifolds, and Physics, Vols. 1, 2. North-Holland, Amsterdam (1991)

[Duschek und Hochrainer 1977] Duschek, A., Hochrainer, A.: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, Bd. 1–3. Springer, Wien (1977)

[Jänich 1993] Jänich, K.: Vektoranalysis. 2. Auflage. Springer, Berlin (1993)

[Lippmann 1993] Lippmann, H.: Angewandte Tensorrechnung. Springer, Berlin (1993)

10.3 Integralgleichungen

[Dautray und Lions 2000] Dautray, R., Lions, J.: Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 4. Transl. from the French. Springer, New York (2000)

[Fenyö und Stolle 1984] Fenyö, S., Stolle, H.: Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen, Bd. 1–4. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1984)

[Gochberg 1992] Gochberg, I.: One-Dimensional Singular Integral Equations, Vols. 1, 2. Birkhäuser, Basel (1992)

[Hackbusch 1989] Hackbusch, W.: Integralgleichungen: Theorie und Numerik. Teubner, Stuttgart (1989)

[Kress 19989] Kress, R.: Linear Integral Equations. Springer, New York (1989)

[Smirnow 1989] Smirnow, W.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. 4. Übers. a.d. Russ., 15. Auflage. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1989)

[Yosida 1960] Yosida, K.: Lectures on Differential and Integral Equations. Transl. from the Japanese. Interscience Publishers, New York (1960)

[Zeidler 1995] Zeidler, E.: Introduction to Applied Functional Analysis. Vol. 1: Applications to Mathematical Physics. Vol. 2: Main Principles and their Applications. Springer, New York (1995)

10.4 Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

[Burg et al. 1993] Burg, K., Haf, H., Wille, F.: Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 5. Teubner, Stuttgart (1993)

[Egorov et al. 1991] Egorov, Yu., Shubin, M.: Partial Differential Equations, Vols. 1–4. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Transl. from the Russian. Springer, New York (1991)

[Gelfand und Schilow 1964] Gelfand, I., Schilow, G.: Verallgemeinerte Funktionen, Bd. 1–4. Übers. a.d. Russ. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1964)

[Hörmander 1983] Hörmander, L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vols. 1–4. Springer, New York (1983)

[Hsiao und Wendland 2008] Hsiao, G., Wendland, W.: Boundary Integral Equations (and Pseudo-Differential Operators). Springer, New York (2008)

[Triebel 1980] Triebel, H.: Höhere Analysis. 2. Auflage. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1980)

[Wladimirov 1971] Wladimirov, W.: Gleichungen der mathematischen Physik. Übers. a. d. Russ., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1971)

10.5 Moderne Maß- und Integrationstheorie

- [Amann 2001] Amann, H., Escher, J.: Analysis, Bd. 3. Birkhäuser, Basel 2001.
- [Bauer 1990] Bauer, H.: Maß- und Integrationstheorie. De Gruyter, Berlin (1990)
- [Jost 2005] Jost, J.: Postmodern Analysis, 3rd edition. Springer, Berlin (2005)
- [Lieb und Loss 1997] Lieb, E., Loss, M.: Analysis. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997)
- [Stein und Shakarchi 2003] Stein, E., Shakarchi, R.: Princeton Lectures in Analysis. I: Fourier Analysis, II: Complex Analysis, III: Measure Theory. Princeton University Press, Princeton, NJ (2003)

KAPITEL 11

LINEARE FUNKTIONALANALYSIS UND IHRE ANWENDUNGEN

Eine Theorie ist um so beeindruckender, je einfacher ihre Voraussetzungen sind, je verschiedener die Dinge sind, die sie miteinander verbindet und je größer ihr Anwendungsbereich ist.

Albert Einstein

Wenn uns die Beantwortung eines mathematischen Problems nicht gelingen will, so liegt häufig der Grund darin, dass wir noch nicht den allgemeineren Gesichtspunkt erkannt haben, von dem aus das vorgelegte Problem nur als Glied einer Kette verwandter Probleme erscheint.

David Hilbert

Ein Leser, der sich rasch über die außerordentlich vielfältigen Anwendungen der Funktionalanalysis¹ auf konkrete Probleme orientieren möchte, sollte sofort nach der Lektüre des einleitenden Abschnitts 11.1 über die Grundideen der Funktionalanalysis einen Blick auf die folgenden Abschnitte werfen: 11.3 (spezielle Funktionen der mathematischen Physik, Existenzsätze für Variationsprobleme, Differential- und Integralgleichungen), 11.4 (Näherungsverfahren) und 12.1 (Fixpunktsätze und Integralgleichungen).

11.1 Grundideen

Die gesamte moderne Analysis basiert auf der Funktionalanalysis, d. h. auf der Lösung von Operatorgleichungen und Extremalproblemen in abstrakten unendlichdimensionalen Räumen. Die Funktionalanalysis ist eine elegante mathematische Theorie, die allgemeine Hilfsmittel bereitstellt, um konkrete analytische Probleme wie Variationsprobleme, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen sowie Integralgleichungen in übersichtlicher Weise zu lösen. Ferner erlaubt es die Funktionalanalysis, die Struktur und Konvergenz von Näherungsverfahren in einheitlicher Weise zu untersuchen (numerische Funktionalanalysis). Dabei werden unterschiedliche Gebiete der Mathematik miteinander verschmolzen wie Algebra, Analysis, Geometrie und Topologie.

Die Untersuchung eines konkreten Problems im Rahmen der Funktionalanalysis geschieht in der folgenden Weise:

- (i) Das vorgelegte Problem wird als Operatorgleichung oder Extremalproblem in einem abstrakten Raum (z. B. Hilbertraum oder Banachraum) formuliert.
- (ii) Die Funktionalanalysis stellt für derartige Operatorgleichungen bzw. Extremalprobleme allgemeine Resultate über Existenz, Eindeutigkeit, stetige Abhängigkeit von den Daten und Konvergenz von Näherungsverfahren bereit.

¹Kapitel 11 stellt eine völlig neubearbeitete Fassung des früher von Prof. Dr. L. Jentsch verfassten Abschnitts 8.1. [Ergänzende Kapitel zu Bronstein/Semendjajew, 6. Auflage, Teubner, Leipzig, 1990] dar.

(iii) Man prüft nach, ob die allgemeinen Voraussetzungen (z. B. kompakte Operatoren, schwach folgenunterhalbstetige Funktionale, a priori Abschätzungen) im vorgelegten Problem erfüllt sind.

Auf diese Weise wird klar getrennt zwischen der allgemeinen Struktur des Problems und seiner Spezifizität. Im Schritt (iii) muss man in der Regel feinere analytische Hilfsmittel einsetzen (sogenannte harte Analysis). Durch dieses Vorgehen schärft die Funktionalanalysis den Blick für das Wesentliche. Dabei ergibt sich, dass scheinbar sehr unterschiedliche konkrete Probleme die gleiche abstrakte Formulierung erlauben und somit mit Hilfe der gleichen abstrakten Methode gelöst werden können.

Tabelle 11.1 zeigt, in welcher Weise klassische Gegenstände der Mathematik in der Funktionalanalysis verallgemeinert werden. Da die gesamte mathematische Physik auf der Lösung von Differential- und Integralgleichungen beruht, stellt die Funktionalanalysis das entscheidende Instrument der modernen mathematischen Physik dar. Das werden wir ausführlich in den Kapiteln 11 bis 14 erläutern. Beispielsweise wird die moderne Quantentheorie direkt in der Sprache der Funktionalanalysis formuliert: Zustände eines Quantensystems sind Elemente eines Hilbertraumes, die physikalischen Größen entsprechen selbstadjungierten Operatoren im Hilbertraum, und die Dynamik eines Quantensystems wird durch eine einparametrische unitäre Gruppe beschrieben, deren Erzeugender der Energieoperator (Hamiltonoperator) ist (vgl. 13.18).

Die Funktionalanalysis stellt auch ein geeignetes Instrument für das moderne operations research und die mathematische Ökonomie dar (z. B. optimale Zustände und optimale Prozesse). Um sich von der *universellen Rolle* der Funktionalanalysis und den Wechselwirkungen zwischen Theorie und Anwendungen zu überzeugen, sollte der Leser einen Blick in die mehrbändige Monographie [Zeidler 1984-90] werfen. Als Einführung in die lineare und nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen empfehlen wir [Zeidler 1995].

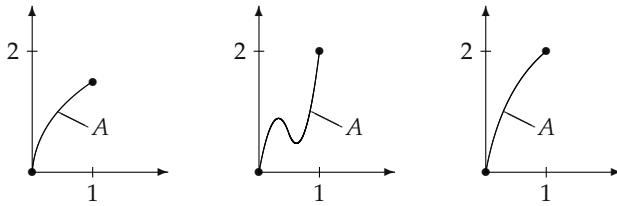
Tabelle 11.1

klassischer Gegenstand	funktionalanalytische Verallgemeinerung	Anwendungen
n -dimensionaler Raum \mathbb{R}^n	Hilbertraum, Banachraum, usw.	Funktionenräume, Sobolevräume (Zustandsräume in den Naturwissenschaften und in der mathematischen Ökonomie)
orthonormierte Vektorbasis im \mathbb{R}^3	vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum	Fourierreihen, Reihenentwicklungen nach speziellen Funktionen der mathematischen Physik
Drehung im \mathbb{R}^3 bzw. uni- täre Matrix	unitärer Operator im Hilbertraum	Fouriertransformation
symmetrische Matrix	selbstadjungierter Opera- tor im Hilbertraum	physikalische Größe in der Quantenphysik (z. B. Energie, Ort, Impuls)
orthogonale Projektion im \mathbb{R}^3	Lösung quadratischer Variationsprobleme im Hilbertraum	Dirichletproblem, das Prinzip der minimalen potentiellen Energie in der Physik (Sobolevräume)
lineares Gleichungssystem: $Ax = y$	lineare Operatorgleichung: $Ax = y$	lineare Differential- und Integralgleichungen

Tabelle 11.1 (Fortsetzung)

klassischer Gegenstand	funktionalanalytische Verallgemeinerung	Anwendungen
nichtlineares Gleichungssystem: $Ax = y$	nichtlineare Operatorgleichung: $Ax = y$	nichtlineare Differential- und Integralgleichungen (stationäre Prozesse in der Natur und in der Ökonomie)
Eigenwertproblem für eine Matrix: $Ax = \lambda x$	Eigenwertproblem für einen linearen oder nichtlinearen Operator: $Ax = \lambda x$ (Spektraltheorie)	Differential- und Integralgleichungen, Quantentheorie (Eigenschwingungen; Stabilität von Systemen in der Natur oder in der Ökonomie; drastische Änderungen des qualitativen Verhaltens von Systemen durch Stabilitätsverlust = Bifurkation)
gewöhnliche Differentialgleichungen (dynamische Systeme)	unendlichdimensionale dynamische Systeme (Halbgruppen, einparametrische Gruppen)	zeitabhängige Prozesse in der Natur und in der Ökonomie
Minimumproblem für eine reelle Funktion: $f(x) = \min !$	Minimumproblem für ein Funktional: $f(x) = \min !$	Variationsprobleme, Optimierungsaufgaben (optimale Zustände und optimale Prozesse)
kritischer Punkt einer reellen Funktion: $f'(x) = 0$	kritischer Punkt eines Funktionals: $f'(x) = 0$	Euler-Lagrange-Gleichungen zu Variationsproblemen, Optimierungsaufgaben, Spieltheorie
Differentiation einer reellen Funktion f' (z. B. Newtonverfahren)	Differentiation eines Operators f' (z. B. Newtonverfahren)	Variationsrechnung, Bifurkationstheorie (z. B. Newtonverfahren zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen)
iterative Lösung von linearen oder nichtlinearen Gleichungssystemen	iterative Lösung von Operatorgleichungen (z. B. Fixpunktsatz von Banach)	iterative Lösung von Differential- und Integralgleichungen
orthogonale Projektion und Parallelprojektion im \mathbb{R}^3	Projektionsverfahren zur Näherungsweisen Lösung von Operatorgleichungen	Ritzches Verfahren zur Lösung von Variationsproblemen, das universelle Galerkinverfahren zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen (z. B. Methode der finiten Elemente)
	Projektions-Iterationsverfahren zur Näherungsweisen Lösung von Operatorgleichungen	Kombination des Galerkinverfahrens mit einem Iterationsverfahren

Terminologie für Operatoren: Unter einem Operator $A : M \rightarrow N$ verstehen wir, dass jedem Punkt u der Menge M ein Punkt b der Menge N zugeordnet wird, wobei wir $Au = b$ schreiben.



(a) injektiv

(b) surjektiv

(c) bijektiv

Abb. 11.1

Dabei heißt b der *Bildpunkt* zu u , und u heißt der *Urbildpunkt* zu b . In Abb. 11.1 entspricht A einer reellen Funktion mit $M := [0, 1]$ und $N := [0, 2]$. Man nennt M auch den *Definitionsbereich* von A und schreibt $D(A) = M$. Wir vereinbaren, dass das Symbol

$$A : D(A) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow N$$

den Operator $A : D(A) \rightarrow N$ beschreibt mit der Zusatzinformation, dass $D(A)$ in \mathbb{R} enthalten ist. Diese Konvention ist sehr bequem. Die Menge aller Bildpunkte von A wird der *Wertebereich* von A genannt und mit $R(A)$ bezeichnet (wegen des englischen Wortes „range“ für Wertebereich).

- (i) Der Operator $A : M \rightarrow N$ heißt genau dann *surjektiv*, wenn $R(A) = N$ gilt.
- (ii) Der Operator $A : M \rightarrow N$ heißt genau dann *injektiv* (oder eineindeutig), wenn aus $Au = Av$ stets $u = v$ folgt.
- (iii) Der Operator $A : M \rightarrow N$ heißt genau dann *bijektiv*, wenn er surjektiv und injektiv ist. Exakt in diesem Fall existiert der inverse Operator $A^{-1} : N \rightarrow M$, der jedem Bildpunkt b von A den wegen (ii) eindeutig bestimmten Urbildpunkt u zuordnet. Wir schreiben $u = A^{-1}b$ (Abb. 11.1).

Der Operator $B : D(B) \rightarrow N$ bezeichnet genau dann eine *Fortsetzung des Operators* $A : D(A) \rightarrow N$, wenn $D(A) \subseteq D(B)$ und

$$Au = Bu \quad \text{für alle } u \in D(A)$$

gilt. Wir schreiben $A \subseteq B$.

Äquivalenzrelationen: Die folgende Konstruktion wird häufig in der Mathematik verwendet. In einer Menge M sei eine Relation „ \sim “ erklärt, so dass für alle $u, v, w \in M$ folgendes gilt:

- (i) $u \sim u$ (Reflexivität);
- (ii) aus $u \sim v$ folgt $v \sim u$ (Symmetrie);
- (iii) aus $u \sim v$ und $v \sim w$ folgt $u \sim w$ (Transitivität).

Bezeichnen wir mit $[u]$ die Menge aller v , für die $v \sim u$ gilt, dann zerfällt die Menge M in paarweise disjunkte Teilmengen $[u]$, die wir Äquivalenzklassen oder Restklassen nennen. Es gilt

$$[u] = [v] \quad \text{genau dann, wenn} \quad u \sim v.$$

Man bezeichnet u als einen Repräsentanten von $[u]$. Für diese Äquivalenzklassen werden häufig Operationen erklärt, z. B.

$$[u] + [v] = [u + v],$$

falls $u + v$ definiert ist. Damit diese Definition von $[u] + [v]$ korrekt ist, muss man zeigen, dass diese Operation unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist, d. h., aus $[u] = [u']$ und

$[v] = [v']$ folgt $[u] + [v] = [u'] + [v']$, also $[u + v] = [u' + v']$. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Operation $u + v$ mit der Äquivalenzrelation verträglich ist, d. h.

$$\text{aus } u \sim u', \quad v \sim v' \quad \text{folgt} \quad u + v \sim u' + v'.$$

► **BEISPIEL:** In der Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$u \sim v \quad \text{genau dann, wenn} \quad u - v \in L,$$

wobei $L := \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ gesetzt wird. Zum Beispiel gilt $0 \sim 2$ und $1 \sim 3$. Die Menge \mathbb{Z} zerfällt dann in die beiden Äquivalenzklassen $[0]$ und $[1]$ mit $[0] = L$. Explizit besteht $[0]$ bzw. $[1]$ aus den geraden bzw. ungeraden ganzen Zahlen. Aus $0 \sim 2$ folgt beispielsweise $[0] = [2]$. Ferner ist²

$$[0] + [0] = [0], \quad [0] + [1] = [1] + [0] = [1], \quad [1] + [1] = [0].$$

Das entspricht der Regel: die Summe zweier geraden Zahlen ist gerade, während die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade ist.

Das Rechnen mit Äquivalenzklassen wird z. B. bei der Definition des Faktorraumes oder des Tensorprodukts in 11.2.3 benutzt.

11.1.1 Integralgleichungen als Operatorgleichungen und Fredholmoperatoren

Als erstes Beispiel betrachten wir die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art

$$\lambda u(x) - \int_a^b \mathbb{K}(x, y)u(y) dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (11.1)$$

wobei die stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist, und die stetige Funktion $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird gesucht. Der gegebene Kern \mathbb{K} sei eine reelle stetige Funktion auf dem Quadrat $Q := \{(x, y) : a \leq x, y \leq b\}$, und λ sei eine gegebene reelle Zahl. Um (11.1) mit den Methoden der Funktionalanalysis zu behandeln, schreiben wir diese Integralgleichung als Operatorgleichung

$$\lambda u - Ku = f, \quad u \in C[a, b]. \quad (11.2)$$

Dabei erklären wir den Operator K durch

$$(Ku)(x) := \int_a^b \mathbb{K}(x, y)u(y) dy \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \quad (11.3)$$

Ferner bezeichnen wir mit $C[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Auf $C[a, b]$ führen wir durch

$$\|f\| := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (11.4)$$

eine sogenannte Norm ein. Damit wird $C[a, b]$ zu einem Banachraum (vgl. 11.2.4). Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $X := C[a, b]$. Dann gilt:

(i) Ist $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist auch die durch (11.3) definierte Funktion Ku auf $[a, b]$ stetig.

²Man beachte $[1] + [1] = [2] = [0]$.

(ii) Auf diese Weise wird ein Operator $K : X \rightarrow X$ erklärt, der jeder Funktion u in X eine neue Funktion in X zuordnet, die wir mit Ku bezeichnen.³

(iii) Der Operator $K : X \rightarrow X$ ist linear, d. h., für alle reellen Zahlen α und β und alle Funktionen (Punkte) $u, v \in X$ gilt

$$K(\alpha u + \beta v) = \alpha Ku + \beta Kv.$$

Das folgt aus

$$\int_a^b \mathbb{K}(x, y)(\alpha u(y) + \beta v(y)) dy = \alpha \int_a^b \mathbb{K}(x, y)u(y) dy + \beta \int_a^b \mathbb{K}(x, y)v(y) dy. \quad (11.5)$$

Eine wichtige Frage lautet: Welche linearen Operatorgleichungen verhalten sich analog zu linearen Gleichungssystemen? Es zeigt sich, dass große Klassen von linearen Differential- und Integralgleichungen auf lineare Gleichungen mit sogenannten Fredholmoperatoren führen und diese sich tatsächlich wie lineare Gleichungssysteme verhalten. Insbesondere gilt die sogenannte Fredholmsche Alternative. Das wird in 11.3.4 betrachtet.

11.1.2 Differentialgleichungen als Operatorgleichungen und verallgemeinerte Ableitungen

Um beispielsweise das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (11.6)$$

mit den Methoden der Funktionalanalysis behandeln zu können, schreiben wir es als Operatorgleichung

$$Au = f, \quad u \in D(A), \quad (11.7)$$

wobei wir

$$(Au)(x) := -u''(x), \quad u \in D(A), \quad (11.8)$$

setzen.

Glatte Lösungen: Mit $Y := C[0, 1]$ bzw. $X := C^2[0, 1]$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die stetig bzw. zweifach stetig differenzierbar sind. Ferner sei

$$D(A) := \{u \in C^2[0, 1] : u(0) = u(1) = 0\}.$$

Man beachte, dass bei der Einführung des Definitionsbereichs $D(A)$ des Operators A die Randbedingung aus (11.6) berücksichtigt wird. Somit bedeutet „ $u \in D(A)$ “, dass die Lösung u von (11.7) die Randbedingung aus (11.6) erfüllt.

Dann ist $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein Operator, der jeder Funktion u aus $D(A)$ eine Funktion aus Y zuordnet, die wir mit Au bezeichnen. Der Operator A ist linear, d. h., es gilt

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av, \quad \alpha u + \beta v \in D(A), \quad (11.9)$$

für alle reellen Zahlen α, β und alle Funktionen $u, v \in D(A)$. Das folgt aus

$$-(\alpha u(x) + \beta v(x))'' = -\alpha u''(x) - \beta v''(x)$$

und $(\alpha u + \beta v)(x) = \alpha u(x) + \beta v(x) = 0$ für $x = 0, 1$.

³In der Funktionalanalysis bevorzugt man eine geometrische Sprache. Deshalb bezeichnet man die Elemente von X als Punkte. In diesem Sinne ordnet K jedem Punkt u den neuen Punkt Ku zu.

Satz 1: Für jedes $f \in Y$ besitzt die Gleichung (11.7) genau eine Lösung u . Explizit ist u durch

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \quad (11.10)$$

gegeben mit der Greenschen Funktion

$$G(x, y) := \begin{cases} (1-y)x & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ (1-x)y & \text{für } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Definieren wir den Operator $K : Y \rightarrow X$ durch

$$(Kf)(x) := \int_0^1 G(x, y) f(y) dy, \quad (11.11)$$

dann ist $Au = f$ und $u = Kf$, also

$$K = A^{-1}. \quad (11.12)$$

Somit gilt:

Der Integraloperator K ist der inverse Operator zu dem Differentialoperator A .

Dieser Zusammenhang gilt auch für eine Reihe allgemeinerer Probleme.

Verallgemeinerte Lösungen: Wir wollen jetzt den Fall betrachten, dass die rechte Seite f in (11.6) unstetig ist. Als geeigneter Raum erweist sich hier der Lebesgurraum $Z := L_2(0, 1)$. Dieser besteht aus allen messbaren Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_0^1 f(x)^2 dx < \infty.$$

Bezüglich des Skalarprodukts $(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x) dx$ für alle $f, g \in L_2(0, 1)$ wird $L_2(0, 1)$ ein sogenannter Hilbertraum (vgl. 11.2.5).

Bemerkenswert und weitgehend verallgemeinerungsfähig ist nun die folgende Beobachtung. Geben wir uns die Funktion $f \in L_2(0, 1)$ vor, dann hat die Gleichung (11.6) nicht für jede Funktion $f \in L_2(0, 1)$ eine Lösung. Man kann jedoch sogenannte verallgemeinerte Lösungen von (11.6) erhalten. Um diese für die gesamte moderne Analysis fundamentale Tatsache zu erläutern, definieren wir die sogenannte *Fortsetzung von Friedrichs A_F* des Operators A . Diese Fortsetzung ist durch eine abstrakte Konstruktion gegeben (vgl. 11.3.5). Im vorliegenden Fall kann man jedoch A_F in einfacher Weise explizit angeben. Hierzu setzen wir

$$(A_F u) := -u'' \quad \text{für alle } u \in D(A_F) \quad (11.13)$$

mit $D(A_F) := \{u \in W_2^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$. Dabei ist $W_2^2(0, 1)$ ein sogenannter Sobolevraum (vgl. 11.2.6). Explizit besteht $W_2^2(0, 1)$ aus allen Funktionen $u \in L_2(0, 1)$, die zusätzlich Ableitungen $u', u'' \in L_2(0, 1)$ im verallgemeinerten Sinne haben, d. h., für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$ gilt

$$\int_0^1 u'(x)\varphi(x) dx = - \int_0^1 u(x)\varphi'(x) dx, \quad \int_0^1 u''(x)\varphi(x) dx = \int_0^1 u(x)\varphi''(x) dx.$$

Nach einem sogenannten Sobolevschen Einbettungssatz (vgl. 11.2.6) kann man jeder Funktion $u \in W_2^2(0, 1)$ (eventuell nach Änderung der Werte auf einer Menge vom Maß Null) in eindeutiger Weise eine auf $[0, 1]$ stetig differenzierbare Funktion zuordnen. In diesem Sinne sind die Randwerte $u(0) = u(1) = 0$ zu verstehen. Der Operator A_F ist eine Fortsetzung von A , d. h., es gilt

$$D(A) \subseteq D(A_F) \quad \text{mit} \quad Au = A_F u \quad \text{für alle } u \in D(A).$$

Anstelle des Ausgangsproblems (11.7), $Au = f$, $u \in D(A)$, betrachten wir nunmehr das verallgemeinerte Problem

$$A_F u = f, \quad u \in D(A_F). \quad (11.14)$$

Dieses entspricht dem ursprünglichen Randwertproblem (11.6), wobei jedoch die Ableitung u'' jetzt im verallgemeinerten Sinne zu verstehen ist.

Satz 2: Für jede Funktion $f \in L_2(0, 1)$ besitzt die Gleichung (11.14) eine eindeutige Lösung u , die durch die Integralformel (11.10) gegeben ist.

Allgemein gilt:

Die moderne Theorie der Differentialgleichungen wird von verallgemeinerten Ableitungen und Sobolevräumen beherrscht.

Symmetrie und Selbstadjungiertheit: Die Greensche Funktion G ist symmetrisch, d. h., es gilt $G(x, y) = G(y, x)$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Das führt dazu, dass der Integraloperator K auf $L_2(0, 1)$ symmetrisch ist, d. h., es gilt

$$(Ku, v) = (u, Kv) \quad \text{für alle } u, v \in L_2(0, 1).$$

Das folgt aus dem Satz von Fubini (Vertauschung der Integrationsreihenfolge):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \int_0^1 G(x, y)u(y) dy \right\} v(x) dx &= \int_0^1 \int_0^1 G(x, y)u(y)v(x) dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 G(y, x)u(y)v(x) dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 G(y, x)v(x) dx \right\} u(y) dy. \end{aligned}$$

Die Symmetrie von K ist eine Folge der Symmetrie von A , d. h.

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{für alle } u, v \in D(A).$$

Diese Beziehung ergibt sich durch zweimalige partielle Integration:

$$\int_0^1 (-u'')v dx = \int_0^1 u(-v'') dx \quad \text{für alle } u, v \in D(A).$$

Man beachte, dass wegen $u(0) = v(0) = u(1) = v(1) = 0$ keine Randterme auftreten.

In gleicher Weise zeigt man, dass der Operator A_F symmetrisch ist. Tatsächlich ist A_F im Unterschied zu A auch selbstadjungiert.

Die Klasse der selbstadjungierten Operatoren spielt eine fundamentale Rolle in der Hilbertraumtheorie der Differential- und Integralgleichungen.

Wir wollen das kurz motivieren. Die Frequenzen kleiner Schwingungen mechanischer Systeme werden durch Eigenwerte symmetrischer Matrizen beschrieben. Die zugehörigen Eigenvektoren spannen den gesamten Raum auf. Diese wichtige Eigenschaft lässt sich in einem geeigneten Sinne auf selbstadjungierte Operatoren erweitern im Rahmen der sogenannten Spektralschar (vgl. 11.6.2). Besonders übersichtlich wird die Situation für kompakte symmetrische Operatoren (vgl. die Hilbert–Schmidt-Theorie in 11.3.3). Ein wesentlicher Unterschied zwischen Integraloperatoren und Differentialoperatoren besteht darin, dass die letzteren im Gegensatz zu den ersten häufig nicht auf dem gesamten Raum erklärt sind. Deshalb hat man bei Differentialoperatoren sorgfältig auf die Definitionsbereiche zu achten.

Physikalische Interpretation der Symmetrie: Die Symmetrie der Greenschen Funktion G in (11.10) erlaubt eine anschauliche physikalische Deutung. Wir interpretieren hierzu die Funktionen f (bzw. u) als Kraft (bzw. als Auslenkung). Gegeben seien zwei Punkte x_0 und y_0 . Ist die Kraft im Punkt y_0 konzentriert, dann gilt $f(x) = \delta(x - y_0)$, wobei δ die Diracsche „Deltafunktion“ bezeichnet. Aus (11.10) erhält man dann für die Auslenkung im Punkt x_0 den Ausdruck

$$u(x_0) = G(x_0, y_0). \quad (11.15)$$

Vertauscht man jetzt die Rolle von x_0 und y_0 , dann verursacht die Kraft $f(x) = \delta(x - x_0)$ im Punkt x_0 die Auslenkung $u(y_0) = G(y_0, x_0)$ im Punkt y_0 . Wegen der Symmetrie von G stimmt das jedoch mit (11.15) überein. Allgemein ergibt sich:

Symmetrische Greensche Funktionen entsprechen physikalischen Prozessen, die bezüglich Ursache und Wirkung symmetrisch sind.

11.1.3 Das Konvergenzproblem für Fourierreihen

Um Schwingungen in einfachere Bestandteile zu zerlegen, bedient man sich der fundamentalen Methode der harmonischen Analyse, d. h., für eine beliebige 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ macht man den Ansatz

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots . \quad (11.16)$$

Um die unbekannten reellen Koeffizienten a_k und b_k zu bestimmen, führen wir das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

mit der Norm $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ ein. Setzen wir

$$f_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_{2k}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad f_{2k+1}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx,$$

dann besteht eine fundamentale Beobachtung darin, dass die Orthogonalitätsrelationen

$$(f_k, f_m) = \delta_{km} \quad \text{für alle } k, m = 1, 2, \dots \quad (11.17)$$

gelten. Multiplizieren wir nun (11.16), d. h.

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k$$

formal skalar mit f_m , dann erhalten wir $(f, f_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (f_k, f_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \delta_{km} = \alpha_m$, also $a_m = (f, f_m)$. Für (11.16) bedeutet das

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Das sind die klassischen Fourierkoeffizienten.

Im 19. Jahrhundert spielte das Problem der Konvergenz der Fourierreihe (11.16) eine wichtige Rolle. Im Jahre 1871 konstruierte Du Bois-Reymond eine stetige 2π -periodische Funktion, deren Fourierreihe in einem Punkt nicht konvergiert. Deshalb ist der klassische Konvergenzbegriff für eine allgemeine Konvergenzaussage nicht geeignet. Den richtigen Konvergenzbegriff liefert die Funktionalanalysis. Hierzu betrachten wir den Hilbertraum $L_2(0, 2\pi)$.

Satz: Die Fourierreihe (11.16) konvergiert für jede Funktion $f \in L_2(0, 2\pi)$ im Sinne der Norm $\| \cdot \|$, d. h., es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{m=0}^n (f, f_m) f_m \right\| = 0.$$

Das ist gleichbedeutend mit der Konvergenz im quadratischen Mittel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(f(x) - \frac{1}{2} a_0 - a_1 \cos x - b_1 \sin x - \dots \right)^2 \, dx = 0. \quad (11.18)$$

Speziell gilt diese Aussage für jede Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, die stetig oder stückweise stetig und beschränkt ist.

Das zugehörige abstrakte Resultat der Funktionalanalysis über vollständige Orthonormalsysteme erlaubt analoge Aussagen für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik (vgl. 11.3.1).

Die Beziehung (11.18) rechtfertigt die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate für Fourierreihen im Rahmen der Funktionalanalysis. Beim Beweis wird wesentlich eine Aussage der Approximationstheorie benutzt, die besagt, dass die trigonometrischen Polynome im Raum $L_2(0, 2\pi)$ dicht liegen (vgl. 11.3.1).

11.1.4 Das Dirichletproblem und das Vervollständigungsprinzip

Wir betrachten das Variationsproblem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) - fu \right) \, dx \, dy &= \min! \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (11.19)$$

zusammen mit dem Dirichletproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (11.20)$$

für den Laplaceoperator $\Delta u := u_{xx} + u_{yy}$. Dabei ist Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^2 . Physikalisch interpretieren wir $u(x, y)$ als die Auslenkung einer Membran im Punkt (x, y) unter dem Einfluss der äußeren Kraftdichte f (Abb. 11.2). Die Randbedingung „ $u = 0$ auf $\partial\Omega$ “ besagt, dass die

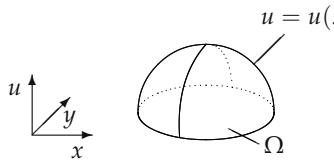


Abb. 11.2

Membran am Rand eingespannt ist. Die potentielle Energie der Membran ist gleich dem in (11.19) links stehenden Integral. Somit entspricht (11.19) dem *Prinzip der minimalen potentiellen Energie*.

Satz 1: Ist der Rand $\partial\Omega$ hinreichend glatt, dann ist jede hinreichend glatte Lösung u , des Variationsproblems (11.19) auch eine Lösung des Randwertproblems (11.20).

In seiner fundamentalen Dissertation aus dem Jahre 1851 schuf Riemann eine allgemeine Theorie der komplexen analytischen Funktionen (Funktionentheorie; vgl. 3.4.). Dabei benutzte er an entscheidender Stelle eine Existenzaussage für das Randwertproblem (11.20), indem er Satz 1 mit dem Argument kombinierte, dass die Existenz einer Lösung von (11.19) aus physikalischen Gründen evident ist. Diese Argumentation bezeichnete man im 19. Jahrhundert als Dirichletprinzip. Im Jahre 1870 kritisierte Weierstraß das Dirichletprinzip. Er wies darauf hin, dass im Unterschied zu Minimumproblemen für stetige Funktionen ein Variationsproblem mit glattem Integranden nicht unbedingt eine Lösung besitzen muss. Um das zu illustrieren, betrachtete Weierstraß das folgende einfache Variationsproblem:

$$J(u) := \int_{-1}^1 (xu'(x))^2 dx = \min!, \quad u \in C^1[-1, 1], \\ u(-1) = 2, \quad u(1) = 0. \quad (11.21)$$

Dabei bezeichnet $C^1[-1, 1]$ die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen auf $[-1, 1]$. Die Folge

$$u_n(x) := 1 - \frac{\arctan nx}{\arctan n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

genügt den Randbedingungen $u_n(-1) = 2$, $u_n(1) = 0$, und es ist $J(u_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Da für alle zulässigen Funktionen $J(u) \geq 0$ gilt, ergibt sich

$$\inf J(u) = 0 \quad \text{für alle zulässigen Funktionen } u.$$

Dieses Infimum wird aber von keiner zulässigen Funktion u angenommen. Denn aus $J(u) = 0$ folgt $xu'(x) = 0$, d.h. $u'(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$. Somit ist $u(x) = \text{const.}$ Das steht im Widerspruch zu der Randbedingung $u(-1) = 2$, $u(1) = 0$.

Nach der Kritik von Weierstraß brach zunächst das gesamte Riemannsche Gebäude der komplexen Funktionen zusammen. Allerdings konnten bald Schwarz, C. Neumann und Poincaré den Defekt beheben, indem sie nicht das Variationsproblem (11.19) lösten, sondern direkte Existenzbeweise für das Randwertproblem (11.20) mit unterschiedlichen Methoden gaben. Die Rechtfertigung des Dirichletprinzips blieb jedoch ein berühmtes offenes Problem des 19. Jahrhunderts. Im Jahre 1900 gelang Hilbert diese Rechtfertigung. Das war der Beginn der sogenannten direkten Methoden der Variationsrechnung. In der modernen Variationsrechnung, die auf der Funktionalanalysis basiert, lautet die Rechtfertigung des Dirichletprinzips folgendermaßen.

Satz 2: Für jede gegebene Funktion $f \in L_2(\Omega)$ besitzt das Variationsproblem (11.19) genau eine Lösung u in dem Sobolevraum $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Diese Lösung u ist zugleich eine verallgemeinerte Lösung des Randwertproblems (11.20).

Vervollständigungsprinzip: Explizit besteht der Lebesgueraum $L_2(\Omega)$ aus allen reellen messbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int\limits_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty$. Die Funktionen u aus $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ besitzen verallgemeinerte partielle Ableitungen erster Ordnung mit

$$u_x, u_y \in L_2(\Omega) \quad \text{und} \quad "u = 0" \quad \text{auf } \partial\Omega''$$

im Sinne verallgemeinerter Randwerte (vgl. 11.2.6). Im Unterschied zu der Formulierung von (11.20) benötigt man für (11.19) keine zweiten Ableitungen. Deshalb ist $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ ein *sehr natürlicher Lösungsraum* für (11.19).

Die Benutzung verallgemeinerter Lösungen in Sobolevräumen ist wichtig, weil die Existenz klassischer Lösungen von (11.19) (mit klassischen ersten partiellen Ableitungen) nicht allgemein garantiert werden kann. Um die Situation zu erläutern, betrachten wir das folgende einfache Modell.

► **BEISPIEL:** Ist $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann besitzt das Minimumproblem

$$F(u) = \min ! \tag{11.22}$$

stets eine Lösung u_0 (nach einem klassischen Satz von Weierstraß). Kennt ein Mathematiker jedoch nur die rationalen Zahlen, dann braucht (11.22) keine Lösung zu haben, denn der Minimalpunkt u_0 kann eine irrationale Zahl sein (Abb. 11.3).

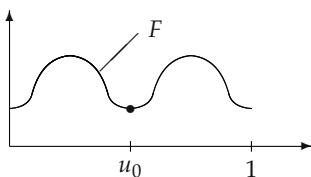


Abb. 11.3

Grob gesprochen hat man die folgende Korrespondenz:

$$\begin{aligned} \text{rationale Zahlen} &\longrightarrow \text{glatte Funktionen;} \\ \text{reelle Zahlen} &\longrightarrow \text{Funktionen mit verallgemeinerten} \\ &\qquad \text{Ableitungen aus einem Sobolevraum.} \end{aligned}$$

Die Menge der reellen Zahlen entsteht aus der Menge der rationalen Zahlen durch einen *Vervollständigungsprozess*, d. h. durch die Hinzunahme gewisser „idealer Elemente“, die im vorliegenden Fall irrationale Zahlen heißen. Solche Vervollständigungsprozesse sind von fundamentaler Bedeutung für die moderne Analysis:

Sobolevräume ergeben sich aus Räumen glatter Funktionen durch Vervollständigung.

Erst durch einen solchen Vervollständigungsprozess kann das Dirichletprinzip streng gerechtfertigt werden. Wichtig ist ferner, dass man nicht das klassische Integral, sondern das moderne Lebesgueintegral benutzt. Dieses entsteht nach 10.5 ebenfalls durch einen Vervollständigungsprozess bezüglich des Integrals für Treppenfunktionen (einfache Funktionen).

Regulärität: Die moderne Theorie der partiellen Differentialgleichungen besteht aus zwei Schritten:

(i) Man beweist die Existenz von verallgemeinerten Lösungen mit Hilfe funktionalanalytischer Hilfsmittel.

(ii) Man zeigt, dass die verallgemeinerten Lösungen klassische Lösungen darstellen, falls alle Daten hinreichend glatt sind.

Satz 3: Sind der Rand $\partial\Omega$ und die Funktion f hinreichend glatt, dann ist die eindeutige verallgemeinerte Lösung $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ des Variationsproblems (11.19) hinreichend glatt und gleichzeitig die eindeutige klassische Lösung des Randwertproblems (11.20).

Der geometrische Kern der Rechtfertigung des Dirichletprinzips: Hilbert hat immer wieder darauf hingewiesen, dass man ein Problem erst dann richtig gelöst hat, wenn man seinen einfachen abstrakten Kern verstanden hat.

Wir werden in 11.3.2 erläutern, dass die Lösbarkeit von (11.19) darauf beruht, dass man in jedem Hilbertraum von einem Punkt b stets ein Lot auf einen gegebenen abgeschlossenen linearen Unterraum L fällen kann (Abb. 11.4). Es ist typisch für die Funktionalanalysis, dass die Verallgemeinerung einfacher geometrischer Sachverhalte auf unendlich viele Dimensionen zu tiefliegenden analytischen Ergebnissen führt.

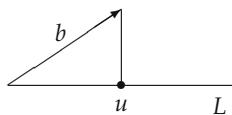


Abb. 11.4

Ein abschließendes Resultat für den Laplaceoperator mittels Interpolationstheorie: Hat man einen Differentialoperator A gegeben, dann kann man ihn zwischen unterschiedlichen Funktionenräumen betrachten. Besonders interessieren Raumpaare (X, Y) , für welche der Operator $A : X \rightarrow Y$ einen Homöomorphismus darstellt.

Wir betrachten beispielsweise das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{auf } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{11.23}$$

und definieren $Au := (f, g)$.

Satz 4 (glatte Lösungen von (11.23)): Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^2 mit hinreichend glattem Rand, d. h., genauer ist $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$. Ferner seien f und g hinreichend glatt,⁴ d. h., es gilt

$$f \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \quad g \in C^\alpha(\partial\Omega).$$

Dann besitzt (11.23) genau eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ mit

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq \text{const}(\|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha), \tag{11.24}$$

wobei sich die Normen auf die entsprechenden $C^{k,\alpha}$ -Räume beziehen. Der Operator

$$A : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}) \times C^\alpha(\overline{\Omega})$$

ist ein linearer Homöomorphismus.

Man bezeichnet (11.24) als eine *a priori Abschätzung*, weil man diese Abschätzung ohne Kenntnis der Lösung u gewinnen kann, d. h. allein unter Ausnutzung der Struktur der Differentialgleichung. Ersetzen wir in (11.23) die Funktionen u, f, g durch u_j, f_j, g_j , dann folgt aus (11.24):

$$\|u_1 - u_2\|_{2,\alpha} \leq \text{const}(\|f_1 - f_2\|_\alpha + \|g_1 - g_2\|_\alpha).$$

Diese Ungleichung besagt, dass die Lösung von (11.23) stetig von den Daten f und g abhängt (im Sinne der angegebenen Normen).

⁴Die Räume $C^{k,\alpha}$ werden in 11.2.4 definiert. Für „ $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ “ vergleiche man 11.2.6.

Dieses Resultat wird für den Grenzfall $\alpha = 0$ falsch, d. h., der Operator

$$A : C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$$

ist nicht surjektiv. Das beinhaltet die überraschende Tatsache, dass (11.23) für stetige rechte Seiten f und stetige Randwerte g nicht stets eine klassische Lösung u besitzen muss. Das war ein wesentlicher Grund für die Einführung der Hölderräume $C^{2,\alpha}$.

Satz 5 (verallgemeinerte Lösungen von (11.23)): Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, d. h. $\partial\Omega \in C^\infty$. Ferner seien

$$f \in L_2(\Omega), \quad g \in W_2^{1/2}(\partial\Omega),$$

gegeben. Dann besitzt das Randwertproblem (11.23) genau eine Lösung $u \in W_2^2(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{2,2} \leq \text{const} (\|f\|_2 + \|g\|_{1/2,2}).$$

Der durch $Au = (f, g)$ gegebene Operator

$$A : W_2^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\partial\Omega)$$

stellt einen linearen Homöomorphismus dar.

Der Raum $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ enthält grob gesprochen Funktionen, die eine Ableitung der (gebrochenen) Ordnung $1/2$ auf dem Rand $\partial\Omega$ besitzen. Solche Funktionenräume werden mit Hilfe der Interpolationstheorie konstruiert (vgl. 11.6.6).

11.1.5 Das Dirichletproblem und die Methode der finiten Elemente (numerische Funktionalanalysis)

Eine der wichtigsten Methoden der numerischen Mathematik ist die Methode der finiten Elemente, die z. B. bei der Konstruktion von Flugzeugen benutzt wird. Wir betrachten beispielsweise das Variationsproblem

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) - fu \right) dx dy = \min !, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (11.25)$$

Die Methode der finiten Elemente besteht hier darin, dass man eine *Triangulation* \mathbb{T} des Gebietes Ω wählt und in (11.25) nur über stückweise lineare Funktionen bezüglich \mathbb{T} variiert. Auf diese Weise erhält man für jede Triangulation von Ω eine Näherungslösung u_n , die bei der Verfeinerung der Triangulation für $n \rightarrow \infty$ gegen die Lösung u des Ausgangsproblems (11.25) konvergiert, d. h., es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)} = 0.$$

Explizit bedeutet das

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (u_n - u)^2 + (\partial_1 u_n - \partial_1 u)^2 + (\partial_2 u_n - \partial_2 u)^2 dx dy = 0 \quad (11.26)$$

mit $\partial_1 = \partial/\partial x$ und $\partial_2 = \partial/\partial y$.

Das ist ein *typisches Resultat der numerischen Funktionalanalysis*. In der klassischen numerischen Analysis benutzte man bei dieser sogenannten Methode von Ritz anstelle von stückweise linearen Funktionen glatte Funktionen. Das Problem der punktweisen Konvergenz der Ritzschen Methode blieb dabei in vielen Fällen offen. Verwendet man dagegen die Normkonvergenz (11.26),

dann ergibt sich ein *übersichtliches Konvergenzresultat*. Dieses ist sehr natürlich, denn es bezieht sich auf denjenigen Sobolevraum, in dem man auch die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage zur Verfügung hat. Interpretiert man u als die Auslenkung einer Membran, dann erlaubt die Konvergenz (11.26) eine einfache physikalische Interpretation; sie entspricht der Konvergenz der Energie.

Die Methode der finiten Elemente wird erst seit Ende der sechziger Jahre intensiv benutzt.

11.1.6 Ein Blick in die Geschichte der Funktionalanalysis

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts gab es vier große offene Problemkreise in der Analysis:

- (i) Das Konvergenzproblem für Fourierreihen und allgemeiner die Rechtfertigung der Fouriermethode zur Lösung partieller Differentialgleichungen durch Reihenentwicklung nach speziellen Funktionen (Kugelfunktionen usw.).
- (ii) Eine allgemeine Lösungstheorie für Integralgleichungen.
- (iii) Eine allgemeine Lösungstheorie für die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.
- (iv) Eine allgemeine Lösungstheorie für Variationsprobleme.

Die berühmtesten Mathematiker des 19. Jahrhunderts hatten Teilerfolge erzielt, aber es fehlte an einer allgemeinen Theorie. Diese allgemeine Theorie wurde im 20. Jahrhundert mit Hilfe der Funktionalanalysis geschaffen. Im Jahre 1900 veröffentlichte Fredholm seine berühmte Arbeit zur Lösungstheorie Fredholmscher Integralgleichungen. Diese Arbeit war noch vollständig im Geiste der klassischen Analysis verfasst. Hilbert erkannte jedoch rasch, dass man mit Vorteil abstrakte Hilfsmittel einsetzen konnte. In den Jahren 1900 bis 1906 schuf er eine allgemeine Theorie der Integralgleichungen, indem er diese als Matrixengleichungen in einem unendlichdimensionalen euklidischen Raum auffasste, den man heute als den *Hilbertraum* l_2 bezeichnet (vgl. 11.2.5). Insbesondere verallgemeinerte Hilbert die klassische Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen auf den unendlichdimensionalen Fall. Auf diesem Weg erhielt er eine Spektraltheorie solcher Matrizen und z. B. Entwicklungssätze nach Eigenfunktionen. Hilbert erkannte dabei, dass das Spektrum beschränkter linearer symmetrischer Operatoren nicht nur aus Eigenwerten bestehen muss.⁵ Das führte ihn auf den Begriff der Spektralschar (vgl. 11.6.2). Der Hilbert-Schüler Erhard Schmidt vereinfachte in seiner Dissertation 1905 gewisse Überlegungen Hilberts und führte eine geometrische Sprache ein, die die endlichdimensionale euklidische Geometrie auf unendlich viele Dimensionen verallgemeinerte. Dabei spielte der Orthogonalitätsbegriff eine fundamentale Rolle. Die Hilbert-Schmidt-Theorie erlaubt es, den Problemkreis (i) erschöpfend zu behandeln. Anwendungen dieser eleganten Theorie haben wir in 10.3.9 am Beispiel der schwingenden Saite erläutert.

Mitte der zwanziger Jahre schufen Heisenberg und etwas später Schrödinger unter Benutzung völlig unterschiedlicher Methoden die moderne Quantenmechanik. Hilbert versuchte vergeblich in Göttingen eine strenge Formulierung im Rahmen der Integralgleichungstheorie zu finden. Das gelang jedoch seinem Schüler John von Neumann Ende der zwanziger Jahre, der den Begriff des abstrakten Hilbertraumes einführt und eine Spektraltheorie für unbeschränkte selbstdiagonale Operatoren schuf, die im Unterschied zur Hilbertschen Theorie nicht auf dem gesamten Hilbertraum erklärt sind. Die moderne Quantentheorie wird in der Sprache der Funktionalanalysis formuliert (vgl. 13.18) und hat die Entwicklung der Funktionalanalysis wesentlich beeinflusst (z. B. Spektraltheorie, von-Neumann-Algebren und allgemeinere Operatoralgebren, Störungstheorie, Streutheorie, Halbgruppentheorie).

⁵Interessanterweise führte Hilbert den Begriff „Spektrum“ ein, ohne zu ahnen, dass zwanzig Jahre später sein rein mathematischer Begriff exakt die Spektren von Atomen beschreiben würde.

Friedrichs erkannte zu Beginn der dreißiger Jahre, dass man die durch John von Neumann entdeckte Theorie der selbstadjungierten Operatoren benutzen kann, um für die Variationsprobleme und Randwertaufgaben der mathematischen Physik eine elegante funktionalanalytische Theorie zu schaffen, die auf der sogenannten Fortsetzung von Friedrichs basiert (vgl. 11.3.5). Bei diesem Zugang werden Differentialgleichungen nicht auf Integralgleichungen zurückgeführt, sondern Differentialoperatoren werden als eigenständige Objekte aufgefasst. Das vereinfacht die Theorie wesentlich. Mitte der dreißiger Jahre führte Sobolev die nach ihm benannten Räume ein, um eine Lösungstheorie für hyperbolische partielle Differentialgleichungen zu erhalten, die auch nichtglatte Lösungen erfasst. Tatsächlich besteht ein sehr enger Zusammenhang zwischen Sobolevräumen und der Fortsetzung von Friedrichs. In den fünfziger und sechziger Jahren wurde eine allgemeine funktionalanalytische Lösungstheorie für lineare partielle Differentialgleichungen geschaffen. Mit Hilfe der Interpolationstheorie konnten dabei eine Reihe abschließender Resultate erhalten werden. Dabei benutzt man Sobolovräume, die in der Regel keine Hilberträume, sondern Banachräume sind. Derartige Räume wurden in den zwanziger Jahren von der polnischen mathematischen Schule um Banach tiefgründig untersucht. Dabei ergaben sich eine Reihe allgemeiner Aussagen, die man heute als die Prinzipien der linearen Funktionalanalysis bezeichnet (vgl. 11.5).

Um 1950 entwickelte Laurent Schwartz seine Theorie der Distributionen, die den von Newton und Leibniz entwickelten Ableitungsbegriff wesentlich verallgemeinert (vgl. 10.4). Um Distributionen funktionalanalytisch zu beschreiben, benötigt man sogenannte lokalkonvexe Räume, die den Begriff des normierten Raumes verallgemeinern. In den sechziger Jahren entstand auf der Basis des Distributionenbegriffs die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren, die die Theorie der Differentialgleichungen und Integralgleichungen miteinander verschmilzt, sowie die Theorie der Fourierintegraloperatoren, die nichtglatte Wellenprozesse erfasst und die Zusammenhänge zwischen klassischer Mechanik, geometrischer Optik und partiellen Differentialgleichungen weitgehend verallgemeinert.

Die bisher betrachteten Probleme waren linear und werden durch die lineare Funktionalanalysis erfasst. Die nichtlineare Funktionalanalysis (vgl. Kapitel 12) untersucht nichtlineare Differential- und Integralgleichungen, nichtquadratische Variationsprobleme, Optimierungs- und Steuerungsprobleme usw. Ausgangspunkt waren die folgenden Resultate, die zu Beginn des 20. Jahrhunderts erzielt wurden:

- (a) Die Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen von Ljapunov und E. Schmidt im Zusammenhang mit den Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten (einfachste Sternmodelle).
- (b) Die Bernsteinschen Untersuchungen über nichtlineare elliptische partielle Differentialgleichungen auf der Basis von *a priori Abschätzungen* und
- (c) die Untersuchungen von Hilbert und Tonelli über Variationsprobleme.

Ein fundamentales Resultat der nichtlinearen Funktionalanalysis stellt das Prinzip von Leray und Schauder aus dem Jahre 1934 dar, welches für gewisse Klassen von Operatoren folgendermaßen lautet:

(L-S) *A priori Abschätzungen ergeben die Existenz von Lösungen.*

Dies ist ein topologisches Resultat, das (b) verallgemeinert. Der Beweis von (L-S) beruht auf dem sogenannten Leray-Schauderschen Abbildungsgrad, der den Brouwerschen Abbildungsgrad aus dem Jahre 1912 auf unendlich viele Dimensionen verallgemeinert (vgl. 12.9).

In den sechziger Jahren setzte eine stürmische Entwicklung der nichtlinearen Funktionalanalysis ein. Beispielsweise wurden mit der Theorie monotoner Operatoren die auf von Neumann und Friedrichs zurückgehenden Hilbertraummethoden der mathematischen Physik auf nichtlineare Probleme verallgemeinert. Dabei ergab sich gleichzeitig eine Verallgemeinerung von (L-S) auf umfangreichere Operatorenklassen.

Im Mittelpunkt der nichtlinearen Funktionalanalysis steht heute die Untersuchung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen der mathematischen Physik und der Differentialgeometrie. Das findet man in Kapitel 14. Die größte Herausforderung für die nichtlineare Funktionalanalysis stellt der Aufbau einer streng mathematischen Quantenfeldtheorie dar.

11.2 Räume

Abbildung 11.5 gibt einen Überblick über wichtige abstrakte Räume. Der Pfeil ist im Sinne einer Implikation zu verstehen, d. h., jeder Banachraum ist ein normierter Raum usw. Der allgemeinste Raumtyp, in dem sich grundlegende Begriffe der Analysis wie Stetigkeit und Kompaktheit noch formulieren lassen, ist der des topologischen Raumes.

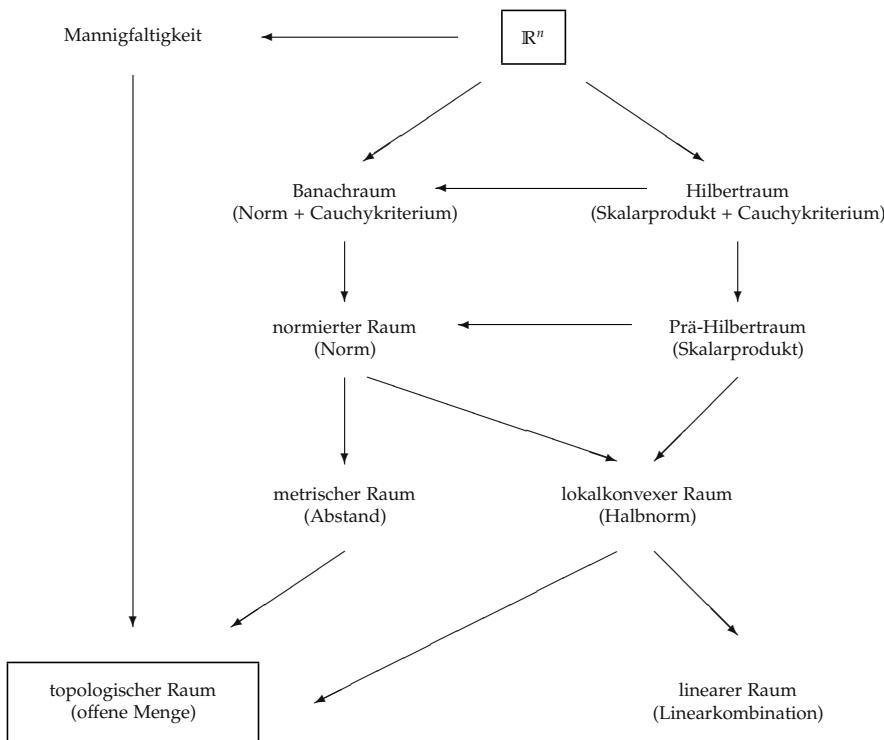


Abb. 11.5

Lokalkonvexe Räume treten in der Distributionentheorie auf. Solche Räume sind zwar topologische Räume, aber nicht notwendig metrische Räume. Deshalb ist der Begriff des metrischen Raumes für die Funktionalanalysis zu eng. Mannigfaltigkeiten werden in Kapitel 14 betrachtet. Diese brauchen ebenfalls keine metrischen Räume zu sein.

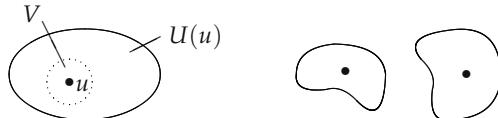
11.2.1 Topologische Räume

In einem topologischen Raum ist der Begriff der *offenen Menge* bekannt. Daraus ergeben sich analog zu den klassischen Begriffen im \mathbb{R}^n zahlreiche weitere Begriffe.

Definition: Eine Menge X heißt genau dann ein *topologischer Raum*, wenn gewisse Teilmengen von X als offene Mengen ausgezeichnet sind, so dass gilt:

- (i) X und die leere Menge \emptyset sind offen;
- (ii) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen;
- (iii) der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.

► **BEISPIEL 1:** Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Die im klassischen Sinne offenen Mengen (vgl. 1.3.2.2.) lassen \mathbb{R}^n zu einem topologischen Raum werden.



(a)



(b)

Abb. 11.6

Umgebung: Jede offene Menge V , die den Punkt u enthält, heißt offene Umgebung von u . Unter einer *Umgebung* $U(u)$ von u versteht man eine beliebige Menge, die eine offene Umgebung V von u enthält (Abb. 11.6(a)).

Trennbarkeit: Der topologische Raum heißt genau dann *separiert* (oder ein Hausdorffraum), wenn zwei verschiedene Punkte stets disjunkte Umgebungen besitzen (Abb. 11.6(b)).

► **BEISPIEL 2:** Der Raum \mathbb{R}^n ist separiert. Ferner sind alle in Abb. 11.5 angegebenen speziellen topologischen Räume separiert.

Abgeschlossene Mengen: Eine Teilmenge M des topologischen Raumes X heißt genau dann *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \setminus M$ offen ist. Es gilt:

- (a) X und die leere Menge \emptyset sind abgeschlossen;
- (b) der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen;
- (c) die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.

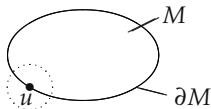


Abb. 11.7

Randpunkt: Es sei M eine Menge in einem topologischen Raum. Der Punkt u heißt genau dann Randpunkt von M , wenn jede Umgebung von u einen Punkt enthält, der zu M gehört, und einen anderen Punkt, der nicht zu M gehört. Alle Randpunkte von M bilden definitionsgemäß den Rand ∂M von M (Abb. 11.7). Die Menge

$$\overline{M} := M \cup \partial M$$

heißt der *Abschluss* von M (Abb. 11.8); \overline{M} ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.



Abb. 11.8

Ein Punkt u heißt genau dann *innerer* (bzw. *äußerer*) Punkt von M , wenn eine Umgebung von u zu M gehört (bzw. eine Umgebung von u nicht zu \overline{M} gehört). Alle inneren Punkte von M bilden definitionsgemäß das *Innere* int M von M . Dabei ist int M die größte offene Menge, die in M enthalten ist.

Dichtheit: Eine Menge M heißt genau dann *dicht* in X , wenn $\overline{M} = X$ gilt. Das ist gleichbedeutend damit, dass jede Umgebung eines beliebigen Punktes von X einen Punkt von M enthält.

Ein topologischer Raum X heißt genau dann *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge M von X gibt, die in X dicht liegt.

► **BEISPIEL 3:** Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist dicht in der Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Wegen der Abzählbarkeit von \mathbb{Q} ist \mathbb{R} separabel.

Ferner ist auch \mathbb{R}^n separabel.

Hinter Dichtheitsaussagen verbergen sich *Approximationssätze* (vgl. z. B. den Approximationssatz von Weierstraß in 11.2.4.1).

Kompaktheit: Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes heißt genau dann *kompakt*, wenn jede Überdeckung von M durch offene Mengen ein endliches Teilsystem enthält, das bereits M überdeckt.

M heißt genau dann *relativ kompakt*, wenn der Abschluss \overline{M} kompakt ist. Es gilt:

- (a) Jede kompakte Menge ist abgeschlossen.
- (b) Jede Teilmenge einer kompakten Menge ist relativ kompakt.
- (c) Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist wieder kompakt.

► **BEISPIEL 4:** Es sei M eine Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann gilt:

- (i) M ist genau dann relativ kompakt, wenn M beschränkt ist.
- (ii) M ist genau dann kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

Eine solche einfache Charakterisierung ist in unendlichdimensionalen Räumen nicht mehr möglich. Kompaktheit ist einer der wichtigsten Begriffe der Mathematik. Bei Vorliegen von Kompaktheit lassen sich häufig Aussagen für endlichdimensionale Räume auf unendlichdimensionale Räume übertragen.

Relativ offene und relativ abgeschlossene Mengen: Es gelte $T \subseteq M \subseteq X$, wobei X ein topologischer Raum ist. Die Teilmenge T von M heißt genau dann *relativ offen* (bzw. relativ abgeschlossen) bezüglich M , wenn

$$T = M \cap \mathbb{T}$$

gilt, wobei \mathbb{T} offen (bzw. abgeschlossen) in X ist.

► **BEISPIEL 5:** Es sei $X = \mathbb{R}$, $M = [0, 2)$ und $T = [0, 1)$. Dann ist die Menge T weder offen noch abgeschlossen in X , aber wegen

$$T = [0, 2) \cap (-1, 1)$$

ist T relativ offen bezüglich $[0, 2)$.

Unterraumtopologie: Jede Teilmenge M eines topologischen Raumes X wird auf natürliche Weise zu einem topologischen Raum, indem man die (bezüglich M) relativ offenen Mengen als „offen“ auszeichnet.

Die „abgeschlossenen“ Mengen in dieser Topologie auf M stimmen dann mit den (bezüglich M) relativ abgeschlossenen Mengen überein.

Stetige Abbildung: Es seien X und Y topologische Räume. Die Abbildung f mit $f : D(f) \subseteq X \rightarrow Y$ heißt genau dann *stetig im Punkt u* , wenn zu jeder Umgebung V von $f(u)$ eine Umgebung U von u existiert, so dass

$$f(v) \subseteq V \quad \text{für alle } v \in U \cap D(f)$$

gilt. Ist f in jedem Punkt von $D(f)$ stetig, dann heißt f stetig.

► **BEISPIEL 6:** Für $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ stimmt dieser Stetigkeitsbegriff mit dem klassischen Stetigkeitsbegriff überein.

Homöomorphismus: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt genau dann ein Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

Das ist gleichbedeutend damit, dass f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} offene Mengen auf offene Mengen abbilden.

Zwei topologische Räume X und Y heißen genau dann *homöomorph*, wenn ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ existiert.

Alle topologischen Begriffe⁶ bleiben bei einem Homöomorphismus unverändert. Folglich kann man homöomorphe topologische Räume miteinander identifizieren.

Zusammenhängende Mengen: Es bezeichne X einen topologischen Raum und M eine Teilmenge von X . M heißt genau dann *zusammenhängend*, wenn M nicht eine Zerlegung der Form

$$M = S \cup T$$

gestattet, wobei S und T nichtleere (bezüglich M) relativ offene Mengen sind mit $S \cap T = \emptyset$.

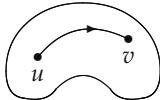


Abb. 11.9

M heißt genau dann *bogenweise zusammenhängend*, wenn es zu zwei beliebigen Punkten $u, v \in M$ stets eine stetige Kurve in M gibt, die u mit v verbindet, d. h., es existiert eine stetige Abbildung $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\varphi(0) = u$ und $\varphi(1) = v$ (Abb. 11.9).

Unter einem *Gebiet* verstehen wir eine nichtleere zusammenhängende offene Menge.

Jede bogenweise zusammenhängende Menge ist zusammenhängend.

Ein Gebiet in einem topologischen Raum X ist bogenweise zusammenhängend, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt: (i) $X = \mathbb{R}^n$, (ii) X ist ein normierter oder allgemeiner ein lokalkonvexer Raum, (iii) X ist eine Mannigfaltigkeit.

Komponenten: Eine zusammenhängende Menge M eines topologischen Raumes, die nicht echt in einer umfassenderen zusammenhängenden Menge enthalten ist, heißt Komponente des topologischen Raumes.

Komponenten sind stets abgeschlossene Mengen.

Einfach zusammenhängende Mengen: Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes heißt genau dann *einfach zusammenhängend*, wenn M zusammenhängend ist und sich jede geschlossene stetige Kurve in M auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Explizit bedeutet dies, dass es zu jeder stetigen Funktion $\varphi : [\tau_0, \tau_1] \rightarrow M$ auf dem kompakten Intervall $[\tau_0, \tau_1]$ mit $\varphi(\tau_0) = \varphi(\tau_1)$ einen Punkt x_0 in M und eine stetige Deformationsfunktion $H : [0, 1] \times [\tau_0, \tau_1] \rightarrow M$ gibt, so dass $H(t, \tau_0) = H(t, \tau_1)$ für alle Zeiten $t \in [0, 1]$ und

$$H(0, \tau) = \varphi(\tau), \quad H(1, \tau) = x_0$$

für alle Kurvenparameter $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ gilt. Anschaulich wird die geschlossene stetige Ausgangskurve $\varphi = \varphi(\tau)$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$, auf dem topologischen Raum M während des Zeitintervalls $[0, 1]$ in stetiger Weise in den Punkt x_0 deformiert. Bei festem Parameterwert τ wird der Kurvenpunkt $x = \varphi(\tau)$ durch die Trajektorie $t \mapsto H(t, \tau)$, $0 \leq t \leq 1$ im Zeitintervall $[0, 1]$ in den Punkt x_0

⁶Das sind alle Begriffe, die sich mit Hilfe offener Mengen erklären lassen, insbesondere alle in 11.2.1 eingeführten Begriffe.

überführt. Außerdem stellt $H = H(t, \tau)$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$, zu jedem festen Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ eine geschlossene stetige Kurve in M dar.

Fundamentale Sätze über stetige Abbildungen: Es sei $f : D(f) \subseteq X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, wobei X und Y topologische Räume sind. Dann gilt:

- (i) f bildet kompakte (bzw. zusammenhängende, bogenweise zusammenhängende) Mengen wieder auf kompakte (bzw. zusammenhängende, bogenweise zusammenhängende) Mengen ab.
- (ii) Ist f auf der kompakten Menge $D(f)$ injektiv, dann ist die inverse Abbildung $f^{-1} : R(f) \rightarrow D(f)$ stetig (*Satz von der inversen Abbildung*).
- (iii) Eine stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge M eines topologischen Raumes besitzt ein Maximum und ein Minimum (*verallgemeinertes Extremalprinzip von Weierstraß*; Abb. 11.10).

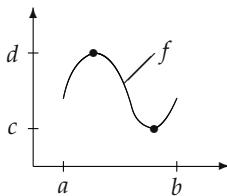


Abb. 11.10

► **BEISPIEL 7:** Eine Teilmenge von \mathbb{R} ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $-\infty < a < b < \infty$. Dann ist $[a, b]$ kompakt und zusammenhängend. Nach (i) ist die Bildmenge $R(f)$ ebenfalls kompakt und zusammenhängend. Folglich ist $R(f)$ ein kompaktes Intervall $[c, d]$.

Das bedeutet, dass die Funktion f auf $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt (Zwischenwertsatz von Bolzano).

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv (z. B. f ist streng monoton), dann ist die Umkehrfunktion nach (ii) stetig (Abb. 11.11).

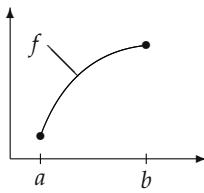


Abb. 11.11

Konvergenz: Eine Folge (u_n) aus dem topologischen Raum X konvergiert definitionsgemäß genau dann gegen den Punkt u aus X , wenn es zu jeder Umgebung $U(u)$ von u eine natürliche Zahl n_U gibt, so dass

$$u_n \in U(u) \quad \text{für alle } n \geq n_U$$

gilt. Wir schreiben $u_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$.

In einem separierten topologischen Raum ist das Grenzelement u eindeutig.

Vergleich von Topologien: Ist X ein topologischer Raum, dann nennen wir das System aller offenen Mengen auf X eine Topologie τ . Sind τ_1 und τ_2 zwei Topologien auf X mit $\tau_1 \subseteq \tau_2$, dann heißt τ_1 schwächer als τ_2 .

11.2.2 Metrische Räume

In einem metrischen Raum ist ein *Abstandsbezug* gegeben. Dadurch lassen sich im Unterschied zu allgemeinen topologischen Räumen wichtige topologische Begriffe durch die Konvergenz von Folgen ausdrücken.

Definition: Eine nichtleere Menge X heißt genau dann ein *metrischer Raum*, wenn zwei beliebigen Punkten $u, v \in X$ eine reelle Zahl $d(u, v) \geq 0$ zugeordnet ist, so dass für alle $u, v, w \in X$ gilt:

- (i) $d(u, v) = 0$ genau dann, wenn $u = v$;
- (ii) $d(u, v) = d(v, u)$ (Symmetrie);
- (iii) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (Dreiecksungleichung).

Die leere Menge \emptyset ist definitionsgemäß auch ein metrischer Raum.

Die Zahl $d(u, v)$ heißt der *Abstand* zwischen den beiden Punkten u und v . Jede Teilmenge eines metrischen Raumes wird bezüglich $d(\cdot, \cdot)$ auch zu einem metrischen Raum. Unter dem Durchmesser $\text{diam } M$ einer nichtleeren Menge M eines metrischen Raumes verstehen wir die Zahl

$$\text{diam } M := \sup\{d(u, v) : u, v \in M\}.$$

Für die leere Menge definieren wir $\text{diam } \emptyset = 0$.

► **BEISPIEL 1:** Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen wird durch

$$d(x, y) := |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

zu einem metrischen Raum. Ferner wird \mathbb{R}^n durch

$$d(x, y) := \sum_{j=1}^n |\xi_j - \eta_j| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

mit $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ zu einem metrischen Raum. Außerdem ist jede Teilmenge von \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^n ein metrischer Raum bezüglich $d(\cdot, \cdot)$.

Weitere wichtige Beispiele für metrische Räume findet man in Abb. 11.5, d.h., die weiter unten zu definierenden Räume (normierte Räume, Hilbert- und Banachräume) sind alle metrische Räume.

Topologie: Eine Menge M in einem metrischen Raum X heißt genau dann *offen*, wenn es zu jedem Punkt $u \in M$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Menge $U_\varepsilon(u) := \{v \in X : d(u, v) < \varepsilon\}$ auch zu M gehört (Abb. 11.12). Die Menge $U_\varepsilon(u)$ heißt ε -Umgebung des Punktes u .

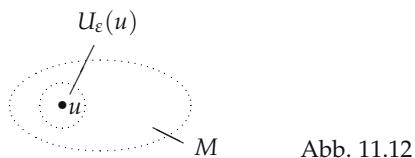


Abb. 11.12

Mit Hilfe dieser offenen Mengen wird jeder metrische Raum zu einem separierten topologischen Raum.

Hauptsatz (Charakterisierung wichtiger topologischer Begriffe durch Konvergenz): Es sei M eine Teilmenge eines metrischen Raumes. Dann gilt:

- (i) $u_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$ genau dann, wenn $d(u_n, u) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Das Grenzelement einer konvergenten Folge ist eindeutig.

(iii) M ist genau dann *abgeschlossen*, wenn aus $u_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$ und $u_n \in M$ für alle n stets auch $u \in M$ folgt.

(iv) M ist genau dann *relativ kompakt*, wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge enthält.

(v) M ist genau dann *kompakt*, wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge enthält, deren Grenzelement zu M gehört.

(vi) M ist genau dann *dicht* in X , wenn es zu jedem Punkt $u \in X$ eine Folge (u_n) in M gibt, die gegen u konvergiert.

(vii) Ein Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ zwischen den beiden metrischen Räumen X und Y ist genau dann im Punkt u stetig, wenn aus $u_n \rightarrow u$ stets $Au_n \rightarrow Au$ folgt (für $n \rightarrow \infty$).

Isometrien: Eine Abbildung $J : X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen X und Y heißt genau dann eine *Isometrie*, wenn J surjektiv ist und

$$d(u, v) = d(Ju, Jv) \quad \text{für alle } u, v \in X$$

gilt. Eine Isometrie ist stets ein Homöomorphismus. Bei einer Isometrie bleiben alle für einen metrischen Raum typischen Eigenschaften erhalten.⁷ Deshalb kann man isometrische metrische Räume miteinander identifizieren.

Das Vervollständigungsprinzip: Eine Folge (u_n) in einem metrischen Raum heißt genau dann eine *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$d(u_n, u_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0(\varepsilon)$$

gilt. Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge. Gilt auch die Umkehrung, dann heißt der metrische Raum *vollständig*.

Somit hat man in einem vollständigen metrischen Raum das folgende fundamentale *Cauchysche Konvergenzkriterium* zur Verfügung: Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Satz: Zu jedem metrischen Raum X gibt es einen vollständigen metrischen Raum Y , der X als dichte Teilmenge enthält; Y ist durch X (bis auf Isometrie) eindeutig bestimmt⁸ und heißt eine Vervollständigung von X .

► **BEISPIEL 2:** Die Vervollständigung der Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} mit der Metrik

$$d(u, v) := |u - v| \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{Q}$$

ergibt die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen.

Totale Beschränktheit: Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes heißt genau dann *beschränkt*, wenn ihr Durchmesser endlich ist.

Eine nichtleere Teilmenge M eines metrischen Raumes heißt genau dann *total beschränkt*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε -Netz existiert, d.h., es gibt endlich viele Punkte $u_1, \dots, u_n \in M$, so dass die ε -Umgebungen $U_\varepsilon(u_1), \dots, U_\varepsilon(u_n)$ die Menge M überdecken.

Definitionsgemäß heißt auch jede leere Menge total beschränkt.

⁷Das sind alle Eigenschaften, die sich mit Hilfe des Abstandsbegriffs erklären lassen.

⁸Die Konstruktion geschieht wie im klassischen Fall von Beispiel 2 über Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen. Für zwei Cauchyfolgen (u_n) und (v_n) schreiben wir

$$(u_n) \sim (v_n) \quad \text{genau dann, wenn} \quad d(u_n, v_n) \rightarrow 0 \tag{11.27}$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Die Elemente von Y sind dann die zu „ \sim “ gehörigen Äquivalenzklassen $[(u_n)]$ (vgl. 11.1). Ferner definieren wir die Metrik auf Y durch

$$d(u, v) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n)$$

mit $u = [(u_n)]$ und $v = [(v_n)]$.

Satz von Hausdorff: In einem vollständigen metrischen Raum ist eine Menge genau dann relativ kompakt, wenn sie total beschränkt ist.

Jeder kompakte metrische Raum ist separabel.

Das Intervallschachtelungsprinzip: Gegeben sei eine Folge $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ von abgeschlossenen Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes mit $\text{diam } M_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gibt es genau einen Punkt u , der zu allen Mengen M_n gehört.⁹

Kompakte Operatoren: Eine Abbildung $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen X und Y heißt genau dann *kompakt*, wenn A stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.⁹

Solche Operatoren spielen eine fundamentale Rolle in der Funktionalanalysis, weil sie sich grob gesprochen wie Abbildungen im \mathbb{R}^n verhalten.

11.2.3 Lineare Räume

Im folgenden stehe \mathbb{K} für \mathbb{R} (Menge der reellen Zahlen) oder \mathbb{C} (Menge der komplexen Zahlen). In einem linearen Raum über \mathbb{K} sind *Linearkombinationen* $\alpha u + \beta v$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ erklärt. Für die Funktionalanalysis ist wichtig, dass Funktionenräume in natürlicher Weise die Struktur unendlichdimensionaler linearer Räume besitzen (vgl. Beispiel 4 weiter unten). Die Theorie endlichdimensionaler linearer Räume ist äquivalent zum klassischen Matrizenkalkül (vgl. Beispiel 3). Wie jedoch bereits John von Neumann in den zwanziger Jahren im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen zur Quantenmechanik zeigte, ist der Matrizenkalkül für die allgemeine Theorie linearer Operatoren in unendlichdimensionalen linearen Räumen ungeeignet, weil die Matrizen nicht immer die volle Information über den Definitionsbereich des Operators enthalten. Zum Beispiel kann man bei Kenntnis der zugehörigen Matrix in der Regel nicht entscheiden, ob der Operator symmetrisch oder selbstadjungiert ist. Deshalb spielt der Matrizenkalkül keine Rolle mehr in der modernen Funktionalanalysis, im Gegensatz zur klassischen Theorie Hilberts, die Anwendungen auf Integralgleichungen im Auge hatte und nicht die Theorie der Differentialgleichungen.

11.2.3.1 Lineare Algebra

Definition: Ein Menge X heißt genau dann ein *linearer Raum* über \mathbb{K} , wenn beliebigen Punkten $u, v \in X$ und beliebigen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ neue Elemente „ $u + v$ “ und „ αu “ eindeutig zugeordnet werden, so dass für alle $u, v, w \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ folgendes gilt.

(A) *Eigenschaften der Addition:*

$$\begin{aligned} u + v &= v + u && (\text{Kommutativität}); \\ (u + v) + w &= u + (v + w) && (\text{Assoziativität}). \end{aligned}$$

Es existiert ein eindeutig bestimmtes Element $o \in X$ mit

$$o + u = u + o \quad \text{für alle } u \in X \quad (\text{Nullelement}).$$

Zu jedem $u \in X$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element aus X , das wir mit $(-u)$ bezeichnen,

⁹Explizit bedeutet dies, dass jede beschränkte Folge (u_n) in $D(A)$ eine Teilfolge (v_n) besitzt, so dass (Av_n) konvergent ist. In der älteren Literatur werden kompakte Operatoren auch als *vollstetig* bezeichnet.

so dass gilt:¹⁰

$$u + (-u) = o \quad (\text{inverses Element}).$$

(B) *Eigenschaften der Multiplikation:*

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u \quad (\text{Distributivität});$$

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u) \quad (\text{Assoziativität}).$$

Ferner sei $1u = u$ für alle $u \in X$.

Lineare Räume über \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}) bezeichnet man auch als *reelle* (bzw. komplexe) lineare Räume.

Lineare Unterräume: Eine Teilmenge M eines linearen Raumes X über \mathbb{K} heißt genau dann ein linearer Unterraum von X , wenn

$$\alpha u + \beta v \in M \quad \text{für alle } u, v \in X \quad \text{und} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

gilt. Dann ist M selbst ein linearer Raum über \mathbb{K} .

Es sei N eine beliebige Teilmenge von X . Dann bezeichnen wir die Menge aller möglichen *endlichen* Linearkombinationen

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}, \quad u_j \in N,$$

als die *lineare Hülle* $\text{span } N$ von N ; $\text{span } N$ ist der kleinste lineare Unterraum von X , der die Menge N enthält.

Lineare Operatoren: Sind X und Y lineare Räume über \mathbb{K} , dann heißt der Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ genau dann *linear*, wenn $D(A)$ ein linearer Unterraum von X ist und

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av \quad \text{für alle } u, v \in D(A) \quad \text{und} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

gilt. Die Menge $N(A) := \{u \in D(A) : Au = 0\}$ bezeichnet man als den *Nullraum* (oder auch Kern) von A .

Ein linearer Operator $A : D(A) \rightarrow M$ ist genau dann *injektiv*, wenn sein Kern trivial ist, d. h., aus $Au = 0$ folgt $u = 0$.

Lineare Isomorphie: Sind X und Y lineare Räume über \mathbb{K} , dann heißt der Operator $A : X \rightarrow Y$ genau dann eine lineare Isomorphie, wenn A *bijektiv* und linear ist. In diesem Fall nennt man X (linear) isomorph zu Y . Dafür schreibt man $X \cong Y$.

Bei linearen Isomorphismen bleiben alle Eigenschaften eines linearen Raumes erhalten.¹¹ Deshalb können (linear) isomorphe lineare Räume miteinander identifiziert werden.

Lineare Unabhängigkeit und Dimension: Die Elemente u_1, \dots, u_n eines linearen Raumes X über \mathbb{K} heißen genau dann *linear unabhängig*, wenn aus

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

stets $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ folgt. Andernfalls heißen u_1, \dots, u_n linear abhängig.

Die Maximalzahl linear unabhängiger Elemente in X bezeichnet man als die *Dimension* $\dim X$ von X . Speziell bedeutet $\dim X = \infty$, dass beliebig endlich viele linear unabhängige Elemente u_1, \dots, u_n in X existieren ($n = 1, 2, \dots$).

¹⁰Anstelle von $u + (-v)$ schreiben wir in Zukunft kurz $u - v$.

Man kann ferner zeigen, dass sich aus den obigen Eigenschaften „ $0u = o$ für alle $u \in X$ “ und „ $\alpha o = o$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ “ ergibt. Um die Bezeichnung zu vereinfachen, werden wir für das Nullelement „ o “ in \mathbb{K} und das Nullelement „ o “ in X von jetzt an das gleiche Symbol „ o “ verwenden. Wegen der geltenden Regeln kann es dabei nicht zu Widersprüchen kommen.

¹¹Das sind alle Eigenschaften, die mit Hilfe der Operationen $u + v$ und αu erklärt werden.

Es sei $\dim X < \infty$. Ein System u_1, \dots, u_n mit $1 \leq n < \infty$ heißt genau dann eine *Basis* des linearen Raumes X über \mathbb{K} , wenn sich jedes $u \in X$ eindeutig in der Form

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

darstellen lässt. Jede Basis von X hat die gleiche Anzahl von Elementen, die mit $\dim X$ übereinstimmt.

► **BEISPIEL 1** (der lineare Raum \mathbb{R}^n): Um den Zusammenhang mit dem Matrizenkalkül bequem zu erhalten, fassen wir den \mathbb{R}^n als die Menge aller Spaltenmatrizen

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R},$$

auf und definieren $\alpha x + \beta y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ durch die übliche Matrizenoperation

$$\alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \xi_1 + \beta \eta_1 \\ \vdots \\ \alpha \xi_n + \beta \eta_n \end{pmatrix}.$$

Damit wird \mathbb{R}^n zu einem reellen linearen Raum. Wählen wir $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ gleich einer Spaltenmatrix der Länge n mit einer Eins an der j -ten Stelle, dann bildet e_1, \dots, e_n eine Basis von \mathbb{R}^n , d. h., jedes $x \in \mathbb{R}^n$ lässt sich eindeutig in der Form

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n, \quad \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}, \quad (11.28)$$

darstellen. Es gilt $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Die linearen Operatoren $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind dann genau die reellen $(m \times n)$ -Matrizen $A = (a_{ij})$, und die Gleichung $Ax = y$ entspricht der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}. \quad (11.29)$$

Dabei ist a_{ij} eindeutig durch

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} b_i \quad (11.30)$$

gegeben, wobei $b_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ eine Spaltenmatrix der Länge m mit einer Eins an der i -ten Stelle bezeichnet.

► **BEISPIEL 2** (der lineare Raum \mathbb{C}^n): Ersetzen wir in Beispiel 1 die reellen Zahlen durch komplexe Zahlen, dann erhalten wir den linearen Raum \mathbb{C}^n .

► **BEISPIEL 3** (allgemeiner n -dimensionaler linearer Raum X über \mathbb{K}): Wir wollen zeigen, dass gilt:

- (M) *Die Theorie linearer Operatoren in endlichdimensionalen linearen Räumen ist äquivalent zum klassischen Matrizenkalkül.*

Es seien X und Y lineare Räume über \mathbb{K} mit $\dim X = n$ und $\dim Y = m$, $1 \leq m, n < \infty$. Dann ist X (bzw. Y) linear isomorph zu \mathbb{K}^n (bzw. zu \mathbb{K}^m), d. h.

$$X \cong \mathbb{K}^n, \quad Y \cong \mathbb{K}^m.$$

Um die zugehörige lineare Isomorphie $L : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ zu konstruieren, wählen wir eine Basis e_1, \dots, e_n in X und stellen jedes Element x aus X eindeutig durch (11.28) dar. Definitionsgemäß ordnet dann L jedem x aus X die Spaltenmatrix $(\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ zu.

Ferner sei $A : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Wir wählen eine Basis b_1, \dots, b_m in Y und ordnen A durch (11.30) die Matrix (a_{ij}) zu. Dann ist die Gleichung $Ax = y$ äquivalent zu der Matrizengleichung (11.29), d. h., das obige Prinzip (M) ist gerechtfertigt.

Speziell gilt: Zwei endlichdimensionale lineare Räume über \mathbb{K} sind genau dann linear isomorph, wenn sie die gleiche Dimension besitzen.

Diese Aussage ist für unendlichdimensionale lineare Räume falsch.

► **BEISPIEL 4** (der unendlichdimensionale Funktionenraum $\Phi(\mathbb{R})$): Mit $\Phi(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. In üblicher Weise definieren wir die Linearkombination $\alpha u + \beta v$ durch

$$(\alpha u + \beta v)(x) := \alpha u(x) + \beta v(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und alle $u, v \in \Phi(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Damit wird $\Phi(\mathbb{R})$ zu einem linearen Raum. Setzen wir $e_j(x) := x^j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, dann ist e_0, \dots, e_n für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ ein linear unabhängiges System. Tatsächlich folgt aus $\alpha_0 e_0 + \dots + \alpha_n e_n = 0$, also

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

dass alle α_j gleich null sind. Dies entspricht dem Identitätssatz für Polynome. Somit gilt $\dim \Phi(\mathbb{R}) = \infty$.

Die lineare Hülle $\text{span}\{e_0, \dots, e_n\}$ ist ein $(n+1)$ -dimensionaler linearer Unterraum von $\Phi(\mathbb{R})$ und besteht aus allen reellen Polynomen vom Grad $\leq n$.

Linearkombination von Mengen: Sind M und L Mengen in einem linearen Raum über \mathbb{K} , dann definieren wir in naheliegender Weise

$$\alpha L + \beta M := \{\alpha u + \beta v : u \in L, v \in M\}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Eine Teilmenge M eines linearen Raumes X heißt genau dann eine *lineare Untermannigfaltigkeit*, wenn $M = u + L$ gilt, wobei L ein linearer Unterraum von X und u ein festes Element in X ist.

Wir definieren $\dim M := \dim L$. Diese Definition ist unabhängig von der Darstellung von M .

► **BEISPIEL 5:** Im \mathbb{R}^2 (bzw. \mathbb{R}^3) sind genau die Geraden, Punkte und der \mathbb{R}^2 selbst (bzw. die Ebenen, Geraden, Punkte und der \mathbb{R}^3) die linearen Untermannigfaltigkeiten.

Eine lineare Untermannigfaltigkeit ist genau dann ein linearer Unterraum, wenn sie durch den Nullpunkt geht.

Faktorräume und Kodimension: Es sei L ein linearer Unterraum des linearen Raumes X über \mathbb{K} . Durch

$$u \sim v \quad \text{genau dann, wenn} \quad u - v \in L$$

ergibt sich eine Äquivalenzrelation (vgl. 11.1). Die zugehörigen Äquivalenzklassen $[u]$ bilden definitionsgemäß den Faktorraum X/L . Durch die Operation

$$\alpha[u] + \beta[v] = [\alpha u + \beta v]$$

für alle $u, v \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ wird X/L zu einem linearen Raum, dessen Dimension man als die *Kodimension* $\text{codim } L$ von L bezeichnet, d. h.

$$\text{codim } L := \dim X/L.$$

Für $\dim X < \infty$ gilt

$$\text{codim } L = \dim X - \dim L.$$

Explizit hat man $[u] = u + L$. Die Operationen für die Elemente $[u]$ von X/L entsprechen den üblichen Linearkombinationen für Mengen. Da L ein linearer Unterraum ist, gilt $\alpha L + \beta L = L$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Somit hat man

$$\alpha(u + L) + \beta(v + L) = (\alpha u + \beta v) + L.$$

Das entspricht $\alpha[u] + \beta[v] = [\alpha u + \beta v]$.

Direkte Summe: Es sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} mit den beiden linearen Unterräumen L und M . Wir schreiben genau dann

$$X = L \oplus M, \quad (11.31)$$

wenn jedes $x \in X$ eine eindeutige Zerlegung der Form

$$x = u + v, \quad u \in L, \quad v \in M, \quad (11.32)$$

besitzt. In diesem Fall sagen wir, dass X die direkte Summe von L mit M ist. Ferner heißt M das *algebraische Komplement* zu L . Dieses ist isomorph zum Faktorraum X/L , d. h.

$$M \cong X/L.$$

Da diese Aussage für jedes algebraische Komplement M von L gilt, kann man den Faktorraum X/L als *abstraktes algebraisches Komplement* zu L auffassen.

Projektionsoperatoren (Parallelprojektion): Ein linearer Operator $P : X \rightarrow X$ heißt genau dann ein *Projektionsoperator*, wenn $P^2 = P$ gilt.

Ist die direkte Summe (11.31) gegeben, dann erhält man aus (11.32) durch

$$Px := u$$

einen Projektionsoperator $P : X \rightarrow X$ von X auf L . Ferner ergibt sich $L = P(X)$ und $M = (I - P)(X)$.

Ist umgekehrt ein Projektionsoperator $P : X \rightarrow X$ gegeben und setzen wir $L := P(X)$, $M := (I - P)(X)$, dann gilt (11.31).

Projektionsoperatoren werden in der *numerischen Funktionalanalysis* benutzt, um das Ritzsche Verfahren, das Galerkinverfahren und Projektions-Iterationsverfahren elegant zu beschreiben (vgl. 11.4).

Orthogonale Projektionen werden in 11.3.2 im Zusammenhang mit Hilberträumen betrachtet.

► **BEISPIEL 6** (anschauliche Bedeutung von direkten Summen und Faktorräumen in der Ebene): Es sei $X = \mathbb{R}^2$. Ferner seien L und M zwei verschiedene Geraden durch den Nullpunkt. Dann gilt

$$X = L \oplus M.$$

Für jedes $x \in X$ erhalten wir die eindeutige Zerlegung $x = u + v$ mit $u \in L, v \in M$ (Abb. 11.13).

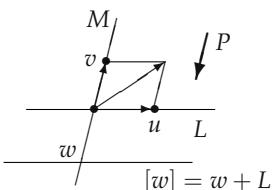


Abb. 11.13

Der Operator $P : X \rightarrow L$ mit $Px := u$ entspricht in Abb. 11.13 der Parallelprojektion der Ebene auf die Gerade L in Richtung von M . Steht die Gerade M senkrecht auf der Geraden L , dann entspricht der Operator P einer orthogonalen Projektion. Ferner hat man

$$\text{codim } L = \dim \mathbb{R}^2 - \dim M = 2 - 1 = 1.$$

Anschaulich gesprochen ist $\text{codim } L$ gleich der Anzahl der Dimensionen, die der Geraden L „fehlen“, um die Ebene X aufzuspannen.¹²

Die Elemente $[w]$ des Faktorraumes X/L sind in sehr anschaulicher Weise genau alle Geraden parallel zu L (Abb. 11.13), d. h.

$$[w] = w + L, \quad w \in M.$$

Mit diesen Geraden wird in natürlicher Weise gerechnet, indem $\alpha[u] + \beta[v] = [\alpha u + \beta v]$ gesetzt wird, also

$$\alpha(u + L) + \beta(v + L) = (\alpha u + \beta v) + L, \quad u, v \in M.$$

Somit kann man mit diesen Geraden wie mit M rechnen, d. h., X/L ist isomorph zu M . Zusammenfassend gilt:

$$\mathbb{R}^2 = L \oplus M \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^2 / L \cong M.$$

Topologische direkte Summe: Von besonderer Bedeutung sind Spezialfälle algebraischer direkter Summen – die sogenannten topologischen direkten Summen. Es sei X ein Banachraum (vgl. 11.2.4). Dann heißt die direkte Summe $X = L \oplus M$ in (11.31) genau dann eine *topologische direkte Summe*, wenn der zugehörige Projektionsoperator $P : X \rightarrow X$ stetig ist. In diesem Fall sagt man auch, dass X von L gespalten wird, und M heißt ein *topologisches Komplement* zu L .

Jeder abgeschlossene lineare Unterraum L von X mit $\dim L < \infty$ oder $\text{codim } L < \infty$ spaltet X .

In einem Hilbertraum X gilt: Der lineare Unterraum L spaltet genau dann X , wenn er abgeschlossen ist.

Produktraum: Sind X und Y lineare Räume über \mathbb{K} , dann ist das Produkt $X \times Y$ definitionsgemäß gleich der Menge aller Paare (u, v) mit $u \in X$ und $v \in Y$, d. h.

$$X \times Y := \{(u, v) : u \in X, v \in Y\}.$$

Definieren wir in natürlicher Weise

$$\alpha(u, v) + \beta(w, z) := (\alpha u + \beta w, \alpha v + \beta z)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, w \in X$, $v, z \in Y$, dann wird $X \times Y$ zu einem linearen Raum über \mathbb{K} .

Dualer Raum: Ist X ein linearer Raum über \mathbb{K} , dann bezeichnet man genau die linearen Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ als lineare Funktionale auf X .

Die Menge dieser linearen Funktionale bildet definitionsgemäß den dualen Raum X^T . Anstelle von $f(u)$ schreiben wir auch $\langle f, u \rangle$, d. h.

$$\langle f, u \rangle := f(u) \quad \text{für alle } u \in X, f \in X^T.$$

Diese Symbolik erweist sich als sehr bequem, weil auf diese Weise die Analogien zum Skalarprodukt (f, u) in Hilberträumen deutlich werden (vgl. 11.2.5). Es gilt

$$\langle \alpha f + \beta g, u \rangle = \alpha \langle f, u \rangle + \beta \langle g, u \rangle, \quad \langle f, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle f, u \rangle + \beta \langle f, v \rangle \quad (11.33)$$

für alle $u, v \in X$, $f, g \in X^T$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

¹²In einem beliebigen linearen Raum heißt jeder lineare Unterraum der Kodimension eins eine *Hyperebene*. Beispielsweise ist im \mathbb{R}^3 jede Ebene durch den Nullpunkt eine Hyperebene.

Dualer Operator: Ist $A : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator zwischen den beiden linearen Räumen X und Y über \mathbb{K} , dann definieren wir durch¹³

$$\langle A^T f, u \rangle = \langle f, Au \rangle \quad \text{für alle } u \in X, f \in Y^T,$$

in eindeutiger Weise einen linearen Operator $A^T : Y^T \rightarrow X^T$, den wir den zu A dualen Operator nennen.

► **BEISPIEL 7** (dualer Operator in endlichdimensionalen linearen Räumen als *transponierte* Matrix): Es seien X und Y lineare Räume über \mathbb{K} mit $\dim X = n$ und $\dim Y = m$, $1 \leq n, m < \infty$. Ferner sei

$$A : X \rightarrow Y$$

ein linearer Operator. Wir wählen eine Basis e_1, \dots, e_n in X und eine Basis b_1, \dots, b_m in Y . Definieren wir e_j^* und b_k^* durch

$$e_j^*(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) := \alpha_j \quad \text{und} \quad b_k^*(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m) := \beta_k$$

für alle $\alpha_r, \beta_s \in \mathbb{K}$, dann gilt $e_j^* \in X^T$ und $b_k^* \in Y^T$. Genauer bildet e_1^*, \dots, e_n^* eine Basis in X^T , die man als die duale Basis zu e_1, \dots, e_n bezeichnet.¹⁴ Tatsächlich hat man für jedes lineare Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ die Gleichung

$$f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = f(e_1)\alpha_1 + \dots + f(e_n)\alpha_n, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}.$$

Das bedeutet

$$f = f(e_1)e_1^* + \dots + f(e_n)e_n^*.$$

Definieren wir wie in (11.30) die Matrixelemente a_{ij} bzw. a_{ij}^T von A bzw. A^T durch

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} b_i \quad \text{bzw.} \quad A^T b_j^* := \sum_{i=1}^n a_{ij}^T e_i^*,$$

dann gilt

$$a_{kj}^T = \langle A^T b_j^*, e_k \rangle = \langle b_j^*, Ae_k \rangle = a_{jk}.$$

Das bedeutet:

Die Matrix zu A^T entspricht der transponierten Matrix zu A .

Wegen $\dim X = \dim X^T = n$ ist X linear isomorph zum dualen Raum X^T , d.h., es gilt

$$X \cong X^T \cong \mathbb{K}^n.$$

Daraus folgt $X^T \cong X^{TT}$, also auch

$$X \cong X^{TT} \cong \mathbb{K}^n.$$

Die Isomorphie $X \cong X^T$ ist jedoch nicht in invarianter Weise gegeben, denn sie hängt von der Wahl einer Basis in X ab. Deshalb ist es für ein tieferes Verständnis der Dualitätstheorie notwendig, X und X^T als zwei *unterschiedliche* mathematische Objekte aufzufassen. Für unendlichdimensionale lineare Räume ist dieser Standpunkt unerlässlich.

In der Elementarteilchenphysik werden die Teilchen (z.B. die Quarks) durch Elemente eines linearen Raumes X beschrieben, während die Elemente des dualen Raumes X^T den Antiteilchen (z.B. den Antiquarks) entsprechen (vgl. Kapitel 17).

¹³Das bedeutet $(A^T f)(u) := f(Au)$.

¹⁴Analog bildet b_1^*, \dots, b_m^* eine Basis in Y^T , die die duale Basis zu b_1, \dots, b_m heißt.

11.2.3.2 Multilineare Algebra

Multilinearformen spielen eine entscheidende Rolle bei der Definition der höheren Ableitungen eines Operators und in der Analysis auf Mannigfaltigkeiten (vgl. Kapitel 12 und 15).

Bilinearformen: Es seien X und Y lineare Räume über \mathbb{K} . Unter einer Bilinearform B verstehen wir eine Abbildung $B : X \times X \rightarrow Y$ mit

$$B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w),$$

$$B(w, \alpha u + \beta v) = \alpha B(w, u) + \beta B(w, v)$$

für alle $u, v, w \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, d.h., B ist linear in jedem Argument. Mit $M_2(X, X)$ bezeichnen wir die Menge aller Bilinearformen $B : X \times X \rightarrow Y$. Erklären wir für Bilinearformen $B, C \in M_2(X, X)$ die Linearkombination $\beta B + \gamma C$ in natürlicher Weise durch

$$(\beta B + \gamma C)(u, v) := \beta B(u, v) + \gamma C(u, v)$$

für alle $u, v \in X$ und $\beta, \gamma \in \mathbb{K}$, dann wird $M_2(X, X)$ zu einem linearen Raum über \mathbb{K} .

Multilinearformen: Analog definiert man $M_n(X, \dots, X)$ als die Menge aller n -linearen Abbildungen $B : X \times \dots \times X \rightarrow Y$ (n Faktoren X), d.h., $B(u_1, \dots, u_n)$ ist linear in jedem Argument; M_n ist ein linearer Raum über \mathbb{K} .

Im Spezialfall $Y = \mathbb{K}$ definieren wir für eine n -lineare Form B und eine m -lineare Form C das sogenannte Tensorprodukt $B \otimes C$ durch

$$(B \otimes C)(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) := B(u_1, \dots, u_n)C(v_1, \dots, v_m).$$

Dann ist $B \otimes C$ eine $(n+m)$ -lineare Form.

► **BEISPIEL 8:** Es sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} . Setzen wir

$$B(f, v) := \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } f \in X^T, v \in X,$$

dann ist $B : X^T \times X \rightarrow \mathbb{K}$ nach (11.33) eine Bilinearform.

Speziell ist $B(u, v) := uv$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$ eine Bilinearform von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in \mathbb{R} .

► **BEISPIEL 9** (der Raum $M_2(X, X)$ der Bilinearformen über X): Es bezeichne X einen n -dimensionalen linearen Raum über \mathbb{K} mit $1 \leq n < \infty$. Wir wählen eine Basis e_1, \dots, e_n in X und bezeichnen mit e_1^*, \dots, e_n^* die zugehörige duale Basis in X^T . Jede Bilinearform $B : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$, d.h., jedes $B \in M_2(X, X)$, besitzt dann die Darstellung

$$B = \sum_{j,k=1} b_{jk} e_j^* \otimes e_k^*, \tag{11.34}$$

wobei die Zahlen $b_{jk} \in \mathbb{K}$ eindeutig durch B bestimmt sind. Deshalb bildet $\{e_j^* \otimes e_k^*\}$, $j, k = 1, \dots, n$, eine Basis in $M_2(X, X)$, d.h., es gilt

$$\dim M_2(X, X) = (\dim X)^2.$$

► **BEISPIEL 10** (der Raum $M_2(X^T, X^T)$ der Bilinearformen über X^T): Es sei X wie in Beispiel 9 gegeben. Jedem Basiselement e_j ordnen wir ein lineares Funktional $e_j : X^T \rightarrow \mathbb{K}$ zu, das wir durch

$$e_j(\alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^*) := \alpha_j$$

definieren.¹⁵ Dann gilt

$$(e_j \otimes e_k)(u, v) = e_j(u)e_k(v) \quad \text{für alle } u, v \in X^T.$$

¹⁵Korrektiverweise müssten wir das zu e_j gehörige Funktional mit einem anderen Symbol bezeichnen, z.B. e_j^{**} . Um die Bezeichnung zu vereinfachen, schreiben wir jedoch kurz e_j anstelle von e_j^{**} .

Ferner kann man jede Bilinearform $B : X^T \times X^T \rightarrow \mathbb{K}$ in der Form

$$B = \sum_{j,k=1}^n b_{jk}(e_j \otimes e_k) \quad (11.35)$$

darstellen, wobei alle $b_{jk} \in \mathbb{K}$ durch B eindeutig festgelegt sind. Somit bildet $\{e_j \otimes e_k\}, j, k = 1, \dots, n$, eine Basis von $M_2(X^T, X^T)$, d. h., es gilt

$$\dim M_2(X^T, X^T) = (\dim X^T)^2 = (\dim X)^2.$$

Das Tensorprodukt linearer Räume: Es seien X und Y zwei lineare Räume über \mathbb{K} . Dann sei das sogenannte Tensorprodukt $X \otimes Y$ gleich der Menge aller formalen endlichen Linearkombinationen

$$\alpha_1(u_1 \otimes v_1) + \dots + \alpha_n(u_n \otimes v_n)$$

mit $u_j \in X$, $v_j \in Y$ und $\alpha_j \in \mathbb{K}$, wobei wir mit dem Symbol „ $u \otimes v$ “ wie mit einem *Produktzeichen* rechnen, d. h., es gelten die beiden Distributivgesetze

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v) \otimes w &= \alpha(u \otimes w) + \beta(v \otimes w) \\ u \otimes (\alpha w + \beta z) &= \alpha(u \otimes w) + \beta(u \otimes z) \end{aligned} \quad (11.36)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in X$ und $w, z \in Y$. Mit diesen Regeln wird $X \otimes Y$ in natürlicher Weise zu einem linearen Raum über \mathbb{K} , den man das Tensorprodukt von X mit Y nennt.

Tensorprodukte verwendet man z. B. in der Theorie der Distributionen (vgl. 10.4). In der Quantentheorie entsprechen Tensorprodukte den Zuständen zusammengesetzter Systeme (z. B. besteht ein Proton aus drei Quarks; vgl. 17.8). Die Analysis auf Mannigfaltigkeiten beruht wesentlich auf Tensorprodukten und sogenannten alternierenden Produkten, die durch

$$u \wedge v := u \otimes v - v \otimes u$$

erklärt werden (vgl. Kapitel 16).

Rechtfertigung des Tensorprodukts: Wir sind hier analog zum formalen Gebrauch der komplexen Zahlen im 17. und 18. Jahrhundert vorgegangen. Die Mathematiker benutzten dabei das formale Symbol $a + bi$ (a und b reelle Zahlen) zusammen mit „ $i^2 = -1$ “. Man war sich dabei aber nie sicher, ob dieser Kalkül *widerspruchsfrei* ist. Erst im 19. Jahrhundert rechtfertigte Gauß diesen formalen Kalkül, indem er ein *konkretes Modell* für die komplexen Zahlen angab. Im vorliegenden Fall geschieht die Rechtfertigung des Tensorprodukts durch die Konstruktion eines geeigneten *Faktorraumes*. Mit $\text{span}(X \times Y)$ bezeichnen wir hierzu zunächst alle endlichen Linearkombinationen der Form

$$\alpha_1(u_1, v_1) + \dots + \alpha_n(u_n, v_n)$$

mit $u_j \in X$, $v_j \in Y$ und $\alpha_j \in \mathbb{K}$. Dann wird $\text{span}(X \times Y)$ in natürlicher Weise zu einem linearen Raum über \mathbb{K} . Ferner sei L die lineare Hülle aller Elemente der Form

$$(\alpha u + \beta v, w) - \alpha(u, v) - \beta(v, w), \quad (u, \alpha w + \beta z) - \alpha(u, w) - \beta(u, z)$$

mit $u, v \in X$, $w, z \in Y$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Wir setzen nun

$$X \otimes Y := \text{span}(X \times Y) / L.$$

Definieren wir ferner

$$u \otimes v := [(u, v)],$$

wobei $[(u, v)] = (u, v) + L$ die zu (u, v) gehörige Äquivalenzklasse bezeichnet, dann erhalten wir genau, die gewünschten Operationen (11.36).

► **BEISPIEL 11** (Tensorprodukt von Funktionen): Die Grundidee des Tensorprodukts von Funktionen ist in der Formel

$$(u \otimes v)(x, y) := u(x)v(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \quad (11.37)$$

enthalten. Es sei $\Phi(\mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 4). Dann ist $\Phi(\mathbb{R}) \otimes \Phi(\mathbb{R})$ linear isomorph zur Menge M aller reellen *endlichen* Linearkombinationen

$$f := \alpha_1(u_1 \otimes v_1) + \dots + \alpha_n(u_n \otimes v_n),$$

wobei wir (11.37) benutzen. Somit können wir das Tensorprodukt $\Phi(\mathbb{R}) \otimes \Phi(\mathbb{R})$ mit der Menge aller reellen Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ identifizieren, die die spezielle Gestalt

$$f(x, y) = \alpha_1 u_1(x)v_1(y) + \dots + \alpha_n u_n(x)v_n(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

und alle reellen Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ besitzen.

► **BEISPIEL 12** (Tensorprodukt endlichdimensionaler linearer Räume): Es seien X und Y lineare Räume über \mathbb{K} mit $\dim X = n$ und $\dim Y = m$, $1 \leq m, n < \infty$. Dann gilt

$$X \otimes X \cong M_2(X^T, X^T),$$

falls wir dem abstrakten Tensorprodukt $e_j \otimes e_k$ eine Bilinearform $B : X^T \times X^T \rightarrow \mathbb{K}$ zuordnen, die durch

$$B(u, v) := e_j(u)e_k(v) \quad \text{für alle } u, v \in X^T$$

gegeben ist (vgl. Beispiel 10).

In analoger Weise kann man $X \otimes Y$ mit der Menge $M_2(X^T, Y^T)$ aller Bilinearformen $B : X^T \times Y^T \rightarrow \mathbb{K}$ identifizieren. Dabei gilt die Produktformel

$$\dim(X \otimes Y) = \dim X \dim Y.$$

Konvexität: In jedem linearen Raum kann man konvexe Mengen und konvexe Funktionen definieren. Das betrachten wir in 11.5.1 im Zusammenhang mit fundamentalen Trennungssätzen für konvexe Mengen.

11.2.4 Banachräume

In einem normierten Raum hat man eine Norm $\|u\|$ zur Verfügung, die den Betrag $|u|$ einer reellen Zahl verallgemeinert. Gilt das fundamentale Cauchysche Konvergenzkriterium in einem normierten Raum, dann heißt dieser ein Banachraum.

Normierte Räume: Unter einem normierten Raum über \mathbb{K} versteht man einen linearen Raum X über \mathbb{K} , wobei jedem $u \in X$ eine reelle Zahl $\|u\| \geq 0$ zugeordnet ist, so dass für alle $u, v \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

- (i) $\|u\| = 0$ genau dann, wenn $u = 0$;
- (ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$;
- (iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung).

Wir bezeichnen $\|u\|$ als die Norm von u . Jeder normierte Raum X wird durch

$$d(u, v) := \|u - v\| \quad \text{für alle } u, v \in X$$

zu einem metrischen Raum. Deshalb gelten alle Aussagen aus 11.2.2 (z. B. der Hauptsatz über die Charakterisierung wichtiger topologischer Begriffe durch Konvergenz). Insbesondere ist genau dann $u_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

gilt. Ferner ist die Folge (u_n) genau dann eine Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

In jedem normierten Raum X gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Ferner folgt aus $u_n \rightarrow u$ und $v_n \rightarrow v$ sowie $\alpha_n \rightarrow \alpha$ für $n \rightarrow \infty$ stets

$$\alpha_n u_n \rightarrow \alpha u, \quad u_n + v_n \rightarrow u + v, \quad \|u_n\| \rightarrow \|u\| \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

d. h., diese Operationen sind stetig.

Banachräume: Unter einem Banachraum versteht man einen normierten Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergent ist.

In der Sprache der metrischen Räume bedeutet das: Ein normierter Raum ist genau dann ein Banachraum, wenn der zugehörige metrische Raum vollständig ist.

Jeder endlichdimensionale normierte Raum ist stets ein Banachraum.

Jeder abgeschlossene lineare Teilraum eines Banachraumes ist wiederum ein Banachraum.

Normisomorphie: Zwei normierte Räume X und Y über \mathbb{K} heißen genau dann normisomorph, wenn es eine lineare Isomorphie $\varphi : X \rightarrow Y$ gibt mit

$$\|\varphi(u)\| = \|u\| \quad \text{für alle } u \in X.$$

Bei einer Normisomorphie bleiben alle für einen normierten Raum typischen Eigenschaften erhalten. Deshalb kann man normisomorphe normierte Räume miteinander identifizieren.

Zwei Normen $\|u\|_1$ und $\|u\|_2$ heißen genau dann äquivalent auf X , wenn es Konstanten $c > 0$ und $d > 0$ gibt mit

$$c\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq d\|u\|_1 \quad \text{für alle } u \in X.$$

Auf einem endlichdimensionalen normierten Raum sind alle Normen äquivalent.

Kugeln: Die offene Menge $K_r(u_0) := \{u \in X : \|u - u_0\| < r\}$ bezeichnet man als offene Kugel vom Radius r mit dem Mittelpunkt u_0 . Der Rand ∂K_r und der Abschluss \bar{K}_r sind dann durch

$$\partial K_r(u_0) = \{u \in X : \|u - u_0\| = r\}, \quad \bar{K}_r(u_0) = \{u \in X : \|u - u_0\| \leq r\}$$

gegeben. Die Menge $K := \{u \in X : \|u\| \leq 1\}$ heißt die abgeschlossene Einheitskugel in X .

Vervollständigungsprinzip: Es sei X ein normierter Raum über \mathbb{K} . Dann existiert eine bis auf Normisomorphie eindeutige Erweiterung von X zu einem Banachraum Y über \mathbb{K} , in dem X dicht liegt.¹⁶

¹⁶Wie bei der Vervollständigung eines metrischen Raumes besteht Y aus sämtlichen Äquivalenzklassen $[(u_n)]$ von Cauchyfolgen (vgl. 11.2.2). Die Norm auf Y ergibt sich durch $\|u\| := \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$ mit $u = [(u_n)]$.

11.2.4.1 Beispiele für Banachräume

Endlichdimensionale Banachräume:

► **BEISPIEL 1:** Der Raum \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}) aller reellen (bzw. komplexen) Zahlen wird bezüglich der Norm

$$\|x\| := |x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (\text{bzw. } x \in \mathbb{C})$$

zu einem Banachraum über \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}).

► **STANDARDBEISPIEL 2** (der Raum \mathbb{K}^N): Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Wir setzen

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq N} |\xi_k|, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^N |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

mit $x = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\xi_k \in \mathbb{K}$. Dann wird \mathbb{K}^N bezüglich $\|x\|_p$ bei festem p , $1 \leq p \leq \infty$, zu einem N -dimensionalen separablen Banachraum über \mathbb{K} .

Da auf einem endlichdimensionalen normierten Raum alle Normen äquivalent sind, gibt es Konstanten $c(p, q) > 0$, so dass

$$\|x\|_p \leq c(p, q) \|x\|_q \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^N$$

und $1 \leq p, q \leq \infty$ gilt. Das sind bekannte klassische Ungleichungen. Insbesondere bezeichnet man die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{K}^N, \quad 1 \leq p < \infty,$$

als *Minkowskische Ungleichung*. Ferner nennt man

$$\left| \sum_{k=1}^N \xi_k \eta_k \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{K}^N$$

und $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p, q < \infty$, die *Höldersche Ungleichung*.

Abb. 11.14 zeigt die abgeschlossenen Einheitskugeln bezüglich der Normen $\|\cdot\|_p$ für $p = 1, 2, \infty$. Diese Beispiele zeigen, dass Kugeln in normierten Räumen nicht notwendigerweise „rund“ sind.

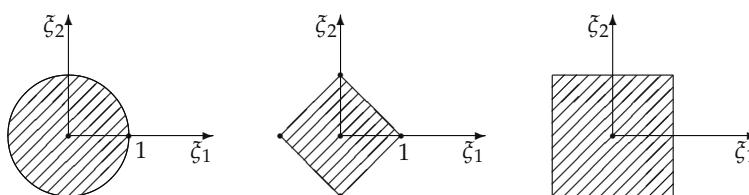


Abb. 11.14

Banachräume glatter Funktionen einer reellen Variablen: Funktionenräume tragen eine natürliche lineare Struktur, die durch $(\alpha u + \beta v)(x) = \alpha u(x) + \beta v(x)$ gegeben ist. Im folgenden sei $-\infty < a < b < \infty$.

► **STANDARDBEISPIEL 3** (der Raum $C[a, b]$): Setzen wir

$$\|u\| := \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|,$$

dann wird der Raum $C[a, b]$ aller stetigen Funktionen $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zu einem unendlichdimensionalen reellen separablen Banachraum.

Der klassische Approximationssatz von Weierstraß lautet in der Sprache der Funktionalanalysis: Die Menge aller reellen Polynome liegt in $C[a, b]$ dicht.¹⁷

► **STANDARDBEISPIEL 4** (der Raum $C^m[a, b]$): Es sei $m = 1, 2, \dots$. Die Menge aller Funktionen $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $[a, b]$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung m besitzen, bilden einen unendlichdimensionalen reellen separablen Banachraum bezüglich der Norm

$$\|u\| := \sum_{k=0}^m \max_{a \leq x \leq b} |u^{(k)}(x)|.$$

Dabei bezeichnet $u^{(k)}$ die k -te Ableitung von u ; ferner sei $u^{(0)}(x) := u(x)$.

► **BEISPIEL 5** (der Raum $C^\alpha[a, b]$): Es sei $0 < \alpha \leq 1$. Die Funktion $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann Hölderstetig mit dem Exponenten α , wenn es eine Konstante $c \geq 0$ gibt, so dass

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \in [a, b]$$

gilt. Die kleinste derartige Konstante wird mit $H_\alpha(u)$ bezeichnet. Die Menge aller dieser Funktionen nennen wir $C^\alpha[a, b]$. Diese Menge wird zu einem unendlichdimensionalen reellen Banachraum, falls wir die Norm durch

$$\|u\| := \max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + H_\alpha(u)$$

definieren.

► **BEISPIEL 6** (der Raum $C^{m,\alpha}[a, b]$): Es sei $m = 1, 2, \dots$ und $0 < \alpha \leq 1$. Mit dem Symbol $C^{m,\alpha}[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $u \in C^m[a, b]$, für welche die m -te Ableitung $u^{(m)}$ zu $C^\alpha[a, b]$ gehört. Bezuglich der Norm

$$\|u\| := \sum_{k=0}^m \max_{a \leq x \leq b} |u^{(k)}(x)| + H_\alpha(u^{(m)})$$

wird $C^{m,\alpha}[a, b]$ zu einem unendlichdimensionalen reellen Banachraum.

Banachräume glatter Funktionen mehrerer Variabler: Die sich nun anschließenden Beispiele 3* bis 6* verallgemeinern die Beispiele 3 bis 6 in naheliegender Weise auf Funktionen mehrerer Variabler. Mit Ω bezeichnen wir eine nichtleere beschränkte offene Menge des \mathbb{R}^N .

► **BEISPIEL 3*:** Die Menge $C(\overline{\Omega})$ aller stetigen Funktionen $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ wird zu einem unendlichdimensionalen reellen separablen Banachraum bezüglich der Norm

$$\|u\| := \max_{u \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Approximationssatz von Weierstraß: Die Menge aller reellen Polynome in N Veränderlichen liegt dicht in $C(\Omega)$.

Kompaktheitssatz von Arzelà–Ascoli: Eine Teilmenge M in $C(\overline{\Omega})$ ist genau dann relativ kompakt, wenn folgendes gilt:

(a) M ist beschränkt, d.h., es gibt eine Konstante c , so dass

$$\|u\| = \max_{u \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq c \quad \text{für alle } u \in M \quad \text{gilt.}$$

¹⁷Explizit bedeutet dies, dass es zu jeder stetigen Funktion $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein reelles Polynom p gibt, so dass $\|u - p\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(x) - p(x)| < \varepsilon$.

(b) M ist gleichgradig stetig, d.h., zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $|x - y| < \delta$ stets

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } u \in M \quad \text{folgt.}$$

► **BEISPIEL 4*** (der Raum $C^m(\overline{\Omega})$): Es sei $m = 1, 2, \dots$. Die Menge aller reellen Funktionen $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, die zu $C^m(\overline{\Omega})$ gehören (vgl. 10.1.3), bilden einen unendlichdimensionalen reellen separablen Banachraum bezüglich der Norm

$$\|u\| := \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in \overline{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Dabei wird über alle partielle Ableitungen $\partial^\alpha u$ von u bis zur Ordnung m summiert.

► **BEISPIEL 5*** (der Raum $C^\alpha(\overline{\Omega})$): Es sei $0 < \alpha \leq 1$. Definitionsgemäß besteht $C^\alpha(\overline{\Omega})$ aus allen Funktionen $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, die Hölderstetig mit dem Exponenten α sind, d.h., es gibt eine Konstante $c \geq 0$, so dass

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \in \overline{\Omega}$$

gilt. Die kleinste derartige Konstante c wird mit $H_\alpha(u)$ bezeichnet. Bezuglich der Norm

$$\|u\| := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| + H_\alpha(u)$$

wird $C^\alpha(\overline{\Omega})$ zu einem unendlichdimensionalen reellen Banachraum.

► **BEISPIEL 6*** (der Raum $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$): Es sei $m = 1, 2, \dots$ und $0 < \alpha \leq 1$. Mit $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $u \in C^m(\overline{\Omega})$, deren partielle Ableitungen m -ter Ordnung alle zu $C^\alpha(\overline{\Omega})$ gehören. Setzen wir

$$\|u\| := \sum_{|\beta| \leq m} \max_{x \in \overline{\Omega}} |\partial^\beta u(x)| + \sum_{|\gamma|=m} H_\alpha(\partial^\gamma u),$$

dann wird $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ zu einem unendlichdimensionalen reellen Banachraum.

Banchräume integrabler Funktionen: Es sei M eine nichtleere offene Teilmenge des \mathbb{R}^N .

► **STANDARDBEISPIEL 7** (Lebesgueraum $L_p(M)$): Wir setzen

$$\|u\|_p := \left(\int_M |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Durch $L_p(M)$ bezeichnen wir die Menge aller messbaren Funktionen $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|u\|_p < \infty$. Identifizieren wir zwei Funktionen, deren Werte fast überall auf M übereinstimmen, dann bilden die Funktionen u aus $L_p(M)$ einen unendlichdimensionalen reellen separablen Banachraum.

Die Menge $C_0^\infty(M)$ der Testfunktionen liegt dicht in $L_p(M)$.

Es ist entscheidend, dass wir hier das *Lebesgueintegral* benutzen. Würden wir nur das klassische Riemannsche Integral verwenden, dann ergäbe sich lediglich ein normierter Raum $\mathbb{L}_p(M)$, dessen Vervollständigung zu einem Banachraum gleich $L_p(M)$ ist.

Die Dreiecksungleichung

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \quad \text{für alle } u, v \in L_p(M), \quad 1 \leq p < \infty,$$

heißt *Minkowskische Ungleichung*, während man

$$\left| \int_M u(x)v(x) dx \right| \leq \|u\|_p \|v\|_q \quad \text{für alle } u \in L_p(M), \quad v \in L_q(M),$$

als Höldersche Ungleichung bezeichnet. Dabei ist $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p, q < \infty$. Die Höldersche Ungleichung ist die wichtigste Ungleichung der modernen Analysis.

► **BEISPIEL 8:** Bezeichne $L_\infty(M)$ die Menge aller messbaren Funktionen $u : M \rightarrow \mathbb{R}$, die fast überall beschränkt sind, d. h., es gilt

$$|u(x)| \leq c \quad \text{für fast alle } x \in M \text{ und festes } c.$$

Wir setzen

$$\|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} |u(x)|.$$

Dabei steht rechts das „wesentliche Supremum“ von u (essential supremum im Englischen), d. h. das Infimum aller möglichen Konstanten c .

Identifizieren wir Funktionen miteinander, die fast überall auf M gleich sind, dann wird $L_\infty(M)$ zu einem unendlichdimensionalen reellen Banachraum.

Analog zu $L_p(M)$ definieren wir die komplexen Banachräume $L_p^{\mathbb{C}}(M)$, die aus komplexwertigen Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ bestehen. Ferner setzen wir $L_p^{\mathbb{K}} = L_p(M)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (bzw. $= L_p^{\mathbb{C}}(M)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Folgenräume: Parallel zu Beispiel 2 definieren wir

$$\|x\|_\infty := \sup_{1 \leq k < \infty} |\xi_k|, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

► **BEISPIEL 9** (Raum l_p): Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Mit l_p bezeichnen wir die Menge aller reellen Folgen $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, für die $\|x\|_p < \infty$ gilt. Dann wird l_p zu einem unendlichdimensionalen reellen Banachraum.

Die linearen Operationen werden komponentenweise eingeführt, d. h.

$$\alpha x + \beta y := (\alpha \xi_1 + \beta \eta_1, \alpha \xi_2 + \beta \eta_2, \dots).$$

Wählen wir stattdessen komplexe Folgen, dann entsteht der unendlichdimensionale komplexe Banachraum $l_p^{\mathbb{C}}$.

► **BEISPIEL 10** (Raum c): Die Menge aller konvergenten reellen Folgen (ξ_1, ξ_2, \dots) bildet einen abgeschlossenen linearen Teilraum c von l_∞ . Somit ist c selbst ein reeller Banachraum.

Der Raum l_∞ ist nicht separabel. Dagegen sind die Räume l_p , $l_p^{\mathbb{C}}$ und c mit $1 \leq p < \infty$ stets separabel.

Funktionen mit beschränkter Variation: Es sei $-\infty < a < b < \infty$.

► **BEISPIEL 11:** Mit $V[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, d. h., es gibt eine Konstante $c \geq 0$, so dass

$$\sum_{k=1}^n |u(x_k) - u(x_{k-1})| \leq c$$

für jede Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ gilt. Die kleinste mögliche Konstante c heißt die Totalvariation von u und wird mit $V_a^b(u)$ bezeichnet. Setzen wir

$$\|u\| := |u(a)| + V_a^b(u),$$

dann wird $V[a, b]$ zu einem unendlichdimensionalen reellen Banachraum.

Eine Funktion $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gehört genau dann zu $V[a, b]$, wenn sie sich in der Form $u(x) = v(x) - w(x)$ schreiben lässt, wobei v und w auf $[a, b]$ monoton wachsend sind.

11.2.4.2 Lineare stetige Operatoren

Sind X und Y normierte Räume über \mathbb{K} , dann ist der lineare Operator $A : X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn er *beschränkt* ist, d. h., es gibt eine Konstante $c \geq 0$, so dass

$$\|Au\| \leq c\|u\| \quad \text{für alle } u \in X$$

gilt. Die kleinste mögliche Konstante c bezeichnet man mit $\|A\|$ und nennt sie die *Operatornorm* von A . Explizit gilt

$$\|A\| := \sup_{u \in X, \|u\| \leq 1} \|Au\|.$$

Lineare kompakte Operatoren: Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ ist genau dann kompakt (vgl. 11.2.2), wenn das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel relativ kompakt ist.

Der Banachraum $L(X, Y)$: Es seien X und Y Banachräume¹⁸ über \mathbb{K} . Dann bildet die Menge $L(X, Y)$ aller linearen stetigen Operatoren $A : X \rightarrow Y$ einen Banachraum bezüglich der Operatornorm $\|A\|$. Die lineare Struktur auf $L(X, Y)$ wird in natürlicher Weise durch

$$(\alpha A + \beta B)u := \alpha Au + \beta Bu \quad \text{für alle } u \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K},$$

gegeben.

► **BEISPIEL 12** (Integraloperator): Es sei $\mathbb{K} : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei das Intervall $[a, b]$ kompakt ist. Definieren wir

$$(Ku)(x) := \int_a^b \mathbb{K}(x, y)u(y) dy \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

dann ist der lineare Operator $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ stetig. Gilt $|\mathbb{K}(x, y)| \leq c$ für alle $x, y \in [a, b]$, dann ist

$$\|Ku\| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b \mathbb{K}(x, y)u(y) dy \right| \leq (b-a)c \max_{a \leq y \leq b} |u(y)| = (b-a)c\|u\|.$$

Folglich gilt $\|K\| \leq (b-a)c$. Genauer: man hat $\|K\| = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |\mathbb{K}(x, y)| dy$.

Ferner ist $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ kompakt.

► **BEISPIEL 13** (stetiger Differentialoperator): Wir setzen

$$(Au)(x) := u'(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \tag{11.38}$$

Dann ist $A : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ein linearer stetiger Operator. Wegen

$$\|Au\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |u'(x)| \leq \|u\|_{C^1[a, b]}$$

gilt $\|A\| \leq 1$.

► **BEISPIEL 14** (unstetiger Differentialoperator): Wir können den durch (11.38) gegebenen Operator auch als einen Operator der Form $A : D(A) \subseteq C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ auffassen mit dem Definitionsbereich $D(A) := C^1[a, b]$. Dann ist A unbeschränkt, d. h., es gibt keine Konstante $c \geq 0$, so dass $\|Au\| \leq c\|u\|$ für alle $u \in D(A)$ gilt.

¹⁸Es genügt, dass X ein normierter Raum ist.

Ferner ist A unstetig.

Kommentar: In den Anwendungen hat man es oft mit einer zu Beispiel 14 analogen Situation zu tun, d. h., Differentialoperatoren sind nicht auf dem gesamten Raum erklärt und unstetig. Das ist der Grund dafür, dass im Unterschied zu Integraloperatoren (Integralgleichungen) die Theorie der Differentialoperatoren (Differentialgleichungen) wesentlich komplizierter und reichhaltiger ist.

11.2.4.3 Lineare stetige Funktionale und Dualität

Es sei X ein normierter Raum über \mathbb{K} . Dann versteht man unter einem linearen Funktional f auf X einen linearen Operator der Form $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.

Der duale Raum X^* : Es sei X ein normierter Raum über \mathbb{K} . Die Menge aller linearen stetigen Funktionale $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ bildet einen Banachraum X^* über \mathbb{K} , den man als den zu X dualen Raum X^* bezeichnet, d. h., es ist $X^* = L(X, \mathbb{K})$.

Explizit ist die Norm auf X^* durch

$$\|f\| := \sup_{u \in X, \|u\| \leq 1} |f(u)|$$

gegeben. Wir benutzen auch die Symbolik

$$\langle f, u \rangle := f(u) \quad \text{für alle } f \in X^*, u \in X. \quad (11.39)$$

Reflexivität: Wir setzen $X^{**} := (X^*)^*$. Jedem Element $u \in X$ kann man eindeutig ein Element F von X^{**} zuordnen, indem man setzt

$$F(f) := \langle f, u \rangle \quad \text{für alle } f \in X^*. \quad (11.40)$$

Dabei gilt $\|F\| = \|u\|$. Der Banachraum X heißt genau dann *reflexiv*, wenn sich alle F aus X^{**} durch (11.40) darstellen lassen.¹⁹

Jeder endlichdimensionale normierte Raum ist reflexiv.

► **STANDARDBEISPIEL 15:** Es sei $1 \leq p < \infty$ und $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (d. h. $q = \infty$ für $p = 1$). Genau alle linearen stetigen Funktionale f auf dem Banachraum $L_p(M)$ erhält man durch

$$f(u) = \int_M v(x)u(x) \, dx \quad \text{für alle } u \in L_p(M) \quad (11.41)$$

und festes $v \in L_q(M)$. Dann ist $\|f\| = \|v\|_q$. Genauer: die Abbildung $v \mapsto f$ ist eine Normisomorphie von $L_q(M)$ auf $L_p(M)^*$. In diesem Sinne kann man den dualen Raum $L_p(M)^*$ mit $L_q(M)$ identifizieren.

Der Raum $L_p(M)$, $1 < p < \infty$, ist reflexiv, während $L_1(M)$ und $L_\infty(M)$ nicht reflexiv sind.

► **BEISPIEL 16:** Es seien q und p wie in Beispiel 15 gegeben. Genau alle linearen stetigen Funktionale f auf l_p erhält man durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \quad \text{für alle } x \in l_p \quad (11.42)$$

und festes $y \in l_q$. Die Abbildung $y \mapsto f$ ist eine Normisomorphie von l_q auf l_p^* .

¹⁹In formalisierter Weise kann man das auch folgendermaßen ausdrücken. Wir definieren einen Operator $j : X \rightarrow X^{**}$, indem wir $j(u) := F$ setzen, wobei F durch (11.40) gegeben ist. Der Operator j ist linear, injektiv und normerhaltend; X ist nunmehr genau dann reflexiv, wenn $j : X \rightarrow X^{**}$ eine Normisomorphie darstellt. Somit kann man jeden reflexiven Banachraum X mit seinem bidualen Banachraum X^{**} identifizieren. Dafür schreibt man auch kurz „ $X = X^{**}$ “. Man beachte, dass die Mengengleichheit $X = X^{**}$ nicht automatisch die Reflexivität von X impliziert.

Der Raum l_p , $1 < p < \infty$, ist reflexiv, während l_1 und l_∞ nicht reflexiv sind.

► **STANDARDBEISPIEL 17:** Es sei $-\infty < a < b < \infty$. Genau alle linearen stetigen Funktionale f auf $C[a, b]$ erhält man durch das Stieltjesintegral

$$f(u) = \int_a^b u(x) d\varphi(x) \quad \text{für alle } u \in C[a, b], \quad (11.43)$$

wobei $\varphi \in V[a, b]$ gilt. Dabei ist $\|f\| = V_a^b(\varphi)$. Im Spezialfall

$$f(u) = \int_a^b u(x)v(x) dx \quad \text{für alle } u \in C[a, b]$$

und festes $v \in C[a, b]$ ist $\varphi(x) = \int_a^x v(y) dy$.

Bezeichnen wir durch V_0 die Menge aller Funktionen $\varphi \in V[a, b]$ mit $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(x) = 2^{-1}(\varphi(x+0) - \varphi(x-0))$ für alle $x \in (a, b)$, dann gehört zu jedem $f \in C[a, b]^*$ eine eindeutig bestimmte Funktion $\varphi \in V_0$, so dass (11.43) gilt. Die durch (11.43) gegebene Abbildung $\varphi \mapsto f$ ist eine Normisomorphie von V_0 auf $C[a, b]^*$. Somit kann der duale Raum $C[a, b]^*$ mit dem abgeschlossenen linearen Teilraum V_0 von $V[a, b]$ identifiziert werden.

Die Banachräume $C[a, b]$ und $C^m[a, b]$, $m = 1, 2, \dots$, sind nicht reflexiv. Ebenso sind $C(\bar{\Omega})$ und $C^m(\bar{\Omega})$ nicht reflexiv.

Kommentar: Für reflexive Banachräume gelten „schwache“ Kompaktheitsaussagen, die in der modernen Theorie der Variationsprobleme und der partiellen Differentialgleichungen eine fundamentale Rolle spielen (vgl. 11.5.7).

11.2.4.4 Konstruktion neuer Banachräume

Produkträume: Es seien X und Y normierte Räume (bzw. Banachräume) über \mathbb{K} . Dann wird der Produktraum $X \times Y$ (vgl. 11.2.3) bezüglich der Norm

$$\|(u, v)\| := \|u\| + \|v\| \quad \text{für alle } u \in X, v \in Y,$$

zu einem normierten Raum (bzw. Banachraum) über \mathbb{K} .

Faktorraum: Es sei L ein abgeschlossener linearer Unterraum des Banachraumes X über \mathbb{K} . Dann wird der Faktorraum X/L (vgl. 11.2.3) bezüglich der Norm

$$\|[u]\| := \inf_{v \in [u]} \|v\| \quad \text{für alle } [u] \in X/L$$

zu einem Banachraum über \mathbb{K} . Wir erinnern daran, dass $[u] = u + L$ gilt.

Den wichtigen Begriff der topologischen direkten Summe findet man in 11.2.3.

11.2.5 Hilberträume

In einem Prä-Hilbertraum ist ein *Skalarprodukt* (u, v) (oder inneres Produkt) gegeben, welches das Skalarprodukt $\mathbf{u}\mathbf{v}$ für Vektoren im \mathbb{R}^3 verallgemeinert. Damit steht der Begriff der *Orthogonalität* zur Verfügung. Gilt das fundamentale Cauchysche Konvergenzkriterium in einem Prä-Hilbertraum, dann heißt dieser ein Hilbertraum.

Prä-Hilberträume: Unter einem Prä-Hilbertraum über \mathbb{K} versteht man einen linearen Raum X über \mathbb{K} , wobei jedem Elementpaar $u, v \in X$ eine Zahl $(u, v) \in \mathbb{K}$ zugeordnet ist, so dass für alle $u, v, w \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

- (i) $(u, u) \geq 0$; $(u, u) = 0$ genau dann, wenn $u = 0$;
- (ii) $(w, \alpha u + \beta v) = \alpha(w, u) + \beta(w, v)$;
- (iii) $\overline{(u, v)} = (v, u)$.

Die Zahl (u, v) heißt das Skalarprodukt zwischen u und v . Aus (ii) und (iii) folgt²⁰

$$(\alpha u + \beta v, w) = \bar{\alpha}(u, w) + \bar{\beta}(v, w) \quad \text{für alle } u, v, w \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Dabei ist $\bar{\alpha}$ die konjugiert komplexe Zahl zu α . Jeder Prä-Hilbertraum ist ein normierter Raum bezüglich der Norm

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}.$$

Die wichtigste Ungleichung in einem Prä-Hilbertraum X ist die *Schwarzsche Ungleichung*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Das Skalarprodukt ist stetig, d. h., aus $u_n \rightarrow u$ und $v_n \rightarrow v$ für $n \rightarrow \infty$ folgt die Beziehung $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$.

Hilberträume: Unter einem Hilbertraum versteht man einen Prä-Hilbertraum, der bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ ein Banachraum ist.

Jeder endlichdimensionale Prä-Hilbertraum ist ein Hilbertraum.

Unitäre Äquivalenz: Sind X und Y Prä-Hilberträume über \mathbb{K} , dann versteht man unter einem *unitären Operator* $U : X \rightarrow Y$ einen linearen bijektiven Operator, der das Skalarprodukt invariant lässt, d. h., es ist

$$(Uu, Uv) = (u, v) \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Genau dann, wenn ein solcher Operator existiert, heißen X und Y unitär äquivalent.

Bei einem unitären Operator bleiben alle für einen Prä-Hilbertraum typischen Eigenschaften erhalten. Deshalb kann man unitär äquivalente Prä-Hilberträume (bzw. Hilberträume) miteinander identifizieren.

Orthogonalität: Zwei Elemente u und v eines Prä-Hilbertraumes X heißen genau dann zueinander *orthogonal*, wenn $(u, v) = 0$ gilt. Dafür schreiben wir $u \perp v$. Es gilt der *Satz des Pythagoras*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \text{für alle } u, v \in X \quad \text{mit} \quad u \perp v.$$

Ferner hat man die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Weitere wichtige Orthogonalitätseigenschaften von Hilberträumen findet man in 11.3.2 im Zusammenhang mit dem Hauptsatz über quadratische Variationsprobleme.

Dichtheitskriterium: Eine Teilmenge D des Hilbertraumes X ist genau dann dicht, wenn aus $(u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in D$ stets $u = 0$ folgt.

Vervollständigungsprinzip: Es sei X ein Prä-Hilbertraum über \mathbb{K} . Dann existiert eine bis auf unitäre Äquivalenz eindeutige Erweiterung von X zu einem Hilbertraum Y über \mathbb{K} , in dem X dicht liegt.²¹

²⁰In der mathematischen Literatur definiert man häufig $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$. Wir verwenden hier die Konvention der Physiker, die durch den eleganten Dirac-Kalkül diktiert wird [vgl. Zeidler 1995].

²¹Wie bei der Vervollständigung eines metrischen Raumes besteht Y aus allen Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen $[(u_n)]$

11.2.5.1 Standardbeispiele für Hilberträume

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Der Raum \mathbb{K}^N wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle x | y \rangle := \sum_{k=1}^N \bar{\xi}_k \eta_k \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{K}^N$$

zu einem N -dimensionalen Hilbertraum über \mathbb{K} . Dabei setzen wir $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $y = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ mit $\xi_k, \eta_k \in \mathbb{K}$. Die zugehörige Norm

$$|x| := \sqrt{\langle x | x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^N |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

bezeichnen wir als *euklidische Norm*.

Erster Struktursatz: Es sei $N = 1, 2, \dots$. Dann ist jeder N -dimensionale Hilbertraum über \mathbb{K} unitär äquivalent zu \mathbb{K}^N .

► **STANDARDBEISPIEL 2:** Der Folgenraum l_2 (bzw. l_2^C) wird mit Hilfe des Skalarprodukts

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\xi}_k \eta_k \quad \text{für alle } x, y \in l_2 \quad (\text{bzw. } \in l_2^C)$$

zu einem unendlichdimensionalen Hilbertraum über \mathbb{K} (vgl. Beispiel 9 in 11.2.4).

Zweiter Struktursatz: Jeder unendlichdimensionale separable Hilbertraum über \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}) ist unitär äquivalent zu l_2 (bzw. l_2^C).

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Es bezeichne M eine nichtleere offene Menge in \mathbb{R}^N . Dann wird der Raum $L_2(M)$ bezüglich des Skalarprodukts

$$(u, v) := \int_M u(x)v(x) dx \quad \text{für alle } u, v \in L_2(M)$$

zu einem unendlichdimensionalen reellen separablen Hilbertraum (vgl. Standardbeispiel 7 in 11.2.4).

► **BEISPIEL 4:** Der Raum $L_2^C(M)$ wird bezüglich des Skalarprodukts

$$(u, v) := \int_M \overline{u(x)}v(x) dx \quad \text{für alle } u, v \in L_2^C(M)$$

zu einem unendlichdimensionalen *komplexen* separablen Hilbertraum, der in der Quantenmechanik eine grundlegende Rolle spielt.

Die Schwarzsche Ungleichung in $L_2^C(M)$ lautet explizit:

$$\left| \int_M \overline{u(x)}v(x) dx \right| \leq \left(\int_M |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11.44)$$

für alle $u, v \in L_2^C(M)$.

(vgl. 11.2.2). Das Skalarprodukt auf Y ergibt sich durch

$$(u, v) := \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) \quad \text{mit} \quad u = [(u_n)] \quad \text{und} \quad v = [(v_n)].$$

Fortsetzungsprinzip für Operatoren: Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein linearer Operator, wobei X und Y normierte Räume über \mathbb{K} sind und $D(A)$ dicht in X liegt. Ferner setzen wir voraus, dass es eine Konstante c gibt, so dass

$$\|Au\| \leq c\|u\| \quad (11.45)$$

für alle $u \in D(A)$ gilt. Dann lässt sich A eindeutig zu einem linearen stetigen Operator $A : X \rightarrow Y$ fortsetzen, so dass (11.45) für alle $u \in X$ gilt.

► **STANDARDBEISPIEL 5** (Fouriertransformation): Die durch

$$(\mathbb{F}u)(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x|y \rangle} u(y) dy$$

gegebene Fouriertransformation $\mathbb{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (vgl. 10.4.6) lässt sich eindeutig zu einem *unitären* Operator

$$\mathbb{F} : L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$$

fortsetzen, den man die verallgemeinerte Fouriertransformation nennt.

Dualität (Satz von Riesz): Es sei X ein Hilbertraum über \mathbb{K} . Dann erhält man genau alle linearen stetigen Funktionale $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f(u) = (v, u)$$

für alle $u \in X$ und festes $v \in X$. Zusätzlich gilt $\|f\| = \|v\|$.

Setzen wir $Jv := f$, dann ist die sogenannte *Dualitätsabbildung* $J : X \rightarrow X^*$ antilinear und normerhaltend, d. h., für alle $u, v \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

$$J(\alpha u + \beta v) = \bar{\alpha} Ju + \bar{\beta} Jv, \quad \|Jv\| = \|v\|.$$

Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

11.2.5.2 Der adjungierte Operator

Im folgenden bezeichne X einen Hilbertraum über \mathbb{K} . Es sei

$$A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$$

ein linearer Operator, wobei $D(A)$ in X dicht liegt. Dann gibt es genau einen linearen Operator

$$A^* : D(A^*) \subseteq X \rightarrow X$$

mit der Eigenschaft

$$(f, Au) = (A^* f, u) \quad \text{für alle } f \in D(A^*), u \in D(A).$$

Wir nennen A^* den zu A *adjungierten* Operator. Es gilt

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1},$$

falls A injektiv und $R(A)$ dicht in X ist.

Ist $A : X \rightarrow X$ linear und stetig, dann hat auch $A^* : X \rightarrow X$ diese Eigenschaft, und es gilt $\|A\| = \|A^*\|$.

Sind $A, B : X \rightarrow X$ lineare stetige Operatoren, dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$(AB)^* = B^* A^*, \quad A^{**} = A, \quad \text{und} \quad (\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*.$$

Symmetrische und selbstdjungierte Operatoren: Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein linearer Operator, wobei $D(A)$ in X dicht liegt. Der Operator A heißt genau dann *symmetrisch*, wenn

$$\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle \quad \text{für alle } u, v \in D(A)$$

gilt. Das ist gleichbedeutend mit $A \subseteq A^*$.

Der Operator A heißt genau dann *selbstdjungiert*, wenn $A = A^*$ gilt.

Beispiele für selbstdjungierte Integral- und Differentialoperatoren findet man in 11.3.3 (Hilbert–Schmidt-Theorie) und in 11.3.5 (Fortsetzung von Friedrichs). Selbstdjungierte Operatoren sind von grundlegender Bedeutung für die mathematische Physik, insbesondere für die Quantenphysik.

Unitäre Operatoren: Ein linearer stetiger Operator $U : X \rightarrow X$ ist genau dann unitär, wenn $UU^* = U^*U = I$ gilt.

11.2.5.3 Der duale Operator

Im folgenden bezeichnen X und Y Banachräume über \mathbb{K} . Es sei

$$A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$$

ein linearer Operator, wobei $D(A)$ dicht in X liegt. Dann gibt es genau einen linearen Operator

$$A^T : D(A^T) \subseteq Y^* \rightarrow X^*$$

mit der Eigenschaft

$$\langle f, Av \rangle = \langle A^T f, v \rangle \quad \text{für alle } f \in D(A^T), v \in D(A).$$

Wir nennen A^T den zu A *dualen* (oder transponierten) Operator.

Ist $A : X \rightarrow Y$ linear und stetig, dann hat auch $A^T : Y^* \rightarrow X^*$ diese Eigenschaft, und es gilt $\|A\| = \|A^T\|$.

Sind $A, B : X \rightarrow Y$ lineare stetige Operatoren, dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T.$$

Es seien $A : X \rightarrow Y$ und $B : Y \rightarrow Z$ lineare stetige Operatoren. Dann gilt

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Der inverse Operator $A^{-1} : Y \rightarrow X$ existiert genau dann, wenn der inverse Operator $(A^T)^{-1} : X^* \rightarrow Y^*$ existiert. In diesem Fall ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Ferner hat man $A^{TT} = A$, falls X und Y reflexiv sind.

► **BEISPIEL 6:** Es sei $X = \mathbb{K}^N$. Nach Beispiel 1 in 11.2.3 entspricht jeder lineare stetige Operator $A : X \rightarrow X$ einer Matrix (a_{ij}) . Dann gehört zum adjungierten Operator A^* die zu (a_{ij}) adjungierte Matrix (a_{ij}^*) , d.h., es ist $a_{ij}^* = a_{ji}$.

Nach Beispiel 7 in 11.2.3 entspricht dem dualen Operator $A^T : X^* \rightarrow X^*$ (mit $X^* \equiv X^T$) die zu (a_{ij}) duale Matrix (a_{ij}^T) , d.h., es ist $a_{ij}^T = a_{ji}$.

► **BEISPIEL 7:** Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein linearer Operator auf dem Hilbertraum X über \mathbb{K} , wobei $D(A)$ dicht in X liegt. Dann gilt

$$A^* = J^{-1} A^T J,$$

wobei $J : X \rightarrow X^*$ die Dualitätsabbildung bezeichnet.

11.2.6 Sobolevräume

Die moderne Theorie der partiellen Differentialgleichungen basiert wesentlich auf Sobolevräumen und den zugehörigen Einbettungssätzen. Dabei spielen *verallgemeinerte Ableitungen* eine zentrale Rolle.

In diesem Abschnitt sei Ω eine nichtleere offene Menge des \mathbb{R}^N , $N = 1, 2, \dots$. Wie in 10.1.3 bezeichnet $C_0^\infty(\Omega)$ die Menge aller glatten Testfunktionen, die in einem Randstreifen von Ω verschwinden, und $\partial^\alpha u$ steht für eine partielle Ableitung der Ordnung $|\alpha|$. Ferner setzen wir $\partial_j u(x) := \partial u(x)/\partial \xi_j$ mit $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Die Schlüsselformel der partiellen Integration: Besitzt die Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung $|\alpha|$, dann ergibt sich durch mehrfache partielle Integration:

$$\int_{\Omega} u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (11.46)$$

wobei wir $v(x) = \partial^\alpha u(x)$ setzen.

Die *Grundidee* der Definition verallgemeinerter Ableitungen besteht darin, dass Gleichung (11.46) auch für gewisse *nichtglatte* Funktionen u gültig bleibt, falls man die Funktionen v jeweils geeignet wählt.

Definition verallgemeinerter Ableitungen: Die Funktionen u und v seien auf jeder kompakten Teilmenge von Ω integrierbar (im Sinne von Lebesgue), und es gelte (11.46). Dann schreiben wir

$$v = \partial^\alpha u$$

und nennen v eine verallgemeinerte Ableitung²² von u auf Ω vom Typ ∂^α .

Diese verallgemeinerte Ableitung ist *einzigartig* durch u festgelegt bis auf Änderungen der Werte von v auf einer Menge vom Maß null (z. B. Änderung in endlich vielen Punkten).

► **BEISPIEL 1:** Setzen wir $u(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$, und

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \\ \text{beliebig} & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

dann erhält man für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ durch partielle Integration die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi'(x) dx &= \int_0^{\infty} u \varphi' dx + \int_{-\infty}^0 u \varphi' dx = \\ &= -u(0)\varphi(0) + u(0)\varphi(0) - \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Deshalb gilt $v = u'$ im verallgemeinerten Sinne auf $\Omega = \mathbb{R}$.

Im klassischen Sinne hat man nur $u'(x) = v(x)$ für alle $x \neq 0$.

Definition der Sobolevräume: Es sei $1 \leq p < \infty$ sowie $m = 0, 1, \dots$. Der Sobolevraum $W_p^m(\Omega)$ besteht aus genau allen Funktionen $u \in L_p(\Omega)$, die verallgemeinerte Ableitungen $\partial^\alpha u \in L_p(\Omega)$

²²Diese Definition ist ein Spezialfall der Ableitung im Sinne der Distributionentheorie, falls man u und v als Distributionen auffasst (vgl. 10.4).

bis zur Ordnung m haben. Bezuglich der Norm

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird $W_p^m(\Omega)$ zu einem reellen Banachraum, falls wir Funktionen miteinander identifizieren, die sich nur auf einer Menge vom Maß null unterscheiden.

Der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in dem Banachraum $W_p^m(\Omega)$ wird mit $\overset{\circ}{W}_p^m(\Omega)$ bezeichnet, d.h., $\overset{\circ}{W}_p^m(\Omega)$ ist der kleinste abgeschlossene lineare Unterraum von $W_p^m(\Omega)$, in dem $C_0^\infty(\Omega)$ dicht liegt.

Der Sobolevraum $W_p^m(\Omega)$ ist *separabel*. Ferner ist $W_2^m(\Omega)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v \, dx.$$

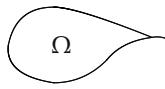
Stückweise glatter Rand $\partial\Omega$: Viele Aussagen über Sobolevräume gelten unter der folgenden Voraussetzung:

(H) Ω ist ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^N mit stückweise glattem Rand, d.h. $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

Anschaulich bedeutet die stückweise Glattheit des Randes $\partial\Omega$, dass der Rand bis auf endlich viele Ecken und Kanten glatt ist (Abb. 11.15(a)), wobei Nullwinkel wie in Abb. 11.15(b) ausgeschlossen werden.



(a)



(b) Nullwinkel

Abb. 11.15

Präziser schreiben wir genau dann $\partial\Omega \in C^{0,1}$, wenn sich $\partial\Omega$ durch endlich viele Randflächen S_j mit den beiden folgenden Eigenschaften überdecken lässt:

(a) In einem geeigneten kartesischen Koordinatensystem wird S_j durch eine Gleichung

$$z = \psi(y), \quad y \in Q,$$

beschrieben, wobei Q ein offener Quader des \mathbb{R}^{N-1} ist (Abb. 11.16). Die Funktion ψ ist auf Q Lipschitzstetig bezüglich der euklidischen Norm $|\cdot|$, d.h., es gilt

$$|\psi(y) - \psi(y')| \leq \text{const} |y - y'| \quad \text{für alle } y, y' \in Q.$$

Diese Bedingung erfasst auch „vernünftige“ Ecken und Kanten (ohne Nullwinkel).

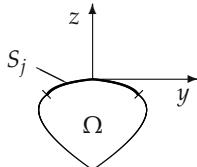


Abb. 11.16

(b) Das Gebiet Ω liegt auf einer Seite von S_j , d.h., es gibt eine Zahl $\gamma > 0$, so dass alle Punkte $(y, \psi(y))$ mit $-\gamma < \psi(y) < 0$, $y \in Q$, zu Ω gehören (Randstreifen), während alle Punkte $(y, \psi(y))$ mit $0 < \psi(y) < \gamma$, $y \in Q$, nicht zu Ω gehören.²³

Dichtheit: Unter der Voraussetzung (H) ist die Menge $C^m(\overline{\Omega})$ (vgl. 10.1.3) dicht in $W_p^m(\Omega)$ (d.h., speziell ist die Menge $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ aller auf \mathbb{R}^N beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen dicht in $W_p^m(\Omega)$).

11.2.6.1 Die Sobolevschen Einbettungssätze

Sind X und Y zwei Banachräume mit $X \subseteq Y$, dann ordnet der lineare Einbettungsoperator $E : X \rightarrow Y$ definitionsgemäß jedem $u \in X$ das entsprechende Element in Y zu. Die Einbettung $X \subseteq Y$ heißt genau dann *stetig* (bzw. kompakt), wenn E stetig (bzw. kompakt) ist.²⁴

Satz 1: Wir setzen (H) mit $0 \leq k < m$, $1 \leq p, q < \infty$ und $\dim \Omega = N$ voraus. Ferner setzen wir $d := (N - (m - k)p)/pN$. Dann gilt:

(i) Die Einbettungen

$$W_p^m(\Omega) \subseteq W_q^k(\Omega) \quad \text{und} \quad \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega) \subseteq \overset{\circ}{W}_q^k(\Omega)$$

sind stetig für $d \leq 1/q$ und kompakt für $d < 1/q$.

(ii) Die Einbettung

$$W_p^m(\Omega) \subseteq C^k(\overline{\Omega})$$

ist kompakt²⁵ für $d < 0$, d.h. $m - k > N/p$.

Dieser Satz besagt grob gesprochen, dass eine Funktion klassische Ableitungen bis zur Ordnung k besitzt, falls sie über verallgemeinerte Ableitungen bis zu einer hinreichend hohen Ordnung m verfügt.

► **BEISPIEL 2:** Die Einbettungen

$$L_p(\Omega) \supseteq W_p^1(\Omega) \supseteq W_p^2(\Omega) \supseteq \dots, \quad 1 \leq p < \infty,$$

sind kompakt.

► **BEISPIEL 3:** Die Einbettung $W_p^m(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega})$ ist kompakt, falls $m > N/p$ mit $1 \leq p < \infty$ gilt. Speziell folgt daraus

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq \text{const} \|u\|_{m,p} \quad \text{für alle } u \in W_p^m(\Omega).$$

11.2.6.2 Verallgemeinerte Randwerte

Es gelte (H). Jeder Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ordnen wir ihre Randwerte Ru auf $\partial\Omega$ zu. Der so entstehende Randoperator R lässt sich eindeutig zu einem linearen stetigen Operator

$$R : W_p^1(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty,$$

²³Wir schreiben $\partial\Omega \in C^{m,\alpha}$, falls alle Funktionen ψ zu $C^{m,\alpha}(Q)$ gehören (vgl. 11.2.4.1).

²⁴Explizit bedeutet die Stetigkeit der Einbettung $X \subseteq Y$, dass

$$\|u\|_Y \leq \text{const} \|u\|_X \quad \text{für alle } u \in X$$

gilt. Die Kompaktheit der Einbettung $X \subseteq Y$ ist gleichbedeutend damit, dass jede in X beschränkte Folge (u_n) eine Teilfolge besitzt, die in Y konvergiert.

²⁵Genauer gibt es zu jeder Funktion $u \in W_p^m(\Omega)$ eine äquivalente Funktion $v \in C^k(\overline{\Omega})$ (d.h., u und v sind fast überall auf $\overline{\Omega}$ gleich). Setzen wir $Eu = v$, dann ist der Operator $E : W_p^m(\Omega) \rightarrow C^k(\overline{\Omega})$ kompakt.

fortsetzen, d. h., es gilt

$$\left(\int_{\partial\Omega} |Ru|^p \, dO \right)^{\frac{1}{p}} \leq \text{const} \|u\|_{1,p} \quad \text{für alle } u \in W_p^1(\Omega). \quad (11.47)$$

Für jedes $u \in W_p^1(\Omega)$ heißt Ru die verallgemeinerte Randfunktion zu u . Dabei ist Ru eindeutig bestimmt bis auf Änderung der Werte von Ru auf einer Menge vom Oberflächenmaß null (z. B. Änderung in endlich vielen Punkten).

► **BEISPIEL 4:** Jede Funktion $u \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ besitzt die verallgemeinerten Randwerte null auf $\partial\Omega$.

11.2.6.3 Äquivalente Normen

Satz 2: Unter der Voraussetzung (H) ist die Norm

$$\left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u|^p \, dx + \sum_{k=1}^K |f_k(u)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

äquivalent zur Ausgangsnorm $\|\cdot\|_{m,p}$ auf $W_p^m(\Omega)$, falls f_1, \dots, f_K lineare stetige Funktionale (oder allgemeiner Halbnormen) auf $W_p^m(\Omega)$ sind, die die zusätzliche Eigenschaft haben, dass für ein Polynom P vom Grade $\leq m-1$ aus $f_1(P) = \dots = f_K(P) = 0$ stets $P \equiv 0$ folgt.

Wie die folgenden Beispiele zeigen, verbergen sich hinter diesem allgemeinen Satz wichtige Ungleichungen der Analysis.

► **BEISPIEL 5** (Ungleichung von Poincaré): Nach Definition von $W_2^1(\Omega)$ gilt $W_2^1(\Omega) \subseteq L_2(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{1,2} \quad \text{für alle } u \in W_2^1(\Omega)$$

und

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{j=1}^N (\partial_j u)^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir $f(u) := \int_{\Omega} u \, dx$, dann ist das Funktional f auf $W_2^1(\Omega)$ linear und stetig, denn aus der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|f(u)| = \left| \int_{\Omega} u \, dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{const} \cdot \|u\|_{1,2}$$

für alle $u \in W_2^1(\Omega)$. Ist $P = \text{const}$, dann erhält man aus $f(P) = 0$ stets $P \equiv 0$. Somit stellt

$$\|u\|_* := \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^N (\partial_j u)^2 \, dx + \left| \int_{\Omega} u \, dx \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf $W_2^1(\Omega)$ dar, die äquivalent zu $\|\cdot\|_{1,2}$ ist. Es gibt deshalb eine Konstante $C > 0$, so dass $\|u\|_{1,2} \leq C\|u\|_*$ für alle $u \in W_2^1(\Omega)$ gilt. Durch Quadrieren folgt daraus $\|u\|_{1,2}^2 \leq C^2\|u\|_*^2$, d. h.

$$\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{j=1}^N (\partial_j u)^2 \right) dx \leq C^2 \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^N (\partial_j u)^2 dx + \left| \int_{\Omega} u dx \right|^2 \right)$$

für alle $u \in W_2^1(\Omega)$. Das ist die sogenannte *Ungleichung von Poincaré*.

► **BEISPIEL 6** (Ungleichung von Poincaré–Friedrichs): Wir betrachten

$$f(u) := \int_{\partial\Omega} u \, dO.$$

Nach (11.47) ist f ein lineares stetiges Funktional auf $W_2^1(\Omega)$. Aus $P = \text{const}$ und $f(P) = 0$ folgt $P \equiv 0$. Deshalb stellt

$$\|u\|_{**} := \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^N |\partial_j u|^2 dx + \left| \int_{\partial\Omega} u \, dO \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf $W_2^1(\Omega)$ dar, die äquivalent zu $\|\cdot\|_{1,2}$ ist. Folglich gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|u\|_{1,2} \leq C\|u\|_{**} \quad \text{für alle } u \in W_2^1(\Omega)$$

gilt. Nach Beispiel 4 erhalten wir daraus durch Quadrieren die Ungleichung

$$\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{j=1}^N (\partial_j u)^2 \right) dx \leq C^2 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N (\partial_j^2 u) dx$$

für alle $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Das ist die sogenannte *Ungleichung von Poincaré–Friedrichs*.

11.2.6.4 Die Interpolationsungleichungen von Gagliardo–Nirenberg

Es sei $\Omega = \mathbb{R}^N$ oder Ω sei ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^N mit vernünftigem Rand, d. h. $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann gilt

$$\|\partial_j u\|_{2r} \leq \text{const} \sqrt{\|u\|_{2,p}} \sqrt{\|u\|_q}, \quad j = 1, \dots, N,$$

für alle $u \in W_p^2(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, falls

$$p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}, \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty.$$

Hierbei benutzen wir die Konvention $\infty^{-1} = 0$. Ferner gilt $x = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\partial_j := \partial/\partial\xi_j$, und $\|w\|_p$ bzw. $\|w\|_{m,p}$ bezeichnet die Norm auf $L_p(\Omega)$ bzw. $W_p^m(\Omega)$.

11.2.6.5 Der Moser-Kalkül (Produktregel)

Es sei Ω wie in 11.2.6.4 gegeben. Bezeichnet ∂^α eine partielle Ableitung der Ordnung $|\alpha|$, dann gilt

$$\|\partial^\alpha u \partial^\beta v\|_2 \leq \text{const} (\|u\|_{m,2} \|v\|_\infty + \|v\|_{m,2} \|u\|_\infty) \quad (11.48)$$

für alle $u, v \in W_2^m(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ mit $m := |\alpha| + |\beta| \geq 0$.

Ist $m > N/2$, dann hat man die *Produktregel*

$$\|\partial^\alpha u \partial^\beta v\|_2 \leq \text{const} \|u\|_{m,2} \|v\|_{m,2} \quad (11.49)$$

sowie (11.48) für alle $u, v \in W_2^m(\Omega)$.

Allgemeiner gilt

$$\|\partial^{\alpha_1} u_1 \cdots \partial^{\alpha_r} u_r\|_2 \leq \text{const} \sum_{i=1}^r \|u_i\|_{m,2} \prod_{j=1, j \neq i}^r \|u_j\|_\infty \quad (11.50)$$

für alle $u_1, \dots, u_r \in W_2^m(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ und $m := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_r| \geq 0$.

Ist $m > N/2$, dann hat man die *Produktregel*

$$\|\partial^{\alpha_1} u_1 \cdots \partial^{\alpha_r} u_r\|_2 \leq \text{const} \|u_1\|_{m,2} \cdots \|u_r\|_{m,2} \quad (11.51)$$

sowie (11.50) für alle $u_1, \dots, u_r \in W_2^m(\Omega)$.

11.2.7 Lokalkonvexe Räume

In einem normierten Raum hat man eine Norm zur Verfügung. In einem lokalkonvexen Raum wird die Norm durch ein *System von Halbnormen* ersetzt. Die Theorie der lokalkonvexen Räume besitzt ihre wichtigsten Anwendungen in der Theorie der Distributionen und in der Theorie der schwachen Konvergenz auf Banachräumen.

Halbnormen: Unter einer Halbnorm auf dem linearen Raum X über \mathbb{K} versteht man eine Abbildung $p : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $u, v \in X$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ folgendes gilt:

- (i) $p(u) \geq 0$ und $p(0) = 0$;
- (ii) $p(\alpha u) = |\alpha| p(u)$;
- (iii) $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ (Dreiecksungleichung).

Jede Norm ist auch eine Halbnorm. Umgekehrt ist eine Halbnorm p eine Norm, wenn zusätzlich aus $p(u) = 0$ stets $u = 0$ folgt.

Lokalkonvexe Räume: Unter einem lokalkonvexen Raum über \mathbb{K} versteht man einen linearen Raum X über \mathbb{K} , auf dem ein System von Halbnormen $\{p_j\}$ gegeben ist, das separiert ist, d. h. aus

$$p_j(u) = 0 \quad \text{für alle Indizes } j \text{ folgt} \quad u = 0.$$

Jeder normierte Raum wird mit $p(u) := \|u\|$ zu einem lokalkonvexen Raum.

Topologie: Definitionsgemäß heißt eine Menge U eines lokalkonvexen Raumes X genau dann *offen*, wenn es zu jedem Punkt $u \in U$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine endliche Anzahl von Indizes j_1, \dots, j_m gibt, so dass auch die Menge

$$\{u \in X : p_{j_k}(u - u_0) < \varepsilon, k = 1, \dots, m\}$$

zu U gehört. Damit wird X zu einem separierten topologischen Raum (vgl. 11.2.1), der nicht unbedingt ein metrischer Raum zu sein braucht.

Somit hat man in einem lokalkonvexen Raum alle topologischen Begriffe zur Verfügung (z. B. Konvergenz, Stetigkeit, Kompaktheit).

Konvergenz: Eine Folge (u_n) aus X konvergiert genau dann gegen den Punkt $u \in X$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(u_n - u) = 0 \quad \text{für alle } j$$

gilt.

Lineare stetige Operatoren: Es seien X und Y lokalkonvexe Räume über \mathbb{K} mit den entsprechenden Halbnormensystemen $\{p_j\}$ und $\{q_k\}$. Dann ist der lineare Operator $A : X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn es zu jeder Halbnorm q_k auf Y endlich viele Halbnormen p_{j_1}, \dots, p_{j_m} auf Y und eine Konstante $c \geq 0$ gibt, so dass für alle $u \in X$ gilt:

$$q_k(Au) \leq c(p_{j_1}(u) + \dots + p_{j_m}(u)).$$

Metrisierbarkeit: Besitzt ein lokalkonvexer Raum X ein höchstens abzählbares System $\{p_j\}$ von Halbnormen, dann kann man seine Topologie aus einer Metrik $d(\cdot, \cdot)$ erhalten, die durch

$$d(u, v) := \sum_j \frac{p_j(u - v)}{2^j(1 + p_j(u - v))}$$

für alle $u, v \in X$ gegeben ist.

Standardbeispiele für lokalkonvexe Räume

► **STANDARDBEISPIEL 1** (Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ der Testfunktionen): Wir setzen

$$p_{m,r}(u) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^m + 1) \sum_{|\alpha| \leq r} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Definitionsgemäß besteht $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ aus genau allen Funktionen $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, die stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen und $p_{k,r}(u) < \infty$ für alle k, r erfüllen. Dann ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum, der in der Theorie der Fouriertransformation eine fundamentale Rolle spielt (vgl. 10.4.6).

► **STANDARDBEISPIEL 2** (schwache Topologie eines normierten Raumes): Es sei X ein normierter Raum über \mathbb{K} . Jedem linearen stetigen Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ordnen wir die Halbnorm

$$p_f(u) := |f(u)| \quad \text{für alle } u \in X$$

zu. Mit diesem Halbnormensystem $\{p_f\}$ wird X zu einem lokalkonvexen Raum. Die zugehörige Topologie auf X bezeichnet man als die schwache Topologie von X . Diese *schwache Topologie* muss nicht metrisierbar sein.

Die Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie bezeichnet man als *schwache Konvergenz auf X* . Dafür schreibt man $u_n \rightharpoonup u$. Es gilt

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{auf } X \quad \text{genau dann, wenn} \quad f(u_n) \rightarrow f(u)$$

für alle $f \in X^*$ gilt.

► **STANDARDBEISPIEL 3** (schwache* Topologie auf X^*): Es sei X ein normierter Raum über \mathbb{K} . Wir ordnen jedem Punkt $u \in X$ die Halbnorm

$$p_u(f) := |f(u)| \quad \text{für alle } f \in X^*$$

zu. Mit diesem Halbnormensystem $\{p_u\}$ wird der duale Raum X^* zu einem lokalkonvexen Raum. Die zugehörige Topologie bezeichnet man als die *schwache^{*} Topologie* auf X^* (sprich: schwache Sterntopologie). Diese Topologie erzeugt die sogenannte schwache^{*} Konvergenz auf X^* . Dafür schreiben wir $f_n \xrightarrow{*} f$. Es gilt

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad \text{auf } X^* \quad \text{genau dann, wenn } f_n(u) \rightarrow f(u)$$

für alle $u \in X$ gilt. Eine genauere Untersuchung der schwachen und schwachen^{*} Konvergenz findet man in 11.5.7.

11.3 Existenzsätze und ihre Anwendungen auf Variationsprobleme, Differential- und Integralgleichungen

Die lineare Funktionalanalysis untersucht lineare Operatorgleichungen und quadratische Variationsprobleme, die zu linearen Operatorgleichungen äquivalent sind. In diesem Abschnitt betrachten wir eine Reihe eleganter funktionalanalytischer Resultate, die das Ergebnis eines langen und mühevollen Erkenntnisprozesses der mathematischen Physik sind.

11.3.1 Vollständige Orthonormalsysteme und spezielle Funktionen der mathematischen Physik

Die Theorie der vollständigen Orthonormalsysteme in Hilberträumen verallgemeinert die Darstellung

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

eines beliebigen Vektors \mathbf{v} im \mathbb{R}^3 durch die Orthonormalbasis $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ mit $\mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0$ und $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$.

Vollständige Orthonormalsysteme: Es sei X ein separabler Hilbertraum. Ein System $\{e_0, e_1, \dots\}$ von höchstens abzählbar vielen Elementen aus X heißt genau dann ein *Orthonormalsystem*, wenn

$$(e_k, e_m) = \delta_{km} \quad \text{für alle } k, m$$

gilt. Konvergiert zusätzlich die verallgemeinerte Fourierreihe

$$u = \sum_{k \geq 0} (e_k, u) e_k \tag{11.52}$$

für alle $u \in X$, dann sprechen wir von einem *vollständigen Orthonormalsystem*.

Die Konvergenz von (11.52) bezieht sich auf die Norm in X , d. h., es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{k=0}^n (e_k, u) e_k \right\| = 0,$$

falls die Anzahl der e_k unendlich ist. Die Reihe (11.52) konvergiert genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{k \geq 0} |(e_k, u)|^2$$

konvergiert.

Haupsatz: Ein Orthonormalsystem in X ist genau dann vollständig, wenn seine lineare Hülle in X dicht liegt.

Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren: In jedem separablen Hilbertraum $X \neq \{0\}$ kann man ein vollständiges Orthonormalsystem durch die folgende Konstruktion erhalten. Wir wählen ein höchstens abzählbares System u_0, u_1, \dots von linear unabhängigen Elementen aus X , deren lineare Hülle dicht in X liegt. Dann ergibt sich ein vollständiges Orthonormalsystem e_0, e_1, \dots für $n = 1, 2, \dots$ durch die Vorschrift

$$e_0 := \frac{u_0}{\|u_0\|}, \quad e_n := \frac{v_n}{\|v_n\|}, \quad v_n := u_n - \sum_{k=0}^{n-1} (e_k, u_k) e_k.$$

Liegt die lineare Hülle $L := \text{span}\{u_0, u_1, \dots\}$ nicht dicht in X , dann liefert dieses Verfahren ein vollständiges Orthonormalsystem im Abschluss von L .

Spezielle Funktionen als vollständige Orthonormalsysteme: Im 19. Jahrhundert wurden zahlreiche spezielle Funktionen mit den zugehörigen Reihenentwicklungen eingeführt. Alle diese Betrachtungen lassen sich funktionalanalytisch in einheitlicher Weise sehr durchsichtig behandeln.

► **STANDARDBEISPIEL 1** (trigonometrische Funktionen und Fourierreihen): Im Raum $L_2(0, 2\pi)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_0^{2\pi} u(x)v(x) dx$$

bilden die Funktionen $(2\pi)^{-1}, \pi^{-1} \cos kx, \pi^{-1} \sin kx, k = 1, 2, \dots$, ein vollständiges Orthonormalsystem. Das führt dazu, dass die zugehörige Fourierreihe für jede Funktion $u \in L_2(0, 2\pi)$ stets im quadratischen Mittel konvergiert (vgl. 11.1.3).

► **STANDARDBEISPIEL 2** (Legendrepolynome): Wir setzen $X := L_2(-1, 1)$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) := \int_{-1}^1 u(x)v(x) dx$. Wenden wir das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf

die Polynome $u_k(x) := x^k, k = 0, 1, \dots$, an, dann erhalten wir die sogenannten (normierten) *Legendrepolynome*

$$e_n(x) := \sqrt{n + 1} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Da die lineare Hülle $\text{span}\{u_0, u_1, \dots\}$ gleich der Menge aller reellen Polynome ist und somit nach dem Approximationssatz von Weierstraß in X dicht liegt, bilden die Legendrepolynome ein vollständiges Orthonormalsystem in X . Folglich konvergiert die Fourierreihe (11.52) für jedes $u \in X$, d.h., es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{k=0}^n c_k e_k \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \left(u(x) - \sum_{k=0}^n c_k e_k(x) \right)^2 dx = 0$$

mit $c_k := (e_k, u) = \int_{-1}^1 e_k(x)u(x) dx$. Das ist die Konvergenz im quadratischen Mittel.

► **STANDARDBEISPIEL 3** (Hermitesche Funktionen): Es sei $X := L_2^C(-\infty, \infty)$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)}v(x) dx$. Wenden wir auf die Funktionen

$$u_k(x) := x^k e^{-x^2/2}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren in X an, dann erhalten wir die sogenannten *Hermiteschen Funktionen*

$$e_n(x) := e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

mit $\alpha_n := 2^{-n/2}(n!)^{-1/2}\pi^{-1/4}$ und den sogenannten *Hermiteschen Polynomen*

$$H_n(x) := \alpha_n (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Die Funktionen e_0, e_1, \dots bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in X .

► **STANDARDBEISPIEL 4** (die Laguerreschen Funktionen): Es sei $X := L_2^{\mathbb{C}}(0, \infty)$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) := \int_0^{\infty} \overline{u(x)}v(x) dx$. Wenden wir auf die Funktionen

$$u_k(x) := x^k e^{-x/2}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, dann erhalten wir die sogenannten (normierten) *Laguerreschen Funktionen*

$$e_n(x) := e^{-x/2} \mathbb{L}_n(x), \quad n = 0, 1, \dots.$$

Dabei sind

$$\mathbb{L}_n(x) := \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

die sogenannten *Laguerreschen Polynome*. Die Funktionen e_0, e_1, \dots bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in X .

Die Funktionen aus den obigen Standardbeispielen 2 bis 4 spielen eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik (vgl. 1.13.2.11 ff.).

Die Methode der kleinsten Quadrate: Es sei $\{e_0, e_1, \dots\}$ ein Orthonormalsystem in dem Hilbertraum $X \neq \{0\}$. Wir setzen $X_n := \text{span}\{e_0, \dots, e_n\}$. Dann besitzt das Minimumproblem

$$\|u - v\|^2 = \min !, \quad v \in X_n, \tag{11.53}$$

für jedes $u \in X$ und jedes $n = 0, 1, \dots$ genau eine Lösung $v = \sum_{k=0}^n (e_k, u) e_k$. Das ist eine Partialsumme der Fourierreihe.²⁶ Ferner gilt die sogenannte *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k=0}^n |(e_k, u)|^2 \leq \|u\|^2 \quad \text{für alle } u \in X.$$

Das endliche oder unendliche Orthonormalsystem $\{e_0, e_1, \dots\}$ ist genau dann vollständig, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Für jedes $u \in X$ gilt die sogenannte *Parsevalsche Gleichung*

$$\sum_{k \geq 0} |(e_k, u)|^2 = \|u\|^2,$$

wobei über alle möglichen k summiert wird.

(ii) Aus $(e_k, u) = 0$ für alle k folgt stets $u = 0$.

²⁶Die Lösung v ist gleichzeitig die orthogonale Projektion von u auf X_n (vgl. 11.3.2).

► **BEISPIEL:** Für $L_2(a, b)$ ist (11.53) identisch mit

$$\int_a^b (u(x) - v(x))^2 dx = \min!, \quad v \in X_n.$$

Das ist die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate.

Der Struktursatz von Fischer–Riesz: Es sei X ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum über \mathbb{R} (bzw. über \mathbb{C}) mit dem vollständigen Orthonormalsystem $\{e_0, e_1, \dots\}$. Ordnen wir jedem $x = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ in l_2 (bzw. $l_2^\mathbb{C}$) das Element

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e_k \tag{11.54}$$

zu, dann ist die Abbildung $x \mapsto u$ ein unitärer Operator von l_2 (bzw. $l_2^\mathbb{C}$) auf X . Folglich ist X unitär äquivalent zu l_2 (bzw. $l_2^\mathbb{C}$).

In (11.54) gilt $\xi_k = (e_k, u)$, d. h., ξ_0, ξ_1, \dots sind die Fourierkoeffizienten von u .

11.3.2 Quadratische Minimumprobleme und das Dirichletproblem

Wir untersuchen das *Minimumproblem*

$$\frac{1}{2}a(u, u) - b(u) = \min!, \quad u \in X, \\ u - u_0 \in L \quad (\text{"Randbedingung"}), \tag{11.55}$$

für ein fest vorgegebenes Element $u_0 \in X$.

Hauptsatz über quadratische Minimumprobleme in Hilberträumen: Das Problem (11.55) besitzt eine eindeutige Lösung u , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) L ist ein abgeschlossener linearer Unterraum des reellen Hilbertraumes X .
- (ii) $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein lineares stetiges Funktional auf X .
- (iii) $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist bilinear, symmetrisch und beschränkt, d. h., für alle $u, v, w \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w), \\ a(u, v) = a(v, u), \\ |a(u, v)| \leq \text{const} \|u\| \|v\|.$$

- (iv) $a(\cdot, \cdot)$ ist *positiv definit* auf L , d. h., es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass

$$c\|u\|^2 \leq a(u, u) \quad \text{für alle } u \in L$$

gilt. Bei Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen ist X ein *Sobolevraum*. Die Beschränktheit $|a(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$ folgt dann aus der *Schwarzschen Ungleichung*, während sich $c\|u\|^2 \leq a(u, u)$ aus äquivalenten Normierungen von Sobolevräumen ergibt (z. B. Ungleichung von Poincaré–Friedrichs).

Korollar: Das Ausgangsproblem (11.55) ist äquivalent zur sogenannten verallgemeinerten *Eulerschen Gleichung*

$$a(u, \varphi) = b(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in D \text{ und festes } u \in X \text{ mit } u - u_0 \in L. \tag{11.56}$$

Hier bezeichnet D eine dichte Menge in L . Deshalb ist die eindeutige Lösung u von (11.55) auch die eindeutige Lösung von (11.56).

Anwendung auf das Dirichletproblem: Es sei Ω eine nichtleere beschränkte offene Menge des \mathbb{R}^3 . Wir betrachten das Variationsproblem

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}(u_{\xi}^2 + u_{\eta}^2 + u_{\zeta}^2) - fu \right) dx = \min!, \quad (11.57)$$

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{Randbedingung}),$$

zusammen mit der klassischen Eulerschen Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{auf } \Omega, \\ u &= u_0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (11.58)$$

Dabei gilt $\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta}$ mit $x = (\xi, \eta, \zeta)$. Multiplizieren wir die erste Gleichung in (11.58) mit der Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann ergibt sich nach partieller Integration

$$\int_{\Omega} (u_{\xi}\varphi_{\xi} + u_{\eta}\varphi_{\eta} + u_{\zeta}\varphi_{\zeta}) dx = \int_{\Omega} f\varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (11.59)$$

Dies entspricht dem sogenannten verallgemeinerten Problem zu dem klassischen Randwertproblem (11.58). Auf die Geschichte dieses berühmten Dirichletproblems sind wir bereits in 11.1.4 eingegangen.

Um das Dirichletproblem funktionalanalytisch mit Hilfe des Hauptsatzes über quadratische Minimumprobleme zu behandeln, setzen wir

$$X := W_2^1(\Omega), \quad L := \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \quad D := C_0^\infty(\Omega).$$

Als verallgemeinerte Problemstellung zu (11.57) betrachten wir das Minimumproblem

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}(u_{\xi}^2 + u_{\eta}^2 + u_{\zeta}^2) - fu \right) dx = \min!, \quad u \in X, \quad (11.60)$$

$$u - u_0 \in L \quad (\text{Randbedingung}).$$

Dabei ist $u_0 \in X$ gegeben. Diese Problemstellung ist eine sinnvolle Verallgemeinerung des klassischen Problems (11.57), denn nach 11.2.6 besitzt jede Funktion u aus X quadratisch integrierte (verallgemeinerte) erste partielle Ableitungen. Ferner haben die Funktionen aus L (verallgemeinerte) Nullrandwerte. Somit entspricht $u - u_0 \in L$ der Randbedingung „ $u - u_0 = 0$ auf $\partial\Omega$ “ (im verallgemeinerten Sinne). Anstelle von (11.59) betrachten wir die Aufgabe

$$\int_{\Omega} (u_{\xi}\varphi_{\xi} + u_{\eta}\varphi_{\eta} + u_{\zeta}\varphi_{\zeta}) dx = \int_{\Omega} f\varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$u - u_0 \in L, \quad u \in X. \quad (11.61)$$

Setzen wir nun

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (u_{\xi}v_{\xi} + u_{\eta}v_{\eta} + u_{\zeta}v_{\zeta}) dx, \quad b(u) := \int_{\Omega} fu dx, \quad D := C_0^\infty(\Omega),$$

dann entspricht (11.60) dem abstrakten Minimumproblem (11.55), und (11.61) entspricht der verallgemeinerten Eulerschen Gleichung (11.56).

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das Dirichletproblem: Für jedes vorgegebene Funktionenpaar $f \in L_2(\Omega)$ und $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ besitzt das Dirichletproblem (11.60) genau eine Lösung u , die gleichzeitig die eindeutige Lösung der verallgemeinerten Eulerschen Gleichung (11.61) ist.

Korollar (Regularität): Sind die vorgegebenen Funktionen f, u_0 und der Rand $\partial\Omega$ hinreichend glatt, dann ist auch die Lösung u des Minimumproblems (11.60) hinreichend glatt, und u ist zudem die eindeutige Lösung des klassischen Randwertproblems (11.58).

Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes: Wir haben die Voraussetzungen des Hauptsatzes nachzuprüfen. Nach 11.2.6 ist die Norm auf dem Sobolevraum $X = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ durch

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} (u^2 + u_{\xi}^2 + u_{\eta}^2 + u_{\zeta}^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben. Die Schwarzsche Ungleichung (11.44) liefert für alle $u \in X$:

$$|b(u)| \leq \left(\int_{\Omega} f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{const} \|u\|,$$

d. h., $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein lineares stetiges Funktional auf X . Die Schwarzsche Ungleichung ergibt ferner für alle $u, v \in X$:

$$|a(u, v)| \leq \left(\int_{\Omega} u_{\xi}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v_{\xi}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \dots \leq \|u\| \|v\| + \dots = 3\|u\| \|v\|,$$

d. h., $a(\cdot, \cdot)$ ist beschränkt. Die Ungleichung

$$c\|u\|^2 \leq a(u, v) \quad \text{für alle } u \in L$$

ist die Ungleichung von Poincaré–Friedrichs aus 11.2.6 mit $c = C^{-2}$. q.e.d.

Die analoge Anwendung des Hauptsatzes auf die zweite und dritte Randwertaufgabe für die Poissons-Gleichung findet man in [Zeidler 1984ff, Vol. IIA].

Die gemischte dritte Randwertaufgabe für die Poissons-Gleichung und ihre nichtlineare Verallgemeinerung wird in 14.5.4 betrachtet.

Anwendung auf den Satz von Riesz: Es sei $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares stetiges Funktional auf dem Hilbertraum X über \mathbb{K} . Dann existiert ein $u_0 \in X$ mit

$$b(v) = (u_0, v) \quad \text{für alle } v \in X. \tag{11.62}$$

Umgekehrt erhält man für jedes $u_0 \in X$ durch (11.62) ein lineares stetiges Funktional b auf X .

Beweis: Dieser Satz ist eine unmittelbare Konsequenz des Hauptsatzes über quadratische Minimumprobleme. Wir wollen das für einen reellen Hilbertraum X zeigen. Dazu betrachten wir das Variationsproblem

$$\frac{1}{2}(u, u) - b(u) = \min !, \quad u \in X.$$

Nach dem Hauptsatz existiert eine Lösung u_0 , die der Eulerschen Gleichung (11.62) genügt.

Umgekehrt folgt aus der Gleichung (11.62) nach der Schwarzschen Ungleichung die Beziehung: $|b(v)| = |(u_0, v)| \leq \|u_0\| \|v\| \leq \text{const} \|v\|$ für alle $v \in X$, d. h., b ist linear und stetig. q. e. d.

Anwendung auf die orthogonale Projektion und das Lotprinzip: Es sei X ein Hilbertraum über \mathbb{K} . Das orthogonale Komplement M^{\perp} zu einer Teilmenge M von X wird durch

$$M^{\perp} := \{u \in X : (u, v) = 0 \text{ für alle } v \in M\}$$

definiert.

Satz (Lotprinzip): Ist L ein abgeschlossener linearer Unterraum von X , dann gibt es zu jedem $u \in X$ eine eindeutige Zerlegung der Form

$$u = v + v^\perp, \quad v \in L, \quad v^\perp \in L^\perp. \quad (11.63)$$

Dabei ist v die eindeutige Lösung des Minimumproblems

$$\|u - v\|^2 = \min!, \quad v \in L. \quad (11.64)$$

Geometrisch entspricht v dem Lotpunkt bei der orthogonalen Projektion von u auf L (Abb. 11.17).

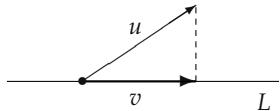


Abb. 11.17

Beweis: Dieser Satz ist eine Folgerung aus dem Hauptsatz über quadratische Minimumprobleme. Wir beweisen hier lediglich für einen reellen Hilbertraum, dass (11.63) aus (11.64) folgt. Das Problem (11.64) lautet $(u - v, u - v) = (u, u) - 2(u, v) + (v, v) = \min!, v \in L$. Das ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2}(v, v) - (u, v) = \min!, \quad v \in L.$$

Diese Aufgabe besitzt nach dem Hauptsatz über quadratische Minimumprobleme eine eindeutige Lösung v , die der Eulerschen Gleichung

$$(v, \varphi) = (u, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in L$$

genügt. Das bedeutet $(u - v, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in L$, also $u - v \in L^\perp$. Daraus erhalten wir (11.63) mit $v^\perp := u - v$. q.e.d.

Orthogonale Projektionsoperatoren: Die Zerlegung (11.63) entspricht der direkten Summe

$$X = L \oplus L^\perp,$$

die man eine *orthogonale direkte Summe* nennt.

Ein linearer stetiger Operator $P : X \rightarrow X$ mit $P^2 = P$ und $P^* = P$ wird *orthogonaler Projektionsoperator* genannt. Diese Definition wird durch die folgenden beiden Aussagen gerechtfertigt.

(a) Setzen wir $Pu := v$ in (11.63), dann ist $P : X \rightarrow X$ ein orthogonaler Projektionsoperator auf $L = P(X)$.

(b) Sei umgekehrt $P : X \rightarrow X$ ein orthogonaler Projektionsoperator, dann ist $X = L \oplus L^\perp$ mit dem abgeschlossenen linearen Unterraum $L := P(X)$ von X und $L^\perp = (I - P)(X)$.

Das Äquivalenzprinzip: Man kann zeigen, dass das Lotprinzip äquivalent ist zum Hauptsatz über quadratische Minimumprobleme und zum Satz von Riesz [vgl. Zeidler 1984ff, Vol. IIA]. Speziell verbirgt sich somit hinter der Lösung des Dirichletproblems die einfache geometrische Idee von Abb. 11.17.

11.3.3 Die Gleichung $\lambda u = Ku = f$ für kompakte symmetrische Operatoren K und Integralgleichungen (Hilbert–Schmidt-Theorie)

Im folgenden verallgemeinern wir die klassische Hauptachsentransformation für symmetrische Matrizen auf Hilberträume. Dabei spielen kompakte symmetrische Operatoren die entscheidende Rolle.

Das Eigenwertproblem: Wir betrachten die Operatorgleichung

$$Ku = \lambda u, \quad u \in X, \quad u \neq 0, \quad (11.65)$$

in dem Hilbertraum X über \mathbb{K} mit $X \neq \{0\}$. Jede Lösung $\lambda \in \mathbb{K}$ (bzw. $u \in X$) von (11.65) heißt ein *Eigenwert* (bzw. ein *Eigenvektor*) von K . Die Maximalzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren von K zu einem festen Eigenwert λ nennt man die *Vielfachheit* von λ .

Satz: Ist der lineare Operator $K : D(K) \subseteq X \rightarrow X$ symmetrisch, dann gilt:

- (i) Alle Eigenwerte von K sind reell.
- (ii) Eigenvektoren von K zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.
- (iii) Ist $\{u_1, u_2, \dots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren des Operators K mit $Ku_j = \lambda_j u_j$, dann gibt es außer $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ keine weiteren Eigenwerte von K .
- (iv) Aus $(Ku, u) > 0$ (bzw. ≥ 0) für alle $u \in X$ folgt $\lambda > 0$ (bzw. $\lambda \geq 0$) für alle Eigenwerte λ von K .

Der Hauptsatz: Es sei $K : X \rightarrow X$ ein linearer *kompakter* und symmetrischer Operator.²⁷ Dann gilt:

- (i) K besitzt mindestens einen Eigenvektor.
- (ii) Jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$ von K hat endliche Vielfachheit.
- (iii) Auf dem orthogonalen Komplement $N(K)^\perp$ des Nullraumes $N(K)$ gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem, das aus Eigenvektoren von K besteht.
- (iv) Folgt aus $Ku = 0$ stets $u = 0$, dann besitzt der Hilbertraum X ein vollständiges Orthonormalsystem, das aus Eigenvektoren von K besteht.

Dieses System erhält man, indem man auf jeden Eigenraum von K das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren anwendet.

Das inhomogene Problem (Schmidtsche Reihe): Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$\lambda u - Ku = f, \quad u \in X, \quad (11.66)$$

in dem Hilbertraum X über \mathbb{K} . Gegeben seien $f \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq 0$. Gesucht wird $u \in X$. Wir setzen voraus, dass der lineare Operator $K : X \rightarrow X$ kompakt und symmetrisch ist. Es sei $\{u_1, u_2, \dots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem auf $N(K)^\perp$, das aus Eigenvektoren von K besteht mit $Ku_j = \lambda_j u_j$ und $\lambda_j \neq 0$ für alle j .

Satz: (a) Ist λ kein Eigenwert von K , dann besitzt (11.66) die eindeutige Lösung

$$u = \frac{1}{\lambda}f + \sum_j \frac{\lambda_j}{\lambda(\lambda - \lambda_j)}(u_j, f)u_j. \quad (11.67)$$

(b) Ist λ ein Eigenwert von K , dann besitzt (11.66) genau dann eine Lösung, wenn f orthogonal ist zum Eigenraum $E(\lambda)$ von K bezüglich λ .

Eine spezielle Lösung u_{spez} von (11.66) erhält man aus (11.67), indem man nur über alle Eigenwerte λ_j summiert, die von λ verschieden sind.

Die allgemeine Lösung u von (11.66) erhält man dann durch $u = u_{\text{spez}} + v$ bei beliebigem $v \in E(\lambda)$.

Anwendung auf Integralgleichungen: Wir betrachten die Integralgleichung

$$\lambda u(x) - \int_{\Omega} \mathbb{K}(x, y)u(y) dy = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (11.68)$$

²⁷Ein solcher Operator ist stets selbstadjungiert.

Dabei sei Ω eine nichtleere offene Menge des \mathbb{R}^n (oder allgemeiner eine nichtleere messbare Menge des \mathbb{R}^n). Gegeben seien die Funktion $f \in L_2^{\mathbb{K}}(\Omega)$ und die Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq 0$. Von dem Kern $\mathbb{K} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ setzen wir voraus, dass er messbar und quadratisch integrierbar ist, d. h., es gilt

$$\int_{\Omega \times \Omega} |\mathbb{K}(x, y)|^2 dx dy < \infty. \quad (11.69)$$

Zusätzlich sei der Kern symmetrisch, d. h., es ist $\mathbb{K}(x, y) = \overline{\mathbb{K}(y, x)}$ für alle $x, y \in \Omega$. Setzen wir

$$(Ku)(x) := \int_{\Omega} \mathbb{K}(x, y) u(y) dy \quad \text{für fast alle } x \in \Omega,$$

und wählen wir den Hilbertraum $X := L_2^{\mathbb{K}}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_{\Omega} \overline{u(x)} v(x) dx,$$

dann ist der lineare Operator $K : X \rightarrow X$ kompakt und symmetrisch.

Folglich kann man alle obigen abstrakten Ergebnisse auf (11.68) anwenden und erhält eine perfekte Lösungstheorie für (11.68) sowie für das zugehörige Eigenwertproblem mit $f \equiv 0$.

Zusatz: Ist \mathbb{K} nicht notwendigerweise symmetrisch, dann erhält man den adjungierten Operator $K^* : X \rightarrow X$ durch

$$(K^*u)(x) = \int_{\Omega} \overline{\mathbb{K}(y, x)} u(y) dy \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Ein Variationsprinzip zur Konstruktion der Eigenlösungen: Es sei $K : X \rightarrow X$ ein linearer kompakter symmetrischer Operator auf dem separablen Hilbertraum X über \mathbb{K} mit $X \neq \{0\}$. Dann gilt:

(i) Das Maximumproblem

$$|(Ku, u)| = \max !, \quad u \in X, \quad \|u\| = 1, \quad (11.70)$$

besitzt eine Lösung u_1 , die ein Eigenvektor zu K ist, d. h., es gilt $Ku_1 = \lambda_1 u_1$. Dabei ist $|\lambda_1|$ der Maximalwert von (11.70).

(ii) Für $k = 2, 3, \dots$ besitzt das Maximumproblem

$$\begin{aligned} |(Ku, u)| &= \max !, & u \in X, \quad \|u\| = 1, \\ (u_1, u) &= \dots = (u_{k-1}, u) = 0, \end{aligned} \quad (11.71)$$

eine Lösung u_k , die Eigenvektor von K ist mit $Ku_k = \lambda_k u_k$. Dabei ist $|\lambda_k|$ der Maximalwert von (11.71). Dieses Verfahren liefert ein vollständiges Orthonormalsystem $\{u_1, u_2, \dots\}$ auf X mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$

Das Courantsche Maximum-Minimumprinzip: Es sei $K : X \rightarrow X$ wie in (11.70) gegeben mit der zusätzlichen Bedingung $(Ku, u) > 0$ für alle $u \in X, u \neq 0$. Wir betrachten das Maximum-Minimumproblem

$$\lambda_m = \max_{M \in \mathbb{L}_m} \min_{u \in M} (Ku, u), \quad m = 1, 2, \dots . \quad (11.72)$$

Dabei bezeichnet \mathbb{L}_m die Klasse aller Mengen $M = S \cap L$, wobei S die Oberfläche der Einheitskugel und L ein beliebiger m -dimensionaler Unterraum von X ist.

Dann besitzt (11.72) für jedes m eine Lösung u_m , welche Eigenvektor zu K ist mit $Ku_m = \lambda_m u_m$. Ferner gilt $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Auf diese Weise erhält man alle Eigenwerte von K und ein vollständiges Orthonormalsystem $\{u_1, u_2, \dots\}$ auf X .

Dieses Verfahren besitzt gegenüber (11.71) den entscheidenden Vorteil, dass man den m -ten Eigenwert direkt charakterisiert. Daraus ergeben sich zum Beispiel wichtige Vergleichssätze für Eigenwerte (vgl. 11.6.4).

11.3.4 Die Gleichung $Au = f$ für Fredholmoperatoren

Die Theorie der Fredholmgleichungen verallgemeinert die klassische Theorie linearer Gleichungssysteme auf Banachräume. Das Ziel sind Fredholmsche Alternativen, die sich auf große Klassen von Differential- und Integralgleichungen anwenden lassen.

Wir betrachten die Operatorgleichung

$$Au = f, \quad u \in X, \tag{11.73}$$

zusammen mit der dualen Gleichung

$$A^T u^* = f^*, \quad u^* \in Y^*. \tag{11.74}$$

Der Operator $A : X \rightarrow Y$ sei ein *linearer stetiger Fredholmoperator* zwischen den Banachräumen X und Y über \mathbb{K} . Dies bedeutet, dass $A : X \rightarrow Y$ linear und stetig ist mit

$$\dim N(A) < \infty \quad \text{und} \quad \text{codim } R(A) < \infty.$$

Die Zahl $\text{ind } A := \dim N(A) - \text{codim } R(A)$ heißt der *Index* von A . Zwischen (11.73) und (11.74) besteht eine perfekte Dualität.

Hauptsatz (Fredholmsche Alternative): (i) Die Ausgangsgleichung (11.73) ist für gegebenes $f \in Y$ genau dann lösbar, wenn die Lösbarkeitsbedingung

$$\langle u^*, f \rangle = 0 \quad \text{für alle } u^* \in N(A^T) \tag{11.75}$$

erfüllt ist.

(ii) Die duale Gleichung (11.74) ist für gegebenes $f^* \in X^*$ genau dann lösbar, wenn die Lösbarkeitsbedingung

$$\langle f^*, u \rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in N(A) \tag{11.76}$$

erfüllt ist.

Zusatz (Index null): Ist $\text{ind } A = 0$ und folgt aus $Au = 0$ stets $u = 0$, dann besitzt die Ausgangsgleichung (11.73) für jedes $f \in Y$ genau eine Lösung $u = A^{-1}f$, wobei der Operator $A^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig ist, d.h., die Lösung u hängt stetig von f ab.

Kommentar: (i) *Endlich viele Lösbarkeitsbedingungen.* Die Bedingung (11.75) ist äquivalent zu

$$\langle u_j^*, f \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, \dim N(A^T),$$

wobei $\{u_j^*\}$ eine Basis von $N(A^T)$ bezeichnet.

(ii) *Endlichdimensionale Lösungsmannigfaltigkeit.* Kennt man eine spezielle Lösung u_{spez} von (11.73), dann erhält man die allgemeine Lösung von (11.73) durch $u_{\text{spez}} + N(A)$. Das ist eine lineare Mannigfaltigkeit der endlichen Dimension $k = \text{codim } R(A) + \text{ind } A$.

Ist speziell A surjektiv, dann gilt $k = \text{ind } A$.

(iii) Die notwendigen Lösbarkeitsbedingungen sind auch hinreichend. Ist u eine Lösung von $Au = f$, dann gilt $\langle u^*, f \rangle = \langle u^*, Au \rangle = \langle A^T u^*, u \rangle = 0$, falls $A^T u^* = 0$. Das ist die Lösbarkeitsbedingung (11.75). Der Hauptsatz besagt, dass diese einfache notwendige Bedingung auch hinreichend für die Existenz einer Lösung u von (11.73) ist.

(iv) Eindeutigkeit impliziert Existenz für $\text{ind } A = 0$. Der Zusatz besagt: Besitzt die Gleichung (11.73) mit $\text{ind } A = 0$ höchstens eine Lösung, dann hat sie für jede rechte Seite $f \in Y$ genau eine Lösung u .

► **BEISPIEL 1** (endliches Gleichungssystem): Wir wählen $X := \mathbb{K}^n$ und $Y := \mathbb{K}^m$. Ist $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ein linearer Operator, dann ist A ein Fredholmoperator vom Index

$$\text{ind } A = n - m,$$

und der Hauptsatz entspricht der Lösungstheorie für lineare Gleichungssysteme. Führt man traditionsgemäß den Rang $r := \dim R(A)$ ein, dann hat die Lösungsmannigfaltigkeit von (11.73) die Dimension $k = \dim N(A) = n - r$, während $m - r$ Lösbarkeitsbedingungen erfüllt sein müssen. Der Operator A hat den gleichen Rang wie A^T .

Bei unendlichdimensionalen Banachräumen hat man häufig $R(A) = \mathbb{K}$, deshalb spielt der Rang im allgemeinen Fall keine Rolle. Der Index von A ist entscheidend.

► **STANDARDBEISPIEL 2** (kompakte Störung eines invertierbaren Operators): Der Operator

$$A := B + C$$

ist ein linearer stetiger Fredholmoperator mit $\text{ind } A = 0$, falls der lineare stetige Operator $B : X \rightarrow Y$ bijektiv und der lineare Operator $C : X \rightarrow Y$ kompakt ist.

Motivation. Aus $Bu = 0$ folgt $u = 0$, und es ist $R(B) = Y$. Deshalb gilt die Beziehung $\dim N(B) = \text{codim } R(B) = 0$, d.h., B ist ein Fredholmoperator mit $\text{ind } B = 0$.

Die obige Aussage folgt nun aus dem allgemeinen Satz, dass die kompakte Störung eines Fredholmoperators wieder einen Fredholmoperator ergibt, wobei der Index unverändert bleibt (vgl. 11.3.4.5).

11.3.4.1 Die Gleichung $\lambda u - Ku = f$ in Banachräumen

Es sei $K : X \rightarrow X$ ein linearer kompakter Operator auf dem Banachraum X über \mathbb{K} . Nach Standardbeispiel 2 ist $\lambda I - K$ mit $\lambda \neq 0$ ein Fredholmoperator vom Index null. Speziell folgt aus dem Hauptsatz:

(i) *Fredholmsche Alternative.* Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq 0$. Ist λ kein Eigenwert von K , dann besitzt die Gleichung

$$\lambda u - Ku = f, \quad u \in X, \tag{11.77}$$

für jedes $f \in X$ eine eindeutige Lösung $u = (\lambda I - K)^{-1}f$, die wegen der Stetigkeit von $(\lambda I - K)^{-1} : X \rightarrow X$ stetig von f abhängt.

(ii) Ist λ ein Eigenwert von K , so besitzt (11.77) für gegebenes $f \in X$ genau dann eine Lösung, wenn

$$\langle u^*, f \rangle = 0 \quad \text{für alle } u^* \in N(\lambda I - K^T)$$

gilt. Ferner ist $\dim N(\lambda I - K) = \dim N(\lambda I - K^T)$.

Zusatz: Alle Eigenwerte $\lambda \neq 0$ von K haben endliche Vielfachheit, und sie können sich höchstens im Punkte $\lambda = 0$ häufen.

Die Jordansche Normalform von K: Es sei $\lambda = \lambda_0$ ein Eigenwert von K mit $\lambda_0 \neq 0$. Wir setzen $A := (\lambda_0 I - K)$. Es ist unser Ziel, den Ausgangsraum X in möglichst kleine Unterräume zu zerlegen, die alle invariant sind bezüglich K . Hierzu setzen wir²⁸

$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N(A^k), \quad R := \bigcap_{k=1}^{\infty} R(A^k).$$

Dann gilt

$$X = N \oplus R,$$

wobei N und R invariante Unterräume bezüglich K sind. Der Operator $A : R \rightarrow R(A)$ ist ein linearer Homöomorphismus. Auf dem endlichdimensionalen Raum N besitzt K nur den Eigenwert λ_0 . Man nennt N den verallgemeinerten Eigenraum zu λ_0 und $\dim N$ die algebraische Vielfachheit von λ_0 .

Der Raum $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$ kann weiter in invariante Unterräume N_j bezüglich K zerlegt werden, so dass auf jedem N_j eine Basis e_1, \dots, e_s existiert mit

$$Ke_1 = \lambda_0 e_1, \quad Ke_2 = \lambda_0 e_2 + e_1, \quad \dots, \quad Ke_s = \lambda_0 e_s + e_{s-1}.$$

11.3.4.2 Die Gleichung $\lambda u - Ku = f$ in Hilberträumen

Es sei $K : X \rightarrow X$ ein linearer kompakter Operator auf dem Hilbertraum X über \mathbb{K} . Dann gilt:

(i) *Fredholmsche Alternative.* Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq 0$. Ist λ kein Eigenwert von K , dann besitzt die Gleichung

$$\lambda u - Ku = f, \quad u \in X, \tag{11.78}$$

für jedes $f \in X$ genau eine Lösung, die stetig von f abhängt.

(ii) Ist λ ein Eigenwert von K , so hat (11.78) für gegebenes $f \in X$ genau dann eine Lösung u , wenn $(u^*, f) = 0$ für alle Lösungen u^* der homogenen adjungierten Gleichung

$$\bar{\lambda}u^* - K^*u^* = 0, \quad u^* \in X, \tag{11.79}$$

gilt. Die Lösungsmannigfaltigkeiten von (11.78) und (11.79) haben die gleiche Dimension.

Zusatz: Alle Eigenwerte $\lambda \neq 0$ von K haben endliche Vielfachheit, und sie können sich höchstens im Punkte $\lambda = 0$ häufen.

Dieses Resultat erhält man aus (11.77), indem man $\bar{\lambda}I - K^* = J^{-1}(\lambda I - K^T)J^T$ benutzt, wobei $J : X \rightarrow X^*$ die Dualitätsabbildung bezeichnet (vgl. 11.2.5).

Anwendung auf Integralgleichungen: Wir betrachten die Integralgleichung

$$\lambda u(x) - \int_{\Omega} \mathbb{K}(x, y)u(y) dy = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{11.80}$$

zusammen mit der homogenen adjungierten Gleichung

$$\bar{\lambda}u^*(x) - \int_{\Omega} \overline{\mathbb{K}(y, x)}u^*(y) dy = 0, \quad x \in \Omega. \tag{11.81}$$

Dabei sei Ω eine nichtleere offene Menge des \mathbb{R}^n (oder allgemeiner eine nichtleere messbare Menge des \mathbb{R}^n). Gegeben seien die Funktion $f \in L_2^{\mathbb{K}}(\Omega)$ und die Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq 0$. Von

²⁸Genauer ist $N(A) \subseteq N(A^2) \subseteq \dots$ sowie $R(A) \supseteq R(A^2) \supseteq \dots$, und es gibt eine Zahl p , so dass $N = N(A^p)$, $R = R(A^p)$ gilt, weil die Ketten an dieser Stelle konstant werden.

dem Kern $\mathbb{K} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ setzen wir voraus, dass er messbar und quadratisch integrierbar ist (vgl. (11.69)). Wählen wir den Hilbertraum $X = L_2^{\mathbb{K}}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \overline{u(x)} v(x) \, dx,$$

dann entspricht (11.80) bzw. (11.81) den Gleichungen (11.78) bzw. (11.79), und es gelten für die Integralgleichung (11.80) alle für (11.78) formulierten Aussagen.

11.3.4.3 Duale Paare

In den Anwendungen ist es häufig bequem, anstelle des dualen Raumes einfache Räume zu verwenden. Zu diesem Zweck betrachten wir neben der Ausgangsgleichung

$$Au = f, \quad u \in X, \tag{11.82}$$

die homogene „pseudoduale“ Gleichung

$$A^D v = 0, \quad v \in X, \tag{11.83}$$

mit der Schlüsselrelation

$$\langle Au, v \rangle_D = \langle A^D v, u \rangle \quad \text{für alle } u, v \in X. \tag{11.84}$$

Wir setzen voraus:

(H1) X und X^D sind Banachräume über \mathbb{K} . Die Abbildung $(v, u) \mapsto \langle v, u \rangle_D$ ist eine beschränkte Bilinearform von $X^D \times X$ nach \mathbb{K} , d. h., es gilt

$$|\langle v, u \rangle_D| \leq \text{const} \|v\| \|u\| \quad \text{für alle } v \in X^D, u \in X.$$

Ferner verlangen wir, dass die folgenden beiden Nichtentartungsbedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \text{aus } \langle v, u \rangle_D = 0 &\quad \text{für alle } u \in X \quad \text{folgt } v = 0; \\ \text{aus } \langle v, u \rangle_D = 0 &\quad \text{für alle } v \in X^D \quad \text{folgt } u = 0. \end{aligned}$$

(H2) Die beiden Operatoren $A, A^D : X \rightarrow X^D$ sind lineare stetige Fredholmoperatoren mit $\text{ind } A = -\text{ind } A^D$ (z. B. $\text{ind } A = \text{ind } A^D = 0$). Es gilt (11.84). Man bezeichnet $\{X^D, X\}$ als ein duales Paar.

Satz 1: Für gegebenes $f \in X^D$ besitzt die Gleichung (11.82) genau dann eine Lösung u , wenn $\langle f, v \rangle = 0$ für alle Lösungen v von (11.83) gilt.

Anwendung auf Integralgleichungen: Es sei $\mathbb{K} : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $-\infty < a < b < \infty$. Für gegebenes $f \in C[a, b]$ besitzt die Integralgleichung

$$u(x) - \int_a^b \mathbb{K}(x, y) u(y) \, dy = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \tag{11.85}$$

genau dann eine Lösung $u \in C[a, b]$, wenn für alle Lösungen $v \in C[a, b]$ von

$$v(x) - \int_a^b \mathbb{K}(y, x) v(y) \, dy = 0 \tag{11.86}$$

die Gleichung $\int_a^b f(x)v(x) dx = 0$ gilt. Das folgt aus Satz 1 mit $X = X^D = C[a, b]$ und $\langle f, v \rangle_D := \int_a^b f(x)v(x) dx$ sowie $\text{ind } A = \text{ind } A^D = 0$ nach Standardbeispiel 2.

Man beachte, dass im vorliegenden Fall der duale Raum $X^* = V[a, b]$ von X^D verschieden ist.

Anwendung auf Differentialgleichungen: Das Randwertproblem

$$\alpha u'' + \beta u' + \gamma u = f, \quad a < x < b, \quad u(a) = u(b) = 0, \quad (11.87)$$

mit den C^2 -Funktionen $\alpha, \beta, \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha(x) \geq \text{const} > 0$ auf $[a, b]$ besitzt für gegebenes $f \in C[a, b]$ genau dann eine Lösung $u \in C^2[a, b]$, wenn $\int_a^b f(x)v(x) dx = 0$ für alle Lösungen $v \in C^2[a, b]$ von

$$(\alpha v)'' - (\beta v)' + \gamma v = f, \quad a < x < b, \quad v(a) = v(b) = 0, \quad (11.88)$$

gilt. Das folgt aus Satz 1 mit $X := \{u \in C^2[a, b] : u(a) = u(b) = 0\}$, $X^D := C[a, b]$ und $\langle f, u \rangle_D := \int_a^b f(x)u(x) dx$. Die Beziehung (11.84) erhält man durch partielle Integration.

11.3.4.4 Gleichungen für Bilinearformen

Satz 2: Die Gleichung

$$a(u, \varphi) + c(u, \varphi) = b(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in D \quad (11.89)$$

besitzt genau dann eine Lösung $u \in X$, wenn $b(v) = 0$ gilt, und zwar für alle Lösungen $v \in X$ der homogenen dualen Gleichung

$$a(\varphi, v) + c(\varphi, v) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in D. \quad (11.90)$$

Dabei setzen wir voraus:

(i) $b : X \rightarrow \mathbb{K}$ ist ein lineares stetiges Funktional auf dem Hilbertraum X über \mathbb{K} ; D ist eine dichte Teilmenge von X .

(ii) $a, c : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ sind bilineare beschränkte Funktionale. Es gibt eine Konstante $\gamma > 0$, so dass

$$\gamma \|u\|^2 \leq a(u, u) \quad \text{für alle } u \in X$$

gilt.

(iii) Die Bilinearform $c(., .)$ ist kompakt, d.h., aus der schwachen Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \rightharpoonup v$ in X folgt $c(u_n, v_n) \rightarrow c(u, v)$ (vgl. 11.5.7).

Korollar (Lemma von Lax–Milgram): Ist $c(u, v) \equiv 0$, dann besitzt (11.89) für jedes $b \in X^*$ genau eine Lösung $u \in X$.

Anwendung auf elliptische Differentialgleichungen: Es sei Ω eine nichtleere offene beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^N . Dann besitzt das allgemeine elliptische Randwertproblem²⁹

$$\begin{aligned} -\sum_{j,k=1}^N \partial_k(a_{jk}\partial_j u) + \sum_{j=1}^N a_j \partial_j u + a_0 u &= f \quad \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{11.91}$$

für gegebenes $f \in L_2(\Omega)$ genau dann eine Lösung $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, wenn $\int_{\Omega} f(x)v(x) dx = 0$ gilt,

und zwar für alle Lösungen $v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ der homogenen dualen Gleichung

$$\begin{aligned} -\sum_{j,k=1}^N \partial_k(a_{jk}\partial_j v) - \sum_{j=1}^N \partial_j(a_j v) + a_0 v &= 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{11.92}$$

Die Lösungen sind dabei im Sinne der Distributionentheorie zu verstehen.

Ist $a_0 \geq 0$ auf Ω und verschwinden a_1, \dots, a_N auf Ω , dann besitzt (11.91) für jedes $f \in L_2(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Diese Aussage folgt aus Satz 2, indem man setzt: $X = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ und $D = C_0^\infty(\Omega)$ sowie

$$\begin{aligned} b(u) &:= \int_{\Omega} f(x)u(x) dx, \\ a(u, \varphi) &:= \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^N a_{jk} \partial_j u \partial_k \varphi dx, \\ c(u, \varphi) &:= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N (a_j \partial_j u) \varphi + a_0 u \varphi \right) dx. \end{aligned}$$

Man bezeichnet die Lösung u von (11.89) als verallgemeinerte Lösung zu (11.91). Formal erhält man (11.89), indem man die erste Gleichung in (11.91) mit der Testfunktion $\varphi \in D$ multipliziert und einmal partiell integriert. Analog verfährt man mit (11.92), um (11.90) zu erhalten.

Regularität: Sind alle Daten $f, a_{jk}, a_j, \partial\Omega$ hinreichend glatt, dann ist die verallgemeinerte Lösung u von (11.91) auch klassische Lösung.

Satz 2 kann benutzt werden, um Randwertaufgaben für allgemeine elliptische Differentialgleichungen $2m$ -ter Ordnung ($m = 1, 2, \dots$) zu lösen. Das findet man in [Zeidler 1984ff, Vol. IIA].

11.3.4.5 Eigenschaften von Fredholmoperatoren

Es seien $A : X \rightarrow Y$ und $B : Y \rightarrow Z$ lineare stetige Fredholmoperatoren, wobei X, Y, Z Banachräume über \mathbb{K} bezeichnen. Dann gilt:

- (i) A^T ist ein Fredholmoperator mit $\text{ind } A^T = -\text{ind } A$.

²⁹Wir setzen voraus, dass die Funktionen a_{km}, a_j hinreichend glatt sind (z. B. C^2 -Funktionen auf $\overline{\Omega}$). Ferner sei die Gleichung elliptisch, d. h., es ist $a_{jk} = a_{kj}$, und es gibt eine Konstante $\gamma > 0$, so dass

$$\sum_{j,k=1}^N a_{jk}(z)\xi_j \xi_k \geq \gamma \sum_{j=1}^N \xi_j^2 \quad \text{für alle } \xi_j \in \mathbb{R} \text{ und } z \in \overline{\Omega}$$

gilt.

- (ii) $A + C$ ist ein Fredholmoperator mit $\text{ind}(A + C) = \text{ind } A$, falls $C : X \rightarrow Y$ kompakt ist.
- (iii) $A + S$ ist ein Fredholmoperator mit $\text{ind}(A + S) = \text{ind } A$, falls $S : X \rightarrow Y$ linear und stetig ist und $\|S\| < \eta$ für eine hinreichend kleine Zahl $\eta > 0$ gilt, die von A abhängt.
- (iv) AB ist ein Fredholmoperator mit $\text{ind } AB = \text{ind } A + \text{ind } B$.

Parametrix: Der lineare stetige Operator $A : X \rightarrow Y$ ist genau dann ein Fredholmoperator, wenn es lineare stetige Operatoren $P_r, P_l : Y \rightarrow X$ und lineare kompakte Operatoren $K_r : Y \rightarrow Y$ und $K_l : X \rightarrow X$ gibt, so dass

$$AP_r = I + K_r, \quad P_l A = I + K_l,$$

gilt. Man bezeichnet P_r (bzw. P_l) als eine Rechtsparametrix (bzw. Linksparametrix).

Die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren stellt Hilfsmittel zur systematischen Konstruktion von Parametrices bereit [vgl. Hörmander 1983].

11.3.5 Die Fortsetzung von Friedrichs und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Neben der Operatorgleichung

$$Au = f, \quad u \in D(A), \tag{11.93}$$

auf dem reellen Hilbertraum X betrachten wir das Variationsproblem

$$\frac{1}{2}(Au, u) - (u, f) = \min !, \quad u \in D(A). \tag{11.94}$$

Satz 1: Ist der Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ symmetrisch und positiv (d. h. $(Au, u) \geq 0$ für alle $u \in D(A)$) mit dichtem Definitionsbereich $D(A)$, dann ist das Problem (11.93) äquivalent zu (11.94).

Gilt $(Au, u) > 0$ für alle $u \in D(A)$ mit $u \neq 0$, dann hat (11.93) höchstens eine Lösung u . Man nennt (11.93) die *Eulersche Gleichung* zu (11.94).

Bei wichtigen Anwendungen versagt jedoch Satz 1, weil die Gleichung (11.93) nicht für alle $f \in X$ eine Lösung besitzt. Anstelle von (11.93) betrachtet man deshalb die verallgemeinerte Gleichung

$$A_F u = f, \quad u \in D(A_F), \tag{11.95}$$

mit dem zugehörigen Variationsproblem

$$\frac{1}{2}(u, v)_E - (f, u) = \min !, \quad u \in X_E, \tag{11.96}$$

und der verallgemeinerten Eulerschen Gleichung

$$(u, A\varphi) = (f, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in D(A). \tag{11.97}$$

Dabei ist $A_F : D(A_F) \subseteq X \rightarrow X$ eine Fortsetzung von $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$, d. h., es gilt $D(A) \subseteq D(A_F) \subseteq X$ und $A_F u = Au$ für alle $u \in D(A)$. Folglich ist jede Lösung des „verallgemeinerten“ Problems (11.95) auch eine Lösung des „klassischen“ Ausgangsproblems (11.93), während die Umkehrung nicht immer richtig ist. Da jedoch $D(A)$ dicht in X liegt, unterscheiden sich $D(A)$ und $D(A_F)$ nur „wenig“ voneinander. Wir setzen voraus:

(H) Der Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ist symmetrisch und positiv definit, d. h., es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass $c\|u\|^2 \leq (Au, u)$ für alle $u \in D(A)$ gilt.

Bevor wir die Konstruktion von A_F und des energetischen Raumes X_E beschreiben, formulieren wir das Hauptergebnis.

Hauptsatz: (i) Die Fortsetzung von Friedrichs A_F des Ausgangsoperators A ist ein selbstadjungierter Operator auf X .

(ii) Die verallgemeinerte Gleichung (11.95) besitzt für jedes $f \in X$ genau eine Lösung u , die zugleich die eindeutige Lösung des Variationsproblems (11.96) und der verallgemeinerten Eulerschen Gleichung (11.97) ist.

(iii) Der inverse Operator $A_F^{-1} : X \rightarrow X$ ist linear, stetig und symmetrisch. Ist die Einbettung $X_E \subseteq X$ kompakt, dann ist auch A_F^{-1} kompakt.

Anwendung auf das Eigenwertproblem: Anstelle des klassischen Problems

$$Au - \mu u = f, \quad u \in D(A), \quad (11.98)$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\mu \neq 0$, betrachten wir das verallgemeinerte Problem

$$A_F u - \mu u = f, \quad u \in D(A_F), \quad (11.99)$$

und das dazu äquivalente Problem

$$\lambda u - Ku = \lambda Kf, \quad u \in X, \quad (11.100)$$

mit $K := A_F^{-1}$ und $\lambda := \mu^{-1}$. Ist die Einbettung $X_E \subseteq X$ kompakt, dann ist $K : X \rightarrow X$ nach dem Hauptsatz ein linearer symmetrischer kompakter Operator. Das hat die fundamentale Konsequenz, dass wir auf (11.100) die gesamte Hilbert–Schmidt-Theorie aus 11.3.3 anwenden können. Speziell besitzt K auf X ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren. Das ergibt

Satz 2: Ist die Einbettung $X_E \subseteq X$ kompakt, dann besitzt A_F auf X ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren $\{u_k\}$ mit $A_F u_k = \mu_k u_k$. Jeder Eigenwert μ_k hat endliche Vielfachheit. Ist $\dim X = \infty$, dann gilt $\mu_k \rightarrow +\infty$ für $k \rightarrow \infty$.

Kommentar: In den Anwendungen entspricht (11.98) einem Rand-Eigenwertproblem für eine Differentialgleichung, während (11.100) einer Integralgleichung entspricht, deren Kern eine Greensche Funktion ist. Der energetische Raum ist ein Sobolevraum, und die kompakte Einbettung $X_E \subseteq X$ entspricht einem Sobolevschen Einbettungssatz.

Energetischer Raum X_E : Für alle $u, v \in D(A)$ setzen wir

$$(u, v)_E := (Au, v) \quad \text{and} \quad \|u\|_E := (u, u)_E^{1/2}.$$

Eine Folge (u_n) aus $D(A)$ heißt genau dann zulässig, wenn sie eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_E$ ist. Ein Punkt $u \in X$ gehört definitionsgemäß genau dann zu X_E , wenn es eine zulässige Folge (u_n) gibt, so dass $u_n \rightarrow u$ in X gilt. Wir definieren

$$(u, v)_E := \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n)_E \quad \text{für alle } u, v \in X_E.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der zulässigen Folgen. Damit wird X_E zu einem Hilbertraum bezüglich des sogenannten energetischen Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)_E$.

Dualer energetischer Raum: Jedem $u \in X$ lässt sich durch

$$f(v) := (u, v) \quad \text{für alle } v \in X_E$$

ein lineares stetiges Funktional $f \in X_E^*$ zuordnen. Die Abbildung $u \mapsto f$ von X in X_E^* ist injektiv, deshalb können wir X mit einer Teilmenge von X_E^* identifizieren, d. h., es ist

$$D(A) \subseteq X_E \subseteq X \subseteq X_E^*.$$

Die energetische Fortsetzung A_E : Die Dualitätsabbildung $J : X_E \rightarrow X_E^*$ ist ein linearer Homöomorphismus und eine Fortsetzung von A . Wir bezeichnen J als energetische Fortsetzung A_E von A . Die Gleichung

$$A_E u = b, \quad u \in X_E,$$

besitzt für jedes $b \in X_E^*$ genau eine Lösung $u = A_E^{-1}b$. Dabei ist u gleichzeitig die eindeutige Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}(u, u)_E - b(u) = \min !, \quad u \in X_E.$$

Die Fortsetzung von Friedrichs A_F : Wir setzen $D(A_F) := \{u \in X_E : A_E u \in X\}$ und $A_F u := A_E u$ für alle $u \in D(A_F)$. Dann hat man die Fortsetzungskette

$$A \subseteq A_F \subseteq A^* \subseteq A_E.$$

Ferner ist $D(A_F) = X_E \cap D(A^*)$.

11.3.5.1 Anwendung auf die Poissongleichung

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^N mit vernünftigem Rand (d. h. $\partial\Omega \in C^{0,1}$). Wir setzen $X := L_2(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$ sowie

$$Au := -\Delta u \quad \text{mit} \quad D(A) := \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Dann entspricht die Operatorgleichung $Au = f$ dem klassischen Randwertproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (11.101)$$

Das zugehörige äquivalente Variationsproblem $\frac{1}{2}(Au, u) - (u, f) = \min !, \quad u \in D(A)$, lautet nach partieller Integration

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\partial_j u)^2 - fu \right) dx = \min !, \quad u \in D(A). \quad (11.102)$$

Das ist das klassische Dirichletproblem.

Partielle Integration ergibt für alle $u, v \in D(A)$:

$$(Au, v) = \int_{\Omega} (-\Delta u)v dx = \int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = (u, Av),$$

d. h., A ist symmetrisch. Die Ungleichung von Poincaré–Friedrichs (vgl. 11.2.6) zusammen mit partieller Integration liefert für alle $u \in D(A)$:

$$(Au, u) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N (\partial_j u)^2 dx \geq c \int_{\Omega} u^2 dx = c \|u\|^2.$$

Somit ist die obige Bedingung (H) erfüllt. Der energetische Raum $X_E = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ ist ein Sobolevraum. Den dualen Raum X_E^* bezeichnet man mit $W_2^{-1}(\Omega)$. Somit hat man die stetigen Einbettungen

$$\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \subseteq L_2(\Omega) \subseteq W_2^{-1}(\Omega).$$

Die energetische Fortsetzung $A_E : \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \rightarrow W_2^{-1}(\Omega)$ von A ist ein linearer Homöomorphismus mit

$$A_E u = -\Delta u \quad \text{für alle } u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega),$$

wobei Δ in natürlicher Weise im Sinne von distributiven Ableitungen zu verstehen ist. Die Fortsetzung von Friedrichs erhalten wir daraus durch

$$A_F u = -\Delta u \quad \text{für alle } u \in D(A_F) = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega).$$

Nach dem Hauptsatz besitzt das Randwertproblem (11.101) für jedes $f \in L_2(\Omega)$ genau eine Lösung $u_1 \in D(A_F)$. Das bedeutet in sehr natürlicher Weise, dass die Ableitungen und die Randwerte im verallgemeinerten Sinne zu verstehen sind. Das zugehörige Variationsproblem ist (11.102) mit „ $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ “ anstelle von „ $u \in D(A)$ “. Dieses besitzt die eindeutige Lösung u_1 , die gleichzeitig eindeutige Lösung der verallgemeinerten Eulerschen Gleichung

$$\int_{\Omega} u_1(-\Delta \varphi) \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in D(A) \tag{11.103}$$

ist. Wegen $C_0^\infty(\Omega) \subseteq D(A)$ ist das äquivalent zu „ $-\Delta u_1 = f$ auf Ω “ im Sinne der Distributionentheorie.

Da die Einbettung $X_E \subseteq X$, d.h. $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \subseteq L_2(\Omega)$, kompakt ist, besitzt A_F ein vollständiges Orthonormalsystem $\{u_k\}$ von Eigenfunktionen auf $X = L_2(\Omega)$. Diese sind Lösungen der Gleichung

$$-\Delta u_k = \mu_k u_k \quad \text{auf } \Omega, \quad u_k = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

im verallgemeinerten Sinne. Ferner gilt $\mu_k \rightarrow +\infty$ für $k \rightarrow \infty$.

11.3.5.2 Zeitabhängige Gleichungen

Wir betrachten die Situation von Satz 2. Die Differentialgleichungen

$$u'(t) = A_F u(t), \quad u(0) = u_0, \quad \text{bzw.} \tag{11.104}$$

$$u''(t) + A_F u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{11.105}$$

besitzen wie im klassischen Fall die eindeutigen Lösungen

$$u(t) = e^{A_F t} u(0), \quad t \geq 0, \text{ bzw.} \tag{11.106}$$

$$u(t) = (\cos A_F^{1/2} t) u(0) + A_F^{-1/2} (\sin A_F^{1/2} t) u'(0), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11.107}$$

wobei die Funktionen $f(A_F)$ durch

$$f(A_F)u := \sum_k f(\mu_k)(u_k, u)u_k \tag{11.108}$$

definiert werden. Der Definitionsbereich $D(A_F)$ besteht aus genau allen $u \in X$, für die die Reihe in (11.108) im Hilbertraum X konvergiert.

Im Fall von A_F wie in Standardbeispiel 1 entspricht (11.104) bzw. (11.105) der Wärmeleitungsgleichung bzw. der Wellengleichung. Das wird genauer in 13.16 im Rahmen unendlichdimensionaler dynamischer Systeme betrachtet. Die Darstellungsformeln (11.106) und (11.107) für die Lösungen verallgemeinern die klassische Fouriermethode. Somit stellt die Fortsetzung von Friedrichs ein fundamentales Instrument zur Untersuchung der partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik dar:

Die Fortsetzung von Friedrichs repräsentiert in eleganter Weise den funktionalanalytischen Kern der klassischen mathematischen Physik.

11.3.6 Halbgruppen

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0, \quad (11.109)$$

mit der reellen Zahl A besitzt die eindeutige Lösung

$$u(t) = e^{tA}u_0. \quad (11.110)$$

In der Theorie der Halbgruppen wird dieser elementare Sachverhalt auf den Fall verallgemeinert, dass $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein *linearer Operator* auf einem Banachraum X ist. In vielen Fällen existiert die Lösung (11.109) nur für $t \geq 0$, was irreversiblen Prozessen in der Natur entspricht. Dann stellt $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ eine sogenannte Halbgruppe (oder einen Semifluss) auf X dar. Das wird ausführlich in 13.16 und 13.17 betrachtet.

11.4 Näherungsverfahren und numerische Funktionalanalysis

Die numerische Funktionalanalysis studiert die Konvergenz von Näherungsverfahren mit Mitteln der Funktionalanalysis. Ein wichtiger Begriff ist dabei der des Galerkinschemas.

Definition: Unter einem *Galerkinschema* $\{X_n\}$ in einem unendlichdimensionalen Banachraum X versteht man eine Folge von endlichdimensionalen linearen Unterräumen von X , so dass die Vereinigung $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ in X *dicht* liegt. Das ist gleichbedeutend damit, dass für jedes $u \in X$ die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u, X_n) = 0$$

gilt, wobei $d(u, X_n) := \inf_{v \in X_n} \|u - v\|$ den Abstand zwischen u und X_n bezeichnet.

► **BEISPIEL 1:** Es sei $X := C[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Setzen wir $u_k(x) := x^k$ und $X_n := \text{span}\{u_0, \dots, u_n\}$, dann besteht X_n aus allen Polynomen vom Grad $\leq n$, und $\{X_n\}$ ist nach dem Approximationssatz von Weierstraß ein Galerkinschema in X . Der klassische *Approximationssatz von Jackson* besagt, dass

$$d(u, X_n) \leq \frac{\text{const}}{n^k} \max_{a \leq x \leq b} |u^{(k)}(x)|$$

für alle $u \in C^k[a, b]$, $k = 1, \dots, n$ gilt. Die Konstante hängt nur von a, b und k ab.

Dieses Resultat ist typisch für die allgemeinere Aussage: Je glatter die Funktion u ist, um so genauer ist die Approximation durch das Galerkinschema. Eines der Hauptresultate der numerischen Funktionalanalysis lautet: Je glatter die Lösung ist, um so rascher konvergieren Näherungsverfahren (Ritzsches Verfahren, Galerkinverfahren, Projektions-Iterationsverfahren oder Differenzenverfahren).

11.4.1 Iterationsverfahren

Hauptsatz für lineare Operatorgleichungen: Es sei $A : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator auf dem Banachraum X über \mathbb{K} mit $\|A\| < 1$. Dann gilt:

(i) *Existenz und Eindeutigkeit:* Die Operatorgleichung

$$u - Au = f, \quad u \in X, \quad (11.111)$$

besitzt für jedes $f \in X$ genau eine Lösung $u = (I - A)^{-1}f$. Dabei ist

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots . \quad (11.112)$$

Diese Reihe konvergiert in $L(X, X)$, d. h. in der Operatornorm. Man nennt (11.112) die geometrische (oder Neumannsche) Reihe.

(ii) *Stetige Abhängigkeit:* Die Lösung u hängt stetig von f ab.

(iii) *Konvergenz des Iterationsverfahrens:* Für ein beliebiges Startelement $u_0 \in X$ konvergiert das Iterationsverfahren

$$u_{n+1} = Au_n + f, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (11.113)$$

für $n \rightarrow \infty$ in X gegen die Lösung u von (11.111).

Im folgenden sei $n = 1, 2, \dots$.

(iv) *Lineare Konvergenz:* $\|u - u_{n+1}\| \leq \|A\| \|u - u_n\|$.

(v) *A priori Fehlerabschätzung:* $\|u - u_n\| \leq \|A\|^n (1 - \|A\|)^{-1} \|u_1 - u_0\|$.

(vi) *A posteriori Fehlerabschätzung:* $\|u - u_n\| \leq \|A\| (1 - \|A\|)^{-1} \|u_n - u_{n-1}\|$.

Die *a priori* Fehlerabschätzung erlaubt eine Genauigkeitsaussage vor Beginn der Rechnung, während die *a posteriori* Fehlerabschätzung von der Kenntnis der berechneten Näherungen u_n und u_{n-1} abhängt. Die Erfahrung zeigt, dass *a posteriori* Fehlerabschätzungen in der Regel wesentlich genauer sind als *a priori* Fehlerabschätzungen.

Korollar (Spektralradiuskriterium): Es sei jetzt $A : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator auf dem komplexen Banachraum X mit dem Spektralradius³⁰ $r(A) < 1$. Dann bleiben (i) bis (iii) bestehen. Man hat ferner die *a priori* Fehlerabschätzung

$$\|u - u_n\| \leq 10^{-nR_n} \|u_1 - u_0\|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11.114)$$

wobei $R_n := \log_{10} \|A^n\|^{-1/n}$ die *durchschnittliche Konvergenzrate* heißt. Wegen der Konvergenz

$$R_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \log_{10} r(A)^{-1}$$

kann man in (11.114) für große n näherungsweise R_n durch R_∞ ersetzen.

Bemerkung: Ist $r(A) > 1$, dann gibt es einen Punkt $f \in X$, so dass das Iterationsverfahren in (iii) für den Startwert $u_0 = 0$ divergiert. Tatsächlich besitzt die Menge aller dieser Punkte $f \in X$ die zweite Bairesche Kategorie in X , d. h., die „meisten Punkte“ f in X haben diese ungünstige Eigenschaft.

► **BEISPIEL 2:** Für $X := \mathbb{C}^N$ ist A eine komplexe $(N \times N)$ -Matrix, und $r(A)$ ist gleich $\max |\lambda|$, wobei λ alle Eigenwerte von A durchläuft.

► **BEISPIEL 3:** Entspricht (11.111) einer Volterrascchen oder Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art, dann erhält man die Ergebnisse von 10.3.5 und 10.3.6 über die Lösung dieser Integralgleichungen durch sukzessive Approximation. Man beachte, dass für einen Volterrascchen Integraloperator A wie in 10.3.5 stets $r(A) = 0$ gilt.

Diskrete dynamische Systeme: Interpretiert man u_n als den Zustand eines Systems zur Zeit $t = n\Delta t$, dann beschreibt das Iterationsverfahren (11.113) die Zeitentwicklung eines diskreten dynamischen Systems. Die Lösung u von (11.111) entspricht einem Gleichgewichtszustand, und die Konvergenzaussage (iii) drückt die Stabilität des Gleichgewichtszustandes aus, d. h., für jeden Ausgangszustand geht das System für $t \rightarrow +\infty$ in den Gleichgewichtszustand über.

³⁰Man beachte $r(A) \leq \|A\|$ (vgl. 11.6.1).

Allgemeine Iterationsverfahren für nichtlineare Probleme: Der allgemeinste Satz über die Konvergenz von Iterationsverfahren ist der *Banachsche Fixpunktsatz*, den wir in 12.1.1 betrachten. Häufig verwendet man das sogenannte *Newtonverfahren*, das quadratisch konvergiert und somit viel schneller ist als das übliche Iterationsverfahren, vorausgesetzt der Startwert befindet sich bereits in einer hinreichend kleinen Umgebung der Lösung (vgl. 12.4).

11.4.2 Das Ritzsche Verfahren und die Methode der finiten Elemente

Unter dem Ritzschen Verfahren für das Variationsproblem

$$F(u) = \min !, \quad u \in M, \quad (11.115)$$

mit $M \subseteq X$ versteht man, dass der unendlichdimensionale Banachraum X durch einen *endlichdimensionalen Unterraum* X_n ersetzt wird und das Problem

$$F(u_n) = \min !, \quad u_n \in X_n \cap M, \quad (11.116)$$

auf einem Computer gelöst wird. Ist $\{X_n\}$ ein Galerkinschema in X , dann konvergiert (unter geeigneten Voraussetzungen an F und M) die Folge (u_n) in X gegen die eindeutige Lösung u von (11.115). Offensichtlich gilt $F(u) \leq F(u_n)$.

Um auch eine *untere Schranke* für den Minimalwert $F(u)$ von (11.115) zu erhalten, betrachtet man ein sogenanntes *duales Maximumproblem*

$$G(v) = \max !, \quad v \in N, \quad (11.117)$$

mit $N \subseteq X$, wobei der Maximalwert von (11.117) gleich dem Minimalwert von (11.115) ist. Das zugehörige Ritzsche Verfahren

$$G(v_n) = \max !, \quad v_n \in X_n \cap N, \quad (11.118)$$

bezeichnet man auch als *Trefftzsches Verfahren*. Ist u_n bzw. v_n eine Lösung von (11.116) bzw. (11.118), dann erhält man für den Minimalwert $F(u)$ von (11.115) die *zweiseitige Fehlerabschätzung*

$$G(v_n) \leq F(u) \leq F(u_n), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Häufig ergibt sich eine Abschätzung der Form $c\|u - u_n\|^2 \leq F(u_n) - F(u)$ mit einer Konstanten $c > 0$. Daraus folgt die Fehlerabschätzung

$$c\|u - u_n\|^2 \leq F(u_n) - G(v_n), \quad n = 1, 2, \dots ,$$

für die Lösung u des Ausgangsproblems (11.115). Die Konstruktion dualer Maximumprobleme geschieht in allgemeiner Form mit Hilfe der Dualitätstheorie [vgl. Zeidler 1984ff, Vol. III]. Den Spezialfall quadratischer Variationsprobleme betrachten wir in 11.4.3.

11.4.2.1 Das Ritzsche Verfahren für quadratische Variationsprobleme

Unter den gleichen Voraussetzungen wie in 11.3.2 betrachten wir das allgemeine quadratische Minimumproblem

$$F(u) := a(u, u) - 2b(u) = \min !, \quad u \in X, \quad u - u_0 \in L, \quad (11.119)$$

in dem reellen unendlichdimensionalen Hilbertraum X zusammen mit dem Ritzschen Verfahren

$$a(u_n, u_n) - 2b(u_n) = \min !, \quad u_n - u_0 \in X_n, \quad (11.120)$$

wobei $\{X_n\}$ ein Galerkinschema in L ist. Wählen wir eine Basis e_1, \dots, e_m in X_n , dann gilt $u_n = u_0 + \sum_{j=1}^m c_j e_j$. Die Aufgabe (11.120) ist äquivalent zu der Eulerschen Gleichung „ $a(u_n, v) = b(v)$ “ für alle $v \in X_n$ “. Somit ist (11.120) äquivalent zu dem *linearen Gleichungssystem*

$$\sum_{j=1}^m c_j a(e_j, e_k) = b(e_k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (11.121)$$

zur Bestimmung der unbekannten reellen Komponenten c_j der Ritzschen Näherung u_n .

Hauptsatz: (i) *Konvergenz des Ritzschen Verfahrens:* Für jedes $n = 1, 2, \dots$ besitzt das Ritzsche Problem (11.120) (bzw. (11.121)) eine eindeutige Lösung u_n , die in X gegen die eindeutige Lösung u des Ausgangsproblems (11.119) konvergiert.

Im folgenden sei $n = 1, 2, \dots$.

(ii) *Obere Schranke für den Minimalwert:* $F(u) \leq F(u_n)$.

(iii) *A posteriori Fehlerabschätzung:*³¹ $c\|u - u_n\|^2 \leq F(u_n) - \alpha$, wobei α eine untere Schranke für den Minimalwert $F(u)$ ist, die man durch das Trefftzsche Verfahren erhalten kann, indem man $\alpha = G(v_n)$ setzt (vgl. 11.4.3).

(iv) *Konvergenzgeschwindigkeit:* $\|u - u_n\| \leq c^{-1}d \cdot d(u, X_n)$.

11.4.2.2 Anwendung auf die Methode der finiten Elemente

Zur Illustration der funktionalanalytischen Konvergenzuntersuchung der *Methode der finiten Elemente* betrachten wir das einfache Minimumproblem

$$\int_a^b (u'^2 - 2uf) dx = \min!, \quad u \in \overset{\circ}{W}_2^1(a, b), \quad (11.122)$$

das zu dem Randwertproblem $u'' = f$ auf $[a, b]$ und $u(a) = u(b) = 0$ gehört. Das entsprechende Ritzsche Problem lautet

$$\int_a^b (u_n'^2 - 2u_n f) dx = \min!, \quad u_n \in X_n. \quad (11.123)$$

Wir wählen eine äquidistante Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$. Dann sei X_n die Menge aller stetigen, stückweise linearen Funktionen (bezüglich dieser Zerlegung von $[a, b]$) mit $u(a) = u(b) = 0$ (Abb. 11.18(a)).

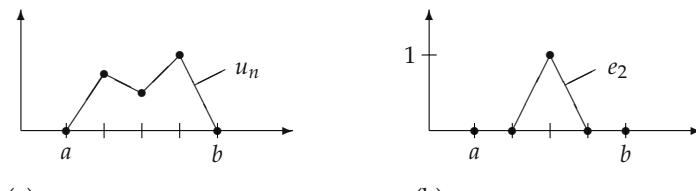


Abb. 11.18

³¹Die Konstanten c und d ergeben sich aus $c\|u\|^2 \leq a(u, u)$ und $|a(u, v)| \leq d\|u\|\|v\|$ für alle $u, v \in X$.

Ist e_k eine Funktion aus X_n mit $e_k(x_k) = 1$ und $e_k(x_j) = 0$ in den übrigen Punkten x_j , dann bildet e_1, \dots, e_n eine Basis in X_n . Die Lösung

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j e_j(x)$$

des Ritzschen Problems (11.120) ergibt sich aus dem eindeutig lösbar linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n c_j \int_a^b e'_j(x) e_k(x) dx = \int_a^b f(x) e_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Wir setzen $h_n := (b - a)/n$.

Satz: Es sei $f \in L_2(a, b)$ gegeben mit $\|f\| := \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$. In diesem Fall konvergiert die

Folge (u_n) für $n \rightarrow \infty$ in $\overset{\circ}{W}_2^1(a, b)$ gegen die eindeutige Lösung u des Ausgangsproblems (11.122). Für $n = 1, 2, \dots$ hat man ferner die Fehlerabschätzungen

$$\int_a^b |u(x) - u_n(x)|^2 dx \leq h_n^4 \|f\|^2$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}} \max_{a \leq x \leq b} |u(x) - u_n(x)| \leq h_n \|f\|.$$

In analoger Weise erhält man Konvergenzbeweise für die Methode der finiten Elemente im Falle allgemeiner elliptischer partieller Differentialgleichungen (vgl. auch 7.7.3.).

11.4.3 Das duale Ritzsche Verfahren (Treffitzsches Verfahren)

Unter den gleichen Voraussetzungen³² wie in 11.3.2 betrachten wir das quadratische *Minimumproblem*

$$F(u) := a(u, u) - 2b(u) = \min !, \quad u \in X, \quad u - u_0 \in L, \quad (11.124)$$

zusammen mit dem *dualen Maximumproblem*

$$G(v) := -a(v, v) + 2a(u_0, v) - 2b(u_0) = \max !, \quad v \in X, \quad v - v_0 \in L_E^\perp. \quad (11.125)$$

Dabei setzen wir $(u, v)_E := a(u, v)$, und L_E^\perp bezeichne das orthogonale Komplement von L bezüglich des energetischen Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)_E$, d.h. $L_E^\perp := \{v \in X : (v, w)_E = 0 \text{ für alle } w \in L\}$. Ferner sei $v_0 \in X$ eine Lösung der Gleichung $a(v_0, w) = b(w)$ für alle $w \in L$.

Wir wählen endlichdimensionale Unterräume X_n bzw. Y_n von L bzw. L_E^\perp . Dann lautet für $n = 1, 2, \dots$ das *Ritzsche Problem*

$$F(u_n) = \min !, \quad u_n - u_0 \in X_n, \quad (11.126)$$

bzw. das *Treffitzsche Problem*

$$G(v_n) = \max !, \quad v_n - v_0 \in Y_n. \quad (11.127)$$

³²Zusätzlich sei $a(u, u) \geq 0$ für alle $u \in X$.

Wie in 11.4.2 sind diese Probleme äquivalent zu linearen Gleichungssystemen.

Satz: Ist u_n bzw. v_n eine Lösung von (11.126) bzw. (11.127) und ist u eine Lösung von (11.124), dann hat man die Fehlerabschätzungen

$$F(u_n) \leq F(u) \leq G(v_n)$$

und

$$c\|u_n - u\|^2 \leq \|u_n - u\|_E^2 \leq F(u_n) - G(v_n).$$

Ist $\{X_n\}$ bzw. $\{Y_n\}$ ein Galerkinschema in L bzw. L_E^\perp , dann gilt $F(u_n) \rightarrow F(u)$ und $G(v_n) \rightarrow G(v)$ für $n \rightarrow \infty$.

Anwendung auf das Dirichletproblem: Es sei Ω eine nichtleere beschränkte offene Menge im \mathbb{R}^3 . Parallel zu 11.3.2 betrachten wir das Dirichletproblem

$$\int_{\Omega} [(u_\xi^2 + u_\eta^2 + u_\zeta^2) - 2fu] dx = \min !, \quad u - u_0 \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega).$$

Wir setzen $X := W_2^1(\Omega)$ und $L := \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ sowie

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (u_\xi v_\xi + u_\eta v_\eta + u_\zeta v_\zeta) dx \quad \text{und} \quad b(u) := \int_{\Omega} fu dx.$$

Wir wählen

- (i) Funktionen u_1, \dots, u_n aus $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, d. h. $u_j = 0$ auf $\partial\Omega$ und
- (ii) Funktionen v_1, \dots, v_n aus $C^2(\bar{\Omega})$ mit $\Delta v_j = 0$ auf Ω (z. B. können die Funktionen v_j harmonische Polynome sein).

Ferner sei für gegebene Funktionen $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ und $f \in L_2(\Omega)$ die Funktion $v_0 \in W_2^1(\Omega)$ eine Lösung der Gleichung $-\Delta v_0 = f$ auf Ω im distributiven Sinne.

Dann gelten alle Aussagen des obigen Satzes.

Anwendung auf die Methode der orthogonalen Projektion: Um die geometrische Bedeutung der obigen Dualität zu erläutern, studieren wir das *Minimumproblem*

$$F(u) := \|u - u_0\|^2 = \min !, \quad u \in L, \tag{11.128}$$

zusammen mit dem *dualen Maximumproblem*

$$G(v) := -\|u_0 - v\|^2 + \|u_0\|^2 = \max !, \quad v \in L^\perp. \tag{11.129}$$

Dabei ist L ein abgeschlossener linearer Unterraum des reellen Hilbertraumes X . Das Element $u_0 \in X$ ist gegeben.

Dann liegt das Problem (11.124) vor, falls wir setzen: $a(u, v) := (u, v)$ und $b(u) \equiv 0$. Die Lösung u von (11.128) bzw. v von (11.129) ist die orthogonale Projektion von u_0 auf L bzw. auf L^\perp (vgl. Abb. 11.19).

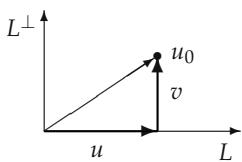


Abb. 11.19

Es sei X_n bzw. Y_n ein endlichdimensionaler Teilraum von L bzw. L^\perp . Dann ist die Lösung u_n bzw. v_n des zugehörigen Ritzschen Problems bzw. des Trefftzschen Problems gleich der orthogonalen Projektion von u_0 auf X_n bzw. auf Y_n .

11.4.4 Das universelle Galerkinverfahren (Projektionsverfahren)

Das Galerkinverfahren ist ein universelles Näherungsverfahren, welches sich auf Integralgleichungen sowie stationäre und instationäre partielle Differentialgleichungen anwenden lässt. Das Ritzsche Verfahren ist ein Spezialfall des Galerkinverfahrens.

11.4.4.1 Das abstrakte Galerkinverfahren

Als Prototyp für stationäre Probleme betrachten wir die Operatorgleichung

$$Au = f, \quad u \in X, \quad (11.130)$$

zusammen mit den *Galerkinproblemen*

$$P_n A u_n = P_n f, \quad u_n \in X_n, \quad n = 1, 2, \dots . \quad (11.131)$$

Dabei ist $\{X_n\}$ ein Galerkinschema in dem Banachraum X . Ferner ist $P_n : X \rightarrow X_n$ ein stetiger Projektionsoperator (Parallelprojektion oder orthogonale Projektion) von X auf X_n .

Der nun folgende Lösbarkeitsbegriff ist von grundlegender Bedeutung für Näherungsverfahren.

Eindeutige approximative Lösbarkeit: Die Gleichung (11.130) heißt genau dann eindeutig approximativ lösbar bezüglich $f \in X$, wenn folgendes gilt:

- (i) Die Ausgangsgleichung (11.130) besitzt für f eine eindeutige Lösung u .
- (ii) Es gibt eine Zahl n_0 , so dass die Galerkingleichung (11.131) für jedes $n \geq n_0$ eine eindeutige Lösung u_n besitzt.
- (iii) Die Galerkinmethode konvergiert, d.h., es gilt $u_n \rightarrow u$ in X für $n \rightarrow \infty$.

Galerkingleichungen in einem Hilbertraum: Es sei X ein separabler reeller Hilbertraum mit $\dim X = \infty$ und dem vollständigen Orthonormalsystem $\{e_1, e_2, \dots\}$. Wir setzen $X_n := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Dann ist

$$P_n u := \sum_{j=1}^n (e_j, u) e_j \quad \text{für alle } u \in X$$

ein *orthogonaler Projektionsoperator* von X auf X_n , und die *Galerkingleichung* (11.131) ist wegen $P = P^*$ äquivalent zu

$$(A u_n, e_j) = (f, e_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (11.132)$$

Setzen wir $u_n := \sum_{j=1}^n c_j e_j$, dann stellt (11.132) ein Gleichungssystem zur Bestimmung der reellen Zahlen c_1, \dots, c_n dar.

Hauptsatz für lineare Operatoren: Es sei $A : X \rightarrow X$ ein linearer Operator. Dann ist die Ausgangsgleichung (11.130) eindeutig approximativ lösbar, falls eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:

- (a) $A = I + B$, wobei $B : X \rightarrow X$ linear und stetig ist mit $\|B\| < 1$.
- (b) $A = I + K$, wobei $K : X \rightarrow X$ linear und kompakt ist und die Gleichung $Au = 0$ nur die Lösung $u = 0$ besitzt.
- (c) A ist linear, stetig und stark monoton, d.h., es gibt eine Zahl $c > 0$, so dass

$$(Au, u) \geq c \|u\|^2 \quad \text{für alle } u \in X \quad \text{gilt.} \quad (11.133)$$

(d) $A = B + K$, wobei $B : X \rightarrow X$ linear, stetig und stark monoton ist, $K : X \rightarrow X$ linear und kompakt ist und die Gleichung $Au = 0$ nur die Lösung $u = 0$ besitzt.

Für (a) und (c) ist $n_0 = 1$.

Korollar (Fehlerabschätzungen): In den Fällen (a), (b) und (c) haben wir für $n \geq n_0$ die folgenden Fehlerabschätzungen:

- (a) $\|u - u_n\| \leq (1 - \|B\|)^{-1} d(u, X_n)$.
- (b) $\|u - u_n\| \leq \text{const} \cdot d(u, X_n)$.
- (c) $c\|u - u_n\| \leq \|Au_n - f\|$.

Anwendungen: Die Aussagen (a), (b) lassen sich auf Integralgleichungen anwenden (vgl. 10.3.13).

Aus (d) ergibt sich das Galerkinverfahren für Randwertaufgaben elliptischer partieller Differentialgleichungen [vgl. Zeidler 1984ff, Vol. IIA].

Die Galerkingleichungen in Banachräumen: Wir wählen eine Basis e_1, \dots, e_m . Dann gibt es m lineare stetige Funktionale f_1, \dots, f_m auf X^* , so dass $\langle f_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ für $j, k = 1, \dots, m$ gilt. Setzen wir

$$P_n u := \sum_{j=1}^m \langle f_j, u \rangle e_j \quad \text{für alle } u \in X,$$

dann ist $P_n : X \rightarrow X_n$ ein stetiger *Projektionsoperator* von X auf X_n . Die *Galerkingleichung* (11.131) ist äquivalent zu

$$\langle f_k, u_n \rangle = \langle f_k, f \rangle, \quad k = 1, \dots, m.$$

Setzen wir $u_n = \sum_{j=1}^m c_j e_j$, dann ist das äquivalent zu einem Gleichungssystem zur Bestimmung der reellen Zahlen c_1, \dots, c_m . Diese Galerkingleichungen werden wir in 12.8 benutzen, um die Konvergenz des Galerkinverfahrens für die wichtige Klasse nichtlinearer monotoner Operatoren zu beweisen.

11.4.4.2 Die Formulierung der Galerkingleichungen für Differential- und Integralgleichungen

Im folgenden zeigen wir, wie man unabhängig von dem obigen abstrakten Schema bei Differential- und Integralgleichungen das Galerkinverfahren nach einem einheitlichen Vorgehen rasch direkt erhält. Die Idee ist dabei folgende:

(i) Man multipliziert das Ausgangsproblem (A) mit Testfunktionen φ und integriert partiell. Das ergibt das verallgemeinerte Problem (A*). (Bei Integralgleichungen wird nur mit φ multipliziert und integriert. Naturgemäß entfällt hier die partielle Integration).

(ii) Das *Galerkinverfahren* erhält man aus dem verallgemeinerten Problem (A*), indem man die gesuchte Funktion u durch eine endliche Linearkombination

$$u_n = \sum_{j=1}^m c_j e_j$$

ersetzt mit unbekannten reellen Koeffizienten c_j und bekannten Basisfunktionen e_j , die so gewählt werden, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Handelt es sich um ein zeitabhängiges Problem, dann hängen die Koeffizienten $c_j(t)$ von der Zeit t ab, während die Basisfunktionen $e_j(x)$ von den Raumvariablen abhängen. Aus den Anfangsbedingungen des Problems erhält man die Bedingungen für c_j zur Zeit $t = 0$.

(iii) Die *Testfunktionen* φ muss man so wählen, dass für hinreichend glatte Lösungen u das Ausgangsproblem (A) äquivalent zum verallgemeinerten Problem (A*) ist.

Tabelle 11.2 gibt die Struktur der Galerkingleichungen an.

Tabelle 11.2 Die Universalität des Galerkinverfahrens

Ausgangsproblem	Galerkingleichung
linear	linear
nichtlinear	nichtlinear
Integralgleichung	Gleichungssystem
elliptisches Randwertproblem	Gleichungssystem
elliptisches Rand-Eigenwertproblem	Eigenwertproblem für ein Gleichungssystem
parabolisches Rand-Anfangswertproblem	System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung
hyperbolisches Rand-Anfangswertproblem	System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Im folgenden ergibt sich, dass die verallgemeinerten Problemstellungen nicht nur von rein theoretischem Interesse sind, sondern auch automatisch das geeignete Näherungsverfahren (Galerkinverfahren) liefern.

Die Konvergenz des Galerkinverfahrens für große Klassen von linearen und nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen findet man in [Zeidler 1984ff, Vol. IIA]. Die Konvergenz wird in Sobolevräumen bewiesen. Die Konvergenz des Galerkinverfahrens liefert dabei zugleich Existenzaussagen für das Ausgangsproblem (A).

Bei zeitabhängigen Problemen muss man Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$ auf dem Zeitintervall $[0, T]$ mit Werten in dem Banachraum X betrachten. Dabei ist X ein Sobolevraum bezüglich der räumlichen Variablen (vgl. 14.1).

Das Galerkinverfahren für Integralgleichungen findet man in 10.3.13.

Das Galerkinverfahren für stationäre (elliptische) partielle Differentialgleichungen: Wir setzen $C_0^k(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$. Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^N mit hinreichend glattem Rand (z. B. $\partial\Omega \in C^{0,1}$). Ferner setzen wir

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

► **STANDARDBEISPIEL 1** (elliptisches Rand-Eigenwertproblem): Wir betrachten die *erste Randwertaufgabe*

$$Lu := \sum_{j=1}^N -\partial_j(|\partial_j u|^{p-2}\partial_j u) + a_j \partial_j u = \lambda u + f \quad \text{auf } \Omega, \tag{11.134}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{Randbedingung}),$$

mit dem reellen Eigenwertparameter λ und $p > 1$. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit der Testfunktion $\varphi \in C_0^2(\overline{\Omega})$, dann erhalten wir

$$(Lu - \lambda u - f, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^2(\overline{\Omega}). \tag{G}$$

Partielle Integration ergibt dann das zugehörige *verallgemeinerte* Problem

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) &= \lambda(u, \varphi) + (f, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^2(\bar{\Omega}), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{11.135}$$

mit

$$a(u, \varphi) := \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N |\partial_j^{p-2} u| \partial_j u \partial_j \varphi + (a_j \partial_j u) \varphi \right) dx.$$

Wählen wir Funktionen $e_1, \dots, e_n \in C_0^2(\bar{\Omega})$ und setzen wir $X_n := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, dann lautet die *Galerkingleichung* für (11.135):

$$a(u_n, \varphi) = \lambda(u_n, \varphi) + (f, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in X_n. \tag{11.136}$$

Gesucht wird $u_n \in X_n$. Setzen wir $u_n := \sum_{j=1}^n c_j e_j$, dann ist (11.136) äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$a(u_n, e_k) = \lambda(u_n, e_k) + (f, e_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

für die unbekannten Koeffizienten c_1, \dots, c_n . Gilt $p = 2$ (bzw. $p \neq 2$), dann ist das ein lineares (bzw. nichtlineares) Gleichungssystem, welches mit den in Kapitel 7 angegebenen Methoden auf dem Computer zu lösen ist.

Für $f \equiv 0$ erhalten wir ein *Eigenwertproblem*.

Im Spezialfall $a_i \equiv 0$ für alle i lässt sich (11.136) aus dem *Variationsproblem*

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{p} |\partial_j u|^p - fu \right) dx = \min!, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

gewinnen. Dann sind die Galerkingleichungen (11.136) mit den *Ritzschen Gleichungen* identisch.

Rechtfertigung der Bezeichnung „verallgemeinertes Problem“: Ist u eine hinreichend glatte Lösung des verallgemeinerten Problems (11.135), dann erhalten wir durch partielle Integration daraus (G). Da $C_0^2(\bar{\Omega})$ in $L_2(\Omega)$ dicht liegt, ergibt sich aus (G) das klassische Ausgangsproblem (11.134).

► **STANDARDBEISPIEL 2** (natürliche Randbedingung): Lediglich um die Formeln zu vereinfachen, nehmen wir $p = 2$ an und betrachten anstelle der ersten Randwertaufgabe (11.134) jetzt das Problem

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u + f \quad \text{auf } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= hu + g \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{Randbedingung}), \end{aligned} \tag{11.137}$$

wobei $\partial/\partial n$ die äußere Normalenableitung auf dem Rand $\partial\Omega$ bezeichnet. Für $h \equiv 0$ (bzw. $h \not\equiv 0$) ist das die *zweite* (bzw. *dritte*) *Randwertaufgabe*. Multiplizieren wir die erste Gleichung in (11.137) mit der Testfunktion $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, dann erhalten wir

$$(Lu - \lambda u - f, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^2(\bar{\Omega}). \tag{H}$$

Partielle Integration ergibt das *verallgemeinerte Problem*

$$a(u, \varphi) + b(u, \varphi) = \lambda(u, \varphi) + (f, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in C^2(\bar{\Omega}) \tag{11.138}$$

mit $a(\cdot, \cdot)$ und (\cdot, \cdot) wie in (11.135) und dem *zusätzlichen Randterm*

$$b(u, \varphi) := - \int_{\partial\Omega} (hu\varphi + g\varphi) \, dO.$$

Wählen wir Funktionen $e_1, \dots, e_n \in C^2(\bar{\Omega})$ und setzen $X_n := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, dann lautet die Galerkingleichung für (11.138):

$$a(u_n, \varphi) + b(u_n, \varphi) = \lambda(u_n, \varphi) + (f, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in C^2(\bar{\Omega}). \quad (11.139)$$

Gesucht wird $u_n \in X_n$. Setzen wir $u_n := \sum_{j=1}^n c_j e_j$, dann ist (11.139) äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$a(u_n, e_k) + b(u_n, e_k) = \lambda(u_n, e_k) + (f, e_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

für die unbekannten Koeffizienten c_1, \dots, c_n .

Rechtfertigung der Bezeichnung „verallgemeinertes Problem“: Ist u eine hinreichend glatte Lösung des verallgemeinerten Problems (11.138), dann erhalten wir durch partielle Integration daraus (H). Da $C^2(\bar{\Omega})$ in $L_2(\Omega)$ dicht liegt, ergibt sich aus (H) das klassische Ausgangsproblem (11.134).

Natürliche Randbedingung: Es ist bemerkenswert, dass die Randbedingung des klassischen Ausgangswertproblems (11.137) nicht im verallgemeinerten Problem (11.138) auftritt. Diese Randbedingung ergibt sich automatisch für jede hinreichend glatte Lösung des verallgemeinerten Problems. Man nennt sie deshalb eine natürliche Randbedingung.

Das Galerkinverfahren für instationäre (parabolische) Gleichungen

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Wir betrachten das Rand-Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} u_t - Lu &= f, & x \in \Omega, & t > 0, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, & t \geq 0 \quad (\text{Randbedingung}), \\ u &= u_0, & x \in \Omega, & t = 0 \quad (\text{Anfangsbedingung}). \end{aligned} \quad (11.140)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit der nur von x abhängigen Testfunktion φ mit $\varphi \in C_0^2(\bar{\Omega})$, dann erhalten wir nach partieller Integration das *verallgemeinerte Problem*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), \varphi) &= a(u(t), \varphi) + (f, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^2(\bar{\Omega}), \quad t > 0, \\ u &= u_0 \quad \text{für } t = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (11.141)$$

Wählen wir e_1, \dots, e_n und X_n wie in Standardbeispiel 1, dann erhalten wir die *Galerkingleichungen*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_n(t), \varphi) &= a(u_n(t), \varphi) + (f, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in X_n, \\ u_n &= u_0^* \quad \text{für } t = 0, \quad x \in \Omega \quad (\text{Anfangsbedingung}), \end{aligned} \quad (11.142)$$

mit $u_n(x, t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) e_j(x)$. Dabei ergibt sich u_0^* aus dem Minimumproblem

$$\|u_0 - u_n^*\|^2 := \int_{\Omega} (u_0(x) - u_0^*(x))^2 \, dx = \min!, \quad u_0^* \in X_n.$$

Setzen wir $u_0^*(x) := \sum_{j=1}^n c_{j0} e_j(x)$, dann entsprechen die Galerkingleichungen dem folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\sum_{j=1}^n c'_j(t)(e_j, e_k) = \sum_{j=1}^n c_j(t)a(e_j, e_k) + (f, e_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$c_k(0) = c_{k0} \quad (\text{Anfangsbedingung}).$$

Das Galerkinverfahren für instationäre (hyperbolische) Gleichungen

► **STANDARDBEISPIEL 4:** Wir betrachten das Rand-Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - Lu &= f, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (\text{Randbedingung}), \\ u &= u_0 \\ \text{und } u_t &= u_1 & \text{für } t = 0, \quad x \in \Omega \quad (\text{Anfangsbedingung}). \end{aligned} \tag{11.143}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit der nur von x abhängigen Testfunktion φ mit $\varphi \in C_0^2(\overline{\Omega})$, dann erhalten wir nach partieller Integration das verallgemeinerte Problem:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(u(t), \varphi) &= a(u(t), \varphi) + (f, \varphi) & \text{für alle } \varphi \in C^2(\overline{\Omega}), \quad t > 0, \\ u &= u_0 \quad \text{und } u_t = u_1 & \text{für } t = 0, \quad x \in \Omega \\ && (\text{Anfangsbedingung}). \end{aligned} \tag{11.144}$$

Wählen wir e_1, \dots, e_n und X_n wie in Standardbeispiel 1, dann erhalten wir die Galerkingleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(u_n(t), \varphi) &= a(u_n(t), \varphi) + (f, \varphi) & \text{für alle } \varphi \in X_n, \\ u_n &= u_0^* \quad \text{und } (u_n)_t = u_1^* & \text{für } t = 0, \quad x \in \Omega \\ && (\text{Anfangsbedingung}), \end{aligned} \tag{11.145}$$

mit $u_n(x, t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)e_j(x)$. Dabei ergeben sich u_0^* bzw. u_1^* wie in Standardbeispiel 3 aus u_0 bzw. u_1 . Setzen wir $u_m^*(x) := \sum_{j=1}^n c_{jm}(t)e_j(x)$, dann entsprechen die Galerkingleichungen dem folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c''_j(t)(e_j, e_k) &= \sum_{j=1}^n c_j(t)a(e_j, e_k) + (f, e_k), \quad k = 1, \dots, n, \\ c_k(0) &= c_{k0} \quad \text{und } c'_k(0) = c_{k1} \quad (\text{Anfangsbedingung}). \end{aligned}$$

11.4.5 Projektions-Iterationsverfahren

Bei Projektions-Iterationsverfahren wird ein Iterationsverfahren mit einem Galerkinverfahren kombiniert, d. h., in jedem Iterationsschritt wird die Näherung durch ein Galerkinverfahren gelöst, wobei die Anzahl der Basisfunktionen in jedem Schritt zunimmt.

Um das zu erläutern, betrachten wir die Operatorgleichung

$$Au = b, \quad u \in X, \tag{11.146}$$

zusammen mit dem Projektions-Iterationsverfahren

$$u_n = u_{n-1} - tJ^{-1}(Au_{n-1} - b), \quad u_n \in X_n, \quad (11.147)$$

wobei $\{X_n\}$ ein Galerkinschema in dem reellen separablen Hilbertraum X darstellt mit $\dim X = \infty$ und $P_n : X \rightarrow X_n$ den orthogonalen Projektionsoperator von X auf X_n bezeichnet. Ferner sei $J : X \rightarrow X^*$ die Dualitätsabbildung von X . Ist e_1, \dots, e_m eine Basis von X_n , dann ist (11.147) äquivalent zu

$$(u_n, e_k) = (u_{n-1}, e_k) - t\langle Au_{n-1} - b, e_k \rangle, \quad u_n \in X_n, \quad k = 1, \dots, m.$$

Der Operator $A : X \rightarrow X^*$ sei stark monoton und Lipschitzstetig, d.h., es gibt Zahlen $c > 0$ und $L > 0$, so dass für alle $u, v \in X$ gilt:

$$c\|u - v\|^2 \leq \langle Au - Av, u - v \rangle$$

mit $\|Au - Av\| \leq L\|u - v\|$. Wir wählen eine feste reelle Zahl t mit $0 < t < 2c/L^2$.

Satz: Für jedes $b \in X^*$ besitzt das Ausgangsproblem (11.146) genau eine Lösung u . Für jedes n hat die Galerkingleichung (11.147) genau eine Lösung u_n , und (u_n) konvergiert in X gegen u .

Anwendungen dieses Satzes auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen findet man in [Zeidler 1984ff, Vol. IIB]. Das Projektions-Iterationsverfahren hat den wesentlichen Vorteil gegenüber dem üblichen Galerkinverfahren, dass man in jedem Schritt nur ein lineares Gleichungssystem zu lösen hat, obwohl das Problem nichtlinear ist.

11.4.6 Der Hauptsatz der numerischen Funktionalanalysis

Eines der fundamentalen Prinzipien der numerischen Mathematik lautet:

Bei einem korrekt gestellten Problem erhält man aus Konsistenz und Stabilität eines Näherungsverfahrens dessen Konvergenz. (K)

Die numerische Funktionalanalysis erlaubt es, dieses Prinzip in abstrakter Weise zu rechtfertigen.

Neben der linearen oder nichtlinearen Ausgangsgleichung

$$Au = f, \quad u \in X, \quad (11.148)$$

betrachten wir die Näherungsgleichung

$$A_h u_h = f_h, \quad u_h \in X_h, \quad (11.149)$$

mit dem zugehörigen Approximationsschema:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & Y \\ P_h \downarrow & & \downarrow Q_h \\ X_h & \xrightarrow{A_h} & Y_h \end{array} .$$

Dabei sind X, Y, X_h, Y_h normierte Räume über \mathbb{K} .

Differenzenverfahren: Wir nehmen zunächst an, dass (11.149) einem Differenzenverfahren entspricht. Dann bezeichnet h die Maschenweite mit $0 < h \leq h_0$. Wir setzen voraus:

(H1) *Korrekt gestelltes Ausgangsproblem.* Für festes $f \in Y$ besitzt (11.148) genau eine Lösung u . Die Folge (f_h) ist so gegeben, dass (11.149) für jedes h genau eine Lösung u_h besitzt.

(H2) *Konsistenz*. Es gibt zwei Funktionen $a = a(h)$ und $b = b(h)$ mit $a(h) \rightarrow 0$ und $b(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$, so dass

$$\|Q_h Au - A_h P_h u\| \leq a(h) \quad \text{und} \quad \|Q_h f - f_h\| \leq b(h)$$

für alle h gilt.

(H3) *Stabilität*. Es gibt positive Zahlen s und γ , so dass

$$\|v - w\|_{X_h}^s \leq \gamma \|A_h v - A_h w\|_{Y_h} \quad \text{für alle } v, w \in X_h$$

für alle h gilt.

Satz: Man hat die Fehlerabschätzung

$$\|u_h - P_h u\|_{X_h}^s \leq \gamma(a(h) + b(h))$$

für alle h . Daraus folgt die Konvergenz des Nährungsverfahrens $\|u_h - P_h u\|_{X_h}^s \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Bei konkreten Differenzenverfahren ist $a(h) = \text{const} \cdot h^r$ und $b(h) = \text{const} \cdot h^r$ [vgl. Zeidler 1984ff, Vol. IIA].

Galerkinverfahren: Entspricht (11.149) einem Galerkinverfahren, dann ist $h = 1/n$ für $n = 1, 2, \dots$. Der obige Satz bleibt dann gültig.

Approximationseigentliche Operatoren: Das obige Resultat lässt sich substantiell zum Hauptsatz der numerischen Funktionalanalysis ausbauen, wenn man den fundamentalen Begriff des approximationseigentlichen Operators benutzt (im Englischen: A-proper operator). Das findet man zusammen mit Anwendungen auf nichtlineare Operatorgleichungen in [Zeidler 1984ff, Vol. IIB].

11.5 Die Prinzipien der linearen Funktionalanalysis

Die folgenden Prinzipien, die fast alle von Banach und seinen Mitarbeitern zwischen 1920 und 1930 bewiesen wurden, stellen die Basis für die Beweise der meisten fundamentalen Aussagen der linearen Funktionalanalysis dar und verallgemeinern klassische (geometrische) Eigenschaften des \mathbb{R}^n auf unendlich viele Dimensionen.

11.5.1 Das Hahn–Banach-Theorem und Optimierungsaufgaben

Theorem (Hahn und Banach): Es sei $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Halbnorm³³ auf dem reellen linearen Raum X , und L sei ein linearer Unterraum von X . Dann lässt sich jedes lineare Funktional $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(u) \leq p(u)$ auf L zu einem linearen Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, so dass

$$f(u) \leq p(u) \quad \text{für alle } u \in X \quad \text{gilt.}$$

Hinter diesem Theorem verbergen sich geometrische *Trennungssätze* für konvexe Mengen durch Hyperebenen (vgl. 11.5.1.3). Alle folgenden Aussagen dieses Abschnitts sind Konsequenzen des Hahn–Banach-Theorems.

Korollar: Es sei L ein linearer Unterraum des normierten Raumes X über \mathbb{K} . Dann lässt sich jedes lineare Funktional $f : L \rightarrow \mathbb{K}$ mit $|f(u)| \leq c\|u\|$ auf L zu einem linearen stetigen Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ fortsetzen, so dass

$$|f(u)| \leq c\|u\| \quad \text{für alle } u \in X \quad \text{gilt.}$$

³³Es genügt, dass p *sublinear* ist, d.h., es gilt $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$ und $p(tu) = tp(u)$ für alle $u, v \in X$ und $t \geq 0$.

► **BEISPIEL 1** (biorthogonale Systeme): Sind $u_1, \dots, u_n \in X$ linear unabhängige Punkte in dem normierten Raum X , dann existieren Funktionale $f_1, \dots, f_n \in X^*$ mit

$$\langle f_j, u_k \rangle = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (11.150)$$

Bezeichnen $f_1, \dots, f_n \in X^*$ linear unabhängige Funktionale, dann existieren Punkte $u_1, \dots, u_n \in X$ mit (11.150).

Anwendung auf das Momentenproblem: Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von beschränkter Variation, d.h. $f \in V[0, 1]$. Dann können wir die Zahl

$$Q := \int_0^1 df$$

als elektrische Ladung³⁴ auf dem Intervall $[0, 1]$ interpretieren. Die Zahlen

$$\int_0^1 x^k df = m_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (11.151)$$

heißen die k -ten Momente der Ladungsverteilung.

Das Momentenproblem lautet: Zu vorgegebenen „reellen Momenten“ m_0, \dots, m_n bestimme man eine „elektrische Ladungsverteilung“ $f \in V[0, 1]$, so dass (11.151) gilt.

Dieses Problem ist stets lösbar. Der Beweis ergibt sich in einfacher Weise aus dem Hahn–Banach-Theorem. Hierzu sei $u_k(x) := x^k$ und $L := \text{span} \{u_0, \dots, u_n\}$. Wir konstruieren ein lineares Funktional $F : L \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(u_k) := m_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Jedes lineare Funktional auf einem endlichdimensionalen normierten Raum ist stetig. Deshalb gilt $\|F(u)\| \leq \text{const} \|u\|$ für alle $u \in L$. Nach dem Hahn–Banach-Theorem lässt sich F zu einem linearen stetigen Funktional $F : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen. Folglich gibt es nach Beispiel 17 in 11.2.4 eine Funktion $f \in V[0, 1]$, so dass

$$F(u) = \int_0^1 u(x) df \quad \text{für alle } u \in C[0, 1]$$

gilt. Im Spezialfall $u = u_k$ erhalten wir (11.151).

11.5.1.1 Ein Extremalprinzip

Es sei X ein normierter Raum über \mathbb{K} . Dann besitzt das Maximumproblem

$$\max_{\|f\| \leq 1} |\langle f, u \rangle| = \|u\|, \quad f \in X^*, \quad (11.152)$$

für jedes $u \in X$ eine Lösung f . Im Fall $u \neq 0$ ist $\|f\| = 1$.

Ist X ein reflexiver Banachraum, dann hat das Maximumproblem

$$\max_{\|u\| \leq 1} |\langle f, u \rangle| = \|f\|, \quad u \in X, \quad (11.153)$$

für jedes $f \in X^*$ eine Lösung u . Im Fall $f \neq 0$ ist $\|u\| = 1$.

³⁴Ist f auf $[0, 1]$ stetig differenzierbar, dann gilt $Q = \int_0^1 \varrho(x) dx$, d.h., $\varrho := f'$ ist die Ladungsdichte. Durch den allgemeinen Fall werden sowohl kontinuierliche als auch diskrete Ladungsverteilungen erfasst.

► **BEISPIEL 2** (duales Paar): Ist X ein normierter Raum über \mathbb{K} , dann bildet $\{X^*, X\}$ ein duales Paar, d. h., es gilt

$$|\langle f, u \rangle| \leq \|f\| \cdot \|u\| \quad \text{für alle } f \in X^*, \quad u \in X,$$

und aus $\langle f, u \rangle = 0$ für alle $u \in X$ folgt $f = 0$ sowie aus $\langle f, u \rangle = 0$ für alle $f \in X^*$ folgt $u = 0$.

11.5.1.2 Der Hauptsatz der Approximationstheorie (Dualitätsprinzip)

Es sei L ein linearer Unterraum des reellen normierten Raumes X . Neben dem *Minimumproblem*

$$\inf \|u_0 - u\| = \alpha, \quad u \in L, \tag{11.154}$$

betrachten wir das *duale Maximumproblem*

$$\max \langle f, u_0 \rangle = \beta, \quad f \in L^\perp, \quad \|f\| \leq 1. \tag{11.155}$$

Dabei setzen wir $L^\perp := \{f \in X^* : f(v) = 0 \text{ auf } L\}$. Für gegebenes $u_0 \in X$ gelten dann folgende Existenzaussagen:

(i) Das duale Problem (11.155) besitzt stets eine Lösung f mit $\alpha = \beta$.

(ii) Das Ausgangsproblem (11.154) besitzt eine Lösung u , falls $\dim L < \infty$ gilt oder L ein abgeschlossener linearer Unterraum in dem reflexiven Banachraum X ist.

(iii) Kennt man ein $u \in L$ und ein $f \in L^\perp$ mit $\|f\| \leq 1$, so dass

$$\langle f, u_0 \rangle = \|u_0 - u\|$$

gilt, dann ist u eine Lösung von (11.154), und f ist eine Lösung von (11.155).

Typisch für diese Aussage ist, dass das duale Problem (11.155) mit Hilfe des Hahn–Banach-Theorems (ohne alle Kompaktheitsbedingungen) stets lösbar ist, während die Lösungsaussage für das Ausgangsproblem (11.154) auf Kompaktheitsargumenten beruht (vgl. 11.5.7).

Die Behauptung (iii) folgt sofort aus $\alpha = \beta$ in (i).

Korollar (Eindeutigkeit): Wenn eine der folgenden beiden Bedingungen (a), (b) erfüllt ist, besitzt das Ausgangsproblem (11.154) höchstens eine Lösung u .

(a) Der normierte Raum X ist *streng konvex*, d. h., für alle $u, v \in X$ mit $u \neq \lambda v$ und $\lambda > 0$ gilt

$$\|u + v\| < \|u\| + \|v\|.$$

(b) Der n -dimensionale lineare Unterraum L des Banachraumes X besitzt die *Interpolationseigenschaft*, d. h., für gegebene reelle Zahlen a_1, \dots, a_n hat das System

$$f_1(u) = a_1, \quad \dots, \quad f_n(u) = a_n, \quad u \in L,$$

genau eine Lösung u , vorausgesetzt f_1, \dots, f_n sind linear unabhängige Extrempunkte der Einheitskugel im dualen Raum X^* .

► **BEISPIEL 3:** Jeder Hilbertraum ist streng konvex. Für eine nichtleere messbare (z. B. offene) Teilmenge M des \mathbb{R}^N ist $L_p(M)$ mit $1 < p < \infty$ ein streng konvexer Banachraum.

Anwendung auf die Tschebyschevapproximation: Es sei $X := C[a, b]$, und L sei der Raum aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Für jede Funktion $u \in X$ besitzt dann das klassische Approximationsproblem

$$\|u_0 - u\| := \max_{a \leq x \leq b} |u_0(x) - u(x)| = \min !, \quad u \in L, \tag{11.156}$$

genau eine Lösung u .

Der Raum $C[a, b]$ ist *nicht streng konvex*. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus (b) im obigen Korollar.

Alternantensatz: Eine Funktion $v \in L$ ist genau dann eine Lösung von (11.156), wenn es $n + 2$ Punkte $a = x_0 < x_1 \dots < x_{n+1} = b$ gibt, so dass das Problem

$$|u_0(x) - v(x)| = \max !, \quad x \in [a, b],$$

seine Maximalwerte in allen Punkten x_0, \dots, x_{n+1} annimmt und die Vorzeichen von $u_0(x_j) - v(x_j)$ für $j = 0, \dots, n + 1$ alternieren.

► **BEISPIEL 4:** Es sei L die Menge aller linearen Funktionen. Dann besitzt das Approximationsproblem

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\sqrt{x} - u(x)| = \min !, \quad u \in L,$$

die eindeutige Lösung $u(x) = x + 1/8$. Denn wählt man die Punkte $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1$, dann besitzt die Fehlerfunktion $F(x) = \sqrt{x} - u(x)$ die alternierenden Werte $F(x_0) = -F(x_1) = F(x_2) = -1/8$, und der (absolute) maximale Fehler ist gleich $1/8$.

Anwendung auf die optimale Steuerung einer Rakete: Wir beschreiben die vertikale Bewegung $y = y(t)$ einer Rakete mit der Masse m unter dem Einfluss der Schwerkraft mg (g = Schwerebeschleunigung) und der Schubkraft $K(t)$, d.h., es gilt (Abb. 11.20)

$$my''(t) = K(t) - mg, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Das bedeutet

$$y(t) = \int_0^t (t-s)K(s) \, ds - t^2/2,$$

wobei wir $m = g = 1$ setzen. Erreicht die Rakete zur Zeit T die Endhöhe h , dann gilt

$$h = \int_0^T (T-t)K(t) \, dt - T^2/2.$$

Der minimale Treibstoffverbrauch $\alpha(T)$ während des Zeitintervalls $[0, T]$ sei durch

$$\alpha(T) = \min_{K \in L_1(0, T)} \int_0^T |K(t)| \, dt$$

gegeben. Wir setzen $X := C[0, T]$. Ordnen wir der Funktion K das Funktional

$$F(w) := \int_0^T w(t)K(t) \, dt \quad \text{für alle } w \in X \tag{11.157}$$

zu, dann gilt

$$F \in X^*, \quad \|F\| = \int_0^T |K(t)| \, dt \quad \text{und} \quad h = F(w_0) - \frac{T^2}{2} \quad \text{mit } w_0 := T - t.$$

Um bequem rechnen zu können, betrachten wir nicht nur alle Funktionale F der Form (11.157), sondern beliebige Funktionale $F \in X^*$. Dann erhalten wir das folgende *verallgemeinerte Problem*:

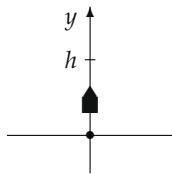


Abb. 11.20

(i) Wir bestimmen bei fester Endzeit T und fester Endhöhe h das optimale Schubkraftfunktional F durch

$$\alpha(T) = \min \|F\|, \quad F \in X^*,$$

mit der Nebenbedingung $h = F(w_0) - T^2/2$, wobei $\alpha(T)$ den minimalen Wert von $\|F\|$ bezeichnet (verallgemeinerter minimaler Treibstoffverbrauch).

(ii) Bei fester Endhöhe h variieren wir T und bestimmen die optimale Endzeit durch

$$\alpha(T) = \min !.$$

Satz: Die Lösung lautet $T = \sqrt{2h}$ mit $\alpha(T) = T$. Die optimale Schubkraft ist durch $F = T\delta$ gegeben.

In der Sprache der Funktionale bedeutet das $F(w) = Tw(0)$ für alle $w \in C[0, T]$. In der Sprache der Physiker heißt das

$$K(t) = T\delta(t)$$

mit der „Diracschen δ -Funktion“. Dies bedeutet, dass nur zur Anfangszeit $t = 0$ eine Schubkraft wirkt. Ist $\varepsilon > 0$ sehr klein, dann erhalten wir näherungsweise für die Schubkraft den folgenden Ausdruck:

$$K(t) := \begin{cases} T/\varepsilon & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{für } t > \varepsilon. \end{cases}$$

11.5.1.3 Trennung konvexer Mengen

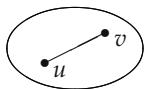


Abb. 11.21

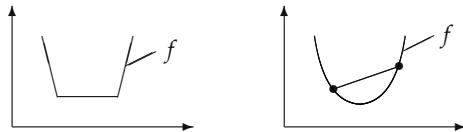
Konvexität: Eine Menge M in einem linearen Raum X heißt genau dann *konvex*, wenn aus $u, v \in M$ stets

$$tu + (1-t)v \in M \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

folgt, d. h., neben zwei Punkten u und v gehört auch stets die Verbindungsstrecke zu M (Abb. 11.21). Die Funktion $f : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann *konvex*, wenn M konvex ist und

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v) \quad \text{für alle } u, v \in M, \quad t \in (0, 1), \quad (11.158)$$

gilt (Abb. 11.22). Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph stets unter der Sehne liegt. Kann man in (11.158) das Zeichen „ \leq “ für $u \neq v$ durch „ $<$ “ ersetzen, dann heißt f *streng konvex* (Abb. 11.22(b)).



(a) konvex

(b) streng konvex

Abb. 11.22

Unter der *konvexen Hülle* $\text{co } M$ einer Menge M versteht man die Menge aller konvexen endlichen Linearkombinationen

$$t_1 u_1 + \dots + t_n u_n$$

$$\text{mit } u_1, \dots, u_n \in M, \quad 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1, \quad t_1 + \dots + t_n = 1.$$

$\text{co } M$ ist die kleinste konvexe Menge, die M enthält. Ist X ein lokalkonvexer Raum (z. B. ein normierter Raum), dann bezeichnet $\overline{\text{co }} M$ (bzw. $\overline{\text{span }} M$) den Abschluss von $\text{co } M$ (bzw. $\text{span } M$). Diese Menge heißt die *abgeschlossene konvexe Hülle* (bzw. abgeschlossene lineare Hülle) von M und ist die kleinste abgeschlossene konvexe Menge, die M enthält (bzw. der kleinste abgeschlossene lineare Unterraum, der M enthält).

In einem Banachraum ist $\overline{\text{co }} M$ kompakt, falls M relativ kompakt ist.

Trennbarkeit: Es sei X ein reeller lokalkonvexer Raum (z. B. ein normierter Raum). Definitiionsgemäß lassen sich zwei nichtleere Mengen A und B genau dann durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen (bzw. streng trennen), wenn es ein lineares stetiges Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \neq 0$ und eine reelle Zahl a gibt, so dass

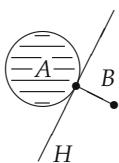
$$f(u) \leq a \leq f(v) \quad (\text{bzw. } f(u) < a < f(v)) \quad \text{für alle } u \in A, v \in B \quad \text{gilt.}$$

Trennungstheorem: Es seien A und B nichtleere konvexe Mengen in X . Dann gilt:

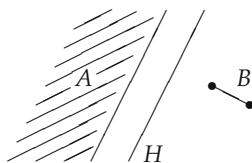
(i) Besitzt A einen inneren Punkt und ist $B \cap \text{int } A = \emptyset$, dann lassen sich A und B durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen (Abb. 11.23(a)).

(ii) Ist $A \cap B = \emptyset$, dann lassen sich A und B streng durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen, falls A abgeschlossen und B kompakt ist (Abb. 11.23(b)) bzw. A und B offen sind (Abb. 11.23(c)).

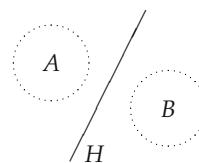
In Abb. 11.23 ist die Hyperebene H durch $\{u \in X : f(u) = a\}$ gegeben.



(a)



(b)



(c)

Abb. 11.23

11.5.2 Das Bairesche Kategorieprinzip

Definition: Es sei M eine Teilmenge des metrischen Raumes X . Die Menge M heißt genau dann nirgends dicht, wenn $\text{int } \overline{M} = \emptyset$ gilt, d.h., der Abschluss von M besitzt keine inneren Punkte.

Die Menge M ist genau dann *mager* (oder von erster Bairescher Kategorie), wenn M die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen, nirgends dichten Mengen ist.

Die Menge M ist genau dann *fett* (oder von zweiter Bairescher Kategorie), wenn M nicht mager ist.

► **BEISPIEL:** In \mathbb{R} ist jede endliche Menge nirgends dicht. Die abzählbare Menge der rationalen Zahlen ist mager, während die Menge der irrationalen Zahlen fett ist.

In \mathbb{R}^2 ist jede Gerade nirgends dicht. Die Vereinigung von abzählbar vielen Geraden ist mager. Jede nichtleere offene Menge im \mathbb{R}^2 und ihr Abschluss sind fett.

Theorem (Baire): Es sei X ein vollständiger metrischer Raum (z. B. ein Banachraum). Dann ist jede nichtleere offene Menge fett.

Das Komplement einer mageren Menge ist fett, also speziell nicht leer.

► **STANDARDBEISPIEL:** Es gibt eine stetige Funktion $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die in keinem Punkt differenzierbar ist.

Um das zu beweisen, sei $X := C[0, 1]$, und M bezeichne die Menge aller Funktionen $u \in X$, die in einem Punkt $x \in [0, 1]$ eine Ableitung von rechts besitzen. Man hat nun zu zeigen, dass M mager ist. Aus dem Theorem folgt dann, dass $X \setminus M$ fett ist. Dies bedeutet, dass die „meisten“ stetigen Funktionen $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ nicht differenzierbar sind.

Im Jahre 1806 versuchte Ampère zu beweisen, dass jede stetige Funktion auch differenzierbar ist. Erst 50 Jahre später zeigte Weierstraß mit Hilfe eines berühmten Gegenbeispiels, dass diese Aussage falsch ist.

11.5.3 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Theorem (Banach und Steinhaus): Es sei \mathbb{F} eine nichtleere Menge von stetigen Abbildungen $F : X \rightarrow Y$, wobei X und Y Banachräume über \mathbb{K} sind. Ferner sei

$$\sup_{F \in \mathbb{F}} \|Fu\| < \infty \quad \text{für alle } u \in X.$$

Dann gibt es eine abgeschlossene Kugel K in X mit positivem Radius, so dass

$$\sup_{u \in K} \left(\sup_{F \in \mathbb{F}} \|Fu\| \right) < \infty.$$

Korollar: Es sei $F_n : X \rightarrow Y$ eine Folge von linearen stetigen Operatoren, so dass die Folge $(F_n u)$ für jedes u in X konvergiert. Dann ist die Folge $(\|F_n\|)$ der Normen beschränkt.

► **STANDARDBEISPIEL:** Schwach konvergente und schwach* konvergente Folgen sind beschränkt (vgl. 11.5.7). Daraus ergeben sich Aussagen über die Konvergenz von Quadraturformeln und die Permanenz von Summationsverfahren für divergente Folgen und Reihen (vgl. 11.5.7.3).

11.5.4 Das Theorem über offene Abbildungen und korrekt gestellte Probleme

Theorem (Banach): Eine lineare stetige surjektive Abbildung $A : X \rightarrow Y$ zwischen den Banachräumen X und Y über \mathbb{K} ist offen (d. h., A bildet offene Mengen auf offene Mengen ab).

Korollar (inverser Operator): Ist $A : X \rightarrow Y$ linear, stetig und bijektiv, dann ist A ein Homöomorphismus (d. h., der inverse Operator $A^{-1} : Y \rightarrow X$ ist stetig).

Die Aussage des Korollars ist für nichtlineare Operatoren falsch.

► **STANDARDBEISPIEL:** Es sei $A : X \rightarrow Y$ ein linearer stetiger Operator, so dass die Gleichung

$$Au = f, \quad u \in X, \tag{11.159}$$

für jedes $f \in Y$ eine Lösung besitzt und $Au = 0$ stets $u = 0$ impliziert. Dann ist (11.159) *korrekt gestellt*, d.h., für jedes $f \in Y$ besitzt (11.159) genau eine Lösung $u = A^{-1}f$, die stetig von f abhängt.

11.5.5 Das Theorem über den abgeschlossenen Graphen

Definition: Eine Abbildung $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ zwischen den beiden Banachräumen X und Y über \mathbb{K} heißt graphabgeschlossen oder kurz *abgeschlossen*, wenn der *Graph*

$$G(A) := \{(u, Au) : u \in D(A)\}$$

eine abgeschlossene Menge im Produktraum $X \times Y$ ist.

Das ist äquivalent zu der folgenden Aussage. Ist u_n für jedes $n = 1, 2, \dots$ eine Lösung der Gleichung

$$Au_n = f_n, \quad u_n \in D(A),$$

und gilt $u_n \rightarrow u$ sowie $f_n \rightarrow f$, dann ist u Lösung der Gleichung $Au = f$, $u \in D(A)$. Bei einem abgeschlossenen Operator besitzt deshalb die zugehörige Operatorgleichung ein günstiges Verhalten gegenüber Grenzwertbildung.

Gilt $\overline{G(A)} = G(B)$, d.h., der Abschluss des Graphen von A ist gleich dem Graphen eines Operators $B : D(B) \subseteq X \rightarrow Y$, dann heißt B der Abschluss von A . Dieser ist durch A eindeutig bestimmt.

► **BEISPIEL 1:** Die Abbildung A mit $A : D(A) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in Abb. 11.24(a) (bzw. Abb. 11.24(b)) ist abgeschlossen (bzw. nicht abgeschlossen).

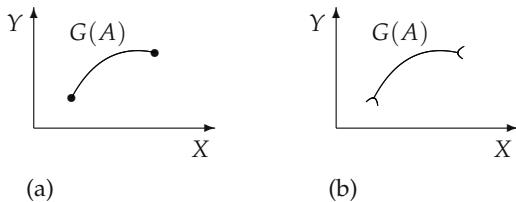


Abb. 11.24

Theorem (Banach): Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn er stetig ist.

Im allgemeinen Fall eines linearen Operators $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$, der nicht auf dem gesamten Raum X erklärt ist, bildet die Abgeschlossenheit von A in gewisser Weise einen Ersatz für die fehlende Stetigkeit. Mit X_A bezeichnen wir die Menge $D(A)$ zusammen mit der Norm

$$\|u\|_A := \|u\| + \|Au\| \quad \text{für alle } u \in D(A).$$

Der lineare Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn X_A ein Banachraum ist. In diesem Fall wird $A : X_A \rightarrow Y$ zu einem linearen stetigen Operator zwischen den beiden Banachräumen X_A und Y .

► **BEISPIEL 2** (Ableitungsoperator): Es sei $X := L_2(0, 1)$ und $(Au)(x) := u'(x)$ (klassische Ableitung). Wählen wir $D(A) := C^1[0, 1]$, dann ist $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ nicht abgeschlossen.

Dagegen ist $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ abgeschlossen, falls wir $D(B) := W_2^1(0, 1)$ und $(Bu)(x) := u'(x)$ setzen (verallgemeinerte Ableitung). Tatsächlich folgt aus $u_n \in D(B)$ sofort

$$\int_0^1 u_n(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^1 (Bu_n)\varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0, 1)$$

nach Definition der verallgemeinerten Ableitung. Aus $u_n \rightarrow u$ und $Bu_n \rightarrow v$ in X folgt

$$\int_0^1 u(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^1 v(x)\varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0, 1).$$

Das bedeutet $u' = v$ (im verallgemeinerten Sinne). Außerdem ist der verallgemeinerte Ableitungsoperator B der Abschluss des klassischen Ableitungsoperators A . Der zugehörige Banachraum X_B ist gleich dem Sobolevraum $W_2^1(0, 1)$. Der Operator B mit $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ ist schiefadjungiert, d. h. $B^* = -B$.

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Ist $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein linearer Operator zwischen den Banachräumen X und Y über \mathbb{K} mit dichtem Definitionsbereich, dann ist der duale Operator A^T abgeschlossen.

► **STANDARDBEISPIEL 4** (adjungierter Operator): Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein linearer Operator in dem Hilbertraum X über \mathbb{K} mit dichtem Definitionsbereich. Dann gilt:

(i) Der adjungierte Operator A^* ist abgeschlossen.

(ii) Der Operator A besitzt genau dann eine Abschließung, wenn $D(A^*)$ in X dicht ist. Dann ist A^{**} gleich dem Abschluss von A .

(iii) Ist A symmetrisch, dann ist A^{**} eine abgeschlossene symmetrische Fortsetzung von A , und es gilt $A \subseteq A^{**} \subseteq A^*$.

(iv) Jeder selbstadjungierte Operator ist abgeschlossen.

(v) Ist A symmetrisch mit $D(A) = X$, dann ist A stetig.

Ein symmetrischer Operator A heißt genau dann *wesentlich selbstadjungiert*, wenn sein Abschluss A^{**} selbstadjungiert ist, d. h., es gilt $A^* = A^{**}$.

Die Fortsetzung symmetrischer Operatoren nach John von Neumann: Es sei X ein Hilbertraum über \mathbb{K} . Der Operator $C : X \rightarrow X$ heißt genau dann normerhaltend, wenn C linear ist und $\|Cu\| = \|u\|$ für alle $u \in X$ gilt. Ein Operator ist genau dann unitär, wenn er bijektiv und normerhaltend ist.

Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein linearer abgeschlossener Operator mit dichtem Definitionsbereich auf dem komplexen separablen Hilbertraum X . Dann gilt:

(i) Der Operator A ist genau dann symmetrisch (bzw. selbstadjungiert), wenn seine sogenannte *Cayleytransformation*

$$C := (A - iI)(A + iI)^{-1}$$

normerhaltend (bzw. unitär) ist. Die Zahlen $n_{\pm} := \dim R(A \pm iI)^\perp$ heißen die *Defektindizes* von A .

(ii) Der symmetrische Operator A lässt sich genau dann zu einem selbstadjungierten Operator fortsetzen, wenn sich seine Cayleytransformation zu einem unitären Operator fortsetzen lässt. Das ist äquivalent zu $n_+ = n_-$ (Gleichheit der Defektindizes).

Satz: Für einen symmetrischen Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent.

(i) A ist selbstadjungiert.

- (ii) A ist abgeschlossen und $\lambda = \pm i$ sind keine Eigenwerte von A^* .
- (iii) $R(A \pm iI) = X$.

Korollar: Ferner sind für einen symmetrischen Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ die folgenden drei Bedingungen äquivalent.

- (a) A ist wesentlich selbstadjungiert.
- (b) $\lambda = \pm i$ sind keine Eigenwerte von A^* .
- (c) $R(A^* \pm iI)$ ist dicht in X .

► **BEISPIEL 5:** Ist $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein linearer symmetrischer Operator auf dem Hilbertraum X über \mathbb{K} und ist A halbbeschränkt, d.h., gibt es eine reelle Konstante c mit

$$(Au, u) \geq c\|u\|^2 \quad \text{für alle } u \in D(A), \quad (11.160)$$

dann existiert eine selbstadjungierte Fortsetzung A_F von A , für die (11.160) mit A_F anstelle von A gilt. Ist $c > 0$, dann existiert $A_F^{-1} : X \rightarrow X$ als linearer stetiger Operator.

11.5.6 Das Theorem über den abgeschlossenen Wertebereich (Fredholmsche Alternative)

Theorem (Banach): Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein abgeschlossener linearer Operator zwischen den Banachräumen X und Y über \mathbb{K} mit dichtem Definitionsbereich. Dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent.

- (i) $R(A)$ ist abgeschlossen.
- (ii) $R(A^T)$ ist abgeschlossen.
- (iii) $R(A) = N(A^T)^0$.
- (iv) $R(A^T) = {}^0N(A)$.

Dabei setzen wir ${}^0N(A) := \{g \in X^* : \langle g, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in N(A)\}$ und

$$N(A^T)^0 := \{f \in Y : \langle u^*, f \rangle = 0 \text{ für alle } u^* \in N(A^T)\}.$$

Nach (iii) und (iv) gilt

$$\text{codim } R(A) = \dim N(A^T) \quad \text{und} \quad \text{codim } R(A^T) = \dim N(A).$$

Fredholmsche Alternative: Die Aussagen (iii) und (iv) entsprechen der Fredholmschen Alternative. Beispielsweise besagt (iii), dass die Gleichung $Au = f$ genau dann eine Lösung u besitzt, wenn

$$\langle u^*, f \rangle = 0$$

für alle Lösungen u^* der homogenen dualen Gleichung $A^T u^* = 0$ gilt.

Fredholmoperator: Ein Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ heißt genau dann ein linearer Fredholmoperator, wenn A ein linearer abgeschlossener Operator ist mit $\overline{D(A)} = X$, $\overline{R(A)} = R(A)$ und $\dim N(A) < \infty$ sowie $\text{codim } R(A) < \infty$. Die Zahl

$$\text{ind } A := \dim N(A) - \text{codim } R(A)$$

nennt man den Index von A .

Hilberträume: Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein linearer abgeschlossener Operator zwischen den beiden Hilberträumen X und Y über \mathbb{K} . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $R(A)$ ist abgeschlossen.

- (ii) $R(A^*)$ ist abgeschlossen.
- (iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$.
- (iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$.

11.5.7 Kompaktheit und ein Extremalprinzip

Kompaktheit ist einer der wichtigsten Begriffe der Analysis.

Kompaktheitssatz von Riesz: Für einen Banachraum X sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.

- (i) X ist endlichdimensional.
- (ii) Jede beschränkte Folge (u_n) in X besitzt eine konvergente Teilfolge $u_{n'} \rightarrow u$.
- (iii) Die abgeschlossene Einheitskugel in X ist kompakt.

Dieser Satz zeigt, dass der übliche Konvergenzbegriff in einem unendlichdimensionalen Banachraum wesentliche Mängel besitzt, denn dort versagt der klassische Auswahlssatz für konvergente Teilfolgen. Um diesen Auswahlssatz in einer abgeschwächten Form zu retten, führt man die schwache und die schwache* Konvergenz ein. Diese Konvergenzbegriffe stellen ein entscheidendes Hilfsmittel der modernen Theorie der partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung dar.

11.5.7.1 Die schwache Konvergenz

Definition: Eine Folge (u_n) in dem Banachraum X konvergiert genau dann *schwach* gegen $u \in X$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n \rangle = \langle f, u \rangle \quad (11.161)$$

für alle $f \in X^*$ gilt. Dafür schreiben wir $u_n \rightharpoonup u$. Dieser Konvergenzbegriff ergibt sich aus der sogenannten schwachen Topologie auf X (vgl. 11.5.7.4). Das Grenzelement einer schwach konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Die übliche Konvergenz $u_n \rightarrow u$ bezüglich der Norm (d. h. $\|u_n - u\| \rightarrow 0$) bezeichnet man auch als *starke* Konvergenz (oder Normkonvergenz).

Eigenschaften der schwachen Konvergenz: Es gilt:

- (i) Aus $u_n \rightarrow u$ folgt $u_n \rightharpoonup u$. In einem endlichdimensionalen Raum ist auch die Umkehrung richtig.
- (ii) Eine Folge (u_n) ist genau dann schwach konvergent, wenn sie beschränkt ist und (11.161) für alle f aus einer in X^* dichten Menge gilt.
- (iii) Ist M eine abgeschlossene konvexe Menge, dann folgt aus $u_n \in M$ für alle n und $u_n \rightharpoonup u$, dass auch u zu M gehört (*Satz von Mazur*).
- (iv) Aus $f_n \rightarrow f$ in X^* und $u_n \rightharpoonup u$ in X folgt

$$\langle f_n, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle. \quad (11.162)$$

- (v) Aus $f_n \rightharpoonup f$ in X^* und $u_n \rightharpoonup u$ in X folgt (11.162), falls X reflexiv ist.

Kompaktheitssatz von Eberlein-Šmuljan: Für einen Banachraum X sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.

- (i) X ist reflexiv.
- (ii) Jede beschränkte Folge in X besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.

(iii) Die abgeschlossene Einheitskugel in X ist schwach kompakt (d. h. kompakt bezüglich der schwachen Topologie auf X).

Korollar: Eine beschränkte Folge (u_n) in einem reflexiven Banachraum konvergiert schwach, falls jede ihrer schwach konvergenten Teilstufen den gleichen Grenzwert besitzt.

► **STANDARDBEISPIEL 1** (Hilberträume): In einem Hilbertraum X gilt:

(a) $u_n \rightharpoonup u$ ist äquivalent zu $(u_n, v) \rightarrow (u, v)$ für alle $v \in X$.

(b) $u_n \rightarrow u$ ist äquivalent zu $u_n \rightharpoonup u$ und $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$.

Da jeder Hilbertraum X reflexiv ist, besitzt jede in X beschränkte Folge eine konvergente Teilstufe.

► **STANDARDBEISPIEL 2** (der Raum $L_p(\Omega)$): Es sei Ω eine nichtleere offene Menge im \mathbb{R}^n . Ferner sei $1 < p < \infty$ und $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dann ist

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ in } L_p(\Omega)$$

gleichbedeutend mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x)v(x) dx = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \text{für alle } v \in L_q(\Omega).$$

Der Raum $L_p(\Omega)$ ist reflexiv, deshalb besitzt jede in $L_p(\Omega)$ beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilstufe.

Ein fundamentales Extremalprinzip: Das Minimumproblem

$$F(u) = \min !, \quad u \in M, \tag{11.163}$$

besitzt eine Lösung u , falls M eine nichtleere beschränkte abgeschlossene konvexe Teilmenge eines reflexiven Banachraumes ist und $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ schwach folgenunterhalbstetig ist, d. h., aus $u_n \rightharpoonup u$ folgt

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n). \tag{11.164}$$

Speziell ist (11.164) für die Norm $F(u) := \|u\|$ erfüllt.

Dieses Prinzip spielt eine entscheidende Rolle in der Variationsrechnung und der Optimierungstheorie.

Beweis: Es sei α das Infimum von F auf M mit $\alpha \geq -\infty$. Dann existiert eine Folge (u_n) aus M mit $F(u_n) \rightarrow \alpha$ für $n \rightarrow \infty$. Wegen der Beschränktheit von M ist auch (u_n) beschränkt. Folglich existiert eine Teilstufe $(u_{n'})$ mit $u_{n'} \rightharpoonup u$ für $n' \rightarrow \infty$. Nach dem obigen Satz von Mazur gilt $u \in M$. Folglich erhalten wir nach (11.164)

$$F(u) \leq \liminf_{n' \rightarrow \infty} F(u_{n'}) = \alpha.$$

Nach Konstruktion von α ist $F(u) \geq \alpha$, also insgesamt $F(u) = \alpha$. Somit ist u der gesuchte Minimalpunkt von F auf M .

11.5.7.2 Die schwache* Konvergenz

Den Begriff der schwachen* Konvergenz benutzt man in dualen Banachräumen, die nicht reflexiv sind.

Definition: Es sei X ein Banachraum. Eine Folge (f_n) in dem dualen Raum X^* konvergiert genau dann schwach* gegen $f \in X^*$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, u \rangle = \langle f, u \rangle \tag{11.165}$$

für alle $u \in X$ gilt. Wir schreiben dafür $f_n \xrightarrow{*} f$. Dieser Konvergenzbegriff ergibt sich aus der sogenannten schwachen* Topologie auf X^* (vgl. 11.5.7.4).

Das Grenzelement einer schwach* konvergenten Teilfolge ist eindeutig bestimmt.

Ist X^* reflexiv, dann stimmt die schwache* Konvergenz auf X^* mit der schwachen Konvergenz auf X^* überein.

Eigenschaften der schwachen* Konvergenz:

Es gilt:

(i) Aus $f_n \rightarrow f$ auf X^* folgt $f_n \xrightarrow{*} f$. Die Umkehrung gilt, falls X^* endlichdimensional ist.

(ii) Es ist genau dann $f_n \xrightarrow{*} f$ auf X^* , wenn (f_n) in X^* beschränkt ist und (11.165) für alle u auf einer in X dichten Menge gilt.

(iii) Aus $f_n \xrightarrow{*} f$ in X^* und $u_n \rightarrow u$ in X folgt $\langle f_n, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$.

Der Kompaktheitssatz von Alaoglu–Bourbaki: Ist X ein Banachraum, dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in X^* schwach* kompakt (d. h. kompakt bezüglich der schwachen* Topologie auf X^*).

Ist X zusätzlich separabel, dann besitzt jede beschränkte Folge in X^* eine schwach* konvergente Teilfolge.

► **STANDARDBEISPIEL 3** (der nichtreflexive Raum $L_\infty(\Omega)$): Es sei Ω eine nichtleere offene Menge im \mathbb{R}^n . Dann gilt $L_\infty(\Omega) = L_1(\Omega)^*$, und $f_n \xrightarrow{*} f$ in $L_\infty(\Omega)$ ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x)u(x) dx = \int_{\Omega} f(x)u(x) dx \quad \text{für alle } u \in L_1(\Omega).$$

Extremalprinzip:

Das Minimumproblem

$$F(f) = \min !, \quad f \in M, \tag{11.166}$$

besitzt eine Lösung, falls M eine abgeschlossene Kugel auf dem dualen Raum X^* zu dem separablen Banachraum X ist und $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ schwach* folgenunterhalbstetig ist, d. h., aus $f_n \xrightarrow{*} f$ auf X^* folgt

$$F(f) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} F(f_n). \tag{11.167}$$

Zum Beispiel hat die Norm $F(f) := \|f\|$ auf X^* die Eigenschaft (11.167). Dieses Extremalprinzip wird analog zu (11.163) bewiesen.

11.5.7.3 Anwendung der schwachen* Konvergenz von Funktionalen in der numerischen Funktionalanalysis

Wir verwenden im folgenden die Eigenschaft (ii) der schwachen* Konvergenz aus 11.5.7.2. Da diese Aussage aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (genauer dem Banach–Steinhaus-Theorem) folgt, erhalten wir gleichzeitig interessante Anwendungen dieses abstrakten funktionalanalytischen Prinzips auf konkrete numerische Probleme, nämlich bezüglich der Konvergenz von Quadraturverfahren und der Permanenz von Summationsverfahren.

Quadraturformeln: Es sei $-\infty < a < b < \infty$. Unter einer konvergenten Quadraturformel verstehen wir

$$\int_a^b u(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(u) \tag{11.168}$$

für alle $u \in C[a, b]$ mit dem Näherungsausdruck

$$Q_n(u) := \sum_{k=0}^n a_{kn} u(x_{kn})$$

für das Integral $\int_a^b u(x) dx$ mit den Stützstellen $a = x_{0n} < x_{1n} < \dots < x_{nn} = b$ und den reellen Integrationskoeffizienten a_{kn} .

Satz von Szegö: Es gilt (11.168) genau dann, wenn die reellen Zahlen a_{km} so bestimmt werden, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Die Quadraturformel konvergiert für alle Polynome (d. h., (11.168) ist für alle Polynome richtig).

$$(b) \sup_n \sum_{k=0}^n |a_{kn}| < \infty \quad (\text{gleichmäßige Beschränktheit}).$$

Beweis: Setzen wir $F(u) := \int_a^b u(x) dx$, dann ist F ein lineares stetiges Funktional auf dem Banachraum $X := C[a, b]$. Die Beziehung (11.168) besagt, dass

$$Q_n \xrightarrow{*} F \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ auf } X^*$$

gilt. Die Bedingung (a) bedeutet, dass $Q_n(u) \rightarrow F(u)$ für alle u auf einer in X dichten Menge erfüllt ist.

Wegen $\|Q_n\| = \sum_{k=0}^n |a_{kn}|$ folgt aus (b), dass die Folge (Q_n) in X^* beschränkt ist. Die Behauptung folgt nunmehr aus der Aussage (ii) in 11.5.7.2 über die schwache* Konvergenz.

Die Bedingung (b) ist beispielsweise erfüllt, falls $a_{km} \geq 0$ für alle k, m gilt und die Quadraturformel für $u(x) \equiv 1$ exakt ist, d. h., man hat $\int_a^b dx = Q_n(1)$ für alle n .

► **BEISPIEL 4:** Die Trapezformel basiert auf den äquidistanten Stützstellen $x_{kn} := k(b - a)/n$ mit

$$Q_n(u) := \frac{(b-a)}{n} \left(\frac{u(a) + u(b)}{2} + u(x_{1n}) + \dots + u(x_{n-1,n}) \right).$$

Da diese Quadraturformel für die Funktion $u(x) \equiv 1$ exakt ist mit $a_{km} \geq 0$, gilt (b). Ferner kann man zeigen, dass (a) erfüllt ist. Somit konvergiert die Trapezformel für stetige Funktionen.

Summation divergenter Folgen und Reihen: Sei eine reelle Zahlenfolge (s_n) gegeben. Wir bilden die neue Folge

$$s_n^* := \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} s_k. \tag{11.169}$$

Dieses Summationsverfahren heißt permanent, wenn aus der Konvergenz $s_n \rightarrow a$ stets $s_n^* \rightarrow a$ folgt.

Satz von Toeplitz: Das Summationsverfahren (11.169) ist genau dann permanent, wenn die reellen Koeffizienten A_{km} die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$(a) \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}| < \infty \quad (\text{gleichmäßige Beschränktheit}).$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_{nk} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} = 1 \quad \text{für alle } k.$$

Um den Zusammenhang mit der schwachen* Konvergenz zu erläutern, wählen wir den Raum $X := c$ der konvergenten Folgen $s = (s_1, s_2, \dots)$ (vgl. 11.2.4.1) und setzen

$$f_n(s) := \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} s_k \quad \text{sowie} \quad f(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Die schwache* Konvergenz $f_n \xrightarrow{*} f$ in X^* ist gleichbedeutend mit $f_n(s) \rightarrow f(s)$ für alle $s \in X$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Das ist die Permanenz des Verfahrens. Man kann nun zeigen, dass der Satz von Toeplitz eine Konsequenz von (ii) in 11.5.7.2 ist.

► **STANDARDBEISPIEL 5:** Die Methode des arithmetischen Mittels

$$s_n^* = \frac{1}{n}(s_1 + \dots + s_n)$$

stellt ein permanentes Summationsverfahren dar. Als Anwendung betrachten wir beispielsweise die Fourierreihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Periode 2π . Du Bois-Reymond entdeckte im Jahr 1871, dass die Fourierreihe einer solchen Funktion nicht überall zu konvergieren braucht (vgl. 11.1.3). Wendet man jedoch auf die Partialsummen

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

die Methode des arithmetischen Mittels an, dann konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^*(x) = f(x)$$

gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ (*Satz von Fejér*).

11.5.7.4 Topologien für Operatoren

Mit $L(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen stetigen Operatoren $A : X \rightarrow Y$. Es sei $A, A_n \in L(X, Y)$ für alle n . Dann gilt:

(i) $L(X, Y)$ ist ein Banachraum bezüglich der Operatornorm. Die Konvergenz von (A_n) bezüglich dieser Topologie bedeutet $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ (Konvergenz in der Operatornorm oder gleichmäßige Operatorkonvergenz).

(ii) $L(X, Y)$ wird zu einem lokalkonvexen Raum $L_{\text{stark}}(X, Y)$ bezüglich des Halbnormensystems $\{p_u\}_{u \in X}$ mit $p_u(A) := \|Au\|$. Die zugehörige Konvergenz von (A_n) gegen A bedeutet $A_n u \rightarrow Au$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $u \in X$ (starke Operatorkonvergenz).

(iii) $L(X, Y)$ wird zu einem lokalkonvexen Raum $L_{\text{schwach}}(X, Y)$ bezüglich des Halbnormensystems $\{p_{f,u}\}_{f \in Y^*, u \in X}$ mit $p_{f,u}(A) := \langle f, Au \rangle$. Die zugehörige Konvergenz von (A_n) gegen A bedeutet $A_n u \rightharpoonup Au$ für $n \rightarrow \infty$ und alle $u \in X$ (schwache Operatorkonvergenz).

11.5.7.5 Das Theorem von Krein–Milman und lineare Optimierung

Ein Punkt u einer konvexen Menge K heißt genau dann ein *Extrempunkt* von K , wenn er nicht der innere Punkt einer Strecke ist, deren Endpunkte zu K gehören, d. h., u lässt sich nicht in der Form

$$u = tv + (1 - t)w, \quad t \in (0, 1), \quad v, w \in K, \quad v \neq w,$$

darstellen. In Abb. 11.25 sind genau die vier Eckpunkte Extrempunkte des Quadrats K , und die konvexe Hülle dieser Eckpunkte ergibt K . Das folgende Theorem verallgemeinert diesen anschaulichen Sachverhalt weitgehend.

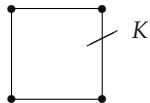


Abb. 11.25

Theorem (Krein–Milman): In einem reellen lokalkonvexen Raum (z. B. einem normierten Raum) ist jede kompakte konvexe Menge die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge ihrer Extrempunkte.

► **STANDARDBEISPIEL 6** (lineare Optimierung): Ist $F : K \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares stetiges Funktional auf der nichtleeren abgeschlossenen beschränkten konvexen Teilmenge K des reellen reflexiven Banachraumes X (z. B. $X = \mathbb{R}^n$), dann besitzt das Problem

$$F(u) = \min !, \quad u \in K,$$

eine Lösung, die in einem Extrempunkt von K angenommen wird.

In diesem Fall ist K kompakt bezüglich der schwachen Topologie von X .

11.6 Das Spektrum

Das Spektrum verallgemeinert die Menge der Eigenwerte einer Matrix. In der Quantenmechanik entspricht das Spektrum des Energieoperators (Hamiltonoperators) den möglichen Energiewerten des Systems. Zum Beispiel besteht das Spektrum des Energieoperators für das Wasserstoffatom aus den Eigenwerten $E_1 < E_2 < \dots < 0$ (gebundene Zustände des Elektrons) mit $E_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und dem Intervall $[0, \infty)$ (freie Zustände des Elektrons). Allgemein enthält das Spektrum wichtige Informationen über die Struktur des betreffenden Operators. In diesem Abschnitt seien alle Operatoren $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear und abgeschlossen mit dichtem Definitionsbereich, und X sei ein komplexer Banachraum mit $X \neq \{0\}$. Jede Lösung $u \neq 0$ der Gleichung

$$Au = \lambda u, \quad u \in D(A),$$

heißt ein *Eigenvektor* von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Dimension der Menge aller Eigenvektoren zu λ bezeichnet man als die (geometrische) Vielfachheit des Eigenwerts λ .

Wichtige Anwendungen der Spektraltheorie auf die Quantenphysik findet man in 13.18.

11.6.1 Grundbegriffe

Definition (Resolventenmenge und Spektrum): Die komplexe Zahl λ gehört genau dann zur Resolventenmenge $\varrho(A)$ von A , wenn der inverse Operator $(\lambda I - A)^{-1} : X \rightarrow X$ existiert und

stetig ist. Diesen Operator nennt man die *Resolvente* $R_A(\lambda)$ von A . Die Komplementärmenge $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ bezeichnet man als das Spektrum von A .

Das *Punktspektrum* $\sigma_p(A)$ von A besteht aus genau allen Eigenwerten von A . Eine komplexe Zahl λ gehört genau dann zum *diskreten Spektrum* $\sigma_d(A)$ von A , wenn λ ein isolierter Punkt von $\sigma(A)$ und ein Eigenwert von endlicher Vielfachheit von A ist. Durch

$$\sigma_e(A) := \bigcap_K \sigma(A + K)$$

wird das *wesentliche Spektrum* (im Englischen: essential spectrum) von A definiert, wobei der Durchschnitt über alle linearen kompakten Operatoren $K : X \rightarrow X$ zu nehmen ist. Die komplexe Zahl λ gehört genau dann zu $\sigma_e(A)$, wenn λ bei jeder kompakten Störung von A im Spektrum bleibt.

► **BEISPIEL 1:** Für einen linearen Operator $A : X \rightarrow X$ mit $\dim X < \infty$ besteht das Spektrum $\sigma(A)$ aus genau allen Eigenwerten. Ferner ist $\sigma(A) = \sigma_d(A)$ und $\sigma_e(A) = \emptyset$.

Eigenschaften des Spektrums: Es gilt:

(i) Das Spektrum $\sigma(A)$ ist eine abgeschlossene Menge, während die Resolventenmenge $\varrho(A)$ offen ist. Ferner ist $\sigma(A^T) = \sigma(A)$. In einem Hilbertraum X hat man $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

(ii) Für einen linearen stetigen Operator $A : X \rightarrow X$ ist $\sigma(A)$ nicht leer und kompakt. Der Spektralradius ist definitionsgemäß gleich $r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Es gilt

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|.$$

(iii) Es ist $\lambda \notin \sigma_e(A)$ genau dann, wenn $A - \lambda I$ ein Fredholmoperator vom Index null ist; $\sigma_e(A)$ ist stets abgeschlossen.

Analytizitätseigenschaften der Resolvente: Gilt $\lambda_0 \in \varrho(A)$, dann ist die Funktion $R_A(\cdot)$ auf dem Kreis $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \|R_A(\lambda_0)\|^{-1}\}$ analytisch, d.h., die Reihe

$$R_A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_A(\lambda_0)^{n+1}$$

konvergiert in $L(X, X)$ (d.h. bezüglich der Operatornorm). Für $\lambda, \mu \in \varrho(A)$ erhalten wir

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda) R_A(\lambda) R_A(\mu).$$

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < r(A)$ konvergiert die Neumannsche Reihe

$$R_A(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} A^{n-1}$$

in $L(X, X)$ (d.h. in der Operatornorm). Es ist genau dann $\lambda_0 \in \sigma_d(A)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine natürliche Zahl $m \geq 1$ gibt, so dass die Reihe

$$R_A(\lambda) = \sum_{n=-m}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n T_n, \quad T_n \in L(X, X),$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ in $L(X, X)$ konvergiert und $\dim T_{-1}(X) < \infty$ gilt. In diesem Fall ist $T_{-1} : X \rightarrow X$ ein Projektionsoperator, der die direkte Summe

$$X = T_{-1}(X) \oplus (I - T_{-1})(X)$$

erzeugt, wobei das Spektrum von $A : T_{-1}(X) \rightarrow T_{-1}(X)$ genau aus dem Punkt λ_0 besteht, während λ_0 nicht im Spektrum von $A : (I - T_{-1})(X) \rightarrow (I - T_{-1})(X)$ liegt. Man nennt $\dim T_{-1}(A)$ die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwerts λ_0 , die stets größer gleich der Vielfachheit von λ_0 ist.

Im Spezialfall $\dim X < \infty$ ist die algebraische Vielfachheit von λ_0 gleich der Vielfachheit der Nullstelle λ_0 von $\det(\lambda I - A) = 0$.

► **STANDARDBEISPIEL 2:** Ist $K : X \rightarrow X$ ein linearer kompakter Operator, dann gehört jeder Punkt $\lambda \neq 0$ zum diskreten Spektrum. Das Spektrum von K kann sich höchstens im Punkt $\lambda = 0$ häufen.

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Das Spektrum eines selbstadjungierten (bzw. eines unitären) Operators auf einem Hilbertraum X liegt auf der reellen Achse (bzw. auf dem Rand des Einheitskreises).

Für einen linearen kompakten selbstadjungierten Operator $A : X \rightarrow X$ liegt das Spektrum $\sigma(A)$ im Intervall $[-\|A\|, \|A\|]$, und mindestens einer der Randpunkte gehört zu $\sigma(A)$ (und ist ein Eigenwert von A).

► **BEISPIEL 4:** Das Spektrum eines stetigen Projektionsoperators $P : X \rightarrow X$ mit $P^2 = P$ und $P \neq 0, I$ ist ein Punktspektrum, das aus den beiden Eigenwerten $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ besteht. Für $\lambda \neq 0, 1$ ist die Resolvente gegeben durch

$$R_P(\lambda) = \lambda^{-1}(I - P) + (\lambda - 1)^{-1}P.$$

► **BEISPIEL 5:** Das Spektrum eines nilpotenten Operators $A : X \rightarrow X$ (d. h., es ist $A^m = 0$ für eine feste natürliche Zahl $m \geq 2$) besteht genau aus dem Punkt $\lambda = 0$. Für alle $\lambda \neq 0$ erhält man die Resolvente durch

$$R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{-k-1} A^k.$$

11.6.2 Die Spektralschar selbstadjungierter Operatoren

Die Spektralschar eines selbstadjungierten Operators A enthält sämtliche Informationen über A .

Grundidee: Es sei $X = \mathbb{C}^2$ und $A : X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator, d. h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mit den komplexen Zahlen $a_{km} = \bar{a}_{mk}$. Dann existiert eine unitäre Matrix $U : X \rightarrow X$, so dass

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von A . Das ist der Prototyp des von Neumannschen Diagonalisierungstheorems. Definieren wir

$$P_1 := U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U, \quad P_2 := U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U,$$

dann gilt

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2. \tag{11.170}$$

Das ist der Prototyp des Hilbertschen Zerlegungssatzes. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion, dann definieren wir die Operatorfunktion $f : X \rightarrow X$ durch

$$f(A) := f(\lambda_1)P_1 + f(\lambda_2)P_2. \tag{11.171}$$

Das ist der Prototyp des allgemeinen Operatorenkalküls für selbstadjungierte Operatoren. Es gilt

$$Uf(A)U^{-1} = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix},$$

d. h., aus $Au = \lambda_j u$ folgt $f(A)u = f(\lambda_j)u$. Wählt man speziell die charakteristische Funktion des Intervalls $(-\infty, \lambda]$,

$$\chi_\lambda(\mu) := \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \leq \lambda, \\ 1 & \text{für } \mu > \lambda, \end{cases} \quad (11.172)$$

dann heißt die Menge aller Operatoren $E_\lambda := \chi_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, die Spektralschar von A . Beispielsweise gilt im Fall $\lambda_1 < \lambda_2$:

$$E_\lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \leq \lambda_1, \\ P_1 & \text{für } \lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2, \\ P_1 + P_2 = I & \text{für } \lambda > \lambda_2. \end{cases}$$

Im folgenden sei X ein komplexer Hilbertraum.

Spektralschar: Unter einer Spektralschar $\{E_\lambda\}$ versteht man eine Familie von stetigen Projektionsoperatoren $E_\lambda : X \rightarrow X$, so dass für alle $u \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\mu$ für $\mu \leq \lambda$;
- (ii) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda u = 0$ und $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda u = u$;
- (iii) $\lim_{\lambda \rightarrow \mu-0} E_\lambda u = E_\mu$.

Der erste Hauptsatz der Spektraltheorie (Hilberts Zerlegungssatz): Zu jedem selbstadjungierten Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ gibt es genau eine Spektralschar, so dass

$$D(A) = \left\{ u \in X : \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d(E_\lambda u, u) < \infty \right\}$$

und

$$(Au, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E_\lambda u, v) \quad \text{für alle } u, v \in D(A)$$

gilt. Die Integrale sind dabei als Lebesgue–Stieltjes-Integrale aufzufassen. Tatsächlich sind diese Integrale auf $\varrho(A) \cap \mathbb{R}$ gleich null, deshalb hat man sie nur über $\sigma(A)$ zu erstrecken. Wir schreiben dafür symbolisch

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Dieses fundamentale Theorem wurde 1906 von Hilbert für beschränkte Operatoren bewiesen und 1929 durch John von Neumann im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen zur Quantentheorie auf allgemeine selbstadjungierte Operatoren ausgedehnt.

Spektralschar und Spektrum: Es sei A ein selbstadjungierter Operator. Dann gilt:

- (i) Das Spektrum $\sigma(A)$ liegt auf der reellen Achse.
- (ii) Ein Punkt $\mu \in \mathbb{R}$ gehört genau dann zur Resolventenmenge $\varrho(A)$, wenn E_λ auf einer Umgebung von λ konstant ist.
- (iii) Die reelle Zahl μ ist genau dann ein Eigenwert von A , wenn $P := E_\mu - E_{\mu-0} \neq 0$. Dann ist $P : X \rightarrow X$ der orthogonale Projektionsoperator auf den Eigenraum von μ .
- (iv) Es ist genau dann $\mu \in \sigma_e(A)$, wenn $\dim(E_{\mu+\varepsilon} - E_{\mu-\varepsilon})(X) = \infty$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.
- (v) Es ist genau dann $\lambda \in \sigma_d(A)$, wenn $\lambda \in \sigma(A)$ und $\lambda \notin \sigma_e(A)$.

Somit ist das Spektrum $\sigma(A)$ die disjunkte Vereinigung aus dem wesentlichen Spektrum von $\sigma_e(A)$ und dem diskreten Spektrum $\sigma_d(A)$.

Das wesentliche Spektrum: Die reelle Zahl λ gehört genau dann zum wesentlichen Spektrum von A , wenn es eine beschränkte Folge (u_n) gibt, die keine konvergente Teilfolge enthält und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Au_n - \lambda u_n\| = 0$ gilt.

Spektralmaße und die kanonische Zerlegung des Hilbertraumes: Für einen Punkt $u \in X$ definieren wir $g_u(\lambda) := \|E_\lambda u\|^2$. Die Funktion $g_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton wachsend, beschränkt und linksseitig stetig. Somit erzeugt g_u ein Lebesgue-Stieltjes-Maß \mathbb{M}_u auf \mathbb{R} , das durch $\mathbb{M}_u(\Omega) = \int_{\Omega} dg_u(\lambda)$ gegeben ist. Dann existiert die orthogonale direkte Summe

$$X = X_p \oplus X_a \oplus X_{\text{sing}},$$

wobei X_p der kleinste abgeschlossene lineare Unterraum von X ist, der alle Eigenvektoren von A enthält. Definitionsgemäß enthält X_a genau alle $u \in X$, für welche die fast überall auf \mathbb{R} existierende Ableitung g'_u integrierbar ist, d.h., es gilt $\mathbb{M}_u(\Omega) = \int_{\Omega} g'_u(\lambda) d\lambda$ für alle Lebesgue-messbaren Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Ferner definieren wir $X_{\text{sing}} := (X_p \oplus X_a)^\perp$. Es gilt:

- (a) Die Unterräume X_p , X_a , X_{sing} sind invariant bezüglich des Operators A .
- (b) Der Operator A besitzt auf $X_a \oplus X_{\text{sing}}$ ein rein kontinuierliches Spektrum, d.h., A hat dort keine Eigenvektoren.
- (c) Das Spektrum von A auf X_a (bzw. auf X_{sing}) bezeichnet man als $\sigma_a(A) = \text{absolutstetiges Spektrum}$ (bzw. $\sigma_{\text{sing}}(A) = \text{singuläres Spektrum}$) von A .
- (d) Bezeichnet ferner $\sigma_p(A)$ das Punktspektrum (Menge aller Eigenwerte) von A , dann ist $\sigma_p(A)$ gleich dem Spektrum von A auf X_p und

$$\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)} \cup \sigma_a(A) \cup \sigma_{\text{sing}}(A), \quad \sigma_a(A) \cap \sigma_{\text{sing}}(A) = \emptyset.$$

Definitionsgemäß besitzt der Operator A genau dann ein *reines Punktspektrum*, wenn er in X ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren besitzt. Das ist äquivalent zu $X = X_p$.

Genau im Fall $\sigma(A) = \sigma_d(A)$ sagen wir, dass A ein *rein diskretes Spektrum* besitzt. Schließlich bezeichnet man $\sigma_a(A) \cup \sigma_{\text{sing}}(A)$ als das *stetige Spektrum* von A .

In der Quantenmechanik enthält X_p die *gebundenen Zustände*, während X_a die *ungebundenen Zustände der Streuprozesse* enthält. In vielen Anwendungen hat man $X_{\text{sing}} = \{0\}$, d.h., $\sigma_{\text{sing}}(A)$ ist leer.

Der zweite Hauptsatz der Spektraltheorie (John von Neumanns Diagonalisierungssatz): Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator auf dem komplexen separablen Hilbertraum X . Dann existiert ein unitärer Operator³⁵

$$U : X \rightarrow L_2^C(M, \mu),$$

so dass A in den einfachen Multiplikationsoperator

$$(\mathbb{A}f)(\lambda) := \lambda f(\lambda), \quad \lambda \in M,$$

übergeht mit $D(\mathbb{A}) := \left\{ f \in L_2^C(M, \mu) : \int_M |\lambda f(\lambda)|^2 d\mu < \infty \right\}$.

³⁵Dabei ist M eine Menge und μ ein Maß auf M mit $\mu(M) < \infty$. Der Raum $L_2^C(M, \mu)$ besteht aus allen μ -messbaren Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_M |f(\lambda)|^2 d\mu < \infty$.

Dieses Theorem verallgemeinert die klassische Fouriertransformation.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Es sei $X := L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ und $(Au)'(x) := -iu'(x)$ mit $D(A) = W_2^1(\mathbb{R})$. Dann ist $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ selbstadjungiert. Die Fouriertransformation $U : X \rightarrow X$ ist ein unitärer Operator, der A in $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subseteq X \rightarrow X$ überführt mit

$$(\mathbb{A}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

und $D(\mathbb{A}) = \left\{ f \in X : \int_{\mathbb{R}} |\lambda f(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \right\}$. Die Spektralschar $\{\mathbb{E}_{\mu}\}$ von \mathbb{A} ist durch

$$(\mathbb{E}_{\mu}f)(\lambda) := \begin{cases} f(\lambda) & \text{für } \lambda \leq \mu, \\ 0 & \text{für } \lambda > \mu, \end{cases}$$

gegeben. Somit gilt $g_u(\lambda) = \|\mathbb{E}_{\lambda}u\|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} |u(\lambda)|^2 d\lambda$. Folglich ist $X_a = X$, und das absolut

stetige Spektrum $\sigma_a(\mathbb{A})$ ist gleich dem gesamten Spektrum $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$. Der Operator \mathbb{A} besitzt keine Eigenwerte. Deshalb ist auch das wesentliche Spektrum $\sigma_e(\mathbb{A})$ gleich dem gesamten Spektrum $\sigma(\mathbb{A})$.

Die Spektralschar $\{E_{\lambda}\}$ von A erhält man aus $\{\mathbb{E}_{\lambda}\}$ durch Anwendung der Fouriertransformation U , d. h. $E_{\lambda}u = U^{-1}\mathbb{E}_{\lambda}Uu$ für alle $u \in X$. Explizit bedeutet das

$$(E_{\lambda}u)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{ixy} (Uu)(y) dy \quad \text{für alle } u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$$

mit der Fouriertransformation $(Uu)(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyz} u(z) dz$.

Da A unitär äquivalent zu \mathbb{A} ist (d. h. $A = U^{-1}\mathbb{A}U$), besitzt A das gleiche Spektrum wie \mathbb{A} , d. h. $\sigma(A) = \sigma_e(A) = \sigma_a(A) = \mathbb{R}$.

In der Quantenmechanik entspricht A dem Impulsoperator ($\hbar = 1$), und \mathbb{A} entspricht dem Ortsoperator. Die physikalische Bedeutung der Spektralschar in der Quantenphysik wird in 13.18 erläutert.

11.6.3 Funktionen von Operatoren

Unser Ziel ist es, Funktionen von Operatoren zu definieren. Derartige Funktionen werden zum Beispiel benötigt, um Operatordifferentialgleichungen zu lösen, die parabolischen und hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen entsprechen (vgl. 13.16). Die Funktion $\ln(I + A)$ spielt ferner eine zentrale Rolle beim Übergang von der Liegruppe zur Liealgebra (vgl. 17.1 ff).

Kann man auf einen Operator mehrere der folgenden Definitionen anwenden, dann erhält man stets die gleiche Operatorfunktion.

Potenzreihen: Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots, \quad a_j \in \mathbb{K} \quad \text{für alle } j,$$

eine komplexe Potenzreihe, die für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ konvergiert. Ist $A : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator auf dem Banachraum X über \mathbb{K} mit dem Spektralradius $r(A) < \varrho$ (z. B. $\|A\| < \varrho$), dann definieren wir

$$f(A) := a_0 + a_1A + a_2A^2 + \dots .$$

Diese Reihe konvergiert in $L(X, X)$ (d.h. bezüglich der Operatornorm). Folglich gilt $f(A) \in L(X, X)$. Ferner ist $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Sind alle Koeffizienten a_j reell und ist X ein Hilbertraum über \mathbb{C} , dann gilt zusätzlich $f(A)^* = f(A^*)$ für $r(A) < \varrho$.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Sei $A : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator auf dem Banachraum X über \mathbb{K} . Wir definieren

$$e^A := 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots$$

Dann ist $e^A : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator. Ferner ist $\sigma(e^A) = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

► **STANDARDBEISPIEL 2:** Wir setzen

$$\ln(I + A) = I - A + \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{3}A^3 + \dots$$

Dann ist $\ln(I + A) : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator, falls $r(A) < 1$ gilt. In diesem Fall hat man

$$e^{\ln(I+A)} = I + A.$$

Ist $B : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator mit $r(I - e^B) < 1$, dann gilt $\ln e^B = B$.

Aus $A, B \in L(X, X)$ und $AB = BA$ folgt $e^A e^B = e^{A+B}$ sowie $\ln AB = \ln A + \ln B$. Im letzteren Fall muss $\|C - I\| < \varepsilon$ für $C = A, B$ vorausgesetzt werden, wobei ε hinreichend klein ist.

Selbstadjungierte Operatoren mit einem rein diskreten Spektrum: Ein selbstadjungierter Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ mit einem rein diskreten Spektrum auf dem komplexen Hilbertraum X besitzt die folgende Struktur.

(a) Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem (u_n) von Eigenvektoren u_n mit $Au_n = \lambda_n u_n$; alle Eigenwerte λ_n besitzen endliche Vielfachheit, und die Menge der Eigenwerte kann sich nicht im Endlichen häufen.

(b) Es gilt

$$A(u) = \sum_j \lambda_j(u_j, u)u_j, \quad (11.173)$$

wobei der Definitionsbereich von A aus genau allen $u \in X$ besteht, für welche die Reihe (11.173) konvergiert, d.h. $D(A) := \left\{ u \in X : \sum_j |\lambda_j(u_j, u)|^2 < \infty \right\}$.

Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir die Operatorfunktion $f(A) : D(f(A)) \subseteq X \rightarrow X$ durch

$$f(A) := \sum_j f(\lambda_j)(u_j, u)u_j. \quad (11.174)$$

Dabei besteht der Definitionsbereich $D(f(A))$ aus genau allen $u \in X$, für welche diese Reihe konvergiert, d.h. $D(f(A)) := \left\{ u \in X : \sum_j |f(\lambda_j)(u_j, u)|^2 < \infty \right\}$.

Satz von Rellich: Es sei $A : X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator auf dem komplexen Hilbertraum X . Gilt $(Au, u) \geq c\|u\|^2$ bei festem $c > 0$ für alle $u \in D(A)$, so besitzt A genau dann ein rein diskretes Spektrum, wenn die Einbettung des energetischen Raumes X_E in X kompakt ist (vgl. 11.3.5).

Allgemeine selbstadjungierte Operatoren: Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator auf dem komplexen Hilbertraum X , und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei (bezüglich des Lebesguemaßes)

fast überall auf $\sigma(A)$ stetig und auf beschränkten Teilmengen von $\sigma(A)$ beschränkt. Wir definieren $f(A) : D(f(A)) \subseteq X \rightarrow X$ als den eindeutig bestimmten Operator mit

$$(f(A)u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v) \quad \text{für alle } u, v \in D(f(A))$$

und $D(f(A)) := \left\{ u \in X : \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda u, u) < \infty \right\}$. Dafür schreiben wir symbolisch³⁶

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda.$$

Es gilt:

- (i) $D(f(A))$ ist dicht in X .
- (ii) $f(A)^*$ entspricht der konjugiert komplexen Funktion \bar{f} ; $f(A)$ ist selbstadjungiert, falls f reellwertig ist.
- (iii) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt, dann ist $f(A) : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator mit $\|f(A)\| \leq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|$.

► **BEISPIEL 3:** Ist $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ selbstadjungiert, dann ist e^{itA} unitär für alle $t \in \mathbb{R}$.

► **BEISPIEL 4:** Ist die Funktion χ_λ die charakteristische Funktion des Intervalls $(-\infty, \lambda]$ (vgl. (11.172)), dann ergibt sich die Spektralschar $E_\lambda = \chi_\lambda(A)$ von A .

Der Dunfordkalkül: Es sei $A : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator auf dem komplexen Banachraum X mit der Resolventenmenge $\varrho(A)$ und der Resolvente $R_A(\lambda)$. Wir setzen

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_U f(z) R_A(z) dz. \quad (11.175)$$

Die Funktion $f : \varrho(A) \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph, und U sei ein Gebiet der komplexen Ebene mit vernünftigem Rand ($\partial U \in C^{0,1}$), so dass U das Spektrum $\sigma(A)$ von A enthält. Die Randkurve ∂U werde so durchlaufen, dass U zur Linken von ∂U liegt (Abb. 11.26(a)).

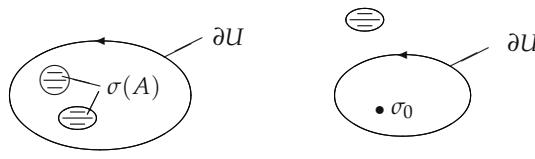


Abb. 11.26

Dann ist $f(A) : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger Operator mit $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Das Integral (11.175) hängt (wie in der komplexen Funktionentheorie) nicht vom Weg ab, d.h., der Weg darf innerhalb von $\varrho(A)$ deformiert werden.

► **STANDARDBEISPIEL 5:** Enthält U in (11.175) nur eine kompakte Teilmenge σ_0 von $\sigma(A)$ (z.B. σ_0 ist ein isolierter Eigenwert (vgl. Abb. 11.26(b))), dann ist der Operator

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_U R_A(z) dz$$

³⁶Tatsächlich verschwinden diese Integrale auf $\varrho(A) \cap \mathbb{R}$; sie sind deshalb nur über $\sigma(A)$ zu erstrecken, und die Funktion f braucht nur auf $\sigma(A)$ definiert zu sein.

ein Projektionsoperator. Zerlegen wir den Ausgangsraum $X = P(X) + (I - P)(X)$, dann sind die abgeschlossenen linearen Unterräume $P(X)$ und $I - P(X)$ invariant bezüglich A , und das Spektrum von A in $P(X)$ (bzw. in $(I - P)(X)$) ist gleich σ_0 (bzw. $\sigma(A) - \sigma_0$). Man nennt $\dim P(X)$ die *algebraische Vielfachheit* von σ_0 .

11.6.4 Störungstheorie

Die Störungstheorie untersucht das Verhalten von Operatoreigenschaften unter Störungen. Für die Quantentheorie ist speziell die Störung des Spektrums selbstadjungierter Operatoren von Interesse, weil dies der Störung des Energiespektrums unter äußeren Einflüssen entspricht (z. B. Störung durch äußere elektromagnetische Felder oder Störung der Molekülpotentiale). Mit $L(X, Y)$ bzw. $K(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen stetigen (bzw. kompakten) Operatoren, wobei X und Y komplexe Banachräume sind.

Stabilität des inversen Operators: Gilt die Beziehung $A, A^{-1} \in L(X, X)$, dann ist auch $(A - B)^{-1} \in L(X, X)$, falls $B \in L(X, X)$ mit $\|B\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$ gilt. Die Neumannsche Reihe

$$(A - B)^{-1} = A^{-1}(I + C + C^2 + \dots) \quad \text{mit } C := A^{-1}B$$

konvergiert dann in $L(X, X)$ (d. h. in der Operatornorm).

Stabilität von Fredholmoperatoren: Ist $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein Fredholmoperator (vgl. 11.5.6), dann ist auch $A + B$ ein Fredholmoperator mit

$$\text{ind } (A + B) = \text{ind } A,$$

falls für den linearen Operator $B : D(B) \subseteq X \rightarrow Y$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $B \in K(X, Y)$ (kompakte Störung);
- (ii) $B \in L(X, Y)$ mit $\|B\| < \eta(A)$ (kleine Störung);
- (iii) $B : X_A \rightarrow Y$ ist kompakt;³⁷
- (iv) $B \in L(X_A, Y)$ mit hinreichend kleiner Operatornorm von B in $L(X_A, Y)$.

Stabilität selbstadjungierter Operatoren (Ungleichung von Kato): Es bezeichne $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ einen selbstadjungierten Operator auf einem komplexen Hilbertraum X . Dann ist auch $A + B : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ selbstadjungiert, falls der lineare symmetrische Operator $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ mit $D(A) \subseteq D(B)$ der Ungleichung

$$\|Bu\| \leq a\|Au\| + b\|u\| \quad \text{für alle } u \in D(A)$$

genügt, wobei $0 \leq a < 1$ und $b \geq 0$ Konstanten sind.

Störung des Spektrums: Gilt $A, B \in L(X, X)$, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass der Abstand zwischen den Spektren der Ungleichung

$$d(\sigma(A), \sigma(B)) < \varepsilon$$

genügt, falls $\|A - B\| < \delta(\varepsilon)$ gilt.

Sind $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ und $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ lineare abgeschlossene Operatoren mit dichtem Definitionsbereich, und ist $K \subset \varrho(A)$ eine kompakte Teilmenge der Resolventenmenge $\varrho(A)$ von A , dann gilt auch

$$K \subset \varrho(B),$$

falls der Abstand zwischen den Graphen $G(A)$ und $G(B)$ in $X \times X$ hinreichend klein ist.

³⁷In (iii) und (iv) bezeichnet X_A den Banachraum $D(A)$ versehen mit der Graphnorm $\|u\| + \|Au\|$.

Stabilität des wesentlichen Spektrums: Ist $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ein linearer abgeschlossener Operator mit dichtem Definitionsbereich, dann bleibt das wesentliche Spektrum von A unter allen kompakten Störungen $B \in K(X, Y)$ invariant, d. h. es gilt $\sigma_e(A + B) = \sigma_e(A)$.

Das gilt insbesondere für selbstadjungierte Operatoren $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ auf einem komplexen Hilbertraum X . Speziell bleiben die Häufungspunkte von $\sigma(A)$ bei kompakten Störungen $B \in K(X, X)$ im Spektrum von $A + B$.

Stabilität des diskreten Spektrums (Satz von Rellich): Sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator auf dem komplexen Hilbertraum X . Des Weiteren sei $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ ein linearer symmetrischer Operator. Das reelle offene Intervall J enthalte nur genau einen Punkt $\lambda^{(0)}$ des Spektrums von A , und $\lambda^{(0)}$ sei ein Eigenwert der endlichen Vielfachheit n mit der Orthonormalbasis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von Eigenvektoren. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ und für jedes komplexe ε mit $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned}\lambda_j(\varepsilon) &= \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda_j^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_j^{(2)} + \dots && \text{in } \mathbb{C}, \\ \varphi_j(\varepsilon) &= \varphi_j^{(0)} + \varepsilon \varphi_j^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi_j^{(2)} + \dots && \text{in } X,\end{aligned}$$

so dass der Operator $A + \varepsilon B$ im Intervall J nur ein diskretes Spektrum besitzt mit den Eigenwerten $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)$ (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt) und den orthonormierten Eigenvektoren $\varphi_1(\varepsilon), \dots, \varphi_n(\varepsilon)$.

Instabilität des stetigen Spektrums (Satz von Weyl): Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator auf dem komplexen separablen Hilbertraum X . Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen linearen symmetrischen kompakten Operator $B : X \rightarrow X$ mit $\|B\| < \varepsilon$, so dass der Operator $A + B$ ein reines Punktspektrum (und somit kein stetiges Spektrum) besitzt.

Vergleichssätze für Eigenwerte und die Näherungsmethode von Ritz: Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum X über \mathbb{K} mit $(Au, u) \geq c\|u\|^2$ für alle $u \in D(A)$ und festes $c \in \mathbb{R}$. Wir ordnen die Punkte des diskreten Spektrums von A der Größe nach und zählen sie entsprechend ihrer Vielfachheit, d. h.

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A) \leq \dots .$$

Das wesentliche Spektrum $\sigma_e(A)$ sei entweder leer oder es liege echt oberhalb von $\lambda_n(A)$. Ferner sei $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator mit $D(A) \subseteq D(B)$ und $(Bu, u) \geq (Au, u)$ für alle $u \in D(A)$, wobei B die gleichen Spektraleigenschaften wie A besitzt. Dann gilt:

- (i) **Vergleichssatz:** $\lambda_j(A) \leq \lambda_j(B)$ für $j = 1, \dots, n$.
- (ii) **Methode von Ritz:** Es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in D(A)$ ein Orthonormalsystem mit $n \leq m$. Bezeichnet $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ die Eigenwerte der $(m \times m)$ -Matrix mit den Elementen $(\varphi_r, A\varphi_s)$, dann gilt $\lambda_j(A) \leq \mu_j$ für $j = 1, \dots, n$.

Benutzt man hinreichend viele Basisfunktionen φ_j , dann erhält man z. B. für die niedrigsten Energiewerte des Heliumatoms Zahlen, die sehr gut mit dem Experiment übereinstimmen.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Wir betrachten das Rand-Eigenwertproblem

$$L_\varrho(u) := -u'' + \varrho u = \lambda u, \quad a < x < b, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

mit der stetigen Funktion $\varrho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varrho(x) \geq 0$ auf $[a, b]$. Dann existiert eine unendliche Folge von Eigenwerten $\lambda_1(\varrho) \leq \lambda_2(\varrho) \leq \dots$

Sind die Funktionen $\varrho_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $0 \leq \varrho_1(x) \leq \varrho_2(x) \leq \varrho_3(x)$ auf $[a, b]$, dann erhält man

$$\lambda_j(\varrho_1) \leq \lambda_j(\varrho_2) \leq \lambda_j(\varrho_3), \quad j = 1, 2, \dots .$$

► **STANDARDBEISPIEL 2** (Asymptotik der Eigenfrequenzen): Es ist das Rand-Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{auf } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (11.176)$$

gegeben. Dabei sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) mit hinreichend glattem Rand. Dann besitzt (11.176) eine Folge von Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ mit $\lambda_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Bezeichnen wir mit $N(\lambda)$ die Anzahl der Eigenwerte $\leq \lambda$, dann gilt³⁸

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{k/2}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \text{Vol}(\Omega) \text{Vol}(K^n), \quad (11.177)$$

wobei $\text{Vol}(\Omega)$ (bzw. $\text{Vol}(K^n)$) das Volumen von Ω (bzw. der n -dimensionalen Einheitskugel K^n) bezeichnet. Diese berühmte asymptotische Formel wurde 1912 von Hermann Weyl bewiesen. Er bestätigte damit die Hypothese der Physiker, dass die Verteilung der hohen Eigenfrequenzen λ_j nur von dem Volumen $\text{Vol}(\Omega)$ des Gebietes Ω abhängt und deshalb durch die Betrachtung eines Würfels gewonnen werden kann. Diese Tatsache spielte eine entscheidende Rolle bei der Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes für beliebige „schwarze Körper“.

11.6.5 Streutheorie

In der Streutheorie wird die Existenz des Grenzwerts

$$W_{\pm} u := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itA} e^{-itB} u$$

untersucht, wobei A und B selbstadjungierte Operatoren sind. Die physikalische Interpretation und mathematische Resultate betrachten wir in 13.18 im Zusammenhang mit der Streuung von Teilchen in der Quantenphysik.

11.6.6 Operatorfunktionen und die Interpolation von Räumen und Operatoren

Ein gegebener Differential- oder Integraloperator kann zwischen verschiedenen Räumen wirken. Die Interpolationstheorie erlaubt es, neue Räume durch Interpolation bekannter Räume zu konstruieren, wobei die Stetigkeit linearer Operatoren erhalten bleibt. Gleichzeitig erhält man dadurch wichtige Zusammenhänge zwischen bereits bekannten Räumen. Die Grundidee ist in dem folgenden Schema enthalten:

$$\begin{array}{ccc} X_0 & X_\alpha & X_1 \\ A & \downarrow & \downarrow & , & 0 < \alpha < 1. \\ Y_0 & Y_\alpha & Y_1, \end{array}$$

Gegeben sei der lineare stetige Operator $A : X_0 \rightarrow Y_0$ und $A : X_1 \rightarrow Y_1$, wobei X_α , Y_α für $\alpha = 0, 1$ gegebene Banachräume über \mathbb{K} sind. Gesucht werden neue Banachräume X_α , Y_α über \mathbb{K} , so dass $A : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ für $0 < \alpha < 1$ stetig bleibt. Man schreibt $X_\alpha := [X_0, X_1]_\alpha$.

Die Methode der gebrochenen Potenzen: X_0 und X_1 seien Hilberträume über \mathbb{K} , wobei die Einbettung $X_0 \subseteq X_1$ stetig und dicht ist. Dann existiert genau ein linearer selbstadjungierter Operator $B : D(B) \subseteq X_1 \rightarrow X_1$ mit

$$(u, v)_0 = (Bu, v)_1 \quad \text{für alle } u \in D(B), \quad v \in X_1,$$

und $X_\alpha := D(B^\beta)$ wird mit dem Skalarprodukt $(u, v)_\alpha := (B^\beta u, B^\beta v)_1$ ein Hilbertraum über \mathbb{K} , falls wir $\beta := (1 - \alpha)/2$ und $0 < \alpha < 1$ wählen. Es gilt

³⁸Genauer ist $N(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \text{Vol}(\Omega) \text{Vol}(K^n) \lambda^{-n/2} + O(\lambda^{(n-1)/2} \ln \lambda)$ für $\lambda \rightarrow +\infty$ (vgl. 1.3.1.4.).

(i) $X_0 \subseteq X_\alpha \subseteq X_1$, und X_α ist dicht in X_1 . Ferner ist

$$\|u\|_\alpha \leq \|u\|_0^{1-\alpha} \|u\|_1^\alpha \quad \text{für alle } u \in X_0.$$

(ii) Ist der Operator $A : X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ linear und stetig für $\alpha = 0, 1$, dann trifft das für alle $\alpha \in (0, 1)$ zu.

► **STANDARDBEISPIEL 1** (Sobolevräume $W_2^\beta(\Omega)$ mit gebrochener Ableitungsordnung β): Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^n mit glattem Rand ($\partial\Omega \in C^\infty$) oder es sei $\Omega = \mathbb{R}^n$. Ferner sei $m = 1, 2, \dots$ und $0 < \alpha < 1$. Wir definieren

$$W_2^{\alpha m}(\Omega) := [L_2(\Omega), W_2^m(\Omega)]_\alpha.$$

Die K-Methode: Gegeben seien die beiden Banachräume X und Y über \mathbb{K} . Ferner sei Z ein linearer topologischer Raum,³⁹ so dass die Einbettungen $X \subseteq Z$ und $Y \subseteq Z$ stetig sind. Für $z \in X + Y$ und $t \in \mathbb{R}$ definieren wir die sogenannte K -Funktion durch

$$K(z, t) := \inf_{z=x+y} \{ \|x\|_X + \|y\|_Y \},$$

wobei das Infimum über alle möglichen Zerlegungen $z = x + y$, $x \in X$, $y \in Y$, zu nehmen ist. Es sei $0 < \alpha < 1$ und $1 \leq r \leq \alpha$. Wir setzen

$$\|z\|_{\alpha, r} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty K(z, t) t^{-1-\alpha r} dt \right)^{\frac{1}{r}} & \text{für } 1 \leq r < \infty, \\ \sup_{0 < t < \infty} K(z, t) t^{-\alpha} & \text{für } r = \infty. \end{cases}$$

Satz: Die Menge

$$[X, Y]_{\alpha, r} := \{ z \in X + Y : \|z\|_{\alpha, r} < \infty \}$$

ist ein Banachraum über \mathbb{K} mit $X \cap Y \subseteq [X, Y]_\alpha \subseteq X + Y$ und der Norm $\|z\|_{\alpha, r}$. Es gilt

$$\|z\|_{\alpha, r} \leq c_{\alpha, r} \|z\|_X^{1-\alpha} \|z\|_Y^\alpha \quad \text{für alle } z \in X \cap Y.$$

Sind X_j , Y_j Banachräume über \mathbb{K} und ist $A : X_1 + X_2 \rightarrow Y_1 + Y_2$ ein linearer Operator, so dass $A : X_j \rightarrow Y_j$ für $j = 1, 2$ stetig ist, dann ist auch

$$A : [X_1, X_2]_{\alpha, r} \rightarrow [Y_1, Y_2]_{\alpha, r}$$

linear und stetig.

Für Hilberträume und $r = 2$ liefert die K -Methode das gleiche Ergebnis wie die obige Methode der gebrochenen Potenzen.

► **STANDARDBEISPIEL 2** (die Lebesgueräume $L_p(\Omega)$): Es sei $1 \leq p, q < \infty$ und $0 < \alpha < 1$ sowie $r^{-1} = (1 - \alpha)p^{-1} + \alpha q^{-1}$. Dann ergibt die K -Methode

$$L_r(\Omega) := [L_p(\Omega), L_q(\Omega)]_{\alpha, r}.$$

Nach der Hölderschen Ungleichung hat man ferner

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^{1-\alpha} \|u\|_q^\alpha \quad \text{für alle } u \in L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega).$$

Konvexitätstheorem von M. Riesz: Der Operator $A : L_p(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)$ sei linear für alle $1 \leq p, q \leq \infty$, und S sei die Menge aller Punkte $(p^{-1}, q^{-1}) \in \mathbb{R}^2$, für die A stetig ist (mit der Norm $\|A\|_{p,q}$). Dann ist die Menge S konvex, und die Funktion $(p^{-1}, q^{-1}) \mapsto \ln \|A\|_{p,q}$ ist konvex auf S .

³⁹Definitionsgemäß bedeutet dies, dass Z ein linearer und topologischer Raum ist, wobei die linearen Operationen $(x, y) \mapsto x + y$ bzw. $(x, \alpha) \mapsto \alpha x$ stetige Abbildungen von $Z \times Z$ in Z bzw. $Z \times \mathbb{K}$ in Z sind.

11.7 Operatoralgebren (Algebra und Analysis)

Operatoralgebren stellen ein grundlegendes Instrument der modernen mathematischen Physik dar (Quantenstatistik und Quantenfeldtheorie; vgl. 15.8). Die Theorie der Operatoralgebren ist ein wundervolles Beispiel für die Fruchtbarkeit der Wechselwirkung zwischen Algebra und Analysis.⁴⁰

Um das zu erläutern, betrachten wir die Standardbeispiele 5 und 6 weiter unten in 11.7.1. Diese klassischen Approximationssätze wurden in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts von Weierstraß mit speziellen Methoden bewiesen. Im Jahre 1947 erkannte der amerikanische Mathematiker Stone, dass sich hinter diesen Approximationssätzen ein allgemeines funktionalanalytisches Prinzip für Funktionenalgebren verbirgt (vgl. den Approximationssatz von Stone–Weierstraß in 11.7.1).

Ähnlich verhält es sich mit der Spektraltheorie. Die Existenz einer Spektralschar für beschränkte symmetrische Operatoren wurde von Hilbert Anfang des 20. Jahrhunderts mit Methoden der Theorie der Kettenbrüche bewiesen. Ende der dreißiger Jahre entdeckte der russische Mathematiker Gelfand den tiefen Zusammenhang zwischen der Spektraltheorie und der Darstellungstheorie kommutativer C^* -Algebren. Auf diesem Wege kann man in natürlicher Weise Funktionen $f(A)$ eines normalen Operators A definieren, die als Spezialfall die Spektralschar von A ergeben (vgl. 11.7.4).

Der zweite Hauptsatz der Spektraltheorie für selbstadjungierte Operatoren (vgl. den Diagonalisierungssatz in 11.6.2) wurde von John von Neumann 1938 mit Hilfe der von ihm 1929 eingeführten Operatorenringe (von-Neumann-Algebren) bewiesen. Dieser Hauptsatz stellt eine weitgehende Verallgemeinerung der klassischen Fouriertransformation dar, die zur Spektraltheorie des einfachen Differentialoperators $-\text{id}/\text{d}x$ gehört (vgl. 11.6.2). Wählt man andere Differentialoperatoren, dann erhält man alle diskreten oder kontinuierlichen Reihenentwicklungen (Integraldarstellungen) der mathematischen Physik (vgl. 11.8). Das ist Gegenstand einer modernen mathematischen Disziplin, die man „*harmonische Analysis*“ nennt. Der klassische Ausgangspunkt hierfür war das Problem, die Schwingungen einer Saite in Eigenschwingungen zu zerlegen, was auf Fourierreihen führt (vgl. 10.3.9). Im Jahre 1925 entdeckte Schrödinger, dass die Spektren von Atomen und Molekülen den Eigenschwingungen der Schrödingergleichung entsprechen (vgl. 13.18). Der Schöpfer der modernen harmonischen Analysis ist Hermann Weyl (1885–1955), der 1930 der Nachfolger von Hilbert (1862–1943) in Göttingen wurde und 1933 in die USA emigrierte. Zusammen mit Einstein (1879–1955), der ebenfalls 1933 emigrierte, arbeitete er am Institute for Advanced Study in Princeton (New Jersey).

11.7.1 Grundbegriffe

Banachalgebra: Unter einer Banachalgebra über \mathbb{K} verstehen wir einen Banachraum \mathbb{A} mit einer „Multiplikation AB “, so dass für alle $A, B, C \in \mathbb{A}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

- (i) $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativgesetz);
- (ii) $C(A + B) = CA + CB$ und $(A + B)C = AC + BC$ (Distributivgesetze);
- (iii) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$;
- (iv) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$;
- (v) es gibt ein Element $I \in \mathbb{A}$ mit $IA = AI = A$ für alle $A \in \mathbb{A}$ (Einselement);
es ist $\|I\| = 1$.

Die Banachalgebra \mathbb{A} heißt genau dann *kommutativ*, wenn $AB = BA$ für alle $A, B \in \mathbb{A}$ gilt.

⁴⁰ Ein weiteres derartiges faszinierendes Beispiel bildet die Theorie der Liegruppen und Liealgebren mit ihren Anwendungen auf Symmetrieprobleme (z. B. in der Elementarteilchenphysik; vgl. 17.8).

Sind nur die Bedingungen (i) bis (iv) erfüllt, dann heißt \mathbb{A} eine Banachalgebra ohne Einselement.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Ist X ein Banachraum über \mathbb{K} , dann bildet die Menge $L(X, X)$ aller linearen stetigen Operatoren $A : X \rightarrow X$ bezüglich der Operatornorm eine Banachalgebra über \mathbb{K} .

C^* -Algebra: Eine Banachalgebra \mathbb{A} über \mathbb{K} heißt genau dann eine C^* -Algebra, wenn zusätzlich eine $*$ -Operation erklärt ist, die für alle $A, B \in \mathbb{A}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ folgende Eigenschaften besitzt:

$$(i) (A^*)^* = A; \quad (AB)^* = B^*A^*; \quad (\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*;$$

$$(ii) \|AA^*\| = \|A\|^2.$$

Unteralgebra: Unter einer $*$ -Unteralgebra (bzw. $*$ -Unteralgebra) der Banachalgebra (bzw. C^* -Algebra) \mathbb{A} verstehen wir einen linearen Unterraum \mathbb{U} von \mathbb{A} , so dass aus $A, B \in \mathbb{U}$ stets $AB \in \mathbb{U}$ (bzw. zusätzlich $A^* \in \mathbb{U}$) folgt.

Gilt außerdem $AB, BA \in \mathbb{U}$ für alle $A \in \mathbb{U}$ und $B \in \mathbb{A}$, dann heißt \mathbb{U} ein Ideal (bzw. ein $*$ -Ideal).

Ist \mathbb{U} abgeschlossen im Banachraum \mathbb{A} , dann nennen wir \mathbb{U} eine abgeschlossene Unteralgebra von \mathbb{A} .

► **BEISPIEL 2:** Die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} wird mit dem Betrag $|z|$ als Norm und mit $z^* := \bar{z}$ (Übergang zur konjugiert komplexen Zahl) eine kommutative C^* -Algebra.

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Die Menge $C(M)_{\mathbb{K}}$ der stetigen Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ auf dem nichtleeren kompakten topologischen Raum M wird mit der Norm $\|f\| := \max_{x \in M} |f(x)|$ und $f^*(x) := \overline{f(x)}$ für alle $x \in M$ zu einer kommutativen C^* -Algebra über \mathbb{K} .

► **STANDARDBEISPIEL 4:** Es sei X ein komplexer Hilbertraum. Dann bildet die Menge $L(X, X)$ eine C^* -Algebra, wobei A^* den adjungierten Operator bezeichnet.

Der Approximationssatz von Stone–Weierstraß: Eine $*$ -Unteralgebra \mathbb{U} von $C(M)_{\mathbb{K}}$ liegt dicht in $C(M)_{\mathbb{K}}$, falls \mathbb{U} die konstanten Funktionen enthält und die Punkte von M trennt (d. h., für zwei verschiedene Punkte $x, y \in M$ existiert stets eine Funktion $f \in \mathbb{U}$ mit $f(x) \neq f(y)$).

► **STANDARDBEISPIEL 5:** Es sei M eine nichtleere kompakte Menge des \mathbb{R}^n . Mit \mathbb{U} bezeichnen wir die Menge aller Polynome in n Variablen mit Koeffizienten aus \mathbb{K} . Dann ist \mathbb{U} in $C(M)_{\mathbb{K}}$ dicht.

► **STANDARDBEISPIEL 6:** Es sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ der Rand des Einheitskreises. Dann kann $C(M)_{\mathbb{C}}$ mit der Menge der 2π -periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ identifiziert werden. Da die Funktion e^{ix} die Punkte von M trennt, ist die Menge \mathbb{U} der trigonometrischen Polynome

$$\sum_{j=-n}^n a_j e^{jix}, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

dicht in $C(M)_{\mathbb{C}}$.

Von-Neumann-Algebra: Eine Unteralgebra der C^* -Algebra $L(X, X)$ (X komplexer Hilbertraum) aus Standardbeispiel 4 heißt genau dann eine von-Neumann-Algebra, wenn sie bezüglich der schwachen Operatortopologie (vgl. 11.5.7.4) abgeschlossen ist. Das ist äquivalent zu $\mathbb{A}'' = \mathbb{A}$. Dabei bezeichnet \mathbb{A}' den Kommutanten von \mathbb{A} , d. h. es gilt $\mathbb{A}' := \{B \in L(X, X) : AB = BA \text{ für alle } A \in \mathbb{A}\}$. Ferner setzen wir $\mathbb{A}'' := (\mathbb{A}')'$.

Das Spektrum: Es sei \mathbb{A} eine komplexe Banachalgebra. Die komplexe Zahl λ gehört genau dann zur Resolventenmenge $\varrho(A)$ von $A \in \mathbb{A}$, wenn $(\lambda I - A)^{-1}$ existiert. Die Menge $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ heißt das Spektrum von A . Die Zahl $r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ bezeichnet man als den Spektralradius von A . Es gilt

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|.$$

Die Menge $\text{rad } \mathbb{A} := \{A \in \mathbb{A} : r(A) = 0\}$ nennt man das *Radikal* von \mathbb{A} . Die Banachalgebra \mathbb{A} heißt genau dann *halbeinfach*, wenn $\text{rad } \mathbb{A} = \{0\}$ gilt, d.h., das Radikal von \mathbb{A} ist trivial.

Ferner heißt \mathbb{A} genau dann *einfach*, wenn \mathbb{A} nur die beiden trivialen Ideale \mathbb{A} und $\{0\}$ besitzt.

► **BEISPIEL 7:** \mathbb{C} ist einfach und halbeinfach. Das Spektrum $\sigma(f)$ einer Funktion f aus $C(M)_{\mathbb{C}}$ ist gleich $f(M)$.

► **STANDARDBEISPIEL 8:** Jede kommutative C^* -Algebra ist halbeinfach (z.B. $C(M)_{\mathbb{C}}$).

► **BEISPIEL 9:** Es sei X der Banachraum aller stetigen Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Der Volterrascche Integraloperator

$$(Af)(x) := \int_0^x f(y) \, dy$$

ist ein linearer stetiger Operator $A : X \rightarrow X$ mit $r(A) = 0$, aber $A \neq 0$. Deshalb ist die Banachalgebra $L(X, X)$ nicht halbeinfach.

11.7.2 Kompakte Operatoren und Operatorenideale

Allgemeine Eigenschaften: X, Y und Z seien Banachräume über \mathbb{K} . Mit $L(X, Y)$ (bzw. $K(X, Y)$) bezeichnen wir die Menge aller linearen stetigen (bzw. kompakten) Operatoren $A : X \rightarrow Y$. Dann gilt:

(i) $K(X, Y)$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $L(X, Y)$. Alle Operatoren $A \in L(X, Y)$ mit $\dim R(A) < \infty$ gehören zu $K(X, Y)$.

(ii) Es gilt $AB \in K(X, Z)$, falls $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$ und einer dieser beiden Operatoren kompakt ist.

(iii) $A \in K(X, Y)$ gilt genau dann, wenn $A^T \in K(Y^*, X^*)$ (Satz von Schauder).

(iv) $A \in K(X, Y)$ gilt genau dann, wenn $A^* \in K(X, Y)$ (falls X und Y Hilberträume sind).

(v) Für $A \in K(X, Y)$ folgt aus der schwachen Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ in X stets die starke Konvergenz $Au_n \rightarrow Au$ in Y .

Das Ideal der kompakten Operatoren: $K(X, X)$ ist ein Ideal in $L(X, X)$.

Im Falle eines Hilbertraumes X bildet $K(X, X)$ ein $*$ -Ideal in $L(X, X)$, wobei die Menge aller $A \in L(X, X)$ mit $\dim R(A) < \infty$ in $K(X, X)$ dicht liegt.

Die Spur: Es sei X ein separabler Hilbertraum über \mathbb{K} . Der Operator $A \in L(X, X)$ heißt genau dann positiv, wenn $(Au, u) \geq 0$ für alle $u \in X$ gilt. Dafür schreiben wir $A \geq 0$. Ferner bedeutet $A \geq B$, dass $A - B \geq 0$ gilt.

Ist $A \geq 0$, dann existiert $A^{1/2} \in L(X, X)$ nach dem Dunfordkalkül (vgl. 11.6.3). Definitionsgemäß besitzt $A \in L(X, X)$ genau dann eine Spur, wenn die Zahl

$$\text{tr } A := \sum_n (u_n, Au_n)$$

für jedes vollständige Orthonormalsystem $\{u_n\}$ in X den gleichen Wert α ergibt mit $-\infty \leq \alpha \leq \infty$.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Jeder positive Operator $A \in L(X, X)$ besitzt eine Spur. Im Fall $\dim X < \infty$ hat jeder Operator $A \in L(X, X)$ eine Spur. Wählen wir eine Basis in X , dann ist $\text{tr } A$ gleich der Summe der Hauptdiagonalelemente der entsprechenden Matrix.

Die Spur spielt eine fundamentale Rolle in der Quantenstatistik (vgl. 15.8) und in der Theorie der Liealgebren (vgl. 17.1).

Das Ideal der nuklearen Operatoren (Spurklasse) und das Ideal der Hilbert–Schmidt–Operatoren: Die Spurklasse (Klasse der nuklearen Operatoren) \mathbb{I}_1 besteht aus genau allen Operatoren $A \in L(X, X)$ mit $\text{tr}(A^* A)^{1/2} < \infty$. Dabei ist X ein Hilbertraum über \mathbb{K} .

Die Klasse \mathbb{I}_2 der Hilbert–Schmidt–Operatoren besteht aus genau allen $A \in L(X, X)$ mit $\text{tr}(A^* A) < \infty$. Es gilt:

(i) \mathbb{I}_1 und \mathbb{I}_2 sind $*$ -Ideale in $L(X, X)$ mit $\mathbb{I}_1 \subseteq \mathbb{I}_2 \subseteq K(X, X)$. Es ist genau dann $A \in \mathbb{I}_1$, wenn $A = BC$ mit $B, C \in \mathbb{I}_2$.

(ii) \mathbb{I}_1 ist ein Banachraum bezüglich der Norm $\|A\|_1 := \text{tr } A$, und \mathbb{I}_2 ist ein Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts $(A, B)_2 := \text{tr}(A^* B)$.

Für alle $A \in \mathbb{I}_k$ gilt $\|A\| \leq \|A\|_k$, $k = 1, 2$. Ferner ist $\|A\|_2 \leq \|A\|_1$.

(iii) Ist $A, B \in \mathbb{I}_1$, $C \in L(X, X)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dann gilt $\text{tr } A \in \mathbb{K}$ und

$$\begin{aligned}\text{tr}(A + B) &= \text{tr } A + \text{tr } B, & \text{tr } AC &= \text{tr } CA, \\ \text{tr}(\alpha A) &= \alpha \text{tr } A, & \text{tr } A^* &= \overline{\text{tr } A},\end{aligned}$$

$$0 \leq \text{tr } A \leq \text{tr } B \quad \text{für } 0 \leq A \leq B.$$

► **STANDARDBEISPIEL 2:** Ist $A : X \rightarrow X$ ein linearer selbstadjungierter kompakter Operator mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$, so ist genau dann $A \in \mathbb{I}_1$ (bzw. $A \in \mathbb{I}_2$), wenn

$$\text{tr } A = \sum_j \lambda_j < \infty \quad \left(\text{bzw. } \text{tr } A^2 = \sum_j \lambda_j^2 < \infty \right).$$

► **BEISPIEL 3:** Es sei Ω eine nichtleere offene Menge des \mathbb{R}^n . Dann erhält man genau alle Hilbert–Schmidt–Operatoren $K : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ durch die Integraloperatoren

$$(Ku)(x) := \int_{\Omega} \mathbb{K}(x, y) u(y) \, dy$$

mit messbaren, quadratischen integrierbaren Kernen $\mathbb{K} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ferner ist

$$\|K\|_2 = \left(\int_{\Omega \times \Omega} |\mathbb{K}(x, y)|^2 \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

11.7.3 Darstellungstheorie für Operatoralgebren

Homomorphismen: Unter einem Homomorphismus h mit $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ (bzw. einem $*$ -Homomorphismus) zwischen den beiden Banachalgebren \mathbb{A} und \mathbb{B} über \mathbb{K} verstehen wir eine lineare stetige Abbildung mit

$$h(AB) = h(A)h(B) \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{A}$$

(bzw. zusätzlich $h(A^*) = h(A)^*$). Ist h außerdem bijektiv, dann bezeichnen wir h als Isomorphismus (bzw. $*$ -Isomorphismus).

Der Hauptsatz von Gelfand und Neumark:

(i) Jede komplexe kommutative C^* -Algebra ist $*$ -isomorph zu $C(M)_{\mathbb{C}}$, wobei M ein geeigneter nichtleerer kompakter topologischer Raum ist.

(ii) Jede komplexe C^* -Algebra ist $*$ -isomorph zu $L(X, X)$, wobei X ein komplexer Hilbertraum ist.

Die Gelfanddarstellung (verallgemeinerte Fouriertransformation): Sei \mathbb{A} eine komplexe kommutative C^* -Algebra. Unter einem multiplikativen Funktional μ auf \mathbb{A} verstehen wir ein lineares stetiges Funktional $\mu : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\mu(AB) = \mu(A)\mu(B) \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{A} \text{ und } \mu \neq 0.$$

Es sei \mathbb{M} die Menge aller multiplikativen Funktionale auf \mathbb{A} . Wir setzen

$$\varphi_A(\mu) := \mu(A) \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{M}$$

und versehen \mathbb{M} mit der schwächsten Topologie, in der die Familie $\{\varphi_A\}_{A \in \mathbb{A}}$ stetig ist. Dann wird \mathbb{M} zu einem nichtleeren kompakten topologischen Raum, und die Abbildung

$$\Gamma : \mathbb{A} \rightarrow C(\mathbb{M})_{\mathbb{C}} \quad \text{mit } \Gamma(A) := \varphi_A$$

wird ein $*$ -Homomorphismus von \mathbb{A} in $C(M)_{\mathbb{C}}$ (*Gelfanddarstellung von \mathbb{A}*). Ist \mathbb{A} halbeinfach, dann entsteht ein Isomorphismus.

In dem Fall, dass \mathbb{A} kein Einselement enthält, kann man \mathbb{M} durch Hinzunahme eines idealen Punktes „ ∞ “ in einen kompakten topologischen Raum verwandeln.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Der Banachraum $L_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ wird zu einer komplexen kommutativen C^* -Algebra \mathbb{A} ohne Einselement, falls man die Faltung $f * g$ (vgl. 10.4.2) als Multiplikation wählt. Genau alle multiplikativen Funktionale $\mu \in \mathbb{M}$ erhält man durch

$$\mu_r(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-irx} f(x) dx \quad \text{für alle } f \in L_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$$

und reelle Zahlen r (Fouriertransformation). Die Menge \mathbb{M} kann deshalb mit \mathbb{R} identifiziert werden. Die Kompaktifizierung von \mathbb{M} ist homöomorph zum Rand des Einheitskreises S (Abb. 11.27). Die Gelfanddarstellung ordnet $f \in L_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ die Fouriertransformierte $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu mit $F(r) = \mu_r(f)$ für alle $r \in \mathbb{R}$, wobei $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} F(r) = 0$ gilt. Deshalb können wir F als Funktion auf S auffassen mit $F(\infty) = 0$. Somit ist die Gelfanddarstellung ein $*$ -Homomorphismus von \mathbb{A} in $C(S)_{\mathbb{C}}$.

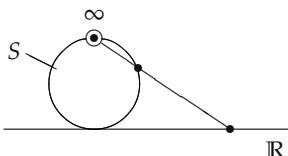


Abb. 11.27

Die GNS-Darstellung:⁴¹ Die folgende Konstruktion spielt beim algebraischen Zugang zur modernen Quantenstatistik und Quantenfeldtheorie eine fundamentale Rolle. Es sei \mathbb{A} eine komplexe C^* -Algebra. Unter einem Zustand z auf \mathbb{A} verstehen wir ein lineares Funktional $z : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$, das positiv ist, d. h., es gilt $z(A^*A) \geq 0$ für alle $A \in \mathbb{A}$.

► **STANDARDBEISPIEL 2:** Ist X ein komplexer Hilbertraum, dann entspricht jedem $\psi \in X$ durch $z(A) := (\psi, A\psi)$ ein Zustand auf $L(X, X)$. Tatsächlich gilt $(\psi, A^*A\psi) = (A\psi, A\psi) \geq 0$. Die GNS-Darstellung zeigt, dass diese Situation typisch ist. Jedem linearen positiven Funktional z auf \mathbb{A} kann man einen Hilbertraum X zuordnen, so dass z ein Element $\psi \in X$ entspricht und jedem $A \in \mathbb{A}$ ein Operator $\varphi(A) \in L(X, X)$ zugeordnet wird. Dabei gilt

$$z(A) = (\psi, \varphi(A)\psi) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{A}.$$

⁴¹Gelfand–Neumark–Segal–Darstellung.

Genauer: Sei $(A, B) := z(A^*B)$ für alle $A, B \in \mathbb{A}$ und $\mathbb{N} := \{A \in \mathbb{A} : (A, A) = 0\}$. Damit wird \mathbb{A}/\mathbb{N} (d.h. die Menge aller Klassen $[A] = A + \mathbb{N}$) zu einem Prä-Hilbertraum, dessen Vervollständigung den Hilbertraum X ergibt. Ferner definieren wir

$$\varphi(A)[B] := [AB] \quad \text{für alle } B \in \mathbb{A}.$$

Der Operator $\varphi : \mathbb{A}/\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}/\mathbb{N}$ kann dann eindeutig zu einem linearen stetigen Operator $\varphi(A) : X \rightarrow X$ fortgesetzt werden.

11.7.4 Anwendungen auf die Spektraltheorie normaler Operatoren

Normale Operatoren: Es sei X ein Hilbertraum über \mathbb{K} , und es sei $A \in L(X, X)$. Der Operator A heißt genau dann *normal*, wenn

$$AA^* = A^*A$$

gilt. Dann ist $r(A) = \|A\|$. Insbesondere sind selbstadjungierte Operatoren ($A^* = A$), schiefadjungierte Operatoren ($A^* = -A$) und unitäre Operatoren ($A^*A = AA^* = I$) stets normal.

Zerlegungssatz: Jeder Operator $A \in L(X, X)$ kann in der Form⁴²

$$A = B + iC, \quad B = B^*, \quad C = C^*, \quad B, C \in L(X, X), \quad (11.178)$$

und

$$A = UR, \quad R := (A^*A)^{1/2}, \quad U, R \in L(X, X), \quad (11.179)$$

geschrieben werden, wobei U normerhaltend und R selbstadjungiert und positiv ist.

Ist A normal, dann ist U unitär, und es gilt $BC = CB$.

► **BEISPIEL 1:** Für die lineare Transformation $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\det A > 0$ beschreibt U den Drehanteil und R entspricht dem Dehnungsanteil. Ist e_1, e_2, e_3 ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu R mit $Re_j = \lambda_j e_j$, dann erhalten wir

$$Ae_j = \lambda_j Ue_j, \quad \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

d.h., A setzt sich aus der Drehung U und dem *Dehnungstensor* R zusammen.

Endlichdimensionaler Spektralsatz: Jeder normale Operator $A \in L(X, X)$ auf einem endlich-dimensionalen komplexen Hilbertraum $X \neq \{0\}$ besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren.

Allgemeiner Spektralsatz: Gegeben sei der normale Operator $A \in L(X, X)$ auf dem komplexen Hilbertraum X mit dem Spektrum $\sigma(A)$. Mit \mathbb{A} bezeichnen wir die kleinste abgeschlossene kommutative C^* -Unteralgebra von $L(X, X)$, die A enthält. Wegen $A^*A = AA^*$ gehört neben A auch A^* zu \mathbb{A} . Die Gelfanddarstellung

$$\Gamma : \mathbb{A} \rightarrow C(\sigma(A))_{\mathbb{C}} \quad (11.180)$$

ist dann ein $*$ -Isomorphismus. Die Menge $L_{\infty}^{\mathbb{C}}(\sigma(A))$ aller fast überall beschränkten messbaren Funktionen $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ bildet einen Banachraum, und $h := \Gamma^{-1}$ lässt sich zu einem injektiven $*$ -Homomorphismus

$$h : L_{\infty}^{\mathbb{C}}(\sigma(A)) \rightarrow L(X, X)$$

⁴²Im Spezialfall $X = \mathbb{C}$ ist A eine komplexe Zahl. Dann gilt $A^* = \overline{A}$, und (11.178) (bzw. (11.179)) entspricht $A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A$ (bzw. $A = e^{i\varphi} |A|$).

fortsetzen. Dadurch wird jeder Funktion $f \in L_\infty^{\mathbb{C}}(\sigma(A))$ in eindeutiger Weise ein Operator $f(A) \in L(X, X)$ zugeordnet.

Wählen wir speziell eine Borelmenge Ω in $\sigma(A)$, dann wird der charakteristischen Funktion χ_{Ω} (d.h. $\chi_{\Omega}(\lambda) = 1$ für $\lambda \in \Omega$ und $\chi_{\Omega}(\lambda) = 0$ für $\lambda \notin \Omega$) ein selbstadjungierter Operator E_{Ω} zugeordnet. Für feste $u, v \in X$ gibt es dann ein komplexwertiges⁴³ Maß μ auf $\sigma(A)$ mit $\mu(\Omega) = (E_{\Omega}u, v)$ und

$$(f(A)u, v) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu(\lambda) \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Man bezeichnet $\{E_{\Omega}\}$ als die Spektralschar von A , symbolisch $f(A) = \int f(\lambda) dE_{\lambda}$.

11.8 Differentialoperatoren und Reihenentwicklungen der mathematischen Physik – eine Perle der Mathematik

Es sei (a, b) ein beschränktes oder unbeschränktes offenes Intervall, d.h., $a = +\infty$ oder $b = -\infty$ sind zugelassen. Unser Ziel ist es, allgemeine „Reihenentwicklungen“ der Form

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^m g_j(\lambda) u_k(x, \lambda) d\mu_{jk}(\lambda), \quad a < x < b, \quad (11.181)$$

mit der Umkehrformel

$$g_j(\lambda) = \int_a^b \overline{u_j(x, \lambda)} f(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (11.182)$$

zu rechtfertigen. Dabei sind die Entwicklungsfunktionen u_k Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung m -ter Ordnung

$$(Au)(x) := \sum_{j=0}^m a_k(x) u^{(k)}(x) = \lambda u(x), \quad a < x < b, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (11.183)$$

mit den Anfangsbedingungen $u_s^{(r-1)}(x_0, \lambda) = \delta_{rs}$, $r, s = 1, \dots, m$ ($m \geq 1$) für einen festen Punkt $x_0 \in (a, b)$. Formel (11.181) enthält als zwei Spezialfälle die Entwicklung nach Fourierreihen (μ_{jk} = Sprungfunktion) und die Fouriertransformation (μ_{jk} ist stetig differenzierbar auf \mathbb{R}). Das Integral in (11.181) ist als Lebesgue-Stieltjes-Integral aufzufassen.

Unsere Aufgabe ist es, die Funktionen $\mu_{jk} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation mit Hilfe der Greenschen Funktion zu berechnen. Genauer ist $d\mu_{jk}(\lambda) = c_{jk}(\lambda) d\mu(\lambda)$, wobei μ ein Maß auf dem Spektrum $\sigma(\overline{A})$ des selbstadjungierten Abschlusses \overline{A} darstellt und $(c_{jk}(\lambda))$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine selbstadjungierte positive $(m \times m)$ -Matrix ist. Tatsächlich ist das Integral in (11.181) nur über $\sigma(\overline{A})$ zu erstrecken.

Bei der funktionalanalytischen Formulierung des Entwicklungssatzes benutzen wir den Ausgangsraum

$$X := L_2^{\mathbb{C}}(a, b), \quad (u, v) := \int_a^b \overline{u(x)} v(x) dx,$$

⁴³Das bedeutet $\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$, wobei μ_j Maße sind.

und den Raum der „Fouriertransformierten“

$$Y := L_2(\mathbb{R}, d\mu), \quad (g, h)_* := \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^m \overline{g_j(\lambda)} h_k(\lambda) d\mu_{jk}(\lambda).$$

Genauer ist Y der Abschluss von $C_0^\infty(a, b)_\mathbb{C}$ bezüglich $(\cdot, \cdot)_*$.

Die Koeffizientenfunktionen $a_k : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ in (11.183) seien k -fach stetig differenzierbar, und wir nehmen $a_m(x) \equiv 1$ an. Der Differentialoperator A heißt genau dann *regulär*, wenn (a, b) beschränkt ist und $a_k \in C^k[a, b]_\mathbb{C}$ für $k = 0, \dots, m-1$ gilt. Andernfalls bezeichnet man A als *singulär*. Viele wichtige Reihenentwicklungen der mathematischen Physik entsprechen singulären Differentialoperatoren.

Differentialoperator: Es sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ein wesentlich selbstadjungierter Operator. Der Definitionsbereich $D(A)$ bestehe aus C^m -Funktionen zusammen mit Randbedingungen, so dass

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{für alle } u, v \in D(A)$$

gilt und der Abschluss \overline{A} selbstadjungiert ist.

Resolvente und Greensche Funktion: Es sei G die Greensche Funktion zu $Au = \lambda u$, d.h., für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ erhalten wir für die Resolvente $v := (\lambda I - A)^{-1}f$ die Integraldarstellung

$$v(x) = - \int_a^b G(x, y, \lambda) f(y) dy, \quad f \in L_2^\mathbb{C}(a, b).$$

Es gilt

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} \sum_{j,k=1}^m M_{jk}^+(\lambda) u_j(x, \lambda) \overline{u_k(x, \lambda)} & \text{für } a < x \leq y < b, \\ \sum_{j,k=1}^m M_{jk}^-(\lambda) u_j(x, \lambda) \overline{u_k(x, \lambda)} & \text{für } a < y < x < b. \end{cases}$$

Die Funktionen M_{jk}^\pm , die auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ holomorph sind, bestimmen sich aus der Differentialgleichung

$$AG(x, y, \lambda) - \lambda G(x, y, \lambda) = \delta_y, \quad a < x < b, \quad (11.184)$$

und den Randbedingungen für A , d.h., es ist $G(\cdot, y, \lambda) \in D(A)$. Aus (11.184) erhalten wir die Sprungbedingung

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} G(x+0, x, \lambda) - \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} G(x-0, x, \lambda) = 1.$$

Schließlich setzen wir $M_{jk} := \frac{1}{2}(M_{jk}^+ + M_{jk}^-)$.

Der Hauptsatz (das verallgemeinerte Weyltheorem): Berechnet man μ_{jk} durch

$$\mu_{jk}(\lambda) := \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{1}{2\pi i} (M_{jk}(\nu + i\varepsilon) - M_{jk}(\nu - i\varepsilon)) d\nu, \quad (11.185)$$

dann ergibt sich durch die Entwicklungsformel (11.182) ein unitärer⁴⁴ Operator U mit $U : L_2^\mathbb{C}(a, b) \rightarrow L_2^\mathbb{C}(\mathbb{R}, d\mu)$, den man die „Fouriertransformation“ zu dem Differentialoperator A nennt. Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\overline{A})$ ist $\mu_{jk}(\lambda) = \operatorname{const}$.

⁴⁴Genauer gilt folgendes. Durch (11.182) wird U für alle $f \in C_0^\infty(a, b)_\mathbb{C}$ als normerhaltender Operator erklärt, der sich wegen der *Dichtheit* von $C_0^\infty(a, b)_\mathbb{C}$ in X eindeutig zu einem unitären Operator $U : X \rightarrow Y$ fortsetzen lässt.

Der Prototyp dieses Theorems wurde von Hermann Weyl 1910 bewiesen. Die endgültige Form geht im wesentlichen auf eine Arbeit von Kodaira im Jahre 1949 zurück. Dieses Theorem stellt eine Konkretisierung des von Neumannschen zweiten Hauptsatzes der Spektraltheorie dar (vgl. 11.6.2). Wegen (11.185) enthält die Greensche Funktion die wesentlichen Informationen über das Spektrum von \bar{A} und die zugehörigen Reihenentwicklungen. Diese Tatsache wird von den Physikern beispielsweise in der modernen Elementarteilchen- und Festkörperphysik weitgehend ausgenutzt (Methode der Greenschen Funktion).

► **STANDARDBEISPIEL 1** (Fouriertransformation): Für den (singulären) Impulsoperator

$$(Au) := -iu'(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

der eindimensionalen Quantenmechanik ($\hbar = 1$) gilt $u_1(x, \lambda) = e^{i\lambda x}$. Im Fall $\operatorname{Im} \lambda > 0$ bzw. $\operatorname{Im} \lambda < 0$ lautet die Greensche Funktion

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq y, \\ ie^{i(x-y)\lambda} & \text{für } y < x, \end{cases}$$

bzw.

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} -ie^{i(x-y)\lambda} & \text{für } x \leq y, \\ 0 & \text{für } y < x. \end{cases}$$

Deshalb ist $M_{11}^+(\lambda) = 0$, $M_{11}^-(\lambda) = i$, $M_{11}(\lambda) = i/2$ für $\operatorname{Im} \lambda > 0$ (bzw. $M_{11}^+(\lambda) = -i$, $M_{11}^-(\lambda) = 0$, $M_{11}(\lambda) = -i/2$). Aus (11.185) folgt $\mu_{11}(\lambda) = \lambda/2\pi$. Deshalb entspricht die grundlegende Entwicklungsformel (11.181) der klassischen Fourierintegraltransformation.

► **STANDARDBEISPIEL 2** (reguläres Randwertproblem zweiter Ordnung): Wir betrachten

$$(Au) := -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad -\infty < a \leq x \leq b < \infty$$

mit den beiden Randbedingungen

$$u(a) \cos \alpha - p(a)u'(a) \sin \alpha = 0, \quad u(b) \cos \beta - p(b)u'(b) \sin \beta = 0,$$

für feste reelle Zahlen α und β . Die beiden Funktionen $q, p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig mit $p(x) \geq \operatorname{const} > 0$ auf $[a, b]$. Dann existiert ein vollständiges System von Eigenlösungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ in $L_2^{\mathbb{C}}(a, b)$ mit zugehörigen reellen Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ und $\lambda_k \rightarrow +\infty$ für $k \rightarrow \infty$. In diesem Fall entspricht (11.181) der Entwicklung von $f \in L_2^{\mathbb{C}}(a, b)$ nach diesen Eigenfunktionen in $L_2^{\mathbb{C}}(a, b)$.

Speziell für $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ und $a = -\pi$, $b = \pi$ ist (11.181) die klassische Fourierreihe.

Viele Reihenentwicklungen der mathematischen Physik ergeben sich in natürlicher und einheitlicher Weise aus (11.181) [vgl. Yosida 1960]. Verallgemeinerungen auf Entwicklungen nach Eigenfunktionen von allgemeinen elliptischen partiellen Differentialgleichungsoperatoren findet man in [Maurin 1972].

Der obige Hauptsatz stellt eine Perle der Mathematik dar. In eleganter Weise wirken hier Differentialgleichungen, Integralgleichungen, komplexe Funktionentheorie, Maßtheorie, Theorie der Distributionen, spezielle Funktionen der mathematischen Physik und Funktionalanalysis zusammen. Die Mathematik musste einen weiten Weg zurücklegen, ehe ein solches allgemeines Ergebnis überhaupt formuliert und dann auch bewiesen werden konnte.

Literatur zu Kapitel 11

- [Alt 1993] Alt, H.: Lineare Funktionalanalysis. 2. Auflage, Springer, Berlin (1993)
- [Amann 1995] Amann, H.: Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Vol. 1: Abstract Linear Theory. Birkhäuser, Basel (1995)
- [Araki 1999] Araki, H.: Mathematical Theory of Quantum Fields. Transl. from the Japanese. Oxford University Press, Oxford (1999)
- [Berezin und Shubin] Berezin, F., Shubin, M.: The Schrödinger Equation. Transl. from the Russian. Kluwer, Dordrecht (1991)
- [Burg et al. 1993] Burg, K., Haf, H., Wille, F.: Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 5. 2. Auflage. Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart (1993)
- [Dautray und Lions 2000] Dautray, R., Lions, J.: Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vols. 1–6. Transl. from the French. Springer, New York (2000)
- [Dieudonné 1981] Dieudonné, J.: History of Functional Analysis. North Holland, Amsterdam (1981)
- [Dunford und Schwartz 1958–63] Dunford, N., Schwartz, J.: Linear Operators, Vols. 1, 2. Interscience Publishers, New York (1958–63)
- [Evans 1998] Evans, L.: Partial Differential Equations. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998)
- [Glimm und Jaffe 1981] Glimm, J., Jaffe, A.: Mathematical Methods of Quantum Physics: A Functional Integral Point of View. Springer, New York (1981)
- [Göpfert und Riedrich 1994] Göpfert, A., Riedrich, T.: Funktionalanalysis. 4. Auflage, Teubner, Stuttgart/Leipzig (1994)
- [Gustafson und Sigal 2003] Gustafson, S., Sigal, I.: Mathematical Concepts of Quantum Mechanics. Springer, Berlin (2003)
- [Haag 1996] Haag, R.: Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras. 2nd edition. Springer, Berlin (1996)
- [Heuser 1992] Heuser, H.: Funktionalanalysis. 3. Auflage, Teubner, Stuttgart (1992)
- [Hörmander 1983] Hörmander, L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vols. 1–4. Springer, New York (1983)
- [Holmes 1975] Holmes, R.: Geometrical Functional Analysis. Springer, Berlin (1975)
- [Jörgens und Rellich 1976] Jörgens, K., Rellich, F.: Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Springer, Berlin (1976)
- [Jost 2002] Jost, J.: Partial Differential Equations, Springer, New York (2002)
- [Kadison und Ringrose 1986–1993] Kadison, R., Ringrose, J.: Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vols. 1–4. Springer, New York (1986–93)
- [Kato 1966] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators. Springer, New York (1966)
- [Lax 2002] Lax, P.: Functional Analysis. Wiley, New York (2002)
- [Lax 2007] Lax, P.: Hyperbolic Partial Differential Equations. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2007)
- [Luenberger 1969] Luenberger, D.: Optimization by Vector Space Methods. Wiley, New York (1969)
- [Maurin 1968] Maurin, K.: Generalized Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups. Polish Scientific Publishers, Warsaw (1968)
- [Maurin 1972] Maurin, K.: Methods of Hilbert Spaces. 2nd edition. Transl. from the Polish. Polish Scientific Publishers, Warsaw (1972)
- [Nečas 2012] Nečas, J.: Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations, Springer, Heidelberg (2012)
- [Reed und Simon 1981] Reed, M., Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics, Vols. 1–4. Academic Press, New York (1981)
- [Sauvigny 2004] Sauvigny, F.: Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik. Vol. 1: Grundlagen und Integraldarstellungen. Vol. 2: Funktionalanalytische Lösungsmethoden. Springer, Berlin (2004)
- [Schechter 1971] Schechter, M.: Principles of Functional Analysis. Academic Press, New York (1971)
- [Schechter 1982] Schechter, M.: Operator Methods in Quantum Mechanics. North-Holland, Amsterdam (1982)
- [Thirring 1997] Thirring, W.: Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Fields. 3rd edition, Springer, New York (1997). Ursprüngliche deutsche Ausgabe: Lehrbuch der mathematischen Physik. Bd. 1, 2. Springer, Wien (1977)

- [Thirring 2002] Thirring, W.: Quantum Mathematical Physics: Atoms, Molecules, and Large Systems. 2nd edition, Springer, New York (2002) Ursprüngliche deutsche Ausgabe: Lehrbuch der mathematischen Physik. Bd. 3, 4. Springer, Wien (1977)
- [Triebel 1980] Triebel, H.: Höhere Analysis. 2. Auflage. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1980)
- [Yosida 1960] Yosida, K.: Lectures on Differential- and Integral Equations. Transl. from the Japanese. Interscience Publishers, New York (1960)
- [Yosida 1995] Yosida, K.: Functional Analysis. 7th edition. Springer, New York (1995)
- [Zeidler 1984ff] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Vol. I: Fixed-Point Theory, 3rd edition 1998; Vol. II A: Linear Monotone Operators, 2nd edition 1997; Vol. II B: Nonlinear Monotone Operators; Vol. III: Variational Methods and Optimization; Vol. IV: Applications to Mathematical Physics, 2nd edition 1995, Springer, New York (1984ff)
- [Zeidler 1995] Zeidler, E.: Introduction to Applied Functional Analysis. Vol. 1: Applications to Mathematical Physics. Vol. 2: Main Principles and their Applications. Springer, New York (1995)

KAPITEL 12

NICHTLINEARE FUNKTIONALANALYSIS UND IHRE ANWENDUNGEN

In den letzten Jahren ist intensiv auf dem Gebiet der nichtlinearen Funktionalanalysis geforscht worden. Viele der erzielten Resultate wurden durch Anwendungen auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen angeregt.

Herbert Amann¹ (1976)

Die nichtlineare Funktionalanalysis untersucht nichtlineare Operatorgleichungen und Extremalprobleme für Funktionale. Die abstrakten Ergebnisse erlauben zahlreiche Anwendungen auf nichtlineare Integralgleichungen (vgl. 12.1) und nichtlineare partielle Differentialgleichungen (vgl. Kapitel 14).

Wie wir zeigen werden, handelt es sich bei den Aussagen der nichtlinearen Funktionalanalysis um weitgehende Verallgemeinerungen von sehr anschaulichen Sachverhalten für reelle Funktionen in einer oder zwei Veränderlichen. Spezialisiert man die folgenden Resultate auf endlichdimensionale Banachräume $X = \mathbb{R}^n$, dann erhält man zugleich eine Reihe von zentralen Aussagen für nichtlineare Gleichungssysteme (endlich viele Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten).

Als elementare Einführung in die angewandte lineare und nichtlineare Funktionalanalysis empfehlen wir [Zeidler 1995]. Eine umfassende Darstellung der nichtlinearen Funktionalanalysis zusammen mit zahlreichen Anwendungen in der Mathematik, den Naturwissenschaften und der mathematischen Ökonomie findet man in [Zeidler 1984ff, Vols. I–IV].

12.1 Fixpunktsätze und ihre Anwendungen auf Differential- und Integralgleichungen

Unter einem Fixpunkt des Operators F versteht man eine Lösung der Gleichung

$$u = F(u), \quad u \in M. \tag{12.1}$$

12.1.1 Der Fixpunktsatz von Banach und Iterationsverfahren

Wir wollen die Gleichung (12.1) durch das Iterationsverfahren

$$u_{n+1} = F(u_n), \quad u_0 \in M, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{12.2}$$

lösen.

¹Professor Amann (Universität Zürich) hat wesentliche Beiträge zur Entwicklung der modernen Funktionalanalysis geleistet.

Fixpunktsatz von Banach: Der Operator $F : M \rightarrow M$ bilde die abgeschlossene nichtleere Teilmenge M eines vollständigen metrischen Raumes (z. B. eines Banachraumes) k -kontraktiv in sich ab, d. h., es ist

$$d(Fu, Fv) \leq kd(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in M \text{ und festes } k \in [0, 1),$$

wobei $d(\dots)$ die Metrik bezeichnet. Dann gilt:

(i) *Existenz und Eindeutigkeit.* Der Operator F besitzt genau einen Fixpunkt auf M , d. h., die Gleichung (12.1) besitzt genau eine Lösung u .

(ii) *Fehlerabschätzungen.* Für $n = 0, 1, \dots$ hat man die *a priori* Fehlerabschätzung

$$d(u_{n+1}, u) \leq k^n(1-k)^{-1}d(u_0, u_1)$$

und die *a posteriori* Fehlerabschätzung

$$d(u_{n+1}, u) \leq k(1-k)^{-1}d(u_n, u_{n+1}).$$

(iii) *Konvergenzgeschwindigkeit.* Das Iterationsverfahren konvergiert linear, d. h., es gilt $d(u_{n+1}, u) \leq kd(u_n, u)$ für alle n .

► **BEISPIEL 1** (reelle Funktion): Es sei $M := [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Dann sind alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach erfüllt, falls die Funktion $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ differenzierbar ist mit $|F'(w)| \leq k < 1$ für alle $w \in [a, b]$. Denn dann gilt

$$|F(u) - F(v)| \leq |F'(w)| |u - v| \leq k|u - v| \quad \text{für alle } u, v \in [a, b]$$

bei einem geeignet gewähltem Zwischenwert w . Die eindeutige Lösung u von Gleichung (12.1) entspricht dem Schnittpunkt des Graphen von F mit der Diagonalen (Abb. 12.1(a)).

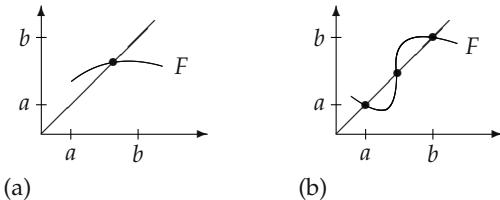


Abb. 12.1

► **STANDARDBEISPIEL 2** (nichtlineare Integralgleichung): Es sei $-\infty < a < b < \infty$. Wir betrachten die Integralgleichung

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, u(y)) dy + f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (12.3)$$

Der Kern $K : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig. Ferner setzen wir voraus, dass es eine Zahl L gibt, so dass

$$|K(x, y, u) - K(x, y, v)| \leq L|u - v| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b], \quad u, v \in \mathbb{R},$$

gilt. Dann besitzt (12.3) für jede reelle Zahl λ mit $|\lambda|L(b-a) < 1$ genau eine Lösung $u \in C[a, b]$. Das Iterationsverfahren

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, u_n(y)) dy + f(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

mit $u_0 \equiv 0$ konvergiert in $C[a, b]$ gegen u , d.h., es gilt

$$\|u_n - u\| := \max_{a \leq x \leq b} |u_n(x) - u(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dieses Resultat ist ein Spezialfall des Fixpunktsatzes von Banach mit $M := C[a, b]$ (Banachraum der auf $[a, b]$ stetigen Funktionen) und

$$(Fu)(x) := \lambda \int_a^b K(x, y, u(y)) dy + f(x).$$

Dann wird M durch F in sich abgebildet, und für alle $u, v \in M$ mit $k := |\lambda|L(b-a)$ gilt

$$\|Fu - Fv\| = \max_{a \leq x \leq b} |(Fu)(x) - (Fv)(x)| \leq k \max_{a \leq x \leq b} |u(x) - v(x)| = k\|u - v\|.$$

► **STANDARDBEISPIEL 3** (gewöhnliche Differentialgleichung): Für das Anfangswertproblem

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(x_0) = y_0, \tag{12.4}$$

setzen wir voraus, dass die reelle Funktion f auf dem Quadrat $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r\}$ stetig ist mit $|f(x, y)| \leq M$ für alle $(x, y) \in Q$. Ferner gebe es eine Konstante L , so dass

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v| \quad \text{für alle } (x, u), (x, v) \in Q$$

gilt. Dann besitzt (12.4) auf dem Intervall $[x_0 - h, x_0 + h]$ genau eine Lösung, falls $h > 0$ hinreichend klein ist.

Um das zu erhalten, geht man von (12.4) zur äquivalenten Integralgleichung

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(y, u(y)) dy =: (Fu)(x) \tag{12.5}$$

über und wendet darauf den Fixpunktsatz von Banach an mit

$$M := \{u \in C(J) : \|u - y_0\| \leq r\}, \quad J := [x_0 - h, x_0 + h],$$

wobei h so klein gewählt wird, dass $hM \leq r$ und $k := hL < 1$ gilt. Dann wird M durch F in sich abgebildet, denn

$$\|Fu - y_0\| = \max_{x \in J} \left| \int_{x_0}^x f(y, u(y)) dy \right| \leq hM = r.$$

Ferner ist F auf M k -kontraktiv, denn für alle $u, v \in M$ hat man

$$\begin{aligned} \|Fu - Fv\| &= \max_{x \in J} \left| \int_{x_0}^x (f(y, u(y)) - f(y, v(y))) dy \right| \\ &\leq hL \max_{y \in J} |u(y) - v(y)| = k\|u - v\|. \end{aligned}$$

12.1.2 Der Fixpunktsatz von Schauder und Kompaktheit

Fixpunktsatz von Schauder: Es sei M eine nichtleere beschränkte abgeschlossene konvexe Menge eines Banachraumes X (z. B. eine abgeschlossene Kugel). Dann besitzt jede kompakte Abbildung $F : M \rightarrow M$ einen Fixpunkt.²

Die endlichdimensionale Version dieses Satzes ($X = \mathbb{R}^n$) heißt Fixpunktsatz von Brouwer. Dann wird nur die Stetigkeit von $F : M \rightarrow M$ benötigt.

► **BEISPIEL 4** (reelle Funktion): Es sei $M := [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Ist die Funktion $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig, dann besitzt die Gleichung $u = F(u)$ mit $u \in M$ eine Lösung (Abb. 12.1(b)).

Um diesen Spezialfall des Fixpunktsatzes von Brouwer zu beweisen, sei $G(u) := u - F(u)$. Wegen $a \leq F(u) \leq b$ für alle $u \in [a, b]$ ist $G(a) \leq 0$ und $G(b) \geq 0$. Somit besitzt die stetige Funktion $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano eine Nullstelle.

► **STANDARDBEISPIEL 5** (nichtlineare Integralgleichung): Benutzt man anstelle des Fixpunktsatzes von Banach den Fixpunktsatz von Schauder, dann erhält man die Existenzaussagen der Standardbeispiele 2 und 3, ohne dass die Lipschitzbedingungen für K und f vorausgesetzt werden müssen. In diesem Fall ergeben sich jedoch keine Eindeutigkeitsaussagen.

Fixpunktsatz von Tychonov: Es sei M eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes (z. B. eines normierten Raumes). Dann besitzt jede stetige Abbildung $F : M \rightarrow M$ einen Fixpunkt.

12.1.3 Der Fixpunktsatz von Bourbaki–Kneser und Halbordnung

Eine nichtleere Menge heißt genau dann *halbgeordnet*, wenn für gewisse Paare (u, v) mit $u, v \in M$ eine Relation „ $u \leq v$ “ besteht, die folgende Eigenschaften hat:

- (i) $u \leq u$ für alle $u \in M$;
- (ii) aus $u \leq v$ und $v \leq u$ folgt $u = v$;
- (iii) aus $u \leq v$ und $v \leq w$ folgt $u \leq w$.

Eine nichtleere Teilmenge N von M heißt genau dann eine Kette, wenn für alle $u, v \in N$ stets $u \leq v$ oder $v \leq u$ gilt.

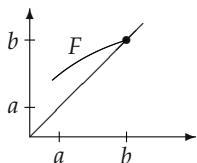


Abb. 12.2

Fixpunktsatz von Bourbaki–Kneser: Die Abbildung $F : M \rightarrow M$ der halbgeordneten Menge M in sich hat einen Fixpunkt, falls $u \leq F(u)$ für alle $u \in M$ gilt und jede Kette von M eine kleinste obere Schranke besitzt (Abb. 12.2).

Zahlreiche Anwendungen dieses Fixpunktsatzes auf wichtige mengentheoretische Aussagen (z. B. das Lemma von Zorn) und Operatorgleichungen findet man in [Zeidler 1984ff, Vol. I, Kap. 11].

²Der Operator $F : M \rightarrow M$ heißt genau dann kompakt, wenn er stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.

12.2 Die Methode der Unter- und Oberlösungen, Iterationsverfahren in halbgeordneten Banachräumen

Eine nichtleere Teilmenge K eines reellen Banachraumes X heißt genau dann ein *Ordnungskegel*, wenn gilt:

- (i) K ist konvex und $K \neq \{0\}$;
- (ii) aus $\lambda \geq 0$ und $u \in K$ folgt $\lambda u \in K$;
- (iii) aus $u \in K$ und $-u \in K$ folgt $u = 0$.

Wir schreiben dann $u \leq v$ anstelle von $v - u \in K$. Ferner heißt K genau dann normal, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass aus $0 \leq u \leq v$ stets $\|u\| \leq c\|v\|$ folgt.

Um die Operatorgleichung

$$u = F(u), \quad u \in X, \quad (12.6)$$

zu lösen, betrachten wir die beiden Iterationsverfahren

$$u_{n+1} = F(u_n), \quad v_{n+1} = F(v_n), \quad n = 0, 1, \dots . \quad (12.7)$$

Konvergenzsatz: Der Operator $F : X \rightarrow X$ sei kompakt und monoton wachsend (d. h., aus $u \leq v$ folgt $F(u) \leq F(v)$) auf dem reellen Banachraum X mit dem normalen Ordnungskegel K . Ferner sei

$$u_0 \leq F(u_0) \quad \text{und} \quad v_0 \geq F(v_0),$$

d. h., u_0 ist eine Unterlösung und v_0 ist eine Oberlösung von (12.6).

Dann konvergiert (u_n) gegen einen Fixpunkt u von F , und (v_n) konvergiert gegen einen Fixpunkt v von F . Ferner hat man die Fehlerabschätzung

$$u_n \leq u \leq v \leq v_n \quad \text{für alle } n = 0, 1, \dots .$$

Beim Beweis dieses Satzes wird der Fixpunktsatz von Schauder benutzt.

► **BEISPIEL 1** (nichtlineare Integralgleichung): Es sei $-\infty < a < b < \infty$. Wir betrachten die Integralgleichung

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(u(y)) dy =: (Fu)(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (12.8)$$

mit dem stetigen Kern $G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ und der stetigen, monoton wachsenden Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wählen $X := C[a, b]$ und $K := \{u \in X : u(x) \geq 0 \text{ auf } [a, b]\}$. Dann hat man

$$u \leq v \quad \text{genau dann, wenn} \quad u(x) \leq v(x) \quad \text{auf } [a, b].$$

Wir brauchen nun lediglich vorauszusetzen, dass es zwei Funktionen $u_0, v_0 \in X$ gibt mit $u_0(x) \leq (Fu_0)(x)$ und $v_0(x) \geq (Fv_0)(x)$ auf $[a, b]$. Dann konvergieren die beiden Iterationsverfahren (12.7) in X gegen Lösungen $u, v \in X$ von (12.8).

12.3 Differentiation von Operatoren

Die erste Ableitung eines Operators entspricht seiner *Linearisierung*. Höhere Ableitungen ergeben sich durch Linearisierung der vorangegangenen Ableitungen. Das ist äquivalent zum Prozess der Multilinearisierung. Wir nehmen an, dass der Operator

$$F : U(u_0) \subseteq X \rightarrow Y \quad (12.9)$$

auf einer offenen Umgebung des Punktes u_0 erklärt ist, wobei X und Y Banachräume über \mathbb{K} sind.

Fréchetableitung: Der Operator F besitzt definitionsgemäß im Punkt u_0 genau dann eine Fréchetableitung $F'(u_0)$, wenn es einen *linearen stetigen Operator* $F'(u_0) : X \rightarrow Y$ gibt mit

$$F(u_0 + h) - F(u_0) = F'(u_0)h + \varepsilon(h)\|h\| \quad (12.10)$$

für alle $h \in X$ mit $\|h\| < r$ und $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ in Y für $h \rightarrow 0$.

Die Fréchetableitung $F'(u_0)$ ist durch F eindeutig bestimmt. Aus (12.10) folgt speziell die Stetigkeit von F im Punkt u_0 .

► **BEISPIEL 1:** Im Spezialfall einer reellen Funktion (d.h. $X = Y = \mathbb{R}$) stimmt die klassische Ableitung mit der Fréchetableitung überein.

Der folgende Satz ist bequem für die Berechnung der Ableitung.

Satz: Existiert die Fréchetableitung $F'(u)$ und setzen wir $\varphi(t) := F(u_0 + th)$, wobei t eine kleine reelle Zahl bezeichnet, dann gilt

$$F'(u_0)h = \varphi'(0).$$

► **BEISPIEL 2** (Integraloperator): Wir setzen

$$(Fu)(x) := \int_a^b G(x, y)f(u(y)) dy, \quad -\infty < a \leq x \leq b < \infty. \quad (12.11)$$

Die Funktion $G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei C^1 . Dann besitzt der Operator $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ in jedem Punkt $u \in C[a, b]$ die Fréchetableitung $F'(u)$ mit

$$(F'(u)h)(x) = \int_a^b G(x, y)f'(u(y))h(y) dy \quad \text{auf } [a, b]$$

für alle $h \in C[a, b]$. Formal erhält man diesen Ausdruck, indem man in (12.11) die Funktion u durch $u + th$ ersetzt und an der Stelle $t = 0$ nach t differenziert.

Multilineare beschränkte Operatoren: Der Operator $M : X \times \dots \times X \rightarrow Y$ (n Faktoren) heißt genau dann n -linear und beschränkt, wenn er in jedem Argument linear ist und eine Konstante $c \geq 0$ existiert, so dass

$$\|M(u_1, \dots, u_n)\| \leq c\|u_1\| \|u_2\| \cdots \|u_n\|$$

für alle $u_1, \dots, u_n \in X$ gilt. Die kleinste mögliche Konstante c bezeichnen wir als die Norm $\|M\|$ der n -Linearform M .

Höhere Fréchetableitungen: Wir nehmen an, dass für alle u in einer offenen Umgebung von u_0 die Fréchetableitung $F'(u) : X \rightarrow Y$ existiert. Definitionsgemäß existiert genau dann die zweite Fréchetableitung $F''(u_0)$, wenn es einen *bilinearen beschränkten Operator* $F''(u_0) : X \times X \rightarrow Y$ gibt mit

$$F'(u_0 + h)k - F'(u_0)k = F''(u_0)(h, k) + \varepsilon(h)\|h\| \|k\|$$

für alle $h, k \in X$ mit $\|h\| < r$ und $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ in Y für $h \rightarrow 0$. Wir schreiben dafür kurz $F''(u_0)hk$. Höhere Fréchetableitungen werden analog definiert.

Der Operator F heißt vom Typ C^r auf einer offenen Menge U , wenn die Fréchetableitungen $F'(u), F''(u), \dots, F^r(u)$ für alle $u \in U$ existieren und auf U stetig sind (bezüglich der Norm von n -Linearformen).

► **BEISPIEL 3:** Für reelle Funktionen stimmen die klassischen höheren Ableitungen mit den entsprechenden höheren Fréchetableitungen überein.

► **BEISPIEL 4:** Der Operator $F : U \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $F = (F_1, \dots, F_m)$ und $u = (u_1, \dots, u_N)$ ist vom Typ C^r auf der offenen Menge U , falls alle Funktionen F_j stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung r auf U besitzen. Dann gilt

$$F'(u)h = (F'_1(u)h, \dots, F'_m(u)h), \quad F''(u)hk = (F''_1(u)hk, \dots, F''_m(u)hk)$$

für alle $u \in U$ und alle $h, k \in \mathbb{R}^N$ mit

$$F'_i(u)h = \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i(u)}{\partial u_j} h_j, \quad F''_i(u)hk = \sum_{j,s=1}^N \frac{\partial^2 F_i(u)}{\partial u_j \partial u_s} h_j k_s.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für $F^{(3)}(u)$. Speziell ist

$$F'(u) = (\partial F_i(u) / \partial u_j),$$

d. h., $F'(u)$ entspricht der Funktionalmatrix.

► **BEISPIEL 5:** Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Typ C^2 , dann ist auch der Integraloperator aus (12.11), $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, vom Typ C^2 mit

$$(F''(u)hk)(x) = \int_a^b G(x, y) f''(u(y)) h(y) k(y) dy \quad \text{auf } [a, b]$$

für alle $h, k \in C[a, b]$.

Der Taylorsche Satz: Der Operator F in (12.9) sei vom Typ C^r auf einer konvexen offenen Umgebung U des Punktes u_0 . Dann gilt für alle $u_0 + h \in U$ die Zerlegung

$$F(u_0 + h) = F(u_0) + \sum_{s=1}^r \frac{1}{s!} F^{(s)}(u_0) h^s + R$$

mit dem Restglied $R = \varepsilon(h) \|h\|^r$, wobei $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ in Y für $h \rightarrow 0$ gilt. Wir schreiben dabei $F^{(2)}(u_0)h^2 := F^{(2)}(u_0)hh$ usw.

12.4 Das Newtonverfahren

Wir betrachten den Operator $F : U(u_0) \subseteq X \rightarrow Y$ aus (12.9). Um die Operatorgleichung $F(u) = 0$ zu lösen, benutzen wir das Iterationsverfahren

$$F'(v_n)v_{n+1} = F'(v_n)v_n - F(v_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{12.12}$$

das man das (abstrakte) Newtonverfahren nennt. Vorausgesetzt wird, dass die Fréchetableitung $F'(v_n) : X \rightarrow Y$ für alle auftretenden Iterationswerte v_n bijektiv ist, so dass sich v_{n+1} nach (12.12) eindeutig berechnen lässt. Formal erhält man (12.12) aus der Taylorentwicklung

$$F(v_{n+1}) = F(v_n) + F'(v_n)(v_{n+1} - v_n) + \dots,$$

wobei man die Terme \dots weglässt und näherungsweise $F(v_{n+1}) = 0$ setzt. Generell gilt:

- (i) Ist die Anfangsnäherung v_0 hinreichend gut, dann konvergiert das Newtonverfahren sehr rasch (quadratische Konvergenz).
- (ii) Bei schlechter Anfangsnäherung kann es sein, dass das Newtonverfahren überhaupt nicht konvergiert.

Das Iterationsverfahren

$$F'(v_0)v_{n+1} = F'(v_0)v_n - F(v_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

bezeichnet man als die *vereinfachte Newtonmethode*. Im Unterschied zu (12.12) braucht man den inversen Operator $F'(v_0)^{-1}$ hier nur im Anfangspunkt zu kennen, was jedoch in der Regel zu einer langsameren Konvergenz führt.

► **BEISPIEL 1:** Setzen wir $F(u) := \frac{1}{2}(\cos(u/2) - |u - \frac{1}{2}|)$, und wählen wir die Anfangsnäherung $v_0 := 0,5$, dann erhalten wir nach (12.12)

$$v_3 = 0,47225\,15914\,59193.$$

Benutzen wir dagegen das einfache Iterationsverfahren $u_{n+1} = F(u_n)$ mit $u_0 = v_0$, dann ergibt sich

$$u_{26} = 0,47225\,15914\,75369, \quad u_{27} = 0,47225\,15914\,66336.$$

Das demonstriert die viel raschere (quadratische) Konvergenz des Newtonverfahrens gegenüber dem einfachen (linear konvergenten) Iterationsverfahren.

► **BEISPIEL 2** (Gleichungssystem): Das Newtonverfahren (12.12) für das System

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0,$$

lautet

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - F'(x_n, y_n)^{-1} \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

mit

$$F'(u) = \begin{pmatrix} f_x(u) & f_y(u) \\ g_x(u) & g_y(u) \end{pmatrix}.$$

Für $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ und $g(x, y) := 10x^2 - x^3 + xy - 10y + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x_0 = y_0 &:= 0,7, & x_1 &= 0,748\,196, & y_1 &= 0,665\,202, \\ && x_2 &= 0,746\,523, & y_2 &= 0,666\,420, \\ && x_3 &= 0,746\,521, & y_3 &= 0,665\,362, \\ && x_4 &= \underline{0,746\,521}, & y_4 &= \underline{0,665\,362}. \end{aligned}$$

Als Faustregel bewährt sich, dass die Lösung den sich stabilisierenden Stellen entspricht. Um genaue Fehlerabschätzungen zu erhalten, kann man eine Newtonnäherung als Ausgangspunkt für ein einfaches Iterationsverfahren benutzen und dann die Fehlerabschätzungen des Fixpunktsatzes von Banach verwenden (vgl. 12.1.1).

► **BEISPIEL 3** (Integralgleichung): Das Newtonverfahren (12.12) zu der Integralgleichung

$$(Fu)(x) := u(x) - \int_a^b G(x, y)f(u(y)) dy = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

lautet für $n = 0, 1, 2, \dots$ und $v_0(x) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) - \int_a^b G(x, y)f'(v_n(y))v_{n+1}(y) dy \\ = - \int_a^b G(x, y)f'(v_n(y))v_n(y) dy + \int_a^b G(x, y)f(v_n(y)) dy. \end{aligned}$$

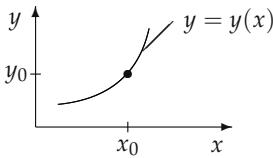
In jedem Iterationsschritt hat man hier eine *lineare* Integralgleichung für v_{n+1} zu lösen.

12.5 Der Satz über implizite Funktionen

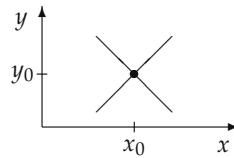
Wir wollen zunächst Bedingungen angeben, die die eindeutige *lokale* Auflösbarkeit der Operator-Gleichung

$$F(x, y) = 0, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (12.13)$$

sichern, d.h., durch den Punkt (x_0, y_0) geht lokal genau eine Lösungskurve $y = y(x)$. Im Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$ ist die Situation in Abbildung 12.3(a) dargestellt. In diesem Abschnitt bezeichnen X, Y und Z Banachräume über \mathbb{K} .



(a)



(b) Bifurkation

Abb. 12.3

Satz über implizite Funktionen: Wir setzen folgendes voraus:

(i) Die Abbildung $F : U \rightarrow Z$ ist C^1 auf einer offenen Umgebung U des Punktes (x_0, y_0) in $X \times Y$.

(ii) Der Punkt (x_0, y_0) ist eine Lösung von (12.13), d.h. $F(x_0, y_0) = 0$.

(iii) Die partielle Fréchetableitung³ $F_y(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z$ ist bijektiv, d.h., es existiert der inverse Operator $F_y(x_0, y_0)^{-1} : Z \rightarrow Y$.

Dann gibt es Zahlen $r > 0$ und $\varrho > 0$, so dass die Gleichung (12.13) für jedes $x \in X$ mit $\|x - x_0\| < r$ genau eine Lösung $y \in Y$ besitzt, die

$$\|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \varrho$$

genügt. Bezeichnen wir diese Lösung mit $y(x)$, dann ist $x \mapsto y(x)$ eine C^1 -Abbildung mit der Fréchetableitung

$$y'(x) = -F_y(x, y(x))^{-1} F_x(x, y(x))$$

für alle $x \in X$ mit $\|x - x_0\| < r$.

► **BEISPIEL 1:** Die reelle Gleichung

$$F(x, y) = y - xy - x + x^2 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

genügt $F(0, 0) = 0$, $F_y(0, 0) = 1$, also $F_y(0, 0) \neq 0$. Deshalb existiert nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ eine eindeutig bestimmte Lösungskurve $y = y(x)$. Explizit ist diese Kurve durch $y = x$ gegeben.

Diffeomorphismen: Unter einem C^r -Diffeomorphismus $f : U \rightarrow V$ verstehen wir eine bijektive Abbildung, wobei f und f^{-1} vom Typ C^r sind und U, V offene Mengen in Banachräumen bezeichnen.

Eine solche Abbildung heißt ein lokaler C^r -Diffeomorphismus im Punkt x_0 , falls U eine offene Umgebung von x_0 und V eine offene Umgebung von $f(x_0)$ ist.

³ $F_y(x_0, y_0)$ entspricht der Fréchetableitung der Abbildung $y \mapsto F(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) .

Der lokale Satz über inverse Abbildungen: Es sei $f : U(x_0) \subseteq X \rightarrow Y$ eine C^r -Abbildung ($r \geq 1$) auf einer offenen Umgebung $U(x_0)$ des Punktes x_0 . In diesem Fall ist f genau dann ein lokaler C^r -Diffeomorphismus in x_0 , wenn die Fréchetableitung $f'(x_0) : X \rightarrow Y$ bijektiv ist.

Eigentliche Abbildungen: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt genau dann eigentlich, wenn Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.

Globaler Satz über inverse Abbildungen: Die C^r -Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $r \geq 2$ ist ein C^r -Diffeomorphismus, falls $f'(x) : X \rightarrow Y$ für alle $x \in X$ bijektiv und f eigentlich ist.

► **BEISPIEL 2:** Im Spezialfall endlichdimensionaler Räume X und Y (z. B. $X = Y = \mathbb{R}^n$) ist f eigentlich, wenn $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ für $\|x\| \rightarrow \infty$ gilt.

Somit ist jede C^1 -Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) \neq 0$ auf \mathbb{R} und $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$ ein C^1 -Diffeomorphismus, d. h., die inverse Abbildung $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert und ist vom Typ C^1 .

12.6 Bifurkationstheorie

Grundidee: Wir sprechen von Bifurkation, falls durch einen Punkt mehrere „Lösungszweige“ einer Gleichung gehen. Beispielsweise hat die Gleichung

$$F(x, y) := (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0$$

den Bifurkationspunkt (x_0, y_0) , denn durch diesen Punkt gehen die beiden Lösungszweige $y = x - x_0$ und $y = -(x - x_0)$ (Abb. 12.3(b)). Wegen $F_y(x_0, y_0) = 0$ ist hier der obige Satz über implizite Funktion *nicht* anwendbar.

In den Naturwissenschaften bedeutet Bifurkation, dass ein System unter einem äußeren Einfluss (d. h. Änderung des „Parameters x “) plötzlich (d. h. für $x = x_0$) seine Stabilität verliert und von einer Gleichgewichtslage in qualitativ neue Gleichgewichtslagen übergeht (z. B. die Ausbeulung von Stäben und Platten unter dem Einfluss äußerer Kräfte). In Abb. 12.5 wird die Ausbeulung eines Stabes unter dem Einfluss des Kraftparameters $x = \mu$ dargestellt (vgl. 12.6.4).

12.6.1 Notwendige Bifurkationsbedingung

Wir setzen voraus:

(H) Der Operator $F : U \rightarrow Z$ genügt den Bedingungen (i) und (ii) des Satzes über implizite Funktionen in 12.5.

Definition: Der Punkt (x_0, y_0) heißt genau dann *Bifurkationspunkt* der Gleichung

$$F(x, y) = 0, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{12.14}$$

wenn sich (12.14) *nicht lokal eindeutig* in einer Umgebung von (x_0, y_0) auflösen lässt. Explizit heißt das folgendes: Für $n = 1, 2, \dots$ gibt es zwei Lösungsfolgen (x_n, y_n) und (x_n, y_n^*) von (12.14) mit

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \text{und} \quad y_n, y_n^* \rightarrow y_0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

sowie $y_n \neq y_n^*$ für $n = 1, 2, \dots$

Satz: Es gelte (H). Besitzt die Gleichung (12.14) den Bifurkationspunkt (x_0, y_0) , dann existiert der inverse Operator $F_y(x_0, y_0)^{-1} : Z \rightarrow Y$ nicht.

Leider ist diese notwendige Bedingung nicht immer hinreichend für das Auftreten einer Bifurkation. Ziel der Bifurkationstheorie ist es, hinreichende Bifurkationsbedingungen bereitzustellen.

12.6.2 Eine wichtige hinreichende Bedingung für Bifurkation

Wir betrachten nunmehr den Spezialfall von (H) mit $X = \mathbb{R}$ (d. h. $x \in \mathbb{R}$) und $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Hauptsatz der generischen Bifurkationstheorie: Die Gleichung (12.14) besitzt den Bifurkationspunkt $(0, 0)$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Der Operator $F : U \rightarrow Z$ ist vom Typ C^2 auf einer offenen Umgebung U des Punktes $(0, 0)$ in $\mathbb{R} \times Y$.
- (ii) $F(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (iii) Der Operator $F_y(0, 0) : Y \rightarrow Z$ ist ein Fredholmoperator vom Index null.
- (iv) Die linearisierte Gleichung $F_y(0, 0)y = 0, y \in Y$, besitzt genau eine linear unabhängige Lösung $y_1 \neq 0$.
- (v) Wegen (iii) folgt aus (iv), dass es genau ein linear unabhängiges, lineares, stetiges Funktional $z^* \neq 0$ auf Z gibt mit $z^*(F_y(0, 0)y) = 0$ für alle $y \in Y$. Wir fordern zusätzlich, dass die sogenannte *Transversalitätsbedingung*

$$z^*(F_{xy}(0, 0)y_1) \neq 0$$

erfüllt ist.

Zusatz: Genauer gibt es dann in einer Umgebung von $(0, 0)$ neben dem trivialen Lösungszweig $y(x) \equiv 0$ von (12.14) noch eine eindeutig bestimmte nichttriviale Lösungskurve, die sich durch die kleine reelle Zahl s parametrisieren lässt:

$$y = y(s) = sy_1 + \dots, \quad x = x(s).$$

Die Punkte bedeuten Terme höherer Ordnung in s (Abb. 12.4).

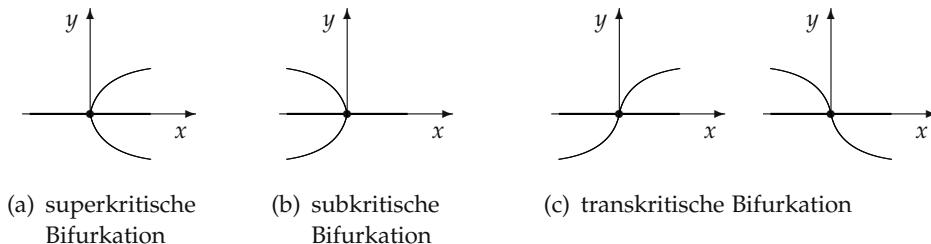


Abb. 12.4

12.6.3 Hinreichende und notwendige Bifurkationsbedingung für Probleme mit Variationsstruktur

Neben dem nichtlinearen Eigenwertproblem

$$\mu f'(y) = y, \quad y \in Y, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (12.15)$$

betrachten wir die Linearisierung an der Stelle $\mu = \mu_0, y = 0$:

$$\mu_0 f''(0)y = y, \quad y \in Y, \quad \mu_0 \in \mathbb{R}. \quad (12.16)$$

Wir setzen voraus, dass gilt:

(i) Das Funktional $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ist hinreichend glatt (d.h. vom Typ C^2) in einer offenen Umgebung von $y = 0$ des reellen Hilbertraumes Y . Ferner ist $f'(0) = 0$.

(ii) Der Operator $f' : Y \rightarrow Y$ ist kompakt.⁴

Satz: Der Punkt $(\mu_0, 0)$ ist genau dann Bifurkationspunkt des Ausgangsproblems (12.15), wenn das linearisierte Problem (12.16) eine nichttriviale Lösung $y \neq 0$ besitzt.

12.6.4 Stabilitätsverlust und Bifurkation

Probleme vom Typ (12.15) treten im Zusammenhang mit Variationsproblemen auf (z.B. in der Elastizitätstheorie bei der Ausbeulung von Stäben und Platten). Dann stellt μ_0 die kritische Kraft dar, für die eine Ausbeulung auftritt (Abb. 12.5). Diese kritischen Kräfte ergeben sich nach dem obigen Satz genau als Lösungen eines linearen Eigenwertproblems. Das erleichtert wesentlich die Berechnung der kritischen Kräfte.

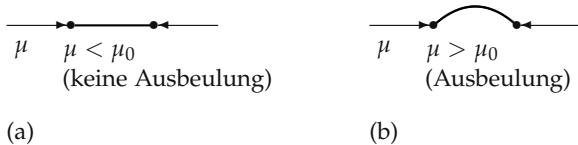


Abb. 12.5

An einer einfachen Modellgleichung wollen wir erläutern, wie in der Elastizitätstheorie Ausbeulungseffekte durch Stabilitätsverlust einer Gleichgewichtslage entstehen können.

► **BEISPIEL:** Wir gehen aus von dem Minimumproblem

$$U(y, \mu) := \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)y^2 - \frac{1}{4}y^4 = \min !, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion U interpretieren wir als potentielle Energie des Zustandes y , der durch den reellen Kraftparameter μ beeinflusst werden kann. Nach dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie sind alle Zustände stabil, die strengen Minima von U entsprechen, d.h. die Bedingung

$$U_y(y, \mu) = 0, \quad U_{yy}(y, \mu) < 0,$$

erfüllen. Die Gleichung $U_y(y, \mu) = (\mu - \mu_0)y - y^3 = 0$ hat die folgenden beiden Lösungen (Abb. 12.6):

- (a) $y = 0, \mu =$ beliebig („undeformierter Zustand“);
- (b) $\mu = \mu_0 + y^2$ („deformierter Zustand“).

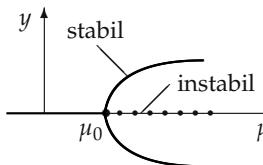


Abb. 12.6

Setzen wir (a) in $U_{yy} = \mu - \mu_0 - 3y^2$ ein, dann erhalten wir:

$$U_{yy} = \mu - \mu_0 \begin{cases} < 0 & \text{für } \mu < \mu_0 \text{ (Stabilität),} \\ > 0 & \text{für } \mu > \mu_0 \text{ (Instabilität).} \end{cases}$$

⁴Es gilt $f(u+h) - f(u) = (f'(u), h) + \varepsilon(h)\|h\|$ mit $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ in Y für $h \rightarrow 0$.

Analog ergibt sich für die Lösung (b):

$$U_{yy} = -2y^2 < 0 \quad \text{für } y \neq 0.$$

Somit entsteht die in Abb. 12.6 dargestellte Stabilitätsfunktion, die wir grob physikalisch folgendermaßen interpretieren können (Abb. 12.5):

- (i) Für unterkritische Kräfte $\mu < \mu_0$ ist der nicht ausgebeulte Zustand des Stabes stabil.
- (ii) Dieser Zustand verliert für $\mu > \mu_0$ seine Stabilität, und ein stabiler ausgebeulter Zustand erscheint für $\mu > \mu_0$, der von der Größe der Kraft μ abhängt.

12.6.5 Die allgemeine Methode der Bifurkationsgleichung (Methode von Ljapunov–Schmidt)

Grundidee: Um die Bifurkationslösungen zu berechnen, kann man das Bifurkationsproblem in vielen Fällen auf die Lösung einer sogenannten *Bifurkationsgleichung* zurückführen, die weniger Dimensionen als das Ausgangsproblem hat und im Fall von Operatorgleichungen den Vorzug besitzt, endlichdimensional zu sein. Die Bifurkationsgleichung beschreibt allein das wesentliche Bifurkationsverhalten. Dem entspricht bei dynamischen Systemen die Vereinfachung mit Hilfe der Zentrumsmannigfaltigkeit (vgl. 13.6).

► **BEISPIEL:** Wir suchen eine Lösung $y = (u, v)$ des Systems

$$pu - v^2 = 0, \quad u, v, p \in \mathbb{R}, \quad (12.17)$$

$$v - p = 0. \quad (12.18)$$

Hierzu lösen wir zunächst (12.18) und setzen die Lösung $v = p$ in (12.17) ein. Das ergibt die Bifurkationsgleichung

$$p(u - p) = 0 \quad (12.19)$$

mit der trivialen Lösung (a) $p = 0, u = \text{beliebig}$ und der nichttrivialen Lösung (b) $u = p$. Insgesamt erhalten wir die triviale Lösung

$$p = 0, \quad u = \text{beliebig}, \quad v = 0,$$

und die nichttriviale Lösung

$$p = \text{beliebig}, \quad u = p, \quad v = p.$$

Die Projektionsmethode: Neben dem Ausgangsproblem

$$F(p, y) = 0, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad y \in Y, \quad (12.20)$$

mit $F(p, 0) = 0$ für alle p betrachten wir das linearisierte Problem

$$F_y(0, 0)y = 0, \quad y \in Y. \quad (12.21)$$

Hier sei $F : \mathbb{R}^n \times Y \rightarrow Z$ ein C^1 -Operator, wobei Y und Z reelle Hilberträume bezeichnen. Wesentlich sind der Lösungsraum L von (12.21) und der Bildraum R von $F_y(0, 0) : Y \rightarrow Z$. Ist $F_y(0, 0)$ ein Fredholmoperator, dann sind sowohl L als auch das orthogonale Komplement R^\perp endlichdimensional. Wir wählen orthogonale Projektionsoperatoren

$$P : Y \rightarrow L \quad \text{und} \quad Q : Z \rightarrow R^\perp$$

und betrachten anstelle des Ausgangsproblems (12.20) das äquivalente Problem

$$QF(p, u + v) = 0, \quad (12.22)$$

$$(I - Q)F(p, u + v) = 0, \quad (12.23)$$

mit $u = Py, v = (I - P)y$. Dann folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass sich (12.23) in einer Umgebung des Punktes $p = 0, u = 0, v = 0$ eindeutig nach v auflösen lässt:

$$v = v(u, p).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (12.22) ein, dann ergibt sich die sogenannte *Bifurkationsgleichung*

$$QF(p, u + v(u, p)) = 0. \quad (12.24)$$

Ist $u = u(p)$ eine Lösung von (12.24), dann stellt

$$y = u(p) + v(u(p), p)$$

eine Lösung des Ausgangsproblems (12.20) dar.

Um zu sehen, dass (12.24) ein *endlichdimensionales* Gleichungssystem darstellt, wählen wir eine orthonormierte Basis $\{b_j\}$ (bzw. $\{c_k\}$) in L (bzw. R^\perp). Dann gilt

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad u = \sum_{j=1}^r u_j b_j, \quad Qf = \sum_{k=1}^s (c_k, f) c_k,$$

mit $r = \dim L$ und $s = \dim R^\perp$. Folglich ist (12.24) äquivalent zu dem System

$$(c_k, F(p, u + v(u, p))) = 0, \quad k = 1, \dots, s. \quad (12.25)$$

Da (\cdot, \cdot) das Skalarprodukt auf Z bezeichnet, sind das s reelle Gleichungen für die Unbekannten $p_1, \dots, p_n, u_1, \dots, u_r$.

In Banachräumen muss man lediglich die orthogonalen Projektionsoperatoren durch allgemeine Projektionsoperatoren ersetzen.

12.7 Extremalprobleme

12.7.1 Minimumprobleme

Bei der Untersuchung von Extremalaufgaben spielen konvexe bzw. konkave Funktionale eine wichtige Rolle.

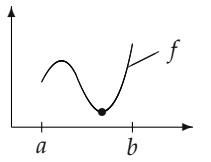
Definition: Das Funktional $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann *konvex*, wenn M eine konvexe Teilmenge eines linearen Raumes ist und

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) \quad (12.26)$$

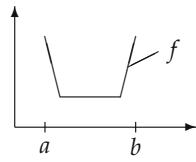
für alle $u, v \in M$ und alle reelle Zahlen λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt (Abb. 12.7(b)). Erfüllt f die stärkere Bedingung

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) < \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$$

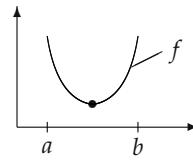
für alle $u, v \in M$ mit $u \neq v$ und alle reellen Zahlen λ mit $0 < \lambda < 1$, dann heißt f *streng konvex* (Abb. 12.7(c)).



(a)



(b) konvex



(c) streng konvex

Abb. 12.7

Das Funktional f heißt genau dann *konkav* (bzw. *streng konkav*), wenn $-f$ konvex (bzw. streng konvex) ist.

Erster Hauptsatz für Minimumprobleme: Die Aufgabe

$$f(u) = \min !, \quad u \in M, \quad (12.27)$$

besitzt eine Lösung, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) M ist eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge eines reellen reflexiven Banachraumes X (z. B. X ist ein reeller Hilbertraum).

(ii) Das Funktional $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist schwach folgenunterhalbstetig, d. h., ist (u_n) eine Folge aus M , die schwach gegen u konvergiert, dann gilt (vgl. 1.2.4.3.)

$$f(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n).$$

(iii) Ist M unbeschränkt, dann gilt

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty,$$

d. h., zu jedem $R > 0$ existiert ein $r > 0$, so dass aus $u \in M$ mit $\|u\| \geq r$ stets $f(u) \geq R$ folgt.

Dieser Hauptsatz verallgemeinert den folgenden klassischen Satz von Weierstraß: Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ besitzt ein Minimum (Abb. 12.7(a)).

► **BEISPIEL** (konvexe Minimumprobleme): Wir nehmen an, dass die Bedingungen (i) und (iii) erfüllt sind und das Funktional $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und konvex ist. Dann gilt (ii), und das Minimumproblem (12.27) besitzt eine Lösung (Abb. 12.7(b)).

Diese Lösung ist eindeutig, falls f streng konvex auf M ist (Abb. 12.7(c)).

Die folgende Definition beschäftigt sich mit der Differentiation von Funktionalen.

Definition: Das Funktional $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf einer offenen Menge U eines reellen normierten Raumes erklärt, die den Punkt u_0 enthält. Wir setzen

$$\varphi(t) := f(u_0 + th), \quad t \in \mathbb{R}, \quad h \in X,$$

und definieren die n -te Variation $\delta^n f(u_0; h)$ des Funktionals f im Punkt u_0 in Richtung von h durch

$$\delta^n f(u_0; h) := \varphi^{(n)}(0),$$

falls die n -te Ableitung $\varphi^{(n)}(0)$ der reellen Funktion φ im Punkt $t = 0$ existiert.

Existiert die Fréchetableitung $f'(u_0)$, dann existiert auch die erste Variation von f im Punkt u_0 , und es gilt

$$\delta f(u_0; h) = f'(u_0)h \quad \text{für alle } h \in X.$$

Der folgende Satz verallgemeinert klassische Resultate über den Zusammenhang zwischen lokalen Minima und den Ableitungen reeller Funktionen. Definitionsgemäß besitzt f genau dann im Punkt u_0 ein lokales Minimum, falls

$$f(u_0 + h) \geq f(u_0)$$

für alle $h \in X$ mit $\|h\| < \varrho$ gilt, wobei ϱ eine feste positive Zahl ist.

Satz: Gegeben sei das Funktional $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) *Notwendige Bedingung.* Besitzt f im Punkt u_0 ein lokales Minimum, dann gilt

$$\delta f(u_0; h) = 0 \quad \text{für alle } h \in X. \quad (12.28)$$

Existiert die Fréchetableitung, dann ist (12.28) äquivalent zur sogenannten *Eulergleichung*

$$f'(u_0) = 0. \quad (12.29)$$

(ii) *Hinreichende Bedingung.* Gilt (12.28), dann hat f ein lokales Minimum im Punkt u_0 , falls

$$\delta^2 f(u_0; h) \geq c \|h\|^2 \quad \text{für alle } h \in X$$

mit einer Konstanten $c > 0$ gilt und $\delta^2 f$ im Punkt u_0 stetig ist, d. h., zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein

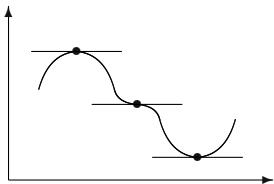


Abb. 12.8

$\delta(\varepsilon) > 0$, so dass aus $\|u - u_0\| < \delta(\varepsilon)$ und $h \in X$ stets

$$|\delta^2 f(u; h) - \delta^2 f(u_0; h)| \leq \varepsilon \|h\|^2$$

folgt.

Definition: Gilt (12.28), dann sagt man, dass u_0 ein kritischer Punkt für das Funktional f ist.

In Abb. 12.8 entsprechen die kritischen Punkte genau allen Punkten mit horizontaler Tangente.

Zweiter Hauptsatz für Minimumprobleme: Es sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Fréchet-differenzierbares Funktional auf dem reellen Banachraum X . Dann besitzt das Minimumproblem

$$f(u) = \min !, \quad u \in X,$$

eine Lösung, falls gilt:

(i) f ist auf X nach unten beschränkt;

(ii) f genügt der *Palais-Smale Bedingung*, d. h., jede Folge (u_n) in X mit

$$\|f'(u_n)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und $\sup_n |f(u_n)| < \infty$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

12.7.2 Sattelpunktprobleme

Von Neumann's Minimaxtheorem: Das Sattelpunktproblem

$$\min_{u \in A} \max_{v \in B} f(u, v) = \max_{v \in B} \min_{u \in A} f(u, v) = f(u_0, v_0)$$

besitzt eine Lösung $(u_0, v_0) \in A \times B$, falls gilt:

- (i) A (bzw. B) ist eine nichtleere abgeschlossene beschränkte konvexe Menge in dem reellen reflexiven Banachraum X (bzw. Y).
- (ii) Die Abbildung $u \mapsto f(u, v)$ ist konvex und stetig auf A für jedes $v \in B$.
- (iii) Die Abbildung $v \rightarrow f(u, v)$ ist konkav und stetig auf B für jedes $u \in A$.

12.7.3 Das Gebirgspasstheorem

Das Funktional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt einen kritischen Punkt u_0 mit $F(u_0) = c$, d.h., die Gleichung $F'(u) = 0$ besitzt eine Lösung u_0 , falls die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

- (i) X ist ein reeller Banachraum, und das C^1 -Funktional F genügt der Palais–Smale Bedingung (vgl. 12.7.1).
- (ii) Es gibt positive Konstanten R und α , so dass $F(u) \geq \alpha$ für alle $u \in X$ mit $\|u\| = R$ gilt.
- (iii) Es gibt einen Punkt v mit $\|v\| > R$ und $F(v) < \alpha$, $F(0) < \alpha$.
- (iv) Wir setzen

$$c := \inf_{p \in S} \sup_{0 \leq t \leq 1} F(p(t)).$$

Dabei bezeichnet S die Menge aller stetigen Abbildungen $p : [0, 1] \rightarrow X$ mit $p(0) = 0$ und $p(1) = v$.

Anschauliche Interpretation: Im Spezialfall $X = \mathbb{R}^2$ interpretieren wir $F(u)$ als die Höhe einer Gebirgslandschaft über dem Punkt u der Ebene. Nach (ii) und (iii) befinden sich in den Punkten $u = 0$ und $u = v$ Täler, die durch eine Gebirgskette über dem Kreis $\{u : \|u\| = R\}$ getrennt werden. Die Gebirgspfade p verbinden die beiden Täler über die Gebirgskette hinweg. Anschaulich erwartet man, dass es einen Gebirssattel der Höhe c gibt. Das Theorem bestätigt diese intuitive Vorstellung.

12.7.4 Die Ljusternik–Schnirelman-Theorie für Eigenwertprobleme

Eigenwertaufgaben ergeben sich als notwendige Bedingungen für Extremalprobleme mit Nebenbedingungen im Rahmen der Lagrangeschen Multiplikationsregel (vgl. 5.4.5.). Wir studieren hier das Eigenwertproblem

$$f'(x) = \lambda x, \quad \|x\| = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in X, \tag{12.30}$$

wobei f gerade sein soll, d.h., $f(-x) = f(x)$ für alle x .

Satz 1: Es sei $X = \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$. Ist die gerade Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend glatt (z.B. Typ C^1), dann besitzt die Gleichung (12.30) mindestens n Paare $(x, -x)$ von Eigenvektoren. In diesem Fall hat die Gleichung (12.30) die Form

$$\partial_j f(x) = \lambda x_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{12.31}$$

mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $\partial_j = \partial/\partial x_j$.

► **BEISPIEL:** Wählt man $f(x) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k$ mit der reellen symmetrischen Matrix $A = (a_{jk})$, dann entspricht (12.31) der Eigenwertgleichung

$$Ax = \lambda x.$$

Satz 2: Die Gleichung (12.30) besitzt *unendlich* viele Paare $(x, -x)$ von Eigenvektoren, falls folgendes gilt:

- (i) X ist ein unendlichdimensionaler reeller separabler Hilbertraum.
- (ii) Das C^1 -Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade, und der Operator $f' : X \rightarrow X$ ist kompakt.
- (iii) Es gilt $f(0) = 0$, und aus $x \neq 0$ folgt $f(x) \neq 0, f'(x) \neq 0$.

12.8 Monotone Operatoren

Hauptsatz über monotone Operatoren: Die Operatorgleichung

$$F(x) = y, \quad x \in X, \tag{12.32}$$

besitzt für jedes $y \in X^*$ eine Lösung x , falls gilt:

- (i) X ist ein reeller reflexiver Banachraum.
- (ii) Der Operator $F : X \rightarrow X^*$ ist monoton, d. h., für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt⁵

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

- (iii) F ist koerzitiv, d. h.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle F(x), x \rangle}{\|x\|} = +\infty.$$

- (iv) F ist radialstetig, d. h., die reelle Funktion

$$\varphi(t) := \langle F(x + tz), z \rangle$$

ist auf dem Intervall $[0, 1]$ stetig für alle $x, z \in X$ (z. B. F ist stetig).

Die Lösung von (12.32) ist eindeutig, falls F streng monoton ist, d. h., es gilt

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$.

In Abbildung 12.9 entspricht der Operator F einer klassischen, streng monoton wachsenden, stetigen Funktion mit $F(x) \rightarrow \pm\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$. Dann gibt es zu jedem y_0 ein x_0 mit $F(x_0) = y_0$. Der obige Hauptsatz verallgemeinert diesen Sachverhalt.

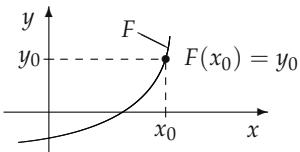


Abb. 12.9

⁵Das Symbol $\langle f, x \rangle$ bezeichnet den Wert des Funktionalen $f \in X^*$ an der Stelle x , d. h. $\langle f, x \rangle := f(x)$.

Galerkinverfahren: Es sei $\{X_j\}$ ein Galerkinschema in X (vgl. 11.4). Anstelle von (12.32) betrachten wir die sogenannten Galerkingleichungen

$$\langle F(x_n), z \rangle = \langle y, z \rangle \quad \text{für alle } z \in X_n \text{ und festes } x_n \in X_n. \quad (12.33)$$

Unter den obigen Voraussetzungen des Hauptsatzes (einschließlich der strengen Monotonie) besitzt (12.33) für jedes n genau eine Lösung x_n , und die Folge (x_n) konvergiert schwach in X gegen die eindeutige Lösung x von (12.32).

Bezeichnet e_1, \dots, e_m eine Basis in X_n , dann ist (12.33) äquivalent zu dem endlichdimensionalen Gleichungssystem

$$\left\langle F\left(\sum_{j=1}^m c_j e_j\right), e_k \right\rangle = \langle y, e_k \rangle, \quad k = 1, \dots, m,$$

mit den unbekannten reellen Koeffizienten c_1, \dots, c_m .

► **BEISPIEL:** Ist das Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und Fréchet-differenzierbar auf dem reellen Banachraum X , dann ist $f' : X \rightarrow X^*$ monoton. Der obige Hauptsatz für monotone Operatoren ist aber auch auf Operatoren F anwendbar, die sich nicht durch Differentiation eines Funktionals ergeben, d. h., es ist nicht notwendigerweise $F = f'$.

12.9 Der Abbildungsgrad und topologische Existenzsätze

Grundidee: Wir betrachten eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$, wobei folgendes gilt:

(i) $f(a) \neq 0$ und $f(b) \neq 0$.

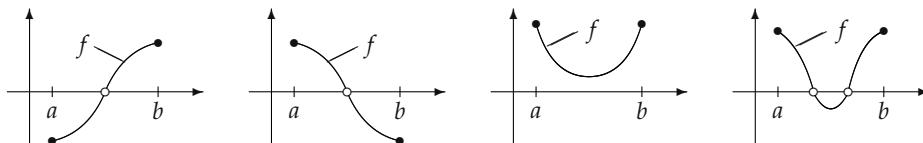
(ii) f besitzt höchstens endlich viele Nullstellen x_1, \dots, x_n , die alle nichtentartet sind, d. h., es ist $f'(x_j) \neq 0$ für alle j . Der Abbildungsgrad von f ist dann definiert durch

$$\text{Grad}(f, (a, b)) := \sum_{j=1}^n \text{sgn } f'(x_j)$$

(Abb. 12.10). Falls f keine Nullstellen hat, dann setzen wir $\text{Grad}(f, (a, b)) = 0$. Die Zahl $\text{sgn } f'(x_j)$ heißt Index der Nullstelle x_j . Besitzt die stetige Funktion f auch entartete Nullstellen, dann kann man stets durch eine hinreichend kleine Störung erreichen, dass die gestörte Funktion $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nur nichtentartete Nullstellen besitzt. Wir setzen dann

$$\text{Grad}(f, (a, b)) := \text{Grad}(f^*, (a, b)).$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Störung f^* (Abb. 12.11).



(a) $\text{Grad } f = 1$ (b) $\text{Grad } f = -1$ (c) $\text{Grad } f = 0$ (d) $\text{Grad } f = 0$

Abb. 12.10

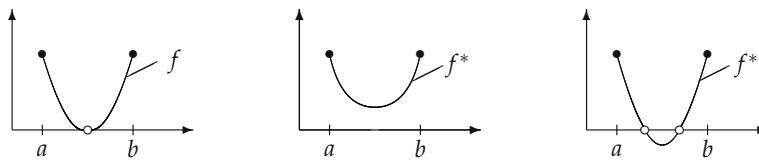
(a) $\text{Grad } f = 0$ (b) $\text{Grad } f^* = 0$ (c) $\text{Grad } f^* = 0$

Abb. 12.11

Der Abbildungsgrad $\text{Grad}(f, (a, b))$ stellt ein Maß für die Anzahl der Nullstellen von f auf (a, b) dar, wobei die Vielfachheiten der Nullstellen berücksichtigt werden. Anschaulich gilt folgendes:

(α) (Existenzprinzip). Aus $\text{Grad}(f, (a, b)) \neq 0$ folgt, dass die Gleichung $f(x) = 0$ eine Lösung x auf dem Intervall (a, b) besitzt.

(β) (Deformations- oder Homotopieinvarianz). Deformiert man f „stetig“ in eine Abbildung g , wobei die Randwerte in den Punkten $x = a$ und $x = b$ während der Deformation nicht null werden, dann bleibt der Abbildungsgrad ungeändert (Abb. 12.12).

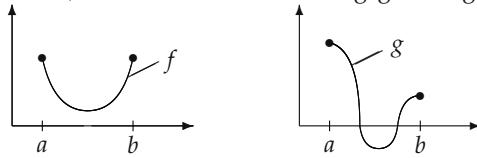
 $\text{Grad } f = \text{Grad } g$ (Deformationsinvarianz)

Abb. 12.12

Abbildungsgrad in Banachräumen: Wir wollen den obigen anschaulichen Überlegungen eine strenge Form für Banachräume geben.

Definition 1: Es sei G eine beschränkte offene Menge in dem Banachraum X mit dem Abschluss \bar{G} . Die Abbildung $f : \bar{G} \rightarrow X$ gehört genau dann zur Klasse $K(G, X)$, wenn folgendes gilt:

(i) $f(x) \neq 0$ für alle Randpunkte $x \in \partial G$.

(ii) f ist eine kompakte Störung der Identität I , d.h., es gilt $f = I - F$, wobei der Operator $F : \bar{G} \rightarrow X$ kompakt ist.

Definition 2: Es sei $f, g \in K(G, X)$. Wir schreiben

$$\partial G : f \cong g$$

und sagen, dass f kompakt homotop zu g bezüglich des Randes ∂G ist, falls es eine kompakte Abbildung $H : \bar{G} \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

(i) $x - H(x, 0) = f(x)$ und $x - H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in \bar{G}$.

(ii) $x - H(x, t) \neq 0$ für alle Randpunkte $x \in \partial G$ und alle $t \in [0, 1]$.

Hauptsatz (Leray–Schauder-Abbildungsgrad): Es gibt genau eine Möglichkeit, jeder Abbildung f aus einer beliebigen Klasse $K(G, X)$ eine ganze Zahl $\text{Grad}(f, G)$ (d.h. einen Abbildungsgrad) zuzuordnen, so dass folgendes gilt:

(A1) (Normierung). Für die identische Abbildung $I : \bar{G} \rightarrow \bar{G}$ ist

$$\text{Grad}(I, G) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \in G, \\ 0 & \text{für } 0 \notin G. \end{cases}$$

(A2) (Existenzprinzip). Aus $\text{Grad}(f, G) \neq 0$ folgt, dass die Gleichung

$$f(x) = 0, \quad x \in G,$$

eine Lösung besitzt.

(A3) (Deformations- oder Homotopieinvarianz). Aus

$$\partial G : f \cong g \quad \text{folgt} \quad \text{Grad}(f, G) = \text{Grad}(g, G).$$

(A4) (Additivität). Es ist

$$\text{Grad}(f, G) = \sum_{j=1}^n \text{Grad}(f, G_j),$$

falls $f \in K(G, X)$ und $f \in K(G_j, X)$ für alle j gilt, wobei $\{G_j\}$ eine reguläre Zerlegung von G ist, d. h., alle Mengen G_j sind paarweise disjunkt und $\overline{G} = \bigcup_{j=1}^n \overline{G}_j$ (Abb. 12.13).

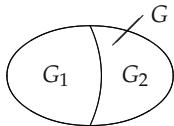


Abb. 12.13

Spezialfall: Es sei G eine beschränkte offene Menge des \mathbb{R}^N , und $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine C^1 -Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $f(x) \neq 0$ für alle Randpunkte $x \in \partial G$.
- (ii) f hat höchstens endlich viele Nullstellen x_1, \dots, x_n auf G .
- (iii) Jede dieser Nullstellen ist nicht entartet, d. h., für die Funktionaldeterminante hat man

$$\det f'(x_j) := \det(\partial_k f_m(x_j)) \neq 0$$

mit $x = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $f = (f_1, \dots, f_N)$ und $\partial_k = \partial/\partial\xi_k$.

Dann gilt

$$\text{Grad}(f, G) = \sum_{j=1}^n \text{sgn} \det f'(x_j).$$

► **BEISPIEL 1** (Leray–Schauder-Prinzip): Wir betrachten die Gleichung

$$x - F(x) = 0, \quad x \in G, \tag{12.34}$$

und setzen folgendes voraus:

- (i) G ist eine beschränkte offene Menge in einem Banachraum X mit $0 \in G$.
- (ii) Der Operator $F : \overline{G} \rightarrow X$ ist kompakt.
- (iii) Es ist $x - tF(x) \neq 0$ für alle Randpunkte $x \in \partial G$ und alle $t \in [0, 1]$.

Dann besitzt die Gleichung (12.34) eine Lösung und $\text{Grad}(I - F, G) = 1$.

Um das zu zeigen, setzen wir $H(x, t) := tF(x)$. Wegen der Homotopieinvarianz (A3) ist

$$\text{Grad}(I, G) = \text{Grad}(I - F, G).$$

Aus (A1) folgt $\text{Grad}(I, G) = 1$, d. h., es gilt $\text{Grad}(I - F, G) \neq 0$. Somit ergibt das Existenzprinzip (A2), dass (12.34) eine Lösung besitzt.

► **BEISPIEL 2** (Fixpunktsatz von Schauder): Es sei G eine offene Kugel in dem Banachraum X mit dem Mittelpunkt $x = 0$. Dann besitzt jeder kompakte Operator $F : \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ einen Fixpunkt.

Beweis. Fall 1: Hat F einen Fixpunkt auf dem Rand ∂G , dann sind wir fertig.

Fall 2: Wir nehmen an, dass F keinen Fixpunkt auf dem Rand hat. Dann ist die Bedingung (iii) von Beispiel 1 erfüllt. Denn ist r der Radius von G , dann gilt $\|F(x)\| \leq r$ für alle Randpunkte x mit $\|x\| = r$, weil F die Kugel in sich abbildet. Somit folgt aus

$$x - tF(x) = 0, \quad x \in \partial G, \quad t \in [0, 1],$$

sofort $r = \|x\| = t\|F(x)\| \leq tr$, also $t = 1$, d. h., $x = F(x)$, $x \in \partial G$. Diesen Fall hatten wir aber ausgeschlossen.

Die Behauptung folgt nunmehr aus Beispiel 1.

► **BEISPIEL 3** (Eigenwertprinzip): Die Eigenwertgleichung

$$F(x) = \lambda x, \quad x \in \partial G, \quad \lambda < 0,$$

besitzt eine Lösung, falls die Voraussetzungen (i) und (ii) von Beispiel 1 erfüllt sind und $\text{Grad}(I - F, G) \neq 1$ gilt.

Andernfalls würde sich ein Widerspruch zu Beispiel 1 ergeben.

Index einer isolierten Nullstelle: Gegeben sei die Abbildung $f : \overline{G} \rightarrow X$ der Klasse $K(G, X)$ auf dem Banachraum X , wobei f auf G genau die endlich vielen Nullstellen x_1, \dots, x_m besitzt. Dann gilt

$$\text{Grad}(f, G) = \sum_{j=1}^m \text{Grad}(f, x_j). \quad (12.35)$$

Dabei heißt $\text{Grad}(f, x_j)$ der Index der Nullstelle x_j . Definitionsgemäß gilt

$$\text{Grad}(f, x_j) := \text{Grad}(f, K),$$

wobei K eine Kugel um x_j ist, die in G liegt und keine weiteren Nullstellen von f enthält. Diese Definition hängt nicht von der Wahl von K ab.

Ist f vom Typ C^1 und $X = \mathbb{R}^N$, ($N = 1, 2, \dots$), dann gilt

$$\text{Grad}(f, x_j) = \text{sgn} \det f'(x_j),$$

falls diese Determinante nicht gleich null ist (nichtentartete Nullstelle). Im Spezialfall $N = 1$ gilt $\text{Grad}(f, x_j) = \text{sgn } f'(x_j)$.

12.10 Nichtlineare Fredholmoperatoren

Es sei $F : X \rightarrow Y$ ein (nichtlinearer) C^1 -Fredholmoperator zwischen den beiden Banachräumen X und Y über \mathbb{K} , d. h., $F'(x) : X \rightarrow Y$ ist ein linearer Fredholmoperator für jedes $x \in X$. Ferner habe $F'(x) : X \rightarrow Y$ für jedes $x \in X$ den Index null, und $F : X \rightarrow Y$ sei eigentlich.

Satz: Es gibt eine in Y offene und dichte Menge D , so dass die Gleichung

$$F(x) = y, \quad x \in X,$$

für jedes $y \in D$ höchstens endlich viele Lösungen besitzt.

► **BEISPIEL:** Die Voraussetzungen sind erfüllt, falls $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vom Typ C^1 ist und für $|x| \rightarrow \infty$ die Beziehung $|F(x)| \rightarrow \infty$ gilt.

Literatur zu Kapitel 12

- [Aubin 1979] Aubin, J., Ekeland, I.: Applied Nonlinear Analysis. Wiley, New York (1979)
- [Aubin 1993] Aubin, J.: Optima und Equilibria. Springer, New York (1993)
- [Berger 1982] Berger, M.: Nonlinearity and Functional Analysis. 2nd edition. Academic Press, New York (1982)
- [Chang 2005] Chang, K.: Methods in Nonlinear Analysis. Springer, Berlin (2005)
- [Deimling 1985] Deimling, K.: Nonlinear Functional Analysis. Springer, New York (1985)
- [Gajewski et al. 1974] Gajewski, H., Gröger, K., Zacharias, K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Akademie-Verlag, Berlin (1974)
- [Krasnoselski 1973] Krasnoselski, M. u.a.: Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen. Übers. a.d. Russ., Akademie-Verlag, Berlin (1973)
- [Krasnoselski und Zabreiko 1984] Krasnoselski, M., Zabreiko, P.: Geometrical Methods in Nonlinear Analysis. Transl. from the Russian. Springer, New York (1984)
- [Mawhin und Willem 1987] Mawhin, J., Willem, M.: Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer, New York (1987)
- [Růžička 2004] Růžička, M.: Nichtlineare Funktionalanalysis: Eine Einführung. Springer, Berlin (2004)
- [Zeidler 1984ff] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Vol. I: Fixed-Point Theory, 3rd edition 1998; Vol. IIA: Linear Monotone Operators, 2nd edition 1997; Vol. IIB: Nonlinear Monotone Operators; Vol. III: Variational Methods and Optimization; Vol. IV: Applications to Mathematical Physics, 2nd edition 1995, Springer, New York (1984ff)
- [Zeidler 1995] Zeidler, E.: Introduction to Applied Functional Analysis, Vol. 1: Applications to Mathematical Physics. Vol. 2: Main Principles and their Applications. Springer, New York (1995)

KAPITEL 13

DYNAMISCHE SYSTEME – MATHEMATIK DER ZEIT

Dem Umstand, dass Poincaré es unternahm, das schwierige Dreikörperproblem erneut zu behandeln und der Lösung näher zu führen, verdanken wir die fruchtbaren Methoden und weittragenden Prinzipien, die dieser Gelehrte der Himmelsmechanik erschlossen hat.¹

David Hilbert (1900)

Ist das Sonnensystem stabil? Streng genommen ist die Antwort noch unbekannt, und diese Frage hat zu sehr tiefen mathematischen Resultaten geführt, die vermutlich wichtiger sind als die Antwort auf die ursprüngliche Frage.²

Jürgen Moser (1975)

13.1 Grundideen

Viele Prozesse in Natur und Technik hängen wesentlich von der Zeit ab. Das Ziel der allgemeinen Theorie der dynamischen Systeme besteht darin, solche zeitabhängigen Prozesse mathematisch zu modellieren, ihre wesentlichen *qualitativen* Eigenschaften zu beschreiben und vorherzusagen.

Dynamische Systeme im engeren Sinn entsprechen zeitabhängigen Prozessen, die *homogen* bezüglich der Zeit sind, d. h., der Prozessverlauf hängt vom Anfangszustand ab, aber *nicht* vom Anfangszeitpunkt. Zum Beispiel hängt der Verlauf der Planetenbewegung im Gravitationsfeld der Sonne nur vom Anfangszustand des Planeten ab (Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit), aber nicht vom Anfangszeitpunkt. Wäre die Sonne ein pulsierender Stern, dann würde ihr Gravitationsfeld zeitlich veränderlich sein, und der Verlauf der Planetenbewegung würde nicht nur von der Anfangsposition und der Anfangsgeschwindigkeit abhängen, sondern auch vom Anfangszeitpunkt (dynamisches System im weiteren Sinn).

Dynamische Systeme können ein sehr kompliziertes mathematisches Verhalten besitzen. Das reflektiert die mögliche Kompliziertheit der in der Natur auftretenden Phänomene. Zum Beispiel beobachten wir:

- (i) Turbulenz (Übergang zum Chaos).
- (ii) Explosionen, Urknall, Supernovae, Quasare, ökologische Katastrophen (Instabilitäten).
- (iii) Sprünge des qualitativen Verhaltens bei der biologischen Evolution (Bifurkation).

¹Der französische Mathematiker Henri Poincaré (1854-1912) hat durch seinen Reichtum an neuen Ideen das mathematische Denken wesentlich beeinflusst. Er ist der Schöpfer der Theorie der dynamischen Systeme und der Topologie. Das sind zwei mathematische Disziplinen, in denen das qualitative Verhalten von Systemen mathematisch streng erfasst wird. Beide Disziplinen sind tragende Säulen der modernen mathematischen Naturbeschreibung.

Die Stabilitätstheorie dynamischer Systeme wurde von dem russischen Mathematiker Alexander Michailovitsch Ljapunov (1857-1918) begründet.

²Professor Jürgen Moser (1928-1999) hat wesentliche Beiträge zur Theorie der dynamischen Systeme und der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen geleistet. Er arbeitete an zwei international hochangesehenen Institutionen – am Courant-Institut in New York und an der ETH Zürich. Für sein mathematisches Lebenswerk wurde Professor Moser mit dem Wolf-Preis geehrt, der an die bedeutendsten Gelehrten unserer Zeit verliehen wird.

Eine fundamentale Rolle spielt die *Stabilität* der Prozesse. Grob gesprochen können nur solche Prozesse in der Natur über einen längeren Zeitraum realisiert werden, die stabil sind. Die Änderung des Stabilitätsverhaltens eines Systems, die durch äußere Einflüsse hervorgerufen wird, kann zu plötzlichen Änderungen im qualitativen Verhalten des Systems führen, d. h., es treten sogenannte Bifurkationen auf.

13.1.1 Einführende Beispiele

► **BEISPIEL 1** (radioaktiver Zerfall): Wir betrachten eine radioaktive Substanz und bezeichnen mit $N(t)$ die Anzahl der nichtzerfallenen Atome zur Zeit t . Dann gilt die Differentialgleichung

$$N'(t) = -aN(t) \quad (13.1)$$

mit der Lösung

$$N(t) = e^{-at} N(0). \quad (13.2)$$

► **BEISPIEL 2** (Bewegung eines Massenpunktes auf einer Geraden): Es sei $x(t)$ die Position eines Massenpunktes der Masse m auf einer Geraden zur Zeit t (Abb. 13.1). Dann gilt die Bewegungsgleichung

$$mx'' = K(x),$$

wobei $K(x)$ die im Punkt x wirkende Kraft bezeichnet. Setzen wir $p = mx'$, dann erhalten wir das System

$$p' = K(x), \quad x' = p/m. \quad (13.3)$$

Der Lösung $x = x(t)$, $p = p(t)$ entsprechen Trajektorien in der (x, p) -Ebene.

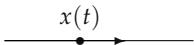


Abb. 13.1

Im Spezialfall des harmonischen Oszillators ist $K = -m\omega^2 x$ mit $\omega > 0$. Die Lösung von (13.3) lautet

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{p(0)}{m\omega} \sin \omega t,$$

$$p(t) = -m\omega x(0) \sin \omega t + p(0) \cos \omega t. \quad (13.4)$$

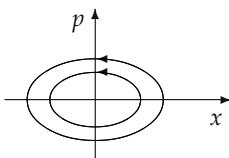


Abb. 13.2

Im Fall $x(0)^2 + p(0)^2 \neq 0$ entspricht das Ellipsen in der (x, p) -Ebene (Abb. 13.2). Genauer bezeichnet man die Abbildung $t \mapsto (x(t), p(t))$ als Trajektorie, und die Menge der Punkte $(x(t), p(t))$ heißt Orbit. Der Punkt $(0, 0)$ in der (x, p) -Ebene heißt stationärer oder singulärer Punkt. Er spielt eine besondere Rolle. Befindet sich das System zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(0, 0)$,

d. h. $x(0) = 0, p(0) = 0$, dann gilt $x(t) = 0, p(t) = 0$ für alle Zeiten t . Somit entspricht $(0, 0)$ einer Gleichgewichtslage des Systems.

► **BEISPIEL 3** (Kreispendel): Die Bewegung eines Kreispendels der Länge l und der Masse m unter dem Einfluss der Schwerkraft wird beschrieben durch

$$mx'' = -g\mathbf{k} - \lambda x, \quad x^2 = l^2$$

(Abb. 13.3(a)). Dabei ist $-g\mathbf{k}$ die Schwerkraft und $-\lambda x$ die Zwangskraft, die das Pendel auf der Kreisbahn hält. Die Zahl λ ist dabei so zu bestimmen, dass während der Bewegung ständig die Nebenbedingung $x^2 = l^2$ erfüllt ist. Benutzt man den Winkel φ wie in Abb. 13.3(a), dann kann man die Bewegung durch

$$l\varphi'' = -g \sin \varphi$$

beschreiben. Führen wir den Impulsvektor $\mathbf{p} = mx'$ ein, dann entsteht das System

$$\mathbf{p}' = -g\mathbf{k} - \lambda x, \quad x' = \mathbf{p}/m \quad (13.5)$$

mit der Nebenbedingung $x^2 = l^2$. Um die Trajektorien

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t) \quad (13.6)$$

zu veranschaulichen, betrachten wir die Oberfläche eines Kreiszylinders Z wie in Abb. 13.3(b) und zeichnen den Impulsvektor \mathbf{p} senkrecht zum Kreis K . Dann entspricht (13.6) gewissen Kurven auf der Oberfläche des Kreiszylinders.

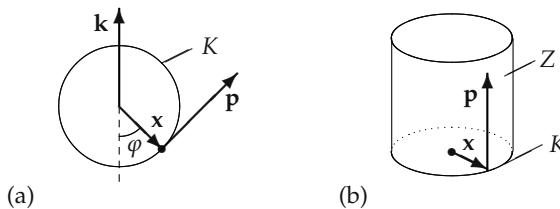


Abb. 13.3

Dieses Beispiel zeigt, dass bereits sehr einfache mechanische Situationen dynamische Systeme auf *Mannigfaltigkeiten* (z. B. Flächen) ergeben.

► **BEISPIEL 4** (Population): Es sei z_n die Anzahl der Raupen im n -ten Sommer. Wir nehmen an, dass man die Anzahl der Raupen im $(n+1)$ -ten Sommer durch die Beziehung

$$z_{n+1} = F(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.7)$$

erhält mit $F(z) = (1+a)z - bz^2$ und $a, b > 0$ (Abb. 13.4). Für kleines z_n bleibt z_{n+1} klein. Liegt z_n in der Nähe des kritischen Wertes $z = (1+a)/b$, dann ist z_{n+1} ebenfalls klein. Das modelliert die Tatsache, dass bei kritischer Überpopulation die Vermehrung wegen Nahrungsmangels nur klein ist.

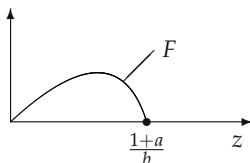


Abb. 13.4

13.1.2 Klassifikation dynamischer Systeme

Wir unterscheiden:

- (i) Diskrete dynamische Systeme.
- (ii) Kontinuierliche dynamische Systeme (Flüsse und Semiflüsse).

Ein *diskretes* dynamisches System besteht aus einer Menge Z (Zustandsraum oder Phasenraum) und aus einer Funktion $F : Z \rightarrow Z$, die Z in sich abbildet. Die Elemente z von Z heißen Zustände des Systems. Die möglichen Prozesse erhält man durch das allgemeine Iterationsverfahren

$$z_{n+1} = F(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13.8)$$

Wir setzen $t = n\Delta t$ und interpretieren z_n als Zustand des Systems zur Zeit $n\Delta t$. Dann beschreibt (13.8) den Sachverhalt, dass sich der Zustand z_{n+1} zur Zeit $(n+1)\Delta t$ eindeutig aus dem Zustand z_n zur Zeit $n\Delta t$ berechnen lässt. Beispiel 4 entspricht einem diskreten dynamischen System. In diesem Fall kann man als Zustandsraum Z die Menge der reellen Zahlen wählen.

Ein *Fluss* besteht aus einer Menge Z (Zustandsraum oder Phasenraum) und aus einer Familie $\{F_t\}$ von Abbildungen

$$F_t : Z \rightarrow Z,$$

wobei der Zeitparameter t alle reellen Zahlen durchläuft. Wir verlangen ferner, dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) $F_0 = I$ (identische Abbildung).
- (b) $F_{t+s} = F_t F_s$ für alle reellen Zahlen t und s .

Die zugehörigen Prozesse erhält man durch die Gleichung

$$z(t) = F_t z_0.$$

Wir interpretieren z_0 als Anfangszustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 0$ und $z(t)$ als Zustand des Systems zum Zeitpunkt t . Die Abbildung $t \mapsto z(t)$, die jedem Zeitpunkt t den Zustand $z(t)$ zuordnet, heißt *Trajektorie*, und die Menge aller Bildpunkte $z(t)$ der Trajektorie heißt *Orbit*. Ein Zustand z_0 heißt *stationär*, falls $F_t z_0 = z_0$ für alle t gilt.

Die Bedingung (b) bedeutet $z(t+s) = F_{t+s} z_0 = F_t(F_s z_0)$, d. h.

$$z(t+s) = F_t z(s). \quad (13.9)$$

Setzen wir $w(t) = z(t+s)$ für festes s und variables t , dann zeigt (13.9), dass der Prozessverlauf homogen bezüglich der Zeit ist. Denn aus (13.9) folgt, dass neben dem Prozess $z = z(t)$ auch der durch eine Zeittranslation entstehende Prozess $w = w(t)$ möglich ist. Ferner gilt $w(-s) = z(0) = z_0$. Da der Anfangszeitpunkt s beliebig gewählt werden kann, hängt der Prozessverlauf nur vom Anfangszustand z_0 , aber nicht vom gewählten Anfangszeitpunkt ab. Anschaulich kann man $z = z(t)$ als die Bewegung von Flüssigkeitsteilchen interpretieren (Abb. 13.5). Dadurch wird die Bezeichnung Fluss für $\{F_t\}$ verständlich.

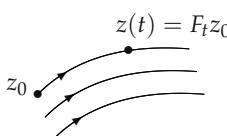


Abb. 13.5

In Beispiel 1 besteht der Zustandsraum Z aus der Menge der reellen Zahlen. Setzen wir $N(t) = z(t)$ und $N(0) = z_0$, dann geht (13.2) in

$$z(t) = F_t z_0 = e^{-at} z_0$$

über. Die Flussbedingung $F_{t+s} = F_t F_s$ ist wegen des Additionstheorems für die Exponentialfunktion $e^{-a(t+s)} = e^{-at} e^{-as}$ erfüllt.

In Beispiel 2 besteht der Zustandsraum Z aus allen Punkten der (x, p) -Ebene. Setzen wir $z(t) = (x(t), p(t))$ und schreiben wir (13.4) in der Form $z(t) = F_t z(0)$, dann ist $\{F_t\}$ ein Fluss.

In Beispiel 3 besteht der Zustandsraum Z aus allen Punkten der Zylinderoberfläche, und der Bewegung des Kreispendels entspricht ein Fluss auf Z .

Ein *Semifluss* $\{F_t\}$ unterscheidet sich von einem Fluss dadurch, das F_t nur für alle reellen Zahlen $t \geq 0$ erklärt ist und $F_{t+s} = F_t F_s$ nur für alle reellen Zahlen $t, s \geq 0$ gilt.

Semiflüsse modellieren irreversible Prozesse in der Natur, wie zum Beispiel Wärmeleitung und Diffusion.

13.1.3 Konstruktion dynamischer Systeme durch autonome Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$z'_i = f_i(z_1, \dots, z_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad z_i(0) = z_{i0}, \quad (13.10)$$

wobei wir annehmen, dass alle f_i reelle Funktionen der reellen Variablen z_1, \dots, z_n sind und es eine offene Menge U des \mathbb{R}^n gibt, auf der alle f_i stetige erste partielle Ableitungen haben. Wichtig ist, dass alle f_i nicht von der Zeit t abhängen (autonomes System). Wir setzen $z = (z_1, \dots, z_n)$ und bezeichnen die Lösung von (13.10) durch

$$z(t) = F_t z_0. \quad (13.11)$$

Dann ist $\{F_t\}$ ein lokaler Fluss auf U , d.h., zu jedem z_0 in U gibt es eine positive Zahl t_0 , so dass die Lösung (13.11) für alle t mit $-t_0 \leq t \leq t_0$ existiert und eindeutig ist. Ferner ist $F_{t+s} z_0 = F_t(F_s z_0)$ für alle t, s mit $-t_0 \leq t, s, t+s \leq t_0$.

Haben alle f_i auf \mathbb{R}^n stetige erste partielle Ableitungen und existieren die Lösungen (13.11) bei beliebigem z_0 in \mathbb{R}^n für alle reellen Zeiten t , dann ist $\{F_t\}$ ein Fluss auf \mathbb{R}^n . Diese Voraussetzungen sind beispielsweise erfüllt, falls gilt

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei alle a_{ij} reelle Zahlen sind. Dann ist $z = 0$ ein stationärer Punkt.

13.2 Dynamische Systeme in der Ebene

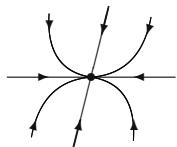
13.2.1 Qualitatives Verhalten linearer Systeme in der Umgebung stationärer Punkte

Als Spezialfall von (13.10) betrachten wir das lineare System

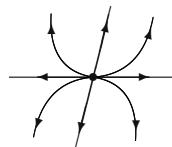
$$\begin{aligned} z'_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2, \\ z'_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2, \end{aligned} \quad (13.12)$$

wobei alle a_{ij} reelle Zahlen sind. Die Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ij})$ bezeichnen wir mit λ und μ . Abb. 13.6 zeigt die möglichen Trajektorien $z_1 = z_1(t)$, $z_2 = z_2(t)$, in der (z_1, z_2) -Ebene in der Umgebung des stationären Punktes $(0,0)$. Der Pfeil weist in wachsende Zeitrichtung. Von besonderem Interesse ist das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0)$. In Abb. 13.6(a),(c),(e) liegt *asymptotisch stabiles* Verhalten vor, d.h., alle Trajektorien, die in einer Umgebung von $(0,0)$ starten, laufen für $t \rightarrow +\infty$ in den stationären Punkt $(0,0)$. Mit anderen Worten, kleine

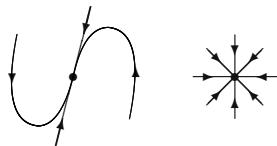
Störungen der Gleichgewichtslage des Systems werden im Laufe der Zeit wieder ausgeglichen. In Abb. 13.6(g) liegt *stabiles* Verhalten vor, d. h., die Trajektorien, die in einer hinreichend kleinen Umgebung von $(0,0)$ starten, bleiben in der Nähe von $(0,0)$. Mit anderen Worten, kleine Störungen der Gleichgewichtslage des Systems bleiben für alle Zeiten klein. *Instabiles* Verhalten haben wir in Abb. 13.6(b),(d),(f). Besonders interessant ist das Verhalten in dem Sattelpunkt (h). Dort gibt es Punkte, die von dem stationären Punkt $(0,0)$ angezogen werden, und solche, die abgestoßen werden.



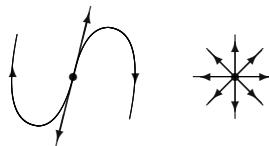
(a) stabiler Knoten
 $(\lambda, \mu$ reell, negativ, $\lambda \neq \mu$, Index $j = 1$)



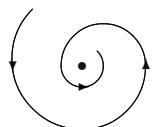
(b) instabiler Knoten
 $(\lambda, \mu$ reell, positiv, $\lambda \neq \mu$, Index $j = 1$)



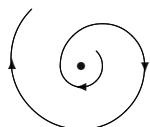
(c) stabiler Knoten
 $(\lambda = \mu$ reell, negativ, $j = 1$)



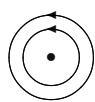
(d) instabiler Knoten
 $(\lambda = \mu$ reell, positiv, $j = 1$)



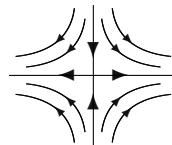
(e) stabiler Spiralfpunkt
 $(\lambda, \mu$ nicht reell, negativer Realteil, $j = 1$)



(f) instabiler Spiralfpunkt
 $(\lambda, \mu$ nicht reell, positiver Realteil, $j = 1$)



(g) Zentrum
 $(\lambda, \mu$ rein imaginär, $j = 1$)



(h) Sattelpunkt
 $(\lambda, \mu$ reell, $\lambda\mu < 0$, $j = -1$)

Abb. 13.6

Der in Abb. 13.6 angegebene Index j von $(0,0)$ hat folgende geometrische Bedeutung. Wir zeichnen einen kleinen Kreis C um $(0,0)$ und durchlaufen C einmal im mathematisch positiven Sinn. Dabei drehen sich die Tangentialvektoren der Trajektorien in den Punkten von C um den Winkel φ . Wir setzen $j = \varphi/2\pi$ (Abb. 13.7). Analytisch gilt $j = \operatorname{sgn} \det A = \operatorname{sgn} \lambda \mu$.

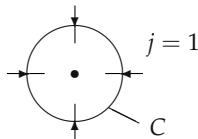


Abb. 13.7

13.2.2 Nichtlineare Störungen

Anstelle von (13.12) betrachten wir das nichtlineare *gestörte* System

$$\begin{aligned} z'_1 &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + g_1(z_1, z_2), \\ z'_2 &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + g_2(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (13.13)$$

Dabei setzen wir voraus, dass $g_1(0,0) = g_2(0,0) = 0$ gilt und g_1, g_2 in einer Umgebung von $(0,0)$ stetige erste partielle Ableitungen haben, die in $(0,0)$ verschwinden. Der stationäre Punkt $(0,0)$ von (13.3) heißt hyperbolisch, falls die Eigenwerte λ und μ von $A = (a_{ij})$ einen nichtverschwindenden Realteil haben. Man erhält das folgende fundamentale Resultat:

Ist $(0,0)$ hyperbolisch, dann hat der Fluss von (13.13) in einer Umgebung von $(0,0)$ qualitativ das gleiche Verhalten wie der Fluss des linearisierten Problems (13.12), d. h., durch die nichtlinearen kleinen Störungen g_1 und g_2 in (13.13) wird der Fluss nur geringfügig deformiert. Man spricht von *struktureller Stabilität*. Abb. 13.8 zeigt die Deformation eines Sattelpunktes.

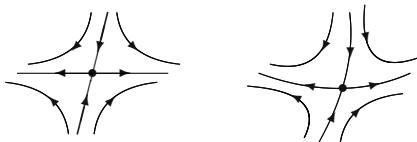


Abb. 13.8

Genauer gilt folgendes: Es gibt zwei Umgebungen U und V von $(0,0)$ und einen Homöomorphismus $H : U \rightarrow V$ (d. h. eine eindeindeutige und in beiden Richtungen stetige Abbildung), so dass H die Orbits von (13.13) in die Orbits von (13.12) transformiert. Dabei bleibt der Richtungssinn der Orbits erhalten.

In Abb. 13.6 sind alle Gleichgewichtspunkte außer dem Zentrum hyperbolisch und somit strukturell stabil. Das Zentrum dagegen ist nicht strukturell stabil. Durch eine geringfügige Störung kann es in einen Spiralpunkt verwandelt werden. In (13.4) entspricht die periodische Bewegung des harmonischen Oszillators einem Fluss mit einem Zentrum. Die strukturelle Instabilität eines Zentrums spiegelt die in der Natur beobachtete Tatsache wider, dass es periodische Vorgänge gibt, die durch geringste Störungen ihre Periodizität verlieren. Man denke an das Verglühen eines künstlichen Satelliten, hervorgerufen durch die geringe Reibung der Atmosphäre.

13.2.3 Grenzzyklen

Unter einem Grenzzyklus G verstehen wir einen geschlossenen Orbit, dem sich die Orbits in einer Umgebung von G beliebig genau nähern. Wählen wir eine feste Seite von G (innen oder außen), dann können die Trajektorien für $t \rightarrow +\infty$ von G angezogen (Stabilität) oder abgestoßen werden (Instabilität) (Abb. 13.9).

Als ein Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$r'(t) = 1 - r(t), \quad \varphi'(t) = -1,$$

wobei r, φ Polarkoordinaten sind. Die Lösung lautet

$$r = 1 + Ce^{-t}, \quad \varphi = -t, \quad t \geq \ln|C|.$$

Für $C = 0$ erhalten wir den Einheitskreis (Grenzzyklus). Im Fall $C > 0$ (bzw. $C < 0$) ergeben sich Spiralen, die sich für $t \rightarrow \infty$ von außen (bzw. innen) gegen den Grenzzyklus winden, d. h., es liegt das qualitative Verhalten von Abb. 13.9(a) vor.

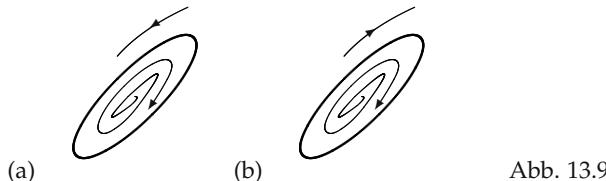


Abb. 13.9

Grenzzyklen modellieren häufig periodische Vorgänge, die sich sehr stabil gegenüber Störungen verhalten (z. B. die Tätigkeit des menschlichen Herzens). Grenzzyklen können nur bei nichtlinearen Differentialgleichungen auftreten.

13.3 Stabilität

13.3.1 Stabilität von stationären Punkten

Wir betrachten das autonome System

$$z'_i = f_i(z_1, \dots, z_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (13.14)$$

zusammen mit dem linearisierten System

$$z'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(0, \dots, 0)}{\partial z_j} z_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13.15)$$

Es sei $z = (z_1, \dots, z_n)$. Wir setzen voraus, dass alle reellen Funktionen f_i in $z = 0$ verschwinden und in einer Umgebung des Punktes $z = 0$ im \mathbb{R}^n stetige zweite partielle Ableitungen haben. Die Matrix $(\partial f_i(0, \dots, 0) / \partial z_j)_{i,j=1,\dots,n}$ bezeichnen wir mit $f'(0)$. Der stationäre Punkt $z = 0$ von (13.14) heißt *asymptotisch stabil*, falls es eine Umgebung U von $z = 0$ in \mathbb{R}^n gibt, so dass jede Trajektorie $z = z(t)$ von (13.14), die zur Zeit $t = 0$ in einem Punkt von U startet, für $t \rightarrow +\infty$ gegen $z = 0$ konvergiert (Abb. 13.10(a)). Der stationäre Punkt $z = 0$ heißt *stabil*, falls es zu jeder

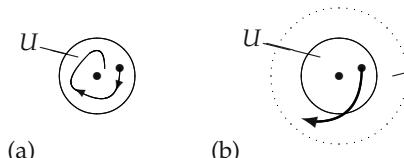


Abb. 13.10

Umgebung V von $z = 0$ eine Umgebung U von $z = 0$ gibt, so dass jede Trajektorie, die zur Zeit $t = 0$ in U startet, für alle Zeiten $t \geq 0$ in V bleibt (Abb. 13.10(b)).

Es gilt das folgende fundamentale Resultat:

- (i) Liegen alle Eigenwerte von $f'(0)$ echt links von der imaginären Achse (d. h., alle Realteile sind negativ), dann ist $z = 0$ in (13.14) *asymptotisch stabil*.

(ii) Liegt ein Eigenwert von $f'(0)$ echt rechts von der imaginären Achse (d. h., ein Realteil ist positiv), dann ist $z = 0$ in (13.14) *nicht stabil*.

13.3.2 Strukturelle Stabilität

Ist der stationäre Punkt $z = 0$ von (13.14) hyperbolisch, d. h., kein Eigenwert von $f'(0)$ liegt auf der imaginären Achse (alle Realteile sind von null verschieden), dann verhält sich der Fluss von (13.14) in einer Umgebung von $z = 0$ qualitativ wie der Fluss des linearisierten Problems (13.15) in einer Umgebung von $z = 0$.

Die präzise Formulierung ergibt sich analog zu 13.2.2.

13.4 Bifurkation

13.4.1 Grundidee

Wir nehmen jetzt an, dass die rechten Seiten f_i in (13.14) noch von einem reellen Parameter p abhängen, der beispielsweise einen äußeren Einfluss beschreibt. Wir sagen, dass für $p = p_0$ bei dem System (13.14) eine Bifurkation auftritt, falls sich die Struktur des Flusses für $p = p_0$ wesentlich ändert. Das modelliert Strukturveränderungen in der Natur. Ein Blick auf Abb. 13.6 zeigt, wie ein solcher Strukturwechsel entstehen kann. Die Struktur des Flusses wird nämlich wesentlich von der Form der Eigenwerte λ und μ bestimmt, und diese ändern sich, falls wir p ändern.

Wir wollen zwei wichtige Situationen betrachten, bei denen sich *Bifurkation* als Folge eines *Stabilitätsverlustes* ergibt.

13.4.2 Entstehung neuer Gleichgewichtszustände (erste Elementarkatastrophe)

Der Stabilitätsverlust einer Gleichgewichtslage kann zur Entstehung neuer Gleichgewichtslagen führen.

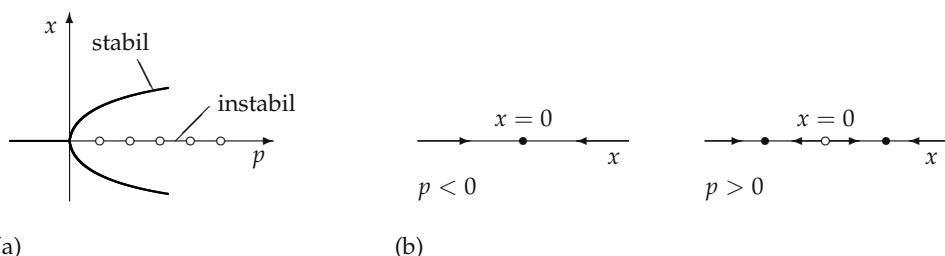


Abb. 13.11

► **BEISPIEL:** Wir betrachten die eindimensionale Gleichung

$$x' = px - x^3$$

mit dem reellen Parameter p . Alle Gleichgewichtslagen ergeben sich aus $px - x^3 = 0$ (Abb. 13.11(a)). Studiert man das Vorzeichen von $px - x^3$ zwischen den Gleichgewichtslagen, dann erhält man sofort die in Abb. 13.11(b) dargestellte Strömung:

- (i) Für $p < 0$ gibt es genau eine Gleichgewichtslage $x = 0$, und diese ist *stabil*.
(ii) Für $p > 0$ wird die Gleichgewichtslage $x = 0$ *instabil*, und es entstehen zwei neue stabile Gleichgewichtslagen $x = \pm p$.

Die Funktion $F(x, p) = px - x^3$ heißt die *erste Elementarkatastrophe* von Thom (oder auch *Falte*), während die Funktion $G(x, p, q) = px + qx^2 - x^4$ mit den Parametern p und q als *zweite Elementarkatastrophe* (oder auch *Spitze*) bezeichnet wird. Die von Thom begründete und von Arnold weiterentwickelte sogenannte *Katastrophentheorie* beschäftigt sich unter anderem mit Normalformen dynamischer Systeme, deren Bifurkationsverhalten strukturell stabil ist (vgl. 13.13).

13.4.3 Hopfbifurkation

Die Hopfbifurkation modelliert das wichtige Phänomen, dass die stabile Gleichgewichtslage eines Systems durch einen äußeren Einfluss in periodische Bewegungen übergeht.

Wir nehmen an, dass alle f_i in (13.14) von dem reellen Parameter p abhängen und $f_i(0, p) = 0$ für alle p in einer Umgebung von p_0 und alle i gilt. Alle f_i sollen in einer Umgebung von $z = 0$, $p = p_0$, stetige zweite partielle Ableitungen besitzen. Ferner setzen wir folgendes voraus:

(i) Für alle $p < p_0$ in einer kleinen Umgebung von p_0 liegen alle Eigenwerte der Matrix $f'(0, p_0)$ echt links von der imaginären Achse (*Stabilität*).³

(ii) Für $p = p_0$ überschreitet ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $(\lambda(p), \bar{\lambda}(p))$ der Matrix $f'(0, p_0)$ mit nichtverschwindender Geschwindigkeit die imaginäre Achse von links nach rechts, d. h., es ist $\operatorname{Re} \lambda'(p_0) > 0$ und $\lambda(p_0) = i\omega$ mit $\omega > 0$ (*Stabilitätsverlust*) (vgl. Abb. 13.12).

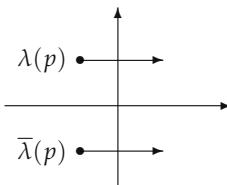


Abb. 13.12

(iii) $\lambda(p_0)$ ist ein algebraisch einfacher Eigenwert, d. h. eine einfache Nullstelle der charakteristischen Gleichung der Matrix $f'(0, p_0)$.

(iv) $k\lambda(p_0)$ ist kein Eigenwert von $f'(0, p_0)$ für $k = 0, 2, 3, \dots$ (*Nichtresonanzbedingung*).

Dann besitzt (13.14) für alle $p > p_0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von p_0 (oder für $p = p_0$ im Entartungsfall) periodische Lösungen $z = z(t)$ in einer Umgebung von $z = 0$, wobei die Perioden in der Nähe von ω liegen.

13.5 Ljapunovfunktion

Die Methode der Ljapunovfunktion erlaubt es, das qualitative Verhalten der Trajektorien dynamischer Systeme zu untersuchen.

Die Funktion $L = L(z_1, \dots, z_n)$ heißt eine *Ljapunovfunktion* von (13.14) auf der Menge U , falls

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_i} f_i(z_1, \dots, z_n) \leq 0 \quad (13.16)$$

³ $f'(0, p_0)$ bezeichnet die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0, p_0) \right)$.

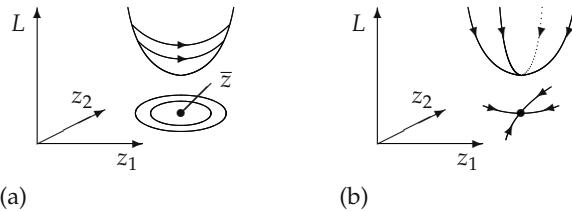


Abb. 13.13

für alle $z \in U$ gilt. Ferner heißt L regulär in $z = 0$, falls in (13.16) das Zeichen „ $<$ “ steht für alle $z \neq 0$ in einer Umgebung von $z = 0$. Ist $z = z(t)$ eine Trajektorie von (13.14), dann folgt aus (13.16) die entscheidende Beziehung

$$\frac{d}{dt}L(z_1(t), \dots, z_n(t)) \leq 0, \quad (13.17)$$

d. h., L wächst nicht entlang der Trajektorien für wachsendes t . Für $n = 2$ kann man das wie folgt anschaulich interpretieren. Wir betrachten eine Gebirgslandschaft über der (z_1, z_2) -Ebene, wobei $L(z_1, z_2)$ die Höhe des Gebirges im Punkt (z_1, z_2) angibt (Abb. 13.13). Den Trajektorien $z = z(t)$ in der (z_1, z_2) -Ebene ordnen wir Raumkurven $z = z(t)$, $L = L(z(t))$ zu, die wir als Bäche bezeichnen. Nach (13.17) fließen die Bäche den Berg hinunter. Hat beispielsweise die Ljapunovfunktion L im Punkt \bar{z} ein strenges Minimum, dann besitzt die Gebirgslandschaft dort einen Talkessel, den die Bäche nicht verlassen können. Folglich bleiben die Trajektorien $z = z(t)$ in der Nähe von \bar{z} , d. h., im Punkt \bar{z} liegt *Stabilität* vor (Abb. 13.13). Das präzise Resultat lautet folgendermaßen:

(i) Es seien $z = 0$ ein stationärer Punkt von (13.14) und L eine Ljapunovfunktion, die in einer Umgebung von $z = 0$ im \mathbb{R}^n stetige erste partielle Ableitungen besitzt.

(ii) Hat L in $z = 0$ ein strenges Minimum, dann ist der stationäre Punkt $z = 0$ stabil.

(iii) Ist L zusätzlich in $z = 0$ regulär, dann ist der stationäre Punkt $z = 0$ asymptotisch stabil.

Ist (13.14) ein Gradientensystem, d. h., es gilt

$$f_i(z_1, \dots, z_n) = \frac{\partial F(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

für alle z_1, \dots, z_n , dann erhält man eine Ljapunovfunktion durch $L = -F$.

Bei mechanischen Systemen mit Energieerhaltung kann man die *Energiefunktion* als Ljapunovfunktion wählen. In Beispiel 2 von Abschnitt 13.1.1 (harmonischer Oszillator) lautet die Energiefunktion

$$L = \frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2x^2}{2}.$$

L ist konstant längs der Trajektorien (13.4). Ferner besitzt L in $x = 0, p = 0$ ein strenges Minimum (Talkessel der Energiefläche). Deshalb ist $x = 0, p = 0$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt des harmonischen Oszillators. Physikalisch bedeutet dies, dass der Ruhezustand des harmonischen Oszillators stabil ist.

Bei thermodynamischen Systemen entspricht die *negative Entropiefunktion* einer Ljapunovfunktion. Leider gibt es keine allgemeine Methode zur Konstruktion von Ljapunovfunktionen. Deshalb kann sich das Auffinden einer Ljapunovfunktion in komplizierten Fällen als schwierig erweisen.

► **BEISPIEL:** Wir wählen die Funktion $L = 2^{-1}px^2 - 4^{-1}x^4$. Das zugehörige Gradientensystem lautet

$$x' = L_x = px - x^3.$$

Dieses System wurde bereits in 13.4.2 betrachtet. Die Menge aller strengen Minima von L haben wir in 12.6.4 ermittelt. Das ergibt das in Abb. 13.11 dargestellte Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtslagen.

13.6 Die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeit zur vereinfachten Untersuchung der Dynamik (Versklavungsprinzip)

Grundidee: Wir wollen eine allgemeine geometrische und auch analytische Methode beschreiben, die es erlaubt, das Verhalten eines dynamischen Systems in der Umgebung einer Gleichgewichtslage zu untersuchen. Dazu benötigt man die Eigenwertstruktur der Matrix des linearisierten Systems und die sogenannte Zentrumsmannigfaltigkeit, die von den nichtlinearen Termen abhängt. Grob gesprochen gilt:

Die Zentrumsmannigfaltigkeit „weiß alles“ über das Verhalten des Systems in der Umgebung eines Gleichgewichtspunktes.

Diese Methode lässt sich auch auf Bifurkationsprobleme anwenden und erlaubt eine Reduktion der Anzahl der zu betrachtenden Differentialgleichungen.

Definition: Eine Teilmenge M des Zustandsraumes eines dynamischen Systems heißt *invariant* genau dann, wenn eine Trajektorie für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ in M bleibt, falls sie zu einem festen Zeitpunkt in M ist. Zum Beispiel sind Gleichgewichtspunkte und geschlossene Orbits stets invariant.

Prinzip (Abb. 13.14): Durch jeden Gleichgewichtspunkt P eines dynamischen Systems gehen invariante Mannigfaltigkeiten M_s , M_i und M_z (in einer Umgebung von P).

- (i) Die Trajektorien der *stabilen Mannigfaltigkeit* M_s werden von P angezogen.
- (ii) Die Trajektorien der *instabilen Mannigfaltigkeit* M_i werden von P abgestoßen.
- (iii) Die Dynamik auf der *Zentrumsmannigfaltigkeit* M_z kann unterschiedlich sein.

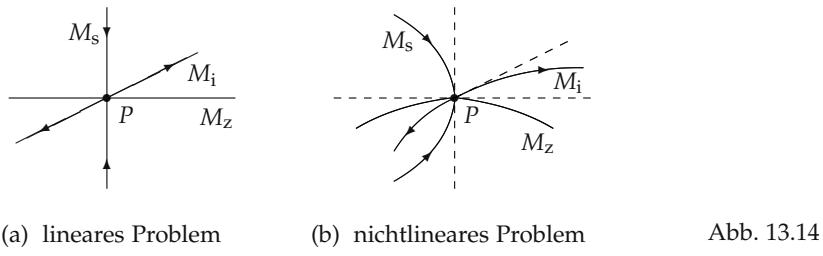


Abb. 13.14

Für das linearisierte Problem sind M_s , M_i und M_z eindeutig bestimmte lineare Unterräume, die zusammen den gesamten Raum aufspannen. Beim Übergang zum nichtlinearen Problem werden M_s , M_i und M_z nur etwas deformiert mit P als Berührungs punkt.

Die Dynamik auf M_s und M_i bleibt in ihrer Struktur erhalten. Deshalb muss nur die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit M_z des nichtlinearen Problems untersucht werden.

► **BEISPIEL:** Wir betrachten

$$x' = -xy, \quad y' = -y + x^2 \tag{13.18}$$

mit dem Gleichgewichtspunkt $(0,0)$. Die Linearisierung

$$x' = 0, \quad y' = -y \quad (13.19)$$

ist entartet, d. h., $(0,0)$ ist *nicht* hyperbolisch. Deshalb versagt das allgemeine Resultat aus 13.3.2. Es liegt hier ein Fall vor, in dem sich aus dem linearisierten Problem nicht das Stabilitätsverhalten des nichtlinearen Problems ablesen lässt. Wir benutzen nun folgendes Verfahren.

Durch den Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ gehen bezüglich des linearisierten Problems (13.19) zwei invariante Mannigfaltigkeiten M_s (y -Achse) und M_z (x -Achse) (Abb. 13.15(a)). Beim Übergang zum nichtlinearen Problem werden diese gestört. Die gestörte Zentrumsmannigfaltigkeit hat die Form

$$M_z : y = h(x). \quad (13.20)$$

Da M_z die x -Achse in $(0,0)$ berührt, gilt $h(0) = h'(0) = 0$. Die Dynamik von M_s bleibt in ihrer Struktur erhalten (Abb. 13.15(b)), während sie sich für M_z ändern kann. Tatsächlich besteht M_z im linearisierten Fall aus lauter Gleichgewichtspunkten, die bei einer Störung in Bewegung geraten können mit noch unbekannter Richtung, die wir jetzt berechnen wollen. Setzen wir (13.20) in (13.18) ein, dann wird die Dynamik auf M_z durch die sogenannte reduzierte Gleichung

$$x' = -xh(x) \quad (13.21)$$

zusammen mit $y(t) = h(x(t))$ bestimmt. Differentiation nach t liefert $y'(t) = h'(x(t))x'(t)$. Setzen wir diesen Ausdruck in (13.18) ein, dann erhalten wir $-y + x^2 = h'(x)(-xy)$. Aus $y = h(x)$ folgt schließlich die fundamentale Differentialgleichung zur Berechnung von h :

$$-h(x) + x^2 = h'(x)(-xh(x)). \quad (\text{D})$$

Der Potenzreihenansatz $h = cx^2 + dx^3 + \dots$ liefert nach Einsetzen in (D) und Koeffizientenvergleich: $c = 1$. Aus der reduzierten Gleichung (13.21) erhalten wir somit die folgende Dynamik auf M_z :

$$x' = -x^3 + \dots, \quad y = x^2 + \dots$$

Wegen $x' \gtrless 0$ für $x \lesssim 0$ zieht $(0,0)$ die Trajektorien von M_z an. Nach Abb. 13.15(c) ist $(0,0)$ eine stabile Gleichgewichtslage des gesamten Systems.

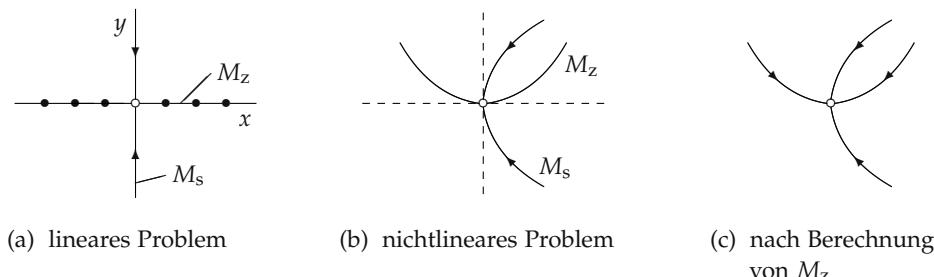


Abb. 13.15

Allgemeine Systeme

Wir studieren das nichtlineare System

$$z' = f(z, p), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (13.22)$$

mit dem reellen Parameter p in einer Umgebung von $p = 0$. Es sei $f(0, p) = 0$ für alle p , d.h., $z = 0$ ist ein Gleichgewichtspunkt von (13.22) (stationärer Punkt). Die Linearisierung lautet

$$z' = Az, \quad A = f_z(0, 0). \quad (13.23)$$

Explizit entspricht (13.22) bzw. (13.23) dem System (13.14) bzw. (13.15), d.h., A ist die $(n \times n)$ -Matrix der ersten partiellen Ableitungen $\partial f_j / \partial z_k$ an der Stelle $(0, 0)$. Dabei gilt $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$. Die Funktionen f_j seien hinreichend glatt.

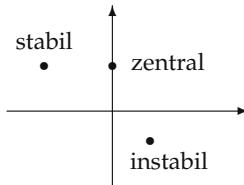


Abb. 13.16

Definition: Einen Eigenwert λ von A nennen wir *stabil* (bzw. *zentral* bzw. *instabil*), falls λ links von der imaginären Achse \mathbb{I} liegt (bzw. auf \mathbb{I} , bzw. rechts von \mathbb{I}) (Abb. 13.16).

Mit n_s bezeichnen wir die Summe der Vielfachheiten aller stabilen Eigenwerte λ als Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$. Entsprechend ergeben sich n_z (bzw. n_i) für die zentralen (bzw. instabilen) Eigenwerte.

Strukturtheorem: Das Strömungsbild des nichtlinearen Ausgangsproblems (13.22) hat lokal⁴ die gleiche Struktur wie das Strömungsbild des folgenden einfachen entkoppelten Systems:

$$u' = g(u, p), \quad u \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (13.24)$$

$$v' = -v, \quad v \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad (13.25)$$

$$w' = w, \quad w \in \mathbb{R}^{n_i}. \quad (13.26)$$

Dabei ist g eine geeignete Funktion.

Als Lösung erhalten wir $v = v(0)e^{-t}$, $w = w(0)e^t$. Die Dynamik von (13.24), (13.25), (13.26) entspricht der Reihe nach der Dynamik des Ausgangssystems (13.22) auf M_z , M_s , M_i . Aus (13.24), (13.25), (13.26) folgt zum Beispiel, dass sich das Bifurkationsproblem auf ein eindimensionales dynamisches System reduzieren lässt, falls $n_z = 1$ ist. Ferner sieht man, dass für $n_z = 0$ (kein zentraler Eigenwert) die Gleichung (13.24) entfällt und die Struktur des Strömungsbildes unabhängig von p wird. Das entspricht der strukturellen Stabilität eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes $z = 0$ von (13.22).

Leider lässt sich die Normalform (13.24), (13.25), (13.26) nicht durch eine einfache Koordinatentransformation herstellen. Zur tatsächlichen Berechnung benutzt man die folgenden Resultate.

⁴In (13.22) betrachtet man eine Umgebung von $z = 0$ für alle p in einer Umgebung von $p = 0$. Dem entspricht eine Umgebung von $u = 0, v = 0, w = 0$ in (13.24), (13.25), (13.26).

Die Berechnung der invarianten Mannigfaltigkeiten des linearisierten Problems

Satz: Die stabile Mannigfaltigkeit $M_s^{(1)}$ des linearisierten Problems (13.23) wird von allen Lösungen z der Gleichungen

$$(A - \lambda I)^k z = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

aufgespannt, wobei λ ein beliebiger stabiler Eigenwert von A ist.

Entsprechend ergeben sich $M_z^{(1)}$ (bzw. $M_i^{(1)}$), indem man die zentralen (bzw. instabilen) Eigenwerte wählt.

Die Berechnung der Zentrumsmannigfaltigkeit des nichtlinearen Problems

Wir wählen auf $M_z^{(1)}$ (bzw. $M_s^{(1)} + M_i^{(1)}$) neue Koordinaten x (bzw. y). Dann entsteht aus dem Ausgangsproblem (13.22) das neue System:

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y, p), & x &\in \mathbb{R}^{n_z}, \\ y' &= \psi(x, y, p), & y &\in \mathbb{R}^{n_s+n_i}. \end{aligned} \tag{13.27}$$

Dabei sind die Eigenwerte der Linearisierungsmatrix $\varphi_x(0, 0, 0)$ (bzw. $\psi_y(0, 0, 0)$) genau die zentralen (bzw. stabilen und instabilen) Eigenwerte von A .

Fall 1: Der Parameter p tritt nicht auf. Für die zentrale Mannigfaltigkeit M_z von (13.22) wählen wir den Ansatz

$$M_z : y = h(x)$$

und berechnen h analog zu dem Beispiel (13.18). Die Dynamik auf M_z wird dann durch die reduzierte Gleichung

$$x' = \varphi(x, h(x)) \tag{13.28}$$

und die sogenannte Versklavungsgleichung $y(t) = h(x(t))$ gegeben.

Reduktionssatz: Die Matrix A besitze keine instabilen Eigenwerte. Dann ist der Gleichgewichtspunkt $z = 0$ des Ausgangsproblems (13.22) asymptotisch stabil (bzw. stabil, bzw. instabil), falls der Gleichgewichtspunkt $x = 0$ der reduzierten Gleichung (13.28) die entsprechende Eigenschaft hat.

Fall 2: Der Parameter p tritt auf (mögliche Bifurkation für $p = 0$). Wir fügen jetzt die Gleichung $p' = 0$ zu (13.27) hinzu und berechnen die Zentrumsmannigfaltigkeit dieses erweiterten Systems. Dieser Trick liefert die Zentrumsmannigfaltigkeit des nicht erweiterten Systems in Abhängigkeit von p :

$$M_z : y = h(x, p).$$

Die für die Bifurkation entscheidende Dynamik auf M_z wird dann durch die *reduzierte Gleichung*

$$x' = \varphi(x, h(x, p), p) \tag{13.29}$$

und die sogenannte *Versklavungsgleichung*

$$y(t) = h(x(t), p) \tag{13.30}$$

gegeben. Die Dynamik auf M_s bzw. M_i hat die gleiche Struktur wie die von $M_s^{(1)}$ bzw. $M_i^{(1)}$.

Das Versklavungsprinzip: Viele physikalische Systeme bestehen aus einer riesigen Anzahl von Untersystemen (z. B. Molekülen). Kritische Phänomene entsprechen häufig Bifurkationen

(z. B. Phasenübergängen). Dabei beobachtet man die zunächst sehr überraschende Tatsache, dass diese kritischen Phänomene nur durch wenige Freiheitsgrade des Systems beschrieben werden können. Um das zu verstehen, betrachten wir Gleichung (13.22) bzw. (13.27). Die folgende Situation ist typisch:

- (i) Für $p < 0$ sind alle Eigenwerte von A stabil.
- (ii) Für $p = 0$ treten zentrale Eigenwerte und für $p > 0$ instabile Eigenwerte auf.

Dadurch ergibt sich ein Stabilitätsverlust der Gleichgewichtslage $z = 0$ für $p = 0$. Das wesentliche Bifurkationsverhalten wird durch die reduzierte Gleichung (13.29) für die Freiheitsgrade x bestimmt. Die übrigen Freiheitsgrade y hängen von x ab, was durch (13.30) beschrieben wird. Physiker sagen, dass die Freiheitsgrade y durch die Gleichung $y = h(x, p)$ der Zentrumsmanigfaltigkeit von den Freiheitsgraden x *versklavt* werden.

Zusammengefasst heißt das:

Bifurkation ergibt sich dadurch, dass einige Eigenwerte die imaginäre Achse überschreiten. Die Anzahl der wesentlichen Freiheitsgrade ist gleich der Summe der Vielfachheiten dieser Eigenwerte (Dimension der Zentrumsmanigfaltigkeit).

Auch bei Turbulenz beobachten die Physiker den überraschenden Effekt, dass dieses chaotische Verhalten durch endlich viele Freiheitsgrade beschrieben werden kann. Der mathematische Grund dafür ist die Existenz eines endlichdimensionalen globalen Attraktors, der die Dynamik für große Zeiten regiert. Dieser Attraktor besitzt eine komplizierte Struktur, die darin zum Ausdruck kommt, dass er eine gebrochene Dimension hat (vgl. 13.9).

13.7 Attraktoren

Kontinuierliche dynamische Systeme: Eine invariante abgeschlossene Menge \mathbb{A} heißt ein *Attraktor*⁵ genau dann, wenn es eine offene Umgebung U von \mathbb{A} gibt, so dass jede Trajektorie $z = z(t)$, die zur Zeit $t = 0$ in U startet, die Eigenschaft besitzt, dass ihr Abstand zu \mathbb{A} für $t \rightarrow +\infty$ gegen null geht, d. h., es gilt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(z(t), \mathbb{A}) = 0.$$

Ist U gleich dem gesamten Raum, dann sprechen wir von einem *globalen Attraktor*. Ein solcher Attraktor zieht alle Trajektorien an. Deshalb gibt seine Kenntnis Auskunft über das Verhalten des Systems für große Zeiten. Ist der globale Attraktor ein Gleichgewichtspunkt, dann strebt das System für große Zeiten in eine eindeutige Gleichgewichtslage (Abb. 13.17).

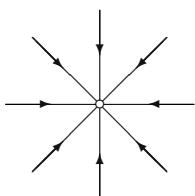


Abb. 13.17

► **BEISPIEL:** Jeder asymptotisch stabile Gleichgewichtspunkt und jeder stabile Grenzzyklus (periodische Bewegung) ist ein Attraktor (Abb. 13.9).

⁵In der Literatur werden Attraktoren in sehr unterschiedlicher Weise definiert.

13.8 Diskrete dynamische Systeme und Iterationsverfahren

Es sei $y = f(x)$ eine reelle Funktion. Das Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.31)$$

interpretieren wir als diskretes dynamisches System Σ , d. h. als Bewegung auf der Zahlengeraden (Abb. 13.18). Befindet sich Σ zur Zeit $t = n\Delta t$ ($\Delta t > 0$) im Punkt x_n , dann geht es nach der Vorschrift (13.31) zur Zeit $t = (n+1)\Delta t$ in den Punkt x_{n+1} über.

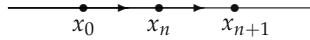


Abb. 13.18

Gleichgewichtspunkte (Fixpunkte): Ein Fixpunkt x von f ist definitionsgemäß eine Lösung der Gleichung

$$x = f(x). \quad (13.32)$$

Dem entspricht ein Gleichgewichtszustand, denn aus $x_0 = x$ und (13.31) folgt, dass $x_n = x$ für alle Zeiten $t = n\Delta t$ gilt.

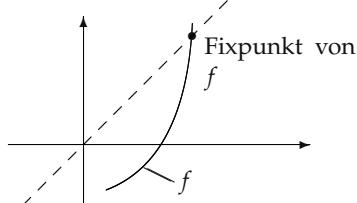


Abb. 13.19

Fixpunkte sind geometrisch die Schnittpunkte des Graphen von f mit der Diagonalen (Abb. 13.19). Der folgende Satz zeigt z. B., dass ein Fixpunkt stabil ist, falls der Betrag des Anstiegs von f im Fixpunkt *kleiner* als der Anstieg der Diagonalen ist.

Satz 1 (Stabilität): Es sei f differenzierbar. Gilt

$$|f'(x)| < 1 \quad \text{bzw.} \quad |f'(x)| > 1,$$

dann ist der Fixpunkt x stabil bzw. instabil (d. h., das Iterationsverfahren (13.31) konvergiert bzw. divergiert).

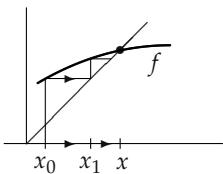
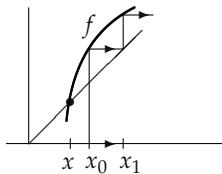
(a) stabiler Fixpunkt x (b) instabiler Fixpunkt x

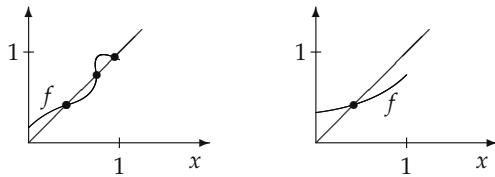
Abb. 13.20

Die Abb. 13.20 zeigt den anschaulichen Hintergrund. Für die *numerische Mathematik* hat dieser Satz zur Folge, dass *nicht* jede Lösung x von (13.32) durch ein Iterationsverfahren berechnet werden kann. Erstens muss x ein stabiler Fixpunkt sein und zweitens muss der Startwert x_0 im Anziehungsbereich des Fixpunktes liegen, um Konvergenz zu erhalten.

Satz 2 (Spezialfall des Fixpunktsets von Brouwer): Bildet die stetige Funktion f das Einheitsintervall $[0, 1]$ stetig in sich ab, dann besitzt f einen Fixpunkt, d. h., das zugehörige diskrete dynamische System hat mindestens eine Gleichgewichtslage.

Abb. 13.21(a) veranschaulicht diesen Satz.

Satz 3 (Spezialfall des Fixpunktsatzes von Banach): Bildet die differenzierbare Funktion f das Einheitsintervall $[0, 1]$ in sich ab mit $|f'(y)| < 1$ für alle $y \in [0, 1]$, dann besitzt f auf $[0, 1]$ genau einen Fixpunkt x , gegen den das Iterationsverfahren (13.31) für jeden Startwert $x_0 \in [0, 1]$ konvergiert (Abb. 13.21(b)).



(a)

(b)

Abb. 13.21

In der Sprache der diskreten dynamischen Systeme besagt dieser Satz, dass genau eine Gleichgewichtslage x existiert, die ein *Attraktor* für das Einheitsintervall ist.

Periodische Bewegungen (Fixpunkte iterierter Abbildungen): Mit f^2 bezeichnen wir die iterierte Abbildung, d. h. $f^2(x) = f(f(x))$. Ist x ein Fixpunkt von f^2 , dann entspricht diesem Startwert eine Bewegung der Periode 2 für (13.31). Denn aus (13.31) folgt mit $x = x_0$ die Beziehung

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x)) = x.$$

Analog gilt $x = x_0 = x_2 = x_4 = \dots$

In gleicher Weise ergibt sich, dass jeder Fixpunkt x der k -fach iterierten Funktion f^k Startwert einer Bewegung der Periode k von (13.31) ist.

13.9 Fraktale

Vernünftige Kurven bzw. Flächen sind eindimensional bzw. zweidimensional. Es gibt jedoch bizarre Gebilde (z. B. Attraktoren dynamischer Systeme), die so kompliziert aufgebaut sind, dass man ihnen *keine* ganzzahlige Dimension zuordnen kann.

Definition: Es sei M eine Menge im \mathbb{R}^n . Die Dimension d von M wird durch

$$d = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$$

definiert, wobei $N(\varepsilon)$ die Mindestanzahl der Kugeln vom Radius ε ist, die zur Überdeckung von M benötigt werden.

Für vernünftige Mengen stimmt d mit der anschaulichen Dimension überein.

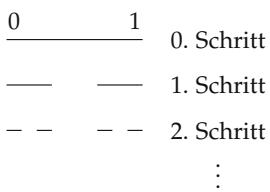


Abb. 13.22

► **BEISPIEL 1** (die pathologische Cantormenge): Wir wollen eine Teilmenge C des Einheitsintervalls konstruieren, die eine komplizierte Struktur besitzt. Hierzu entfernen wir im ersten Schritt das mittlere Drittel. Im zweiten Schritt werden in den verbleibenden beiden Intervallen

die mittleren Drittel entfernt usw. (Abb. 13.22). Die so entstehende sogenannte *Cantormenge C* ist nirgends dicht im Einheitsintervall und besitzt die Dimension

$$d = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309.$$

Denn im $(k+1)$ -Konstruktionsschritt entsteht eine Überdeckung von C bestehend aus $N(\varepsilon) = 2^k$ Intervallen der Länge $\varepsilon = 3^{-k}$.

Aus Cantormengen kann man komplizierte höherdimensionale Gebilde aufbauen. In Abb. 13.23 betrachten wir das Produkt einer Geraden mit einer Cantormenge, d. h., durch jeden Punkt der Cantormenge C geht eine Gerade parallel zur y -Achse. Tatsächlich kann man eine solche Menge nicht zeichnen. Hat ein Attraktor eine solche Struktur, dann ist die Dynamik des Systems sehr kompliziert (chaotisch). Insbesondere hängen die Trajektorien außerordentlich sensitiv von den Anfangsdaten ab (seltsamer oder chaotischer Attraktor).

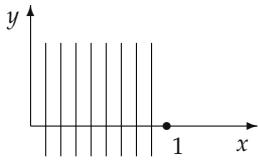


Abb. 13.23

► **BEISPIEL 2** (die pathologische Kochkurve): Abb. 13.24 zeigt die ersten Schritte zur Konstruktion der *Kochkurve*. (Man füge stets neue Zacken hinzu.) Diese hat die fraktale Dimension

$$d = \ln 4 / \ln 3 = 1,2718.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass eine „Kurve“ nicht unbedingt eindimensional sein muss. Zitterkurven wie die Kochkurve werden bei der Brownschen Bewegung beobachtet (Wärmebewegung relativ großer Teilchen in Flüssigkeiten).

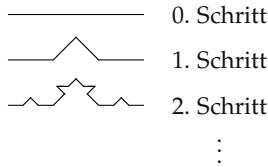


Abb. 13.24

13.10 Übergang zum Chaos

In der Natur beobachtet man turbulente Bewegungen, die eine sehr komplizierte Struktur besitzen. In der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts wurde durch Computersimulationen entdeckt, dass bereits sehr einfache deterministische Systeme ohne jede Wahrscheinlichkeitsstruktur eine sehr komplizierte Dynamik entwickeln können. Wir betrachten hierzu zwei Beispiele:

- (i) Das Entstehen von Chaos durch die Existenz eines seltsamen Attraktors (vgl. 13.10.1).
- (ii) Das Entstehen von Chaos durch ständige Periodenverdopplung, d. h., durch einen äußereren Einfluss entstehen immer mehr periodische Bewegungen (vgl. 13.10.2).

13.10.1 Kontinuierliche dynamische Systeme

► **BEISPIEL 1** (das *Lorenz-System*): Um meteorologische Phänomene zu verstehen, studierte Lorenz im Jahre 1963 ein kompliziertes System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen,

das die Kopplung von Wärmezufuhr und Wärmeleitung in der Atmosphäre modelliert. Um dieses System zu lösen, machte Lorenz einen Fourieransatz und bemerkte, dass drei Frequenzen dominierten, während die anderen Terme der Reihenentwicklung klein waren. Das ergab das folgende System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$x' = a(y - x), \quad y' = bx - y - xz, \quad z' = xy - c. \quad (13.33)$$

Computerberechnungen zeigten, dass dieses so harmlos aussehende System für gewisse Werte der Parameter a, b, c eine komplizierte Dynamik besitzt, die man mit der Bewegung einer Fliege um zwei Lampen L_1 und L_2 vergleichen kann. Die Fliege (Trajektorie) bewegt sich in einer Spirale um L_1 und saust plötzlich in einer Spirale um L_2 (Abb. 13.25). Hier liegt ein sogenannter seltsamer Attraktor vor, der grob gesprochen aus sehr dicht aneinander gepackten unendlich vielen Blättern besteht mit „winzigsten“ Räumen zwischen den Blättern.

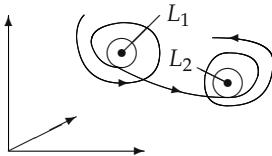


Abb. 13.25

Entscheidend ist, dass die Trajektorien sehr sensibel von den Anfangswerten abhängen. Kleinste Störungen der Anfangslage führen zu drastischen Änderungen der Trajektorien. Sarkastisch kann man das Lorenz-Modell als den Todesstoß für präzise langfristige Wettervorhersagen interpretieren. Kleinste Veränderungen in der Atmosphäre können große Wetterveränderungen herbeiführen.

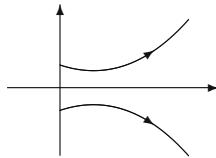
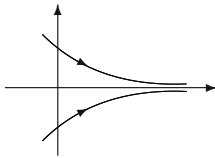
(a) $\lambda > 0$ (b) $\lambda < 0$

Abb. 13.26

Der entscheidende Mechanismus für das Entstehen seltsamer Attraktoren besteht darin, dass in gewissen Richtungen die Strecken durch die Strömung exponentiell mit der Zeit t , d. h. um den

$$\text{Streckungsfaktor} = e^{\lambda t}$$

auseinanderlaufen (Abb. 13.26(a) mit $\lambda > 0$), während sie in anderen Richtungen exponentiell kontrahiert werden (Abb. 13.26(b) mit $\lambda < 0$). Die richtungsabhängige Zahl λ heißt *Ljapunovexponent*.

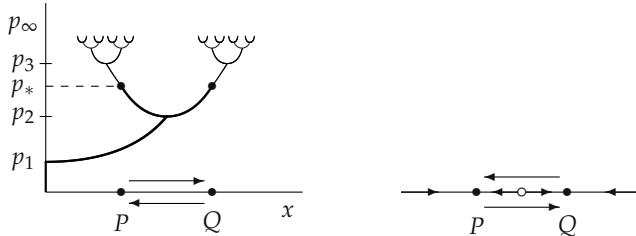
13.10.2 Diskrete dynamische Systeme und Periodenverdopplung

► **BEISPIEL (FEIGENBAUMBIFURKATION):** Wir betrachten das folgende Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = 4px_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.34)$$

mit dem Parameter $p > 0$. Berechnet man für festes p eine große Anzahl N von Iterationen und drückt man die Ergebnisse etwa der letzten $N/5$ Iterationen aus, dann erhält man das Diagramm von Abb. 13.27(a), d. h., für festes p wird der Attraktor dargestellt.

Genauer: die Punkte x des Diagramms für $p < p_2$ entsprechen einem stabilen Fixpunkt (Gleichgewichtspunkt), der alle Trajektorien anzieht. Für $p_2 < p < p_3$ ist eine stabile periodische Bewegung der Periode 2 vorhanden (stabiler Grenzzyklus), die alle Trajektorien anzieht. (Die periodische Bewegung geschieht für $p = p_*$ zwischen den Punkten P und Q ; die genaue Dynamik ist in Abb. 13.27(b) angegeben.) Bei weiterer Vergrößerung des „äußeren Parameters“ p spalten sich jeweils die stabilen Grenzzyklen in zwei neue stabile Grenzzyklen unter Verdopplung der Perioden auf. In der Nähe von p_∞ wird der Attraktor immer komplizierter. Das System geht in eine turbulente (chaotische) Bewegung über.



(a)

(b)

Abb. 13.27

Um dieses Verhalten zu verstehen, setzen wir

$$f_p(x) = 4px(1-x)$$

und benutzen die Resultate aus Abschnitt 13.8.

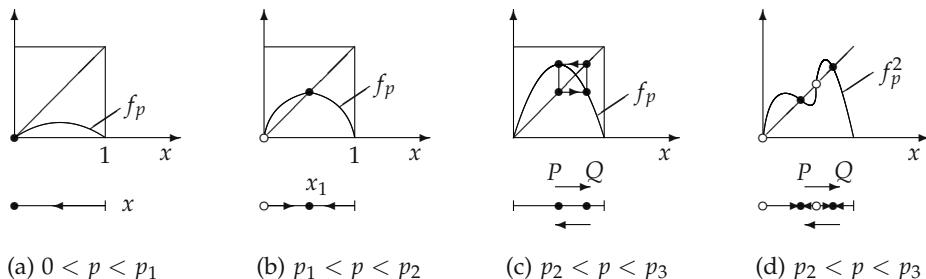


Abb. 13.28

(a) Für festes p mit $0 < p < p_1$ besitzt das System genau einen Fixpunkt (Gleichgewichtspunkt) $x = 0$. Dieser ist stabil, weil $|f'_p(0)| < 1$ gilt, d.h., der Graph von f_p hat im Punkt $x = 0$ einen Anstieg kleiner als eins (Abb. 13.28(a)).

(b) Für festes p mit $p_1 < p < p_2$ besitzt das System zwei Fixpunkte $x = 0$ und $x = x_1$, wobei $x = 0$ instabil ist (der Anstieg f_p in $x = 0$ ist größer als eins) und $x = x_1$ stabil ist (Abb. 13.28(b)).

(c) Für festes p mit $p_2 < p < p_3$ besitzt das System eine periodische Bewegung der Periode 2 zwischen den Punkten P und Q (Abb. 13.28(c)). Die Stabilität dieser periodischen Bewegung folgt daraus, dass P und Q stabilen Fixpunkten der iterierten Abbildung f_p^2 entsprechen. Daneben existieren noch zwei instabile Fixpunkte $x = x_0$ und $x = x_1$, so dass sich die in Abb. 13.28(d) angegebene Dynamik ergibt.

Bei weiterer Vergrößerung von p werden die stabilen Fixpunkte von f_p^2 instabil, und es entstehen Bewegungen der Periode 2 von f_p^2 , die Bewegungen der Periode 4 von f_p entsprechen usw.

Das Universalitätsprinzip von Feigenbaum

Feigenbaum berechnete um 1980 auf einem Taschenrechner den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+2} - p_{n+1}} = \delta = 4,6692.$$

Dann betrachtete er anstelle von f_p eine andere Funktion mit qualitativ gleichem Verhalten und erhielt zu seiner großen Überraschung exakt die gleiche Zahl δ . Das ist ein sehr interessantes Phänomen. Die sogenannte *Universalitätshypothese* besagt: Bei allen Übergängen zum Chaos mit Periodenverdopplung tritt die gleiche Naturkonstante δ auf. Für große Klassen von Iterationsverfahren auf dem Einheitsintervall ist das bewiesen worden, wobei ein Beweisschritt auf einer Computerberechnung beruht (computer-assisted proof).

Die Universalitätstheorie weist darauf hin, dass auch der Übergang zum Chaos (Turbulenz) von strengen Gesetzmäßigkeiten beherrscht wird. Es gibt auch physikalische Experimente mit flüssigem Helium, die die Universalitätshypothese bestätigen.

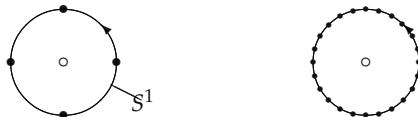
13.11 Ergodizität

Wir betrachten auf dem Rand des Einheitskreises S^1 das Iterationsverfahren

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + 2\pi\beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.35)$$

wobei φ den Winkel bezeichnet, d. h., es handelt sich in jedem Schritt um eine Drehung mit dem Winkel $2\pi\beta$.

Fall 1: Ist β eine rationale Zahl, dann besteht der Orbit nur aus einer *endlichen* Zahl von Punkten. Das System kehrt nach endlicher Zeit in seine Ausgangslage zurück (Abb. 13.29(a)).



(a) β rational ($\beta = \frac{1}{4}$) (b) β irrational

Abb. 13.29

Fall 2: Ist β irrational, dann bedeckt der Orbit *dicht* die Kreislinie. Ferner gilt für jede stetige Funktion f , dass für fast alle Startwerte $\varphi_0 \in S^1$ der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi_k) = \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi / 2\pi \quad (13.36)$$

existiert und durch ein Integral auf S^1 ausgedrückt werden kann. Links steht der Mittelwert über einen großen Zeitraum (Zeitmittel), während rechts ein Integral steht (Scharmittel), das sich leicht berechnen lässt. Zum Beispiel erhalten wir für $f(\varphi) \equiv 1$ den zeitlichen Mittelwert der Lage:

$$\bar{\varphi} = \pi.$$

Die Relation (13.36) drückt die Ergodizität der Bewegung aus. Der wesentliche Grund für das Bestehen von (13.36) ist die Tatsache, dass die Bewegung (Drehung) das Maß auf S^1 invariant lässt.

Die Ergodentheorie besitzt ihren Ursprung in der Gastheorie des 19. Jahrhunderts (statistische Mechanik). Die Bewegung der riesigen Anzahl von Molekülen eines Gases kann nicht berechnet werden. Gemessen werden im Experiment Größen, die Mittelwerte über lange Zeiträume darstellen. Um diese Mittelwerte zu berechnen, benutzt man nicht die Trajektorien, sondern ein Maß auf dem Phasenraum und eine Relation analog zu (13.36). Die rechte Seite von (13.36) kann dann interpretiert werden als Erwartungswert im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In der klassischen Mechanik nutzt man die Tatsache aus, dass der Fluss Hamiltonscher Systeme im Phasenraum das Volumen invariant lässt (Satz von Liouville). Das obige Resultat (13.36) ist ein Spezialfall des Ergodensatzes von Birkhoff über maßtreue Abbildungen.

Der Birkhoffsche Ergodensatz: Es sei μ ein Maß auf der Menge M mit $\mu(M) = 1$. Ferner sei $T : M \rightarrow M$ eine Transformation der Menge M in sich, die das Maß μ erhält. Wir betrachten das diskrete dynamische System

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Ferner sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine über M integrierbare Funktion bezüglich μ . Dann gilt:

(i) Für fast alle Startpunkte $x_0 \in M$ existiert das „Zeitmittel“

$$f_*(x_0) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

(ii) Für das „Scharmittel“ $\int_M f(x) d\mu$ erhält man

$$\int_M f_*(x) d\mu = \int_M f(x) d\mu.$$

(iii) Die Funktion f_* ist eine Erhaltungsgröße des diskreten dynamischen Systems, d. h., es gilt $f_*(Tx) = f_*(x)$ für fast alle $x \in M$.

Definition: Das diskrete dynamische System heißt *ergodisch* genau dann, wenn für fast alle Startwerte $x_0 \in M$ das Zeitmittel gleich dem Scharmittel ist, d. h.

$$f_*(x_0) = \int_M f(x) d\mu.$$

Korollar: Das System ist genau dann ergodisch, wenn alle invarianten Mengen das Maß null oder eins haben.

Insbesondere ist das System ergodisch, falls es nur konstante Erhaltungsgrößen besitzt.

13.12 Störung quasiperiodischer Bewegungen in der Himmelsmechanik (KAM-Theorie), Resonanzphänomene und Relaxation

13.12.1 Grundideen

Die Frage nach der Stabilität unseres Planetensystems stellt eines der großen Probleme in der Geschichte der Mathematik dar. Vernachlässigt man zunächst die Anziehungskraft zwischen den einzelnen Planeten, dann bewegt sich jeder Planet periodisch mit unterschiedlichen Frequenzen. Eine solche Bewegung heißt *quasiperiodisch*. Berücksichtigen wir jetzt die Kräfte zwischen den Planeten, dann handelt es sich um die Störung einer quasiperiodischen Bewegung. Im Jahre 1954

entdeckte Kolmogorov, dass solche Störungen Bewegungsabläufe erzeugen, die sehr sensibel von den Anfangsbedingungen abhängen. Die Theorie wurde daraufhin von Arnold und Moser ausgebaut, deshalb spricht man von der KAM-Theorie.

Bezogen auf die Planetenbewegung bedeutet die KAM-Theorie, dass das Langzeitverhalten der Planetenbewegung sehr sensibel von den Anfangsdaten abhängt. Computerberechnungen haben allerdings nachgewiesen, dass die Stabilität unseres Planetensystems für mehrere Millionen Jahre sichergestellt ist. Physikalisch ergibt sich die Komplexität durch das mögliche Auftreten von Resonanzen bei Störungen.

Um eine geometrische Vorstellung mit der KAM-Theorie zu verbinden, benutzen wir den Phasenraum. Die Bewegung eines jeden Planeten wird dann charakterisiert durch die zeitliche Veränderung des Ortsvektors $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ und des Impulsvektors $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$. Dabei ist $\mathbf{p} = m\mathbf{x}'$ (Masse mal Geschwindigkeit). Für jeden Planeten ergeben sich damit 6 Freiheitsgrade; insgesamt wird die Bewegung von N Planeten in einem $6N$ -dimensionalen Phasenraum beschrieben. Einer quasiperiodischen Bewegung entsprechen invariante Mannigfaltigkeiten, die Verallgemeinerungen des zweidimensionalen Torus sind und deshalb als invariante Tori bezeichnet werden. Für das ungestörte Problem sind die meisten Tori vom Nichtresonanzcharakter (z. B. ist der Quotient zweier Frequenzen eine irrationale Zahl). Bei der Störung werden die meisten nichtresonanten Tori nur deformiert, d. h., der Bewegungsablauf bleibt in seiner Struktur erhalten; es gibt aber auch nichtresonante Tori, die zerstört werden.

Bei den Berechnungen in der Himmelsmechanik führt das dazu, dass die entstehenden Reihen sehr kleine Nenner enthalten und das Konvergenzverhalten dieser Reihen sehr sensibel gegenüber kleinsten Änderungen ist. Wir wollen das im folgenden anhand einfacher Beispiele erläutern.

13.12.2 Typische Resonanzerscheinungen

Resonanzeffekte werden von Ingenieuren gefürchtet. Sie können zur Zerstörung von Maschinen und Brücken führen.

Äußere Resonanzen: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon \sin(\alpha t)$$

mit dem kleinen Parameter ε . Wir interpretieren den Term auf der rechten Seite als eine kleine äußere periodische Kraft mit der Kreisfrequenz α .

Fall 1: Keine Resonanz, d. h. $\omega \neq \alpha$. Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = A \sin(\omega t + B) + \frac{\varepsilon \sin(\alpha t)}{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Für $\varepsilon = 0$ (keine äußere Kraft) entstehen Eigenschwingungen des Systems mit der Kreisfrequenz ω .

Für $\varepsilon \neq 0$ tritt im fastkritischen Fall, in dem ω nahe bei α liegt, der kleine Nenner $\omega^2 - \alpha^2$ auf, der zu sehr großen Amplituden führt.

Fall 2: Resonanz, d. h. $\omega = \alpha$. Hier lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \sin(\omega t + B) - (\varepsilon/2\omega)t \cos(\omega t).$$

Der für die Technik gefährliche Resonanzeffekt ergibt sich aus dem Term „ $t \cos(\omega t)$ “, dessen Amplitude mit wachsender Zeit t immer größer wird und zur Zerstörung des Systems führt.

Beim Bau von Brücken muss man zum Beispiel darauf achten, dass die Schwingungen, die durch den Verkehr (Züge, Autos, Marschkolonnen) erzeugt werden, nicht in Resonanz mit den

Eigenschwingungen der Brücke stehen. Die Frequenzen von Eigenschwingungen ergeben sich mathematisch aus Eigenwertproblemen.

Innere Resonanzen: Wir betrachten zwei miteinander gekoppelte harmonische Oszillatoren, die, mit dem kleinen Parameter ε , durch das System

$$x'' + \omega x = \varepsilon f(x, y), \quad y'' + \omega_* y = \varepsilon g(x, y)$$

beschrieben werden. Für $\varepsilon = 0$ sind beide Systeme entkoppelt und vollführen Eigenschwingungen. Jeder Orbit ist im (x, x') -Phasenraum bzw. im (y, y') -Phasenraum eine Ellipse (vgl. Abb. 13.2). Der Gesamtorbit im (x, x', y, y') -Phasenraum stellt dann das Produkt zweier Ellipsen dar – das ist ein Torus.

Der gefährliche Resonanzeffekt kann auftreten, wenn das Verhältnis ω / ω_* rational ist. Um das an einem Beispiel zu erläutern, setzen wir $f = y$, $g = 0$ und $\omega = \omega_*$. Dann entsteht die Lösung $y = \varepsilon \sin(\omega t)$, die den Resonanzeffekt

$$x = -(\varepsilon / 2\omega) t \cos(\omega t)$$

liefert.

13.12.3 Relaxation (quasistatische Näherung)

Unter Relaxation versteht man, dass ein System nach hinreichend langer Zeit in eine Gleichgewichtslage übergeht (inverser Resonanzeffekt). Die „typische Zeit“, die das System dafür benötigt, bezeichnet man als *Relaxationszeit*. Bei einem Exponentialgesetz

$$x(t) = x(0)e^{-at}$$

heißt $t_{\text{rel}} = 1/a$ die Relaxationszeit. Für viele Systeme in der Natur ist charakteristisch, dass die inneren Relaxationszeiten viel kleiner sind als die durch äußere Einflüsse erzeugten Relaxationszeiten. Deshalb dominieren die äußeren Einflüsse. Zur Illustration betrachten wir das folgende einfache Modell

$$x' + ax = Ae^{-bt}$$

mit den positiven Konstanten a , b , A und der Lösung

$$x(t) = \text{const} \cdot e^{-at} - \frac{A}{b} e^{-bt}.$$

Für die Relaxationszeiten erhalten wir:

$$\text{inneres System} \quad t_{\text{inn}} = 1/a, \quad \text{äußeres System} \quad t_{\text{äuß}} = 1/b.$$

Ist t_{inn} wesentlich kleiner als $t_{\text{äuß}}$, dann gilt für große Zeiten t näherungsweise

$$x(t) = -\frac{A}{b} e^{-bt},$$

was einer Lösung der vereinfachten Ausgangsgleichung $x' = Ae^{-bt}$ entspricht. Bei dieser sogenannten quasistatischen Näherung spielt das innere System (d. h. der Term „ ax'' “) keine Rolle. Die Physiker sagen, dass das System von dem äußeren Einfluss „versklavt“ wird.

13.13 Singularitätentheorie (Katastrophentheorie)

Die von dem französischen Mathematiker René Thom um 1970 begründete „Katastrophentheorie“ basiert auf drei fundamentalen Begriffen:

- (i) strukturelle Stabilität,
- (ii) Generizität,
- (iii) Transversalität.

Wir wollen zeigen, dass (i) bis (iii) von *allgemeiner* Bedeutung für die Mathematik sind.

13.13.1 Reguläres und singuläres Verhalten

Definition: Es seien f, g und F reelle Funktionen.

- (i) x ist ein regulärer Fixpunkt von f genau dann, wenn $f(x) = x$ und $f'(x) \neq 1$ gilt.
- (ii) x ist eine reguläre Nullstelle von g genau dann, wenn $g(x) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ gilt.
- (iii) x ist ein regulärer kritischer Punkt von F genau dann, wenn $F'(x) = 0$ und ebenso $F''(x) \neq 0$ gilt.
- (iv) y ist ein singulärer Wert von F genau dann, wenn y ein kritisches Niveau von F ist, d. h., es gibt einen Punkt x mit $F(x) = y$ und $F'(x) = 0$.

Andernfalls heißt y ein regulärer Wert von F .

Diese Begriffe hängen sehr eng miteinander zusammen. Setzt man $g(x) := f(x) - x$, so ist x genau dann ein regulärer Fixpunkt von f , wenn x eine reguläre Nullstelle von g ist. Ferner ist x genau dann ein regulärer kritischer Punkt von F , wenn x eine reguläre Nullstelle von F' ist.

Transversalität: Tatsächlich basieren diese Regularitätsbegriffe auf der Transversalität. Eine Nullstelle von g ist genau dann regulär, wenn der Graph von g die x -Achse transversal schneidet (Abb. 13.30(a)).

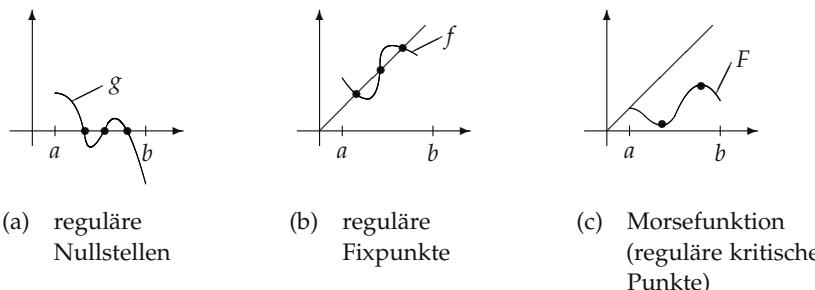


Abb. 13.30

Nichtreguläre Fixpunkte, Nullstellen oder kritische Punkte heißen singulär; ihnen entsprechen „Katastrophen“.

Generizität: Der folgende Satz ist die einfachste Variante des Satzes von Sard.

Satz 1: Ist $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, dann sind fast alle⁶ reellen Zahlen reguläre Werte von F .

Das bedeutet anschaulich, dass die kritischen Niveaus von F , denen Maxima, Minima oder horizontale Wendepunkte entsprechen, sehr selten auftreten. In Abb. 13.31 sind y_1, y_2, y_3 singuläre Werte von F (kritische Niveaus), während alle anderen reellen Zahlen y regulären Werten von F entsprechen.

⁶Somit hat die Menge der singulären Werte das Maß null.

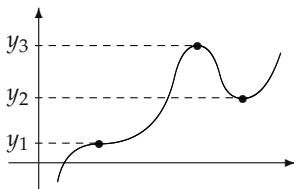


Abb. 13.31

Den Begriff „generisch“ gebraucht man in dem Sinne „in den meisten Fällen“, wobei das zu präzisieren ist. Der obige Satz von Sard kann kurz so ausgedrückt werden: Generisch ist jede reelle Zahl ein regulärer Wert von F . Singuläre Werte sind nicht generisch.

Transversalität und Generizität: Der folgende Satz zeigt, dass zwischen beiden Begriffen ein enger Zusammenhang besteht. Man sagt, eine reelle Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann regulär, wenn sie auf dem Rand nicht verschwindet und nur eine endliche Anzahl von Nullstellen hat, die alle regulär sind (Abb. 13.30(a)).

Satz 2 (einfachste Variante des Transversalitätstheorems von Thom): Sei $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in den Randpunkten $x = a, b$ nicht verschwindet. Generisch ist dann h regulär.

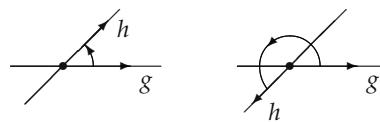
Genauer: Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine reguläre C^∞ -Funktion g mit

$$\max_{a \leq x \leq b} |h(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

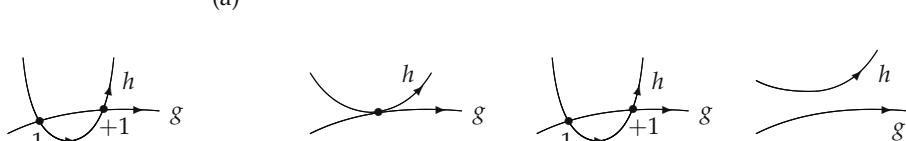
Der Beweis basiert auf dem Satz von Sard.

► **BEISPIEL 1** (Morsefunktionen): Eine reelle Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Morsefunktion* genau dann, wenn F' regulär ist. Eine solche Funktion besitzt auf dem Rand $x = a, b$ keine kritischen Punkte, und im Innern des Intervalls $[a, b]$ sind nur endlich viele kritische Punkte vorhanden, die alle regulär sind (Abb. 13.30(c)).

Wendet man Satz 2 auf $h = F'$ an, dann erhält man: Morsefunktionen sind generisch.



(a)



$$S(g, h) = -1 + 1 = 0$$

(b)

$$S(g, h) = 0$$

(c)

Abb. 13.32

► **BEISPIEL 2** (Schnitzzahl zwischen zwei Kurven): Wir beschreiben jetzt eine allgemeine Strategie in der modernen Differentialtopologie. Wollen wir zum Beispiel zwei Kurven eine Schnitzzahl zuordnen, dann gehen wir folgendermaßen vor:

(a) Wir betrachten die generische transversale Schnittsituation wie in Abb. 13.32(a) und ordnen ihr in natürlicher Weise eine lokale Schnittzahl $s(g, h) = 1$ (bzw. $= -1$) zu, falls der Winkel zwischen g und h spitz (bzw. stumpf) ist.

(b) Besitzen die beiden Kurven nur endlich viele Schnittpunkte, die alle transversal sind, dann wird die Schnittzahl $S(g, h)$ als Summe der lokalen Schnittzahlen erklärt (Abb. 13.32(b)).

(c) Handelt es sich um zwei Kurven, die nicht das reguläre Schnittverhalten (b) besitzen, dann stören wir die beiden Kurven ein wenig, um reguläres Verhalten zu erzielen, und definieren die Schnittzahl als Schnittzahl der Störung. Man hat dann zu zeigen, dass die so definierte Schnittzahl von der Art der Störung unabhängig ist. Abb. 13.32(c) veranschaulicht das.

Die gleiche Strategie haben wir in 12.9 bei der Definition des Abbildungsgrades benutzt.

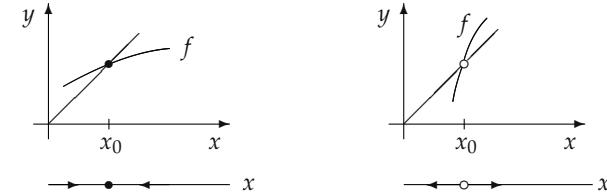
13.13.2 Strukturelle Stabilität

Eine reguläre Nullstelle wie in Abb. 13.30(a) ist strukturell stabil in dem Sinne, dass eine kleine Störung von g und g' nicht das transversale Schnittverhalten ändert.

In ähnlicher Weise sind reguläre Fixpunkte gegenüber kleinen Störungen von f und f' strukturell stabil (Abb. 13.30(b)). Ferner sind reguläre kritische Punkte gegenüber kleinen Störungen von F , F' und F'' strukturell stabil (Abb. 13.30(c)).

► **BEISPIEL 3** (Gleichgewichtspunkte dynamischer Systeme; vgl. 13.8): Es sei x_0 ein Fixpunkt der reellen Funktion f , d.h., der Graph von f schneidet die Diagonale in x_0 oder berührt sie dort.

(a) *Der generische Fall:* Anschaulich erwarten wir, dass in den „meisten Fällen“ der Graph von f die Diagonale in x_0 transversal schneidet, d.h., der Fixpunkt x_0 ist regulär. Das zu f gehörige diskrete dynamische System besitzt dann in x_0 einen Gleichgewichtszustand, der stabil ($|f'(x_0)| < 1$) oder instabil ($|f'(x_0)| > 1$), aber auf jeden Fall strukturell stabil ist, denn durch kleine Störungen von f und f' wird das Stabilitätsverhalten nicht verändert (Abb. 13.33).

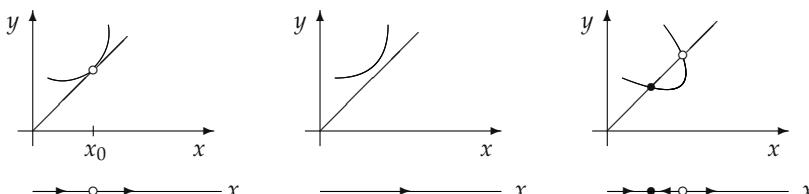


(a) stabil ($|f'(x_0)| < 1$)

(b) instabil ($|f'(x_0)| > 1$)

Abb. 13.33

(b) *Der nichtgenerische Fall* (die „Katastrophe“): Der Entartungsfall bedeutet, dass der Graph von f die Diagonale berührt (Abb. 13.34(a)). Durch kleinste Störungen kann dann das Verhalten drastisch verändert werden.



(a)

(b)

(c)

Abb. 13.34

In dem zugehörigen diskreten dynamischen System bedeutet dies, dass durch kleine Störungen der Gleichgewichtszustand verschwinden kann (Abb. 13.34(b)) oder sich in einen stabilen und einen instabilen Gleichgewichtszustand aufspaltet (Abb. 13.34(c)).

Das Wort „Katastrophe“ wird hier in dem Sinne gebraucht, dass eine *strukturell instabile Situation* vorhanden ist, die durch unterschiedliche Störungen in unterschiedliche Strukturen übergehen kann (Bifurkation im allgemeinsten Sinne).

13.13.3 Wesentliche Terme in der Taylorentwicklung und Normalformen

Bei der Modellierung von Phänomenen in Natur und Technik ist man häufig darauf angewiesen, die Modelle durch Streichen gewisser Terme zu vereinfachen. Es entsteht die folgende fundamentale Frage:

Welche Terme darf man streichen, ohne dass sich die Struktur des Modells verändert?

► **BEISPIEL 4:** Streicht man in der Funktion $f = x_1^2 x_2 + x_2^{1001}$ den für $|x_2| < 1$ winzigen Term x_2^{1001} , dann verändert sich die Struktur grundlegend. Tatsächlich besitzt die Gleichung $f = 0$ die Gerade $x_2 = 0$ als Lösung, während die vereinfachte Gleichung $x_1^2 x_2 = 0$ die beiden Geraden $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ als Lösung hat.

Im folgenden seien alle Funktionen glatt. Unter einer *regulären Koordinatentransformation*

$$y = \varphi(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n),$$

im Punkt $x = 0$ verstehen wir, dass die Funktion φ in einer Umgebung von $x = 0$ erklärt ist, $\varphi(0) = 0$ gilt und $\varphi'(0)^{-1}$ existiert.⁷

Definition: Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ heißen äquivalent im Punkt 0 genau dann, wenn es eine reguläre Koordinatentransformation in 0 gibt, so dass

$$f(x) = g(\varphi(x))$$

für alle x in einer Umgebung von $x = 0$ gilt.

► **BEISPIEL 5:** Eine reelle Funktion mit der Taylorentwicklung

$$f(x) = ax^k + bx^{k+1} + \dots, \quad k = 0, 1, \dots,$$

und $a \neq 0$ ist äquivalent zu ax^k in $x = 0$. Im eindimensionalen Fall darf man also stets die restlichen Terme der Taylorentwicklung streichen.

Das ist bereits für *zwei Variablen falsch*.

► **BEISPIEL 6:** Die Funktion $x_1^2 x_2 + x_2^{2k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) ist nicht äquivalent zu $x_1^2 x_2$ in $(0, 0)$.

► **BEISPIEL 7** (Morselemma): Mit λ_1, λ_2 bezeichnen wir die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

(i) Regulärer Fall: Es sei $ac - b^2 \neq 0$. Dann ist die Funktion

$$f = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + \text{Terme von mindestens dritter Ordnung}$$

im Punkt $(0, 0)$ äquivalent zu $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ (oder auch $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$).

(ii) Singulärer Fall: Für $ac - b^2 = 0$ ist f im Punkt $(0, 0)$ nicht immer äquivalent zu $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$.

⁷ $\varphi'(0)$ bezeichnet die Funktionalmatrix der ersten partiellen Ableitungen im Punkt 0.

Folglich darf man nur im regulären Fall die Terme höherer Ordnung der Taylorentwicklung streichen.

Definition: Eine Funktion f heißt *strukturell stabil* im Punkt 0 genau dann, wenn jede beliebige, hinreichend kleine Störung $f + g$ in 0 zu f äquivalent ist.⁸

Die Funktion $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ ist strukturell stabil für $ac - b^2 \neq 0$.

13.13.4 Parameterfamilien und Elementarkatastrophen

Wir betrachten die sogenannte *erste Elementarkatastrophe*

$$F(x, p) := x^3 + px$$

mit dem Parameter p . Abb. 13.35 zeigt, dass für $p = 0$ der Wendepunkt $x = 0$ nicht strukturell stabil ist, denn er verschwindet für kleine $p \neq 0$. Die Funktion x^3 ist nicht strukturell stabil in $x = 0$, wohl aber die Funktion F in einem Sinne, den wir jetzt präzisieren wollen.

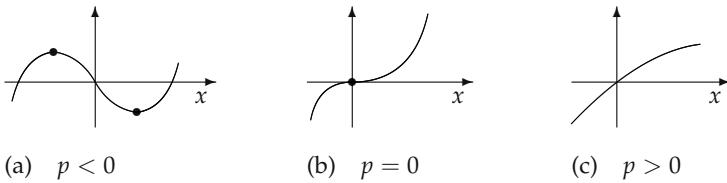


Abb. 13.35

Wir betrachten eine beliebige Funktion

$$F(x, p) \quad \text{mit } x = (x_1, \dots, x_n), \quad p = (p_1, \dots, p_m). \quad (13.37)$$

Wir interpretieren x als Zustandsvariable und p als einen Parameter, der äußere Einflüsse beschreibt.

Wir wollen die Struktur von F in der Umgebung eines festen Punktes (x, p) untersuchen. Durch eine einfache Translation können wir das stets auf die Untersuchung im Punkt $x = 0, p = 0$ zurückführen.

Definition: Die Funktionen $F(x, p)$ und $G(y, q)$ heißen äquivalent im Punkt $(0, 0)$ genau dann, wenn es zwei reguläre Koordinatentransformationen $y = \varphi(x)$ und $q = \psi(p)$ gibt, so dass

$$F(x, p) = G(\varphi(x), \psi(p)) + f(p)$$

in einer Umgebung von $(0, 0)$ mit einer geeigneten Funktion f gilt.

Satz (Spezialfall des Theorems von Thom): Generisch ist jede Parameterfamilie F mit höchstens 2 Parametern im Punkt $(0, 0)$ strukturell stabil und äquivalent zu einer der folgenden Normalformen:

⁸Die Präzisierung von „kleiner Störung“ im Sinne der C^∞ -Whitneytopologie findet man zusammen mit einem Überblick über die Singularitäten- und Katastrophentheorie in [Zeidler 1984ff, Vol. IV, S. 579]. Grob gesprochen muss g zusammen mit allen seinen Ableitungen klein sein.

(i) Ein Parameter

$$x_1^2 + p_1 x_1 \quad (\text{erste Elementarkatastrophe} = \text{Falte}).$$

(ii) Zwei Parameter

$$\pm(x_1^4 + p_1 x_1^2 + p_2 x_1) + M \quad (\text{zweite Elementarkatastrophe} = \text{Spitze}).$$

(iii) Kein Parameter

$$x_1 \quad (\text{Gerade oder Ebene});$$

$$x_1^2 + \dots x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2 \quad (\text{Minimum, Maximum oder Sattelpunkt}).$$

Die Funktion M ist vom Typ der quadratischen Morsefunktion in (iii) bezüglich der restlichen Variablen x_2, \dots, x_n . Die Zahl $n - r$ in (iii) heißt *Morseindex* ($0 \leq r \leq n$).

Verblüffend an diesem Ergebnis ist, dass endlich viele Normalformen ausreichen. Das trifft auch noch auf höchstens 5 Parameter zu (allgemeiner Satz von Thom). Für sechs und mehr Parameter wird die Situation komplizierter.

► **BEISPIEL 8:** Nach Translation sieht eine glatte reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung eines Punktes $x = a$ im generischen Fall aus wie die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung von $x = 0$ mit $g(x) = x$ (regulärer Punkt), $g(x) = x^2$ (reguläres Minimum), $g(x) = -x^2$ (reguläres Maximum) (Abb. 13.36).

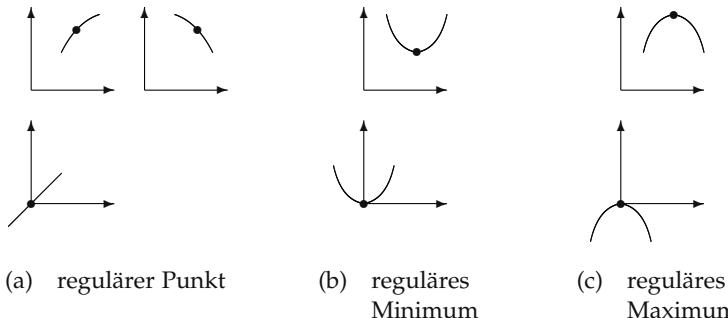


Abb. 13.36

► **BEISPIEL 9:** Nach Translation sieht eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung eines Punktes $x = a$ im generischen Fall aus wie eine der folgenden Funktionen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x = 0$:

$$g(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad (\text{reguläres Minimum; Morseindex} = 0),$$

$$g(x) = -(x_1^2 + \dots + x_n^2) \quad (\text{reguläres Maximum; Morseindex} = n),$$

$$g(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2$$

(regulärer Sattelpunkt;
Morseindex = $n - r$, $0 < r < n$),

$$g(x) = x_1 \quad (\text{regulärer Punkt}).$$

Die Normalformen in den Beispielen 8 und 9 sind strukturell stabil.

13.14 Information und Chaos

Wir betrachten das Iterationsverfahren (diskretes dynamisches System)

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

und nehmen an, dass die Funktion f das Einheitsintervall $[0, 1]$ in sich abbildet. Es gibt eine Größe K (Kolmogorov- oder K -Entropie), die folgende Eigenschaft hat:

- (i) $K = 0$: nichtchaotische Bewegung.
- (ii) $K > 0$: chaotische Bewegung.
- (iii) Zunahme von K heißt Zunahme des Chaos (d. h. Zunahme der Unordnung des Systems).

Die Größe K kann durch Computersimulationen ermittelt werden und ist durch

$$K := \lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} S_{r+1}(N) - S_r(N)$$

definiert.⁹ Diese Größe hat die Bedeutung

$$K = \text{mittlerer Informationsgewinn (Entropiegewinn) längs einer Trajektorie.} \quad (13.38)$$

Um das zu erläutern, teilen wir das Einheitsintervall $[0, 1]$ in N gleiche Teile I_1, \dots, I_N und halten N zunächst fest (Abb. 13.37). Wir führen nun auf dem Computer sehr viele Iterationsverfahren mit unterschiedlichen Startwerten x_0 durch.

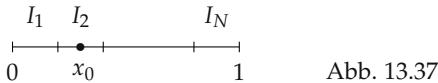


Abb. 13.37

(a) Die Startwerte seien auf die Teilintervalle I_1, \dots, I_N $[0, 1]$ gleichverteilt, d. h., bezeichnet p_j die Wahrscheinlichkeit dafür, dass x_0 in dem Intervall I_j liegt, dann sei $p_j = 1/N$ für $j = 1, \dots, N$.

(b) Aufgrund unserer Computerexperimente können wir nun der Reihe nach die Wahrscheinlichkeiten p_{ij}, p_{ijk} , usw. berechnen, die folgendermaßen definiert sind:

$$p_{ij} := \text{Wahrscheinlichkeit dafür, dass } x_0 \in I_i \text{ und } x_1 \in I_j \text{ gilt.}$$

$$p_{ijk} := \text{Wahrscheinlichkeit dafür, dass } x_0 \in I_i, x_1 \in I_j \text{ und } x_2 \in I_k \text{ gilt.}$$

Ferner setzen wir

$$S_0(N) := - \sum_{j=1}^N p_j \log_2 p_j = \log_2 N,$$

$$S_1(N) := - \sum_{i,j=1}^N p_{ij} \log_2 p_{ij}, \quad S_2(N) = - \sum_{i,j,k=1}^N p_{ijk} \log_2 p_{ijk}.$$

Diese Größen erlauben folgende Interpretation. Wissen wir, in welchem Teilintervall I_1, \dots, I_N der Startwert x_0 liegt, dann gewinnen wir die Information $S_0(N)$. Kennen wir den Teil x_0, x_1 der Trajektorie, dann gewinnen wir die Information $S_1(N)$. Schließlich gewinnen wir die Information $S_2(N)$, falls wir den Teil x_0, x_1, x_2 der Trajektorie kennen usw.

⁹Häufig wird noch der Faktor $\ln 2$ hinzugefügt.

Um zum Beispiel den Ausdruck $S_0(N) = \log_2 N$ zu motivieren, setzen wir $N = 2^m$. Dann reichen stets $S_0(N)$ Fragen mit „ja/nein“-Antworten aus, um herauszufinden, in welchem Intervall I_r sich der Startwert befindet. Zu diesem Zweck wird r als Dualzahl geschrieben, dass heißt

$$r = a_0 + a_1 2 + \dots + a_m 2^m, \quad a_j = 0, 1.$$

Die erste Frage lautet: Befindet sich x_0 in einem Intervall I_r , so dass in der Dualzahlzerlegung von r an erster Stelle eine Null steht (d. h. $a_0 = 0$) usw. Dann reichen m Fragen aus, wobei $m = \log_2 N$ gilt, denn $N = 2^m$.

Der allgemeine Informationsbegriff wird folgendermaßen eingeführt.

Definition: Kann sich ein System in den Zuständen Z_1, \dots, Z_n mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_n befinden, dann gewinnen wir die *Information*

$$S = - \sum_{j=1}^n p_j \log_2 p_j,$$

falls wir durch ein Experiment feststellen, in welchem Zustand sich das System tatsächlich befindet. In der statistischen Physik wird die *Entropie* durch

$$S = -k \sum_{j=1}^n p_j \ln p_j$$

definiert, wobei k die Boltzmannkonstante ist.

13.15 Entropie, Strukturbildung und Mathematik der Selbstorganisation

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kann die Entropie S eines abgeschlossenen Systems nicht abnehmen, d. h., $-S$ ist eine Ljapunovfunktion. Die Entropie ist ein Maß für die Ordnung eines Systems. Das Chaos hat definitionsgemäß eine sehr hohe Entropie. Die Entropie nimmt zu, je chaotischer ein System wird. Deshalb muss die Entropie bei einem Evolutionsprozess (Strukturbildungsprozess) von einfachen zu komplizierteren Lebensformen abnehmen. Folglich muss die Erde ständig Entropie abgeben. Der entscheidende Prozess wird durch die Formel

$$\Delta S_{\text{Erde}} = \frac{Q}{T_{\text{Sonne}}} - \frac{Q}{T_{\text{Erde}}} < 0$$

beschrieben. Die Sonne besitzt die Temperatur T_{Sonne} . Sie strahlt auf die Erde. Dadurch wird der Erde die Wärmemenge Q zugeführt (pro Sekunde und pro km^2). Etwa die gleiche Wärmemenge Q wird von der Erde bei der wesentlich tieferen Temperatur T_{Erde} abgestrahlt. Dadurch ergibt sich der Entropieverlust ΔS der Erde (pro Sekunde und km^2).

Es ist ein neuer Zweig der Mathematik entstanden (*Mathematik der Selbstorganisation*), der alle mathematischen Methoden zusammenfasst, die zur Beschreibung von Strukturbildungsprozessen erforderlich sind (z. B. Bifurkation, Chaos). Als Einführung empfehlen wir [Jentschke 1989, Schuster 1994 und Jost 2005]. Zum Beispiel hat sich durch Computerexperimente ergeben, dass bereits *einfachste* Mechanismen ausreichen, um außerordentlich reichhaltige Strukturen zu erzeugen. Man wählt hierzu diskrete dynamische Systeme in der Ebene, z. B. das Newtonverfahren

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

für komplexe Zahlen z_0, z_1, \dots mit einer rationalen Funktion $f(z)$ (z. B. $f = z^3 - 1$). Es ergeben sich dann auf dem Computer wundervolle Bilder, falls man die Einzugsbereiche der Attraktoren unterschiedlich färbt [vgl. Peitgen, Richter 1986]. Die Ränder dieser Einzugsbereiche, an denen unterschiedliche Farben aneinandergrenzen, besitzen eine sehr komplexe Struktur – es sind sogenannte Julianmengen, die eine fraktale Dimension > 1 haben.

13.16 Lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik als unendlichdimensionale dynamische Systeme

13.16.1 Grundideen

Die klassischen Probleme der mathematischen Physik lassen sich mit Hilfe der Funktionalanalysis in sehr einfacher Weise behandeln, indem man sie auf *gewöhnliche Differentialgleichungen* für Operatoren zurückführt. Zum Beispiel ergibt sich:

$$\begin{aligned} u' + Au &= 0 && (\text{Wärmeleitungsgleichung}), \\ u'' + Au &= 0 && (\text{Wellengleichung}), \\ iu' &= Hu && (\text{Schrödinger-Gleichung der Quantentheorie}). \end{aligned}$$

Die Lösungen sind:

$$\begin{aligned} u &= e^{-tA}u(0) && (\text{Wärmeleitungsgleichung}), \\ u &= (\cos Bt)u(0) + B^{-1}(\sin Bt)u'(0), \quad B = A^{1/2} && (\text{Wellengleichung}), \\ u &= e^{-iHt}u(0) && (\text{Schrödinger-Gleichung}). \end{aligned}$$

Diese Lösungsformeln sind die gleichen wie für reelle Zahlen A und H . Jetzt bedeuten jedoch A und H selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum.

Die Operatorfunktionen erklären wir in einfacher Weise durch

$$f(A)u := \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k)(u, u_k)u_k. \quad (13.39)$$

Der folgende Satz rechtfertigt diese Definition.

Satz: Es sei $A : D(A) \rightarrow X$ ein selbstadjungierter Operator auf dem reellen oder komplexen Hilbertraum X . Der Operator A besitze ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren $\{u_1, u_2, \dots\}$ mit $Au_k = \lambda_k u_k$.

Dann gilt:

(i) Es ist

$$Au := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(u, u_k)u_k \quad (13.40)$$

für alle $u \in D(A)$. Der Definitionsbereich $D(A)$ von A besteht aus genau allen $u \in X$, für die die Reihe in (13.40) konvergiert.

(ii) Wir erklären den Operator $f(A)$ durch (13.39), wobei der Definitionsbereich von $f(A)$ aus genau allen $u \in X$ bestehen soll, für die die Reihe in (13.39) konvergiert. Das ist äquivalent zur Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\lambda_k)|^2 |(u_k, u)|^2.$$

Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reell, dann ist $f(A)$ selbstadjungiert.

► **BEISPIEL:** Sind alle Eigenwerte von A positiv, dann ist der Operator $e^{-tA} : X \rightarrow X$ für jedes $t \geq 0$ ein linearer stetiger Operator mit $\|e^{-tA}\| \leq 1$. Ferner gilt für alle $t, s \geq 0$: $e^{-tA}e^{-sA} = e^{-(s+t)A}$, d.h., $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ stellt einen Semifluss dar. Tatsächlich gilt

$$e^{-tA}u = \sum_j e^{-t\lambda_j}(u, u_j)u_j$$

und

$$\|e^{-tA}u\|^2 = \sum_j |e^{-t\lambda_j}|^2 |(u_j, u)|^2 \leq \sum_j |(u_j, u)|^2 = \|u\|^2 \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Die oben geschilderte Methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung usw. ist die funktionalanalytische Fassung der klassischen *Fouriermethode*. Diese klassische Methode war jedoch an spezielle Gebiete gebunden, für die die Eigenfunktionen u_1, u_2, \dots explizit bekannt waren.

Die Strategie der modernen Analysis ist folgende:

- (a) Man weist zunächst verallgemeinerte Lösungen mit Hilfe der Funktionalanalysis nach.
- (b) Man zeigt, dass bei hinreichend glatten Daten (Rand, Randwerte, Anfangswerte, inhomogene Terme) die verallgemeinerten Lösungen auch hinreichend glatt sind und Lösungen im klassischen Sinne darstellen (Regularitätstheorie).

Vom physikalischen Standpunkt aus sind die verallgemeinerten Lösungen sehr natürlich. Zum Beispiel besitzt die Gleichung

$$u'(t) = -Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \tag{13.41}$$

für alle $u \in D(A)$ die Lösung

$$u(t) = e^{-tA}u_0. \tag{13.42}$$

Im Fall $u_0 \in X$ heißt (13.42) eine verallgemeinerte Lösung von (13.41). Dann ergibt sich ein Semifluss auf dem gesamten Hilbertraum. Dieser Semifluss ist ein *natürlicheres* Objekt als die Lösungen der Differentialgleichung (13.41). Tatsächlich besitzt (13.41) nur für Anfangswerte aus einer im Hilbertraum dichten Menge $D(A)$ Lösungen, während (13.42) für jeden Anfangswert aus X sinnvoll ist. Dieser Standpunkt hat sich in besonderer Weise in der Quantentheorie bewährt (vgl. 13.18).

13.16.2 Die Poisongleichung

Klassische Behandlung: Wir gehen aus von dem Variationsproblem

$$\int_{\Omega} (2^{-1}|\operatorname{grad} u|^2 - \varrho u) dx = \min !, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{13.43}$$

zusammen mit der zugehörigen Euler–Lagrange Gleichung

$$-\Delta u = \varrho \quad \text{auf } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{13.44}$$

und der integralen Lösungsformel

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y)\varrho(y) dy. \tag{13.45}$$

Hier ist Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^3 . Die sogenannte *Greensche Funktion* G genügt für jedes feste y der Gleichung

$$\Delta_x G(x, y) = 0 \quad \text{auf } \Omega \quad (x \neq y), \quad G(x, y) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Ferner besitzt $G(x, y)$ im Punkt $x = y$ eine Singularität, d.h., es gilt

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} + g(x, y)$$

mit einer regulären Funktion g . In der Sprache der Distributionen bedeutet das:

$$-\Delta_x G(x, y) = \delta_y \quad \text{auf } \Omega.$$

Die Größen erlauben die folgende physikalische Interpretation: ϱ = elektrische Ladungsdichte, u = elektrostatisches Potential, $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} u$ = Vektor der elektrischen Feldstärke. Die Randbedingung „ $u = 0$ auf $\partial\Omega$ “ bedeutet, dass der Rand aus einem metallischen elektrischen Leiter besteht. Die Greensche Funktion G entspricht für festes y dem elektrostatischen Potential einer Einheitsladung im Punkt y . Es gilt $G(x, y) = G(y, x)$ für alle $x, y \in \Omega$ (Symmetrie der Greenschen Funktion). Das Variationsproblem (13.43) stellt das Prinzip der minimalen elektrostatischen Energie dar.

Für hinreichend glatte Daten (Rand $\partial\Omega$, Funktion ϱ) sind die beiden Probleme (13.43) und (13.44) äquivalent, und die Lösung wird durch (13.45) gegeben.

Jedoch bereits für stetige Ladungsdichten ϱ braucht das Randwertproblem (13.44) keine klassische Lösung mehr zu besitzen. Das ist vom physikalischen Standpunkt aus sehr unbefriedigend. Die verallgemeinerte Lösungstheorie der Funktionalanalysis behebt diesen Mangel und lässt auch unstetige Ladungsdichten ϱ zu.

Funktionalanalytische Behandlung: Wir setzen voraus, dass der Rand stückweise glatt ist, d.h. $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Wir definieren den Operator

$$A_0 u = -\Delta u \quad \text{für alle } u \in D(A_0)$$

mit $D(A_0) = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$. Das klassische Randwertproblem (13.44) ist dann identisch mit der Operatorgleichung

$$A_0 u = \varrho, \quad u \in D(A_0). \tag{13.46}$$

Der Operator A_0 ist zwar symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert. Eine selbstadjungierte Erweiterung A von A_0 ergibt sich in der folgenden natürlichen Weise.

Satz 1: Für jedes feste $\varrho \in L_2(\Omega)$ besitzt das Variationsproblem (13.43) genau eine Lösung u in dem Sobolevraum $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Die Randbedingung „ $u = 0$ auf $\partial\Omega$ “ ist dann im Sinne verallgemeinerter Randwerte erfüllt. Setzen wir

$$u = \mathbf{G}\varrho, \tag{13.47}$$

dann ist der sogenannte Greensche Operator $\mathbf{G} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ linear, kompakt, symmetrisch und bijektiv.

Die Gleichung (13.47) verallgemeinert die klassische Lösungsformel (13.45).

Satz 2: Setzen wir $A = \mathbf{G}^{-1}$, dann ist der selbstadjungierte Operator $A : D(A) \rightarrow X$ eine Fortsetzung des klassischen Operators A_0 , d.h., es gilt $D(A_0) \subseteq D(A) \subseteq L_2(\Omega)$ mit $A_0 u = A u$ für alle $u \in D(A_0)$.

Die zu (13.46) verallgemeinerte Gleichung

$$A u = \varrho, \quad u \in D(A), \tag{13.48}$$

besitzt im Unterschied zu (13.46) für jedes $\varrho \in L_2(\Omega)$ genau eine Lösung, die durch $u = G\varrho$ gegeben wird. Für hinreichend glatte Funktionen ϱ besitzen (13.46) und (13.48) die gleichen eindeutigen Lösungen. Der Operator A heißt *Friedrichssche Fortsetzung* von A_0 .

Bemerkung: Ist der Rand $\partial\Omega$ hinreichend glatt, dann gilt

$$D(A) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega).$$

Dann entspricht die Gleichung (13.48) dem Randwertproblem (13.44), wobei die im Laplaceoperator Δu auftretenden zweiten partiellen Ableitungen sowie die Randwerte im verallgemeinerten Sinne zu verstehen sind (vgl. 11.2.6).

13.16.3 Das Eigenwertproblem für die Laplacegleichung

Klassisches Problem: Bei der klassischen Fouriermethode wird man auf das folgende Eigenwertproblem geführt:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{auf } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (13.49)$$

Diese Aufgabe ist äquivalent zu der Integralgleichung

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} G(x, y) u(y) dy. \quad (13.50)$$

Funktionalanalytische Behandlung: Die Gleichung (13.49) ist äquivalent zu der Operatorgleichung $A_0 u = \lambda u$, $u \in D(A_0)$. Stattdessen betrachten wir das verallgemeinerte Problem

$$Au = \lambda u, \quad u \in D(A). \quad (13.51)$$

Satz: Die Aufgabe (13.51) besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem $\{u_1, u_2, \dots\}$ von Eigenvektoren in dem Hilbertraum $L_2(\Omega)$. Jeder Eigenwert hat nur eine endliche Vielfachheit.

Den Eigenwert zu u_k bezeichnen wir mit λ_k .

Der Beweisgedanke besteht darin, die Gleichung (13.51) durch die äquivalente Gleichung $u = \lambda G u$ zu ersetzen. Da G linear, kompakt und symmetrisch ist, kann man die Hilbert-Schmidt-Theorie für solche Operatorengleichungen anwenden (vgl. 11.3.3).

Wir haben nunmehr die Hilfsmittel bereitgestellt, um Operatorenfunktionen $f(A)$ durch (13.39) definieren zu können.

13.16.4 Die Wärmeleitungsgleichung

Klassisches Problem: Das Rand-Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung lautet:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, & x \in \Omega, \quad t \geq 0, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (\text{Randbedingung}), \\ u &= u_0, & x \in \Omega, \quad t = 0 \quad (\text{Anfangsbedingung}). \end{aligned} \quad (13.52)$$

Wir interpretieren $u(x, t)$ als Temperatur am Ort x zur Zeit t . Dann entspricht (13.52) der Temperaturverteilung in einem Körper mit konstanter Randtemperatur und der Anfangstemperatur u_0 .

Funktionalanalytische Behandlung: Die Gleichung (13.52) ist identisch mit der Operatorgleichung

$$u' + A_0 u = 0, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0. \quad (13.53)$$

Die Randbedingung „ $u(x, t) = 0$ für $x \in \partial\Omega, t \geq 0$ “ ist dabei in der Forderung $u(t) \in D(A_0)$ enthalten. Das bedeutet, dass die Funktion $u = u(x, t)$ für festes t als Funktion der Ortsvariablen in $D(A_0)$ enthalten ist. Anstelle von (13.53) betrachten wir die verallgemeinerte Gleichung

$$u' + Au = 0, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \quad (13.54)$$

die wir durch

$$u(t) = e^{-tA} u_0, \quad t \geq 0, \quad (13.55)$$

lösen können.

Satz: Für jeden Anfangswert $u_0 \in D(A)$ stellt (13.55) die eindeutige Lösung von (13.54) dar.

Korollar: Für jedes $u_0 \in L_2(\Omega)$ ist die Funktion $u = u(t)$ in (13.55) stetig von $[0, \infty)$ in $L_2(\Omega)$. Diese Funktion heißt verallgemeinerte Lösung des klassischen Ausgangsproblems (13.52). Die Familie $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ stellt einen Semifluss auf dem Zustandsraum $Z = L_2(\Omega)$ dar.

Nach (13.39) gilt für die Lösung (13.55):

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (u_k, u_0) u_k.$$

Diese Reihe konvergiert für jede Anfangstemperatur $u_0 \in L_2(\Omega)$ im Raum $L_2(\Omega)$. Dabei sind u_k , λ_k die Eigenlösungen von (13.49).

Explizit heißt das

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left[u(x, t) - \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} \left(\int_{\Omega} u_k(y, t) u_0(y, t) dy \right) u_k(x, t) \right]^2 dx = 0$$

für alle $t \geq 0$. Das ist die Konvergenz der klassischen Fouriermethode im quadratischen Mittel.

13.16.5 Die Wellengleichung

Klassisches Problem: Das Rand-Anfangswertproblem für die Wellengleichung lautet:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, & x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R} \\ && \text{(Randbedingung),} \\ u &= u_0, \quad u_t = v_0, & x \in \Omega, \quad t = 0 \\ && \text{(Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit).} \end{aligned} \quad (13.56)$$

Wir interpretieren u als Geschwindigkeitspotential von Schallwellen. Dann ergibt sich das Geschwindigkeitsfeld der Luft aus $\mathbf{v} = -\mathbf{grad} u$. Für den Druck p und die Dichte ϱ erhalten wir

$$p = \bar{p} + \bar{\varrho} u_t, \quad \varrho = \bar{\varrho}(1 + u_t).$$

Dabei bezeichnen \bar{p} und $\bar{\varrho}$ Mittelwerte. (Die Schallgeschwindigkeit wurde gleich eins gesetzt.)

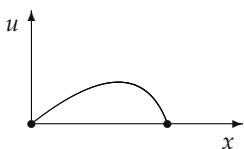


Abb. 13.38

Bezeichnet Ω ein Intervall, dann können wir $u(x, t)$ als Auslenkung einer schwingenden Saite am Ort x zur Zeit t interpretieren. Die Randbedingung in (13.56) entspricht einer eingespannten Saite (Abb. 13.38). Alle Ergebnisse weiter unten gelten auch für diesen eindimensionalen Fall.

Funktionalanalytische Behandlung: Die Gleichung (13.56) ist identisch mit der Operatorgleichung

$$u'' + A_0 u = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \quad (13.57)$$

Stattdessen betrachten wir die verallgemeinerte Gleichung

$$u'' + Au = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0, \quad (13.58)$$

die sich durch

$$u(t) = (\cos Bt)u_0 + B^{-1}(\sin Bt)v_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (13.59)$$

mit $B = A^{1/2}$ lösen lässt.

Satz: Für $u_0 \in D(A)$ und $v_0 \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ stellt (13.59) die eindeutige Lösung von (13.58) dar.

Korollar: Für $u_0 \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ und $v_0 \in L_2(\Omega)$ ist die Funktion $u = u(t)$ in (13.59) stetig differenzierbar von \mathbb{R} in $L_2(\Omega)$. Wir bezeichnen (13.59) als verallgemeinerte Lösung des klassischen Ausgangsproblems (13.56).

Um zu erkennen, dass sich hinter (13.59) ein Fluss verbirgt, setzen wir $v = u'$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S(t) = \begin{pmatrix} \cos Bt & B^{-1} \sin Bt \\ -B \sin Bt & \cos Bt \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ ein Fluss, der den Zustandsraum $Z = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ in sich abbildet.¹⁰

Explizit lautet die Lösung (13.59):

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\cos \mu_k t)(u_k, u_0)u_k + \mu_k^{-1}(\sin \mu_k t)(u_k, v_0)u_k \right]$$

mit $\mu_k = \lambda_k^{1/2}$ und $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$. Die Reihe konvergiert in $L_2(\Omega)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

13.16.6 Die Schrödinger-Gleichung

Die Bewegung eines Quantenteilchens auf der x -Achse mit der Masse m wird durch die Schrödinger-Gleichung¹¹

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + U\psi, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad (13.60)$$

beschrieben. Den Operator

$$H_* = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U$$

bezeichnet man als den Hamiltonoperator des Systems. Die komplexwertige Funktion ψ besitzt die folgende Bedeutung:

$$\int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx = \text{Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen zur Zeit } t \text{ im Intervall } [a, b] \text{ aufhält.} \quad (13.61)$$

¹⁰ Z besteht aus allen Paaren (u, v) mit $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ und $v \in L_2(\Omega)$.

¹¹ Es gilt $\hbar = h/2\pi$, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum bezeichnet.

Um (13.60) zu motivieren, betrachten wir die Bewegung $x = x(t)$ eines klassischen Teilchens. Diese wird durch die Newtonsche Gleichung

$$mx'' = -U'(x)$$

beschrieben mit der Energie

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

und dem Impuls $p = mx'$. Die Quantisierung der klassischen Mechanik ergibt sich dadurch, dass man die Energie E und den klassischen Impuls p durch Differentialoperatoren ersetzt:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Dann entsteht aus der klassischen Hamiltonfunktion $H = (p^2/2m) + U(x)$ der Hamiltonoperator H_* . Die Schrödinger-Gleichung (13.60) entspricht der Operatorgleichung

$$i\hbar\psi' = H_*\psi, \quad \psi(0) = \psi_0. \quad (13.62)$$

Als Definitionsbereich von H_* wählen wir den Schwartzraum $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ (vgl. 10.4.6). Der Zustandsraum sei der komplexe Hilbertraum

$$Z = L_2^C(\mathbb{R})$$

aller komplexwertigen Funktionen, für die Real- und Imaginärteil zu $L_2(\mathbb{R})$ gehören. Das Skalarprodukt auf Z ist durch

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x)\psi(x) dx$$

gegeben. Damit die Bedingung (13.61) sinnvoll ist, müssen wir

$$(\psi(t), \psi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

fordern.

► **BEISPIEL** (harmonischer Oszillator): Wir betrachten den Spezialfall

$$U(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

eines harmonischen Oszillators der Kreisfrequenz ω .

Der Fourieransatz $\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(x)$ in (13.60) ergibt das Eigenwertproblem

$$E\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' + \frac{m\omega^2}{2}x^2\varphi, \quad (\varphi, \varphi) = 1, \quad (13.63)$$

mit den Eigenwerten

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.64)$$

und den zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_n(x) = u_n(x/x_0)x_0^{-1/2}$, $x_0 = (\hbar/m\omega)^{1/2}$. Dabei bezeichnet u_n die Hermitesche Funktion

$$u_n(x) = \alpha_n(-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad \alpha_n = 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} \pi^{-1/4}.$$

Satz 1: Die Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in Z . Wir definieren den Operator

$$H\varphi := \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\varphi_k, \varphi) \varphi_k. \quad (13.65)$$

So ist $H : D(H) \rightarrow Z$ ein selbstadjungierter Operator, dessen Definitionsbereich $D(H)$ aus genau allen Funktionen $\varphi \in Z$ besteht, für die die Reihe in (13.65) konvergiert. Der Operator H ist eine Fortsetzung von H_* . Anstelle der Gleichung (13.62) betrachten wir nunmehr das *verallgemeinerte Problem*

$$i\hbar\psi' = H\psi, \quad \psi(0) = \psi_0. \quad (13.66)$$

Satz 2: Setzen wir

$$\psi(t) = e^{-iHt/\hbar}\psi_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (13.67)$$

dann ist diese Trajektorie für jedes $\psi_0 \in D(H)$ die eindeutige Lösung von (13.66).

Für beliebiges $\psi_0 \in Z$ nennt man (13.67) verallgemeinerte Lösung der Schrödingergleichung (13.66). Die Trajektorie (13.67) ist eine stetige Funktion von \mathbb{R} in Z . Die Familie $\{e^{-iHt/\hbar}\}_{t \in \mathbb{R}}$ bildet einen Fluss von unitären Operatoren auf dem Hilbertraum Z .

Explizit gilt

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-iE_k t/\hbar} (\varphi_k, \varphi) \varphi_k.$$

Diese Reihe konvergiert für jede Zeit $t \in \mathbb{R}$ im Zustandsraum $Z = L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

Die Formel (13.64) beinhaltet die berühmte Quantenhypothese von Planck aus dem Jahre 1900 über die Quantelung der Energie des harmonischen Oszillators. Diese Hypothese führte ihn zum richtigen Strahlungsgesetz für Sterne. Dieses Strahlungsgesetz wird heute zum Beispiel benutzt, um die Geschichte des Weltalls seit dem Urknall zu rekonstruieren [vgl. Zeidler 1984ff, Vol. IV].

13.17 Flüsse und Semiflüsse auf Banachräumen und Operatordifferentialgleichungen

Definition: Ein Fluss (oder eine einparametrische Gruppe) auf einem Banachraum Z (Zustandsraum) ist eine Familie $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ von Operatoren $S(t) : Z \rightarrow Z$, so dass gilt $S(0) = I$ und

$$S(t+s) = S(t)S(s) \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}.$$

Der Fluss heißt *stark stetig* genau dann, wenn die Trajektorien $u(t) = S(t)u_0$ für jeden Anfangswert $u_0 \in Z$ stetig sind als Abbildungen von \mathbb{R} in Z .

Der Fluss heißt *linear* genau dann, wenn alle Operatoren $S(t) : Z \rightarrow Z$ linear und stetig sind.

Der Fluss heißt *nichtexpansiv* genau dann, wenn alle Operatoren $S(t)$ nichtexpansiv sind, d. h., es gilt

$$\|S(t)u_0 - S(t)u_1\| \leq \|u_0 - u_1\| \quad \text{für alle } u_0, u_1 \in Z, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Der Fluss heißt *unitär* genau dann, wenn alle Operatoren $S(t)$ lineare, unitäre Operatoren auf dem Hilbertraum Z sind.

Unter dem Erzeugenden E eines Flusses $\{S(t)\}$ verstehen wir den Operator

$$Eu_0 := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(S(h) - I)u_0 = u'(0),$$

d. h., der Definitionsbereich von E besteht aus genau allen Anfangswerten u_0 , für welche die im Punkt u_0 startende Trajektorie $u(t) = S(t)u_0$ eine Anfangsgeschwindigkeit $u'(0)$ besitzt.

Definition: Unter einem *Semifluss* (oder einer Halbgruppe) verstehen wir eine Familie $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ von Operatoren $S(t) : Z \rightarrow Z$ auf dem Banachraum Z (Zustandsraum), so dass $S(0) = I$ und

$$S(t+s) = S(t)S(s) \quad \text{für alle } t, s \geq 0.$$

Vom physikalischen Standpunkt aus gilt:

nichtexpansive Semiflüsse:	irreversible Prozesse (Wärmeleitung, Diffusion),
unitäre Flüsse:	reversible Prozesse (Wellenprozesse, Quantenprozesse).

► **BEISPIEL 1:** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = u_0, \quad (13.68)$$

wobei der Operator $A : Z \rightarrow Z$ linear und stetig auf dem Banachraum Z ist. Für jedes $u_0 \in Z$ besitzt (13.68) die eindeutige Lösung

$$u(t) = e^{tA}u_0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Definitionsgemäß gilt dabei

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}. \quad (13.69)$$

Diese Reihe konvergiert für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ bezüglich der Operatornorm. Die Familie $\{e^{tA}\}$ bildet einen linearen Fluss auf Z mit dem erzeugenden Operator A .

Dieses Beispiel zeigt, dass irreversible Prozesse in der Natur nicht durch Differentialgleichungen der Form (13.68) mit linearen stetigen Operatoren modelliert werden können. Dazu benötigt man kompliziertere (unbeschränkte) Operatoren.

► **BEISPIEL 2:** Der Operator $-A$ im Wärmeleitungsproblem (vgl. 13.16.4) ist der Erzeugende des linearen, stark stetigen, nichtexpansiven Semiflusses $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$.

► **BEISPIEL 3:** Der Fluss $\{S(t)\}$ für die Wellengleichung (vgl. 13.16.5) ist linear, stark stetig und unitär auf dem Zustandsraum $Z = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Der zugehörige erzeugende Operator E ist schiefadjungiert, d. h. $E^* = -E$.

► **BEISPIEL 4:** Der Fluss $\{e^{-itH}\}$ für die Schrödingergleichung (vgl. 13.16.6) ist linear, stark stetig und unitär mit dem schiefadjungierten erzeugenden Operator $-iH$ (d. h., H ist selbstadjungiert).

► **BEISPIEL 5:** Der nichtlineare Semifluss $\{S(t)\}$ für die zweidimensionalen Navier-Stokeschen Differentialgleichungen für zähe Flüssigkeiten (vgl. 14.4.2) ist stark stetig.

13.17.1 Konstruktion von Flüssen und Semiflüssen

Satz von Hille–Yosida: Der lineare Operator $B : D(B) \rightarrow Z$ auf dem Banachraum Z ist genau dann der Erzeugende eines linearen, stark stetigen, nichtexpansiven Semiflusses $\{S(t)\}$, wenn folgendes gilt:

- (i) $D(B)$ ist dicht in Z .

(ii) $-B$ ist maximal akkretiv, d. h., die Resolvente $R_\mu := (I - \mu B)^{-1}$ existiert auf Z für alle $\mu > 0$ und ist nichtexpansiv.

Explizit gilt

$$S(t)u = \lim_{\mu \rightarrow +0} e^{tB_\mu} u \quad \text{für alle } u \in Z, t \geq 0,$$

wobei $B_\mu := \mu^{-1}(R_\mu - I)$ die Yosida-Approximation von B heißt.

In einem Hilbertraum Z ist die Bedingung (ii) äquivalent zu der folgenden Eigenschaft von B :

$$\operatorname{Re}(Bu, u) \leq 0 \quad \text{für alle } u \in D(B),$$

und $\lambda = 1$ gehört nicht zum Spektrum von B (Re bezeichnet den Realteil).

Das ist zum Beispiel erfüllt, falls $B = -A$ gilt, wobei A ein positiver selbstadjungierter Operator ist. Dann erhalten wir

$$S(t) = e^{-tA} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\lambda} dE_\lambda,$$

wobei $\{E_\lambda\}$ die Spektralschar von A bezeichnet.

Satz von Stone: Der lineare Operator $B : D(B) \rightarrow Z$ auf dem Hilbertraum Z ist genau dann der Erzeugende eines linearen, stark stetigen, unitären Flusses $\{S(t)\}$, wenn B schiefadjungiert ist.

Im Spezialfall eines komplexen Hilbertraumes bedeutet das $B = -iH$, wobei H selbstadjungiert ist. Explizit erhält man

$$S(t) = e^{-itH} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} dE_\lambda,$$

wobei $\{E_\lambda\}$ die Spektralschar von H bezeichnet.

13.17.2 Anwendung auf homogene Differentialgleichungen

Es sei $\{S(t)\}$ ein linearer, stark stetiger Semifluss auf dem Banachraum Z mit dem Erzeugenden E . Dann ist die Trajektorie $u(t) = S(t)u_0$ für jedes $u_0 \in D(E)$ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$u' = Eu, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0.$$

13.17.3 Anwendung auf inhomogene Differentialgleichungen

Sind $u_0 \in D(E)$ und die stetig differenzierbare Funktion $f : [0, T] \rightarrow Z$ vorgegeben, dann ist

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s) ds \tag{13.70}$$

die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$u' = Eu + f, \quad 0 < t < T, \quad u(0) = u_0. \tag{13.71}$$

Ist f lediglich stetig, dann heißt (13.70) eine verallgemeinerte (oder auch milde) Lösung von (13.71).

13.17.4 Die Formel von Dyson für zeitabhängige Differentialgleichungen

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = B(t)u(t), \quad s \leq t < \infty, \quad u(s) = u_0. \quad (13.72)$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei $B(t) : Z \rightarrow Z$ ein linearer stetiger Operator auf dem Banachraum Z , und es gelte $\lim_{t \rightarrow \tau} \|B(t) - B(\tau)\| = 0$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$.

Dann besitzt (13.72) für jedes $u_0 \in Z$ die eindeutige Lösung

$$u(t) = P(t, s)u_0$$

mit dem sogenannten *Propagator*

$$P(t, s) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} \dots \int_s^{t_{n-1}} dt_n B(t_1)B(t_2) \cdots B(t_n).$$

Führt man den Zeitordnungsoperator \mathbb{T} ein, d. h.

$$\mathbb{T}(B(t)B(\tau)) := \begin{cases} B(t)B(\tau) & \text{für } t \geq \tau, \\ B(\tau)B(t) & \text{für } \tau \geq t, \end{cases}$$

dann gilt

$$P(t, s) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_s^t \int_s^t \dots \int_s^t \mathbb{T}(B(t_1)B(t_2) \cdots B(t_n)) dt_1 dt_2 \cdots dt_n.$$

Dafür schreibt man auch kurz

$$P(t, s) = \mathbb{T} \exp \left(\int_s^t B(\tau) d\tau \right).$$

Das ist die Formel von Dyson. Dieser Propagator spielt eine Schlüsselrolle bei der Konstruktion der *S-Matrix* (Streumatrix) in der Quantenfeldtheorie, die die Streuung von Elementarteilchen beschreibt.

13.18 Die allgemeine Dynamik von Quantensystemen

Ein Quantensystem wird durch einen komplexen Hilbertraum Z als Zustandsraum beschrieben.

- (i) Die *Zustände* des Systems werden durch Einheitsvektoren ψ in Z beschrieben.
- (ii) Selbstadjungierte Operatoren $A : D(A) \rightarrow Z$, die man als *Observable* beschreibt, entsprechen den physikalischen Größen \mathbb{A} .
- (iii) Die *Dynamik* des Systems wird durch einen linearen, stark stetigen Fluss $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ auf Z beschrieben:

$$\psi(t) = S(t)\psi(0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \psi(0) \in Z, \quad \|\psi(0)\| = 1. \quad (13.73)$$

Wir fordern zusätzlich die Unitarität von $S(t)$, um sicherzustellen, dass $\psi(t)$ für jedes t ein Zustand ist. Tatsächlich gilt $(\psi(t), \psi(t)) = (\psi(0), \psi(0)) = 1$. Die starke Stetigkeit des Flusses garantiert, dass die Trajektorien (13.73) stetig von der Zeit t abhängen (als Funktionen von \mathbb{R} nach Z).

(iv) Misst man die physikalische Größe \mathbb{A} im Zustand ψ , dann erhält man den Mittelwert

$$\overline{\mathbb{A}} = (\psi, A\psi) \quad \text{für alle } \psi \in D(A).$$

Wegen der Selbstadjungiertheit von A ist $\overline{\mathbb{A}}$ stets eine reelle Zahl. Die Dispersion ergibt sich in der üblichen Weise als Mittelwert von $(\mathbb{A} - \overline{\mathbb{A}})^2$, d. h.

$$(\Delta\mathbb{A})^2 = \overline{(\mathbb{A} - \overline{\mathbb{A}})^2} = (\psi, (\mathbb{A} - \overline{\mathbb{A}})^2\psi).$$

Die Tschebyschevsche Ungleichung liefert dann folgendes:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert von \mathbb{A} im Zustand ψ im Intervall $[\overline{\mathbb{A}} - a, \overline{\mathbb{A}} + a]$ liegt, ist größer gleich $(\Delta\mathbb{A})^2/a^2$.

Von fundamentaler Bedeutung ist die

Heisenbergsche Unschärferelation: Sind \mathbb{A} und \mathbb{B} zwei physikalische Größen, die den selbstadjungierten Operatoren A und B entsprechen, dann gilt

$$\Delta\mathbb{A}\Delta\mathbb{B} \geq 2^{-1}|((AB - BA)\psi, \psi)| \quad (13.74)$$

für alle Zustände ψ im Definitionsbereich von $AB - BA$.

Es sei ψ_1, ψ_2, \dots ein vollständiges Orthonormalsystem in dem Zustandsraum Z . Für jeden Zustand $\psi \in Z$ gilt dann die konvergente Entwicklung

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} (\psi, \psi_j) \psi_j$$

mit der Parsevalschen Gleichung

$$\|\psi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(\psi, \psi_j)|^2 = 1.$$

Wir interpretieren:

$$|(\psi, \psi_j)|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zustand } \psi_j \text{ gemessen wird.}$$

Diskussion: Nach dem Satz von Stone existiert ein selbstadjungierter Operator H auf Z , so dass

$$S(t) = e^{-itH/\hbar} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. H heißt der Energieoperator (Hamiltonoperator) des Systems. Für jeden Anfangszustand $\psi_0 \in D(H)$ ist die Trajektorie (13.73) die eindeutige Lösung der Schrödinger-Gleichung¹²

$$i\hbar\psi' = H\psi, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (13.75)$$

Allgemeine Wahrscheinlichkeitsverteilung: Entspricht der selbstadjungierte Operator A der physikalischen Größe \mathbb{A} , dann gilt:

$$\int_M d(E_\lambda \psi, \psi) := \text{Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert von } \mathbb{A} \text{ im Zustand } \psi \text{ in der Menge } M \text{ liegt.}$$

Dabei ist $\{E_\lambda\}$ die Spektralschar von A .

¹²Dabei ist \hbar das Plancksche Wirkungsquantum, $\hbar := h/2\pi$.

Scharfe Messungen: Die Messung der physikalischen Größe \mathbb{A} im Zustand ψ ist scharf (d. h. $\Delta\mathbb{A} = 0$) genau dann, wenn ψ ein Eigenvektor von A ist. Aus $A\psi = \lambda\psi$ folgt $\overline{\mathbb{A}} = \lambda$.

Gestörte Dynamik: Wir nehmen an, dass der Hamiltonoperator H durch einen zusätzlichen äußeren Einfluss auf das System in $H + V$ übergeht. Dann wird die gestörte Dynamik durch

$$\psi(t) = e^{-i(H+V)t/\hbar}\psi_0$$

beschrieben. Es gilt die *Formel von Trotter*

$$e^{-i(H+V)t/\hbar}\psi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-i\Delta t H/\hbar} e^{-i\Delta t V/\hbar})^n \psi_0$$

für alle $\psi_0 \in Z$ mit $\Delta t = t/n$. Vorausgesetzt wird dabei, dass H und V selbstadjungiert sind und zusätzlich $H + V$ auf $D(H) \cap D(V)$ selbstadjungiert ist.

Diese Bedingung ist erfüllt, falls H und V selbstadjungiert sind mit $D(H) \subseteq D(V)$ und die Ungleichung von Kato

$$\|V\psi\| \leq a\|H\psi\| + b\|\psi\| \quad \text{für alle } \psi \in D(H)$$

gilt mit $0 \leq a < 1$ und $b \geq 0$.

Stationäre Zustände: Die Eigenvektoren ψ_0 von H mit $H\psi_0 = E\psi_0$ heißen stationäre Zustände der Energie E . Dann wird die Dynamik durch

$$\psi(t) = e^{-itE/\hbar}\psi_0$$

gegeben.

13.18.1 Bewegung eines Quantenteilchens auf der x -Achse

Als Zustandsraum wählen wir den Hilbertraum $Z = L_2^C(\mathbb{R})$. Den physikalischen Größen Ort x und Impuls p ordnen wir die Operatoren

$$(x\psi)(x) = x\psi(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und

$$(p\psi)(x) = \frac{\hbar}{i}\psi'(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

zu. Definitionsbereiche seien $D(x) = \{\psi \in Z : x\psi(x) \in Z\}$ und $D(p) = W_2^1(\mathbb{R})_C$. Dann sind x und p selbstadjungiert. Die Spektralschar $\{E_\lambda\}$ von x erhält man durch

$$(E_\lambda\psi)(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{für } x \leq \lambda, \\ 0 & \text{für } x > \lambda. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich:

$$\int_M d(E_\lambda\psi, \psi) = \int_M |\psi(x)|^2 dx = \text{Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen in der Menge } M \text{ befindet.}$$

Für den Ortsmittelwert \bar{x} und die Dispersion $(\Delta x)^2$ im Zustand ψ erhält man

$$\bar{x} = (x\psi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2 dx, \quad (\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx.$$

Für alle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ gilt

$$(\mathbf{p}\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{p})\psi = \frac{\hbar}{i}\psi.$$

Nach (13.74) folgt aus dieser Vertauschungsrelation die berühmte *Heisenbergsche Unschärferelation*

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar/2,$$

d. h., Ort und Impuls des Teilchens können in der Quantentheorie (im Unterschied zur klassischen Mechanik) nicht gleichzeitig scharf gemessen werden.

13.18.2 Das Wasserstoffatom

Die klassische Energie eines Elektrons der Ladung $e < 0$ und der Masse m , das sich im Coulombfeld eines Protons der Ladung $|e|$ bewegt, ist gleich

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(x) \quad \text{mit } U(x) = \frac{-e^2}{|x|}$$

(in geeigneten Einheiten). Die Quantisierung erfolgt dadurch, dass die kartesischen Komponenten p_j des Impulsvektors durch die Operatoren

$$\mathbf{p}_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

ersetzt werden. Das ergibt den Hamiltonoperator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U, \quad D(H) = W_2^2(\mathbb{R}^3)_{\mathbb{C}}.$$

Satz: Der Hamiltonoperator H ist selbstadjungiert. Er besitzt die Eigenwerte

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Das Spektrum von H besteht aus diesen Eigenwerten und der Halbachse $[0, \infty)$, die das wesentliche Spektrum von H darstellt.

Diskussion: Die Energiewerte E_n entsprechen stationären Zuständen des Elektrons. Das sind genau die Werte, die Bohr 1913 mit Hilfe seines quasiklassischen Atommodells erhielt (Abb. 13.39). Danach bewegt sich das Elektron auf Kreisbahnen der Energie E_1, E_2, \dots . Beim Sprung von der Bahn mit dem Wert E_n in eine Bahn mit dem niedrigeren Wert E_m ($n > m$) wird ein Photon der Frequenz

$$\nu = \hbar^{-1}(E_n - E_m)$$

abgestrahlt. Daraus ergeben sich die Spektrallinien des Wasserstoffatoms.

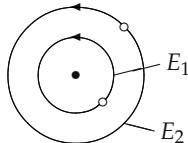


Abb. 13.39

Es ist typisch für die Quantenmechanik der Atome und Moleküle, dass das Spektrum des Hamiltonoperators nicht nur aus Eigenwerten besteht. Um ein klassisches Bild zu verwenden, stellen wir uns die Bewegung des Elektrons um das Proton als Bewegung eines Planeten um die Sonne vor. Den Eigenwerten von H entsprechen dann gebundene Zustände (Ellipsenbahnen), während das wesentliche Spektrum zu freien Zuständen gehört (Bewegung eines Kometen auf einer Hyperbelbahn).

13.18.3 Streuprozesse

Unter einem Streuprozess versteht man die Bewegung eines physikalischen Systems (z. B. eines Quantensystems), das sich für $t \rightarrow \pm\infty$ wie ein kräftefreies System verhält ($t = \text{Zeit}$). In der klassischen Mechanik entspricht die Bewegung eines Kometen auf einer Hyperbelbahn um die Sonne einem solchen Streuprozess (Abb. 13.40). In modernen Teilchenbeschleunigern versucht man die Eigenschaften von Elementarteilchen zu erkennen, indem man mit ihnen Streuexperimente durchführt.

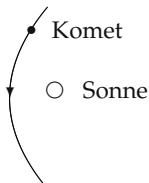


Abb. 13.40

Um die mathematische Behandlung von Streuprozessen im Rahmen der Quantenphysik zu erläutern, sei Z ein komplexer Hilbertraum (Zustandsraum). Wir nehmen an, dass sich der selbstadjungierte Hamiltonoperator (Energieoperator) $H : D(H) \subseteq Z \rightarrow Z$ des Systems in der Form

$$H = H_0 + H_1$$

darstellen lässt, wobei $H_j : D(H_j) \subseteq Z \rightarrow Z$ selbstadjungierte Operatoren sind. Vom physikalischen Standpunkt aus entspricht H_0 dem kräftefreien System und H_1 der Wirkung von Kräften. Dann stellt

$$\psi(t) = e^{-itH/\hbar} \psi(0) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \quad (13.76)$$

die Bewegung des Systems dar, und $\psi_0(t) = e^{-itH_0/\hbar} \psi(0)$ entspricht der kräftefreien Dynamik.

Asymptotisch freie Bewegung: Die Bewegung $\psi = \psi(t)$ wird für $t \rightarrow +\infty$ (bzw. $t \rightarrow -\infty$) als asymptotisch frei bezeichnet genau dann, wenn es ein $\psi_0(0) \in X$ und eine dazugehörige freie Dynamik $\psi_0(\cdot)$ gibt, so dass

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi(t) - \psi_0(t)\| = 0 \quad (13.77)$$

(bzw. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\psi(t) - \psi_0(t)\| = 0$) gilt. Ist $\psi = \psi(t)$ sowohl für $t \rightarrow +\infty$ als auch für $t \rightarrow -\infty$ asymptotisch frei, dann sprechen wir von einem *Streuprozess*.

Wellenoperatoren: Wir definieren die sogenannten Wellenoperatoren W_{\pm} durch

$$W_{\pm} \psi_{\pm} := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH/\hbar} e^{-itH_0/\hbar} \psi_{\pm},$$

wobei ψ_{\pm} genau dann zu $D(W_{\pm})$ gehört, wenn dieser Grenzwert existiert.

Satz: Es sei $\psi(0) \in Z$ gegeben. Die Bewegung (13.76) ist genau dann asymptotisch frei für $t \rightarrow +\infty$ (bzw. $t \rightarrow -\infty$), wenn es ein $\psi_+ \in Z$ mit $\psi(0) = W_+ \psi_+$ (bzw. ein $\psi_- \in Z$ mit $\psi(0) = W_- \psi_-$) gibt. Dann hat man (13.77) mit $\psi_0(0) = \psi_+$ (bzw. $\psi_0(0) = \psi_-$).

Insbesondere ist die Bewegung $\psi = \psi(t)$ genau dann ein Streuprozess, wenn die Beziehung $\psi(0) \in R(W_\pm)$ gilt. Das erklärt die Bedeutung der Wellenoperatoren.

► **STANDARDBEISPIEL:** Wir betrachten die Bewegung eines Quantenteilchens auf der x -Achse, d. h., wir untersuchen die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\psi'(t) = H\psi(t)$$

mit $H = H_0 + H_1$, wobei $H_0\psi = -(\hbar^2/2m)\partial^2\psi(x,t)/\partial x^2$ den freien Hamiltonoperator darstellt und $H_1\psi = U\psi$ dem Potential U der wirkenden Kräfte entspricht. Wir setzen voraus, dass das C^1 -Potential $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ außerhalb einer kompakten Menge gleich null ist. Außerdem setzen wir $Z := L_2^C(\mathbb{R})$ und $D(H) := \{\psi \in Z : \psi', \psi'' \in Z\}$. Dann gilt:

(i) Der Hamiltonoperator H ist selbstadjungiert.

(ii) Bezeichnen wir mit $E(H)$ die lineare Hülle der Eigenvektoren von H , dann gilt für die Wellenoperatoren

$$D(W_\pm) = Z \quad \text{und} \quad R(W_\pm) = E(H)^\perp.$$

(iii) Das wesentliche Spektrum von H ist gleich $[0, \infty)$.

(iv) Ist λ ein Eigenwert von H , dann gilt $\lambda < 0$, und λ besitzt eine endliche Vielfachheit. Das Spektrum $\sigma(H)$ von H besteht aus dem wesentlichen Spektrum $[0, \infty)$ und möglichen Eigenwerten.

(v) Gilt $\int_{\mathbb{R}} U(x) dx < 0$, dann besitzt H mindestens einen Eigenwert.

(vi) Für $U(x) \equiv 0$ gilt $H = H_0$, und das Spektrum $\sigma(H_0)$ von H_0 ist gleich dem wesentlichen Spektrum $[0, \infty)$.

Physikalische Interpretation: Die Eigenvektoren ψ von H entsprechen gebundenen Zuständen mit den Energien λ (zugehörige Eigenwerte).

Die Bewegung $\psi = \psi(t)$ (vgl. (13.76)) ist genau dann ein Streuprozess, wenn der Anfangszustand $\psi(0)$ im orthogonalen Komplement $E(H)^\perp$ der linearen Hülle $E(H)$ der gebundenen Zustände liegt.

Eine ausführliche Darstellung der Streutheorie findet man in [Reed, Simon (1972)].

Literatur zu Kapitel 13

- [Abraham 1983] Abraham, R.: Dynamics – the Geometry of Behavior, Vols. 1–4. Birkhäuser, Basel (1983)
- [Abraham und Marsden 1978] Abraham, R., Marsden, J.: Foundations of Mechanics. Benjamin, Reading, MA (1978)
- [Amann 1983] Amann, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. De Gruyter, Berlin (1983)
- [Arnold und Avez 1967] Arnold, V., Avez, A.: Problèmes ergodiques de la mécanique classique. Gauthier-Villars, Paris (1967)
- [Arnold 1991] Arnold, V.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Übers. a.d. Russ., 2. Auflage. Deutscher Verlag der Wissenschaften und Springer, Berlin (1991)
- [Arnold 1987] Arnold, V.: Geometrische Methoden in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Übers. a.d. Russ., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1987)
- [Arnold 1988–1993] Arnold, V. (Hrsg.): Dynamical Systems, Vols. 1–8. Encyclopedia of the Mathematical Sciences. Transl. from the Russian. Springer, Berlin (1988–93)
- [Becker und Dörfler 1992] Becker, K., Dörfler, M.: Dynamische Systeme und Fraktale. 4. Auflage. Vieweg, Braunschweig (1992)

- [Billingsley 1965] Billingsley, P.: Ergodic Theory and Information. Wiley, New York (1965)
- [Boccaletti und Pucacco 1996] Boccaletti, D., Pucacco, G.: Theory of Orbits. Vol. 1: Integrable Systems and Non-Perturbative Methods. Vol. 2: Perturbative and Geometrical Methods. Springer, Berlin (1996)
- [Bratelli und Robinson 1979] Bratelli, C., Robinson, D.: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, Vols. 1, 2. Springer, Berlin (1979)
- [Cordani 2002] Cordani, B.: The Kepler Problem: Group Theoretical Aspects, Regularization and Quantization, with Applications to the Study of Perturbations. Birkhäuser, Basel (2002)
- [Ebeling 1989] Ebeling, W.: Wir und die Natur: Chaos, Ordnung und Information. Urania-Verlag, Leipzig (1989)
- [Ebeling et al. 1990] Ebeling, W., Engel, A., Feistel, R.: Physik der Evolutionsprozesse. Akademie-Verlag, Berlin (1990)
- [Falconer 1993] Falconer, K.: Fraktale Geometrie. Übers. a.d. Engl., Spektrum, Heidelberg (1993)
- [Girlich et al. 1990] Girlich, H., Köchel, P., Künle, H.: Steuerung dynamischer Systeme. Birkhäuser, Basel (1990)
- [Guckenheimer und Holmes 1983] Guckenheimer, J., Holmes, P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York (1983)
- [Gutzwiller 1990] Gutzwiller, M.: Chaos in Classical and Quantum Mechanics. Springer, New York (1990)
- [Haken 1990] Haken, H.: Synergetik. Eine Einführung: Nichtgleichgewichtsphasenübergänge in Physik, Chemie und Biologie. 3. Auflage. Springer, Berlin (1990)
- [Hale und Kočak 1991] Hale, J., Kočak, H.: Dynamics and Bifurcations. Springer, New York (1991)
- [Hasselblatt et al. 2002] Handbook of Dynamical Systems. Vols. 1A, 1B edited by B. Hasselblatt et al.; Vol. 2 edited by B. Fiedler. Elsevier, Amsterdam (2002)
- [Hubbard und West 1991] Hubbard, J., West, B.: Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Vols. 1–3. Springer, New York (1991ff)
- [Jetschke 1989] Jetschke, G.: Mathematik der Selbstorganisation. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1989)
- [Jost 2005] Jost, J., Dynamical Systems: Examples of Complex Behavior. Springer, Berlin (2005)
- [Mandelbrot 1982] Mandelbrot, B.: The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco (1982)
- [Meyer und Hall 1992] Meyer, K., Hall, G.: Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. Springer, New York (1992)
- [Ott 1992] Ott, E.: Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University Press, Cambridge, England (1992)
- [Peitgen und Richter 1986] Peitgen, H., Richter, P.: The Beauty of Fractals. Springer, New York (1986)
- [Peitgen et al. 1992] Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D.: Chaos and Fractals. Springer, New York (1992)
- [Poston und Stewart 1978] Poston, T., Stewart, I.: Catastrophe Theory and its Applications. Pitman, London (1978)
- [Reed und Simon 1981] Reed, M., Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics, Vols. 1–4. Academic Press, New York (1981)
- [Ruelle 1989] Ruelle, D.: Chaotic Evolution and Strange Attractors. Cambridge University Press, Cambridge, England (1989)
- [Schechter 1981] Schechter, M.: Operator Methods in Quantum Mechanics. North-Holland, New York (1981)
- [Schneider 1992] Schneider, M.: Himmelsmechanik, Bd. 1–3. Bibliographisches Institut, Mannheim (1992)
- [Schuster 1994] Schuster, P.: Deterministic Chaos: An Introduction. Physik-Verlag, Weinheim (1994)
- [Temam 1988] Temam, R.: Inifinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer, New York (1988)
- [Verhulst 1990] Verhulst, F.: Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Springer, New York (1990)
- [Wiggins 1990] Wiggins, S.: Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer, New York (1990)
- [Zeidler 1984ff] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Vol. I: Fixed-Point Theory, 3rd edition 1998; Vol. II A: Linear Monotone Operators, 2nd edition 1997; Vol. II B: Nonlinear Monotone Operators; Vol. III: Variational Methods and Optimization; Vol. IV: Applications to Mathematical Physics, 2nd edition 1995, Springer, New York (1984ff)
- [Zwillinger 1992] Zwillinger, D.: Handbook of Differential Equations. 2nd edition. Academic Press, New York (1992)

KAPITEL 14

NICHTLINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN DEN NATURWISSENSCHAFTEN

Unter allen Disziplinen der Mathematik ist die Theorie der Differentialgleichungen die wichtigste. Alle Zweige der Physik stellen uns Probleme, die auf die Integration von Differentialgleichungen hinauskommen. Es gibt ja überhaupt die Theorie der Differentialgleichungen den Weg zur Erklärung aller elementaren Naturphänomene, die Zeit brauchen.

Sophus Lie (1894)

Viele in der Natur ablaufende Prozesse besitzen die folgenden beiden typischen Eigenschaften:

- (i) Die Systeme verfügen über unendlich viele Freiheitsgrade.
- (ii) Es treten Wechselwirkungen zwischen den Teilen der Systeme auf.

Solche Prozesse werden durch nichtlineare partielle Differentialgleichungen beschrieben. Dabei gilt:¹

- (a) *Wechselwirkungen entsprechen mathematischen Nichtlinearitäten.*
- (b) *Unendlich viele Freiheitsgrade entsprechen partiellen Differentialgleichungen.*

Zum Beispiel kann es sich um folgendes handeln:

- die Bewegung von Flüssigkeiten, Gasen oder elastischen Medien;
- die Entwicklung des Kosmos nach dem Urknall (Expansion des Weltalls und das Entstehen schwarzer Löcher im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie);
- Elementarteilchenprozesse (zeitlich veränderliche Quantenfelder);
- die Entwicklung von Populationen in der Biologie, Chemie oder Ökologie.

Das unterstreicht die Bedeutung der Theorie nichtlinearer partieller Differentialgleichungen für die Naturbeschreibung. Die Fülle der in der Natur auftretenden Phänomene spiegelt sich mathematisch darin wider, dass es noch viele offene Fragen für konkrete nichtlineare partielle Differentialgleichungen gibt. Die existierenden allgemeinen mathematischen Resultate stecken nur einen groben Rahmen ab für ein detailliertes Studium jeder einzelnen Gleichung. Man unterscheidet:

- (a) irreversible Prozesse (z. B. Diffusion, Wärmeleitung, Wachstum, Transport physikalischer Größen in Flüssigkeiten und Gasen);
- (b) reversible Prozesse (Wellen);
- (c) stationäre Prozesse (z. B. Gleichgewichtszustände).

Ein Prozess heißt irreversibel (bzw. reversibel), falls die Zeitumkehr des Prozesses unmöglich (bzw. möglich) ist. Bei stationären Prozessen hängt der Zustand des Systems nicht von der Zeit ab. Vom mathematischen Standpunkt aus gilt folgende Faustregel:

¹Systeme mit *endlich* vielen Freiheitsgraden unter Wechselwirkung werden durch nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen modelliert (z. B. die Planetenbewegung).

- irreversible Prozesse → parabolische Gleichungen;
- reversible Prozesse → hyperbolische Gleichungen;
- stationäre Prozesse → elliptische Gleichungen.

Typisch für irreversible Prozesse ist die Tendenz zur Glättung der Lösung für wachsende Zeiten (Ausgleich von nichtglatten Anfangsstörungen etwa durch Diffusion). Bei reversiblen Wellenprozessen tritt dagegen kein derartiger Glättungseffekt ein, im Gegenteil, es können neue Singularitäten entstehen (z. B. Schockwellen in der Gasdynamik). Dagegen sind bei stationären Prozessen die Lösungen um so glatter, je glatter die äußeren Einflüsse sind (z. B. die Randbedingungen oder inhomogene Terme, die äußeren Kräften entsprechen).

Irreversible und reversible Prozesse mit unendlich vielen Freiheitsgraden, deren Verlauf nicht von der Wahl des Anfangszeitpunktes abhängt (Homogenität der Zeit), entsprechen unendlichdimensionalen dynamischen Systemen. Die neuere Forschung hat ergeben, dass solche Systeme häufig einen Attraktor haben, d. h., die Systeme streben mit wachsender Zeit ($t \rightarrow +\infty$) Zuständen zu, die Punkten des Attraktors entsprechen. Besitzt dieser Attraktor eine komplizierte Struktur (seltsamer Attraktor), dann kann die Bewegung des Systems für $t \rightarrow +\infty$ *chaotisch* werden (z. B. Turbulenz von Flüssigkeiten). Ferner zeigt sich, dass die Attraktoren unendlich-dimensionaler dynamischer Systeme oft nur *endlich* viele Dimensionen besitzen. Das stimmt mit der Erfahrung der Physiker überein, dass z. B. die Turbulenz von Flüssigkeiten durch eine endliche Anzahl von Parametern beschrieben werden kann. Zusammenfassend gilt, dass die Struktur des Attraktors wesentlich das Verhalten des Systems für große Zeiten bestimmt.

Einen Überblick über die Theorie nichtlinearer partieller Differentialgleichungen und ihre Anwendungen findet man in [Zeidler 1984ff, Vols. I–IV].

14.1 Grundideen

Wir wollen anhand von einfachen Beispielen zeigen, dass Nichtlinearitäten die folgenden wichtigen Phänomene ergeben können:

- (i) Die Lösungen existieren nur für eine endliche Zeit (z. B. Explosionen).
- (ii) Es können im Laufe der Zeit zusätzliche Singularitäten entstehen (Schockwellen).
- (iii) Es gibt Lösungen, die sich unter Wechselwirkungen nicht wesentlich verändern (Solitonen oder Einzelwellen, die sich bei Zusammenstößen wie Teilchen verhalten).

Bei vielen Prozessen in der Natur erwartet man, dass der Effekt (i) nicht auftritt. Um das mathematisch nachzuweisen, benutzt man sogenannte *a priori* Abschätzungen. Das sind Abschätzungen für mögliche Lösungen, die sich allein aus der Gleichung ergeben. Zum Beispiel folgt aus der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$x' = \sin x, \quad x(0) = x_0, \tag{14.1}$$

die Abschätzung $|x'(t)| \leq 1$ und somit

$$|x(t)| \leq |t| + |x_0| \text{ für alle Zeiten } t \in \mathbb{R}, \tag{14.2}$$

unabhängig davon, ob die Lösung existiert oder nicht. Für die Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen ist das folgende Prinzip von fundamentaler Bedeutung:

Aus a priori Abschätzungen erhält man die Existenz von Lösungen.

Wendet man das Prinzip auf (14.1) an, so ergibt sich aus der *a priori* Abschätzung (14.2), dass das Problem (14.1) für jeden gegebenen Anfangswert x_0 genau eine Lösung besitzt, die für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert (vgl. Beispiel 2 weiter unten).

► **BEISPIEL 1** (Explosion der Lösung): Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x' = 1 + x^2, \quad x(0) = 0, \quad (14.3)$$

besitzt die Lösung $x(t) = \tan t$ mit $x(t) \rightarrow +\infty$ für $t \rightarrow \pi/2$, d. h., die Lösung *explodiert* nach endlicher Zeit.

► **BEISPIEL 2** (a priori Abschätzungen verhindern Explosionen): Die Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ sei gegeben. Wir nehmen an, dass jede Lösung $x = x(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$x' = f(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad (14.4)$$

mit der vorgegebenen, stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Abschätzung

$$\sup_{-T \leq t \leq T} |x(t)| < \infty$$

für alle diejenigen Zeitintervalle $[-T, T]$ genügt, auf denen die Lösung existiert.

Dann besitzt das Problem (14.4) genau eine Lösung, die für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert.

► **BEISPIEL 3** (Entstehung von Singularitäten): Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} u_t + c(u)u_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Die Funktion $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Dann gilt:

(i) *Charakteristiken*. Ist $u = u(x, t)$ eine Lösung von (14.5) mit stetigen partiellen Ableitungen, dann heißen die Lösungen $x = x(t)$ der Gleichung

$$x'(t) = c(u(x(t), t)) \quad (14.6)$$

die Charakteristiken von (14.5). Wegen

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_x c(u) + u_t \equiv 0$$

ist u konstant längs jeder Charakteristik. Deshalb folgt aus (14.6), dass alle Charakteristiken Geraden sind, d. h., sie haben die Form

$$x = c(u_0(p))t + p,$$

wobei p ein reeller Parameter ist mit $x(0) = p$.

(ii) *Schocks*. Gilt für zwei Parameterwerte p_1 und p_2 die Beziehung

$$c(u_0(p_1)) > c(u_0(p_2)), \quad (14.7)$$

dann schneiden sich die entsprechenden Charakteristiken in einem gewissen Punkt (x, T) (Abb. 14.1). Da u entlang der Charakteristiken konstant ist, erhalten wir $u(x, T) = u_0(p_1)$ und $u(x, T) = u_0(p_2)$. Aus (14.7) folgt $u_0(p_1) \neq u_0(p_2)$. Deshalb besitzt u im Punkt (x, T) einen Sprung, den man auch als Schock bezeichnet. Folglich kann eine klassische glatte Lösung nur für Zeiten $t < T$ existieren. Dieser Effekt tritt für *beliebig glatte* Anfangswerte u_0 auf.

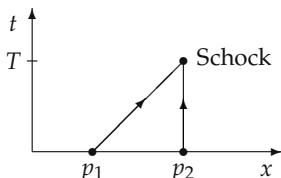


Abb. 14.1

(iii) *Physikalische Interpretation.* Fassen wir $u(x, t)$ als Massendichte am Ort $x \in \mathbb{R}$ zur Zeit t auf, dann beschreibt die Ausgangsgleichung (14.5) die Massenerhaltung. Die Charakteristiken $x = x(t)$ entsprechen den Bahnkurven von Partikeln. Ein „Schock“ tritt auf, falls zwei Partikel zusammenstoßen (d. h., zwei Bahnkurven schneiden sich).

► **BEISPIEL 4:** Wir betrachten die sogenannte Korteweg–deVries-Gleichung

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x, t < \infty. \quad (14.8)$$

(i) *Solitonen.* Die Lösung

$$u = 2k^2 / \cosh^2 k(x - ct - x_0)$$

von (14.8) mit $c = 4k^2$, $k > 0$, und der Phase $x_0 \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als Einzelwelle (oder Soliton), die sich mit der Geschwindigkeit c von links nach rechts ausbreitet (Abb. 14.2).

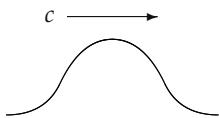


Abb. 14.2

(ii) *Zusammenstoß zwischen zwei Solitonen.* Die Lösung

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial^2 \ln \varphi(x, t)}{\partial^2 x} \quad (14.9)$$

von (14.8) mit

$$\varphi(x, t) = 1 + A_1 e^{2\eta_1} + A_2 e^{2\eta_2} + A_3 e^{2(\eta_1 + \eta_2)}$$

und

$$\eta_j = k_j(x - c_j t), \quad c_j = 4k_j^2, \quad j = 1, 2, \quad A_3 = a A_1 A_2, \quad a = \frac{(k_2 - k_1)^2}{(k_2 + k_1)^2},$$

entspricht zwei Solitonen, die sich mit der Geschwindigkeit c_1 und c_2 von links nach rechts bewegen. Dabei sind die positiven Parameter k_1, k_2 und A_1, A_2 gegeben.

Genauer hat man die folgende Situation. Gilt $c_1 < c_2$, dann stellt die Lösung (14.9) für Zeiten $t \rightarrow \pm\infty$ die Überlagerung von zwei Solitonen

$$u_j(x, t) = 2k_j^2 / \cosh^2 k_j(x - c_j t - x_{j0}^\pm), \quad j = 1, 2,$$

dar, wobei sich die Phasen x_{j0}^\pm aus

$$e^{-k_1 x_{10}^+} = e^{-k_1 x_{10}^-} a^{-1} = A_1, \quad e^{-k_2 x_{20}^+} = e^{-k_2 x_{20}^-} = A_2,$$

ergeben.

Das Bemerkenswerte an dieser Lösung ist, dass die beiden Solitonen nach dem Zusammenstoß ihre Gestalt unverändert beibehalten. Es tritt lediglich eine Phasenverschiebung auf. Solitonen verhalten sich deshalb analog wie stabile Teilchen (Abb. 14.3). Diese Tatsache wurde in den sechziger Jahren entdeckt. Seit dieser Zeit untersuchen Physiker in vielen Gebieten der Physik das Auftreten von Solitonen.

Wichtige Räume von Funktionen mit Werten in einem Banachraum: Es sei $0 < T < \infty$, und X sei ein Banachraum mit der Norm $\|\cdot\|_X$.

Der Raum $C([0, T], X)$. Dieser Raum besteht aus allen stetigen Funktionen

$$u : [0, T] \rightarrow X, \quad (14.10)$$

d. h., aus $t \rightarrow s$ folgt $u(t) \rightarrow u(s)$ in X . Bezuglich der Norm

$$\|u\| = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X$$

wird $C([0, T], X)$ zu einem Banachraum.



Abb. 14.3

Mit $C([0, \infty), X)$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen Funktionen $u : [0, \infty) \rightarrow X$.

Der Raum $C^{(n)}([0, T], X)$, $n = 1, 2, \dots$. Die Ableitung $u'(t)$ der Funktion u aus (14.10) wird in üblicher Weise durch

$$u'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(u(t+h) - u(t))$$

erklärt, wobei der Grenzwert bezüglich X zu nehmen ist (d. h. im Sinne der Normkonvergenz); $C^{(n)}([0, T], X)$ bezeichnet dann die Menge aller Funktionen u der Form (14.10), die auf dem Intervall $[0, T]$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung n haben. Bezuglich der Norm

$$\|u\| = \sum_{k=0}^n \max_{0 \leq t \leq T} \|u^{(k)}(t)\|_X$$

wird $C^{(n)}([0, T], X)$ zu einem Banachraum.

Der Lebesgueraum $L_p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$. Definitionsgemäß besteht $L_p(0, T; X)$ aus allen Funktionen u der Form (14.10), die schwach messbar sind² und der Bedingung

$$\|u\|_p := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

genügen. Bezuglich der Norm $\|u\|_p$ wird $L_p(0, T; X)$ zu einem Banachraum.

► **STANDARDBEISPIEL:** Die folgende Situation ist typisch für zeitabhängige partielle Differentialgleichungen. Die entscheidende Idee besteht darin, die Ortsvariable x und die Zeitvariable t in unterschiedlicher Weise zu behandeln. Wir gehen aus von einer reellen Funktion

$$u = u(x, t) \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (14.11)$$

wobei Ω eine nichtleere offene Menge des \mathbb{R}^n ist. Für jeden festen Zeitpunkt t stellt die Funktion u aus (14.11) eine Funktion des Ortes x dar, die wir kurz mit $u(t)$ bezeichnen, d. h., $u(t)$ steht für die Ortsfunktion

$$x \mapsto u(x, t) \quad \text{auf } \Omega.$$

²Das bedeutet, dass für jedes Funktional $f \in X^*$ die Funktion φ mit $\varphi(t) := f(u(t))$ auf dem Intervall $[0, T]$ messbar ist.

Bezeichnet nunmehr X einen Banachraum von Ortsfunktionen (z. B. $X = C(\overline{\Omega})$), dann bedeutet

$$u \in C([0, T], X),$$

dass für jeden Zeitpunkt $t \in [0, T]$ die Funktion $x \mapsto u(x, t)$ zu X gehört (d. h., im Fall $X = C(\overline{\Omega})$ ist diese Funktion auf $\overline{\Omega}$ stetig), und $t \mapsto u(t)$ ist stetig als Funktion von $[0, T]$ nach X , d. h., für $X = C(\overline{\Omega})$ gilt beispielsweise

$$\lim_{t \rightarrow s} \max_{x \in \Omega} |u(x, t) - u(x, s)| = 0 \quad \text{für alle } s \in [0, T].$$

14.2 Reaktions-Diffusionsgleichungen

In Biologie, Chemie, Physik oder Ökologie hat man es häufig mit Teilchen zu tun (z. B. Moleküle), die miteinander reagieren und diffundieren. Solche Prozesse werden durch Reaktions-Diffusionsgleichungen für die Teilchenzahldichte beschrieben.

14.2.1 Fortschreitende Wellen

Die skalare eindimensionale Reaktions-Diffusionsgleichung hat die Form

$$u_t = Du_{xx} + f(u) \tag{14.12}$$

mit dem Diffusionskoeffizienten $D > 0$. Dabei bedeutet $u(x, t)$ eine Teilchenzahldichte im Punkt $x \in \mathbb{R}$ zur Zeit t . Der nichtlineare Reaktionsterm $f(u)$ beschreibt die Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen, während Du_{xx} der Diffusion von Teilchen entspricht. Genauer erhalten wir aus (14.12) durch Integration die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = Du_x(b, t) - Du_x(a, t) + \int_a^b f(u(x, t)) dx. \tag{14.13}$$

Die linke Seite entspricht dabei der Änderungsgeschwindigkeit der Teilchenanzahl in dem Intervall $[a, b]$. Nach (14.13) ergibt sich die Änderung der Teilchenzahl in $[a, b]$ dadurch, dass Teilchen über die Randpunkte $x = a$ und $x = b$ in das Intervall eindringen (bzw. es verlassen) oder Teilchen in $[a, b]$ erzeugt oder vernichtet werden. Eine Lösung u von (14.12) der Form

$$u(x, t) = W(x + ct) \tag{14.14}$$

entspricht einer Dichtewelle, die sich mit der Geschwindigkeit $c > 0$ von rechts nach links ausbreitet. Setzen wir diesen Ausdruck in (14.12) ein, dann erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$DW'' - cW' + f(W) = 0.$$

► BEISPIEL: Im Spezialfall

$$f(u) = au(1 - u) \tag{14.15}$$

mit der Konstanten $a > 0$ wird (14.12) als die *Fisher-Gleichung* bezeichnet. Die Teilchen sind hier etwa biologische Objekte (z. B. ein bestimmtes Gen einer Population), die einem Auswahlprozess unterliegen. In der Nähe von $u = 0$ (Unterbevölkerung) und $u = 1$ (Überbevölkerung) ist $f(u)$ klein, d. h., nur wenige Objekte überleben den Auswahlprozess. Der folgende Satz ist auf (14.15) anwendbar.

Satz: Die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genüge den Bedingungen $f(0) = f(1) = 0$, $f(u) > 0$, für alle $u \in (0, 1)$ sowie $f'(0) > 0$ und $f'(1) < 0$. Dann gibt es eine kritische Geschwindigkeit $c_0 > 0$, so dass die Gleichung (14.12) für jedes c mit $c \geq c_0$ eine Wellenlösung der Form (14.14) besitzt mit

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} W(u) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} W(u) = 1.$$

Ferner ist die Funktion W streng monoton wachsend (Abb. 14.4).

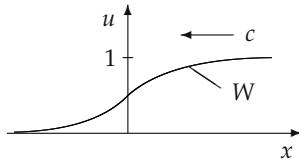


Abb. 14.4

Für $c < c_0$ (unterkritische Geschwindigkeit) existieren keine derartigen fortschreitenden Wellen.

14.2.2 Globale Attraktoren

Wir betrachten das folgende Rand-Anfangswertproblem:

$$u_t = D\Delta u + f(u), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (14.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T) \quad (\text{Randbedingung}), \quad (14.17)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (\text{Anfangsbedingung}), \quad (14.18)$$

wobei $D > 0$ den Diffusionskoeffizienten und $\frac{\partial u}{\partial n}$ die äußere Normalableitung bezeichnet. Ferner sei Ω eine nichtleere offene beschränkte Menge des \mathbb{R}^3 . Wir interpretieren $u(x, t)$ als Teilchenzahldichte im Punkt x zur Zeit t . Für jede offene Teilmenge G von Ω erhalten wir aus (14.16) die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int_G u(x, t) dx = D \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} dO + \int_G f(u) dx$$

für die Änderungsgeschwindigkeit der Teilchenanzahl in G . Die Randbedingung (14.17) besagt, dass keine Teilchen durch den Rand von Ω fließen. Wir nehmen an, dass der Reaktionsterm f ein Polynom vom Grade $2p - 1$ darstellt ($p = 1, 2, \dots$), wobei der Koeffizient der höchsten Potenz positiv ist. Unter einer verallgemeinerten Lösung von (14.16), (14.17), (14.18) verstehen wir eine Funktion u mit

$$-\int_{\Omega} \int_0^T u(x, t) \varphi(x) \chi'(t) dx dt = \int_{\Omega} \int_0^T (-D \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \varphi + f(u) \varphi) \chi dx dt \quad (14.19)$$

für alle $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ und alle $\chi \in C_0^\infty(0, T)$. Formal erhält man (14.19), indem man (14.16) mit $\varphi \chi$ multipliziert und anschließend partiell integriert.

Als Zustandsraum wählen wir

$$Z := L_2(\Omega).$$

Ferner setzen wir noch $V := W_2^1(\Omega)$. Wir wollen die Lösungen $u = u(t)$ des Ausgangsproblems (14.16), (14.17), (14.18) als Trajektorien eines dynamischen Systems im Zustandsraum Z auffassen. Dazu definieren wir $S(t)$ durch

$$S(t)u_0 := u(t), \quad u_0 \in Z, \quad t \geq 0.$$

Jedem Punkt der Trajektorie $u(t)$ (bei fester Zeit t) entspricht eine Teilchenzahldichte $u = u(x, t)$, die in Z liegt. Der folgende Satz sichert, dass die Trajektorie $u = u(t)$ stetig ist als Funktion von $[0, \infty)$ nach Z . Ferner hängt die Trajektorie stetig vom Anfangszustand ab, d. h., die Abbildung $S(t) : Z \rightarrow Z$ ist stetig für alle $t \geq 0$.

Satz 1: Das verallgemeinerte Problem (14.19) besitzt für jeden Anfangszustand $u_0 \in Z$ genau eine Lösung u mit $u \in C([0, \infty), Z)$ und $u \in L_2(0, T; V) \cap L_{2p}(0, T; L_{2p}(\Omega))$ für alle $T > 0$.

$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ bildet eine Halbgruppe auf Z . Ferner ist $S(t) : Z \rightarrow Z$ stetig für alle $t \geq 0$.

Satz 2: Es existiert ein globaler Attraktor \mathbb{A} in Z .

Genauer ist \mathbb{A} kompakt und zusammenhängend in Z , und \mathbb{A} zieht die beschränkten Mengen von Z gleichmäßig an.

Explizit bedeutet das folgendes:

- (i) \mathbb{A} ist eine *invariante* Menge, d. h., genauer ist $S(t)\mathbb{A} = \mathbb{A}$ für alle $t \geq 0$.
- (ii) \mathbb{A} zieht alle Trajektorien an, d. h., für jedes $u_0 \in Z$ genügt der Abstand zwischen $S(t)u_0$ und \mathbb{A} in Z der Beziehung

$$d(S(t)u_0, \mathbb{A}) := \inf_{v \in \mathbb{A}} \|S(t)u_0 - v\|_Z \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty. \quad (14.20)$$

(iii) \mathbb{A} zieht die beschränkten Mengen von Z gleichmäßig an, d. h., ist \mathbb{B} eine beschränkte Menge in Z , dann verläuft die Konvergenz in (14.20) gleichmäßig für alle $u_0 \in \mathbb{B}$.

Vom physikalischen Standpunkt aus besagt Satz 2, dass die gesamte Dynamik des Systems für große Zeiten vom Attraktor \mathbb{A} regiert wird. Wegen seiner Kompaktheit ist \mathbb{A} „wesentlich kleiner“ als der gesamte unendlichdimensionale Zustandsraum Z .

14.2.3 Ein allgemeiner Existenzsatz für quasilineare parabolische Systeme

Wir betrachten das folgende Rand-Anfangswertproblem für ein System von Reaktions-Diffusionsgleichungen:

$$\begin{aligned} u_t + A(x, t, u)u &= f(x, t, u), & x \in \Omega, t > 0, \\ B(x, t, u)u &= \alpha g(x, t, u), & x \in \partial\Omega, t > 0 \quad (\text{Randbedingung}), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & (\text{Anfangsbedingung}), \end{aligned} \quad (14.21)$$

mit den Spaltenmatrizen $u = (u_1, \dots, u_M)^T$, $f = (f_1, \dots, f_M)^T$, $g = (g_1, \dots, g_M)^T$. Die Voraussetzungen sind:

(H1) Die Menge Ω ist ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^N , $N \geq 1$. Die äußere Einheitsnormale des Randes $\partial\Omega$ sei $n = (n_1, \dots, n_N)$. Im folgenden wird über zwei gleiche Indizes stets von 1 bis N summiert.

(H2) Bezeichnet ∂_j die partielle Ableitung bezüglich der j -ten Komponente von x , dann gilt

$$A(x, t, u)u := -\partial_j(a_{jk}(x, t, u)\partial_k u) + a_j(x, t, u)\partial_j u.$$

Dabei sind a_{jk} und a_j reelle $(M \times M)$ -Matrizen.

(H3) Die *Randbedingungen* sind entweder durch

$$B(x, t, u)u := a_{jk}(x, t, u)n_j\partial_k u, \quad \alpha = 1 \quad (\text{Neumannsche Randbedingung}),$$

oder durch

$$B(x, t, u)u := u, \quad \alpha = 0 \quad (\text{Dirichletsche Randbedingung}),$$

gegeben.

(H4) *Elliptizität*. Die Eigenwerte der $(M \times M)$ -Matrix

$$a_{jk}(x, t, u)D_j D_k$$

haben positiven Realteil für alle $x \in \overline{\Omega}$, $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^m$ sowie für alle D_j , $D_k \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j=1}^N D_j^2 = 1$.

(H5) Alle auftretenden Komponenten von f , g , a_{jk} und a_j sind hinreichend glatt, und der Rand von Ω ist hinreichend regulär.

Als *Zustandsraum* Z wählen wir $Z = \{u : u_j \in W_p^1(\Omega) \text{ mit } (1 - \alpha)u = 0 \text{ für alle } j\}$. Dabei sei $N < p < \infty$.

Die Bedingung (H4) garantiert, dass (14.21) ein sogenanntes (quasilineares) *parabolisches System* darstellt.

Satz: Für jeden gegebenen Anfangszustand $u_0 \in Z$ hat das Ausgangsproblem (14.21) eine eindeutige maximale klassische Lösung $u = u(x, t)$ mit dem maximalen halboffenen Existenzintervall $[0, T_0)$ bezüglich des Zustandsraumes Z (d. h. $u(t) \in Z$ für alle $t \in [0, T_0)$).

Hat man für jedes T mit $0 < T < T_0$ die a priori Abschätzung

$$\sup_{0 \leq t < T} \|u(t)\|_Z < \infty,$$

dann ist $T_0 = \infty$, d. h., die Lösung existiert für alle Zeiten.

► **BEISPIEL:** Dieser Satz kann z. B. angewandt werden auf das System

$$\begin{aligned} (u_m)_t - D_m \Delta u_m &= f_m(x, u_1, \dots, u_M), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ -D_m \frac{\partial u_m}{\partial n} &= g_m(x, u_1, \dots, u_M), & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u_m(x, 0) &= u_{0m}(x), & x \in \Omega, \quad m = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

mit den positiven Diffusionskoeffizienten $D_m > 0$. Dabei ist u_m die Teilchenzahldichte der m -ten Substanz. Der Term f_m beschreibt Reaktionen, und die Randbedingung gibt an, in welcher Weise Teilchen durch den Rand $\partial\Omega$ des Behälters Ω strömen.

Wir brauchen lediglich vorauszusetzen, dass die Funktionen f_m , g_m , u_{0m} alle hinreichend glatt sind und der Rand $\partial\Omega$ hinreichend regulär ist.

14.3 Nichtlineare Wellengleichungen

14.3.1 Die Lebensdauer von glatten Lösungen

Wir betrachten die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= F(u', u''), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varepsilon u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\text{Anfangsbedingung}), \\ u_t(x, 0) &= \varepsilon u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\text{Anfangsbedingung}). \end{aligned} \tag{14.22}$$

Dabei steht u' für alle ersten partiellen Ableitungen von u bezüglich x und t , während u'' für die entsprechenden zweiten partiellen Ableitungen steht, wobei u_{tt} nicht vorkommt. Wir setzen voraus:

(H1) Die reelle Funktion F gehört der Klasse C^∞ an, d. h., für alle möglichen Argumente besitzt F stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung.

(H2) F verschwindet zusammen mit seinen ersten partiellen Ableitungen im Ursprung (d. h. für $u' \equiv 0, u'' \equiv 0$).

(H3) Die Funktionen $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sind gegeben (d. h., sie besitzen stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung und verschwinden außerhalb einer hinreichend großen Kugel).

Ferner sei $\varepsilon > 0$ ein kleiner Parameter. Unter der Lebensdauer $T_0(\varepsilon)$ verstehen wir das Supremum über alle Zeiten $T \geq 0$, so dass die Gleichung (14.22) eine C^∞ -Lösung u besitzt für alle Positionen $x \in \mathbb{R}^N$ und alle Zeiten $t \in [0, T]$.

Satz: Es gibt positive Konstanten A und ε_0 , so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ gilt:

$$T_0(\varepsilon) \geq \begin{cases} A/\varepsilon & \text{für } N = 1, 2, \\ e^{A/\varepsilon} & \text{für } N = 3, \\ \infty & \text{für } N > 3 \quad (\text{globale Lösung}). \end{cases}$$

Für $N = 1, 2, 3$ verlieren die Lösungen ihre Glattheit zum Zeitpunkt $T_0(\varepsilon)$. Bemerkenswert ist, dass im interessanten Fall $N = 3$ wegen $T_0(\varepsilon) = e^{A/\varepsilon}$ glatte Lösungen „sehr lange Zeit“ existieren, falls ε hinreichend klein ist, d. h., der Anfangszustand und die Anfangsgeschwindigkeit sind hinreichend klein.

14.3.2 Ein allgemeiner Existenzsatz für nichtlineare symmetrische hyperbolische Systeme

Wir studieren das folgende System

$$\begin{aligned} u_t &= F(x, t, u, \partial u), & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{(Anfangsbedingung)}, \end{aligned} \tag{14.23}$$

mit den Spaltenmatrizen $u = (u_1, \dots, u_M)^\top$ und $F = (F_1, \dots, F_M)^\top$, wobei $N, M \geq 1$ gilt. Ferner bezeichnet ∂u das Tupel $(\partial_k u_m)$ aller ersten partiellen Ableitungen bezüglich der Komponenten der Ortsvariablen $x = (x_1, \dots, x_N)$. Fassen wir $\partial_k u_m$ als reelle Variable von F auf, dann ist F eine Funktion von $p = (x, t, u, \partial u)$ mit

$$p \in P, \tag{14.24}$$

wobei $P = \mathbb{R}^N \times [0, T_0] \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{NM}$ gilt für festes $T_0 > 0$.

Wir setzen voraus:

(H1) Die Funktionen F_j besitzen stetige und beschränkte partielle Ableitungen beliebiger Ordnung auf P . Für $u = 0$ und $\partial u = 0$ verschwindet die Funktion $(x, t) \mapsto F(x, t, 0, 0)$ außerhalb einer geeigneten beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}^N \times [0, T_0]$.

(H2) Das System (14.23) ist *symmetrisch hyperbolisch*. Dies bedeutet, dass für jedes Argument $p \in P$ eine reelle symmetrische Matrix $S(p)$ existiert, so dass die Matrizen

$$A_k(p) = S(p) \frac{\partial F(p)}{\partial (\partial_k u)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

symmetrisch sind.³ Ferner ist S gleichmäßig positiv definit, d.h., es gibt eine Zahl $\alpha > 0$, so dass für jedes $p \in P$ die Eigenwerte von $S(p)$ alle größer als α sind.

Die Komponenten von S besitzen stetige und beschränkte partielle Ableitungen beliebiger Ordnung auf P .

Mit s_0 bezeichnen wir die kleinste natürliche Zahl, für die $s_0 > N/2$ gilt. Als Zustandsraum wählen wir

$$X^s = \{u : u_j \in W_2^s(\mathbb{R}^N) \text{ für alle } j\}.$$

Dabei ist s eine feste natürliche Zahl mit $s \geq s_0 + 2$.

Satz: Für jeden gegebenen Anfangszustand $u_0 \in X^s$ gibt es eine Zeit $T > 0$, so dass die Ausgangsgleichung (14.23) eine eindeutige klassische Lösung

$$u \in C^{s-s_0}(\mathbb{R}^N \times [0, T]), \quad s - s_0 \geq 2,$$

besitzt. Ferner ist $u \in C([0, T], X^s) \cap C^1([0, T], X^{s-1})$.

14.3.3 Der quasilineare Spezialfall

Ein wichtiger Spezialfall von (14.23) sind sogenannte quasilineare symmetrische hyperbolische Systeme

$$u_t = \sum_{k=1}^N B_k(x, t, u) \partial u_k + g(x, t, u). \quad (14.25)$$

Die entscheidende Symmetrievereinigung (H2) fordert die Existenz einer symmetrischen Matrix $S(x, t, u)$, so dass die Matrizen A_k mit

$$A_k(x, t, u) := S(x, t, u) B_k(x, t, u)$$

für alle (x, t, u) symmetrisch sind und $S(x, t, u)$ gleichmäßig positiv definit ist. Somit erhalten wir nach Multiplikation von (14.25) mit S das System

$$S(x, t, u) u_t = \sum_{k=1}^N A_k(x, t, u) \partial_k u + h(x, t, u),$$

wobei sämtliche Koeffizientenmatrizen $S(x, t, u)$ und $A_k(x, t, u)$ symmetrisch sind und $h(x, t, u) := S(x, t, u) g(x, t, u)$. Im quasilinearen Fall genügt es $s \geq s_0 + 1$ vorauszusetzen.

14.3.4 Anwendungen

Viele Gleichungen der mathematischen Physik lassen sich als quasilineare symmetrische hyperbolische Systeme der Form (14.25) schreiben (z.B. die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik, die Gleichungen der Magnetohydrodynamik, der Elastodynamik oder der allgemeinen Relativitätstheorie).

► **BEISPIEL** (semilineare Wellengleichung): Die Gleichung

$$\begin{aligned} v_{tt} - \Delta v &= f(x, t, v, v_t, \partial v), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= a(x), \\ v_t(x, 0) &= b(x), \end{aligned} \quad (14.26)$$

³Das Element in der j -ten Zeile und m -ten Spalte der Matrix $\partial F(p)/\partial(\partial_k u)$ ist gleich $\partial F_j(p)/\partial(\partial_k u_m)$. Man bezeichnet S als Symmetrisator.

lässt sich durch Einführung der neuen Variablen

$$(u_1, u_2, u_3, \dots, u_{N+2}) = (v, v_t, \partial_1 v, \dots, \partial_N v)$$

auf ein symmetrisches hyperbolisches System der Form (14.23) zurückführen. Beispielsweise erhalten wir für $N = 2$ aus (14.26) das System

$$\begin{aligned} (u_1)_t &= u_2, & (u_2)_t &= \partial_1 u_3 + \partial_2 u_4 + f(x, t, u), \\ (u_3)_t &= \partial_1 u_2, & (u_4)_t &= \partial_2 u_2, \end{aligned} \quad (14.27)$$

wobei wir setzen $u_1 := v$, $u_2 := v_t$, $u_3 := \partial_1 v$, $u_4 := \partial_2 v$. Das System (14.27) kann in der folgenden Matrixform geschrieben werden

$$u_t = A_1 \partial_1 u + A_2 \partial_2 u + g(x, t, u)$$

mit der Spaltenmatrix $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ und den symmetrischen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sowie der Spaltenmatrix $g(x, t, u) = (u_2, f(x, t, u), 0, 0)^T$. Da A_1 und A_2 bereits symmetrisch sind, können wir den Symmetrisator S in trivaler Weise gleich der Einheitsmatrix wählen.

14.4 Die Gleichungen der Hydrodynamik

Man unterscheidet Flüssigkeiten ohne innere Reibung (ideale Flüssigkeiten) und Flüssigkeiten mit innerer Reibung (viskose Flüssigkeiten). Die innere Reibung kann zu Turbulenz führen.

14.4.1 Die Eulerschen Gleichungen für ideale Flüssigkeiten

Die Grundgleichungen für die Bewegung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit der konstanten Dichte $\varrho > 0$ lauten:

$$\varrho \mathbf{v}_t + \varrho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{k} - \mathbf{grad} p, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad (14.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T] \quad (\text{Inkompressibilität}),$$

$$\mathbf{v} \mathbf{n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T] \quad (\text{Randbedingung}),$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \quad x \in \Omega \quad (\text{Anfangsbedingung}),$$

$$\int_{\Omega} p(x, t) dx = p_0(t), \quad t \in [0, T] \quad (\text{mittlerer Druck}).$$

Dabei benutzen wir die folgenden Bezeichnungen: $\mathbf{v}(x, t)$ = Geschwindigkeitsvektor, $p(x, t)$ = Druck, $\mathbf{k}(x, t)$ = Kraftdichte (am Ort x zur Zeit t). Ferner sei Ω ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet des \mathbb{R}^3 mit glattem Rand (d.h. $\partial\Omega \in C^\infty$) und dem äußeren Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} . Die Randbedingung „ $\mathbf{v}\mathbf{n} = 0$ auf $\partial\Omega$ “ besagt, dass keine Flüssigkeit durch den Rand fließt. Bezüglich eines festen kartesischen Koordinatensystems seien v_1, v_2, v_3 bzw. k_1, k_2, k_3 die Komponenten von \mathbf{v} bzw. \mathbf{k} . Entscheidend ist der Sobolevraum

$$\mathbb{H}^m := W_2^m(\Omega)^3,$$

der die Rolle des Zustandsraumes spielt. Dabei bedeutet $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{H}^m$, dass jede der Komponenten von $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(x)$ zu $W_2^m(\Omega)$ gehört.

Für eine feste Zeit $T_0 > 0$ und $m \geq 3$ seien folgende Größen gegeben:

(i) die äußere Kraftdichte $\mathbf{k} \in C([0, T_0], \mathbb{H}^m)$;

(ii) das Anfangsgeschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{H}^m$ mit $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$ auf Ω und $\mathbf{v}_0 \mathbf{n} = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$;

(iii) der mittlere Druck $p_0 \in C[0, T_0]$.

Satz: Es gibt eine Zeit $T > 0$, so dass die Eulerschen Gleichungen (14.28) genau eine Lösung

$$\mathbf{v} \in C([0, T], \mathbb{H}^m) \cap C^1([0, T], \mathbb{H}^{m-1}), \quad p \in C([0, T]),$$

besitzen. Das ist gleichzeitig die eindeutige klassische Lösung mit

$$\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])^3, \quad p \in C(\overline{\Omega} \times [0, T]),$$

und $p(\cdot, t) \in C^1(\overline{\Omega})$ für alle $t \in [0, T]$.

Korollar: Sind die vorgegebenen Daten glatt, d. h. ist

$$\mathbf{k} \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T])^3, \quad \mathbf{v}_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})^3, \quad p_0 \in C^\infty[0, T_0],$$

mit $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$ auf Ω und $\mathbf{v}_0 \mathbf{n} = 0$ auf $\partial\Omega$, dann existiert eine Zeit $T > 0$, so dass die Eulerschen Gleichungen (14.28) genau eine glatte Lösung besitzen, d. h., die Komponenten von \mathbf{v} sowie p sind C^∞ -Funktionen auf $\overline{\Omega} \times [0, T]$.

Dieser Existenzsatz bezieht sich nur auf ein gewisses Zeitintervall $[0, T]$. Die Existenz eindeutiger, hinreichend glatter Lösungen im \mathbb{R}^3 für alle Zeiten $t \geq 0$ ist bisher noch nicht bewiesen worden.⁴ Der physikalische Grund hierfür scheint darin zu bestehen, dass für große Zeiten ein Glattheitsverlust durch Wirbelbildungen auftreten kann.

14.4.2 Die Navier–Stokeschen Differentialgleichungen für viskose Flüssigkeiten und Turbulenz

Wir benutzen hier die gleichen Bezeichnungen wie in 14.4.1. Die Navier–Stokeschen Differentialgleichungen für die Bewegung einer inkompressiblen viskosen (zähen) Flüssigkeit der konstanten Dichte $\varrho > 0$ und der Viskosität $\eta > 0$ in einem beschränkten Gebiet Ω des \mathbb{R}^N ($N = 2, 3$) lauten:⁵

$$\varrho \mathbf{v}_t + \varrho (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} - \eta \Delta \mathbf{v} = \mathbf{k} - \operatorname{grad} p, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad (14.29)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T] \quad (\text{Inkompressibilität}), \quad (14.30)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T] \quad (\text{Haftbedingung am Rand}), \quad (14.31)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0 \quad (\text{Anfangsgeschwindigkeit}), \quad (14.32)$$

$$\int_{\Omega} p(x, t) dx = p_0(t), \quad t \in [0, T] \quad (\text{mittlerer Druck}). \quad (14.33)$$

Gegeben sind die äußere Kraftdichte \mathbf{k} , die Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 und der mittlere Druck p_0 . Gesucht werden das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ und der Druck $p = p(x, t)$.

Eine fundamentale Rolle spielt die dimensionslose *Reynoldszahl*

$$Re = \varrho V D / \eta.$$

⁴Im \mathbb{R}^2 existiert eine derartige globale Existenz- und Eindeutigkeitsaussage.

⁵Im folgenden wird der Rand $\partial\Omega$ als hinreichend glatt vorausgesetzt.

Hier bezeichnet $V = \int_{\Omega} |\mathbf{v}| dx$ die mittlere Geschwindigkeit und D den Durchmesser von Ω .

Im Experiment wird beobachtet, dass bei großen Reynoldszahlen Turbulenz eintritt. Das ist der physikalische Grund dafür, dass die mathematische Behandlung der Navier–Stokeschen Differentialgleichungen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden ist. Eine zur Anfangszeit $t = 0$ glatte Strömung kann zu einem gewissen Zeitpunkt ihre Regularität verlieren. Ferner braucht die Lösung für $t \rightarrow +\infty$ nicht gegen ein stationäres Geschwindigkeitsfeld zu konvergieren. Erst in den letzten Jahren ist gezeigt worden, dass es einen endlichdimensionalen Attraktor \mathbb{A} gibt, für dessen *fraktale Dimension* man Abschätzungen angeben kann, die im engen Zusammenhang mit der *Anzahl der Freiheitsgrade* stehen, die die Physiker bei Turbulenz beobachteten. Dieses Resultat weist darauf hin, dass der Attraktor \mathbb{A} , der die Bewegung für große Zeiten regt, für die Turbulenz verantwortlich ist.

Das verallgemeinerte Problem und nichtlineare Funktionalanalysis: Die zu erwartende Turbulenz brachte den französischen Mathematiker Jean Leray 1933 auf die Idee, den Begriff der *schwachen* (verallgemeinerten) Lösung einzuführen mit einem Minimum an Regularität. Die folgenden scheinbar unnötig komplizierten Betrachtungen liegen in der Natur der Sache. Wegen der auftretenden Turbulenzen reichen klassische Lösungen von (14.29) bis (14.33) nicht aus. Die nichtlineare Funktionalanalysis stellt jedoch Hilfsmittel bereit, um das Turbulenzproblem in Angriff nehmen zu können.

Das verallgemeinerte Problem zu (14.29) bis (14.33) lautet:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho \mathbf{w} \mathbf{v} dx - \varrho \int_{\Omega} \mathbf{w} (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} dx + \eta \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{w} \operatorname{grad} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{w} \mathbf{k} dx \quad (14.34)$$

für alle $\mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega, \operatorname{div})$ mit $C_0^\infty(\Omega, \operatorname{div}) := \{\mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)^N : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ auf } \Omega\}$. Formal erhält man (14.34), indem man die Ausgangsgleichung (14.29) mit $\mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega, \operatorname{div})$ skalar multipliziert und dann partiell integriert, d. h., man benutzt die Relationen

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \Delta \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{w} \operatorname{grad} \mathbf{v} dx \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \mathbf{w} \operatorname{grad} p dx = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{w} dx = 0.$$

Durch diese Prozedur fällt der Druck p in (14.34) heraus. Wir zeigen weiter unten, wie man den Druck p bestimmt. Die Zeitableitung in (14.34) ist im Sinne der Distributionentheorie zu verstehen.

Unser Ziel ist es, die Navier–Stokeschen Differentialgleichungen als ein *unendlichdimensionales dynamisches System* (Semifluss) für das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} aufzufassen, um die Begriffsbildungen der Theorie dynamischer Systeme einsetzen zu können. Als Zustandsraum Z wählen wir

$$Z := \text{Abschluss von } C_0^\infty(\Omega, \operatorname{div}) \text{ im Lebesgueraum } L_2(\Omega)^N;$$

Z ist ein reeller Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_Z := \int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{w} dx,$$

wobei $C_0^\infty(\Omega, \operatorname{div})$ in Z dicht liegt. Ferner benötigen wir noch den Raum

$$V := \text{Abschluss von } C_0^\infty(\Omega, \operatorname{div}) \text{ in dem Sobolevraum } \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)^N;$$

V ist ein reeller Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_V := \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{v} \operatorname{grad} \mathbf{w} dx.$$

$C_0^\infty(\Omega, \operatorname{div})$ liegt dicht in V .

Wir geben uns die Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 \in Z$ und die zeitunabhängige äußere Kraftdichte $\mathbf{k} \in Z$ vor. Eine verallgemeinerte Lösung von (14.29) bis (14.33), d. h. eine Lösung von (14.34), ist eine Trajektorie $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ im Zustandsraum Z . Das bedeutet, dass zu jedem Zeitpunkt t das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(x, t)$ bekannt ist mit $\mathbf{v}(\cdot, t) \in Z$. Wir setzen

$$S(t)\mathbf{v}_0 := \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}_0 \in Z. \quad (14.35)$$

Zweidimensionale Strömung

Satz 1: Es sei $N = 2$ (zwei Raumdimensionen). Dann besitzt das Anfangswertproblem (14.29) bis (14.33) für die Navier–Stokeschen Gleichungen genau eine (verallgemeinerte) Lösung⁶ mit

$$\mathbf{v} \in C([0, \infty), Z) \quad (14.36)$$

und $\mathbf{v} \in L_2(0, T; V)$ für alle $T > 0$. Speziell hängen die Trajektorien $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ in Z stetig von der Zeit t ab. Ferner hängt die Trajektorie stetig von der Anfangslage ab, d. h., die Abbildung $S(t) : Z \rightarrow Z$ ist stetig für alle $t \geq 0$.

Satz 2: Das so für $t \geq 0$ entstehende dynamische System besitzt im Zustandsraum Z einen globalen Attraktor \mathbb{A} von endlicher (fraktaler) Dimension.

Genauer ist die invariante Menge \mathbb{A} kompakt und zusammenhängend in Z , und \mathbb{A} zieht die beschränkten Mengen in Z gleichmäßig an.

Dreidimensionale Strömung

Im dreidimensionalen Raum ist die Situation mathematisch komplizierter. Dann gibt es (verallgemeinerte) Lösungen der Navier–Stokeschen Differentialgleichungen (14.29) bis (14.33) mit⁷

$$\mathbf{v} \in C_s([0, \infty), Z)$$

und $\mathbf{v} \in L_2(0, T; V)$ für alle $T > 0$.

Die Eindeutigkeit dieser Lösungen konnte jedoch bisher nur bewiesen werden, falls eine zusätzliche Glattheitsbedingung erfüllt ist. Obwohl das dynamische System (14.35) somit nicht wohldefiniert ist, kann man jedoch trotzdem die Existenz eines Attraktors nachweisen, der eine endliche (fraktale) Dimension besitzt [vgl. Temam 1988]. Diese Tatsache ist fundamental für die Turbulenztheorie.

Berechnung des Druckes

Kennt man eine verallgemeinerte Lösung $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ von (14.34), dann erhält man aus (14.29) bis (14.33) zur Bestimmung des Druckes p eine Gleichung der Form

$$\mathbf{grad} p = \mathbf{g}, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (14.37)$$

Wir halten zunächst die Zeit t fest. Dann ist p durch (14.37) nur bis auf eine Konstante festgelegt, die jedoch durch die Normierungsbedingung (14.33) bestimmt wird. Mit Z^\perp bezeichnen wir das orthogonale Komplement zu Z im Hilbertraum $L_2(\Omega)^N$.

⁶Die Bedingung (14.36) besagt, dass die Lösung $\mathbf{v}(t)$ für alle Zeiten $t \geq 0$ zu Z und für fast alle Zeiten t zu V gehört. Aus $\mathbf{v} \in Z$ folgt „ $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ auf Ω' “ im Sinne der Theorie der Distributionen (Inkompressibilitätsbedingung). Dagegen ergibt sich aus $\mathbf{v} \in V$, dass „ $\mathbf{v} = 0$ auf $\partial\Omega'$ “ im Sinne verallgemeinerter Randwerte gilt (Haftbedingung).

⁷Der Raum $C_s([0, \infty), Z)$ besteht aus allen Funktionen $v : [0, \infty) \rightarrow Z$, die schwach stetig sind, d. h., die reelle Funktion $(v(t), w)_Z$ ist stetig auf $[0, \infty)$ für alle $w \in Z$.

Fall 1: Ist die Lösung v hinreichend glatt, dann gilt $\mathbf{g} \in Z^\perp$.

Deshalb benötigt man nur noch das folgende Resultat.

Lemma: Für jedes $\mathbf{g} \in Z^\perp$ besitzt (14.37) eine Lösung $p \in W_2^1(\Omega)$, die (wegen des vorausgesetzten Zusammenhangs von Ω) bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt ist.

Fall 2: Im allgemeinen Fall kann man nur zeigen, dass \mathbf{g} zum dualen Raum von $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ gehört. Dann besitzt (14.37) eine Lösung $p \in L_2(\Omega)$, die bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt ist. Die Gleichung (14.37) ist dann im Sinne der Theorie der Distributionen zu verstehen (vgl. 10.4).

Bifurkation bei viskosen Flüssigkeiten

► **BEISPIEL 1** (Taylorproblem): Wir betrachten eine inkompressible viskose Flüssigkeit in einem Zylinder, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert (Abb. 14.5(a)). Für kleine ω beobachtet man eine radialsymmetrische Strömung (Couette-Strömung). Für eine kritische Winkelgeschwindigkeit ω_0 treten jedoch plötzlich Muster auf (sogenannte Taylorwirbel). Es handelt sich hier um ein typisches Bifurkationsproblem für die stationären Navier–Stokeschen Gleichungen (14.29) bis (14.33) mit $\mathbf{v}_t \equiv 0$.

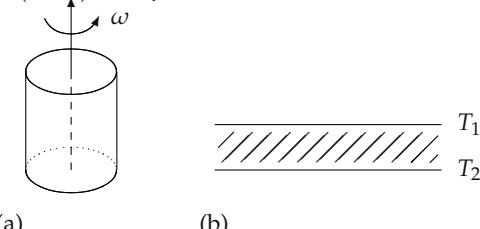


Abb. 14.5

► **BEISPIEL 2** (Bénardproblem): Wir betrachten eine inkompressible viskose Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Platten unterschiedlicher Temperatur T_1 und T_2 (Abb. 14.5(b)). Lässt man die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$ anwachsen, dann gibt es einen kritischen Wert ΔT_0 , für den plötzlich Muster erscheinen (hexagonale Bénard-Zellen).

Beide Phänomene gehören zur Mathematik der Selbstorganisation (Strukturbildung). Vom mathematischen Standpunkt aus kann man beide Bifurkationsprobleme mit Hilfe des Hauptsatzes der generischen Bifurkationstheorie behandeln (vgl. 12.6.2).

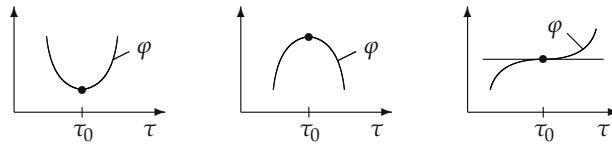
Die Einzelheiten findet man in [Zeidler 1984ff, Vol. IV].

14.5 Variationsprobleme

Die Elemente der Variationsrechnung findet man in Kapitel 5. Wir geben hier weiterführende Resultate an, die für die mathematische Physik von besonderer Bedeutung sind.

14.5.1 Grundidee

Eine reelle Funktion $\varphi = \varphi(\tau)$ besitzt den *stationären* (oder auch *kritischen*) Punkt τ_0 genau dann, wenn $\varphi'(\tau_0) = 0$ gilt, d.h., φ hat in diesem Punkt ein Minimum, ein Maximum oder einen horizontalen Wendepunkt (Abb. 14.6). In der Variationsrechnung genügt es (im Zusammenhang mit zahlreichen Problemen der mathematischen Physik) nicht, nur Minimumprobleme oder Maximumprobleme zu betrachten, sondern man muss auch Probleme heranziehen, in denen ein Variationsintegral stationär wird. Das soll jetzt erläutert werden (Prinzip der stationären Wirkung).



(a)

(b)

(c)

Abb. 14.6

► **BEISPIEL 1** (Prinzip der kleinsten Wirkung): Wir gehen aus von dem Minimumproblem

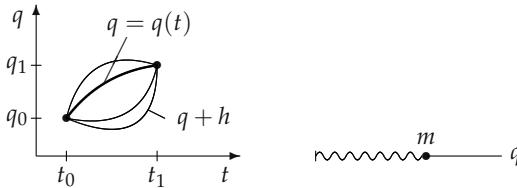
$$J(q) := \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} (mq'^2 - q^2) dt = \min!, \quad (14.38)$$

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (14.39)$$

wobei die Anfangszeit t_0 und die Endzeit t_1 sowie die Anfangslage q_0 und die Endlage q_1 vorgegeben sind (Abb. 14.7(a)). Wir wollen zeigen, dass eine hinreichend glatte Lösung $q = q(t)$ von (14.38), (14.39) der Euler–Lagrangeschen Differentialgleichung

$$mq'' + q = 0 \quad (14.40)$$

genügt. Das ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators (Federschwingers) der Masse m mit $q = \text{Lage}$ und $t = \text{Zeit}$ (Abb. 14.7(b)).



(a)

(b) harmonischer Oszillator

Abb. 14.7

Die folgenden Überlegungen sind typisch für beliebige Variationsprobleme mit endlich vielen Funktionen von endlich vielen Variablen, wie sie in der Physik in der Regel auftreten.

1. Schritt: Variation der Lösung q . Wir ersetzen die Funktion q in (14.38), (14.39) durch die Funktion

$$q + \tau h, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (14.41)$$

Dabei ist h eine beliebige, aber zunächst fest gewählte Funktion $h \in C_0^\infty(t_0, t_1)$. Ferner führen wir die reelle Funktion

$$\varphi(\tau) := J(q + \tau h), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (14.42)$$

ein.

2. Schritt: Erste Variation. Mit Hilfe der reellen Funktion φ wird das Variationsproblem (14.38), (14.39) auf ein viel einfacheres Minimumproblem für φ zurückgeführt. Da h in den Randpunkten $t = t_0, t_1$ verschwindet, erfüllt auch die Funktion $q + \tau h$ die Nebenbedingung (14.39). Folglich muss φ im Punkt $\tau = 0$ ein *Minimum* haben, d. h., es gilt

$$\varphi'(0) = 0. \quad (14.43)$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(0) &= \frac{d}{d\tau} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} (m(q' + \tau h')^2 - (q + \tau h)^2) dt \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (mq'h' - qh) dt. \end{aligned} \tag{14.44}$$

3. Schritt: Partielle Integration ergibt

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} (mq'h' - qh) dt = - \int_{t_0}^{t_1} (mq'' + q)h dt.$$

Randterme treten hier nicht auf, weil h auf dem Rand verschwindet.

4. Schritt: Typischer Schluss der Variationsrechnung. Da h beliebig gewählt werden kann, erhalten wir

$$\int_{t_0}^{t_1} (mq'' + q)h dt = 0 \quad \text{für alle } h \in C_0^\infty(t_0, t_1). \tag{14.45}$$

In naiver Weise folgert man nun aus der Willkür von h , dass $mq'' + q = 0$ auf (t_0, t_1) gelten muss. Das strenge Argument lautet folgendermaßen: Bezeichnet $(\cdot, \cdot)_X$ das Skalarprodukt im Hilbertraum $X = L_2(t_0, t_1)$ dann ist (14.45) gleichbedeutend mit

$$(mq'' + q, h)_X = 0 \quad \text{für alle } h \in C_0^\infty(t_0, t_1). \tag{14.46}$$

Da $C_0^\infty(t_0, t_1)$ in X dicht liegt, folgt daraus $mq'' + q = 0$, falls q hinreichend glatt ist (z.B. $q \in C^2[t_0, t_1]$).

Definition: Die erste Variation von J ist erklärt durch

$$\delta J(q; h) := \varphi'(0). \tag{14.47}$$

Nach (14.44) bedeutet das

$$\delta J(q; h) = \int_{t_0}^{t_1} (mq'h' - qh) dt. \tag{14.48}$$

Die Sprache der Physiker: In der Physik setzt man $\delta q = h$ und fasst δq als „unendlich klein“ auf. Mit dieser Methode erhalten die Physiker ebenfalls den Ausdruck (14.48). Tatsächlich ist jedoch $\delta q = h$ eine *klassische Funktion*, die in den Randpunkten verschwindet. Die obige Überlegung rechtfertigt streng das Vorgehen der Physiker.

► **BEISPIEL 2** (Prinzip der stationären Wirkung): Das Minimumproblem (14.38), (14.39) ist in vielen Fällen sinnlos, weil kein Minimum existiert. Anschaulich kann die Situation von Abb. 14.6(c) vorliegen, wo φ nur einen horizontalen Wendepunkt besitzt. Deshalb betrachten wir anstelle von (14.38), (14.39) das allgemeinere Problem

$$\begin{aligned} J(q) &:= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} (mq'^2 - q^2) dt = \text{stationär!}, \\ q(t_0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1. \end{aligned} \tag{14.49}$$

Definitionsgemäß soll das bedeuten, dass die oben eingeführte Funktion φ für $\tau = 0$ stationär wird, d. h., es gilt $\varphi'(0) = 0$. Das ist gleichbedeutend mit

$$\delta J(q; h) = 0 \quad \text{für alle } h \in C_0^\infty(t_0, t_1).$$

Da wir jedoch bei der Herleitung in Beispiel 1 gar nicht benutzt haben, dass φ ein Minimum in $\tau = 0$ besitzt, sondern lediglich die Gleichung $\varphi'(0) = 0$ ausgewertet haben, erhalten wir auch im vorliegenden allgemeineren Fall für jede hinreichend glatte Lösung von (14.49) die Euler–Lagrangesche Differentialgleichung (14.40).

Viele Variationsprobleme der Physik besitzen kein Minimum, sondern nur einen kritischen Punkt. Korrekterweise muss man deshalb anstelle des fundamentalen „Prinzips der kleinsten Wirkung“ vom „Prinzip der stationären Wirkung“ sprechen. Dieser Sprachgebrauch hat sich aber bisher in der Physik nicht durchgesetzt.

14.5.2 Die allgemeinen Euler–Lagrange–Gleichungen

Das allgemeine Prinzip der stationären Wirkung in der Physik lautet:⁸

$$\int\limits_{\Omega} L(q, \partial q, x) dx = \text{stationär!}, \quad (14.50)$$

q ist fest vorgegeben auf dem Rand $\partial\Omega$.

Dabei gilt

$$x = (x_1, \dots, x_N), \quad q = (q_1, \dots, q_m), \quad \partial q = (\partial_j q_k),$$

mit $j = 1, \dots, N$ und $k = 1, \dots, m$ sowie der partiellen Ableitung $\partial_j = \partial/\partial x_j$.

Satz: Jede hinreichend glatte Lösung $q = q(x)$ von (14.50) genügt den folgenden Euler–Lagrangeschen Differentialgleichungen:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial(\partial_j q_k)} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (14.51)$$

Dafür schreiben wir auch kurz

$$\sum_{j=1}^N \partial_j L_{\partial_j q_k} - L_{q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

► **BEISPIEL 1:** Jede hinreichend glatte Lösung des Variationsproblems

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(q, q', t) dt = \text{stationär!}, \quad (14.52)$$

q ist fest vorgegeben für $t = t_0, t_1$,

genügt der Euler–Lagrange–Gleichung

$$\frac{d}{dt} L_{q'} - L_q = 0. \quad (14.53)$$

⁸In der Elastizitätstheorie treten beispielsweise noch Randintegrale hinzu, die die Randkräfte beschreiben. Es ist auch möglich, dass die Lagrangefunktion L höhere Ableitungen von q enthält (z. B. bei Schalen und Platten). In jedem Fall führt jedoch die in 14.5.1 angegebene Methode stets zum Ziel.

► **BEISPIEL 2:** Hängt die Lagrangefunktion L nicht von der Zeit t ab, dann ist $E = q' L_{q'} - L$ eine Erhaltungsgröße für jede Lösung $q = q(t)$ von (14.53). Explizit heißt das folgendes: Setzen wir $E(t) := q'(t)L_{q'}(q(t), q'(t)) - L(q(t), q'(t))$, dann gilt

$$E'(t) = 0, \quad \text{d.h.,} \quad E(t) = \text{const} \quad \text{für alle } t. \quad (14.54)$$

In der Mechanik bedeutet E die Energie, die längs jeder Bahnkurve konstant bleibt.

14.5.3 Symmetrie und Erhaltungsgrößen in der Natur (das Noethertheorem)

In der Physik spielen die Erhaltung von Energie, Impuls, Drehimpuls, elektrischer Ladung oder von Quantenzahlen für Elementarteilchen eine fundamentale Rolle. Alle diese Erhaltungsgrößen folgen daraus, dass die Systeme eine Symmetrie besitzen. Beispielsweise ergibt sich aus der Invarianz gegenüber Zeittranslationen stets die Existenz einer Erhaltungsgröße, die der *Energie* entspricht. Invarianz gegenüber Zeittranslationen heißt: Neben einer bekannten Bewegung ist auch jede Bewegung in dem System möglich, die man durch eine Translation der Zeitskala erhält. In Beispiel 2 hängt L nicht von t ab. Ist somit $q = q(t)$ eine Lösung von (14.52), dann trifft das auch für $q = q(t + s)$ zu (s ist fest).

Alle für die Physik wichtigen Erhaltungsgesetze ergeben sich aus dem folgenden allgemeinen Prinzip:

Symmetrieeigenschaften der Lagrangefunktion L führen zu Erhaltungsgrößen. (P)

In der Elementarteilchenphysik achtet man zum Beispiel bei der Konstruktion von Modellen stets darauf, dass die Lagrangefunktion geeignete Symmetrieeigenschaften besitzt, um die im Experiment beobachteten Erhaltungsgrößen berücksichtigen zu können.

Um (P) mathematisch zu formulieren, betrachten wir zwei Transformationsfamilien der unabhängigen Variablen x und der Funktion $q = q(x)$, die von einem kleinen Parameter ε abhängen:

$$y = y(x, \varepsilon), \quad q = q(x, \varepsilon), \quad (14.55)$$

mit $y(x, 0) \equiv x$ und $q(x, 0) \equiv q(x)$ sowie $y = (y_1, \dots, y_N)$. Wir setzen

$$\delta y(x) := y_\varepsilon(x, 0), \quad \delta q(x) := \frac{\partial}{\partial \varepsilon} q(y(x, \varepsilon), \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Satz: (Noethertheorem): Sei $q = q(x)$ eine Lösung der Euler–Lagrange-Gleichung (14.51). Wir nehmen an, dass das Integral

$$I := \int_K L(q(x), \partial q(x), x) dx \quad (14.56)$$

für alle hinreichend kleinen Kugeln K invariant unter der Transformationsfamilie (14.55) bleibt.⁹ Dann gilt für $q = q(x)$ das Erhaltungsgesetz

$$\sum_{k=1}^N \partial_k J_k = 0 \quad \text{auf } \Omega \quad (14.57)$$

mit $J_k = L\delta y_k + L_{\partial_k q_s}(\delta q_s - \partial_r q_s \delta y_r)$, wobei wir über $r = 1, \dots, N$ und $s = 1, \dots, m$ summieren.

⁹Das heißt $I = \int_{K_\varepsilon} L(q(y, \varepsilon), q_y(y, \varepsilon), y) dy$ für alle kleinen ε , wobei K durch die Transformation (14.55) in K_ε übergeht. Für die Lagrangefunktion L ist das äquivalent zu

$$L(q(y, \varepsilon), \partial_y q(y, \varepsilon), y) \det \partial_x y = L(q(x), \partial q(x), x),$$

wobei links y durch $y(x, \varepsilon)$ zu ersetzen ist. Den Beweis von (14.57) findet man in [Zeidler 1995, Vol. II, Kap. 7].

► **BEISPIEL 3:** Hängt L nicht von der Variablen x ab, dann wählen wir die Translation

$$y = x + \varepsilon h \quad \text{mit} \quad q(x, \varepsilon) := q(x) \quad (h = \text{const})$$

als Parameterfamilie, die offensichtlich das Integral (14.56) invariant lässt. Dann gilt $\delta y = h$ und $\delta q = 0$, also

$$J_k = Lh_k - L_{\partial_k q_s} [\partial_r q_s] h_r. \quad (14.58)$$

Im Spezialfall $N = 1$ ($h = 1$) entspricht (14.57) mit (14.58) der Erhaltung der Energie in Beispiel (14.54). In der speziellen Relativitätstheorie stellen (14.57) und (14.58) das Erhaltungsgesetz für den Energie-Impulstensor dar. Nach Integration erhält man daraus die Erhaltung von Energie und Impuls.

Erhaltungsgesetze im dreidimensionalen Raum: Ein solches Erhaltungsgesetz hat die Form

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \varrho_t = 0. \quad (14.59)$$

Explizit heißt das

$$\sum_{r=1}^3 \partial_r j_r + \varrho_t = 0$$

in einem kartesischen Koordinatensystem. Somit ist (14.59) ein Spezialfall von (14.57) mit $J_r = j_r$, $r = 1, 2, 3$, und $J_4 = \varrho$, $x_4 = t$ (Zeit).

Wir interpretieren ϱ als Ladungsdichte und \mathbf{j} als elektrischen Stromdichtevektor. Die elektrische Ladung fließt in Richtung von \mathbf{j} , und $|\mathbf{j}|$ hat die Bedeutung von Ladung pro Fläche und Zeit. Somit gilt:

$\int_0^t dt \int_{\mathbb{F}} \mathbf{j} \mathbf{n} dF$ ist die Ladung, die im Zeitintervall $[0, t]$ durch die Fläche \mathbb{F} in Richtung des Einheitsnormalenvektors \mathbf{n} fließt.

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit dem inneren Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} auf dem Rand $\partial\Omega$. Nach dem Satz von Gauß gilt $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{j} dV = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \mathbf{n} dF$.

Somit erhalten wir aus (14.59):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \mathbf{n} dF. \quad (14.60)$$

Integration über t liefert

$$\int_{\Omega} \varrho(\mathbf{x}, t) dV - \int_{\Omega} \varrho(\mathbf{x}, 0) dV = \int_0^t dt \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \mathbf{n} dF.$$

Das bedeutet: Die Änderung der Ladung im Gebiet Ω im Zeitintervall $[0, t]$ ist gleich der Ladung, die in diesem Zeitraum durch den Rand in das Gebiet fließt. Somit beschreibt (14.59) die Erhaltung der Ladung.

14.5.4 Ein Existenzsatz für stationäre Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten das folgende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j} &= f && \text{auf } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial_1 \Omega, \\ \mathbf{j} \mathbf{n} &= h && \text{auf } \partial_2 \Omega, \end{aligned} \quad (14.61)$$

mit dem Stromdichtevektor $\mathbf{j} = -\alpha(|\operatorname{grad} u|^2)\operatorname{grad} u$ und dem äußeren Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} . Das zugehörige Variationsproblem lautet:

$$\int_{\Omega} (\beta(|\operatorname{grad} u|) - fu) dV + \int_{\partial_2 \Omega} hu dF = \min!, \quad (14.62)$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial_1 \Omega,$$

wobei wir $\beta(s) = \frac{1}{2} \int_0^{s^2} \alpha(\tau) d\tau$ setzen.

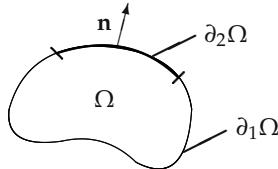


Abb. 14.8

Mit Ω bezeichnen wir ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^3 mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$, der in die hinreichend regulären Teilstücke $\partial_1\Omega$ und $\partial_2\Omega$ zerfällt (Abb. 14.8). Für $\partial_1\Omega = \partial\Omega$ entfällt die Randbedingung $\mathbf{j}\mathbf{n} = h$. Dann tritt das Randintegral in (14.62) nicht auf.

Satz: Jede hinreichend glatte Lösung des Variationsproblems (14.62) ist eine Lösung des Randwertproblems (14.61).

Probleme der Form (14.61) treten häufig in Physik und Technik auf, wobei die unbekannte Funktion u die unterschiedlichsten Bedeutungen haben kann.

► **BEISPIEL 1:** (nichtlineare Elektrostatik): Hier gilt:

u = elektrostatisches Potential,

f = Ladungsdichte,

$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$ = Vektor der elektrischen Feldstärke,

$\mathbf{j} = \alpha(|\mathbf{E}|^2)\mathbf{E}$,

α = Dielektrizität des Materials.

Die Gleichung (14.61) entspricht der Maxwellschen Gleichung der Elektrostatik.

Im Spezialfall $\alpha = \text{const} > 0$ erhalten wir $\beta(s) = 2^{-1}\alpha s^2$. Dann ist $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\alpha \Delta u$, und (14.61) stellt ein Randwertproblem für die Poissons-Gleichung dar:

$$-\alpha \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial_1 \Omega, \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{auf } \partial_2 \Omega.$$

Das Variationsproblem (14.62) entspricht dem Prinzip der minimalen elektrostatischen Energie mit $\beta(|\operatorname{grad} u|) = 2^{-1}\alpha|\operatorname{grad} u|^2$.

► **BEISPIEL 2** (nichtlineare Wärmeleitung): In diesem Fall gilt:

u = Temperatur, \mathbf{j} = Wärmestromdichtevektor.

Die Funktion f beschreibt äußere Wärmequellen. Das Materialgesetz

$$\mathbf{j} = -\alpha(|\mathbf{grad} u|^2) \mathbf{grad} u \quad (14.63)$$

heißt Fouriersches Gesetz. Ist $\alpha = \text{const} > 0$, dann heißt α die Wärmeleitfähigkeitszahl des Materials. Im Fall von (14.63) erlauben wir, dass die Wärmeleitfähigkeit vom Temperaturgradienten abhängt.

Gleichung (14.61) tritt ferner bei Unterschallströmungen, der Torsion von Stäben und Problemen der Rheologie auf (plastisches Material, sehr zähe Flüssigkeiten).

Um einen allgemeinen Existenzsatz zu formulieren, setzen wir folgendes voraus:

(H1) Der Randteil $\partial_1 \Omega$ tritt auf, d. h., $\partial_1 \Omega$ ist nicht leer. Wir geben uns die folgenden Funktionen vor:

$$f \in L_2(\Omega), \quad g \in W_2^1(\Omega), \quad h \in L_2(\partial_2 \Omega).$$

Diese Bedingungen sind für hinreichend glatte Funktionen stets erfüllt.

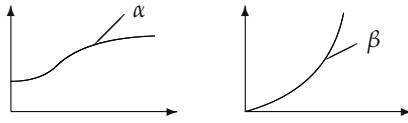


Abb. 14.9

(H2) (Materialgesetz). Die Funktion α mit $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ist stetig, und $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng konvex. Ferner gibt es Konstanten $a > 0$ und $b > 0$, so dass

$$0 < 2a \leq \alpha(s) \leq 2b \quad \text{für alle } s \geq 0$$

gilt. Aus dieser Bedingung erhalten wir $as^2 \leq \beta(s) \leq bs^2$. Abb. 14.9 zeigt typisches Verhalten von α und β . Speziell darf $\alpha = \text{const} > 0$ (lineares Materialgesetz).

Existenzsatz: Das Variationsproblem (14.62) besitzt genau eine Lösung u in dem Sobolevraum $W_2^1(\Omega)$.

Eine ausführliche Untersuchung dieses Problems einschließlich Näherungsverfahren mit Fehlerabschätzungen findet man in [Zeidler 1984ff, Vol. IIB, Kapitel 25] (z. B. das Ritzsche Verfahren zusammen mit dem dualen Trefftzschen Verfahren, das vorteilhafte Projektions-Iterationsverfahren und die Methode von Kačanov).

14.5.5 Ein allgemeiner Existenzsatz für Variationsprobleme

Wir betrachten das Variationsproblem

$$\int_{\Omega} L(q, \partial q, x) dx = \min !, \quad q = g \quad \text{auf } \partial \Omega, \quad (14.64)$$

für die unbekannte Funktion $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und setzen folgendes voraus:

(H1) Ω ist eine nichtleere beschränkte offene Menge des \mathbb{R}^N .

(H2) Die Lagrangefunktion L ist stetig differenzierbar und *konvex* bezüglich der Variablen ∂q .

(H3) (Wachstumsbedingung). Die Funktion L und ihre partiellen Ableitungen nach den Variablen $\partial_k q$ dürfen nicht zu rasch wachsen, d. h., für eine feste Zahl $p > 1$ gilt:¹⁰

$$|L(x, q, \partial q)| \leq c \left(1 + |q|^p + \sum_{j=1}^N |\partial_j q|^p \right).$$

¹⁰Die Relationen in (H3) und (H4) sollen für alle Variablen $x \in \Omega$, $q, \partial_j q \in \mathbb{R}$ von L gelten mit den positiven Konstanten c, d_k .

(H4) (Koerzitivitätsbedingung). Die Lagrangefunktion L ist von unten beschränkt, d. h., es gilt:

$$L(x, q, \partial q) \geq d_1 \sum_{j=1}^N |\partial_j q|^p - d_2 q - d_3.$$

(H5) Die Funktion $g \in W_p^1(\Omega)$ ist vorgegeben.

Existenzsatz: Das Variationsproblem (14.64) besitzt eine Lösung q , die in dem Sobolevraum $W_p^1(\Omega)$ liegt.

Spezialfall: Für das Dirichletproblem ist $L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\partial_j q)^2$. Dann sind alle Voraussetzungen mit $p = 2$ erfüllt.

14.6 Die Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie

Eine ausführliche physikalische Motivation der folgenden Betrachtungen sowie zahlreiche mathematische Resultate zur linearen und nichtlinearen Elastizitäts- und Plastizitätstheorie findet man in [Zeidler 1984ff, Vol. IV].

14.6.1 Das Variationsproblem der Elastostatik

Das Prinzip der *stationären potentiellen Energie* für den Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ eines elastischen Körpers unter dem Einfluss von äußeren Kräften lautet:

$$\int_{\Omega} L(x, \mathbf{u}') \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{K} \mathbf{u} \, dx - \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{T} \mathbf{u} \, dF = \text{stationär!}, \quad (14.65)$$

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ auf dem Randteil $\partial_1 \Omega$.

Die Funktion L entspricht der *Dichte der elastischen Energie*, während die anderen Terme die Arbeit der Volumen- und Randkräfte bei der Verschiebung beschreiben.

Stabile Gleichgewichtslagen entsprechen strengen Minima von (14.65). Bei Stabilitätsverlust einer Gleichgewichtslage können Bifurkationen auftreten (vgl. 14.6.5).

Die *Euler-Lagrange-Gleichungen* zu (14.65) besitzen die folgende physikalische Bedeutung.

(i) *Gleichgewicht der Spannungskräfte mit den äußeren Volumenkräften:*

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{K} = 0 \quad \text{auf } \Omega. \quad (14.66)$$

(ii) *Deformation des Randteils $\partial_1 \Omega$:*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{auf } \partial_1 \Omega. \quad (14.67)$$

(iii) *Gleichgewicht der Spannungskräfte mit äußeren Randkräften auf dem Randteil $\partial_2 \Omega$:*

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{T} \quad \text{auf } \partial_2 \Omega. \quad (14.68)$$

(iv) *Materialgesetz für den Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung:*

$$\sigma = L_{\mathbf{u}'} \quad \text{auf } \Omega. \quad (14.69)$$

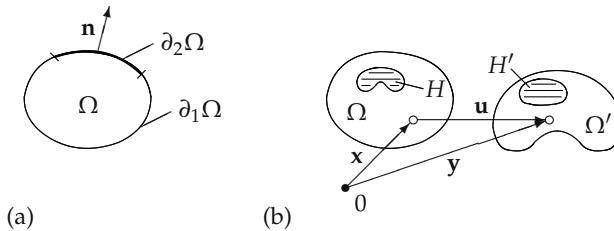


Abb. 14.10

Gesucht wird die Verschiebung $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$. Die explizite Form dieser Gleichungen in Komponenten wird weiter unten angegeben; \mathbf{u}' bezeichnet die Matrix der ersten partiellen Ableitungen der kartesischen Komponenten von \mathbf{u} .

Genauer liegt folgende Situation vor: Ω sei ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^3 , dessen Rand $\partial\Omega$ in die beiden Teile $\partial_1\Omega$ und $\partial_2\Omega$ zerfällt; \mathbf{n} bezeichnet den äußeren Einheitsnormalenvektor am Rand (Abb. 14.10(a)). Physikalisch entspricht Ω dem *nichtdeformierten Körper*. Durch

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

geht ein Punkt x des undeforinierten Gebiets Ω in den Punkt y des deformierten Körpers Ω' über (Abb. 14.10(b)). Mit H' bezeichnen wir die Deformation des Teilgebietes H von Ω . Dann gilt:

- $\int_H \mathbf{K}(x) dx$ ist die äußere Kraft, die auf das deformierte Gebiet H' wirkt;
- $\int_{\partial_2\Omega'} \mathbf{T}(x) dF$ ist die äußere Kraft, die auf den deformierten Rand $\partial_2\Omega'$ wirkt;
- $\int_{\partial H} \sigma \mathbf{n} dF$ ist die Spannungskraft, die auf das deformierte Gebiet H' wirkt.¹¹

Ferner ist $\int_H \operatorname{div} \sigma dx = \int_{\partial H} \sigma \mathbf{n} dF$. Dabei heißt σ der erste Piola–Kirchhoffsche *Spannungstensor*; $\sigma : V_3 \rightarrow V_3$ ist ein linearer Operator im Raum V_3 der dreidimensionalen Vektoren, d. h., σ ordnet jedem Vektor \mathbf{v} einen neuen Vektor $\mathbf{k} = \sigma\mathbf{v}$ zu, wobei $\sigma(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\sigma(\mathbf{v}) + b\sigma(\mathbf{w})$ für alle reellen Zahlen a, b gilt.

Komponentendarstellung: Im folgenden wird über zwei gleiche Indizes von 1 bis 3 summiert. Speziell ist ε_{ss} gleichbedeutend mit $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \operatorname{tr}(\varepsilon)$ (Spur von ε). Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem mit den orthonormierten Basisvektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. Dann gilt

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{y} = y_i \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{n} = n_i \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{K} = K_i \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{T} = T_i \mathbf{b}_i.$$

Ferner ist $\partial_j = \partial/\partial x_j$ und

$$\sigma \mathbf{n} = (\sigma_{ij} n_j) \mathbf{b}_i \quad (\text{analog } \mathbf{E}\mathbf{n} = \mathbf{E}_{ij} n_j \mathbf{b}_i \text{ und } \tau \mathbf{n} = \tau_{ij} n_j \mathbf{b}_i).$$

Die Grundgleichungen (14.66) bis (14.69) lauten dann explizit folgendermaßen:

$$\partial_j \sigma_{ij} + K_i = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \tag{14.70}$$

$$u_i = u_{0i} \quad \text{auf } \partial_1\Omega, \tag{14.71}$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \quad \text{auf } \partial_2\Omega, \tag{14.72}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_j u_i)}. \tag{14.73}$$

¹¹ \mathbf{n} ist der äußere Einheitsnormalenvektor am Rand ∂H .

Konsistente Theorie: Um eine konsistente Theorie zu erhalten, müssen im *deformierten Gebiet* die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte und die Drehmomente erfüllt sein. Das ist nicht für beliebige Funktionen L garantiert, wohl aber in dem wichtigen Fall, in dem

$$L = A(x, \mathbb{E})$$

gilt mit dem sogenannten nichtlinearen *Dehnungstensor*¹²

$$\mathbb{E}(x) := \frac{1}{2}(\mathbf{u}'(x)^* + \mathbf{u}'(x) + \mathbf{u}'(x)^* \mathbf{u}'(x)). \quad (14.74)$$

Die Linearisierung

$$\varepsilon(x) := \frac{1}{2}(\mathbf{u}'(x)^* + \mathbf{u}'(x))$$

heißt linearer Dehnungstensor. Führt man den *Spannungstensor*¹²

$$\tau(y) := \sigma(x)\mathbf{y}'(x)^* \det \mathbf{x}'(y)$$

ein, dann gilt

$$\int_{\partial H} \sigma \mathbf{n} dF = \int_{\partial H'} \tau \mathbf{n}' dF' \quad (\text{Spannungskraft, die auf } H' \text{ wirkt});$$

τ ist symmetrisch, d. h. $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ für $i, j = 1, 2, 3$.

Approximative Modelle: Die Lösung der Grundgleichungen der Elastostatik im Rahmen einer konsistenten Theorie ist bisher nur für den Spezialfall polykonvexen Materials gelungen. Deshalb benutzt man Näherungsmodelle, indem man zum Beispiel für L den Ansatz wählt:

$$L = B(x, \varepsilon), \quad (14.75)$$

d. h., man ersetzt den nichtlinearen Dehnungstensor \mathbb{E} durch seine Linearisierung ε . Dann erhält man konvexe Minimumprobleme, die lösbar sind. Der Ansatz (14.75) basiert auf der Annahme, dass die Verschiebungen und ihre ersten partiellen Ableitungen klein sind.

14.6.2 Anwendung auf nichtlineares Henckymaterial und lineares Material

Für die *elastische Energiedichte* wählen wir den Ausdruck

$$L = \frac{1}{2}k(\operatorname{tr} \varepsilon)^2 + \mu f(\operatorname{tr} \bar{\varepsilon}^2)$$

mit $\bar{\varepsilon} := \varepsilon - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \varepsilon)I$ und $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$. Die positiven Zahlen λ und μ heißen die Laméschen Konstanten.¹³ Das zugehörige Materialgesetz $\sigma = L_{\mathbf{u}'}$, d. h.

$$\sigma = (k - \frac{2}{3}\lambda f'(\Gamma))(\operatorname{tr} \varepsilon)I + 2\mu f'(\Gamma)\varepsilon \quad \text{mit } \Gamma = (\operatorname{tr} \bar{\varepsilon}^2),$$

bezeichnet man als nichtlineares *Hooke'sches Gesetz* (oder Henckysches Gesetz). Im Spezialfall $f(\xi) := \xi$ entsteht das klassische *Hooke'sche Gesetz* der linearen Elastizitätstheorie. Dann ist

$$\sigma = \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon.$$

¹²Für die kartesischen Komponenten gilt:

$$\mathbb{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i),$$

$$\tau_{ij}(y) = \sigma_{ik}(x) \partial_k y_j(x) \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)}(y), \quad y_j = x_j + u_j(x).$$

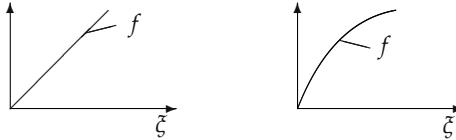
¹³Explizit gilt $L = \frac{1}{2}k(\varepsilon_{ss})^2 + \mu f(\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ji})$ mit $\bar{\varepsilon}_{ij} := \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ss}\delta_{ij}$ und $\varepsilon_{ss} := \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

In Komponenten bedeutet das: $\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{ss} \sigma_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$. Wir setzen voraus:

(H1) Die glatte Funktion f mit $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ genügt $f(0) = 0$; sie ist konkav und verhält sich in einer Umgebung der Punkte $\xi = 0$ und $\xi = +\infty$ fast linear¹⁴ (Abb. 14.11).

(H2) Der Rand sei hinreichend glatt, und $\partial_1 \Omega$ sei nicht leer.

(H3) Es seien $\mathbf{u}_0 \in W_2^1(\Omega)^3$, $\mathbf{K} \in L_2(\Omega)^3$ und $\mathbf{T} \in L_2(\partial_2 \Omega)^3$ gegeben. Das ist zum Beispiel erfüllt, falls die Komponenten von \mathbf{K} und \mathbf{T} stückweise stetig und beschränkt sind.



(a) lineares Material

(b) nichtlineares Hencky-Material

Abb. 14.11

Satz: Das Variationsproblem der Elastostatik (14.65) besitzt genau eine Lösung \mathbf{u} in dem Sobolevraum $W_2^1(\Omega)^3$.

Plastizität: Bei starken Spannungen kann ein elastischer Körper plastisch werden. Das von Misessche Plastizitätskriterium besagt:

(i) Für unterkritische Spannungen σ mit

$$\text{tr}(\bar{\sigma}^2) < \sigma_0$$

tritt *keine* Plastizität auf.

(ii) Für überkritische Spannungen σ mit

$$\text{tr}(\bar{\sigma}^2) \geq \sigma_0$$

tritt Plastizität auf.

Dabei setzen wir $\bar{\sigma} := \sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)I$. In kartesischen Komponenten bedeutet dies $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ss}\delta_{ij}$ und $\text{tr } \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ss}$.

14.6.3 Die Grundgleichungen der Elastodynamik

Diese Grundgleichungen lauten:

(i) Zeitabhängige Deformation des undeformierten Körpers Ω :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u}(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

(ii) Bewegungsgleichung:¹⁵

$$\varrho(P)\mathbf{u}_{tt} = \text{div } \sigma(P) + \mathbf{K}(P), \quad P = (x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

(iii) Materialgesetz für den Zusammenhang zwischen Deformation und Spannung:

$$\sigma(x) = L_{\mathbf{u}'}(x, \mathbf{u}'(x)).$$

¹⁴Genauer setzen wir voraus, dass es positive Konstanten a, b und eine natürliche Zahl n gibt, so dass für alle $\xi \geq 0$ gilt:

$$\frac{1}{n} \leq f'(\xi) + 2f''(\xi)\xi \leq n, \quad a \leq f'(\xi) \leq 1, \quad -b \leq f''(\xi) \leq 0.$$

¹⁵In kartesischen Komponenten bedeutet das $\varrho(u_i)_{tt} = \partial_j \sigma_{ij} + K_i$, $i = 1, 2, 3$.

(iv) *Randbedingung:*

- \mathbf{u} ist gegeben auf dem undeformierten Randteil $\partial_1\Omega$ für alle Zeiten $t \geq 0$;
- $\sigma\mathbf{n}$ ist gegeben auf dem undeformierten Randteil $\partial_2\Omega$ für alle Zeiten $t \geq 0$.

Hier bezeichnet \mathbf{n} den äußeren Einheitsnormalenvektor von $\partial_2\Omega$ (Abb. 14.10(a)).

(v) *Anfangsbedingung:*

\mathbf{u}, \mathbf{u}_t sind gegeben auf Ω zur Anfangszeit $t = 0$.

Ferner gilt:

$\int_H \mathbf{K} dx$ ist die äußere Kraft, die auf das deformierte Gebiet H' wirkt;

$\int_{\partial H} \sigma\mathbf{n} dF$ ist die Spannungskraft, die auf das deformierte Gebiet H' wirkt;

ϱ ist die Dichte des undeformierten Körpers.

► **BEISPIEL 1** (lineare Elastodynamik): Es gilt $\sigma = \lambda(\text{tr } \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon$ im Fall der linearen Elastizitätstheorie. Das ergibt die Bewegungsgleichung

$$\varrho\mathbf{u}_{tt} = \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{K}, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0. \quad (14.76)$$

Daraus erhält man die entsprechende Gleichung der Elastostatik, indem man \mathbf{u} als zeitunabhängig voraussetzt, d. h., man hat $\mathbf{u}_{tt} \equiv 0$ in (14.76) zu setzen.

► **BEISPIEL 2** (nichtlineare Elastodynamik): Wir gehen aus vom Ansatz

$$L = L^{(0)}(\mathbf{u}') + L^{(1)}(\mathbf{u}')$$

für die elastische Energiedichte, wobei $L^{(0)}$ der linearen Elastizitätstheorie entsprechen soll. Dann erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\varrho\mathbf{u}_{tt} = \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \sigma^{(1)} + \mathbf{K} \quad (14.77)$$

mit $\sigma^{(1)} = L_{\mathbf{u}'}^{(1)}$.

In kartesischen Komponenten bedeutet das

$$\varrho(u_i)_{tt} = c_{imjk}^{(0)} \partial_m \partial_k u_j + c_{imjk}^{(1)}(\mathbf{u}') \partial_m \partial_k u_j + K_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (14.78)$$

mit $c_{imjk}^{(r)} := \frac{\partial^2 L^{(r)}}{\partial(\partial_k u_j) \partial(\partial_m u_i)}$ und

$$L := L^{(0)} + L^{(1)}, \quad L^{(0)} := c_{imjk}^{(0)} \partial_k u_j \partial_m u_i,$$

sowie $c_{imjk}^{(0)} := \lambda \delta_{im} \delta_{jk} + \mu(\delta_{ij} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{ik})$. Das bedeutet für die elastische Energiedichte der linearen Elastizitätstheorie:

$$L^{(0)} = \lambda(\partial_s u_s)^2 + \mu(\partial_k u_i \partial_k u_i + \partial_k u_j \partial_k u_j).$$

Die entscheidende Bedingung für globale Existenz: Wir nehmen im folgenden an, dass die Störenergie $L^{(1)}$ hinreichend klein ist. Genauer: wir fordern, dass L hinreichend glatt ist und folgendes gilt:

Die Taylorentwicklung von $L^{(1)}$ bezüglich aller Variablen $\partial_j u_i$ beginnt mit (14.79)
Termen von mindestens vierter Ordnung.

Diese Forderung ist zum Beispiel erfüllt, falls $L(-\mathbf{u}') = L(\mathbf{u}')$ gilt, d. h., die elastische Energiedichte ändert sich nicht bei Spiegelung der Verschiebungen. Die Bedingung (14.79) bedeutet für die Ausgangsgleichung (14.78), dass keine quadratischen Nichtlinearitäten auftreten.

14.6.4 Der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz der nichtlinearen Elastodynamik

Wir studieren das Anfangswertproblem der nichtlinearen Elastodynamik für den gesamten Raum \mathbb{R}^3 bei Abwesenheit von äußeren Volumenkräften und konstanter Dichte $\varrho > 0$. Dieses Problem lautet:

$$\begin{aligned}\varrho \mathbf{u}_{tt} &= \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{v}_0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t = 0 \quad (\text{Anfangsbedingung}).\end{aligned}\tag{14.80}$$

Wir setzen (14.79) voraus und geben uns hinreichend glatte, kleine Anfangsdaten vor mit¹⁶

$$\mathbf{v}_0, \mathbf{u}'_0 \in W_2^3(\mathbb{R}^3) \cap W_{6/5}^3(\mathbb{R}^3)$$

und $\|(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}'_0)\|_{3,2} + \|(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}'_0)\|_{3,6/5} < \delta$ für eine feste Zahl $\delta > 0$.

Satz: Das Anfangswertproblem (14.80) besitzt eine eindeutige Lösung für alle Zeiten $t \geq 0$ mit

$$\mathbf{u}_t, \mathbf{u}' \in C([0, \infty), W_2^3(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, \infty), W_2^2(\mathbb{R}^3)).$$

Ferner hat man für große Zeiten $t \geq t_0$ die Abschätzung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^3 |\partial_t u_i(x, t)| + |\partial_j u_i(x, t)| \leq \text{const} \cdot t^{-2/3},$$

die zeigt, dass die Bewegungen des elastischen Körpers für $t \rightarrow +\infty$ rasch abklingen.

Ist die Bedingung (14.79) verletzt, dann können die Lösungen nach endlicher Zeit ihre Glattheit verlieren.

Bemerkung. Zum Beweis schreibt man die Ausgangsgleichung (14.80) als ein symmetrisches hyperbolisches System. Die *lokale* Existenzaussage ergibt sich dann aus dem Hauptsatz über derartige Systeme in 14.3. Die *globale* Existenzaussage erhält man aus zusätzlichen a priori Abschätzungen.

Ähnliche Aussagen gelten auch für die Gleichungen der Thermoelastizität, die zusätzlich Temperatureffekte bei elastischen Medien berücksichtigen. Vom mathematischen Standpunkt aus hat man dann ein gekoppeltes hyperbolisch-parabolisches System vorliegen. Es zeigt sich, dass das Auftreten der Temperatur die mathematische Situation verbessert, weil dissipative Effekte auftreten [vgl. Racke 1992].

14.6.5 Balkenbiegung und Bifurkation

Das Prinzip der *stationären potentiellen Energie* für einen Balken der Länge L lautet nach Euler:

$$E_{\text{pot}} := \int_0^L \left(\frac{1}{2} A \varphi'^2 + P(\cos \varphi - 1) \right) ds = \text{stationär!},\tag{14.81}$$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0.$$

Die Gleichung des Balkens sei $y = y(x)$. Wir suchen jedoch besser die Gestalt des Balkens unter dem Einfluss der äußeren Kraft P in der Form $\varphi = \varphi(s)$ (s ist die Bogenlänge, φ der Winkel des Balkens mit der x -Achse) (Abb. 14.12). Die Randbedingung „ $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ “ bedeutet, dass durch eine spezielle Halterung der Balken in den Endpunkten horizontal gelagert wird

¹⁶Das soll explizit bedeuten, dass alle Komponenten v_{0i} und $\partial_j u_i$ zu den beiden Sobolevräumen $W_2^3(\mathbb{R}^3)$ und $W_{6/5}^3(\mathbb{R}^3)$ gehören und die Summe aller entsprechenden Normen kleiner als δ ist.

(horizontale Tangente in den Endpunkten). Stabile Gleichgewichtslagen des Balkens entsprechen strengen Minima der potentiellen Energie E_{pot} .

Der Ausdruck für E_{pot} in (14.81) bedeutet, dass sich die potentielle Energie aus der elastischen Energiedichte $\varepsilon = \frac{1}{2}A\varphi'^2$ und der Arbeit ergibt, die von der äußeren Kraft P geleistet wird. Der Ausdruck für ε stellt den einfachsten denkbaren Ansatz dar, denn ε ist proportional dem Quadrat der Krümmung des Balkens ($A = \text{Materialkonstante}$).

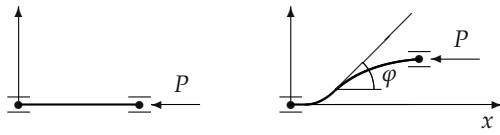
(a) $P < P_{\text{krit}}$ (b) $P > P_{\text{krit}}$

Abb. 14.12

Die Euler–Lagrange-Gleichungen zu (14.81) lauten:

$$\varphi'' + PA^{-1} \sin \varphi = 0, \quad 0 \leq s \leq L, \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \quad (14.82)$$

Die entscheidende Frage lautet: Für welche kritische Kraft P_{krit} tritt erstmalig eine Ausbeulung des Balkens auf? Linearisierung von (14.82) für kleine Winkel φ ergibt das Eigenwertproblem

$$\varphi'' + PA^{-1} \varphi = 0, \quad 0 \leq s \leq L, \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0,$$

mit dem kleinsten Eigenwert $P_{\text{krit}} = \pi^2 A / L^2$ und der Eigenfunktion

$$\varphi_{\text{krit}} = \sigma \sin(\pi s / L) \quad (14.83)$$

sowie dem reellen Parameter σ . Wir erwarten, dass bei der Kraft P_{krit} Ausbeulung auftritt. Die Eigenfunktion (14.83) ist jedoch vom physikalischen Standpunkt aus unbefriedigend, weil der Parameter σ noch frei ist. Erst die Untersuchung des *vollen nichtlinearen Problems* fixiert den Wert von σ durch

$$P = P_{\text{krit}} \left(1 + \frac{1}{8} \sigma^2 + O(\sigma^3) \right), \quad (14.84)$$

$$\varphi = \sigma \sin(\pi s / L) + O(\sigma^3), \quad \sigma = \text{klein},$$

(vgl. 1.3.1.4.). Setzen wir $\|\varphi\| = \max_{0 \leq s \leq L} |\varphi(s)|$, dann erhalten wir die in Abb. 14.13 graphisch dargestellte Situation.

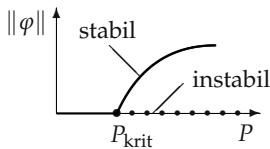


Abb. 14.13

Satz: (i) Für unterkritische Kräfte $P < P_{\text{krit}}$ ist die Ruhelage $\varphi \equiv 0$ stabil.

(ii) Für $P > P_{\text{krit}}$ ist die Ruhelage instabil, und der Bifurkationszweig (14.84) ist stabil. Ihm entspricht ein ausgebeulter Balken.

Grob gesprochen führt der Stabilitätsverlust der Ruhelage zur Ausbeulung (Bifurkation). Eine ausführliche Untersuchung findet man in [Zeidler 1984ff, Vol. IIB, Kap. 29].

14.7 Die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie

In der Newtonschen Mechanik wird die Bewegung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ eines Planeten der Masse m durch die Gleichung

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{K}$$

beschrieben, wobei \mathbf{K} die Gravitationskraft der Sonne bezeichnet. In der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie entsteht die Gravitationskraft durch die *Krümmung* der vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M , die durch die Massenverteilungen hervorgerufen wird. Die Bewegung eines Planeten entspricht dann geodätischen Linien in M . Zur Formulierung der Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie benötigt man die Riemannsche Geometrie. Die allgemeine Relativitätstheorie untersucht z. B. die Expansion des Weltalls nach dem Urknall. Einzelheiten findet man in 16.5.

14.8 Die Gleichungen der Eichfeldtheorie und Elementarteilchen

Eichfeldtheorien sind die Basis der modernen Elementarteilchenphysik. Im folgenden seien alle auftretenden Funktionen hinreichend glatt.

14.8.1 Grundideen

Wir studieren zunächst ein sehr einfaches Modell. Dazu betrachten wir das Variationsproblem

$$\int_a^b \mathbb{L}(\varphi, \psi, \psi') dx = \text{stationär!}, \quad (14.85)$$

φ, ψ sind fest vorgegeben in den Randpunkten $x = a, b$,

mit der Lagrangefunktion

$$\mathbb{L} = i \left(\bar{\varphi} \frac{d\psi}{dx} - m \bar{\varphi} \psi \right). \quad (14.86)$$

Die Funktionen φ und ψ seien komplexwertig, und $\bar{\varphi}(x)$ bezeichne die konjugiert komplexe Zahl zu $\varphi(x)$.

Satz 1: Sind φ, ψ Lösungen von (14.85), dann gelten auf dem Intervall (a, b) die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$i\psi' - m\psi = 0, \quad i\bar{\varphi}' - m\bar{\varphi} = 0. \quad (14.87)$$

Korollar: Ist (φ, ψ) eine Lösung von (14.87), dann gilt das folgende Erhaltungsgesetz

$$(\bar{\varphi} \psi)' = 0 \quad \text{auf } (a, b). \quad (14.88)$$

Diese Aussage bestätigt man sofort durch eine direkte Rechnung. Für das Verständnis komplizierterer Probleme in der Physik ist es jedoch wichtig, dass dieses Erhaltungsgesetz eine direkte Folge einer globalen Eichinvarianz der Lagrangefunktion \mathbb{L} ist.

Definition: Die Transformation

$$\psi_+(x) = e^{ia(x)} \psi(x), \quad \varphi_+(x) = e^{ia(x)} \varphi(x), \quad (14.89)$$

heißt eine *lokale Eichtransformation*. Ist $a = \text{const}$, dann sprechen wir von einer globalen Eichtransformation.

Korollar: Die Lagrangefunktion \mathbb{L} ist invariant unter einer globalen Eichtransformation, d. h., $\mathbb{L}(\varphi, \psi, \psi') = \mathbb{L}(\varphi_+, \psi_+, \psi'_+)$. Das nach dem Noethertheorem entsprechende Erhaltungsgesetz ist identisch mit (14.88).

In der Elementarteilchenphysik entsprechen globale Eichtransformationen Erhaltungsgesetzen für elektrische Ladung, Baryonenzahl usw.

Um eine Lagrangefunktion zu erhalten, die unter *lokalen Eichtransformationen invariant* ist, definieren wir die sogenannte kovariante Ableitung

$$\nabla := \frac{d}{dx} - iA(x),$$

wobei A reell sein soll. Ferner konstruieren wir eine neue Lagrangefunktion L indem wir die *klassische Ableitung* d/dx durch die *kovariante Ableitung* ∇ ersetzen, d. h.

$$L(\varphi, \psi, \nabla\psi) := i(\bar{\varphi}\nabla\psi - m\bar{\varphi}\psi). \quad (14.90)$$

Unter einer lokalen Eichtransformation verstehen wir (14.89) sowie

$$A_+(x) = A(x) + \alpha'(x), \quad \nabla_+ = \frac{d}{dx} - iA_+.$$

Dann besitzt die kovariante Ableitung ∇ die entscheidende Transformationseigenschaft

$$\nabla_+\psi_+ = e^{i\alpha}\nabla\psi. \quad (14.91)$$

Wir betrachten nun das modifizierte Variationsproblem

$$\int_a^b L(\varphi, \psi, \nabla\psi) dx = \text{stationär}!, \quad (14.92)$$

φ, ψ, A sind fest vorgegeben für $x = a, b$.

Satz 2: (i) Die Lagrangefunktion L ist invariant unter lokalen Eichtransformationen, d. h. $L(\varphi, \psi, \nabla\psi) = L(\varphi_+, \psi_+, \nabla_+\psi_+)$.

(ii) Ist φ, ψ eine Lösung von (14.92), dann gelten auf dem Intervall (a, b) die Euler- Lagrange-Gleichungen:

$$i\nabla\psi - m\psi = 0, \quad i\nabla\varphi - m\varphi = 0. \quad (14.93)$$

Diese sind *eichinvariant*, d. h., aus (14.93) folgt

$$i\nabla_+\psi_+ - m\psi_+ = 0, \quad i\nabla_+\varphi_+ - m\varphi_+ = 0.$$

Bei der physikalischen Interpretation dieses Modells entspricht ψ dem Feld des „Basisteilchens“ (z. B. Elektron) und $\bar{\varphi}$ dem Feld des „Antibasisteilchens“ (z. B. Positron). Ferner bezeichnet man A als „Eichfeld“, das die Wechselwirkung zwischen den Basisteilchen und den Antibasisteilchen beschreibt (z. B. Viererpotential des elektromagnetischen Feldes, dessen Quantisierung zum Photon führt). Die erste Gleichung in (14.93) lautet explizit

$$i\psi' - m\psi = j \quad \text{mit} \quad j = -A\psi.$$

Dabei ist „ $m\psi$ “ der Masseterm und „ $j = -A\psi$ “ der Wechselwirkungsterm (Strom) zwischen dem Basisteilchenfeld ψ und dem Eichfeld A .

Physikalische Diskussion: Unter einer Eichfeldtheorie versteht man in der Physik eine Theorie, die invariant ist unter geeigneten lokalen Eichtransformationen. Das sind Phasentransformationen analog zu (14.89), wobei die Phase α von Raum (und Zeit) abhängt. Entscheidend

ist die Tatsache, dass die Forderung nach lokaler Eichinvarianz die Existenz eines neuen Feldes $A(x)$ erzwingt, das in der Physik die *Wechselwirkung zwischen fundamentalen Teilchen* beschreibt. Wir erläutern das an Beispielen.

(i) *Elektromagnetische Wechselwirkung*. Die Diracgleichung beschreibt die Bewegung eines relativistischen Elektrons. Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz ergibt die Existenz des elektromagnetischen Feldes. Die Funktion $A = A(x)$ im obigen Modell geht dann in das Viererpotential $A_j(x)$ des elektromagnetischen Feldes über (vgl. 14.8.3).

Nach Quantisierung im Rahmen der Quantenfeldtheorie ergeben sich aus dem elektromagnetischen Feld das Photon, und man erhält die Existenz des Antiteilchens zum Elektron – das Positron. Das Photon beschreibt die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Positronen.

(ii) *Standardmodell*. In der Natur beobachtet man vier fundamentale Wechselwirkungen: die elektromagnetische Wechselwirkung, die schwache Wechselwirkung (radioaktiver Zerfall), die starke Wechselwirkung (z. B. Kernkräfte) und die Gravitationskraft. Das Standardmodell, das einer $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ -Eichfeldtheorie entspricht, vereinigt die ersten drei fundamentalen Wechselwirkungen. Die Basisteilchen bestehen aus 6 Quarks (ein Proton ist aus drei Quarks aufgebaut) und 6 Leptonen (z. B. Elektron und Neutrino). Entsprechend dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz gehören dazu 12 Felder (Teilchen), die die Wechselwirkungen zwischen den Basisteilchen beschreiben. Das sind das Photon γ , die drei Vektorbosonen W^+, W^-, Z und 8 Gluonen.

Die Vektorbosonen mit etwa 100 Protonenmassen wurden 1983 am europäischen CERN-Forschungsinstitut bei Genf experimentell nachgewiesen (Glashow, Salam und Weinberg erhielten bereits 1979 für die Vorhersage dieser Teilchen den Nobelpreis für Physik). Die Massen der Vektorbosonen werden im Standardmodell der Elementarteilchenphysik dadurch erklärt, dass man ein zusätzliches Higgs-Feld einführt. Dieses Feld entspricht dem sogenannten Higgs-Boson. Im Jahr 2012 wurde am LHC (*Large Hadron Collider*; CERN) mit großer Wahrscheinlichkeit das Higgs-Boson experimentell entdeckt. Weitere geplante LHC-Experimente sollen diese Entdeckung erklären. Den mathematischen Hintergrund werden wir im folgenden erläutern. Die Stromterme sind entscheidend, um mit Hilfe des Feynmanintegrals Effekte der zugehörigen Quantenfeldtheorie berechnen zu können (Technik der Feynmandiagramme).

14.8.2 Konventionen

Einsteinische Summenkonvention: In diesem Abschnitt wird über gleiche obere und untere lateinische (griechische) Indizes von 1 bis 4 (1 bis 3) summiert.

Konvention über die Maßeinheiten: Zur Vereinfachung der Formelbilder wählen wir solche Maßeinheiten, dass gilt: $\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ (\hbar = Plancksches Wirkungsquantum, $\hbar = h/2\pi$, c = Lichtgeschwindigkeit, ϵ_0 = Dielektrizitätskonstante des Vakuums, $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$). Die Schrödinger-Gleichung entsteht durch Quantisierung aus der klassischen Mechanik. Diese ist gültig, falls die Geschwindigkeiten relativ klein zur Lichtgeschwindigkeit sind. In modernen Teilchenbeschleunigern erreichen die Elektronen jedoch fast Lichtgeschwindigkeit. In diesem Fall ist die klassische Quantenmechanik nicht mehr ausreichend.

Bezeichnungen der speziellen Relativitätstheorie: Mit x^1, x^2, x^3 bezeichnen wir kartesische Raumkoordinaten in einem Inertialsystem, und $x^4 = t$ sei die Zeit. Wir führen die Minkowskimetrik $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ ein mit

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich sei $\partial_j = \partial/\partial x^j$. In üblicher Weise werden Indizes durch g_{ij} gesenkt und durch g^{ij} gehoben. Zum Beispiel gilt

$$F^{ij} = g^{ir} g^{js} F_{rs}, \quad F_{ij} = g_{ir} g_{js} F^{rs}.$$

14.8.3 Die Diracgleichung für die Bewegung eines relativistischen Elektrons

Die Bewegung eines kräftefreien relativistischen Elektrons in einem Inertialsystem wird durch die *Diracgleichung* beschrieben:

$$i\psi_t = \gamma^4 (m_0 + \gamma^\alpha p_\alpha) \psi \quad (14.94)$$

mit den Impulsoperatoren $p_\alpha = -i\partial_\alpha$ und der Ruhmasse $m_0 > 0$ des Elektrons. Die Größen γ^j genügen den Vertauschungsrelationen

$$\gamma^j \gamma^k + \gamma^k \gamma^j = 2g^{jk}, \quad (14.95)$$

d. h. $(\gamma^4)^2 = 1$, $(\gamma^\alpha)^2 = -1$, $\alpha = 1, 2, 3$ und $\gamma^j \gamma^k = -\gamma^k \gamma^j$ für $j \neq k$.

In der physikalischen Literatur werden unterschiedliche Realisierungen (Darstellungen) für diese sogenannte Cliffordalgebra benutzt. Wir wählen hier die *Pauli–Dirac–Darstellung* mit den Matrizen

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ferner ist ψ ein Spaltenvektor mit den Komponenten $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Somit stellt die Diracgleichung ein System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung für die vier unbekannten Komponenten ψ_j dar.

Benutzt man die sogenannten Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\beta \\ -\sigma^\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \beta = 1, 2, 3.$$

Physikalische Motivation: Die Quantenmechanik wurde 1925 durch Werner Heisenberg als sogenannte Matrizenmechanik geschaffen. Ein Jahr später formulierte Erwin Schrödinger die nach ihm benannte Schrödinger-Gleichung. Tatsächlich sind beide Theorien äquivalent, d. h., sie stellen unterschiedliche Realisierungen der gleichen abstrakten Hilbertraumtheorie dar (vgl. 13.18). Die mathematische Äquivalenz der zunächst völlig unterschiedlichen Zugänge von Heisenberg und Schrödinger reflektiert die physikalische Tatsache, dass sich Quanten sowohl wie Teilchen als auch wie Wellen verhalten (Dualismus zwischen Korpuskel und Welle, der bereits viel früher beim Licht beobachtet wurde).

Im Jahre 1928 gelangte Paul Dirac durch die folgende geniale Überlegung auf die Gleichung (14.94). In der speziellen Relativitätstheorie gilt für die Energie E eines freien Teilchens die Relation

$$E^2 = m_0^2 + \sum_{\beta=1}^3 p_{\beta}^2 \quad \text{mit dem Impulsvektor } \mathbf{p} = \sum_{\beta=1}^3 p_{\beta} \mathbf{e}_{\beta}.$$

Wendet man hierauf das übliche Quantisierungsschema an (vgl. 13.16.6), dann hat man die Ersetzungen

$$E \rightarrow i\partial_t, \quad p_{\beta} \rightarrow -i\partial_{\beta},$$

vorzunehmen. Das ergibt die sogenannte Klein–Gordon-Gleichung

$$(i\partial_t)^2 \psi = (m_0^2 - \Delta) \psi. \quad (14.96)$$

Diese Gleichung beschreibt Teilchen mit Spin = 1 (z. B. π -Mesonen). Da jedoch das Elektron den Spin = $\frac{1}{2}$ besitzt, suchte Dirac eine Differentialgleichung erster Ordnung, indem er von dem Ansatz

$$E = \left(m_0^2 + \sum_{\beta=1}^3 p_{\beta}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \gamma^4 (m_0 + \gamma^{\beta} p_{\beta}) \quad (14.97)$$

ausging und die γ^j aus der Forderung bestimmte, dass Quadrieren von (14.97) den richtigen Ausdruck ergibt, d. h., es gilt

$$m_0^2 + \sum_{\beta=1}^3 p_{\beta}^2 = (\gamma^4 (m_0 + \gamma^{\beta} p_{\beta}))^2.$$

Dazu benötigt man lediglich die Vertauschungsrelationen (14.95).

Gesamtdrehimpuls und Spin: Wir wollen zeigen, dass aus der Diracgleichung in einfacher Weise folgt, dass das Elektron den Spin = $\frac{1}{2}$ besitzt. Hierzu definieren wir das Skalarprodukt

$$(\psi | \varphi) := \sum_{j=1}^4 \bar{\psi}_j \varphi_j$$

und erklären den Gesamtdrehimpulsoperator D durch

$$D\psi = (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \psi + \frac{1}{2} \mathbf{s} \psi, \quad \mathbf{s} = \sum_{j=1}^3 \begin{pmatrix} \sigma^{\beta} & 0 \\ 0 & \sigma^{\beta} \end{pmatrix} \mathbf{e}_{\beta}$$

und $\mathbf{x} = \sum_{\beta=1}^3 x^{\beta} \mathbf{e}_{\beta}$, $\mathbf{p} = -i \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{e}_{\beta} \partial_{\beta}$. Schreiben wir die Diracgleichung (14.94) in der Form

$$i\psi_t = H\psi \quad \text{mit dem Hamiltonoperator } H = \gamma^4 (m_0 - i\gamma^{\alpha} \partial_{\alpha}),$$

dann gilt die Vertauschungsrelation $HD - DH = 0$. Daraus folgt für die Zeitableitung des Erwartungswertes $d = (D\psi | \psi)$ des Drehimpulses die Relation

$$\dot{d} = (D\psi_t | \psi) + (D\psi | \psi_t) = -i([DH - HD]\psi | \psi) = 0,$$

d. h., d ist eine Erhaltungsgröße. Für die x^3 -Komponente von \mathbf{s} erhalten wir die Eigenwerte

$$s_3 \psi_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \psi_{\pm}$$

mit $\psi_+ = \sqrt{2}(1, 0, 1, 0)^T$ und $\psi_- = \sqrt{2}(0, 1, 0, 1)^T$. Somit entsprechen ψ_{\pm} Zuständen des Elektrons, in denen die x^3 -Komponente des Spins (Eigendrehimpuls) gleich $\pm \frac{1}{2}$ ist.

Das fundamentale Variationsproblem: Wir setzen

$$\mathbb{L} := (\gamma^4 \varphi | i\gamma^j \partial_j \psi - m_0 \psi) \quad (14.98)$$

und betrachten das Variationsproblem

$$\int_{\Omega} \mathbb{L} dx = \text{stationär!}, \quad (14.99)$$

φ, ψ sind fest vorgegeben auf dem Rand $\partial\Omega$.

Satz: Die Lösungen φ und ψ von (14.99) genügen der Diracgleichung

$$(i\gamma^j \partial_j - m_0) \psi = 0, \quad (14.100)$$

die äquivalent ist zu (14.94).

Korollar: Die Lagrangefunktion \mathbb{L} ist invariant unter der globalen Eichtransformation $\psi_+ = e^{i\alpha} \psi$, $\varphi_+ = e^{i\alpha} \varphi$, wobei α eine reelle Zahl bezeichnet. Nach dem Noethertheorem folgt daraus, dass für jede Lösung ψ der Diracgleichung (14.100) das Erhaltungsgesetz

$$\varrho_t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

gilt mit der elektrischen Ladungsdichte $\varrho = e(\psi | \psi)$ und dem elektrischen Stromdichtevektor $\mathbf{j} = e(\gamma^4 \psi | \gamma \psi)$. Dabei ist $e < 0$ die elektrische Ladung des Elektrons, und wir setzen $\gamma = \gamma^\beta \mathbf{e}_\beta$.

14.8.4 Das Postulat der lokalen Eichinvarianz und die Maxwell–Dirac–Gleichungen der Quantenelektrodynamik

Postulat: Wir fordern, dass die Lagrangefunktion \mathbb{L} so zu modifizieren ist, dass sie gegenüber lokalen Eichtransformationen

$$\psi_+(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad \varphi_+(x) = e^{i\alpha(x)} \varphi(x), \quad (14.101)$$

invariant ist mit $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ und $x^4 = \text{Zeit}$.

Zu diesem Zweck führen wir die kovariante Ableitung

$$D_j = \partial_j + ieA_j$$

ein und setzen $F_{km} = i|e|^{-1}(D_k D_m - D_m D_k)$, d.h.

$$F_{km} = \partial_k A_m - \partial_m A_k. \quad (14.102)$$

Die Größen A_k transformieren wir nach dem Gesetz

$$A_j^+ = A_j + |e|^{-1} \partial_j \alpha, \quad (14.103)$$

und wir setzen $D_j^+ := \partial_j + ieA_j^+$.

Unter den lokalen Eichtransformationen (14.101), (14.103) gilt

$$D_j^+ \psi_+(x) = e^{i\alpha(x)} D_j \psi(x), \quad F_{km}^+ = F_{km},$$

und die Lagrangefunktion

$$L := (\gamma^4 \varphi | i\gamma^j D_j \psi - m_0 \psi) - \frac{1}{2} F_{km} F^{km}$$

ist invariant.

Satz: Ist ψ, φ, A_j eine Lösung des Variationsproblems

$$\int_{\Omega} L \, dx = \text{stationär!}, \quad (14.104)$$

φ, ψ, A_j sind fest vorgegeben auf dem Rand $\partial\Omega$,

und gilt $\psi = \varphi$, dann genügt ψ den folgenden Maxwell-Dirac-Gleichungen:

$$D_k F^{km} = j^m \quad (\text{erste Maxwellgleichung}), \quad (14.105)$$

$$D_k F_{rs} + D_r F_{sk} + D_s F_{kr} = 0 \quad (\text{zweite Maxwellgleichung oder Identität von Bianchi}), \quad (14.106)$$

$$(i\gamma^j D_j - m_0)\psi = 0 \quad (\text{Diracgleichung}), \quad (14.107)$$

mit dem von ψ erzeugten Strom $j^m = e(\gamma^4 \psi | \gamma^m \psi)$.

Kommentar: Seien $\mathbf{E} = E^\beta \mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{H} = H^\beta \mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{A} = A^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, $A^4 = U$, $\mathbf{j} = j^\beta \mathbf{e}_\beta$, $j^4 = \varrho$ sowie

$$(F_{km}) = \begin{pmatrix} 0 & -H^3 & H^2 & -E^1 \\ H^3 & 0 & -H^1 & -E^2 \\ -H^2 & H^1 & 0 & -E^3 \\ E^1 & E^2 & E^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann entsprechen die Gleichungen (14.105), (14.106), (14.107) den folgenden Vektorgleichungen:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \varrho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{E}_t, \quad (14.108)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{H}_t, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (14.109)$$

$$i\psi_t = \gamma^4(m_0 + \gamma(\mathbf{p} - c\mathbf{A})\psi + U\psi), \quad (14.110)$$

mit $\mathbf{p} = -i\operatorname{grad} U$. Die Relation (14.102) bedeutet

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U - \mathbf{A}_t, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (14.111)$$

Das sind die *Grundgleichungen der Quantenelektrodynamik* (vgl. die Maxwellgleichungen in 10.2.9). Tatsächlich genügt es, das folgende System zu verwenden:

$$U_{tt} - \Delta U = \varrho, \quad \mathbf{A}_{tt} - \Delta \mathbf{A} = \mathbf{j}, \quad (14.112)$$

$$U_t + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (\text{Lorenz-Eichbedingung}), \quad (14.113)$$

sowie (14.110).

Kennt man U und \mathbf{A} , dann ergeben sich das elektrische Feld \mathbf{E} und das magnetische Feld \mathbf{H} aus (14.111), und die übrigen Maxwellgleichungen (14.108), (14.109) sind automatisch erfüllt.

Wir werden in 14.8.6 sehen, dass die Maxwell-Dirac-Gleichungen die Gleichungen einer $U(1)$ -Eichfeldtheorie darstellen. Da die Gruppe $U(1)$ der komplexen Zahlen vom Betrag eins kommutativ (abelsch) ist, entfallen eine Reihe von Termen, die im nichtkommutativen Fall der $SU(N)$ -Theorien mit $N \geq 2$ auftreten.

14.8.5 Die Grundideen der Quantenfeldtheorie

Die Diracgleichung (14.94) ergab sich durch Quantisierung der klassischen Energierelation (erste Quantisierung). Das Prinzip der lokalen Eichinvarianz liefert die klassischen Feldgleichungen der Quantenelektrodynamik. Um das zugehörige Quantenfeld zu erhalten, das die Wechselwirkung zwischen Elektronen, Positronen (Antiteilchen zum Elektron) und Photonen (Quanten des

elektromagnetischen Feldes) beschreibt, muss man die Feldgleichungen der Quantentheorie einem erneuten Quantisierungsprozess unterwerfen (zweite Quantisierung). Dafür haben die Physiker die Methode des Feynmanintegrals¹⁷ entwickelt, die sich auf alle Feldtheorien universell anwenden lässt und im wesentlichen von dem Stromterm j^m bestimmt wird. Die analytischen Manipulationen mit dem Feynmanintegral führen zu einer Störungstheorie, für deren Berechnung die Physiker eine geometrische Sprache entwickelt haben – die Sprache der *Feynmandiagramme*. Diese Diagramme erlauben erstens eine direkte physikalische Interpretation und zweitens eine bequeme Berechnung physikalischer Effekte (z. B. Streuprozesse in Teilchenbeschleunigern).

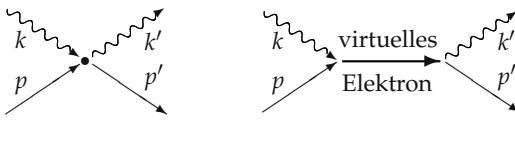


Abb. 14.14

► **BEISPIEL** (Comptoneffekt): Unter dem Comptoneffekt versteht man den in Abb. 14.14(a) dargestellten Prozess: Ein Strom von Photonen mit dem Viererimpuls k stößt auf ein ruhendes Elektron mit dem Viererimpuls¹⁸ p . Man ist am Wirkungsquerschnitt σ dieses Prozesses interessiert: Ist η die Energiestromdichte des einfallenden Photonenstroms (Lichtstroms), dann ist $\sigma\eta T$ die Photonenenergie, die nach dem Stoßprozess in der Zeit T abgestrahlt wird.

In zweiter Näherung der Quantenfeldtheorie wird dieser Prozess durch Graphen vom Typ der Abb. 14.14(b) beschrieben. Hier tritt zusätzlich ein sogenanntes virtuelles Elektron auf. Aus den entsprechenden Graphen erhält man nach wenigen festen Regeln das sogenannte Element der Streumatrix $\langle pk | S_2 | p'k' \rangle$ in zweiter Ordnung. Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich daraus

$$\sigma = T^{-1} \sum_{p',k'} \langle pk | S_2 | p'k' \rangle,$$

wobei über alle möglichen Endzustände p' (bzw. k') des Elektrons (bzw. des Photons) summiert wird.

Die Graphen höherer Störungsordnung besitzen wesentlich mehr innere Linien, die die Physiker so interpretieren, dass die Wechselwirkungen durch zahlreiche virtuelle Teilchen zustande kommen. Die Bezeichnung „virtuell“ hängt damit zusammen, dass für diese Teilchen die klassischen Erhaltungsgesetze *nicht* gelten.

Die Grundidee des Feynmanintegrals: Im Unterschied zur Schrödingergleichung, die eine grobe Statistik darstellt, beschreibt das Feynmanintegral die Feinstruktur von Quantenprozessen. Um das zu erläutern, betrachten wir einen Diffusionsprozess mit der Teilchenzahldichte μ und dem Stromdichtevektor \mathbf{j} . Das Gesetz von der Erhaltung der Teilchenzahl lautet $\mu_t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ mit dem Diffusionsgesetz $\mathbf{j} = -D \operatorname{grad} \mu$ (D ist der Diffusionskoeffizient). Folglich gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu = D \Delta \mu. \quad (14.114)$$

Ein Diffusionsprozess besteht auf mikroskopischer Ebene aus der stochastischen Bewegung von Teilchen. Die Statistik dieser Bewegung, d. h. die makroskopisch beobachteten Effekte, kann man mit Hilfe des Wienerintegrals beschreiben (vgl. 6.4.4.). Geht man von der reellen

¹⁷Eine weitere Methode ist die der sogenannten kanonischen Quantisierung, die auf dem Hamiltonformalismus der klassischen Mechanik beruht. Bei der Quantisierung der Eichfeldtheorien hat sich jedoch die Überlegenheit der Methode des Feynmanintegrals gezeigt.

Zeit t zur imaginären Zeit it über, dann entsteht aus der Diffusionsgleichung (14.114) die Schrödingergleichung

$$\frac{\partial \mu}{\partial(it)} = D \Delta \mu \quad (14.115)$$

für ein freies Teilchen. Die geniale physikalische Idee von Feynman war es, dass Quantenprozesse dadurch zustandekommen, dass sich die Teilchen auf allen möglichen klassischen Trajektorien bewegen können und durch eine Mittelung über diese Trajektorien die Quanteneffekte entstehen. Dieser Mittelungsprozess wird durch das Feynmanintegral beschrieben, das einem Wienerintegral mit imaginärer Zeit entspricht. Während jedoch das Wienerintegral als ein Maßintegral auf Mengen von Trajektorien mathematisch streng begründet werden kann, ist das für das Feynmanintegral im allgemeinen Fall nicht möglich.

Renormierung: Die Berechnung der Feynmangraphen führt in höherer Störungsordnung zu Ausdrücken, die unendlich werden. Die Physiker haben eine raffinierte Methode entwickelt, um derartigen sinnlosen Ausdrücken doch einen Sinn zu geben. Das ist die Methode der *Renormierung*. In der Quantenelektrodynamik ersetzt man hierzu die Ladung des Elektrons e durch $e + \delta e$ und die Ruhmasse $m = 0$ des Photons durch δm . Bei geeigneter Wahl von δe und δm kann man in jeder Störungsordnung die Divergenzen beseitigen, d. h., die Quantenelektrodynamik ist „renormierbar“. In der Sprache der Feynmangraphen bedeutet dies, dass die ursprünglichen Graphen um Zusatzglieder ergänzt werden, die die Konvergenz von gewissen Integralen erzwingen. Die Physiker akzeptieren nur solche Quantenfeldtheorien, die renormierbar sind.

Bis zum heutigen Tag fehlt eine mathematisch strenge Quantenfeldtheorie für realistische Situationen. Trotzdem berechnen die Physiker mit ihren vom mathematischen Standpunkt aus oft sehr zweifelhaften Methoden physikalische Effekte mit größter Präzision. Es bleibt die Aufgabe der Mathematiker, diese erstaunliche Tatsache zu begründen, parallel zur mathematischen Begründung der Diracschen δ -Funktion durch die Distributionentheorie (vgl. 10.4).

14.8.6 $SU(N)$ -Eichfeldtheorie

Vorbereitungen: Wir benutzen die Konventionen aus 14.8.2 und setzen

$$G(N) := \begin{cases} U(1) & \text{für } N = 1, \\ SU(N) & \text{für } N \geq 2. \end{cases}$$

Die Gruppe $U(1)$ besteht aus allen komplexen Zahlen vom Betrag eins, während $SU(N)$ die Gruppe aller unitären $(N \times N)$ -Matrizen mit Determinante = 1 bezeichnet. Ferner betrachten wir die zugehörigen Liealgebren

$$\mathbb{L}(N) := \begin{cases} u(1) & \text{für } N = 1, \\ su(N) & \text{für } N \geq 2. \end{cases}$$

Dabei ist $u(1)$ die Menge aller rein imaginären Zahlen, und $su(N)$ bezeichnet die schieferhermitischen $(N \times N)$ -Matrizen, deren Spur gleich null ist. Die Lieklammern sind durch

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \quad \text{für alle } \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{L}(N)$$

gegeben. Die Klammern haben die charakteristische Eigenschaft, dass aus $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{L}(N)$ stets $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] \in \mathbb{L}(N)$ folgt.

Mit Y bezeichnen wir den Hilbertraum aller komplexen Matrizen

$$\psi_j = \begin{pmatrix} \psi_{j1} \\ \vdots \\ \psi_{j4} \end{pmatrix} \quad \text{mit dem Skalarprodukt } (\varphi_j | \psi_j)_Y := \sum_{k=1}^4 \bar{\varphi}_{jk} \psi_{jk}.$$

Der uns interessierende Hilbertraum X besteht dann aus allen komplexen Spaltenmatrizen $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)^T$ mit $\psi_j \in Y$ für alle j und dem Skalarprodukt

$$(\varphi | \psi)_X := \sum_{j=1}^N (\varphi_j | \psi_j)_Y.$$

Es sei $\mathbb{A}_j \in \mathbb{L}(N)$. Die Operatoren $\gamma^k, \mathbb{A}_j : X \rightarrow X$ werden durch

$$\gamma^k \psi = \begin{pmatrix} \gamma^k \psi_1 \\ \vdots \\ \gamma^k \psi_N \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{A}_j \psi = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

definiert. (Die Pauli-Dirac-Matrizen γ^k wurden in 14.8.3 eingeführt.)

Für alle $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{L}(N)$ setzen wir¹⁹

$$\langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle = -\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}),$$

wobei tr die Spur bezeichnet. Mit diesem Skalarprodukt wird $\mathbb{L}(N)$ zu einem reellen Hilbertraum der Dimension $N^2 - 1$. Es ist möglich, eine Basis $\mathbb{B}_1, \dots, \mathbb{B}_{N^2-1}$ auf $\mathbb{L}(N)$ zu wählen, so dass $\langle \mathbb{B}_k, \mathbb{B}_m \rangle = \frac{1}{2}\delta_{km}$ gilt und die sogenannten Strukturkonstanten c_{km}^s von $\mathbb{L}(N)$, definiert durch

$$[\mathbb{B}_k, \mathbb{B}_m] = c_{km}^s \mathbb{B}_s,$$

bezüglich der Indizes (s, k, m) antisymmetrisch sind (über s wird von 1 bis $N^2 - 1$ summiert).

Kovariante Ableitung: Die kovariante Ableitung D_j wird durch

$$D_j := \partial_j - i\nu A_j \tag{14.116}$$

definiert mit $iA_j \in \mathbb{L}(N)$ für $j = 1, \dots, 4$. Die positive Zahl ν heißt Kopplungskonstante. Je größer ν ist, um so stärker ist die Wechselwirkung, die durch diese Theorie beschrieben wird. Ferner setzen wir

$$F_{km} = i\nu^{-1} (D_k D_m - D_m D_k) = \partial_k A_m - \partial_m A_k + \nu [A_k, A_m].$$

Lokale Eichtransformation: Unter einer lokalen Eichtransformation verstehen wir folgende Transformation:

$$\begin{aligned} \psi_+(x) &= U(x)\psi(x), \\ \gamma_+^k &= U(x)\gamma^k U(x)^{-1}, \\ A_j^+(x) &= U(x)A_j(x)U(x)^{-1} - U(x)^{-1}\partial_j U(x), \\ D_j^+ \psi_+ &= \partial_j \psi_+ - i\nu A_j^+ \psi_+. \end{aligned} \tag{14.117}$$

Satz: Es gilt

$$D_j^+ \psi_+ = UD_j\psi \quad \text{und} \quad F_{km}^+ = UF_{km}U^{-1}.$$

Das fundamentale Variationsproblem: Wir setzen

$$L := (\gamma^4 \varphi | (i\gamma^j D_j - m_0) \psi) - \frac{1}{2} \langle F_{km}, F^{km} \rangle$$

¹⁹ $\langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle$ ist (bis auf einen Faktor) die sogenannte Killingform der Liealgebra $\mathbb{L}(N)$.

und studieren das Variationsproblem der Eichfeldtheorie:

$$\int_{\Omega} L \, dx = \text{stationär!}, \quad (14.118)$$

φ, ψ, A_j sind fest vorgegeben auf dem Rand $\partial\Omega$.

Satz: Jede Lösung φ, ψ, A_j von (14.118) mit $\psi = \varphi$ ist eine Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$D_j F^{jm} = J^m \quad (\text{Yang-Mills Gleichung}), \quad (14.119)$$

$$D_j F_{km} + D_k F_{mj} + D_m F_{jk} = 0 \quad (\text{Identität von Bianchi}), \quad (14.120)$$

$$(i\gamma^j D_j - m_0)\psi = 0 \quad (\text{Diracgleichung}). \quad (14.121)$$

Dabei bezeichnet J^m den durch ψ erzeugten Strom:

$$J^m := \sum_{r=1}^{N^2-1} j_r^m \mathbb{B}_r \quad \text{mit} \quad j_r^m := -\varkappa(\gamma^4 \psi | \gamma^m \mathbb{B}_r \psi) \quad \text{für } N \geq 2$$

und $j^m := -\varkappa(\gamma^4 \psi | \gamma^m \psi)$ für $N = 1$.

Sowohl das Variationsproblem (14.118) als auch die Gleichungen (14.119), (14.120), (14.121) sind invariant unter lokalen Eichtransformationen.

Die Formulierung als verallgemeinerte Maxwellgleichungen und magnetische Monopole:

Für $N = 1$ stimmen die Gleichungen (14.119), (14.120), (14.121) mit den Gleichungen der Quantenelektrodynamik (14.105), (14.106), (14.107) überein.

Wir wollen zeigen, dass sich für $N \geq 2$ die Gleichungen (14.119), (14.120), (14.121) als Maxwellgleichungen für $N^2 - 1$ „elektrische Felder $\mathbf{E}^{(r)}$ “ und „magnetische Felder $\mathbf{H}^{(r)}$ “ schreiben lassen mit $r = 1, \dots, N^2 - 1$, wobei gegenüber den klassischen Maxwellgleichungen zusätzliche Ströme und Ladungen auftreten. In der klassischen Maxwelltheorie folgt aus der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

dass es keine magnetischen Einzelladungen (Monopole) gibt. In der $SU(N)$ -Eichfeldtheorie mit $N \geq 2$ lautet die entsprechende Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{H}^{(r)} = \Omega_*^{(r)},$$

d.h., es tritt eine magnetische Ladung $\Omega_*^{(r)}$ auf, die zu Lösungen führt, die als magnetische Monopole interpretiert werden können.

Da $\{\mathbb{B}_r\}$ eine Basis von $\mathbb{L}(N)$ ist, existiert eine eindeutige Darstellung der Form

$$A_j = \sum_{r=1}^{N^2-1} A_j^{(r)} \mathbb{B}_r, \quad F_{km} = \sum_{r=1}^{N^2-1} F_{km}^{(r)} \mathbb{B}_r.$$

Die Größen $A_j^{(r)}$ und $F_{km}^{(r)}$ sind Zahlen. Konstruieren wir nun parallel zur Quantenelektrodynamik (14.105), (14.106), (14.107) die Vektorfelder $\mathbf{A}^{(r)}, \mathbf{E}^{(r)}, \mathbf{H}^{(r)}, \mathbf{j}^{(r)}$, dann erhalten wir die folgenden verallgemeinerten Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}^{(r)} &= \varrho^{(r)} + \varrho_*^{(r)}, & \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(r)} &= \mathbf{E}_t^{(r)} + \mathbf{j}^{(r)} + \mathbf{j}_*^{(r)}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}^{(r)} &= \Omega_*^{(r)}, & \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(r)} &= -\mathbf{H}_t^{(r)} + \mathbf{j}_{**}^{(r)}, \end{aligned} \quad (14.122)$$

mit

$$\mathbf{E}^{(r)} = -\mathbf{grad} U^{(r)} - \mathbf{A}_t^{(r)} + \mathbf{A}_*, \quad \mathbf{H}^{(r)} = \mathbf{rot} \mathbf{A}^{(r)} + \mathbf{A}_{**}^{(r)},$$

und den folgenden Zusatztermen, die von den Strukturkonstanten c_{km}^s der Liealgebra $\mathbb{L}(N)$ abhängen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_*^{(k)} &= \varkappa c_{rs}^k \mathbf{A}^{(r)} \mathbf{U}^{(s)}, & \mathbf{A}_{**}^{(k)} &= -\frac{1}{2} \varkappa c_{rs}^k \mathbf{A}^{(r)} \times \mathbf{A}^{(s)}, \\ \Omega_*^{(k)} &= \operatorname{div} \mathbf{A}_{**}^{(k)}, & \varrho_*^{(k)} &= \varkappa c_{rs}^k \mathbf{A}^{(r)} \mathbf{E}^{(s)}, \\ \mathbf{j}_*^{(k)} &= \varkappa c_{rs}^k (U^{(r)} \mathbf{E}^{(s)} + \mathbf{A}^{(r)} \times \mathbf{H}^{(s)}), & \mathbf{j}_{**}^{(k)} &= \mathbf{rot} \mathbf{A}_*^{(k)} + (\mathbf{A}_{**}^{(k)})_t. \end{aligned}$$

14.9 Die Geometrisierung der modernen Physik (Kraft = Krümmung)

Wer die Geometrie versteht, der versteht alles in der Welt.

Galileo Galilei (1564-1642)

Eine uralte Frage der Physik lautet: Was ist Kraft? Die moderne Antwort darauf heißt:

Kraft ist die Krümmung von Mannigfaltigkeiten
(Raum-Zeit-Mannigfaltigkeiten und Hauptfaserbündel).

Das soll im folgenden erläutert werden.

In der Antike trat der Kraftbegriff nur statisch auf (z. B. beim Hebelgesetz). Basierend auf den Ergebnissen von Galileo Galilei (1564-1642) formulierte Isaac Newton (1643-1727) sein Bewegungsgesetz $m\ddot{x} = \mathbf{K}$, in dem die Gravitationskraft \mathbf{K} einen Vektor darstellt. In diesem Zusammenhang schuf Newton²⁰ die Differential- und Integralrechnung. Der weitere Ausbau der Mechanik führte zur Entwicklung der Variationsrechnung durch Leonhard Euler (1707-1783) und Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Die Experimente von Michael Faraday (1791-1867) waren die physikalische Basis für die Formulierung der Theorie des Elektromagnetismus durch James Clerk Maxwell (1831-1897). In dieser Theorie wurden erstmalig zwei scheinbar sehr unterschiedliche Wechselwirkungen (Elektrizität und Magnetismus) im Rahmen einer einheitlichen Theorie dargestellt. In der Maxwell'schen Formulierung werden die elektromagnetischen Kräfte durch zwei Vektorfelder \mathbf{E} und \mathbf{H} beschrieben.

Mit seiner speziellen Relativitätstheorie aus dem Jahre 1905 revolutionierte Albert Einstein (1879-1955) unsere Vorstellungen von Raum und Zeit. Danach hängt die Zeitmessung vom Bezugssystem ab und ist nicht eine absolute Größe wie Newton annahm. Hermann Minkowski (1864-1909) geometrisierte 1908 die spezielle Relativitätstheorie, indem er sie als pseudo-Riemannsche Geometrie einer vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit interpretierte. Damit wurde die Einheit von Raum und Zeit mathematisch streng erfasst.

Gemäß der speziellen Relativitätstheorie können sich physikalische Wirkungen höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die Newtonsche Gravitationskraft widerspricht dieser Vorstellung, weil sie eine unendlich große Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt. Um auch die Gravitationskraft relativistisch zu beschreiben, schuf Einstein 1915 seine allgemeine Relativitätstheorie, die die Grundlage der modernen Kosmologie darstellt (Urknall, schwarze Löcher). In der allgemeinen Relativitätstheorie gilt:

²⁰Unabhängig von Newton wurde Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) auf die Differential- und Integralrechnung geführt. Leibniz benutzte seine Philosophie von kleinen geistigen Einheiten (Monaden), die den infinitesimalen Größen entsprechen.

Gravitationskraft = Krümmung der pseudo-Riemannschen
Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit.

Die Theorie der Riemannschen n -dimensionalen Räume (vgl. Kapitel 16) entwarf Bernhard Riemann (1826-1866) in seinem berühmten Habilitationsvortrag im Jahre 1854 „Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen“. Riemann schloss damit an die Flächentheorie von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) an, die dieser im Zusammenhang mit seinen Landvermessungsarbeiten im Jahre 1825 aufstellte mit dem „theorema egregium“ als Kernstück. Dieser Satz besagt, dass die Krümmung einer Fläche allein durch Messungen auf der Fläche ohne Benutzung des umgebenden Raumes berechnet werden kann. Diese Erkenntnis ist der Prototyp für allgemeine Krümmungsbegriffe von Mannigfaltigkeiten.

Eine zunächst völlig andere Entwicklungsrichtung nahm die Quantentheorie. 1900 stellte Max Planck (1858-1947) seine berühmte Quantenhypothese über die Quantelung der Energie auf, die zum richtigen Strahlungsgesetz für Sterne führte (Energieverteilung auf die Frequenzbereiche). Die Quantisierung der klassischen Mechanik gelang Werner Heisenberg (1901-1976) im Jahre 1925. Ein scheinbar völlig anderer Zugang zur Quantenmechanik wurde von Erwin Schrödinger (1887-1961) im Jahre 1926 entdeckt. Um die Quantenmechanik mathematisch zu begründen, schuf John von Neumann (1903-1957) – einer der ideenreichsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts – Ende der zwanziger Jahre die Theorie der selbstadjungierten Operatoren im abstrakten Hilbertraum. Er verallgemeinerte damit Hilberts Theorie der symmetrischen unendlichdimensionalen Matrizen, die dieser um 1900 entwickelte, um im Anschluss an Fredholms Integralgleichungstheorie Eigenwertprobleme für Integralgleichungen behandeln zu können. Interessanterweise führte Hilbert den Begriff des Spektrums ein, ohne zu ahnen, dass dieser rein mathematische Begriff zwanzig Jahre später Atom- und Molekülspektren beschreiben würde. Nach John von Neumann gilt:

Dynamik von Quantensystemen = unitärer Fluss in einem Hilbertraum;
statistische Deutung der Quantentheorie = Geometrie der Hilberträume
(Orthogonalitätsbegriff).

Die abstrakte Hilbertraumtheorie wird mathematisch dem physikalischen *Dualismus zwischen Teilchen und Welle von Quanten* gerecht, was wir kurz diskutieren wollen.

Bereits seit langer Zeit hatten die Physiker beobachtet, dass sich das Licht sowohl als Teilchen (das Prinzip von Fermat (1601-1665)) als auch als Welle (das Prinzip von Huygens (1629-1695)) beschreiben lässt. Maxwell stellte die Hypothese auf, dass Licht eine elektromagnetische Welle darstellt. Diese elektromagnetischen Wellen wurden im Jahre 1888 von Heinrich Hertz (1857-1894) experimentell nachgewiesen. Damit schien der alte Streit über den Charakter des Lichtes zugunsten der Wellentheorie entschieden zu sein. Jedoch im Jahre 1905 postulierte Einstein, dass Licht aus Teilchen (Photonen) mit der Energie $E = h\nu$ besteht (h = Plancksches Wirkungsquantum, ν = Frequenz). Damit konnte er den lichtelektrischen Effekt erklären (und erhielt dafür 1921 den Nobelpreis – nicht für seine Relativitätstheorie!). In den späten vierziger Jahren wurde von Tomonaga, Schwinger und Feynman die von Dirac 1928 initiierte Quantenelektrodynamik als Quantenfeldtheorie vollendet. Danach löst sich der alte Streit über den Charakter des Lichtes dadurch, dass das Licht aus Quanten besteht (Photonen), die sich durch Quantisierung einer Wellentheorie ergeben. Das für alle Quantenfeldtheorien fundamentale Feynmanintegral (vgl. 14.8.5) verallgemeinert das Wienerintegral, welches Norbert Wiener (1894-1964) im Jahre 1923 einführte, um die von Einstein im Jahre 1905 erstmalig behandelte Brownsche Bewegung in eine allgemeine mathematische Theorie einbetten zu können.

Im Rahmen der modernen Eichfeldtheorien (vgl. 14.8.1) werden die fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur (die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung) durch ein Eichfeld A_j mit dem „Feldtensor F_{km} “ beschrieben. Interessanterweise kannten die

Mathematiker diesen Feldtensor bereits seit langer Zeit als „Krümmungstensor F_{km} “ von Hauptfaserbündeln. Somit gilt:

Elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung entsprechen der Krümmung von Hauptfaserbündeln.

Der Begriff des Hauptfaserbündels ist ein zentraler Begriff der modernen Differentialgeometrie, um Paralleltransport, kovariante Differentiation und Krümmung in allgemeiner Weise einführen zu können. Diese Begriffswelt geht auf Arbeiten des französischen Mathematikers Élie Cartan (1869-1951) zurück, der die moderne Differentialgeometrie auf der Grundlage des Kalküls der alternierenden Differentialformen und des Lieschen Gruppenbegriffs schuf. Im Jahre 1872 hatte Felix Klein (1849-1925) in seinem Erlanger Programm formuliert:

Geometrie ist die Invariantentheorie von Transformationsgruppen.

Die vielfältigen in der Natur beobachteten Symmetrien kann man mathematisch durch die Kurzformel beschreiben:

Symmetrie entspricht der Gruppentheorie.

Eine wichtige Klasse von Gruppen stellen die Lieschen Gruppen dar. Diese Theorie wurde von Sophus Lie (1842-1899) entwickelt. In der Nähe des Einselementes wird eine Liesche Gruppe völlig durch ihre Liealgebra beschrieben (vgl. Kapitel 17). Liealgebren sind nichtkommutative Objekte. Die Vertauschungsrelationen der Quantentheorie entsprechen Realisierungen (Darstellungen) von Liealgebren. Diese fundamentalen Vertauschungsrelationen sind z. B. für die Heisenbergsche Unschärferelation und alle Erhaltungssätze in der Quantentheorie verantwortlich.

Die gesamte Elementarteilchenphysik wird von Symmetrien beherrscht. Dabei treten „unschauliche Symmetrien“ auf, die man nur in der Sprache der Mathematik formulieren kann. Im Jahre 1961 entdeckten Gell-Mann und Neeman, dass man die Hadronen mit Hilfe der Liealgebra $su(3)$ (und der zugehörigen Liegruppe $SU(3)$) klassifizieren kann.

Im Jahre 1964 stellten Gell-Mann und Zweig unter Benutzung der experimentellen Daten durch Vergleich mit der Darstellungstheorie der Liealgebra $su(3)$ die Hypothese auf, dass das Proton kein elementares Teilchen ist, sondern aus drei Quarks besteht (vgl. 17.8). Es ist faszinierend, dass die imaginären Zahlen bereits 1572 in dem Buch „Algebra“ von Raffael Bombelli als Erfindung des menschlichen Geistes eingeführt wurden, und fast vier Jahrhunderte später benötigt man diese Objekte, um die Quantentheorie zu formulieren (die Schrödingergleichung enthält die Zahl i) und entdeckt, dass es in der Natur eine fundamentale Symmetrie gibt, die das Verhalten von Elementarteilchen bestimmt und ohne die Zahl i nicht formulierbar ist.

Der mathematische Begriff, auf dem sowohl Geometrie als auch Symmetrie basieren, ist der *Mannigfaltigkeitsbegriff*, der im folgenden Kapitel studiert wird. Dort werden wir auch zeigen, dass sich bereits hinter der klassischen Mechanik und der klassischen statistischen Physik eine Geometrie verbirgt – die symplektische Geometrie.

Hauptfaserbündel werden in Kapitel 19 behandelt.

Literatur zu Kapitel 14

- [Alinhac und Gérard 2007] Alinhac, S., Gérard, P.: Pseudo-Differential Operators and the Nash-Moser Theorem. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2007)
- [Antman 1995] Antman, S.: Nonlinear Problems of Elasticity. Springer, New York (1995)
- [Banks 1994] Banks, R.: Growth and Diffusion Phenomena. Springer, New York (1994)
- [Bär et al. 2007] Bär, C., Ginoux, N., Pfäffle, F.: Wave Equations on Lorentzian Manifolds and Quantization. European Mathematical Society, Zurich (2007)
- [Basdevant 2007] Basdevant, J.: Variational Principles in Physics. Springer, New York (2007)

- [Burgess 2002] Burgess, M.: Classical Covariant Fields. Cambridge University Press, Cambridge, England (2002)
- [Burgess und Moore 2007] Burgess, C., Moore, G.: The Standard Model: A Primer. Cambridge University Press, Cambridge, England (2007)
- [Carathéodory 1994] Carathéodory, C.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Herausgegeben von R. Klötzler. Teubner, Stuttgart/Leipzig (1994)
- [Cercignani 1988] Cercignani, C.: Theory and Applications of the Boltzmann Equation. Springer, New York (1988)
- [Chaichian und Demichev 2001] Chaichian, M., Demichev, A.: Path Integrals in Physics. Vol. 1: Stochastic Processes and Quantum Mechanics; Vol. 2: Quantum Field Theory, Statistical Physics, and other Modern Applications. Institute of Physics Publishing, Bristol (2001)
- [Christodoulou und Klainermann 1993] Christodoulou, D., Klainermann, S.: The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space. Princeton University Press, Princeton, NJ (1993)
- [Ciarlet 1988] Ciarlet, P.: Mathematical Elasticity. North Holland, Amsterdam (1988)
- [Cottingham und Greenwood 1988] Cottingham, W., Greenwood, D.: An Introduction to the Standard Model of Particle Physics. Cambridge University Press, Cambridge, England (1988)
- [Das 2008] Das, A.: Lectures on Quantum Field Theory. World Scientific, Singapore (2008)
- [Dautray und Lions 1991] Dautray, R., Lions, J.: Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vols. 1–6. Transl. from the French. Springer, New York (1991)
- [Dauxois und Peyrard 2006] Dauxois, T., Peyrard, M.: Physics of Solitons. Cambridge University Press, Cambridge, England (2006)
- [Dierkes et al. 2010a] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Sauvigny, F.: Minimal Surfaces, Vol. I. Springer, Berlin (2010)
- [Dierkes et al. 2010b] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Tromba, T.: Minimal Surfaces, Vol. II: Regularity of Minimal Surfaces, Vol. III: Global Analysis of Minimal Surfaces. Springer, Berlin (2010)
- [Dittrich und Reutter 1994] Dittrich, W., Reutter, M.: Classical and Quantum Dynamics from Classical Paths to Path Integrals. Springer, New York (1994)
- [Dolzmann 2003] Dolzmann, G.: Variational Methods for Crystalline Microstructure: Analysis and Computation. Springer, Berlin (2003)
- [Ebert 1989] Ebert, D.: Eichfeldtheorien: Grundlage der Elementarteilchenphysik. Akademie-Verlag, Berlin (1989)
- [Fife 1979] Fife, P.: Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems. Springer, Berlin (1979)
- [Finn 1985] Finn, R.: Equilibrium Capillary Surfaces. Springer, New York (1985)
- [Folland 2008] Folland, G.: Quantum Field Theory: A Tourist Guide for Mathematicians. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2008)
- [Friedman 1982] Friedman, A.: Variational Principles and Free Boundary Value Problems. Wiley, New York (1982)
- [Friedman 1998] Friedman, A.: Mathematics in Industrial Problems, Vols. 1–6. Springer, New York (1998)
- [Galdi 1994] Galdi, G.: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations, Vols. 1, 2. Springer, New York (1994)
- [Giaquinta 1993] Giaquinta, M.: Introduction to Regularity Theory for Nonlinear Elliptic Systems. Birkhäuser, Basel (1993)
- [Giaquinta und Hildebrandt 1995] Giaquinta, M., Hildebrandt, S.: The Calculus of Variations, Vols. 1, 2. Springer, New York (1995)
- [Haken 1993] Haken, H.: Quantenfeldtheorie des Festkörpers. 2. Auflage. Teubner, Stuttgart (1993)
- [Dafermos et al. 2004] Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, Vols. 1, 2. Edited by C. Dafermos et al. Elsevier, Boston (2004)
- [Chipot und Quittner 2004] Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations. Vols. 1, 2. Edited by M. Chipot and P. Quittner. Elsevier, Amsterdam (2004)
- [Hawking und Ellis 1973] Hawking, S., Ellis, G.: The Large Scale Structur of Space-Time. Cambridge University Press, Cambridge, England (1973)
- [Henry 1981] Henry, D.: Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer, Berlin (1981)
- [Jost 1991] Jost, J.: Nonlinear Methods in Riemannian and Kählerian Geometry. Birkhäuser, Basel (1991)
- [Jost und Li-Jost 1998] Jost, J., Xianqing Li-Jost: Calculus of Variations. Cambridge University Press, Cam-

- bridge, England (1998)
- [Jost 2009] Jost, J.: Riemannian Geometry and Geometric Analysis, 5th edition. Springer, Berlin (2009)
- [Kriele 2007] Kriele, M., Space-time: Foundations of General Relativity and Differential Geometry. Springer, Berlin (2007)
- [Kugo 1997] Kugo, T.: Eichfeldtheorie. Übersetzung a. d. Japanischen. Springer, Berlin (1997)
- [Langacker 2010] Langacker, P.: The Standard Model and Beyond, CRC Press, Boca Raton, Florida (2010)
- [Leung 1989] Leung, A.: Systems of Nonlinear Partial Differential Equations: Applications to Biology and Engineering. Kluwer, Dordrecht (1989)
- [Le Veque 1990] Le Veque, R.: Numerical Methods for Conservation Laws. Birkhäuser, Basel (1990)
- [Lions 1969] Lions, J.: Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris (1969)
- [Majda 1984] Majda, A.: Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws. Springer, New York (1984)
- [Marchioro und Pulvirenti 1994] Marchioro, C., Pulvirenti, M.: Mathematical Theory of Inviscid Fluids. Springer, New York (1994)
- [Markowich 1990] Markowich, P.: Semiconductor Equations. Springer, New York (1990)
- [Martin und Rothen 2002] Martin, P., Rothen, F.: Many-Body Problems and Quantum Field Theory: An Introduction. Transl. from the French. Springer, Berlin (2002)
- [Matveev 1994] Matveev, V., Algebro-Geometrical Approach to Nonlinear Evolution Equations. Springer, New York (1994)
- [Nečas und Hláváček 1981] Nečas, J., Hláváček, I.: Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies. Elsevier, New York (1981)
- [Novikov et al. 1984] Novikov, S. et al.: Solitons: The Inverse Scattering Method. Transl. from the Russian. Consultant Bureau, New York (1984)
- [Peskin und Schroeder 1995] Peskin, M., Schroeder, D.: An Introduction to Quantum Field Theory. Addison-Wesley, Reading, MA (1995)
- [Prüß et al. 2008] Prüß, J., Schnaubelt, R., Zacher, R.: Mathematik in der Biologie. Birkhäuser, Basel (2008)
- [Racke 1991] Racke, R.: Lectures on Nonlinear Evolution Equations. Vieweg, Braunschweig (1991)
- [Rendall 2008] Rendall, A.: Partial Differential Equations in General Relativity. Oxford University Press, Oxford (2008)
- [Smoller 1994] Smoller, J.: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. 2nd enlarged edition. Springer, New York (1994)
- [Spohn 1991] Spohn, H.: Large Scale Dynamics of Interacting Particles. Springer, Berlin (1991)
- [Strauss 1989] Strauss, W.: Nonlinear Wave Equations. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1989)
- [Struwe 1990] Struwe, M.: Variational Methods. Springer, New York (1990)
- [Temam 1977] Temam, R.: Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. North-Holland, Amsterdam (1977)
- [Temam 1988] Temam, R.: Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer, New York (1988)
- [Toda 1989] Toda, M.: Nonlinear Waves and Solitons. Kluwer, Dordrecht (1989)
- [Zeidler 1984ff] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. Vol. I: Fixed-Point Theory, 3rd edition 1998; Vol. II A: Linear Monotone Operators, 2nd edition 1997; Vol. II B: Nonlinear Monotone Operators; Vol. III: Variational Methods and Optimization; Vol. IV: Applications to Mathematical Physics, 2nd edition 1995, Springer, New York (1984ff)
- [Zeidler 1995] Zeidler, E.: Introduction to Applied Functional Analysis, Vol. 1: Applications to Mathematical Physics. Vol. 2: Main Principles and their Applications. Springer, New York (1995)
- [Zeidler 2006–2011] Zeidler, E.: Quantum Field Theory: A Bridge between Mathematicians and Physicists, Vol. 1: Basics in Mathematics and Physics, Vol. 2: Quantum Electrodynamics. Vol. 3: Gauge Theory, Springer, Berlin (2006–11)
- [Zinn-Justin 2003] Zinn-Justin, J.: Quantum Field Theory and Critical Phenomena, 4th edition. Clarendon Press, Oxford (2003)
- [Zorich 2001] Zorich, V.: Analysis I, II, Springer, New York (2001)
- [Zorich 2011] Zorich, V.: Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences, Springer, Berlin (2011)

KAPITEL 15

MANNIGFALTIGKEITEN

Sein Geist drang in die tiefsten Geheimnisse der Zahl, des Raumes und der Natur; er maß den Lauf der Gestirne, die Gestalt und die Kräfte der Erde; die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft eines kommenden Jahrhunderts trug er in sich.

*(Unter dem Bild von Carl Friedrich Gauß (1777-1855)
im Deutschen Museum in München)*

Zu oft wird in der Physik der Zustandsraum als ein linearer Raum gewählt, obwohl die nichtlineare Struktur des Problems in natürlicher Weise auf eine Mannigfaltigkeit als Zustandsraum führt. Das erschwert die mathematische Behandlung.¹

Stephen Smale (1980)

15.1 Grundbegriffe

Mannigfaltigkeiten spielen eine wichtige Rolle in der modernen Mathematik und ihren Anwendungen in den Naturwissenschaften, z. B. in der modernen Physik.

Die einfachsten Beispiele für Mannigfaltigkeiten sind glatte Kurven bzw. glatte Flächen, die in jedem Punkt eine Tangente bzw. eine Tangentialebene besitzen.

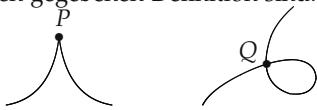


(a)

(b)

Abb. 15.1

Abb. 15.1 zeigt zwei Kurven, die eindimensionale Mannigfaltigkeiten darstellen. Im Gegensatz dazu findet man in Abb. 15.2 zwei Kurven, die *keine* Mannigfaltigkeiten im Sinne unserer weiter unten gegebenen Definition sind.



(a)

(b)

Abb. 15.2

Die Kurve in Abb. 15.2(a) besitzt im Punkt P keine Tangente, während die Kurve in Abb. 15.2(b) wegen der Selbstüberschreitung im Punkt Q dort keine eindeutig bestimmte Tangente hat.

¹Professor Smale (geb. 1930) von der Universität in Berkeley (Kalifornien) und später Hongkong hat wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Theorie der dynamischen Systeme (strukturelle Stabilität und Chaos), der globalen Analysis und nichtlinearen Funktionalanalysis, der Komplexitätstheorie und der mathematischen Ökonomie geleistet. Im Jahre 1966 erhielt er die Fieldsmedaille („Nobelpreis“ für Mathematik).

Bei Mannigfaltigkeiten muss man zwischen ihren lokalen und globalen Eigenschaften unterscheiden. Jede n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit sieht *lokal* aus wie eine *offene Menge* im \mathbb{R}^n . Das globale Verhalten zweier n -dimensionaler reeller Mannigfaltigkeiten kann jedoch völlig unterschiedlich sein. Zum Beispiel verhalten sich die in Abb. 15.3(a) und Abb. 15.3(b) eingezeichneten Umgebungen der Punkte P und Q qualitativ wie ein offenes reelles Intervall (Abb. 15.3(c)), während die beiden Kurven global eine völlig unterschiedliche Struktur besitzen (die Kurve von Abb. 15.3(a) ist geschlossen, die von Abb. 15.3(b) ist nicht geschlossen).

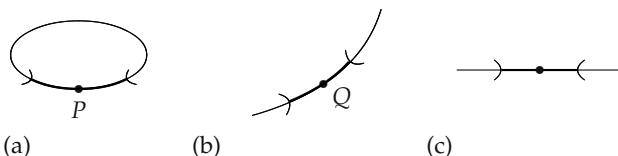


Abb. 15.3

Da sich n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeiten lokal wie eine offene Menge im \mathbb{R}^n verhalten, können sie lokal durch n reelle Koordinaten beschrieben werden. Bei Anwendungen in den Naturwissenschaften entspricht jeder Punkt P einer Mannigfaltigkeit dem *Zustand eines Systems*. Die reellen Koordinaten von P können interpretiert werden als die Charakterisierung des Zustands P durch die *Messung* von n reellen Größen. Bei einem Wechsel des Bezugssystems ändern sich die gemessenen Größen. Das entspricht einem Wechsel der lokalen Koordinaten. Wir setzen voraus, dass dieser Koordinatenwechsel durch *glatte* Funktionen beschrieben wird. Dadurch ist es möglich, eine Analysis auf Mannigfaltigkeiten zu entwickeln, die für viele Anwendungen in der Physik von Bedeutung ist.

Die *Strategie* der Theorie der Mannigfaltigkeiten besteht darin, solche Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit und solche Objekte auf einer Mannigfaltigkeit aufzuspüren, die unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten sind oder deren Transformationsverhalten beim Wechsel lokaler Koordinaten bekannt ist (z. B. Tangentialvektoren, Tensorfelder, Differentialformen usw.).

Wichtige Beispiele für Mannigfaltigkeiten sind:

- (a) Riemannsche Mannigfaltigkeiten (Anwendungen in der allgemeinen Relativitätstheorie und Kosmologie);
- (b) symplektische Mannigfaltigkeiten (Anwendungen in der Mechanik und klassischen statistischen Physik);
- (c) Liegruppen und Hauptfaserbündel (Anwendungen in der Elementarteilchentheorie).

Einsteinsche Summenkonvention: Im folgenden wird über zwei gleiche obere und untere Indizes stets von 1 bis n summiert, z. B. steht

$$\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$$

$$\text{für } \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v^j \mathbf{e}_j.$$

Glattheit: Eine Abbildung $f : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf der offenen Menge O des \mathbb{R}^n heißt genau dann C^k -Abbildung, wenn alle Komponenten f_j von $f = (f_1, \dots, f_m)$ stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen. Für $k = 0$ ergeben sich stetige Abbildungen. C^∞ -Abbildungen heißen auch *glatte*, d. h., die Komponenten glatter Abbildungen besitzen stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung.

15.1.1 Definition einer Mannigfaltigkeit

Das einfachste Beispiel für eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit stellt eine nichtleere offene Menge im \mathbb{R}^n dar. Anschaulich erhält man eine allgemeine n -dimensionale reelle Mannig-

faltigkeit, indem man nichtleere offene Mengen des \mathbb{R}^n zusammenklebt. Die genaue Definition lautet folgendermaßen.

Eine Menge M heißt n -dimensionale reelle *Mannigfaltigkeit*, falls folgendes gilt:

(i) *Lokale Koordinaten*. Zu jedem Punkt x in M existieren eine Teilmenge U von M , die den Punkt x enthält, und eine bijekte Abbildung

$$\varphi : U \rightarrow U_\varphi,$$

wobei U_φ eine offene Menge des \mathbb{R}^n ist.

Die Abbildung φ heißt Kartenabbildung, und die Menge U_φ nennt man das Kartenbild von U . Ferner bezeichnet man das Paar (U, φ) als eine *Karte* von M . Schließlich heißt

$$x_\varphi = \varphi(x),$$

die *lokale Koordinate* des Punktes x in der Karte (U, φ) . Explizit gilt $x_\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, wobei alle x^j reelle Zahlen sind.

(ii) *Wechsel der lokalen Koordinaten*. Ist (V, ψ) eine zweite Karte für den Punkt x mit der zugehörigen lokalen Koordinate

$$x_\psi = \psi(x),$$

dann erhalten wir für die beiden lokalen Koordinaten des Punktes x die folgenden Transformationsformeln:

$$x_\varphi = \varphi(\psi^{-1}(x_\psi)) \quad \text{bzw.} \quad x_\psi = \psi(\varphi^{-1}(x_\varphi)). \quad (15.1)$$

Wir verlangen, dass die beiden zugehörigen Abbildungen

$$\varphi \circ \psi^{-1} : V_\psi \rightarrow U_\varphi \quad \text{bzw.} \quad \psi \circ \varphi^{-1} : U_\varphi \rightarrow V_\psi \quad (15.2)$$

glatt² sind.

Grob gesprochen besteht somit eine Mannigfaltigkeit aus einem System von Karten, das man den *Atlas* von M nennt, und zugehörigen glatten Transformationsformeln für die entsprechenden lokalen Koordinaten.

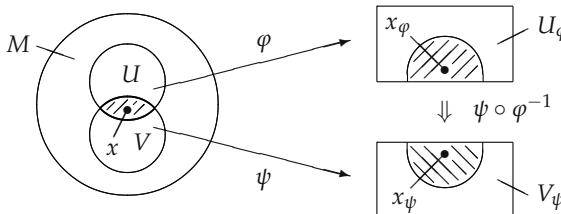


Abb. 15.4

Anschauliche Interpretation:

Als Mannigfaltigkeit M wählen wir die Erdoberfläche (Abb. 15.4). Ein geographischer Atlas für M besteht dann aus geographischen Karten, die Teilmengen des \mathbb{R}^2 sind. Jede geographische Karte ist das Bild eines Teils der Erdoberfläche. Dabei ist es möglich, dass ein Punkt x der Erdoberfläche in verschiedenen geographischen Karten auftritt. Das entspricht der Situation von (ii).

► **BEISPIEL:** Der Prototyp für eine nichttriviale eindimensionale reelle Mannigfaltigkeit stellt die Kreislinie dar. In Abb. 15.5 wird die Kreislinie durch zwei Karten beschrieben. Offensichtlich

²Man spricht von einer C^k -Mannigfaltigkeit genau dann, wenn alle Abbildungen in (15.2) nur die Glattheit C^k besitzen.

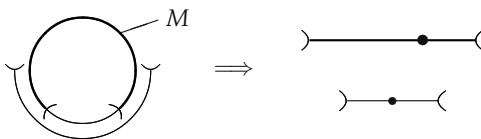


Abb. 15.5

kann man die Karten auch in völlig anderer Weise wählen. Um diese Willkür bei der Atlaswahl zu beseitigen, führt man den maximalen Atlas ein.

Ist A ein Atlas für die Mannigfaltigkeit M , dann gibt es genau einen sogenannten *maximalen Atlas* A_{\max} für A . Definitionsgemäß besteht A_{\max} aus genau allen möglichen Karten (V, ψ) von M , die kompatibel mit allen Karten (U, φ) von A sind, d.h., entweder haben U und V keinen Punkt gemeinsam, oder es liegt die obige Situation (ii) vor.

Jede Karte von A_{\max} heißt eine *zulässige* Karte von M .

Zwei Atlanten von M heißen äquivalent, falls sie den gleichen maximalen Atlas besitzen. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Vereinigung der beiden Atlanten von M wieder einen Atlas von M ergibt.

Zwei Mannigfaltigkeiten mit gleicher Grundmenge M und äquivalenten Atlanten werden als identisch angesehen.

Komplexe n -dimensionale Mannigfaltigkeiten werden analog erklärt. Dabei ersetzt man \mathbb{R}^n durch \mathbb{C}^n , d.h., alle Koordinaten (x^1, \dots, x^n) sind n -Tupel komplexer Zahlen, und die Funktionen in (15.2) sind holomorph, d.h., sie lassen sich in der Umgebung jedes Punktes in eine Potenzreihe entwickeln.

Eindimensionale zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten heißen auch *Riemannsche Flächen*.

► **BEISPIEL:** Die Menge aller Lösungen (w, z) der Gleichung

$$w^2 = z, \quad w, z \in \mathbb{C},$$

bildet eine Riemannsche Fläche, die man die Riemannsche Fläche der Funktion $w = \sqrt{z}$ nennt. Eine anschauliche Darstellung dieser Riemannschen Fläche findet man in 1.14.11.6.

15.1.2 Konstruktion von Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n

Wir betrachten das System von Gleichungen

$$f_j(x^1, \dots, x^n) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{15.3}$$

wobei $1 \leq m < n$ gilt und die Funktionen f_j auf der nichtleeren offenen Menge Ω des \mathbb{R}^n glatt sind. Wir verlangen ferner, dass die Matrix

$$(\partial_k f_j(x)), \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n, \tag{15.4}$$

den maximalen Rang m besitzt für jeden Punkt $x = (x^1, \dots, x^n)$ aus Ω , der (15.3) genügt. Dabei setzen wir $\partial_k = \partial/\partial x^k$.

Satz: Die Menge aller Punkte x aus Ω , die Lösungen der Gleichung (15.3) sind, bildet eine $(n - m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M .

Genauer: M ist eine $(n - m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n im Sinne von 15.1.8.

Der Tangentialraum TM_x von M im Punkt x besteht in diesem Spezialfall aus allen reellen n -Tupeln $v = (v^1, \dots, v^n)$, die dem linearisierten System

$$\partial_k f_j(x)v^k = 0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{15.5}$$

genügen (vgl. 15.1.6). Da der Rang der Matrix (15.4) gleich m ist, stellt TM_x einen $(n - m)$ -dimensionalen reellen linearen Raum dar.

► **BEISPIEL:** Für festes $r > 0$ bildet die Menge S^{n-1} aller Lösungen $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung

$$\sum_{j=1}^n (x^j)^2 - r^2 = 0 \quad (15.6)$$

eine $(n - 1)$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit S^{n-1} , die man die $(n - 1)$ -dimensionale Sphäre vom Radius r nennt.

In der Tat hat die (15.4) entsprechende Matrix

$$(2x^1, \dots, 2x^n)$$

den Rang 1 in jedem Lösungspunkt von (15.6), weil dann mindestens eine der Komponenten x^j ungleich null ist.

Genauer: S^{n-1} ist eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Der Tangentialraum TS_x^{n-1} besteht aus allen reellen n -Tupeln $v = (v^1, \dots, v^n)$ mit

$$\sum_{j=1}^n x^j v^j = 0.$$

Verallgemeinerung: Es sei $1 \leq s \leq m < n$. Wir nehmen an, dass die Matrix (15.4) in einer hinreichend kleinen, offenen Umgebung jedes Punktes x aus Ω , welcher der Gleichung (15.3) genügt, den Rang s hat. Dann bildet die Lösungsmenge von (15.3) eine $(n - s)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M . Der Tangentialraum TM_x wird wiederum durch (15.5) gegeben.

Genauer: M ist eine $(n - s)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

15.1.3 Orientierbarkeit

Wir wählen die beiden Karten (U, φ) und (V, ψ) zur Beschreibung des Punktes x der n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M . Dann haben die lokalen Koordinaten x_φ und x_ψ von x die Form

$$x_\varphi = (x^1, \dots, x^n) \quad \text{und} \quad x_\psi = (x'^1, \dots, x'^n),$$

wobei x^1, \dots, x^n und x'^1, \dots, x'^n reelle Zahlen sind. Die zu (15.1) gehörigen Transformationsformeln für die Komponenten schreiben wir in der Form

$$x'^j = x'^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = 1, \dots, n \quad (15.7)$$

mit der zugehörigen Umkehrtransformation

$$x^k = x^k(x'^1, \dots, x'^n), \quad k = 1, \dots, n. \quad (15.8)$$

Die Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar* genau dann, wenn es einen äquivalenten Atlas A von M gibt, so dass alle Funktionaldeterminanten

$$J(x_\varphi) = \frac{\partial(x'^1, \dots, x'^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}(x_\varphi)$$

positiv sind, und zwar für jeden Kartenpunkt (x_φ) von A und jede Kartentransformation (15.8) von A . Ein solcher Atlas heißt orientiert.

Unter einer *orientierten* Mannigfaltigkeit verstehen wir eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einem orientierten Atlas.

Beispielsweise ist die $(n - 1)$ -dimensionale Sphäre S^{n-1} orientierbar.

15.1.4 Klassischer Tensorkalkül auf Mannigfaltigkeiten

Es sei (U, φ) eine beliebige Karte der n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M . Wir setzen

$$A_k^j := \frac{\partial x'^j(x_\varphi)}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad B_k^j := \frac{\partial x^j(x_\psi)}{\partial x'^k}. \quad (15.9)$$

Unter einem *kontravarianten Tensorfeld* a^j auf M verstehen wir ein Tupel

$$a^j(x_\varphi), \quad j = 1, \dots, n,$$

von reellen Zahlen, das jedem Kartenspunkt x_φ zugeordnet ist. Zusätzlich verlangen wir, dass bei einem Kartentausch von (U, φ) zu (V, ψ) bezüglich (15.7) das folgende Transformationsverhalten vorliegt:

$$a'^j(x_\psi) = A_k^j a^k(x_\varphi), \quad j = 1, \dots, n, \quad (15.10)$$

wobei $a'^j(x_\psi)$ die Komponenten des Tensorfeldes im Punkt x_ψ der Karte (V, ψ) darstellen.

Analog versteht man unter einem *kovarianten Tensorfeld* a_j auf M ein Tupel

$$a_j(x_\varphi), \quad j = 1, \dots, n,$$

von reellen Zahlen, das jedem Kartenspunkt x_φ zugeordnet ist und sich bei Kartentausch gemäß

$$a'_j(x_\psi) = B_j^k a_k(x_\varphi) \quad (15.11)$$

transformiert.

Allgemein versteht man unter einem Tensorfeld $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ ein Tupel

$$a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(x_\varphi), \quad j_r, i_s = 1, \dots, n, \quad (15.12)$$

von reellen Zahlen, das jedem Kartenspunkt x_φ zugeordnet ist und sich bei Kartentausch wie das Produkt

$$a^{j_1} a^{j_2} \cdots a^{j_l} a_{i_1} \cdots a_{i_k}$$

transformiert, d. h.

$$a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(x_\psi) = \varepsilon A_{s_1}^{j_1} A_{s_2}^{j_2} \cdots A_{s_l}^{j_l} B_{i_1}^{r_1} \cdots B_{i_k}^{r_k} a_{r_1 \dots r_k}^{s_1 \dots s_l}(x_\varphi) \quad (15.13)$$

mit $\varepsilon = 1$. Ein solches Tensorfeld besitzt die Stufe $l+k$ (l -fach *kontravariant* und k -fach *kovariant*). Ferner heißt dieses Tensorfeld vom Glattheitstyp C^m , falls alle $a_{\dots}^{j_1 \dots j_l}$ -Funktionen sind; C^∞ -Tensorfelder heißen auch *glatt*.

Das Tupel $a_{\dots}^{j_1 \dots j_l}$ in (15.12) bildet ein *Pseudotensorfeld* auf M , falls das Transformationsgesetz (15.13) gilt mit

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} J(x_\varphi).$$

Ferner heißt das Tupel $a_{\dots}^{j_1 \dots j_l}$ in (15.12) eine *Tensordichte* vom Gewicht γ (l -fach kovariant und k -fach kontravariant), falls das Transformationsgesetz (15.13) gilt mit

$$\varepsilon = |J(x_\varphi)|^{-\gamma}.$$

Die Transformationsgesetze stimmen mit den entsprechenden Gesetzen überein, die in 10.2 für Tensoren im \mathbb{R}^n formuliert wurden.

Alle Rechenregeln für Tensoren aus Abschnitt 10.2 bleiben auf Mannigfaltigkeiten gültig.

15.1.5 Differentiation von klassischen Tensorfeldern

Im allgemeinen Fall ergibt die partielle Ableitung eines Tensorfeldes nach den lokalen Koordinaten nicht wieder ein Tensorfeld. Das gilt nur in einer Reihe von wichtigen Spezialfällen, die wir jetzt betrachten wollen. Wie in 15.1.4 sei M eine reelle n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Cartanfelder: Unter einem p -Cartanfeld $a_{i_1 \dots i_p}$ auf M verstehen wir ein schiefsymmetrisches kovariantes C^1 -Tensorfeld. Die sogenannte *alternierende Ableitung*

$$d_i a_{i_1 \dots i_p} := \partial_{[i} a_{i_1 \dots i_p]} \quad (15.14)$$

bildet dann ein $(p+1)$ -Cartanfeld. In diesem Zusammenhang bezeichnet $\partial_i = \partial/\partial x^i$ die partielle Ableitung bezüglich der lokalen Koordinate x^i . Ferner bedeutet $[i i_1 \dots i_p]$ die Antisymmetrisierung im Sinne von 10.2.

Beispielsweise gilt

$$d_i a_j = \frac{1}{2} (\partial_i a_j - \partial_j a_i).$$

Die Operation (15.14) verallgemeinert die *Rotation* in der klassischen Vektoranalysis.³

Weylfelder: Unter einem p -Weylfeld $a^{i_1 \dots i_p}$ auf M verstehen wir eine schiefsymmetrische kontravariante C^1 -Tensordichte vom Gewicht 1. Die sogenannte *Weylableitung* δa , definiert durch

$$(\delta a)^{i_2 \dots i_p} := -\partial_i a^{i i_2 \dots i_p}, \quad (15.15)$$

bildet dann ein $(p-1)$ -Weylfeld.

Die Operation (15.15) verallgemeinert die negative *Divergenz* in der klassischen Vektoranalysis.

Lieableitung: Es seien v^j ein kontravariantes C^1 -Tensorfeld auf M und a_j bzw. a^j ein kovariantes bzw. kontravariantes C^1 -Tensorfeld auf M . Die sogenannte *Lieableitung*

$$L_v a_j := v^s \partial_s a_j + a_s \partial_j v^s \quad (15.16)$$

bzw.

$$L_v a^j := v^s \partial_s a^j - a^s \partial_s v^j \quad (15.17)$$

ergibt wiederum ein kovariantes bzw. kontravariantes Tensorfeld.⁴

Für ein beliebiges C^1 -Tensorfeld $a_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l}$ definiert man die Lieableitung, indem man zu $v^s \partial_s a_{\dots}^{i_1 \dots i_l}$ für jeden Index von $a_{\dots}^{i_1 \dots i_l}$ Korrekturterme wie in (15.16) und (15.17) addiert, d. h.

$$\begin{aligned} L_v a_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} &:= v^s \partial_s a_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \\ &\quad + (a_{s j_2 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} \partial_{j_1} v^s + \dots + a_{j_1 \dots s}^{i_1 \dots i_l} \partial_{j_k} v^s) \quad (\text{Indizes } j_1, \dots, j_k) \\ &\quad - (a_{j_1 \dots j_k}^{s i_2 \dots i_l} \partial_s v^{i_1} + \dots + a_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots s} \partial_s v^{i_l}) \quad (\text{Indizes } i_1, \dots, i_l). \end{aligned}$$

Diese Lieableitung ergibt wiederum ein Tensorfeld des gleichen Typs wie $a_{\dots}^{i_1 \dots i_l}$.

Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten existiert eine sogenannte kovariante Differentiation, die beliebige Tensorfelder wieder in Tensorfelder überführt (vgl. 16.1).

³Das Symbol $d_i a_j$ soll daran erinnern, dass es sich um eine Modifikation der partiellen Ableitung $\partial_i a_j$ handelt. Anstelle von $d_i a_j$ schreibt man auch $(da)_{ij}$.

⁴Anstelle von $L_v a_j$ schreibt man auch $(L_v a)_j$ usw.

15.1.6 Tangentenvektoren und Tangentialraum

Ist M eine glatte Fläche im \mathbb{R}^3 , dann besteht die Tangentialebene im Punkt x aus allen möglichen Tangentenvektoren v im Punkt x , die zu Kurven durch den Punkt x gehören (Abb. 15.6).

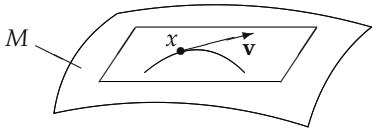


Abb. 15.6

Die Definition einer n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M benutzt nur Karten und garantiert nicht von vornherein, dass sich M in einem „umgebenden Raum \mathbb{R}^m “ realisieren lässt. Deshalb müssen wir die Definition des Tangentenvektors und des Tangentialraumes für allgemeine Mannigfaltigkeiten im Unterschied zur anschaulichen Situation von Abb. 15.6 geringfügig modifizieren.

Tangentenvektor: Unter einem *Tangentenvektor* v an die Mannigfaltigkeit M im Punkt x verstehen wir die Gesamtheit aller Kurven

$$y = y(t) \quad (15.18)$$

durch den Punkt x , die in einer festen Karte (U, φ) zu x den gleichen Tangentialvektor v_φ im Kartenpunkt x_φ besitzen (Abb. 15.7).

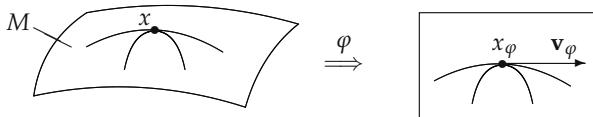


Abb. 15.7

Genauer heißt das folgendes: Die Kurve (15.18) stellt eine Abbildung dar, die jedem reellen Parameter t in einer Umgebung von $t = 0$ einen Punkt $y(t)$ der Mannigfaltigkeit M zuordnet, wobei gilt:

$$y(0) = x.$$

Bezeichnet $y_\varphi(t)$ die lokale Koordinate von $y(t)$ bezüglich der Karte (U, φ) , dann ist

$$y_\varphi = y_\varphi(t) \quad (15.19)$$

das Kartenbild der Kurve (15.18) mit $y_\varphi(0) = x_\varphi$. Ferner stellt die Ableitung

$$\mathbf{v}_\varphi = \dot{y}_\varphi(0)$$

den Tangentenvektor an die Kartenkurve (15.19) im Kartenpunkt x_φ dar. Der Vektor \mathbf{v}_φ heißt *Repräsentant* des Tangentenvektors v bezüglich der Karte (U, φ) . Explizit gilt $y_\varphi = (y^1, \dots, y^n)$, $x_\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ und

$$\mathbf{v}_\varphi = (\dot{y}_\varphi^1(0), \dots, \dot{y}_\varphi^n(0)) = (v^1, \dots, v^n).$$

Die Definition des Tangentenvektors v ist unabhängig von der gewählten Karte. Formal schreiben wir

$$\mathbf{v} = \dot{y}(0). \quad (15.20)$$

Ist M eine Fläche in einem festen Raum \mathbb{R}^m , dann gilt (15.20) im üblichen Sinne (Abb. 15.6).

Anschaulich beschreibt die Kurve $y = y(t)$ in (15.18) die *Bewegung* eines Punktes auf der Mannigfaltigkeit M , der sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt x befindet. Dann ist \mathbf{v}_φ der *Geschwindigkeitsvektor* zur Zeit $t = 0$, der in der Karte (U, φ) beobachtet wird.

Basisvektoren \mathbf{e}_j : Es sei (U, φ) eine feste Karte für den Punkt x . Wir setzen

$$(\mathbf{e}_1)_\varphi = (1, 0, \dots, 0), \quad (\mathbf{e}_2)_\varphi = (0, 1, \dots, 0), \quad \text{usw.}$$

$y = y(t)$ sei eine Kurve auf M durch den Punkt x , deren Kartenbild $y_\varphi = y_\varphi(t)$ im Kartenpunkt x_φ den Tangentenvektor $(\mathbf{e}_j)_\varphi$ besitzt. Wir definieren

\mathbf{e}_j ist Tangentenvektor an $y = y(t)$ im Punkt x ,

d. h., $(\mathbf{e}_j)_\varphi$ ist ein Repräsentant von \mathbf{e}_j (Abb. 15.8).

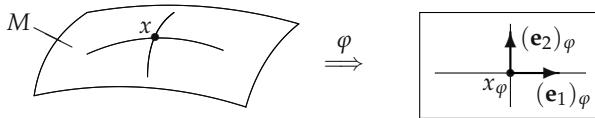


Abb. 15.8

Tangentialraum TM_x von M im Punkt x : Die Gesamtheit aller Tangentenvektoren von M im Punkt x bezeichnet man durch TM_x . Der Tangentialraum TM_x wird zu einem n -dimensionalen reellen linearen Raum, wenn man die linearen Operationen in einer festen Karte für die Repräsentanten ausführt. Explizit entspricht die Linearkombination

$$\mathbf{z} = \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in TM_x$ dem Tangentenvektor $\mathbf{z} \in TM_x$, der den Repräsentanten

$$\mathbf{z}_\varphi = \alpha \mathbf{v}_\varphi + \beta \mathbf{w}_\varphi$$

besitzt. Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Karte. Für $\mathbf{v} \in TM_x$ gilt

$$\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j,$$

d. h., die Vektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bilden eine Basis des Tangentialraumes TM_x , die man die *natürliche Basis* von TM_x bezüglich der Karte (U, φ) nennt. Die Komponenten v^j von \mathbf{v} bilden einen *kontravarianten Tensor* im Punkt x , d. h., unter einem Kartenwechsel transformiert sich v^j gemäß (15.10).

Die Basisvektoren \mathbf{e}_j transformieren sich unter einem Kartenwechsel in der gleichen Weise wie ein *kovarianter Tensor* a_j in (15.11), d. h.

$$\mathbf{e}'_j = \frac{\partial x^i(x_\psi)}{\partial x'^j} \mathbf{e}_i.$$

Ebenso transformiert sich die partielle Ableitung $\partial_j f = \partial f / \partial x^j$. Deshalb benutzt man auch häufig anstelle von \mathbf{e}_j die *formale Bezeichnung* ∂_j , d. h., man schreibt anstelle von $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$ auch

$$\mathbf{v} = v^j \partial_j.$$

In diesem Sinne kann man einen Tangentenvektor im Punkt x mit einem linearen *Differentialoperator* identifizieren. Man schreibt auch

$$\mathbf{v}(f) := v^j \partial_j f \tag{15.21}$$

oder genauer $\mathbf{v}_x(f) = v^j(x^1, \dots, x^n) \partial_j f(x^1, \dots, x^n)$. Diese Richtungsableitung der reellen Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt x in Richtung des Tangentenvektors \mathbf{v} ist unabhängig von der Kartenwahl.

Tangentialbündel TM der Mannigfaltigkeit M : Die Menge aller Paare

$$(x, \mathbf{v}) \text{ mit } x \in M \text{ und } \mathbf{v} \in TM_x$$

bezeichnen wir mit TM . Ein Punkt (x, \mathbf{v}) des Tangentialbündels TM von M besteht somit aus einem Punkt x der ursprünglichen Mannigfaltigkeit M und einem Tangentenvektor \mathbf{v} von M im Punkt x . Ist (U, φ) eine Karte von M bezüglich des Punktes x , dann ordnen wir dem Punkt $(x, \mathbf{v}) \in TM$ die lokalen Koordinaten

$$(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$$

zu. So wird das Tangentialbündel TM von M in natürlicher Weise zu einer $2n$ -dimensionalen reellen *Mannigfaltigkeit*. Explizit gehört zu jeder Karte (U, φ) von M die Karte (W, Φ) von TM mit

$$\Phi(x, \mathbf{v}) = (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$$

$$\text{und } W = U \times \bigcup_{x \in U} TM_x.$$

Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M : Unter einem Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) \tag{15.22}$$

auf M verstehen wir eine Abbildung, die jedem x von M einen Tangentenvektor $\mathbf{v}(x)$ im Punkt x zuordnet. Wir sprechen von einem C^k -Vektorfeld genau dann, wenn das zugehörige kontravariante Tensorfeld v^j der Komponenten vom Glattheitstyp C^k ist. Anstelle von $\mathbf{v}(x)$ schreiben wir auch \mathbf{v}_x .

15.1.7 Kotangentenvektoren und Kotangentialraum

M sei wiederum eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Kotangentenvektor: Unter einem Kotangentenvektor ω im Punkt x der Mannigfaltigkeit M verstehen wir ein lineares Funktional auf dem Tangentialraum TM_x , d.h., jedem Tangentenvektor \mathbf{v} im Punkt x wird eine reelle Zahl $\omega(\mathbf{v})$ zugeordnet, wobei

$$\omega(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha\omega(\mathbf{v}) + \beta\omega(\mathbf{w})$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in TM_x$ gilt.

Basiskotangentenvektoren dx^j : (U, φ) sei eine feste Karte für den Punkt x von M . Für alle Tangentenvektoren $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$ im Punkt x definieren wir

$$dx^j(\mathbf{v}) = v^j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{15.23}$$

Dann gilt

$$\omega = \omega_j dx^j \tag{15.24}$$

mit $\omega_j = \omega(\mathbf{e}_j)$. Die Komponenten ω_j des Kotangentenvektors ω bilden einen *kovarianten* Tensor im Punkt x , d.h., sie transformieren sich unter einem Kartenwechsel gemäß (15.11).

Die Basiskotangentenvektoren dx^j transformieren sich unter einem Kartenwechsel wie ein kontravarianter Tensor a^j in (15.10), d. h.

$$dx'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} dx^i.$$

In der physikalischen Literatur werden Differentiale in unscharfer Form als „unendlich kleine Größen“ charakterisiert. In der Theorie der Mannigfaltigkeiten sind dagegen Differentiale *wohlbestimmte mathematische Objekte*, die durch (15.23) definiert sind.

Kotangentialraum TM_x^* einer Mannigfaltigkeit M im Punkt x : Definitionsgemäß besteht TM_x^* aus allen Kotangentenvektoren ω im Punkt x . Wegen (15.24) bildet TM_x^* einen n -dimensionalen reellen linearen Raum mit den Basisvektoren dx^1, \dots, dx^n . Außerdem ist TM_x^* der duale Raum zu TM_x .

Wir bezeichnen $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ auch als die *natürliche Basis* von TM_x^* bezüglich der Karte (U, φ) .

Kotangentialbündel TM^* der Mannigfaltigkeit M : Die Menge aller Paare

$$(x, \omega) \text{ mit } x \in M \text{ und } \omega \in TM_x^*$$

bezeichnen wir mit TM^* . Ist (U, φ) eine Karte von M bezüglich des Punktes x , dann ordnen wir dem Punkt $(x, \omega) \in TM^*$ die lokalen Koordinaten

$$(x^1, \dots, x^n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

zu. Damit wird das Kotangentialbündel TM^* zu einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit.

15.1.8 Untermannigfaltigkeiten

Es sei M eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge T von M heißt eine m -dimensionale *Untermannigfaltigkeit* von M , falls T lokal wie ein m -dimensionaler linearer Unterraum von \mathbb{R}^n aussieht.

Genauer: Wir fordern, dass es zu jedem Punkt $x \in M$ eine zulässige Karte (U, φ) von M gibt, so dass

$$\varphi(U \cap T) = \varphi(U) \cap L^m$$

gilt. Dabei bezeichne L^m einen m -dimensionalen linearen Unterraum von \mathbb{R}^n . Durch eine geeignete Wahl von φ kann man stets erreichen, dass das Kartenbild $T_\varphi = \varphi(U \cap T)$ des Durchschnitts $U \cap T$ aus allen Punkten (x^1, \dots, x^n) des Kartenbildes $U_\varphi = \varphi(U)$ besteht mit

$$x^{m+1} = x^{m+2} = \dots = x^n = 0$$

(Abb. 15.9). Jede Untermannigfaltigkeit ist gleichzeitig eine Mannigfaltigkeit.

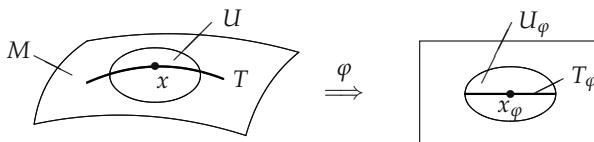


Abb. 15.9

15.1.9 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Eine offene Kreisscheibe ist eine Mannigfaltigkeit, während eine abgeschlossene Kreisscheibe keine Mannigfaltigkeit im Sinne von 15.1.1 darstellt, wohl aber eine Mannigfaltigkeit mit Rand (Abb. 15.10).

Allgemein wird eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit mit Rand M parallel zu 15.1.1 definiert.

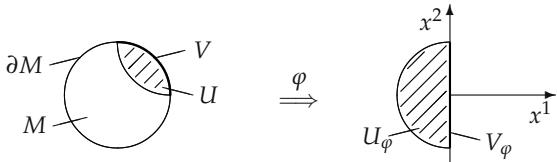


Abb. 15.10

Im Unterschied zu 15.1.1 verlangen wir jetzt jedoch, dass die Kartenbilder U_φ sich darstellen lassen als Durchschnitt

$$U_\varphi = O \cap H\mathbb{R}^n$$

zwischen einer offenen Menge O des \mathbb{R}^n und dem abgeschlossenen Halbraum

$$H\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 \leq 0\}$$

(Abb. 15.10). Ein Punkt $x \in M$ heißt *Randpunkt* von M genau dann, wenn der zugehörige Kartenpunkt x_φ ein Randpunkt von $\mathbb{H}R^n$ ist, d. h., es gilt $x^1 = 0$.

Jede Mannigfaltigkeit ist gleichzeitig eine Mannigfaltigkeit mit Rand, wobei der Rand trivialerweise die leere Menge ist.

Die Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit M mit Rand wird parallel zu 15.1.3 durch die Existenz von Kartentransformationen mit positiver Funktionaldeterminante definiert.

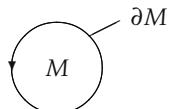


Abb. 15.11

Ist M orientiert bezüglich des Atlas A mit den Kartenbildern U_φ , dann erzeugt A in natürlicher Weise einen Atlas A_0 des Randes ∂M mit den Kartenbildern $V_\varphi = \partial U_\varphi \cap \partial(H\mathbb{R}^n)$ (Abb. 15.10). Dadurch entsteht die sogenannte *kohärent orientierte* $(n-1)$ -dimensionale Randmannigfaltigkeit ∂M .

► **BEISPIEL:** In Abb. 15.11 entspricht die kohärente Orientierung des Randes in anschaulicher Weise der eingezeichneten Orientierung der Randkurve.

15.1.10 Mannigfaltigkeiten als topologische Räume

Eine Teilmenge O einer n -dimensionalen, reellen Mannigfaltigkeit M heißt *offen* genau dann, wenn es zu jedem Punkt $x \in O$ eine Karte (U, φ) gibt, so dass das Kartenbild $\varphi(U \cap O)$ des Durchschnitts $U \cap O$ eine offene Menge des \mathbb{R}^n ist.

Mit Hilfe der so definierten offenen Mengen wird jede Mannigfaltigkeit zu einem *topologischen Raum*. Deshalb hat man für Mannigfaltigkeiten alle topologischen Grundbegriffe aus 11.2.1 zur Verfügung.

Speziell heißt eine Teilmenge T von M *abgeschlossen* genau dann, wenn das Komplement $M \setminus T$ offen ist. Ferner heißt T *kompakt* genau dann, wenn jedes System $\{O_\alpha\}$ offener Mengen, das T überdeckt, ein endliches Teilsystem enthält, welches T bereits überdeckt.

► **BEISPIEL:** Ist die Mannigfaltigkeit M Teilmenge von \mathbb{R}^m , dann ist eine Teilmenge T von M genau dann kompakt, wenn T eine abgeschlossene und beschränkte Menge in \mathbb{R}^m ist.

Die Folge (x_n) auf M konvergiert definitionsgemäß gegen den Punkt x genau dann, wenn es zu jeder offenen Menge O mit $x \in O$ eine Zahl n_0 gibt, so dass

$$x_n \in O \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

gilt. Das ist gleichbedeutend damit, dass bei willkürlich gewählter Karte (U, φ) zu x die Folge $(x_{n\varphi})$ der Kartenpunkte gegen den Kartenpunkt x_φ konvergiert.

Die Teilmenge A der Mannigfaltigkeit M ist abgeschlossen genau dann, wenn aus $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ und $x_n \in A$ für alle n stets auch $x \in A$ folgt.

Die Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen den beiden Mannigfaltigkeiten M und N heißt *stetig* im Punkt x genau dann, wenn zu jeder offenen Menge B mit $f(x) \in B$ eine offene Menge A mit $x \in A$ existiert, so dass $f(A) \subseteq B$ gilt. Das ist gleichbedeutend damit, dass für $n \rightarrow \infty$ aus

$$x_n \rightarrow x \quad \text{auf } M$$

stets $f(x_n) \rightarrow f(x)$ auf N folgt.

Die Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt *Homöomorphismus* genau dann, wenn f eine bijektive stetige Abbildung von M auf N ist, wobei auch die inverse Abbildung f^{-1} stetig ist.

Die Mannigfaltigkeit M heißt *bogenweise zusammenhängend* genau dann, wenn zwei beliebige Punkte y und z von M durch eine stetige Kurve $x = x(t)$ auf M verbunden werden können, d.h., $x(\cdot)$ ist eine stetige Abbildung von dem Intervall $[0, 1]$ in M mit $x(0) = y$ und $x(1) = z$.

Eine Mannigfaltigkeit M heißt *zusammenhängend* genau dann, wenn eine Zerlegung

$$M = A \cup B \quad \text{mit } A \cap B = \emptyset$$

nicht möglich ist, wobei A und B nichtleere offene Mengen sind.

Eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit ist genau dann zusammenhängend, wenn sie bogenweise zusammenhängend ist. Eine Mannigfaltigkeit besitzt definitionsgemäß eine *abzählbare* Basis genau dann, wenn sie sich als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen offenen Mengen darstellen lässt.

15.2 Glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Die Abbildung

$$f : M \rightarrow N \tag{15.25}$$

zwischen den beiden Mannigfaltigkeiten M und N heißt *glatt*⁵, falls es zu jedem Punkt $x \in M$ bzw. $f(x) \in N$ eine Karte (U, φ) bzw. (V, ψ) gibt, so dass die durch f in den Karten induzierte Abbildung $f_{\varphi\psi}$ partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt. Explizit ist $f_{\varphi\psi}$ durch das

⁵Die Abbildung f besitzt genau dann die Glattheit C^k , wenn alle induzierten Abbildungen $f_{\varphi\psi}$ C^k -Abbildungen sind, d.h., $f_{\varphi\psi}$ hat stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k .

folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi \\ U_\varphi & \xrightarrow{f_{\varphi\psi}} & V_\psi \end{array}$$

gegeben, d. h. $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Diffeomorphismus: Die Abbildung f in (15.25) heißt Diffeomorphismus genau dann, wenn f eine bijektive glatte Abbildung von M auf N ist und die inverse Abbildung f^{-1} von N auf M ebenfalls glatt ist.

Die Mannigfaltigkeit M heißt *diffeomorph* zur Mannigfaltigkeit N genau dann, wenn es einen Diffeomorphismus f von M auf N gibt.

Grob gesprochen besitzen diffeomorphe Mannigfaltigkeiten die gleiche Struktur. Beispielsweise ist in Abb. 15.12(a) die Kurve M diffeomorph zu N .

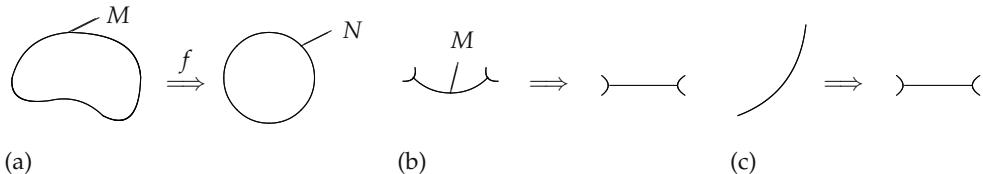


Abb. 15.12

Struktur der eindimensionalen Mannigfaltigkeiten (Kurven): Es sei M eine eindimensionale zusammenhängende reelle Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis. Dann gibt es genau zwei Möglichkeiten:

- (i) M ist diffeomorph zur Kreislinie
(d. h., M ist eine geschlossene Kurve wie in Abb. 15.12(a)).
- (ii) M ist diffeomorph zum offenen Einheitsintervall $(0, 1)$ (d. h., M ist eine endliche Kurve ohne Randpunkte wie in Abb. 15.12(b) oder eine unendliche Kurve wie in Abb. 15.12(c)).

Zum Beispiel ist die reelle Zahlengerade \mathbb{R} diffeomorph zu $(0, 1)$. Als Diffeomorphismus $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ kann man z. B. $f(x) = \pi^{-1}(\arctan x + \pi/2)$ wählen (Abb. 15.13).

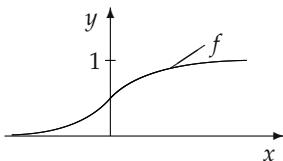


Abb. 15.13

Tangentialabbildung $T_x f$: Ist $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, dann existiert für jeden Punkt $x \in M$ in natürlicher Weise die sogenannte Tangentialabbildung

$$T_x f : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$$

zwischen den entsprechenden Tangentialräumen. Explizit wird $T_x f$ folgendermaßen definiert. Ist $y = y(t)$ eine Kurve auf M durch den Punkt x mit dem Tangentialvektor v , dann entsteht

durch Anwendung der Abbildung f die neue Kurve $z = f(y(t))$ auf der Mannigfaltigkeit N mit dem Tangentialvektor \mathbf{w} im Punkt $f(x)$ (Abb. 15.14).

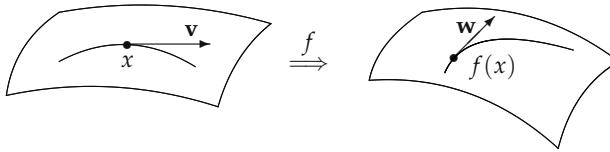


Abb. 15.14

Wir setzen nun

$$(T_x f) \mathbf{v} := \mathbf{w}. \quad (15.26)$$

► **BEISPIEL:** Die Funktion f mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann glatt, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist. Ferner gilt $T_x f = f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h., die Tangentialabbildung ist gleich der klassischen Ableitung.

15.3 Konstruktion von Mannigfaltigkeiten

Definition: Es sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung.

(i) Der Punkt $x \in M$ heißt *regulärer Punkt* von f genau dann, wenn die Tangentialabbildung

$$T_x f : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$$

eine Surjektion ist, d. h., die linearisierte Gleichung (15.26) besitzt für jeden gegebenen Vektor $\mathbf{w} \in TN_{f(x)}$ eine Lösung $\mathbf{v} \in TM_x$.

Andernfalls heißt x *singulärer Punkt* von f .

(ii) Der Punkt $y \in N$ heißt *regulärer Wert* von f genau dann, wenn jeder Punkt $x \in M$ mit $f(x) = y$ ein regulärer Punkt von f ist.

(iii) Die Abbildung f heißt *Submersion* genau dann, wenn die Tangentialabbildung $T_x f$ für jedes $x \in M$ eine Surjektion ist, d. h., wenn jeder Punkt $x \in M$ regulär ist.

(iv) Die Abbildung f heißt *Immersion* genau dann, wenn $T_x f$ für jedes $x \in M$ eine Injektion ist, d. h., $(T_x f) \mathbf{v} = 0$ impliziert $\mathbf{v} = 0$.

(v) Die Abbildung f heißt *Einbettung* genau dann, wenn f eine injektive Immersion ist, wobei zusätzlich auch die inverse Abbildung f^{-1} stetig ist.

Satz: Für eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen den beiden endlichdimensionalen reellen Mannigfaltigkeiten M und N gilt folgendes:

(a) Ist y ein *regulärer Wert* von f , dann bildet die Lösungsmenge der Gleichung

$$f(x) = y, \quad x \in M,$$

eine *Untermannigfaltigkeit* A von M . Für die Dimension von A erhalten wir

$$\dim A = \dim M - \dim N.$$

(b) (Satz von Sard). Haben M und N eine abzählbare Basis, dann ist die Menge der regulären Werte von f *dicht* in N , d. h., zu jedem Punkt $y \in N$ gibt es eine Folge (y_n) von regulären Werten der Abbildung f , so dass $y_n \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$ gilt.

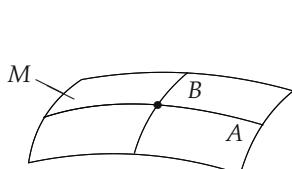
(c) Ist f eine *Einbettung*, dann bildet die Bildmenge $f(M)$ eine *Untermannigfaltigkeit* von N mit $\dim f(M) = \dim M$.

Der fundamentale Satz von Sard besagt grob gesprochen, dass die günstige Situation (a) „in der Regel“ stets vorliegt. Man sagt auch, dass die Situation (a) *generisch* ist.

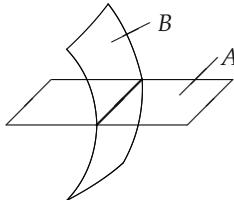
Definition: Sind L_1 und L_2 zwei lineare Unterräume des linearen Raumes L , dann heißt L_1 *transversal zu* L_2 in L genau dann, wenn

$$L = L_1 + L_2$$

gilt, d.h., jedes $v \in L$ lässt sich in der Form $v = v_1 + v_2$ darstellen mit $v_1 \in L_1$ und $v_2 \in L_2$. Diese Darstellung muss nicht eindeutig sein.



(a)



(b)

Abb. 15.15

Satz (Transversalität I): Sind A und B zwei Untermannigfaltigkeiten der n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M , dann ist der Durchschnitt

$$A \cap B$$

wiederum eine Untermannigfaltigkeit von M , falls A *transversal* zu B ist, d.h., für die entsprechenden Tangentialräume gilt

$$TM_x = TA_x + TB_x \quad \text{für alle } x \in A \cap B.$$

► **BEISPIEL:** In Abb. 15.15(a) sind A und B zwei transversale eindimensionale Untermannigfaltigkeiten von M , und der Durchschnitt $A \cap B$ ist ein Punkt, d.h., $A \cap B$ stellt eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M dar mit dem trivialen Tangentialraum $\{0\}$.

In Abb. 15.15(b) sind A und B zwei transversale zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten von $M = \mathbb{R}^3$, und der Durchschnitt $A \cap B$ bildet eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .

Satz (Transversalität II): Es seien $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und S eine Untermannigfaltigkeit von N , wobei M und N endlichdimensionale reelle Mannigfaltigkeiten sind.

Dann ist das Urbild $f^{-1}(S)$ eine *Untermannigfaltigkeit* von M mit

$$\dim f^{-1}(S) = \dim M - \dim N + \dim S,$$

falls f *transversal* zu S ist, d.h., für alle $x \in M$ gilt

$$TN_{f(x)} = TS_{f(x)} + R(T_x f),$$

wobei $R(T_x f)$ den Bildraum von $T_x f$ bezeichnet.

Einbettungssatz von Whitney: M sei eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis. Dann existiert eine Einbettung

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Dieser fundamentale Satz besagt grob gesprochen, dass man jede abstrakt gegebene n -dimensionale Mannigfaltigkeit M der obigen Form als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{2n+1} realisieren kann. Die Zahl „ $2n+1$ “ hängt damit zusammen, dass der \mathbb{R}^{2n+1} auch Platz für das $2n$ -dimensionale Tangentialbündel TM von M bieten muss.

15.4 Invariante Analysis auf Mannigfaltigkeiten

In 15.1.4 haben wir den klassischen Tensorkalkül betrachtet, der mit Komponenten arbeitet. In der Geometrie möchte man jedoch Objekte benutzen, die eine „invariante“ Bedeutung haben, d. h., sie werden unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem definiert. In der Physik entspricht dies Größen, die unabhängig vom verwendeten Bezugssystem existieren (z. B. physikalische Felder wie das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld).

Ordnet man den invarianten Objekten in jedem lokalen Koordinatensystem (d. h. in jeder Karte) in natürlicher Weise Komponenten zu, dann zeigt sich, dass der invariante Tensorkalkül und der klassische Tensorkalkül äquivalent sind.

15.4.1 Tensoralgebra

M sei eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. Unter einem *Tensor* A vom Typ (p, q) im Punkt $x \in M$ verstehen wir eine multilinear Abbildung

$$A : TM_x \times TM_x \times \dots \times TM_x \times TM_x^* \times \dots \times TM_x^* \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei der Tangentialraum TM_x p -fach und der Kotangentialraum TM_x^* q -fach auftreten⁶, d. h.,

$$A(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{p+q})$$

ist eine reelle Zahl für alle $a_1, \dots, a_p \in TM_x$, $a_{p+1}, \dots, a_{p+q} \in TM_x^*$, und A ist linear bezüglich jedes Arguments. Beispielsweise bedeutet das für einen Tensor vom Typ $(2, 0)$, dass

$$\begin{aligned} A(\alpha a + \beta b, c) &= \alpha A(a, c) + \beta A(b, c) \\ A(c, \alpha a + \beta b) &= \alpha A(c, a) + \beta A(c, b) \end{aligned}$$

für alle reellen Zahlen α, β und alle Argumente $a, b, c \in TM_x$ gilt.

Linearkombination: Sind A und B zwei Tensoren im Punkt x vom gleichen Typ (p, q) , dann erklären wir $\alpha A + \beta B$ in natürlicher Weise durch die entsprechende Linearkombination der multilinearen Abbildungen, d. h.

$$(\alpha A + \beta B)(a_1, \dots, a_{p+q}) := \alpha A(a_1, \dots, a_{p+q}) + \beta B(a_1, \dots, a_{p+q})$$

für alle reellen Zahlen α, β und alle Argumente a_1, \dots, a_{p+q} .

Tangentialvektoren: Jeden Tangentenvektor v im Punkt x können wir als Tensor A vom Typ $(0, 1)$ auffassen, indem wir

$$A(\omega) := \omega(v) \quad \text{für alle } \omega \in TM_x^*$$

setzen. Jeder Kotangentenvektor ω im Punkt x ist ein Tensor vom Typ $(1, 0)$.

Tensorprodukt: Sind A und B zwei Tensoren beliebigen Typs im Punkt x , dann definieren wir das Tensorprodukt $A \otimes B$ in natürlicher Weise als das Produkt der entsprechenden multilinearen Abbildungen, d. h.

$$(A \otimes B)(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) := A(a_1, \dots, a_r)B(b_1, \dots, b_s)$$

für alle möglichen Argumente a_i, b_j .

Es gelten das Assoziativgesetz

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

⁶Wir lassen auch eine andere Reihenfolge der Räume TM_x und TM_x^* zu. Beispielsweise heißt auch jede multilinear Abbildung $A : TM_x \times TM_x^* \times TM_x \rightarrow \mathbb{R}$ ein Tensor vom Typ $(2, 1)$.

und die beiden Distributivgesetze

$$\begin{aligned} A \otimes (\beta B + \delta D) &= \beta(A \otimes B) + \delta(A \otimes D), \\ (\beta B + \delta D) \otimes A &= \beta(B \otimes A) + \delta(D \otimes A), \end{aligned}$$

wobei β und δ reelle Zahlen sind. Das Tensorprodukt ist nicht kommutativ.

Kontraktion eines Tensorprodukts: Für $a \in TM_x$ und $b \in TM_x^*$ definieren wir die Kontraktion \mathbb{K} durch

$$\mathbb{K}(a \otimes b) := b(a)$$

und

$$\mathbb{K}(A \otimes \underbrace{a \otimes B \otimes b}_{\text{ }} \otimes C) := b(a)A \otimes B \otimes C.$$

Komponenten eines Tensors: Es sei (U, φ) eine Karte für den Punkt $x \in M$. Wir wählen die natürliche Basis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ im Tangentialraum TM_x und die natürliche Basis $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ im Kotangentialraum TM_x^* bezüglich der Karte (U, φ) .

Ist A beispielsweise ein Tensor vom Typ $(1, 1)$ im Punkt x , dann gilt

$$A(v^i \mathbf{e}_i, v_j dx^j) = v^i v_j a_i^j,$$

wobei definitionsgemäß die reellen Zahlen

$$a_i^j := A(\mathbf{e}_i, dx^j)$$

die Komponenten von A im Punkt x bezüglich der Karte (U, φ) heißen. Bei Kartenwechsel transformieren sich die Komponenten a_i^j wie ein einfacher kontravarianter und einfacher kovarianter Tensor (vgl. 15.1.4). Ferner gilt

$$A = a_i^j dx^j \otimes \mathbf{e}_i.$$

Denn aus $dx^j(v^r \mathbf{e}_r) = v^j$ folgt

$$\begin{aligned} (a_j^i dx^j \otimes \mathbf{e}_i)(v^r \mathbf{e}_r, v_s dx^s) &= a_j^i dx^j(v^r \mathbf{e}_r) v_s dx^s(\mathbf{e}_i) \\ &= a_j^i v^j v_i = A(v^j \mathbf{e}_j, v_i dx^i). \end{aligned}$$

Ist A im allgemeinen Fall ein Tensor vom Typ (p, q) im Punkt x , dann erhalten wir

$$A(v^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}, \dots, v^{i_p} \mathbf{e}_{i_p}, v_{j_1} dx^{j_1}, \dots, v_{j_q} dx^{j_q}) = v^{i_1} \dots v^{i_p} v_{j_1} \dots v_{j_q} A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$$

mit den Komponenten

$$A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} := A(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_q}),$$

die sich bei Kartenwechsel wie ein q -fach kontravarianter und p -fach kovarianter Tensor transformieren. Ferner gilt

$$A = A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}.$$

Im Sinne des Indexkalküls für Tensoren aus 10.2 entspricht die Summe zweier Tensoren bzw. ihr Tensorprodukt der Summe der Komponenten bzw. dem Produkt der Komponenten. Ferner liefert die Kontraktion eines Tensors eine Verkürzung der Komponenten.

► **BEISPIEL** (Summe): $A_j^i \mathbf{e}_i \otimes dx^j + B_j^i \mathbf{e}_i \otimes dx^j = (A_j^i + B_j^i)(\mathbf{e}_i \otimes dx^j)$.

► **BEISPIEL** (Tensorprodukt): Es gilt

$$(A^i \mathbf{e}_i) \otimes (A_j dx^j) = A^i A_j \mathbf{e}_i \otimes dx^j.$$

► **BEISPIEL** (Kontraktion): Wir erhalten

$$\mathbb{K}(A_k^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes dx^k) = \underbrace{A_k^{ij} dx^k(\mathbf{e}_i)}_{= A_k^{ij} \delta_i^k} \mathbf{e}_j = A_i^{ij} \mathbf{e}_j.$$

Die Kontraktion ist stets *unabhängig* von der gewählten Karte.

15.4.2 Tensorfelder

Unter einem C^k -Tensorfeld vom Typ (p, q) auf der Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Abbildung

$$A = A(x),$$

die jedem Punkt $x \in M$ einen Tensor $A(x)$ vom Typ (p, q) zuordnet, so dass die Komponenten

$$A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$$

von $A(x)$ ein p -fach kovariantes und q -fach kontravariantes C^k -Tensorfeld auf M bilden im Sinne von 15.1.4. Anstelle von $A(x)$ schreiben wir auch A_x .

15.4.3 Differentialformen

Unter einer alternierenden Differentialform ω vom Grade p oder kurz einer p -Form im Punkt x der n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M verstehen wir einen schiefsymmetrischen Tensor vom Typ $(p, 0)$ im Punkt x , d. h.,

$$\omega(a_1, \dots, a_p)$$

ändert das Vorzeichen bei einer ungeraden Permutation der Argumente $a_1, \dots, a_p \in TM_x$ und bleibt unverändert bei einer entsprechenden geraden Permutation. Zum Beispiel gilt

$$\omega(a_1, a_2) = -\omega(a_2, a_1) \quad \text{für alle } a_1, a_2 \in TM_x.$$

Alternierende Multiplikation: Ist ω bzw. θ eine p -Form bzw. q -Form, dann definieren wir die $(p+q)$ -Form $\omega \wedge \theta$ durch

$$(\omega \wedge \theta)(a_1, \dots, a_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi} (\text{sign } \pi) \pi[\omega(a_1, \dots, a_p) \theta(a_{p+1}, \dots, a_{p+q})],$$

wobei wir über alle Permutationen π von (a_1, \dots, a_{p+q}) summieren⁷ und $\text{sign } \pi$ das Vorzeichen von π bezeichnet, d. h., es gilt $\text{sign } \pi = 1$ bzw. $\text{sign } \pi = -1$ für eine gerade bzw. ungerade Permutation π . Sind beispielsweise ω und θ 1-Formen, dann ist

$$(\omega \wedge \theta)(a, b) = \omega(a)\theta(b) - \omega(b)\theta(a) \quad \text{für alle } a, b \in TM_x,$$

d. h. $\omega \wedge \theta = \omega \otimes \theta - \theta \otimes \omega$.

⁷In natürlicher Weise entsteht $\pi[\omega(a_1, \dots, a_p) \theta(a_{p+1}, \dots, a_{p+q})]$ aus $\omega(a_1, \dots, a_p) \theta(a_{p+1}, \dots, a_{p+q})$, indem man die Argumente der Permutation π unterwirft.

Für diese alternierende Multiplikation gelten das Assoziativgesetz

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \tau = \omega \wedge (\theta \wedge \tau)$$

und die beiden Distributivgesetze

$$\omega \wedge (\theta + \varrho) = \omega \wedge \theta + \omega \wedge \varrho, \quad (\omega + \theta) \wedge \varrho = \omega \wedge \varrho + \theta \wedge \varrho.$$

Ferner ist

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{pq} \theta \wedge \omega,$$

falls ω eine p -Form und θ eine q -Form bezeichnet.

Komponenten: (U, φ) sei eine Karte für den Punkt $x \in M$. Ist dx^1, \dots, dx^n die natürliche Basis von TM_x^* bezüglich (U, φ) , dann gilt für jede p -Form ω im Punkt x die eindeutige Darstellung

$$\omega = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

wobei die Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_p}$ schiefsymmetrisch bezüglich aller Indizes sind und sich bei Kartenwechsel wie ein p -fach *kovarianter Tensor* transformieren.

Diese Darstellung von ω stimmt mit der formalen Definition überein, die wir in 10.2 gegeben haben. Man beachte, dass bei der jetzigen Definition die p -Form ω nicht formal eingeführt wird, sondern ein wohlbestimmtes mathematisches Objekt ist und die alternierende Multiplikation „ \wedge “ ebenfalls eine wohlbestimmte mathematische Operation darstellt.

Die folgenden invarianten Definitionen auf Mannigfaltigkeiten sind so gewählt, dass sie in lokalen Koordinaten mit den Operationen aus 10.2 übereinstimmen.

p -Formenfelder: Ein p -Formenfeld der Glattheit C^k auf der Mannigfaltigkeit M oder kurz eine p - C^k -Form auf M ist eine Abbildung

$$\omega = \omega(x),$$

die jedem Punkt $x \in M$ eine p -Form $\omega(x)$ zuordnet, wobei die Komponenten $a_{i_1 \dots i_p}$ von ω ein schiefsymmetrisches, p -fach kovariantes C^k -Tensorfeld auf M bilden. Anstelle von $\omega(x)$ schreiben wir auch ω_x .

Speziell unter einer 0-Form ω auf M verstehen wir eine reelle Funktion auf M . Ist f eine 0-Form auf M und ist ω eine p -Form auf M , dann setzen wir

$$f \wedge \omega = f\omega.$$

Alternierende Differentiation: Es sei $p = 0, 1, \dots$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Operation „ d “, die jede p - C^k -Form ω auf M ($k \geq 2$) in eine $(p+1)$ - C^{k-1} -Form $d\omega$ auf M überführt und die die folgenden natürlichen Eigenschaften (i)-(iv) besitzt:

(i) *Tangentialabbildung*. Ist f eine 0-Form, dann gilt $df = Tf$, d.h., es ist $df_x = T_x f$ für alle $x \in M$.⁸

(ii) *Linearität*. Sind ω und θ p -Formen, dann gilt $d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta$.

(iii) *Produktregel*. Ist ω eine p -Form und θ eine q -Form, dann gilt

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta.$$

(iv) *Identität von Poincaré*. $d(d\omega) = 0$.

⁸In anderen Worten, $df_x(\mathbf{v})$ ist die Richtungsableitung der reellwertigen Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt x in Richtung des Tangentialvektors \mathbf{v} . Das heißt

$$df_x(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(f)$$

(vgl. (15.21)).

In lokalen Koordinaten besitzt $d\omega$ folgendes Aussehen. Wählen wir für den Punkt $x \in M$ eine Karte (U, φ) , dann erhalten wir für eine p -Form ω auf M im Punkt x mit $p \geq 1$ die Darstellung

$$\omega_x = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

und es gilt

$$d\omega_x = \frac{1}{p!} da_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

mit dem Differential

$$da_{i_1 \dots i_p} = \partial_j a_{i_1 \dots i_p} (x_\varphi) dx^j,$$

wobei wir $\partial_j = \partial/\partial x^j$ setzen und $x_\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ das Kartenbild des Punktes x darstellt.

Im Fall $p = 0$ ist ω eine reelle Funktion auf M . Dann gilt

$$d\omega_x = \partial_j a(x_\varphi) dx^j$$

mit $a(x_\varphi) = \omega_x$.

Im Sinne von 15.1.5 bilden die Komponenten $a_{i_1 \dots i_p}$ von ω ein p -Cartanfeld auf M , und die Komponenten von $d\omega$ entsprechen der alternierenden Ableitung dieses Cartanfeldes, d.h.

$$d\omega_x = \frac{1}{p!} d_i a_{i_1 \dots i_p} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Wegen der Schiefsymmetrie des \wedge -Produkts ist das gleichbedeutend mit

$$d\omega_x = \frac{1}{p!} \partial_i a_{i_1 \dots i_p} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Transformation von Differentialformen (pull-back): Es sei

$$f : M \rightarrow N$$

eine glatte Abbildung zwischen den beiden endlichdimensionalen reellen Mannigfaltigkeiten M und N mit $m = \dim M$ und $n = \dim N$. Jeder p -Form ω auf N mit $p \geq 1$ wird eine p -Form $f^*\omega$ auf M zugeordnet, wobei definitionsgemäß⁹ gilt:

$$(f^*\omega)_x(a_1, \dots, a_p) = \omega_y(b_1, \dots, b_p) \quad \text{für alle } a_1, \dots, a_p \in TM_x \quad (15.27)$$

mit $b_j = (T_x f)a_j$ und $y = f(x)$, d.h., $f^*\omega$ entsteht aus ω in natürlicher Weise mit Hilfe der Tangentialabbildung $T_x f : TM_x \rightarrow TN_y$.

In lokalen Koordinaten bedeutet diese Operation, dass man in klassischer Weise von y^1, \dots, y^n zu x^1, \dots, x^m übergeht, d.h., aus

$$\omega_y = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}$$

erhält man $dy^i = \partial_j y^i dx^j$, und daraus ergibt sich

$$f^*\omega_x = \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} \partial_{j_1} y^{i_1} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \partial_{j_p} y^{i_p} dx^{j_p},$$

wobei wir über $i_1 \dots i_p$ von 1 bis n und über $j_1 \dots j_p$ von 1 bis m summieren. Ferner setzen wir $\partial_j := \partial/\partial x^j$.

⁹Für ein 0-Form ω , d.h., eine Funktion $\omega : M \rightarrow \mathbb{R}$, setzen wir $(f^*\omega)_x = \omega_y$ mit $y = f(x)$.

► **BEISPIEL:** Ist $\omega = dy^1 \wedge dy^2$ und gilt $n = m = 2$, dann folgt

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (\partial_1 y^1 dx^1 + \partial_2 y^1 dx^2) \wedge (\partial_1 y^2 dx^1 + \partial_2 y^2 dx^2) \\ &= (\partial_1 y^1 \partial_2 y^2 - \partial_2 y^1 \partial_1 y^2) dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Man beachte $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ und somit speziell $dx^i \wedge dx^i = 0$.

Es gelten folgende Rechenregeln für Formen ω und θ vom Grad ≥ 0 :

$$\begin{aligned} f^*(\omega + \theta) &= f^*\omega + f^*\theta, \quad f^*(d\omega) = d(f^*\omega), \\ f^*(\alpha\omega) &= f^*\alpha f^*\omega \quad (\alpha \text{ ist eine } 0\text{-Form}), \\ f^*(\omega \wedge \theta) &= f^*\omega \wedge f^*\theta, \\ (f \circ g)^*\omega &= g^*(f^*\omega). \end{aligned}$$

Integration von Differentialformen: Das Integral $\int_M \theta$ über eine stetige n -Form θ auf der n -dimensionalen reellen kompakten¹⁰ und orientierten Mannigfaltigkeit M wird folgendermaßen erklärt:

(i) Da M kompakt ist, gibt es endlich viele Karten (U_j, φ_j) , $j = 1, \dots, J$, so dass M von den offenen Kartenmengen U_1, \dots, U_J überdeckt wird. Diese Karten müssen aus dem zugehörigen orientierten Atlas sein.

(ii) Wir wählen eine entsprechende Zerlegung der Einheit $\{f_j\}$, d. h., es gilt

$$\sum_{j=1}^J f_j(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in M,$$

wobei jede der Funktionen $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, außerhalb einer kompakten Teilmenge von U_j gleich null ist und die Ungleichung $0 \leq f_j(x) \leq 1$ für alle $x \in M$ erfüllt.

(iii) In natürlicher Weise definieren wir nun das Integral $\int_M \theta$ durch

$$\int_M \theta := \sum_{j=1}^J \int_{U_j} f_j \theta,$$

wobei die lokalisierten Bestandteile in den entsprechenden Karten berechnet werden. Explizit bedeutet das¹¹

$$f_j \theta = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

und

$$\int_{U_j} f_j \theta = \int_{\varphi(U_j)} a(\varphi) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Das rechts stehende Integral ist dabei im klassischen Sinne zu verstehen.

Diese Definition von $\int_M \theta$ ist unabhängig von der gewählten Überdeckung $\{U_j\}$ und der zugehörigen Zerlegung der Einheit $\{f_j\}$.

¹⁰ Ist die Mannigfaltigkeit M nicht kompakt, dann kann man das Integral $\int_M \theta$ in gleicher Weise erklären, falls θ außerhalb einer kompakten Teilmenge von M gleich null ist.

¹¹ $f_j \theta$ bedeutet das Produkt von f_j mit θ .

Satz von Stokes: M sei eine n -dimensionale reelle orientierte kompakte Mannigfaltigkeit mit dem kohärent orientierten Rand ∂M , und ω sei eine $(n-1)$ -Form der Glattheit C^1 auf M mit $n \geq 1$. Dann gilt

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Wichtige Spezialfälle dieses fundamentalen Theorems findet¹² man in 10.2.7. Der Satz von Stokes gehört zu den wichtigsten mathematischen Sätzen, die eine *Brücke* von der Mathematik zur Physik schlagen.

Der Satz von Poincaré: Es sei α eine p -Form ($1 \leq p \leq n$) der Glattheit C^1 auf der n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M mit

$$d\alpha = 0.$$

Dann ist α lokal exakt, d. h., zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es eine offene Menge O mit $x \in O$ und eine Differentialform ω auf O , so dass gilt:

$$d\omega = \alpha \quad \text{auf } O.$$

Orientierbarkeit: Die n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M ($n \geq 1$) ist orientierbar, falls auf M eine stetige n -Form ω existiert, die in keinem Punkt von M identisch verschwindet, d. h., zu jedem $x \in M$ existiert ein Tangentenvektor $a \in TM_x$ mit $\omega(a) \neq 0$.

Abbildungsgrad: Anwendungen der pull-back Operation $f^*\omega$ auf den Abbildungsgrad findet man in 18.3.1.

15.4.4 Transformation von Tensorfeldern mittels Diffeomorphismen

Es sei

$$f : M \rightarrow N$$

ein *Diffeomorphismus* zwischen den beiden n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeiten M und N . Bezeichnen

$$B : N \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad A : M \rightarrow \mathbb{R}$$

gegebene *Funktionen*, dann definieren wir zwei neue Funktionen

$$f^*B : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f_*A : N \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$(f^*B)_x = B_{y(x)} \quad \text{und} \quad (f_*A)_y = A_{x(y)} \quad \text{mit } y = f(x).$$

In natürlicher Weise heißt f^*B die *Rückwärtstransformation* von B (pull-back) induziert durch f , und f_*A heißt die *Vorwärtstransformation* von A (push-forward) induziert durch f . Allgemeiner induziert f in natürlicher Weise eine Abbildung f^* , die jedem C^k -Tensorfeld B auf N vom Typ (p, q) ein C^k -Tensorfeld f^*B auf M vom gleichen Typ zuordnet. Ist $y = f(x)$, dann gilt explizit

$$(f^*B)_x(f^*b_1, \dots, f^*b_{p+q}) = B_y(b_1, \dots, b_{p+q}) \tag{15.28}$$

¹²Das Integral $\int_{\partial M} \omega$ ist in natürlicher Weise so zu verstehen, dass ω die Einschränkung auf den Rand ∂M bezeichnet. Wie die in 10.2.7 angegebenen Beispiele zeigen, ist der Kalkül so perfekt, dass er „von selbst“ arbeitet.

für alle $b_1, \dots, b_p \in TN_y$, $b_{p+1}, \dots, b_{p+q} \in TN_y^*$. Dabei wird durch

$$f^*b_i = (T_x f)^{-1}b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

jedem Tangentialvektor $b_i \in TN_y$ im Bildpunkt $y = f(x)$ mit Hilfe der Invertierung der Tangentialabbildung $T_x f : TM_x \rightarrow TN_y$ ein Tangentenvektor $f^*b_i \in TM_x^*$ im Urbildpunkt x zugeordnet.

Ferner wird durch

$$(f^*b_j)(b) = b_j((T_x f)b), \quad j = p+1, \dots, p+q, \quad b \in TM_x,$$

jedem Kotangentenvektor $b_j \in TN_y^*$ im Bildpunkt y ein Kotangentenvektor $f^*b_j \in TM_x$ im Urbildpunkt x zugeordnet.

Die Definition von f^*B in (15.28) ist äquivalent zur Formel

$$(f^*B)_x(a_1, \dots, a_{p+q}) = B_y(f_*a_1, \dots, f_*a_{p+q})$$

für alle $a_1, \dots, a_p \in TM_x$, $a_{p+1}, \dots, a_{p+q} \in TM_x^*$. Dabei setzen wir

$$f_*a_i = (T_x f)a_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

und

$$(f_*a_j)(a) = a_j((T_x f)^{-1}a), \quad j = p+1, \dots, p+q, \quad a \in TN_y.$$

Wir bezeichnen f^*B als die durch den Diffeomorphismus $f : M \rightarrow N$ induzierte *Rückwärtstransformation* (pull-back) des Tensorfeldes B auf der Mannigfaltigkeit N . Für diese Operation gilt

$$f^*(B + C) = f^*B + f^*C, \quad f^*(B \otimes D) = f^*B \otimes f^*D.$$

Im Spezialfall von p -Formen ergibt sich die Formel (15.27).

Die durch

$$f_*A = (f^{-1})^*A$$

definierte Operation heißt die durch den Diffeomorphismus $f : M \rightarrow N$ induzierte *Vorwärtstransformation* (push-forward) des Tensorfeldes A auf der Mannigfaltigkeit M .

Ist A genauer ein C^k -Tensorfeld auf M vom Typ (p, q) , dann stellt f_*A ein C^k -Tensorfeld auf N dar vom gleichen Typ wie A . Es gilt

$$f_*(A + D) = f_*A + f_*D, \quad f_*(A \otimes F) = f_*A \otimes f_*F.$$

Bezeichnet $f \circ g$ die Hintereinanderausführung der beiden Diffeomorphismen f und g und steht A für eine Funktion, ein Vektorfeld oder allgemeiner ein Tensorfeld, dann gilt

$$(f \circ g)_*A = f_*(g_*A) \quad \text{und} \quad (f \circ g)^*A = g^*(f^*A).$$

Komponenten: Es seien (U, φ) eine Karte für den Punkt $x \in M$ mit den lokalen Koordinaten $x_\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ und (V, ψ) eine Karte für den Punkt $y \in N$ mit den lokalen Koordinaten $y_\psi = (y^1, \dots, y^n)$. Die zu

$$f : M \rightarrow N$$

mit $y = f(x)$ gehörige Transformation der lokalen Koordinaten bezeichnen wir durch

$$y^j = y^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = 1, \dots, n,$$

mit der Umkehrfunktion $x^j = x^j(y^1, \dots, y^n)$, $j = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$f^* \mathbf{e}'_j = \frac{\partial x^k(y_\psi)}{\partial y^j} \mathbf{e}_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

und

$$f^* dy^j = \frac{\partial y^j(x_\varphi)}{\partial x^k} dx^k, \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei wir über k von 1 bis n summieren. Dabei stellt $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ bzw. $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ die natürliche Basis im Tangentialraum TM_x bzw. TN_y dar bezüglich der Karte (U, φ) bzw. (V, ψ) . Ferner bezeichnet $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ bzw. $\{dy^1, \dots, dy^n\}$ die entsprechende natürliche Basis in TM_x^* bzw. TN_y^* .

Im Falle eines allgemeinen Tensorfeldes erhalten wir in natürlicher Weise

$$\begin{aligned} f^* (B_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_p} \otimes \mathbf{e}'_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}'_{j_q}) \\ = B_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} f^*(dy^{i_1}) \otimes \dots \otimes f^*(dy^{i_p}) \otimes f^*(\mathbf{e}'_{j_1}) \otimes \dots \otimes f^*(\mathbf{e}'_{j_q}). \end{aligned}$$

15.4.5 Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten

Unter einem *Fluss* oder einem dynamischen System (im engeren Sinne) auf der reellen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Familie $\{F_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ von glatten Abbildungen

$$F_t : M \rightarrow M,$$

so dass folgendes gilt:

- (i) $F_0 = I$ (identische Abbildung),
- (ii) $F_{t+s} = F_t F_s$ für alle reellen Zahlen t und s .

Aus diesen Eigenschaften ergibt sich, dass jede Abbildung F_t einen Diffeomorphismus von M auf M darstellt mit der inversen Abbildung $(F_t)^{-1} = F_{-t}$. Deshalb bezeichnet man einen Fluss auch als einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen. Alle Kurven $x = x(t)$ auf M mit

$$x(t) = F_t x_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

und $x_0 \in M$ heißen die *Trajektorien* des Flusses.

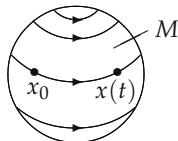


Abb. 15.16

Anschaulich beschreibt ein Fluss auf M eine *Flüssigkeitsströmung* auf der Mannigfaltigkeit M . Befindet sich ein Flüssigkeitsteilchen zur Zeit $t = 0$ im Punkt x_0 , dann findet man es zur Zeit t im Punkt $x(t)$ (Abb. 15.16). Der Tangentenvektor $v = \dot{x}(t)$ stellt den *Geschwindigkeitsvektor* des Teilchens zur Zeit t dar.

Konstruktion eines Flusses aus einem Geschwindigkeitsfeld: Es sei $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$ ein glattes Vektorfeld auf der n -dimensionalen reellen kompakten Mannigfaltigkeit M . Dann besitzt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{v}(x(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{15.29}$$

für jeden vorgegebenen Punkt $x_0 \in M$ genau eine Lösung $x = x(t)$. Setzen wir

$$(F_t)x_0 = x(t),\tag{15.30}$$

dann erhalten wir einen Fluss $\{F_t\}$ auf M .

15.4.6 Lieableitung von Tensorfeldern

Die Lieableitung verallgemeinert die klassische Richtungsableitung für Funktionen und Tensorfelder. Mit Hilfe der Lieableitung kann man bequem beschreiben, dass ein Tensorfeld unter einem Fluss invariant ist.

Dies verallgemeinert die Konstanz von Tensorfeldern im \mathbb{R}^3 entlang von Geraden.

Sei ein C^1 -Vektorfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$ auf der n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M gegeben. Dann besitzt die Differentialgleichung (15.29), zumindest für alle t in der Umgebung J von $t = 0$, eine eindeutige Lösung $x = x(t)$, und für diese Zeitpunkte t konstruieren¹³ wir F_t durch (15.30).

Funktionen: Es sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Wir definieren die Lieableitung $\mathbb{L}_{\mathbf{v}} f$ von f in Richtung des Vektorfeldes \mathbf{v} durch

$$\mathbb{L}_{\mathbf{v}} f = df(\mathbf{v}).$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$(\mathbb{L}_{\mathbf{v}} f)_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x(t)) - f(x_0)}{t}$$

für jeden Punkt $x_0 \in M$, wobei $x_0 = x(0)$ gilt.

In lokalen Koordinaten erhalten wir $\mathbf{v}_x = v^j \mathbf{e}_j$ und

$$(\mathbb{L}_{\mathbf{v}} f)_x = v^j \partial_j f(x^1, \dots, x^n) \quad \text{mit } \partial_j = \partial / \partial x^j.$$

Vektorfelder: Es sei \mathbf{w} ein C^1 -Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit M . Wir definieren die Lieableitung $(\mathbb{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{w})_{x_0}$ von \mathbf{w} im Punkt x_0 in Richtung von \mathbf{v} durch¹⁴

$$(\mathbb{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{w})_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t^* \mathbf{w})_{x_0} - \mathbf{w}_{x_0}}{t}.\tag{15.31}$$

Wegen $F_0^* \mathbf{w} = \mathbf{w}$ kann man dafür auch kurz schreiben:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{w} = \left. \frac{d F_t^* \mathbf{w}}{dt} \right|_{t=0}.$$

Anschaulich bedeutet (15.31), dass wir das Vektorfeld \mathbf{w} im Ausgangspunkt x_0 und im Trajektorienpunkt $x(t)$ betrachten. Die Differenz $\mathbf{w}_{x(t)} - \mathbf{w}_{x_0}$ kann jedoch *nicht* benutzt werden,

¹³Dann ist F_t auf einer Umgebung von x_0 erklärt, und wir bezeichnen die Familie $\{F_t\}_{t \in J}$ als einen *lokalen Fluss*.

¹⁴Benutzt man die Tangentialabbildung, dann ist explizit

$$(F_t^* \mathbf{w})_{x_0} = (T_{x_0} F_t)^{-1} \mathbf{w}_{x(t)} \quad \text{mit } x_0 = x(0).$$

weil $\mathbf{w}_{x(t)}$ und \mathbf{w}_{x_0} in verschiedenen Tangentialräumen zu den Punkten $x(t)$ und x_0 liegen. Deshalb transportieren wir den Tangentialvektor $\mathbf{w}_{x(t)}$ mit Hilfe des von \mathbf{v} erzeugten Flusses F_t in den Tangentialraum zum Punkt x_0 , d. h., wir ersetzen $\mathbf{w}_{x(t)}$ durch $(F_t^* \mathbf{w})_{x_0}$ und bilden damit den Differenzenquotienten in (15.31). In lokalen Koordinaten erhalten wir $\mathbf{v}_x = v^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{w}_x = w^j \mathbf{e}_j$ und

$$(\mathbb{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{w})_x = (L_v w^j) \mathbf{e}_j,$$

wobei wir $L_v w^j$ in 15.1.5 definiert haben, d. h.

$$L_v w^j = v^i \partial_i w^j - w^i \partial_i v^j.$$

Liekammern: Sind \mathbf{v} und \mathbf{w} C^1 -Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit M , dann setzen wir

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] := \mathbb{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{w}.$$

Sind α und β reelle Zahlen, dann gilt

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}], \quad [\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \mathbf{z}] = \alpha [\mathbf{v}, \mathbf{z}] + \beta [\mathbf{w}, \mathbf{z}],$$

und wir haben die sogenannte *Jacobi-Identität*

$$[\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{z}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] = 0,$$

d. h., die C^1 -Vektorfelder auf M bilden eine *Liealgebra* bezüglich der Liekammer $[\cdot, \cdot]$.

Die Liekammern sind invariant unter jedem Diffeomorphismus $f : M \rightarrow N$, d. h.

$$f_* [\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [f_* \mathbf{v}, f_* \mathbf{w}].$$

Schreibt man die beiden Vektorfelder \mathbf{v} und \mathbf{w} in der formalen Form

$$\mathbf{v} = v^i \partial_i, \quad \mathbf{w} = w^j \partial_j, \quad \partial_j = \partial / \partial x^j,$$

als lineare Differentialoperatoren, dann erhalten wir wegen $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ sofort

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{v}).$$

Explizit gilt

$$\mathbf{v}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{v}) = v^i \partial_i (w^j \partial_j) - w^j \partial_j (v^i \partial_i) = (v^i \partial_i w^j - w^i \partial_i v^j) \partial_j.$$

Benutzt man die Schreibweise $\mathbf{v}(f) = v^i \partial_i f$, wobei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion auf der Mannigfaltigkeit M darstellt, dann ist

$$\mathbf{v}(f) = df(\mathbf{v}) = \mathbb{L}_{\mathbf{v}}(f)$$

und

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)).$$

Allgemeine Tensorfelder: Ist A ein C^1 -Tensorfeld vom Typ (p, q) auf der Mannigfaltigkeit M , dann definieren wir die Lieableitung $\mathbb{L}_{\mathbf{v}} A$ von A in Richtung des Vektorfeldes \mathbf{v} durch¹⁵

$$\mathbb{L}_{\mathbf{v}} A = \frac{d F_t^* A}{dt} \Big|_{t=0}.$$

¹⁵Diese Beziehung ist in dem Sinne zu verstehen, dass sie in jedem Punkt $x \in M$ für alle Argumente gilt, d. h., es ist

$$(\mathbb{L}_{\mathbf{v}} A)_x(a_1, \dots, a_{p+q}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t^* A)_x(a_1, \dots, a_{p+q}) - A_x(a_1, \dots, a_{p+q})}{t}$$

für alle $a_1, \dots, a_p \in TM_x$ und $a_{p+1}, \dots, a_{p+q} \in TM_x^*$.

Die Lieableitung ist linear, d. h.

$$\mathbb{L}_v(A + B) = \mathbb{L}_v A + \mathbb{L}_v B,$$

und es gelten die Produktregeln

$$\mathbb{L}_v(A \otimes C) = \mathbb{L}_v A \otimes C + A \otimes \mathbb{L}_v C,$$

$$\mathbb{L}_v(fA) = (\mathbb{L}_v f)A + f\mathbb{L}_v A,$$

wobei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle C^1 -Funktion bezeichnet.

Die Lieableitung kann man ferner mit jeder Kontraktion \mathbb{K} eines Tensorfeldes A vertauschen, d. h.

$$\mathbb{L}_v(\mathbb{K}A) = \mathbb{K}\mathbb{L}_v A.$$

Für alle reellen Zahlen t gilt

$$\frac{d}{dt} F_t^* A = F_t^* \mathbb{L}_v A.$$

Diese Beziehung ist auch für Funktionen $A = f$ gültig. Schließlich hat man

$$\mathbb{L}_v \mathbb{L}_w A - \mathbb{L}_w \mathbb{L}_v A = \mathbb{L}_{[v,w]} A,$$

falls A ein C^2 -Tensorfeld (oder eine C^2 -Funktion) auf M ist und v, w C^2 -Vektorfelder auf M darstellen.

In lokalen Koordinaten erhalten wir

$$A_x = A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}$$

und

$$(\mathbb{L}_v A)_x = (L_v A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}, \quad (15.32)$$

wobei $L_v A$ in 15.1.5 definiert worden ist.

► **BEISPIEL:** Für die natürlichen Basen erhalten wir

$$\mathbb{L}_v e_i = -\partial_i v^j e_j, \quad \mathbb{L}_v(dx^i) = \partial_i v^j dx^j.$$

Diese Formeln kann man benutzen, um zusammen mit der Produktregel die Beziehung (15.32) zu erhalten. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_v(a_i dx^i) &= (\mathbb{L}_v a_i)(dx^i) + a_i \mathbb{L}_v dx^i \\ &= v^j \partial_j a_i dx^i + a_i \partial_j v^j dx^j = (L_v a_i) dx^i \end{aligned}$$

mit $L_v a_i = v^j \partial_j a_i + a_i \partial_j v^j$.

Invariante Tensorfelder: Es seien $\{F_t\}$ ein Fluss auf der Mannigfaltigkeit M und v das zugehörige Vektorfeld, d. h., $v(x_0) = \dot{x}(0)$ ist der Geschwindigkeitsvektor der Trajektorie $x(t) = F_t x_0$ durch den Punkt x_0 zur Zeit $t = 0$. Ferner sei A ein C^1 -Tensorfeld auf M (oder eine C^1 -Funktion auf M). Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathbb{L}_v A = 0$ auf M .

(ii) Das Tensorfeld A ist invariant unter dem Fluss $\{F_t\}$, d. h., es gilt

$$F_t^* A = A.$$

Man sagt auch, dass A konstant ist längs des Flusses $\{F_t\}$.

► **BEISPIEL:** In dem Spezialfall, dass $A : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist, bedeutet die Invarianz unter dem Fluss $\{F_t\}$, dass A längs der Trajektorien von $\{F_t\}$ konstant ist.

Differentialformen: Seien ω eine p -Form der Glattheit C^1 auf der Mannigfaltigkeit M und \mathbf{v} ein C^1 -Vektorfeld auf M . Definieren wir das *innere Produkt* $i_{\mathbf{v}}\omega$ zwischen \mathbf{v} und ω durch¹⁶

$$(i_{\mathbf{v}}\omega)_x(a_2, \dots, a_p) = \omega_x(\mathbf{v}, a_2, \dots, a_p)$$

für alle $a_2, \dots, a_p \in TM_x$, dann ist $i_{\mathbf{v}}\omega$ eine $(p-1)$ -Form auf M , und es gilt die sogenannte *magische Formel von Cartan*

$$\mathbb{L}_{\mathbf{v}}\omega = i_{\mathbf{v}}d\omega + d(i_{\mathbf{v}}\omega).$$

Für eine 1-Form ω der Glattheit C^1 auf M und C^1 -Vektorfelder \mathbf{v}, \mathbf{w} auf M gilt ferner die wichtige Formel

$$d\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbb{L}_{\mathbf{v}}\omega(\mathbf{w}) - \mathbb{L}_{\mathbf{w}}\omega(\mathbf{v}) - \omega([\mathbf{v}, \mathbf{w}]).$$

Ist allgemein ω eine p -Form der Glattheit C^1 auf M ($p \geq 1$) und sind $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_p$ C^1 -Vektorfelder auf M , dann hat man

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \mathbb{L}_{\mathbf{v}_i}\omega(\mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_p) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j], \mathbf{v}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_i, \dots, \hat{\mathbf{v}}_j, \dots, \mathbf{v}_p). \end{aligned}$$

Die Argumente mit dem Dach werden dabei weggelassen.

Somit kann die Ableitung $d\omega$ einer Differentialform ω allein mit Hilfe der Lieableitung beschrieben werden. Das unterstreicht die fundamentale Bedeutung der Lieableitung für die Analysis auf Mannigfaltigkeiten.

Ferner gelten die folgenden Rechenregeln, wobei wir voraussetzen, dass ω eine p -Form und θ eine q -Form der Glattheit C^1 auf M ist ($p, q \geq 1$), \mathbf{v} und \mathbf{w} C^1 -Vektorfelder auf M sind sowie $f : N \rightarrow M$ einen Diffeomorphismus darstellt:

- (a) $i_{\mathbf{v}}i_{\mathbf{v}}\omega = 0$ und $i_{\mathbf{v}}(\omega \wedge \theta) = (i_{\mathbf{v}}\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge i_{\mathbf{v}}\theta$.
- (b) $f^*i_{\mathbf{v}}\omega = i_{f_*\mathbf{v}}f^*\omega$.
- (c) $\mathbb{L}_{\mathbf{v}}(\omega \wedge \theta) = (\mathbb{L}_{\mathbf{v}}\omega) \wedge \theta + \omega \wedge \mathbb{L}_{\mathbf{v}}\theta$.
- (d) $f^*\mathbb{L}_{\mathbf{v}}\omega = \mathbb{L}_{f_*\mathbf{v}}f^*\omega$.
- (e) $\mathbb{L}_{f_*\mathbf{v}}\omega = f^*\mathbb{L}_{\mathbf{v}}\omega + df \wedge i_{\mathbf{v}}\omega$.
- (f) $\mathbb{L}_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}\omega = \mathbb{L}_{\mathbf{v}}\mathbb{L}_{\mathbf{w}}\omega - \mathbb{L}_{\mathbf{w}}\mathbb{L}_{\mathbf{v}}\omega$.
- (g) $\mathbb{L}_{\mathbf{v}}d\omega = d\mathbb{L}_{\mathbf{v}}\omega$ und $\mathbb{L}_{\mathbf{v}}i_{\mathbf{v}}\omega = i_{\mathbf{v}}\mathbb{L}_{\mathbf{v}}\omega$.
- (h) $i_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}\omega = \mathbb{L}_{\mathbf{v}}i_{\mathbf{w}}\omega - i_{\mathbf{w}}\mathbb{L}_{\mathbf{v}}\omega$.

15.4.7 Der Satz von Frobenius

Die beiden folgenden Versionen des Satzes von Frobenius werden in der Differentialgeometrie häufig benutzt, um Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.

Geometrische Formulierung: Wir betrachten die Aufgabe, eine Untermannigfaltigkeit durch Vorgabe ihrer Tangentialräume zu konstruieren. Die Tangentialräume dürfen dabei erwartungsgemäß nicht willkürlich vorgegeben werden, sondern sie müssen die sogenannte Integrabilitätsbedingung erfüllen.

¹⁶Für eine 0-Form ω setzen wir $i_{\mathbf{v}}\omega = 0$.

Es sei M eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit, und es sei $1 \leq r < n$. Wir nehmen an, dass jedem Punkt $x \in M$ ein r -dimensionaler linearer Unterraum L_x des Tangentialraumes TM_x von M im Punkt x zugeordnet ist.

Unter einer Integraluntermannigfaltigkeit (kurz *Integralmannigfaltigkeit*) I von $\{L_x\}$ verstehen wir eine r -dimensionale Untermannigfaltigkeit I von M , so dass gilt:

$$TI_x = L_x \quad \text{für alle } x \in I, \quad (15.33)$$

d. h., der Tangentialraum TI_x der Integralmannigfaltigkeit I im Punkt x stimmt mit dem vorgegebenen linearen Raum L_x überein.

Das System $\{L_x\}$ heißt *vollständig integrabel* genau dann, wenn durch jeden Punkt $x \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit I geht und I lokal eindeutig¹⁷ ist.

Wir nehmen an, dass das System $\{L_x\}$ glatt von x abhängt, d. h., zu jedem Punkt $x_0 \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U(x_0)$ auf M und n glatte Vektorfelder $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ auf $U(x_0)$, so dass $\mathbf{v}_1(x), \dots, \mathbf{v}_n(x)$ eine Basis von L_x für jeden Punkt $x \in U(x_0)$ darstellt.

Satz 1: Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(i) Das System $\{L_x\}$ ist vollständig integrabel.

(ii) Das System $\{L_x\}$ erfüllt die *Integrabilitätsbedingung*, d. h., sind \mathbf{v} und \mathbf{w} zwei glatte Vektorfelder auf einer offenen Menge O von M mit

$$\mathbf{v}_x, \mathbf{w}_x \in L_x \quad \text{für alle } x \in O,$$

dann gilt auch

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]_x \in L_x \quad \text{für alle } x \in O,$$

wobei $[., .]$ die Lieklammer bezeichnet.

Sind speziell alle Räume L_x eindimensional, dann ist die Integrabilitätsbedingung (ii) stets erfüllt. Die Integralmannigfaltigkeiten sind dann Kurven, wobei L_x den Tangentialraum an die Kurve im Punkt x darstellt, der durch den Tangentenvektor in x aufgespannt wird.

Duale analytische Formulierung für Systeme von 1-Formen: Wir betrachten das folgende sogenannte *Pfaffsche System*:

$$\omega^j = 0 \quad \text{auf } I, \quad j = 1, \dots, n-r. \quad (15.34)$$

Es seien die glatten, linear unabhängigen 1-Formen $\omega^1, \dots, \omega^{n-r}$ auf der n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M mit $1 \leq r < n$ gegeben. Gesucht wird eine Integralmannigfaltigkeit I von (15.34). Definitionsgemäß ist das eine Untermannigfaltigkeit I von M , die (15.34) erfüllt, d. h., es gilt

$$\omega_x^j(a) = 0 \quad \text{für alle } a \in TI_x \text{ und alle Punkte } x \in I, \quad j = 1, \dots, n-r.$$

Das System (15.34) heißt *vollständig integrabel* genau dann, wenn durch jeden Punkt $x \in M$ eine r -dimensionale Integralmannigfaltigkeit I geht, die lokal eindeutig ist.

Bezeichnet L_x die Menge aller $a \in TM_x$ mit $\omega_x^j(a) = 0$, $j = 1, \dots, n-r$, dann ist das Problem (15.34) gleichbedeutend mit (15.33).

Satz 2: Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

(i) Das Pfaffsche System (15.34) ist vollständig integrabel.

¹⁷Das bedeutet, dass es zu zwei Integralmannigfaltigkeiten I_1 und I_2 durch den Punkt x eine offene Umgebung von x auf M gibt, so dass I_1 und I_2 auf U übereinstimmen.

(ii) Auf der Mannigfaltigkeit M ist die *Integrabilitätsbedingung*

$$d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-r} = 0, \quad j = 1, \dots, n-r,$$

erfüllt.

(iii) Zu jedem Punkt $x_0 \in M$ gibt es eine Karte (V, ψ) der Ausgangsmannigfaltigkeit M , so dass in den zugehörigen lokalen Koordinaten $x_\psi = (y^1, \dots, y^n)$ gilt:

$$\omega^j = \sum_{k=r+1}^n a_k^j dy^k \quad \text{auf } V, \quad j = 1, \dots, n-r.$$

Die eindeutig bestimmte r -dimensionale Integralmannigfaltigkeit I auf $M \cap V$ durch den Punkt x_0 ist dann gegeben durch die lokale Koordinatengleichung

$$y^1 \text{ ist beliebig}, \quad \dots, \quad y^r \text{ ist beliebig}, \quad y^{r+1} = \dots = y^n = 0.$$

Äquivalentes System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung: Es sei (U, φ) eine Karte der Ausgangsmannigfaltigkeit M zum Punkt x_0 mit den lokalen Koordinaten $x_\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Stellen wir die r -dimensionale Integralmannigfaltigkeit I von (15.34) durch den Punkt x_0 in der Form

$$x^j = x^j(u^1, \dots, u^r), \quad j = 1, \dots, n,$$

dar, dann bilden die Vektoren

$$\mathbf{b}_k = \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \mathbf{e}_i, \quad k = 1, \dots, r,$$

eine Basis des Tangentialraumes TI_{x_0} , wobei $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die natürliche Basis von TM_{x_0} bezüglich der Karte (U, φ) darstellt. Es sei

$$\omega^j = \omega_s^j dx^s.$$

Dann ist das Pfaffsche System (15.34) äquivalent zu

$$\omega_s^j(x^1, \dots, x^n) dx^s(\mathbf{b}_k) = 0, \quad j = 1, \dots, n-r \text{ und } k = 1, \dots, r.$$

Wegen $dx^s(\mathbf{e}_k) = \delta_k^s$ ist somit das Pfaffsche System (15.34) lokal äquivalent zu dem System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\omega_s^j \frac{\partial x^s}{\partial u^k} = 0, \quad j = 1, \dots, n-r, \quad k = 1, \dots, r. \quad (15.35)$$

Formaler Kalkül: Häufig benutzt man das folgende bequeme formale Argument, um (15.35) zu erhalten. Wir schreiben das Pfaffsche Ausgangssystem (15.34) formal in der Form

$$\omega_s^j dx^s = 0. \quad (15.36)$$

Aus dem Ansatz $x^s = x^s(u^1, \dots, u^r)$ erhalten wir $dx^s = \frac{\partial x^s}{\partial u^k} du^k$ und somit

$$\omega_s^j \frac{\partial x^s}{\partial u^k} du^k = 0. \quad (15.37)$$

Fordern wir, dass diese Beziehung für „alle du^k “ erfüllt ist, dann erhalten wir sofort (15.35).

Dieses formale Argument wird zu einem strengen Argument, falls wir unter dx^s in (15.36) die Einschränkung von dx^s auf den entsprechenden Tangentialraum von I verstehen und in (15.37) benutzen, dass die 1-Formen du^1, \dots, du^r linear unabhängig sind.

► BEISPIEL: Es sei M eine nichtleere offene Menge des \mathbb{R}^2 mit den kartesischen Koordinaten (p, V) und den orthogonalen Basiseinheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (Abb. 15.17). Dann stellt M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit dar. Wir betrachten die 1-Form

$$\omega = a(p, V)dp + b(p, V)dV \quad (15.38)$$

auf M mit den glatten Funktionen a und b , wobei $a(p, V)^2 + b(p, V)^2 \neq 0$ auf M gilt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} d\omega &= da \wedge dp + db \wedge dV \\ &= (a_p dp + a_V dV) \wedge dp + (b_p dp + b_V dV) \wedge dV = (a_V - b_p) dV \wedge dp. \end{aligned}$$

Folglich ist die Integrabilitätsbedingung

$$d\omega \wedge \omega = 0$$

auf M erfüllt, d. h., die 1-Form ω ist *vollständig integrierbar*. Nach Satz 2(iii) existiert zu jedem Punkt (p_0, V_0) von M eine offene Umgebung $U(p_0, V_0)$, in der man neue glatte krummlinige Koordinaten S und y mit

$$S = S(p, V), \quad y = y(p, V)$$

einführen kann, so dass

$$\omega = T dS \quad (15.39)$$

auf der Umgebung $U(p_0, V_0)$ gilt, wobei $T = T(p, V)$ eine glatte Funktion ist.

Die Integralmannigfaltigkeit I der Gleichung

$$\omega = 0 \quad (15.40)$$

durch den Punkt (p_0, V_0) lautet nach (15.39) gleich¹⁸

$$S(p, V) = \text{const}$$

in der Umgebung $U(p_0, V_0)$ (Abb. 15.17).

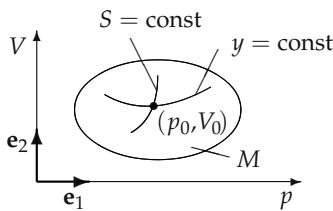


Abb. 15.17

¹⁸Suchen wir die Integralmannigfaltigkeit I in der Form $p = p(t), V = V(t)$, dann erhalten wir wegen $\omega = a dp + b dV$ aus (15.40) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$a\dot{p} + b\dot{V} = 0.$$

15.5 Anwendungen in der Thermodynamik

Standardbeispiel: Wir betrachten ein Gas mit dem Volumen V , dem Druck p und der inneren Energie $E = E(p, V)$. Die 1-Form

$$\omega = dE + p dV = E_p dp + (E_V + p) dV \quad (15.41)$$

stellt einen Spezialfall von (15.38) dar. Die Funktion T bzw. S entspricht dann der *absoluten Temperatur* bzw. der *Entropie* des Gases. Die Existenz dieser physikalischen Größen folgt somit zwingend aus der mathematischen Struktur von ω . Nach (15.39) gilt $T dS = \omega$. Daraus folgt die sogenannte Gibbsche Fundamentalgleichung des Gases

$$T dS = dE + p dV. \quad (15.42)$$

Um die physikalische Bedeutung von ω , S und der Integralmannigfaltigkeit I zu erläutern, betrachten wir die Kurve

$$\mathbf{x}(t) = p(t)\mathbf{e}_1 + V(t)\mathbf{e}_2, \quad (15.43)$$

die einem *thermodynamischen Prozess* des Gases entspricht, wobei das Gas zur Zeit t den Druck $p(t)$ und das Volumen $V(t)$ besitzt. Aus der Zeitableitung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{p}(t)\mathbf{e}_1 + \dot{V}(t)\mathbf{e}_2$$

zusammen mit $d\mathbf{p}(\mathbf{e}_1) = dV(\mathbf{e}_2) = 1$, $d\mathbf{p}(\mathbf{e}_2) = dV(\mathbf{e}_1) = 0$ und (15.41) erhalten wir

$$\omega(\dot{\mathbf{x}}(t)) = E_p(t)\dot{p}(t) + (E_V(t) + p(t))\dot{V}(t),$$

wobei wir $f(t) = f(p(t), V(t))$ setzen. Bezeichnet $Q(t)$ diejenige Wärmemenge, die dem Gas im Zeitintervall $[0, t]$ zugeführt wird ($Q(0) = 0$), dann besagt der *erste Hauptsatz der Thermodynamik*, dass

$$\dot{Q}(t) = \dot{E}(t) + p(t)\dot{V}(t)$$

gilt. Folglich erhalten wir

$$\omega(\dot{\mathbf{x}}(t)) = \dot{Q}(t),$$

wobei $\dot{Q}(t)$ die Geschwindigkeit der Wärmezufuhr zur Zeit t darstellt. Aus (15.39) folgt

$$\dot{Q}(t) = T(t)\dot{S}(t).$$

Diese Gleichung bestimmt die Entropie S in der vorliegenden Situation. Wegen $T(t) > 0$ gilt $\dot{Q} \equiv 0$ genau dann, wenn $\dot{S}(t) \equiv 0$ ist, d. h.

$$Q(t) \equiv 0 \Leftrightarrow S(t) \equiv \text{const.}$$

Folglich entspricht die Integralmannigfaltigkeit $I : S(p, V) = \text{const}$ thermodynamischen Prozessen (15.43) des Gases ohne Wärmezufuhr (*adiabatische Prozesse*).

Allgemeine thermodynamische Prozesse: Die beiden Grundgleichungen für thermodynamische Prozesse lauten folgendermaßen:

(i) Erster Hauptsatz

$$\dot{E}(t) = \dot{Q}(t) + \dot{A}(t). \quad (15.44)$$

(ii) Zweiter Hauptsatz

$$\dot{Q}(t) \leq T(t)\dot{S}(t). \quad (15.45)$$

Dabei gilt:

$Q(t)$ – Wärmemenge, die dem System im Zeitintervall $[0, t]$ zugeführt wird;

$A(t)$ – Arbeit, die dem System im Zeitintervall $[0, t]$ zugeführt wird;

$E(t), S(t), T(t)$ – innere Energie, Entropie, absolute Temperatur des Systems zur Zeit t .

Der Punkt in (15.44), (15.45) bezeichnet die Zeitableitung. Ein Prozess heißt *reversibel* genau dann, wenn er auch in umgekehrter Zeitrichtung ablaufen kann (z. B. sind biologische Alterungsprozesse nicht reversibel). Für reversible Prozesse gilt anstelle von (15.45) die Gleichung

$$\dot{Q}(t) = T(t)\dot{S}(t). \quad (15.46)$$

Aus (15.44), (15.46) erhalten wir

$$\dot{E}(t) = T(t)\dot{S}(t) + \dot{A}(t). \quad (15.47)$$

Die Sprache der Physiker: Anstelle von (15.44) und (15.46) schreiben Physiker kurz

$$dE = \delta Q + \delta A, \quad \delta Q = T dS.$$

Daraus folgt die Gibbsche Fundamentalgleichung

$$dE = T dS + \delta A, \quad (15.48)$$

die (15.47) entspricht. Diese Gleichung gilt, falls es sich um reversible Prozesse handelt.

Wir wollen zeigen, dass man eine strenge mathematische Formulierung von (15.48) erhält, indem man anstelle von δA eine 1-Form \mathbb{A} benutzt.

Das mathematische Grundmodell der phänomenologischen Thermodynamik für quasistatische Prozesse: Vom abstrakten mathematischen Standpunkt aus enthält dieses Modell die folgenden Bestandteile:

(i) Die Zustandsmannigfaltigkeit Z : Jeder Punkt z von Z entspricht einem Zustand des Systems. Eine Kurve $z = z(t)$ beschreibt einen Prozess, wobei im Zeitpunkt t der Zustand $z(t)$ vorliegt.

(ii) Die Zustandsfunktionen E , S und T auf Z (E = innere Energie, S = Entropie, T = absolute Temperatur): Beispielsweise bedeutet $E(z)$ die innere Energie im Zustand z .

(iii) Die 1-Form \mathbb{A} auf Z , die wir die Arbeitsform nennen:

Es gilt die Gibbsche Fundamentalgleichung

$$dE = T dS + \mathbb{A}. \quad (15.49)$$

Schreiben wir kurz $E(t)$ für $E(z(t))$, dann hat man

$$\dot{E}(t) = dE(\dot{z}(t)).$$

Aus (15.49) folgt somit $dE(\dot{z}(t)) = T(z(t))dS(\dot{z}(t)) + \mathbb{A}(\dot{z}(t))$. Deshalb gilt (15.47), falls wir die Arbeitsfunktion $A(t)$ durch

$$\dot{A}(t) = \mathbb{A}(\dot{z}(t)), \quad A(0) = 0,$$

definieren. Ferner gilt (15.44), falls wir die Wärmefunktion $Q(t)$ durch

$$\dot{Q}(t) = \dot{E}(t) - \dot{A}(t), \quad Q(0) = 0,$$

definieren.

Dieses Modell kann auf sogenannte quasistatische Prozesse angewandt werden, die so langsam verlaufen, dass sie reversibel sind und der Zustand des Systems in jedem Zeitpunkt durch eine endliche Anzahl von Parametern beschrieben werden kann.

► **BEISPIEL:** Wir nehmen an, dass die Systemzustände durch die zwei Parameter p, V beschrieben werden können (p = Druck, V = Volumen). Dann lautet die Gibbsche Fundamentalgleichung

$$dE = T dS - p dV \quad \text{mit der Arbeitsform } A = -p dV \quad (15.50)$$

und den Zustandsfunktionen $E = E(p, V)$, $S = S(p, V)$, $T = T(p, V)$.

Gleichung (15.50) bedeutet $E_p dp + E_V dV = TS_p dp + TS_V dV - p dV$. Das ist äquivalent zu dem folgenden System partieller Differentialgleichungen

$$E_p = TS_p, \quad E_V = TS_V - p. \quad (15.51)$$

Jedes thermodynamische System, das durch Druck p und Volumen V beschrieben wird, muss der Gleichung (15.50) genügen.

15.6 Klassische Mechanik und symplektische Geometrie

15.6.1 Grundidee

In der klassischen Mechanik wird die Bewegung $q = q(t)$ eines Systems durch das Variationsproblem

$$\int_a^b L(q, \dot{q}) dt = \text{stationär!}, \quad (15.52)$$

$q(a), q(b)$ sind fest vorgegeben,

beschrieben. Dabei heißt L die *Lagrange-funktion* des Systems. Sind q_1, \dots, q_n lokale Koordinaten von q , dann ist (15.52) äquivalent zu den sogenannten *Euler–Lagrangeschen Bewegungsgleichungen*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (15.53)$$

Anstelle von q_j schreibt man häufig auch q^j .

Führt man die sogenannten *verallgemeinerten Impulse*

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (15.54)$$

und die *Hamiltonfunktion* $H = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L$ ein, dann geht (15.53) in die sogenannten Hamilton-schen *kanonischen Gleichungen*

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (15.55)$$

über. Der Übergang von $q, \dot{q}, L(q, \dot{q})$ zu $q, p, H(q, p)$ heißt *Legendretransformation*. Die Hamiltonfunktion H entspricht der Energie.

Die Lösungen von (15.55) besitzen zwei fundamentale Eigenschaften:

(i) *Energieerhaltung*. Ist die Trajektorie

$$q = q(t), \quad p = p(t) \quad (15.56)$$

eine Lösung von (15.55), dann ist H längs dieser Lösung konstant: $H(q(t), p(t)) = \text{const.}$

(ii) *Erhaltung des Phasenvolumens* (Theorem von Liouville). Bezeichne Ω ein Gebiet des (p, q) -Raumes, dann wird es durch die Lösungstrajektorien (15.56) in ein Gebiet Ω_t transformiert, welches das gleiche Volumen wie Ω besitzt (Abb. 15.18).

Die Eigenschaft (ii) ist der Ausgangspunkt für die klassische statistische Physik (vgl. 15.7.3).

Wir wollen im folgenden zeigen, dass sich hinter (i) und (ii) eine Geometrie verbirgt – die sogenannte symplektische Geometrie. Alle Mannigfaltigkeiten und Abbildungen werden als glatt vorausgesetzt (Klasse C^∞).

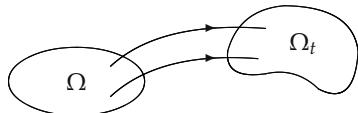


Abb. 15.18

15.6.2 Klassische Mechanik auf Mannigfaltigkeiten

Wir haben bereits in 13.1.1, Beispiel 3, im Zusammenhang mit dem Kreispendel darauf hingewiesen, dass es viele natürliche Situationen in der Mechanik gibt, wo der Konfigurationsraum eine Mannigfaltigkeit ist. Deshalb muss eine *sachgerechte Formulierung* der klassischen Mechanik in der *Sprache der Mannigfaltigkeiten* erfolgen.

Konfigurationsraum: Gegeben sei eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M , die wir als den Konfigurationsraum eines festen mechanischen Systems Σ auffassen. Jeder Punkt q von M entspricht einer Konfiguration von Σ . Eine Bewegung von Σ wird durch die Gleichung

$$q = q(t) \quad (15.57)$$

beschrieben ($t = \text{Zeit}$).

► **BEISPIEL:** Stellt (15.57) die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreislinie M dar, dann ist M der Konfigurationsraum (Abb. 15.19).

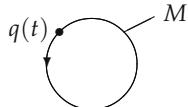


Abb. 15.19

Geschwindigkeiten, Tangentialbündel TM und Lagrangesche Mechanik: Die Zeitableitung $\dot{q}(t)$ zu (15.57) bezeichnet man als (verallgemeinerte) Geschwindigkeit. Dabei gehört $\dot{q}(t)$ zum Tangentialraum $TM_{q(t)}$ von M im Punkt $q(t)$. Somit ist $(q(t), \dot{q}(t))$ ein Punkt des Tangentialbündels TM . Die Lagrangefunktion $L = L(q, \dot{q})$ ist folglich in natürlicher Weise eine Funktion $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentialbündel TM , und das fundamentale Variationsprinzip (15.52) der stationären Wirkung bezieht sich ebenfalls auf das Tangentialbündel TM . Zusammenfassend erhalten wir:

Die Lagrangesche Formulierung der klassischen Mechanik bezieht sich auf das Tangentialbündel TM des Konfigurationsraumes M .

Impulse, Kotangentialbündel TM^* und Hamiltonsche Mechanik: Wir wollen das folgende Prinzip erläutern:

Die Hamiltonsche Formulierung der klassischen Mechanik bezieht sich auf das Kotangentialbündel TM^ des Konfigurationsraumes M .*

Ein Punkt p des Kotangentialraumes TM_q^* ist eine 1-Form auf TM_q . Sind (q^1, \dots, q^n) lokale Koordinaten von q , dann gilt

$$p = \sum_{j=1}^n p_j dq^j.$$

Wir bezeichnen (p_1, \dots, p_n) als lokale Koordinaten von p . Somit kann jeder Punkt (q, p) von TM^* durch die lokalen Koordinaten $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ beschrieben werden. Eine entscheidende Rolle spielt die 2-Form

$$\omega = \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp_j,$$

deren Definition unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten ist. Wegen $d\omega = 0$ ist ω *symplektisch* (vgl. die Definition in 15.6.3). Ferner definieren wir die sogenannte *Liouvilleform*

$$\mu = \omega \wedge \dots \wedge \omega \quad (n\text{-faches Produkt})$$

und setzen

$$\int_{\Omega} \mu = \text{Phasenvolumen von } \Omega.$$

Mit einem geeigneten reellen Faktor α gilt $\mu = \alpha dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n$. So mit entspricht das Phasenvolumen dem klassischen Volumen, das lokal durch das Integral $\alpha \int dq^1 \dots dq^n dp_1 \dots dp_n$ gegeben ist.

Als *Grundgleichung der Hamiltonschen Mechanik* bezeichnet man die Gleichung

$$i_{\mathbf{v}} \omega = dH. \quad (15.58)$$

Dabei ist $H = H(q, p)$ eine gegebene Funktion auf TM^* (die Hamiltonfunktion), und \mathbf{v} bezeichnet ein Vektorfeld auf TM^* . Wir nehmen an, dass \mathbf{v} einen Fluss $\{F_t\}$ auf TM^* erzeugt. Für jede gegebene Anfangslage $(q^{(0)}, p^{(0)})$ ist dann

$$(q(t), p(t)) = F_t(q^{(0)}, p^{(0)})$$

eine Trajektorie auf TM^* . In lokalen Koordinaten entspricht Gleichung (15.58) mit $\mathbf{v} = (\dot{q}(t), \dot{p}(t))$ den klassischen kanonischen Gleichungen (15.55).

Hauptsatz: Der Fluss $\{F_t\}$ besitzt die beiden folgenden fundamentalen Eigenschaften:

(i) *Energieerhaltung*. Es gilt $H \circ F_t = H$, d.h., die Hamiltonfunktion H ist konstant längs der Trajektorien von $\{F_t\}$.

(ii) *Erhaltung des Phasenvolumens*. Für jedes t ist F_t symplektisch, d.h., es gilt $F_t^* \omega = \omega$. Daraus folgt $F_t^* \mu = \mu$, d.h., der Fluss $\{F_t\}$ lässt das Phasenvolumen unverändert.

15.6.3 Symplektische Geometrie

Eine $2n$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M heißt *symplektisch* genau dann, wenn auf M eine glatte symplektische 2-Form ω gegeben ist. Das bedeutet:

(a) $d\omega = 0$;

(b) ω ist nicht entartet, d.h., aus $\omega_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ für alle $\mathbf{v} \in TM_x$ folgt $\mathbf{w} = 0$.

Eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow M$ heißt *symplektisch* genau dann, wenn $f^* \omega = \omega$ gilt.

► **BEISPIEL:** Der \mathbb{R}^2 ist eine symplektische Mannigfaltigkeit bezüglich der symplektischen Form

$$\omega = dq \wedge dp,$$

wobei (q, p) kartesische Koordinaten mit den zugehörigen Einheitsvektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ bezeichneten (Abb. 15.20). Wegen $dq(\mathbf{e}_1) = dp(\mathbf{e}_2) = 1$ und $dq(\mathbf{e}_2) = dp(\mathbf{e}_1) = 0$ sowie $\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = dq(\mathbf{v})dp(\mathbf{w}) - dq(\mathbf{w})dp(\mathbf{v})$ ist ω eine schiefsymmetrische quadratische Form auf \mathbb{R}^2 mit

$$\omega(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2, c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) = (ad - bc)\omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = ad - bc$$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Eine Transformation $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist genau dann symplektisch, wenn f volumentreu ist.¹⁹

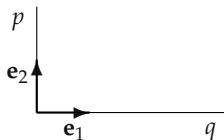


Abb. 15.20

Satz von Darboux: Ist M eine symplektische Mannigfaltigkeit, dann kann man in der Umgebung U eines jeden Punktes lokale Koordinaten einführen, so dass die symplektische Form ω auf U die Gestalt

$$\omega = \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp_j$$

besitzt.

Definieren wir die Liouvilleform $\mu = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n -faches Produkt), dann gilt für jede symplektische Abbildung $f : M \rightarrow M$ stets $f^*\mu = \mu$.

Der Hauptsatz aus 15.6.2 gilt allgemein für symplektische Mannigfaltigkeiten.

15.7 Anwendungen in der statistischen Physik

15.7.1 Das Grundmodell der statistischen Physik

Zustände und ihre Wahrscheinlichkeiten: Wir betrachten ein physikalisches System, das sich in den Zuständen

$$Z_1, \dots, Z_R \tag{15.59}$$

befinden kann. Dabei gehört zum Zustand Z_r die Energie E_r und die Teilchenzahl N_r . Es ist die Wahrscheinlichkeit w_r für die Realisierung von Z_r durch

$$w_r = \frac{e^{(\mu N_r - E_r)/kT}}{\sum_{r=1}^R e^{(\mu N_r - E_r)/kT}} \tag{15.60}$$

¹⁹Setzen wir nämlich $q^* = f_1(q, p)$, $p^* = f_2(q, p)$, dann bedeutet die Bedingung $f^*\omega = \omega$, dass $dq^* \wedge dp^* = dq \wedge dp$ gilt, also ist

$$dq^* \wedge dp^* = (f_{1q}dq + f_{1p}dp) \wedge (f_{2q}dq + f_{2p}dp) = \Delta dq \wedge dp = dq \wedge dp$$

mit der Funktionaldeterminante $\Delta = f_{1q}f_{2p} - f_{1p}f_{2q}$. Folglich hat man $\Delta = 1$, d. h., die Abbildung f ist volumentreu.

gegeben,²⁰ wobei gilt: T = absolute Temperatur, μ = chemisches Potential, k = Boltzmannkonstante.

Ist $A(Z)$ eine physikalische Größe, die vom Zustand Z abhängt, dann erhalten wir den Mittelwert

$$\bar{A} := \sum_{r=1}^R A(Z_r) w_r$$

und die Dispersion

$$(\Delta A)^2 = \overline{(A - \bar{A})^2} = \sum_{r=1}^R (A(Z_r) - \bar{A})^2 w_r.$$

Die *Tschebyschevsche Ungleichung* besagt, dass

$$p(|A - \bar{A}| \leq \varepsilon) \geq 1 - (\Delta A)^2 / \varepsilon^2$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt, wobei links die Wahrscheinlichkeit dafür steht, dass der Messwert A im Intervall $[\bar{A} - \varepsilon, \bar{A} + \varepsilon]$ liegt.

Physikalische Größen: Man definiert:

$$E = \sum_{r=1}^R E_r w_r \quad (\text{mittlere Gesamtenergie}),$$

$$N = \sum_{r=1}^R N_r w_r \quad (\text{mittlere Gesamtteilchenzahl}),$$

$$S = -k \sum_{r=1}^R w_r \ln w_r \quad (\text{Entropie} = \text{Information}),$$

$$F = E - ST \quad (\text{freie Energie}).$$

Das Prinzip der maximalen Entropie: Für feste Werte E und N betrachten wir das Maximumproblem

$$S = \max !, \quad \sum_{r=1}^R w_r E_r = E, \quad \sum_{r=1}^R w_r N_r = N, \quad \sum_{r=1}^R w_r = 1.$$

Nach der Lagrangeschen Multiplikatorenregel erhalten wir daraus die Lösung $w_r(T, \mu)$, die mit (15.60) übereinstimmt. Dabei sind T und μ Lagrangesche Multiplikatoren. Aus den Gleichungen

$$\sum_{r=1}^R w_r(T, \mu) E_r = E, \quad \sum_{r=1}^R w_r(T, \mu) N_r = N,$$

folgt dann $T = T(E, N)$, $\mu = \mu(T, N)$ für die Abhängigkeit der Größen T und μ von E und N .

Zustandssumme: Es ist sehr bemerkenswert, dass man alle wichtigen physikalischen Größen aus der sogenannten Zustandssumme

$$Z(\mu, T, V) := \sum_{r=1}^R e^{(\mu N_r - E_r(V)) / kT}$$

²⁰Bei fester Teilchenzahl gilt $N_r = \text{const}$ für alle r . In diesem Spezialfall erhalten wir

$$w_r = \frac{e^{-E_r/kT}}{\sum_{r=1}^R e^{-E_r/kT}}. \quad (15.61)$$

erhält. Die Energie E_r hängt dabei vom Volumen V ab. Setzt man

$$\Omega := -kT \ln Z \quad (\text{statistisches Potential}),$$

dann gilt

$$\begin{aligned} S &= -\Omega_T, & N &= -\Omega_\mu, \\ F &= \Omega + \mu N, & E &= F + ST = \mu N - T^2(\Omega/T)_T. \end{aligned} \tag{15.62}$$

Den Druck P erhält man durch

$$P = -\Omega_V. \tag{15.63}$$

Die Größe F heißt freie Energie. Ferner ergeben sich:

$$H = E + PV \quad (\text{Enthalpie}), \quad G = F + PV = \mu N \quad (\text{freie Enthalpie}). \tag{15.64}$$

15.7.2 Anwendungen auf die Quantenstatistik

Der Zustand Z eines Systems werde durch das Schema

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_J \\ n_1 & n_2 & \dots & n_J \end{matrix} \tag{15.65}$$

beschrieben. Das soll bedeuten, dass n_j Teilchen die Energie ε_j besitzen. Dann sind die Energie E_Z und die Teilchenzahl N_Z von Z durch

$$E_Z = \sum_{j=1}^J n_j \varepsilon_j, \quad N_Z = \sum_{j=1}^J n_j$$

gegeben. Für die Zustandssumme erhalten wir

$$Z = \sum_Z e^{(\mu N_Z - E_Z)/kT},$$

wobei wir über alle möglichen Zustände Z summieren. Das ergibt

$$Z = \prod_{j=1}^J \sum_{n_j} e^{n_j(\mu - \varepsilon_j)/kT}.$$

Teilchen mit ganzzahligem Spin (wie z. B. Photonen) genügen der sogenannten Bose-Einstein-Statistik, während Teilchen mit halbzahligem Spin (z. B. Protonen, Neutronen oder Elektronen) der sogenannten Fermi-Dirac-Statistik genügen.

Bose-Einstein-Statistik: Hier variieren die Besetzungszahlen n_j von 0 bis n . Folglich gilt

$$\Omega = -kT \ln Z = -kT \sum_{j=1}^J \ln \frac{1 - e^{(n+1)(\mu - \varepsilon_j)/kT}}{1 - e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}}.$$

Nehmen wir an, dass die maximale Besetzungszahl n sehr groß ist und $\mu - \varepsilon_j < 0$ für alle j gilt, dann ergibt der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ den Ausdruck

$$\Omega = kT \sum_{j=1}^J \ln(1 - e^{(\mu - \varepsilon_j)/kT}).$$

Daraus erhält man für die mittlere Teilchenzahl $N = -\Omega_\mu$ und die mittlere Energie $E = \mu N - T^2(\Omega/T)_T$ die Ausdrücke

$$N = \sum_{j=1}^J \bar{n}_j, \quad E = \sum_{j=1}^J \bar{n}_j \varepsilon_j \quad (15.66)$$

mit

$$\bar{n}_j := \frac{e^{(\mu-\varepsilon_j)/kT}}{1 - e^{(\mu-\varepsilon_j)/kT}}.$$

Hier bedeutet \bar{n}_j die mittlere Besetzungszahl für das Energieniveau ε_j .

Klassische Maxwell–Boltzmann–Statistik: In dem Spezialfall, dass die Energien $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J$ sehr groß sind, erhalten wir näherungsweise (15.66) mit

$$\bar{n}_j = e^{(\mu-\varepsilon_j)/kT}. \quad (15.67)$$

Fermi–Dirac–Statistik: Wir nehmen an, dass die Besetzungszahlen nur die Werte $n_j = 0, 1$ annehmen können (Pauli–Prinzip). Dann gilt

$$\Omega = -kT \sum_{j=1}^J \ln(1 + e^{(\mu-\varepsilon_j)/kT}).$$

Das ergibt (15.66) mit

$$\bar{n}_j = \frac{e^{(\mu-\varepsilon_j)/kT}}{1 + e^{(\mu-\varepsilon_j)/kT}}.$$

Für große Energien $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J$ erhalten wir daraus die klassische Maxwell–Boltzmann–Statistik (15.67) als einen Grenzfall.

15.7.3 Klassische Gibbssche Statistik im Phasenraum

Wir betrachten ein Gas bestehend aus vielen Teilchen mit fester Gesamtzahl. Wir beschreiben das Gas durch einen Phasenraum \mathbb{P} dessen Punkte (q, p) die lokalen Koordinaten $(q^1, \dots, q^f, p_1, \dots, p_f)$ haben, wobei f die Zahl der Freiheitsgrade des Gases ist.²¹ Motiviert durch (15.61) setzen wir

$$w(q, p) = \frac{e^{-E(q, p)/kT}}{\int_{\mathbb{P}} e^{-E(q, p)/kT} dq dp}, \quad (15.68)$$

wobei $E(q, p)$ die Energiefunktion (Hamiltonfunktion) des Systems (d. h. des Gases) darstellt.

Der Erwartungswert einer physikalischen Größe $A(q, p)$ ist gegeben durch

$$\bar{A} = \int_{\mathbb{P}} A(q, p) w(q, p) dq dp.$$

²¹Zur Erläuterung wählen wir den Spezialfall, in dem das Gas aus N punktförmigen Teilchen der Masse m besteht. Es sei \mathbf{q}_k (bzw. $\mathbf{p}_k = m\dot{\mathbf{q}}_k$) der Ortsvektor (bzw. Impulsvektor) des k -ten Teilchens. Bezeichnet q_k^1, q_k^2, q_k^3 (bzw. p_k^1, p_k^2, p_k^3) die Komponenten von \mathbf{q}_k (bzw. \mathbf{p}_k), dann ist (q, p) gleich dem Tupel aller (q_k^j, p_k^j) , $j = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, N$, also $f = 3N$. Für ein ideales Gas erhalten wir die Energiefunktion

$$E(q, p) = \sum_{k=1}^N \frac{\mathbf{p}_k^2}{2m} \quad (\text{kinetische Gesamtenergie}).$$

Für die Dispersion erhalten wir

$$(\Delta A)^2 = \int_{\mathbb{P}} (A(q, p) - \bar{A})^2 w(q, p) dq dp.$$

Aus der Zustandssumme

$$\mathbb{Z} = \int_{\mathbb{P}} e^{-E(q,p)/kT} dq dp,$$

ergeben sich dann nach (15.62) bis (15.64) alle wichtigen thermodynamischen Größen.

Die Definition von $w(q, p)$ in (15.68) ist sinnvoll, weil bei den Bewegungen des Gases das Phasenvolumen invariant bleibt. Dieses Theorem von Liouville ist nach 15.6 eine Folge der *sympplektischen Geometrie*, die der klassischen Mechanik zugrunde liegt.

15.8 Operatoralgebren in der Physik und nichtkommutative Geometrie

Die moderne Quantentheorie und statistische Physik basieren auf der Theorie der Operatoralgebren.

Das allgemeine Schema: Für eine abstrakte Beschreibung physikalischer Prozesse muss man die beiden fundamentalen physikalischen Größen „Zustand eines Systems“ und „Observable“ (Messgröße) mathematisch erfassen.

(i) Gegeben sei eine komplexe C^* -Algebra \mathbb{A} . Die selbstadjungierten Elemente A von \mathbb{A} , d. h. $A^* = A$, bezeichnen wir als *Observable*.

(ii) Die linearen Funktionale $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(A^* A) \geq 0$ und $\varphi(A^*) = \varphi(A)$ für alle $A \in \mathbb{A}$, die der Normierungsbedingung $\varphi(I) = 1$ genügen, heißen Zustände.

(iii) Der Mittelwert $m(A)$ der Observablen A im Zustand φ wird durch

$$m(A) = \varphi(A)$$

gegeben. Wegen (ii) ist $m(A)$ für jede Observable A eine reelle Zahl, und die Dispersion

$$(\Delta A)^2 = m(\{A - m(A)I\}^2)$$

ist für jede Observable A nicht negativ.

► **STANDARDBEISPIEL:** Wir wählen \mathbb{A} gleich der C^* -Algebra aller komplexen $(n \times n)$ -Matrizen. Ferner sei

$$W := \text{Diagonalmatrix } (w_1, \dots, w_n)$$

mit $w_r \geq 0$ für alle r und $\text{tr } W = 1$, d. h. $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$. Wir setzen

$$\varphi(A) := \text{tr}(WA) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{A} \tag{15.69}$$

und bezeichnen φ als Zustand. Im Spezialfall

$$E := \text{Diagonalmatrix } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

mit reellen Zahlen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ erhalten wir $E \in \mathbb{A}$ mit

$$m(E) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j w_j.$$

Wir interpretieren die Observable E als Energie. Genauer: w_j sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System die Energie ε_j besitzt. Dann ist $m(E)$ der Mittelwert der Energie des Systems. Man bezeichnet W als *von Neumannsche Dichtematrix*.

Die vorliegende Situation lässt sich in folgender Weise verallgemeinern. Es sei X ein komplexer separabler Hilbertraum. Mit \mathbb{A} bezeichnen wir die C^* -Algebra $L(X, X)$ aller linearen stetigen Operatoren $A : X \rightarrow X$. Ferner sei $W : X \rightarrow X$ ein linearer stetiger selbstadjungierter und nuklearer Operator mit $(\psi, W\psi) \geq 0$ für alle $\psi \in X$ und $\text{tr } W = 1$. Die Observablen sind dann die selbstadjungierten Operatoren $A \in L(X, X)$, der Zustand φ in (15.69) entspricht dem von Neumannschen Dichteoperator W , und der Erwartungswert von A im Zustand W ist gegeben durch

$$m(A) = \text{tr}(WA).$$

Ferner erhält man die zugehörige *Dispersion* durch $(\Delta A)^2 = \text{tr}(W(A - m(A)I)^2)$.

Bezeichnet ψ_1, ψ_2, \dots ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenwerten des Operators W mit den zugehörigen Eigenwerten w_1, w_2, \dots , dann gilt

$$m(A) = \sum_j w_j(\psi_j, A\psi_j).$$

Nichtkommutative Geometrie: Die Theorie der Operatoralgebren bildet auch die Basis der sogenannten nichtkommutativen Geometrie. Ist M eine Mannigfaltigkeit, dann kann man die Algebra \mathbb{A} aller stetigen Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ auf M betrachten. Ein Punkt $x \in M$ entspricht dann dem maximalen Ideal $\{f \in \mathbb{A} : f(x) = 0\}$. In analoger Weise kann man ein Lexikon aufstellen, wobei geometrische Eigenschaften von M in algebraische Eigenschaften von \mathbb{A} übersetzt werden.

In einem nächsten Schritt kann man ferner die kommutative Operatoralgebra \mathbb{A} durch eine nichtkommutative Operatoralgebra ersetzen. Für die so entstehende sogenannte nichtkommutative Geometrie interessieren sich auch Physiker im Zusammenhang mit ihrer Suche nach einer einheitlichen Theorie der Materie. Auf diese Weise kann man z. B. das Standardmodell der Elementarteilchentheorie erhalten und das Auftreten des massiven *Higgs-Bosons* begründen sowie Abschätzungen für seine Masse erhalten.

Literatur zu Kapitel 15

- [Abraham et al. 1983] Abraham, R., Marsden, J., Ratiu, T.: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Addison-Wesley, Reading, MA (1983)
- [Aebischer 1994] Aebischer, B. et al.: *Symplectic Geometry: an Introduction*. Birkhäuser, Basel (1994)
- [Arnold 1988] Arnold, V.: *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*. Übers. a.d. Russ. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1988)
- [Choquet-Bruhat et al. 1991] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M.: *Analysis, Manifolds, and Physics*, Vols. 1, 2. North-Holland, Amsterdam (1991)
- [Dubrovin et al. 1985–92] Dubrovin, B., Fomenko, A., Novikov, S.: *Modern Geometry*, Vols. 1–3. Transl. from the Russian. Springer, New York (1985–92)
- [Novikov und Taimanov 2006] Novikov, S., Taimanov, I.: *Modern Geometric Structures and Fields*. Transl. from the Russian. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006)
- [Schutz 1980] Schutz, B.: *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, England (1980)
- [Spivak 1979] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vols. 1–5. Publish or Perish, Boston (1979)
- [Várilly 2006] Várilly, J.: *An Introduction to Noncommutative Geometry*. European Mathematical Society, Zurich (2006)
- [Zeidler 1995] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Vol. 4: *Applications to Mathematical Physics*. 2nd edition. Springer, New York (1995)

KAPITEL 16

RIEMANNSCHE GEOMETRIE UND ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Jeder, der die allgemeine Relativitätstheorie verstanden hat, wird von ihrer Schönheit begeistert sein. Sie ist der Triumph des kovarianten Differentialkalküls, der von Gauß, Riemann, Ricci und Levi-Civita geschaffen wurde.

Albert Einstein (1915)

Die Riemannsche Geometrie erlaubt es, die folgenden Begriffe einzuführen: Länge einer Kurve, Winkel zwischen zwei Kurven, Volumen eines Gebietes, Krümmung, Paralleltransport von Vektoren, geodätische Kurve (verallgemeinerte Gerade). Als wichtige Anwendung werden wir die allgemeine Relativitätstheorie betrachten. Da die Physiker die Indexschreibweise bevorzugen, behandeln wir in 16.1 die Riemannsche Geometrie zunächst in ihrer klassischen Notation bezogen auf lokale Koordinaten. Daran anschließend zeigen wir, wie sich alle Begriffe invariant definieren lassen. Alle Mannigfaltigkeiten, Abbildungen und Tensorfelder werden im folgenden als glatt vorausgesetzt (Klasse C^∞).

Ferner werden alle Mannigfaltigkeiten als reell vorausgesetzt (mit Ausnahme von 16.4). Durch S_r^n bezeichnen wir die Oberfläche einer Kugel im \mathbb{R}^{n+1} vom Radius r mit dem Mittelpunkt im Ursprung (n -dimensionale Sphäre vom Radius r). Für $r = 1$ schreiben wir kurz S^n .

16.1 Der klassische Kalkül

Wir benutzen in diesem Abschnitt den in 10.2 eingeführten klassischen Tensorkalkül. Über gleiche obere und untere Indizes wird von 1 bis n summiert. Größen mit Indizes stellen Tensorfelder dar, deren Transformationsverhalten aus dem Indexbild ersichtlich ist. Zum Beispiel transformiert sich t_j wie ein einfacher kovariantes Tensorfeld usw. Eine Ausnahme bilden lediglich die sogenannten Christoffelsymbole Γ_{ij}^k sowie die Symbole $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$, die keine Tensorfelder darstellen.

Eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M (z.B. eine Fläche im \mathbb{R}^3) heißt eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*, falls auf ihr ein Differential der Bogenlänge

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (16.1)$$

erklärt ist, wobei g_{ij} ein symmetrisches, zweifach kovariantes Tensorfeld auf M darstellt mit nichtverschwindender Determinante $g = \det(g_{ij})$. Dieses Tensorfeld wird metrisches Tensorfeld genannt.

In lokalen Koordinaten sieht M wie eine offene Menge des \mathbb{R}^n aus. Die Vorgabe von g_{ij} auf M heißt genauer, dass g_{ij} in jeder Karte (offene Menge des \mathbb{R}^n) gegeben ist und sich bei Kartenwechsel (Wechsel der lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n) wie ein zweifach kovarianter Tensor im Sinne von 10.2 transformiert. Außerdem ist g_{ij} symmetrisch, d.h., es gilt $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ für alle Punkte¹ $x \in M$ und alle $i, j = 1, \dots, n$. Mit (g^{ij}) bezeichnen wir die inverse Matrix zu (g_{ij}) .

¹ $g_{ij}(x)$ hängt von der gewählten Karte ab.

Dabei stellt g^{ij} ein symmetrisches, zweifach kontravariantes Tensorfeld auf M dar.

Die Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *eigentlich*² genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix $(g_{ij}(x))$ positiv sind (in jedem Punkt $x \in M$).

Andernfalls bezeichnen wir M als *pseudo-Riemannsche* Mannigfaltigkeit.

► **BEISPIEL 1:** Wählen wir im \mathbb{R}^3 die Matrix

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dann entspricht (16.1) der klassischen euklidischen Bogenlänge. Das ergibt eine eigentliche Riemannsche Geometrie.

► **BEISPIEL 2:** Wählen wir im \mathbb{R}^4 die Matrix

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dann erhalten wir die sogenannte *Minkowskimetrik*

$$ds^2 = (dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Wir interpretieren x^1, x^2, x^3 als kartesische Raumkoordinaten eines Inertialsystems und setzen $x^4 = ct$ ($t = \text{Zeit}$, $c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$). Eine pseudo-Riemannsche Geometrie ist das Resultat.

16.1.1 Messung von Längen, Winkel und Volumina

Ist $x^j = x^j(\sigma)$, $a \leq \sigma \leq b$, $j = 1, 2, \dots, n$, eine Kurve, dann bezeichnet man

$$\int_a^b ds \equiv \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(\sigma))\dot{x}^i(\sigma)\dot{x}^j(\sigma)} d\sigma \quad (16.2)$$

als *Länge* der Kurve.³ Der Winkel α zwischen zwei Kurven $x^j = x^j(\sigma)$, $y^j = y^j(\sigma)$ wird durch

$$\cos \alpha = \frac{g_{ij}\dot{x}^i y^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j} \sqrt{g_{ij}\dot{y}^i \dot{y}^j}} \quad (16.3)$$

gegeben. Dieser Ausdruck ist im Schnittpunkt beider Kurven zu nehmen. Das *Volumen* eines n -dimensionalen Gebietes Ω wird durch

$$\int_{\Omega} \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^n \quad (16.4)$$

definiert.

²In der mathematischen Literatur werden häufig eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeiten kurz als Riemannsche Mannigfaltigkeiten bezeichnet.

³Der Punkt bedeutet die Ableitung nach σ .

16.1.2 Krümmung

Kennt man g_{ij} , dann kann man die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k , die kovariante Ableitung ∇_j und die absolute Ableitung $D/d\sigma$ wie in 10.2 definieren. Der Riemannsche Krümmungstensor R_{ikm}^j wird durch die Relation

$$\nabla_k \nabla_m u^j - \nabla_m \nabla_k u^j = R_{ikm}^j u^i \quad (16.5)$$

eingeführt. Im Unterschied zum klassischen Vertauschungsgesetz

$$\partial_k \partial_m u^j - \partial_m \partial_k u^j = 0$$

für die partiellen Ableitungen $\partial_k := \partial/\partial x^k$ genügen die kovarianten Ableitungen ∇_k nicht immer einem derartigen Vertauschungsgesetz. Grob gesprochen gilt: Je stärker der Raum „gekrümmt“ ist, um so stärker ist die Abweichung von dem Vertauschungsgesetz „ $\nabla_k \nabla_m - \nabla_m \nabla_k = 0$ “.

Satz von Riemann (1861): Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gilt $R_{ikm}^j \equiv 0$ in einer Umgebung des Punktes P von M .

(ii) Durch Übergang zu anderen lokalen Koordinaten (Kartenwechsel) kann man erreichen, dass die Matrix (g_{ij}) in einer Umgebung des Punktes P konstant ist.

Gilt die Eigenschaft (ii), dann heißt die Riemannsche Mannigfaltigkeit *lokal flach* in P .

► **BEISPIEL 3:** Für eine euklidische Metrik bzw. die Minkowskimetrik gilt stets $R_{ikm}^j \equiv 0$ im gesamten Raum (globale Flachheit).

Explizit hat man die Formeln

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{si} - \partial_s g_{ij}) \quad (16.6)$$

und

$$R_{ikm}^j = \partial_k \Gamma_{mi}^j - \partial_m \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{ks}^j \Gamma_{mi}^s - \Gamma_{ms}^j \Gamma_{ki}^s. \quad (16.7)$$

So hängt R_{ikm}^j von den ersten und zweiten Ableitungen des metrischen Tensorfeldes g_{ij} ab. Speziell gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \text{und} \quad \Gamma_{jk}^i = \partial_k \ln \sqrt{|g|}. \quad (16.8)$$

Ferner definiert man

$$R_{ikm} := g_{js} R_{ikm}^s \quad (16.9)$$

sowie den *Ricci-Tensor*

$$R_{ik} := R_{iks}^s \quad (16.10)$$

und die *skalare Krümmung*

$$R := g^{rs} R_{rs}. \quad (16.11)$$

Es gilt $R_{ik} = R_{ki}$.

Die Mannigfaltigkeit M besitzt definitionsgemäß eine konstante Krümmung genau dann, wenn R auf M konstant ist.

Standardbeispiele zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung sind S_r^2 mit $R = 2/r^2$ und die hyperbolische Halbebene M_{hyp} des Poincaré-Modells der nichteuklidischen hyperbolischen Geometrie mit $R = -2/r^2$ (vgl. (16.15)).

Der Krümmungstensor besitzt die folgenden Symmetrieeigenschaften:

- (i) $R_{ijkm} = R_{kmij}$,
- (ii) $R_{ijkm} = -R_{jikm} = -R_{ijmk}$,
- (iii) $\nabla_s R_{ikm}^j + \nabla_k R_{ims}^j + \nabla_m R_{isk}^j = 0$ (Identität von Bianchi),
- (iv) $R_{ikm}^j + R_{kmi}^j + R_{mik}^j = 0$ (Identität von Ricci),
- (v) $\nabla^s (R_{sk} - \frac{1}{2} g_{sk} R) = 0$.

Der Krümmungstensor auf einer n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit hat $N = n^2(n^2 - 1)/12$ wesentliche Koordinaten.

Theorema egregium von Gauß (1827): Für eine Fläche im \mathbb{R}^3 hängt die Gaußsche Krümmung K nur von den ersten und zweiten Ableitungen des metrischen Tensors g_{ij} ab. Genauer ist

$$K = R_{1212}/g = R/2.$$

Dieser tiefliegende Satz besagt, dass die Krümmung einer Fläche durch Messungen der Metrik auf der Fläche bestimmt werden kann – ohne Benutzung des sie umgebenden Raumes \mathbb{R}^3 . Somit ist die Krümmung eine *innere* Eigenschaft der Mannigfaltigkeit. Historisch gesehen verallgemeinerte Riemann mit der Einführung seines Krümmungstensors das theorema egregium von Gauß.

► **BEISPIEL 4:** Für die Sphäre S_r^2 erhalten wir (vgl. 3.6.3.3.)

$$K = R/2 = 1/r^2.$$

16.1.3 Paralleltransport

Die kovariante Ableitung in Richtung eines Vektorfeldes v^j wird durch

$$\nabla_v := v^j \nabla_j$$

erklärt. Ist $C : x^j = x^j(\sigma)$ eine Kurve, dann definieren wir die *absolute Ableitung* $D/d\sigma$ (bezüglich C) durch $D/d\sigma := \nabla_{\dot{x}}$, d.h.

$$\frac{Dt^{..}}{d\sigma} := \dot{x}^j \nabla_j t^{..}.$$

Ein Tensorfeld $t^{..}$ heißt *parallel* längs der Kurve C genau dann, wenn

$$\frac{Dt^{..}}{d\sigma} = 0 \quad \text{längs } C$$

gilt.

► **BEISPIEL 5:** Ein Tangentenvektorfeld \mathbf{v} auf einer Fläche F im \mathbb{R}^3 ist genau dann längs der Kurve C parallel, wenn die Ableitung $\dot{\mathbf{v}}$ nach dem Kurvenparameter stets senkrecht auf der Tangentialebene steht.

16.1.4 Geodätische Kurven (verallgemeinerte Geraden)

Eine Kurve $C : x^j = x^j(\sigma)$ heißt eine *Geodätische* genau dann, wenn das Geschwindigkeitsfeld \dot{x}^j parallel längs C ist, d.h., es gilt

$$\frac{D\dot{x}^j}{d\sigma} = 0 \quad \text{längs } C.$$

Explizit heißt das

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad \text{längs } C. \quad (16.12)$$

Satz 1 (Variationsproblem): Ist M eine eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist jede Lösung $x^j = x^j(\sigma)$ des Variationsproblems

$$\int ds \equiv \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(\sigma)) \dot{x}^i \dot{x}^j} d\sigma = \min!, \quad (16.13)$$

$x^j(\sigma)$ ist fest vorgegeben für $\sigma = a, b$ und alle j ,

eine Geodätische, wobei die Differentialgleichung (16.12) bezüglich der Bogenlänge $\sigma = s$ gilt.

Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht richtig. Betrachten wir beispielsweise zwei nicht diametral gelegene Punkte P und Q auf dem Äquator einer Sphäre S_r^2 , dann ist jedes Teilstück des Äquators eine Geodätische. Speziell lassen sich P und Q durch zwei verschiedene Geodätische verbinden, von denen nur eine minimale Länge besitzt (Abb. 16.1).

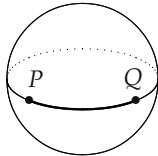


Abb. 16.1

Satz 2: Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann genügt jede Lösung $x^j = x^j(\sigma)$ des Variationsproblems

$$\int ds^2 \equiv \int_a^b g_{ij}(x(\sigma)) \dot{x}^i \dot{x}^j d\sigma = \text{stationär}!, \quad (16.14)$$

$x^j(\sigma)$ ist fest vorgegeben für $\sigma = a, b$ und alle j ,

der Differentialgleichung (16.12).

Dieses Variationsproblem ist auch für beliebige Kurven auf pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten sinnvoll, während (16.13) wegen der möglichen Relation $g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j < 0$ nicht immer sinnvoll ist.

16.1.5 Anwendung auf die nichteuklidische Geometrie

In seinen „Elementen“ formulierte Euklid (300 v. Chr.) das folgende sogenannte Parallelenaxiom:

(P) Liegt der Punkt P nicht auf der Geraden g , dann geht genau eine Gerade durch P , die g nicht schneidet (Abb. 16.2).



Abb. 16.2

Es entstand das berühmte Problem, ob dieses Axiom aus den übrigen Axiomen Euklids folgt. Erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts gelang es Bolyai, Gauß und Lobatschewski unabhängig voneinander nachzuweisen, dass (P) tatsächlich unabhängig von den übrigen Axiomen ist.

Einen solchen Nachweis führt man heute am einfachsten dadurch, dass man Modelle konstruiert, in denen (P) nicht gilt. Es gibt dabei die folgenden beiden Möglichkeiten, um (P) zu ersetzen:

(P_{elliptisch}) Liegt der Punkt P nicht auf der Geraden g , dann wird g von jeder Geraden durch P geschnitten.

(P_{hyperbolisch}) Liegt der Punkt P nicht auf der Geraden g , dann gibt es unendlich viele Geraden durch P , die g nicht schneiden.

Die elliptische (sphärische) Geometrie: Wir wählen M_{ellip} gleich der Nordhalbkugel einer Sphäre vom Radius r einschließlich des Äquators, wobei jedoch diametral gelegene Punkte des Äquators miteinander identifiziert werden (Abb. 16.3).

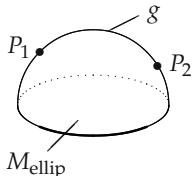


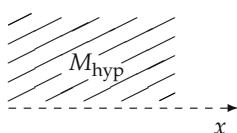
Abb. 16.3

Die „Ebene“ entspricht dann M_{ellip} . „Geraden“ sind definitionsgemäß geodätische Linien. Durch zwei verschiedene Punkte P_1 und P_2 von M_{ellip} geht dann stets genau eine „Gerade“ g , und diese hat höchstens die Länge πr . Legt man durch P_1 und P_2 sowie den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene E , dann ist g gleich der Schnittkurve zwischen E und M_{ellip} . Es gilt (P_{elliptisch}). Die Riemannsche Geometrie auf M_{ellip} entspricht der sphärischen Geometrie. Speziell hat M_{ellip} den Flächeninhalt $2\pi r^2$.

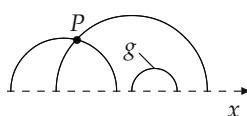
Die hyperbolische Geometrie (das Poincaré-Modell): Wir wählen M_{hyp} gleich der oberen Halbebene ohne die x -Achse (Abb. 16.4) und versehen M_{hyp} mit der eigentlichen Riemannschen Metrik

$$ds^2 = \frac{r^2(dx^2 + dy^2)}{y^2}. \quad (16.15)$$

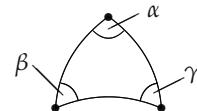
Die „Geraden“ sind definitionsgemäß die geodätischen Linien, denen Halbkreise mit dem Mittelpunkt auf der x -Achse entsprechen. Dann gilt (P_{hyperbolisch}) (Abb. 16.4(b)).



(a)



(b)



(c)

Abb. 16.4

Die Winkelmessung stimmt mit der klassischen Winkelmessung überein. Für die Gaußsche Krümmung $K = R/2$ erhalten wir $K = -1/r^2$. Die Winkelsumme im Dreieck genügt der Relation (Abb. 16.4(c))

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - F/r^2, \quad (16.16)$$

wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks ist (bezüglich der Metrik (16.15)). Der Flächeninhalt von M_{hyp} ist unendlich.

Es ist interessant, dass man alle Formeln der hyperbolischen Geometrie erhält, indem man formal in den entsprechenden Formeln der sphärischen Geometrie den Radius r durch ir ersetzt. Tatsächlich gilt im Fall der sphärischen Geometrie $K = 1/r^2$ und $\alpha + \beta + \gamma = \pi + F/r^2$. Daraus erhalten wir $K = 1/(ir)^2 = -1/r^2$ sowie (16.16) für M_{hyp} .

16.1.6 Der δ -Operator und der Laplaceoperator

Mit $\Lambda^p(M)$ bezeichnen wir den linearen Raum aller p -Formen auf der n -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M . Speziell für $p = 0$ bezeichnet $\Lambda^p(M)$ die Menge der Funktionen auf M . Es sei $\omega \in \Lambda^p(M)$, d.h.

$$\omega := \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

(vgl. 15.4.3). Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!} \partial_s \omega_{i_1 \dots i_p} dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \nabla_s \omega_{i_1 \dots i_p} dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \end{aligned} \tag{16.17}$$

(vgl. 15.4.3). Ferner definieren wir

$$\delta\omega := -\frac{1}{(p-1)!} \nabla^s \omega_{s i_2 \dots i_p} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \tag{16.18}$$

Diese Definitionen hängen nicht von den gewählten lokalen Koordinaten ab. Für Funktionen f auf M setzen wir $\delta f := 0$.

Der Laplaceoperator Δ wird definiert durch⁴

$$\Delta\omega := -(d\delta + \delta d)\omega.$$

► **BEISPIEL:** Für eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\Delta f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (g^{ij} \sqrt{|g|} \partial_j f).$$

Wählen wir $M = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $ds^2 = \sum_{j=1}^n (dx^j)^2$, dann ergibt sich der klassische Laplaceoperator

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f.$$

Wird $M = \mathbb{R}^4$ mit der Minkowskimetrik $ds^2 = (c dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$ versehen, dann gilt

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \partial_j^2 f = \square f$$

(c = Lichtgeschwindigkeit). In dem Fall entspricht Δ dem klassischen Wellenoperator \square .

⁴In der Differentialgeometrie benutzt man häufig die Definition $\Delta := d\delta + \delta d$, die jedoch im euklidischen Fall den negativen Laplaceoperator ergibt.

16.1.7 Die Volumenform

Sei M jetzt eine n -dimensionale *orientierte* Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann bilden

$$E_{i_1 \dots i_n} := \sqrt{|g|} \varepsilon_{i_1 \dots i_n},$$

$$E^{i_1 \dots i_n} := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}$$

Tensorfelder auf M , wobei $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ das Vorzeichen der Permutation $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ bezeichnet. Die Differentialform

$$\tau := \frac{1}{n!} E_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

heißt *Volumenform* auf M . Diese Definition hängt nicht von den gewählten lokalen Koordinaten ab. Definitionsgemäß gilt

$$\int_{\Omega} \tau = \text{Volumen von } \Omega.$$

16.1.8 Der $*$ -Operator von Hodge

Es sei M eine n -dimensionale *orientierte* Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $\omega \in \Lambda^p(M)$, d.h.

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

definieren wir

$$*\omega := \frac{1}{p!(n-p)!} E_{i_1 \dots i_n} \omega^{i_1 \dots i_p} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}.$$

Es gilt $**\omega = (-1)^{p(n-p)} (\text{sgn } g) \omega$.

► **BEISPIEL:** Wir versehen $M = \mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Metrik. Dann gilt

$$*dx^1 = dx^2 \wedge dx^3, \quad *(dx^2 \wedge dx^3) = dx^1, \quad *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 1.$$

Analoge Ausdrücke erhält man durch zyklisches Vertauschen von 1, 2, 3. Daraus folgt zum Beispiel

$$*(a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3) = a_1 dx^2 \wedge dx^3 + a_2 dx^3 \wedge dx^1 + a_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Satz: Für $p = 0, \dots, n$ ist der lineare Operator

$$*: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{n-p}(M)$$

bijektiv.

► **BEISPIEL:** Für $\omega \in \Lambda^p(M)$ gilt

$$\delta\omega = (-1)^p *^{-1} d * \omega.$$

16.2 Der invariante Kalkül

Definition: Eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M heißt genau dann *Riemannsche Mannigfaltigkeit*, wenn auf M ein symmetrisches nichtentartetes Tensorfeld \mathbf{g} vom Typ $(2,0)$ gegeben ist.

Somit ist jedem Punkt $x \in M$ eine quadratische Form \mathbf{g}_x auf dem Tangentialraum TM_x zugeordnet, die nichtentartet ist, d.h., es gilt:

- (i) $\mathbf{g}_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{g}_x(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in TM_x.$
- (ii) Aus $\mathbf{g}_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in TM_x$ folgt $\mathbf{w} = 0.$

Wir definieren ein *inneres Produkt* auf jedem Tangentialraum TM_x durch

$$(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \mathbf{g}_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{für alle } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in TM_x. \quad (16.19)$$

Definition: Die Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt genau dann *eigentlich*, wenn das innere Produkt (16.19) positiv definit ist, d.h. es gilt stets $(\mathbf{v}|\mathbf{v}) \geq 0$, und aus $(\mathbf{v}|\mathbf{v}) = 0$ folgt $\mathbf{v} = 0.$

Dann wird jeder Tangentialraum TM_x zu einem reellen Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts (16.19). Nichteigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeiten heißen auch pseudo-Riemannsch.

Wählen wir in einer Karte die natürliche Basis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, dann ist g_{ij} durch

$$g_{ij} := \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

definiert, und es gilt

$$\mathbf{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

In der klassischen Analysis schreibt man dafür $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Damit ist der Anschluss an 16.1 hergestellt.

Im folgenden bezeichne M stets eine reelle n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit.

16.2.1 Messung von Längen, Winkeln und Volumina

Ist $x = x(\sigma)$, $a \leq \sigma \leq b$, eine Kurve auf M , dann definieren wir ihre *Länge* durch

$$L := \int_a^b \sqrt{(\dot{x}(\sigma) | \dot{x}(\sigma))} d\sigma, \quad (16.20)$$

falls der Integrand größer oder gleich null ist. Sind $x = x(\sigma)$ und $y = y(\sigma)$ zwei Kurven auf M , dann ist der Schnittwinkel α durch

$$\cos \alpha = \frac{(\dot{x}(\sigma) | \dot{y}(\sigma))}{\| \dot{x}(\sigma) \| \| \dot{y}(\sigma) \|}$$

gegeben, wobei der Parameter σ dem Schnittpunkt entspricht. (In üblicher Weise gilt $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}$).

Ferner gilt⁵

$$\int_{\Omega} \tau = \text{Volumen von } \Omega,$$

⁵Hier ist τ die Volumenform (vgl. 16.1.7).

wobei Ω ein Teilgebiet von M bezeichnet. Dadurch wird auf M ein Maß μ erzeugt mit dem zugehörigen Maßintegral

$$\int_{\Omega} f \, d\mu.$$

In lokalen Koordinaten entspricht das dem Integral $\int f \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^n$.

16.2.2 Metrik auf eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Sind x und y zwei Punkte auf M , dann definieren wir den Abstand zwischen x und y durch

$$d(x, y) := \inf L.$$

Genauer: Wir verbinden die beiden Punkte x und y durch beliebige stückweise glatte Kurven und bilden das Infimum über alle zugehörigen Kurvenlängen L .

Damit wird jede eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeit bezüglich d zu einem metrischen Raum.

Definition: Eine eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *vollständig* genau dann, wenn der zugehörige metrische Raum vollständig ist.

16.2.3 Kovariante Differentiation und Paralleltransport auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang

Definition: Eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M besitzt einen *linearen Zusammenhang* genau dann, wenn eine Abbildung ∇ existiert, die jedem Vektorfeld \mathbf{v} auf M ein Tensorfeld $\nabla \mathbf{v}$ vom Typ $(1, 1)$ auf M zuordnet, wobei gilt:

- (i) $\nabla(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{w}$ (Additivität),
- (ii) $\nabla(f\mathbf{v}) = df \otimes \mathbf{v} + f\nabla \mathbf{v}$ (Produktregel).

Dabei ist f eine Funktion auf M . Ferner soll ∇ „lokalen Charakter“ haben, d.h., stimmen \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 auf einer Umgebung des Punktes P überein, dann gilt $\nabla \mathbf{v}_1 = \nabla \mathbf{v}_2$ in P .

Die kovariante Richtungsableitung $\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v}$ eines Vektorfeldes \mathbf{v} in Richtung eines Vektorfeldes \mathbf{w} wird definiert durch

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} := (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{w}.$$

Satz: Kennt man ∇ , dann kann man die kovariante Richtungsableitung

$$\nabla_{\mathbf{w}} A$$

eines Tensorfeldes A in Richtung des Vektorfeldes \mathbf{w} in eindeutiger Weise erklären, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:⁶

- (a) $\nabla_{\mathbf{w}} f = \mathbf{w}(f)$ für alle Funktionen f auf M ,
- (b) $\nabla_{\mathbf{w}}(A + B) = \nabla_{\mathbf{w}} A + \nabla_{\mathbf{w}} B$ (Additivität),
- (c) $\nabla_{\mathbf{w}}(A \otimes B) = (\nabla_{\mathbf{w}} A) \otimes B + A \otimes \nabla_{\mathbf{w}} B$ (Produktregel),
- (d) $\nabla_{\mathbf{w}}$ ist vertauschbar mit der Operation der Kontraktion.

⁶Gilt in einer natürlichen Basis $\mathbf{w} = w^i \mathbf{e}_i$, dann ist

$$\mathbf{w}(f) := w^i \partial_i f.$$

Paralleltransport: Die absolute Ableitung von A entlang der Kurve $C : x = x(\sigma)$ definieren wir durch

$$\frac{DA}{d\sigma} := \nabla_{\dot{x}} A. \quad (16.21)$$

Explizit bedeutet das

$$\left(\frac{DA}{d\sigma} \right) (x(\sigma)) = (\nabla_{\dot{x}(\sigma)} A)_{x(\sigma)} \quad \text{für alle } \sigma.$$

Das Tensorfeld A heißt *parallel* längs der Kurve C genau dann, wenn gilt

$$\frac{DA}{d\sigma} = 0 \quad \text{längs } C.$$

Koordinatendarstellung: Sei ∇ ein linearer Zusammenhang. Bezeichnet $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die natürliche Basis in einer Karte, dann werden die *Christoffelsymbole* Γ_{ij}^k durch

$$\nabla \mathbf{e}_j = \Gamma_{ij}^k dx^i \otimes \mathbf{e}_k$$

erklärt, d.h. $\Gamma_{ij}^k = (\nabla \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i, dx^k)$. Für $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{w} = w^i \mathbf{e}_i$ ergeben sich

$$\nabla \mathbf{v} = (\nabla_i v^k) dx^i \otimes \mathbf{e}_k \quad (16.22)$$

und

$$\nabla \mathbf{w} \mathbf{v} = (w^i \nabla_i v^k) \mathbf{e}_k \quad (16.23)$$

mit

$$\nabla_i v^k = \partial_i v^k + \Gamma_{ij}^k v^j, \quad \partial_i = \partial / \partial x^i. \quad (16.24)$$

Ferner ist

$$\frac{D\mathbf{v}}{d\sigma} = (\dot{x}^j \nabla_j v^i) \mathbf{e}_i \quad (16.25)$$

längs der Kurve $x = x(\sigma)$.

► **BEISPIEL 1:** $\nabla \mathbf{v} \mathbf{e}_j = v^s \Gamma_{sj}^k \mathbf{e}_k$.

► **BEISPIEL 2:** $\nabla \mathbf{v} dx^k = -v^s \Gamma_{sj}^k dx^j$.

Diese beiden Beispiele reichen aus, um mit Hilfe der obigen Regeln (a) bis (c) die kovariante Ableitung für ein beliebiges Tensorfeld A zu berechnen.

► **BEISPIEL 3:** Es sei $A = A_j^i \mathbf{e}_i \otimes dx^j$. Dann gilt nach der Produktregel

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} A &= (\nabla \mathbf{v} A_j^i)(\mathbf{e}_i \otimes dx^j) + A_j^i (\nabla \mathbf{v} \mathbf{e}_i) \otimes dx^j + A_j^i \mathbf{e}_i \otimes (\nabla \mathbf{v} dx^j) \\ &= (v^s \nabla_s A_m^k) \mathbf{e}_k \otimes dx^m, \end{aligned}$$

wobei wir setzen

$$\nabla_s A_m^k = \partial_s A_m^k + \Gamma_{si}^k A_m^i - \Gamma_{sm}^j A_j^k.$$

Diese Formel stimmt mit der Definition der kovarianten Ableitung ∇_s in 10.2.5.1 überein. Eine analoge Übereinstimmung ergibt sich auch im allgemeinen Fall.

16.2.4 Torsion und Krümmung auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang

Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit linearem Zusammenhang. Für Vektorfelder \mathbf{v} und \mathbf{w} definieren wir

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &:= \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}], \\ \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &:= \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{w}} - \nabla_{\mathbf{w}}\nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]},\end{aligned}$$

wobei $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ die Lieklammer für Vektorfelder bezeichnet. Ferner definieren wir den *Torsionstensor*

$$T(\omega, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \omega(\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$$

und den *Krümmungstensor*

$$R(\mathbf{u}, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \omega(\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{u})$$

für Vektorfelder $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ und 1-Formen ω auf M .

Koordinatendarstellung: Es sei $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die natürliche Basis in einer Karte. Wir setzen

$$\begin{aligned}T_{km}^j &:= T(dx^j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m), \\ R_{ikm}^j &:= R(\mathbf{e}_i, dx^j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m).\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}T_{km}^j &= \Gamma_{km}^j - \Gamma_{mk}^j, \\ R_{ikm}^j &= \partial_k \Gamma_{mi}^j - \partial_m \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{ks}^j \Gamma_{mi}^s - \Gamma_{ms}^j \Gamma_{ki}^s.\end{aligned}$$

Für Funktionen f erhält man

$$\nabla_k \nabla_m f - \nabla_m \nabla_k f = -T_{km}^s \nabla_s f.$$

Ferner ist

$$\nabla_k \nabla_m v^j - \nabla_m \nabla_k v^j = R_{ikm}^j v^i - T_{km}^s \nabla_s v^j.$$

Beliebige Basen: In der Vektorrechnung vereinfacht man die Überlegungen häufig dadurch, dass man geeignete Basen wählt. Der invariante Kalkül verfügt ebenfalls über diese Flexibilität. Es sei $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ eine beliebige Basis im Tangentialraum TM_x . Wir konstruieren die duale Basis b^1, \dots, b^n im Kotangentialraum TM_x^* durch

$$b^i(\mathbf{b}_j) = \delta_j^i.$$

Ferner setzen wir

$$\gamma_{ij}^k := (\nabla \mathbf{b}_j)(\mathbf{b}_i, dx^k), \quad t_{km}^j := T(b^j, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_m), \quad r_{ikm}^j := R(\mathbf{b}_i, b^j, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_m).$$

Im Spezialfall $\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$ für alle j gilt $b^j = dx^j$, $\gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$, $t_{km}^j = T_{km}^j$, $r_{ikm}^j = R_{ikm}^j$.

Außerdem definieren wir die Zusammenhangsformen $\omega_i^j := \gamma_{si}^j b^s$, die Torsionsformen

$$\Theta^i := \frac{1}{2} t_{km}^i b^k \wedge b^m$$

und die Krümmungsformen

$$\Omega_i^j := \frac{1}{2} r_{ikm}^j b^k \wedge b^m.$$

Die Strukturgleichungen von Cartan: Es gilt

$$\Theta^i = db^i + \omega_s^i \wedge b^s, \quad \Omega_i^j = d\omega_i^j + \omega_s^j \wedge \omega_i^s. \quad (16.26)$$

Die tiefere geometrische Bedeutung von (16.26) ergibt sich erst im Rahmen der Theorie der Hauptfaserbündel (Methode des repère mobile; vgl. 19.6). Tatsächlich erhält man (16.26) durch Lokalisierung der eleganten *globalen* Cartanschen Strukturgleichungen

$$F = D\mathbb{A}, \quad T = D\Theta \quad (16.27)$$

auf dem Repèrebündel $\mathbb{R}(M)$ von M (vgl. 19.6.1).

16.2.5 Kovariante Differentiation und Krümmung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Satz: Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit existiert ein eindeutig bestimmter linearer Zusammenhang mit den beiden Eigenschaften

(a) $T = 0$ und

(b) $\nabla g = 0$.

Die entsprechenden Christoffelsymbole Γ_{jk}^i , die kovariante Ableitung ∇_j sowie der Krümmungstensor sind dann wie in 16.1 gegeben.

Die Bedingung (a) ist äquivalent zu $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ (Symmetrie der Christoffelsymbole), während (b) bedeutet, dass

$$\nabla_j g_{km} = 0 \quad (16.28)$$

gilt (Lemma von Ricci). Ferner hat man

$$\nabla_j g^{km} = 0, \quad \nabla_j g = 0. \quad (16.29)$$

16.2.6 Geodätische

Ist $x = x(\sigma)$, $a \leq \sigma \leq b$, eine Kurve auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M , dann bezeichnet man

$$E = \int_a^b (\dot{x}(\sigma) | \dot{x}(\sigma)) \, d\sigma$$

als die Energie der Kurve. Wir betrachten das Variationsproblem

$$E = \text{stationär!}, \quad x(a), x(b) \text{ sind fest vorgegeben}. \quad (16.30)$$

Satz: Genau die Lösungen von (16.30) genügen der Differentialgleichung⁷

$$\frac{D\dot{x}}{d\sigma} = 0, \quad a \leq \sigma \leq b. \quad (16.31)$$

Längs jeder Lösung von (16.31) gilt $(\dot{x}(\sigma) | \dot{x}(\sigma)) = \text{const}$. Genau die Kurven, die (16.31) genügen, heißen Geodätische.

⁷In Koordinaten bedeutet das

$$\dot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0. \quad (16.32)$$

Exponentialabbildung: Es sei x_0 ein fester Punkt von M . Dann gibt es eine offene Umgebung U des Nullpunktes im Tangentialraum TM_{x_0} , so dass das Anfangswertproblem

$$\frac{D\dot{x}}{d\sigma} = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v,$$

für jedes $v \in U$ eine eindeutige Lösung $x = x(\sigma)$ besitzt mit $-1 \leq \sigma \leq 1$ (Abb. 16.5). Wir definieren

$$\exp v = x(1).$$

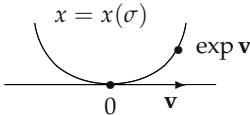


Abb. 16.5

Satz: Wählen wir die Nullumgebung U hinreichend klein, dann ist $\exp : U \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Umgebung des Punktes x_0 .

Die Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *geodätisch vollständig* genau dann, wenn die Abbildung \exp auf TM_{x_0} ausgedehnt werden kann (für alle Punkte $x_0 \in M$). Geometrisch bedeutet dies, dass jede Geodätische $x = x(\sigma)$ für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ erklärt ist.

Normalkoordinaten: Ein lokales Koordinatensystem v^1, \dots, v^n in der Umgebung eines Punktes $x_0 \in M$ heißt *normal* genau dann, wenn jede Geodätische durch den Punkt x_0 mit Hilfe einer Geradengleichung der Form

$$v^j = a^j \sigma \tag{16.33}$$

mit dem reellen Parameter σ beschrieben werden kann. Der Punkt x_0 hat dabei die Koordinaten $v^j = 0$ für alle j .

Die Exponentialabbildung liefert solche Normalkoordinaten in der Umgebung von x_0 , indem man durch $x = \exp v$ dem Punkt x den Tangentialvektor $v = v^j e_j$ zuordnet. In Normalkoordinaten gilt stets

$$\Gamma_{ij}^k(x_0) = 0 \quad \text{für alle } i, j, k, \tag{16.34}$$

d.h., es ist

$$\nabla_j = \partial_j \quad \text{in } x_0.$$

Kurven minimaler Länge: Auf einer eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeit M betrachten wir das Variationsproblem

$$\int_a^b \sqrt{(\dot{x}(\sigma) | \dot{x}(\sigma))} d\sigma = \min !, \quad x(a), x(b) \text{ sind fest vorgegeben.} \tag{16.35}$$

Dann genügt jede Lösung von (16.35) der Differentialgleichung (16.31) bezüglich der Bogenlänge $\sigma = s$.

Satz von Hopf–Rinow: Auf einer zusammenhängenden eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeit M sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) M ist vollständig als metrischer Raum.
- (b) M ist geodätisch vollständig.
- (c) Die beschränkten Mengen (bezüglich der Metrik auf M) sind relativ kompakt.

► **BEISPIEL:** Jede kompakte zusammenhängende eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeit M (z.B. die Sphäre S_r^n) erfüllt die Bedingungen (a), (b), (c).

Zwei beliebige Punkte x und y von M lassen sich durch eine Geodätische G verbinden, so dass die Länge von G gleich dem Abstand $d(x, y)$ ist.

16.3 Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Das Problem der Abbildung zwischen zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten entstand zuerst in der Kartographie (Abbildung von Teilen der Erdoberfläche auf die Ebene; Landkarten). Aus dem theorema egregium von Gauß folgt, dass derartige längentreue Abbildungen unmöglich sind (vgl. 3.6.3.3.); man kann aber winkeltreue (konforme) Abbildungen benutzen, z.B. die Projektion der Erdoberfläche auf einen Zylindermantel, die von Mercator (1512-1569) stammt.

16.3.1 Längentreue Abbildungen

Sind M_1 und M_2 zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit den metrischen Tensoren $\mathbf{g}^{(1)}$ und $\mathbf{g}^{(2)}$, dann versteht man unter einer Isometrie von M_1 auf M_2 einen Diffeomorphismus $f : M_1 \rightarrow M_2$, für welchen

$$f^* \mathbf{g}^{(2)} = \mathbf{g}^{(1)} \quad (16.36)$$

gilt. Explizit bedeutet das in lokalen Koordinaten

$$ds^2 = g_{ij}^{(1)}(x) dx^i dx^j = g_{ij}^{(2)}(y) dy^i dy^j \quad \text{mit } y = f(x).$$

Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem metrischen Tensor \mathbf{g} . Nach dem Erlanger Programm von Felix Klein aus dem Jahre 1872 ist Geometrie gleichbedeutend mit der Invariantentheorie von Transformationsgruppen. In diesem Sinne gehört eine Eigenschaft genau dann zur Riemannschen Geometrie von M , wenn sie invariant ist unter der Gruppe aller Isometrien von M auf sich. Solche Eigenschaften sind z.B. die Länge einer Kurve, der Winkel zwischen zwei Kurven und das Volumen eines Gebietes.

Lokale Isometrien: Unter einer *infinitesimalen Isometrie* von M verstehen wir ein Vektorfeld \mathbf{v} auf M , so dass

$$\mathbb{L} \mathbf{v} \mathbf{g} = 0$$

für die Lieableitung gilt. Infinitesimale Isometrien heißen auch *Killingvektorfelder*.

Auf einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit besteht eine eineindeutige Korrespondenz zwischen lokalen isometrischen Flüssen und lokalen Killingvektorfeldern, die durch die natürliche Korrespondenz zwischen Flüssen und ihren Geschwindigkeitsfeldern gegeben ist (vgl. 15.4.5).

Globale Isometrien: Es sei M eine vollständige zusammenhängende eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann gilt:

(i) Zwischen den isometrischen Flüssen $\{F_t\}$ auf M und den Killingvektorfeldern \mathbf{v} besteht eine eineindeutige Korrespondenz, die dadurch gegeben ist, dass \mathbf{v} das Geschwindigkeitsfeld zu $\{F_t\}$ darstellt.

(ii) Alle Isometrien von M auf sich bilden eine Liegruppe \mathbb{L} , deren Liealgebra isomorph ist zur Liealgebra aller Killingvektorfelder auf M .

(iii) Die Dimension von \mathbb{L} ist höchstens gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$ und genau dann gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$, wenn M konstante Krümmung besitzt.

► **BEISPIEL 1:** Im dreidimensionalen Raum $M = \mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Metrik hat die Liegruppe \mathbb{L} der Isometrien die Dimension $\frac{1}{2}n(n+1) = 6$ für $n = 3$. Alle diese Isometrien werden durch

$$y = Ax + b$$

gegeben, wobei A eine orthogonale Matrix ist, d.h., \mathbb{L} besteht aus allen Drehungen, Spiegelungen und Translationen.

Einbettungssatz von Nash (1956): Jede eigentliche n -dimensionale Riemannsche C^∞ -Mannigfaltigkeit lässt sich isometrisch in einen \mathbb{R}^m einbetten.⁸

Dieser wichtige Struktursatz besagt, dass jede abstrakt gegebene eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeit als Untermannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^m realisiert werden kann.

► **BEISPIEL 2:** Für das Poincaré-Modell M_{hyp} (vgl. 16.1.5) der nichteuklidischen hyperbolischen Geometrie in der oberen Halbebene gilt

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad y > 0. \quad (16.37)$$

Lässt man die sogenannte Traktrixkurve $z = z(r)$, gegeben durch

$$z = \pm \int_1^r \varrho^{-1} \sqrt{1 - \varrho^2} \, d\varrho,$$

um die z -Achse rotieren, dann erhält man die sogenannte Pseudosphäre \mathbb{P} (Abb. 16.6(b)) mit der Metrik

$$ds^2 = r^{-2} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (\varphi = \text{Drehwinkel}). \quad (16.38)$$

Durch die Transformation $y = e^{-\ln r}$, $x = \varphi$, geht (16.38) in (16.37) über, und M_{hyp} wird auf die Pseudosphäre \mathbb{P} abgebildet, wobei zwei Punkte (x_1, y) und (x_2, y) von M_{hyp} , deren Differenz $x_1 - x_2$ gleich einem Vielfachen von 2π ist, dem gleichen Punkt auf \mathbb{P} entsprechen. Damit handelt es sich allerdings nicht um eine Einbettung von M_{hyp} in den \mathbb{R}^3 . Speziell ist \mathbb{P} keine Mannigfaltigkeit wegen des nichtglatten Verhaltens am Äquator A (Abb. 16.6(b)). Im Jahre 1901 bewies Hilbert, dass es nicht möglich ist, die Riemannsche Geometrie von M_{hyp} auf einer Fläche im \mathbb{R}^3 zu realisieren. Nach dem obigen Einbettungssatz von Nash ist jedoch eine solche Einbettung in den \mathbb{R}^{10} möglich (wegen $n = 2$).

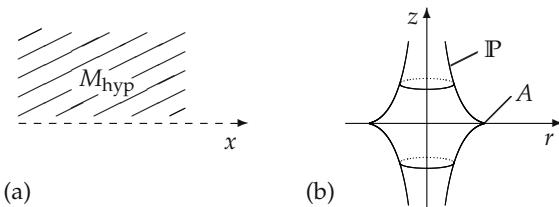


Abb. 16.6

Alle eigentlichen (d.h. orientierungserhaltenden) Isometrien von M_{hyp} auf sich erhält man durch die Möbiustransformationen

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \text{ reell},$$

wobei $z = x + iy$ gilt. Diese Isometrien bilden eine reelle Liegruppe der Dimension 3, die isomorph ist zur Faktorgruppe $SL(2, \mathbb{R}) / G$ mit der diskreten Untergruppe $G = \{I, -I\}$.

⁸Genauer: $m = \max \left\{ \frac{1}{2}n(n+3) + 5, \frac{1}{2}n(n+5) \right\}$.

16.3.2 Winkeltreue (konforme) Abbildungen

Sind M_1 und M_2 zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit den metrischen Tensoren $\mathbf{g}^{(1)}$ und $\mathbf{g}^{(2)}$, so heißt die Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ *konform* genau dann, wenn

$$f^* \mathbf{g}^{(2)} = \lambda \mathbf{g}^{(1)} \quad (16.39)$$

gilt, wobei $\lambda : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive Funktion ist. Explizit bedeutet das in lokalen Koordinaten

$$ds^2 = g_{ij}^{(2)}(y) dy^i dy^j = \lambda(x) g_{ij}^{(1)}(x) dx^i dx^j$$

mit $y = f(x)$ und $\lambda(x) > 0$. Konforme Abbildungen sind *winkeltreu*.

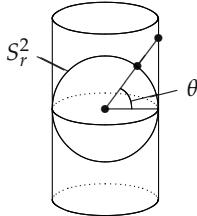


Abb. 16.7

► **BEISPIEL 3** (Merkatorprojektion): Wir bilden die Sphäre S_r^2 (genauer: die Erdoberfläche ohne Nord- und Südpol) konform auf einen Zylindermantel ab, der S_r^2 im Äquator berührt (Abb. 16.7). Diese Abbildung wird durch

$$z = \ln \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

vermittelt (φ = geographische Länge, θ = geographische Breite; (φ, z) sind Zylinderkoordinaten).⁹

Diese Projektion wird in der Kartographie verwendet.

► **BEISPIEL 4** (konforme Abbildung in der Ebene): Es sei Ω ein Gebiet der komplexen z -Ebene, und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$. Dann stellt f eine konforme Abbildung von Ω auf $f(\Omega)$ dar (bezüglich der natürlichen euklidischen Metrik).

Somit gibt es sehr viele konforme Abbildungen in der Ebene. Das folgende Beispiel zeigt, dass sich die Situation in höheren Dimensionen drastisch ändert.

► **BEISPIEL 5** (Satz von Liouville): Jede glatte konforme Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ergibt sich durch Zusammensetzung von Drehungen, Dilatationen und Spiegelungen.

Lokale konforme Abbildungen: Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem metrischen Tensor \mathbf{g} . Unter einer infinitesimalen konformen Abbildung (oder einem konformen Killingvektorfeld) verstehen wir ein Vektorfeld \mathbf{v} auf M mit

$$\mathbb{L}_v \mathbf{g} = \tau \mathbf{g},$$

wobei τ eine reelle Funktion auf M und \mathbb{L}_v die Lieableitung bezeichnen.

Zwischen den lokalen konformen Flüssen von M und den lokalen konformen Killingvektorfeldern von M besteht eine eindeutige Beziehung, die durch die natürliche Korrespondenz zwischen Flüssen und ihren Geschwindigkeitsfeldern gegeben ist (vgl. 15.4.5).

Globale konforme Abbildungen: Die konformen Diffeomorphismen einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit auf sich selbst bilden eine Liegruppe, deren Liealgebra isomorph ist zur Liealgebra der konformen Killingvektorfelder.

⁹Der geographischen Länge φ auf der Sphäre entspricht die Zylinderkoordinate φ .

► **BEISPIEL 6:** Im vierdimensionalen Minkowskiraum gibt es 15 linear unabhängige konforme Killingvektorfelder.

Unter einer konformen Abbildung verstehen wir bis zum Ende dieses Abschnittes einen winkeltreuen Diffeomorphismus.

Hauptsatz 1: Es sei M eine zweidimensionale eigentliche (hinreichend glatte) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

(i) *Lokales Verhalten.* Zu jedem Punkt $x \in M$ existiert eine Umgebung U , so dass U konform auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden kann.

Diese Aussage ist gleichbedeutend damit, dass man auf U lokale Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einführen kann, so dass sich für die Bogenlänge die Normalform

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2) \quad \text{auf } U$$

ergibt mit der positiven Funktion λ . Derartige Koordinaten heißen *isotherm*.

(ii) *Globales Verhalten.* Ist M einfach zusammenhängend und besitzt M eine abzählbare Basis (vgl. 15.1.10), dann lässt sich M konform auf das Innere des Einheitskreises, die Ebene oder die zweidimensionale Sphäre S^2 abbilden, wobei genau einer dieser drei Fälle vorliegt.

Dieses tiefliegende geometrische Theorem ist mit den Namen von Euler, Gauß, Riemann, Poincaré, Koebe und Lichtenstein verbunden. Benutzt man nur isotherme Koordinaten, dann wird der Wechsel zwischen derartigen Koordinaten durch holomorphe Funktionen beschrieben. Auf diese Weise wird M zu einer Riemannschen Fläche, und die Aussage (ii) ist eine Folge des Uniformisierungssatzes (vgl. 19.8.3).

Konform äquivalente Riemannsche Metriken: Die Menge M sei bezüglich der beiden Metriken g und h eine eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeit. Definitionsgemäß heißt g genau dann zu h konform äquivalent, wenn es eine positive Funktion $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$g = \lambda h \quad \text{auf } M.$$

Hauptsatz 2 (Lösung des Yamabe-Problems): Ist M eine kompakte eigentliche (hinreichend glatte) Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 2 , dann kann man eine konform äquivalente Riemannsche Metrik auf M einführen, die eine konstante skalare Krümmung R besitzt.

Dieses Resultat, das erst in den 80er Jahren endgültig bewiesen wurde und wesentlich die Theorie nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen in Sobolevräumen mit kritischen Exponenten benutzt, kann man als eine Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes auf höhere Dimensionen auffassen (vgl. 1.14.10.).

16.4 Kählermannigfaltigkeiten

Die Bedeutung von Kählermannigfaltigkeiten besteht darin, dass es sich um komplexe Mannigfaltigkeiten handelt, deren Tangentialräume komplexe Hilberträume sind, wobei der Paralleltransport von Vektoren das (komplexe) Skalarprodukt invariant lässt.

Fast komplexe Mannigfaltigkeiten: Eine $2n$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M heißt fast komplex genau dann, wenn jedem Punkt $x \in M$ eine lineare bijektive Abbildung $J : TM_x \rightarrow TM_x$ des Tangentialraumes zugeordnet ist mit

$$J^2 = -I$$

(I = identische Abbildung). Fast komplexe Mannigfaltigkeiten sind stets orientierbar.

Eine *hermitesche Metrik* auf einer fast komplexen Mannigfaltigkeit M ist definitionsgemäß eine Riemannsche Metrik \mathbf{g} mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\mathbf{g}_x(J\mathbf{u}, J\mathbf{v}) = \mathbf{g}_x(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in TM_x$$

und alle $x \in M$. Die 2-Form Φ definiert durch

$$\Phi_x(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{g}_x(\mathbf{u}, J\mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in TM_x$$

und alle $x \in M$ heißt die Fundamentalform der hermiteschen Metrik. Genau dann, wenn zusätzlich

$$d\Phi = 0$$

gilt, heißt \mathbf{g} eine *Kählermetrik*, und M heißt eine *fast-Kählermannigfaltigkeit*.

Auf einer solchen Mannigfaltigkeit ist durch Φ eine symplektische Struktur gegeben.

Komplexe Mannigfaltigkeiten: Es sei M eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Diese wird zu einer fast-komplexen Mannigfaltigkeit $M_{\mathbb{R}}$ in der folgenden Weise: Die lokalen Koordinaten z^1, \dots, z^n von M in einer Karte besitzen die Darstellung

$$z^j = x^j + iy^j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Die Karte von $M_{\mathbb{R}}$ entsteht, indem wir den n komplexen Zahlen z^1, \dots, z^n die $2n$ reellen Zahlen $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$ zuordnen. Die Abbildung J definieren wir durch

$$J(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = (-y^1, \dots, -y^n, x^1, \dots, x^n).$$

Somit entspricht J der Multiplikation von z^j mit i .

Eine komplexe Mannigfaltigkeit, die auf diese Weise zu einer fast-Kählermannigfaltigkeit wird, heißt *Kählermannigfaltigkeit*.

16.5 Anwendungen auf die allgemeine Relativitätstheorie

16.5.1 Physikalische Grundidee

In der klassischen Mechanik wird die Gravitation durch ein Kraftfeld (Vektorfeld) beschrieben. Beispielsweise ist die Newtonsche Gleichung für die Bewegung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ eines Planeten im Gravitationsfeld der Sonne mit der Masse M durch

$$\mathbf{x}''(t) = -\gamma M |\mathbf{x}|^{-3} \mathbf{x}$$

gegeben. Dabei befindet sich die Sonne im Ursprung $\mathbf{x} = 0$, und γ bezeichnet die Gravitationskonstante. In Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie aus dem Jahre 1915 verursacht die Masse der Sonne eine Krümmung der vierdimensionalen Riemannschen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit E_4 . Die Bewegung der Planeten entspricht dann geodätischen Kurven von E_4 . Dadurch wird die Gravitation geometrisiert. Eine ausführlichere Darstellung der folgenden Betrachtungen findet man in [Zeidler 1995].

In den nächsten Abschnitten wird über zwei gleiche obere und untere Indizes von 1 bis 4 summiert.

16.5.2 Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie

Ausgangspunkt ist eine vierdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit E_4 mit der Metrik

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (16.40)$$

in lokalen Koordinaten. Dabei sind x^1, x^2, x^3 raumartige Koordinaten, und x^4/c ist eine zeitartige Koordinate¹⁰ ($c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$). Dem Wechsel dieser lokalen Koordinaten entspricht der Wechsel von Beobachtersystemen im Weltall, die zum Beispiel auf unterschiedlichen Sternen installiert sein können.

► **BEISPIEL:** Setzen wir $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -1$ und $g_{ij} = 0$ für $i \neq j$, dann entspricht (16.40) der Minkowskimetrik

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

mit $x^4 = ct$ ($t = \text{Zeit}$). Eine solche Metrik liegt in dem trivialen Fall vor, dass keine Massen vorhanden sind und (x^1, \dots, x^4) einem Inertialsystem entspricht, in dem jeder kräftefreie Körper ruht oder sich auf einer Geraden bewegt.

Grundgleichungen für die Metrik: Die Grundgleichungen der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie lauten:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \varkappa T_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 4, \quad (16.41)$$

mit der Naturkonstanten $\varkappa = 8\pi\gamma/c^4$. Dabei ist R_{ikm}^j der Krümmungstensor, aus dem sich R_{ij} und R nach 16.1.2 ergeben. Ferner ist T_{ij} der sogenannte Energie-Impulstensor, der die Massen- und Energieverteilungen beschreibt. Explizit stellt (16.41) bei gegebenem T_{ij} ein kompliziertes System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Komponenten des metrischen Tensors g_{ij} dar.

Grundgleichung für die Bewegung von Massenpunkten und Lichtstrahlen: Die Bewegung $x^j = x^j(\sigma)$, $a \leq \sigma \leq b$, $j = 1, \dots, 4$, eines Massenpunktes entspricht nach Einstein einer geodätischen Linie, d.h.

$$\int ds^2 \equiv \int_a^b g_{ij}(x(\sigma)) \dot{x}^i(\sigma) \dot{x}^j(\sigma) d\sigma = \text{stationär}!,$$

$x^j(a), x^j(b)$ sind fest vorgegeben.

Nach 16.1.4 ist das in lokalen Koordinaten äquivalent zu dem Differentialgleichungssystem

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0. \quad (16.42)$$

Dabei wird zusätzlich Unterlichtgeschwindigkeit gefordert, d.h. $ds/d\sigma > 0$.

Gleichung (16.42) beschreibt auch die Bewegung eines Lichtstrahls, falls der Parameter σ so gewählt wird, dass $ds/d\sigma = 0$ gilt.

Der Parameter x^4/c besitzt zeitartigen Charakter. Seine Wahl ist jedoch willkürlich. Zur Beschreibung physikalischer Prozesse benötigt man die sogenannte Eigenzeit τ . Beschreibt

¹⁰Vom mathematischen Standpunkt aus bedeutet dies, dass (g_{ij}) die Signatur $(-1, -1, -1, 1)$ besitzt, d.h., es gilt

$$g_{44} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{33} & g_{34} \\ g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} > 0, \quad g < 0,$$

wobei g die Determinante aller g_{ij} bezeichnet, $i, j = 1, \dots, 4$.

$x^j = x^j(\sigma)$, $a \leq \sigma \leq b$, die Bewegung einer Uhr, dann verfließt zwischen dem Anfangszustand $\sigma = a$ und dem Endzustand $\sigma = b$ die Eigenzeit $\tau = s/c$, wobei

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(\sigma)) \dot{x}^i(\sigma) \dot{x}^j(\sigma)} \, d\sigma$$

die Bogenlänge bezeichnet.

Der Begriff der Eigenzeit führt zu dem sogenannten *Zwillingssparadoxon*. Werden neugeborene Zwillinge Z_1 und Z_2 nach der Geburt getrennt, wobei Z_1 auf der Erde bleibt und Z_2 sich auf einem Raumschiff durch das Weltall bewegt, dann fließt die Eigenzeit von Z_2 langsamer als die von Z_1 . Kehrt das Raumschiff eines Tages zur Erde zurück, dann ist somit Z_2 jünger als Z_1 .

Quasiklassische Näherung: Bezeichnen x^1, x^2, x^3 kartesische Koordinaten, und setzen wir $x^4 = ct$ (t = Zeit), dann ist die Riemannsche Metrik

$$ds^2 = c^2(1 + 2U/c^2)dt^2 - (1 - 2U/c^2)((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2)$$

eine Näherungslösung der Einsteinschen Gleichungen (16.41), falls man nach dem Parameter $1/c$ entwickelt (c = Lichtgeschwindigkeit) und $1/c$ als sehr klein auffasst. Hierbei stellt U das klassische Gravitationspotential dar, d.h., $\mathbf{K} = -\mathbf{grad} U$ bezeichnet die Newtonsche Gravitationskraft. Die Einsteinsche Bewegungsgleichung (16.42) stimmt dann in erster Näherung mit der klassischen Newtonschen Bewegungsgleichung überein.

Das Variationsproblem für die Metrik (Prinzip der stationären Wirkung): Die Einsteinschen Gleichungen (16.41) im homogenen Fall $T_{ij} \equiv 0$ lassen sich nach Hilbert gewinnen aus dem einfachen Variationsproblem

$$\int_{\Omega} R \, d\mu = \text{stationär!} \quad (16.43)$$

mit der skalaren Krümmung R und dem invarianten Maß $d\mu = \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^4$. In (16.43) ist g_{ij} so zu variieren, dass alle g_{ij} und ihre ersten partiellen Ableitungen auf $\partial\Omega$ fest bleiben.

Das Variationsproblem (16.43) kann man als das einfachste Variationsproblem auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auffassen, das von der Krümmung abhängt. Unter geeigneten Voraussetzungen an T_{ij} lassen sich auch die inhomogenen Einsteinschen Gleichungen (16.41) mit $T_{ij} \not\equiv 0$ aus einem Variationsproblem gewinnen.

Unter Benutzung von Differentialformen kann man (16.43) in der Gestalt

$$\int *R = \text{stationär!}$$

schreiben. Man bezeichnet $\int *R$ als die *Hilbert–Einstein-Wirkung*.

16.5.3 Die Schwarzschildmetrik eines Zentralkörpers

Die Riemannsche Metrik

$$ds^2 = c^2(1 - r_s/r) dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - r_s/r)^{-1} dr^2 \quad (16.44)$$

ist eine Lösung der Einsteinschen Gleichungen (16.41). Dabei gilt (θ, φ, r) = Polarkoordinaten, t = Zeit, $r_s = 2\gamma M/c^2$ = Schwarzschildradius, γ = Gravitationskonstante, c = Lichtgeschwindigkeit.

Die sogenannte Schwarzschildmetrik (16.44) beschreibt das Gravitationsfeld eines Zentralkörpers der Masse M (z.B. der Sonne). Aus (16.44) ergeben sich die folgenden physikalischen Effekte.

(i) *Periheldrehung*. Berechnet man die Bewegung eines Planeten gemäß (16.42), dann ergibt sich im Unterschied zur klassischen Theorie eine langsame Drehung der großen Halbachse der elliptischen Bahn. Für den Merkur sind das 43 Bogensekunden im Jahrhundert, was in Übereinstimmung mit astronomischen Beobachtungen steht.

(ii) *Lichtablenkung*. Da sich Massenpunkte und Lichtstrahlen nach der analogen Gleichung (16.42) bewegen, erwartet man, dass Lichtstrahlen analog zu Kometen von der Sonne abgelenkt werden. Explizit erhält man für Lichtstrahlen in der Nähe der Sonne eine Ablenkung von 1,75 Bogensekunden.

(iii) *Rotverschiebung*. Breiten sich zwei Signale aus, dann hängt die Eigenzeit von der Riemannschen Metrik (16.44) ab. Dadurch hängt z.B. die Lichtfrequenz vom Beobachtungsort ab. Die explizite Rechnung zeigt, dass die Wellenlängen λ_0 bzw. λ_1 des Lichtes am Beobachtungsort r_0 bzw. r_1 der Beziehung

$$\lambda_1/\lambda_0 = (1 - r_s/r_1)^{1/2} (1 - r_s/r_0)^{-1/2}$$

genügen, wobei r den Abstand vom Zentralkörper bezeichnet. Entspricht r_0 dem Sonnenrand und r_1 der Position der Erde, dann ist $r_s < r_0 < r_1$ und somit $\lambda_1 > \lambda_0$. Folglich beobachtet man auf der Erde eine Rotverschiebung in den Spektren von Elementen. Der gleiche Effekt kann bereits in irdischen Labors unterschiedlicher Höhe nachgewiesen werden.

16.5.4 Schwarze Löcher

Die Schwarzschildmetrik (16.44) besitzt für $r = r_s$ eine Singularität.¹¹ Aufgrund einer genaueren Analyse nehmen die Physiker an, dass die Schwarzschildmetrik (16.44) auch sogenannte schwarze Löcher vom Radius r_s und der Masse M beschreibt. Ein schwarzes Loch vom Radius $r_s = 3$ km besitzt z.B. die Sonnenmasse. Das führt zu ungeheuren Gravitationskräften, die so stark sind, dass kein Lichtstrahl aus einem schwarzen Loch entweichen kann [vgl. Zeidler 1995].

16.5.5 Die Expansion des Weltalls (Urknall)

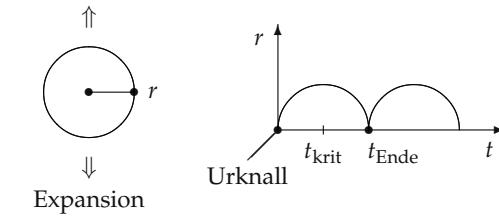
Grundidee: Die Einsteinschen Gleichungen (16.41) besitzen Lösungen, die einem expandierenden Weltall entsprechen. Diese Expansion wird experimentell als Rotverschiebung in den Spektren ferner Galaxien beobachtet (Hubble-Effekt). Die Rotverschiebung folgt streng aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sie kann aber qualitativ bereits im Rahmen des klassischen Dopplereffekts verstanden werden: da sich die Galaxien infolge der Expansion des Weltalls von uns fortbewegen, besitzen zwei von einem fernen Stern ausgesandte Lichtsignale unterschiedliche Laufzeiten, d.h., auf der Erde wird eine Zeitdehnung der beiden Signale beobachtet, was zu einer Vergrößerung der Wellenlänge führt. Es existieren zwei unterschiedliche Kosmosmodelle:

- (i) das geschlossene Weltmodell und
- (ii) das offene Weltmodell.

Im *geschlossenen Weltmodell* besitzt das Weltall ein *endliches* Volumen. Die genaue Struktur wird weiter unten angegeben. Um eine anschauliche Vorstellung zu erhalten, stellen wir uns das Weltall als eine Kreislinie vom Radius r vor (Abb. 16.8(a)), wobei sich r in Abhängigkeit von der

¹¹Durch eine geeignete Koordinatentransformation kann man zeigen, dass es sich nur um eine scheinbare Singularität handelt, so dass die Physik für $r \leq r_s$ nicht aufhört. Allerdings liegen im Bereich $r < r_s$ „wilde“ Raum-Zeit-Verhältnisse vor.

Zeit t ändert (Abb. 16.8(b)). Zur Zeit $t = 0$ des sogenannten Urknalls gilt $r = 0$, d.h., das Weltall ist auf einen Punkt konzentriert. Dann wächst der Radius des Weltalls monoton bis zu einer kritischen Zeit t_{krit} . Anschließend zieht sich das Weltall wiederum auf einen Punkt zusammen. Danach kann theoretisch ein neuer Urknall einsetzen.

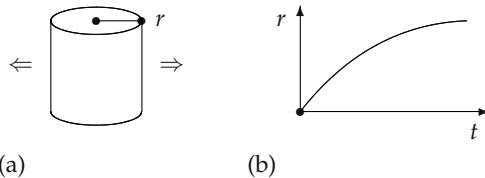


(a)

(b)

Abb. 16.8

Im *offenen Weltmodell* besitzt das Weltall ein *unendliches Volumen*. Hier können wir uns das Weltall als den Mantel eines Zylinders vom Radius r vorstellen. Dabei vergrößert sich das Weltall ständig (Abb. 16.9).



(a)

(b)

Abb. 16.9

Die Strahlungsenergie zur Zeit des Urknalls hat sich durch die bisher stattgefundene Expansion des Weltalls extrem verdünnt, so dass nur noch eine schwache Strahlung übriggeblieben ist, die 1965 von Penzias und Wilson entdeckt wurde (die sogenannte 3K-Strahlung). Heute sind die meisten Physiker von der Theorie des Urknalls überzeugt.

Riemannsche Metrik für das geschlossene Weltmodell: Hier wird das dreidimensionale Weltall durch die Gleichung

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = r^2$$

beschrieben. Das ist die Oberfläche S_r^3 einer vierdimensionalen Kugel vom Radius r . Führen wir sphärische Koordinaten θ, φ, ψ ein, dann gilt

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, & \xi_2 &= r \sin \psi \sin \theta \cos \varphi, \\ \xi_3 &= r \sin \psi \cos \theta, & \xi_4 &= r \cos \psi, \end{aligned}$$

mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $0 \leq \theta, \psi \leq \pi$. Das Bogenelement auf S_r^3 ist gegeben durch

$$dl^2 = r^2(d\psi^2 + \sin^2 \psi (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)) \quad (16.45)$$

mit dem zugehörigen endlichen Volumen

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi r^3 \sin^2 \psi \sin \theta d\varphi d\theta d\psi = 2\pi^2 r^3.$$

Der Krümmungsskalar von S_r^3 lautet $R = 6/r^2$. Die Riemannsche Metrik der Einsteinschen vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die zu unserem Kosmos gehört, ergibt sich durch

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad \text{mit } r = r(t).$$

Damit dies eine Lösung der Einsteinschen Gleichungen (16.41) darstellt, muss zwischen dem Radius r des Weltalls und der Zeit t die Beziehung

$$r = \varkappa M c^2 (1 - \cos \eta) / 12\pi^2, \quad t = \varkappa M c (\eta - \sin \eta) / 12\pi^2$$

bestehen mit $0 < \eta < 2\pi$ und der Masse M des Kosmos (Abb. 16.8(b)).

Riemannsche Metrik für das offene Weltmodell: Hier wird das dreidimensionale Weltall durch das Produkt $S_r^2 \times \{\psi > 0\}$ beschrieben mit dem Bogenelement

$$dl^2 = r^2 (d\psi^2 + \sinh^2 \psi (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)) \quad (16.46)$$

und $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$ sowie $0 < \psi < \infty$. Das Weltall entspricht hier einer dreidimensionalen eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeit von unendlichem Volumen mit der negativen skalaren Krümmung $R = -6/r^2$. Parallel zum geschlossenen Weltmodell erhalten wir für die Riemannsche Metrik der vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad r = r(t).$$

Dabei gilt $r = \varkappa C(\cosh \eta - 1)$, $t = \varkappa C(\sinh \eta - \eta)$, $\eta > 0$, $C = \text{const}$ (Abb. 16.9(b)). Sowohl im geschlossenen als auch im offenen Weltmodell wird in idealisierter Weise eine homogene Massenverteilung im Weltall vorausgesetzt. Daraus ergibt sich die Struktur des Energie-Impulstensors.

Die kosmologische Konstante: Einstein fügte zu der Grundgleichung (16.41) der allgemeinen Relativitätstheorie noch einen Term $-\Lambda g_{ij}$ hinzu. Die physikalische Größe Λ heißt kosmologische Konstante. Das ergibt die neue Grundgleichung

$$R_{ij} - 2^{-1} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = \kappa T_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 4. \quad (16.47)$$

Ursprünglich wollte Einstein durch Hinzufügen dieses Terms ein statisches Modell des Universums erhalten. Die Idee eines sich ausdehnenden Universums erschien ihm im Jahre 1916 zu kühn, und es gab keinen experimentellen Beweis dafür. Die Ausdehnung des Universums wurde erst im Jahre 1929 durch Hubble entdeckt. Lange Zeit spielte die kosmologische Konstante keine Rolle mehr. Die in (16.45) und (16.46) diskutierten Weltmodelle entsprechen $\Lambda = 0$.

Die Situation hat sich durch neuere Messdaten wesentlich geändert. Heute gilt die kosmologische Konstante Λ als unverzichtbar. Zur Zeit gehen die Kosmologen auf Grund von neueren Messdaten davon aus, dass sich das Universum in beschleunigter Weise ausdehnt und in dieser Form immer weiter ausdehnen wird. Die kosmologische Konstante entspricht dabei einer zusätzlichen Kraft, die die beschleunigte Ausdehnung bewirkt. Am Ende steht ein immer dunkler werdendes Universum, in dem alle Strukturen (einschließlich der schwarzen Löcher) zerfallen sind (vgl. [Adams, Laughlin 2004]). Denkbar ist jedoch, dass durch eine Konzentration von zufälligen Quantenfluktuationen ein neuer Urknall entsteht. Diskutiert wird zur Zeit auch die Existenz von Paralleluniversen, die unser Universum beeinflussen können. Hier gibt es viele denkbare Möglichkeiten. Man sollte jedoch mit Spekulationen sehr vorsichtig umgehen und immer wieder fragen, was durch Messdaten tatsächlich gesichert ist. Tatsächlich basiert auch die Analyse großer Messdaten auf gewissen Annahmen und muss immer wieder kritisch hinterfragt werden.

Das Alter des Universums: Kurz nach dem Urknall war das Universum ungeheuer heiß. Durch die Ausdehnung kühlte sich das Universum sehr stark ab. Von der hohen Anfangsenergie beobachten wir heute nur noch eine sehr energiearme Strahlung, die man die Hintergrundstrahlung des Universums nennt. Das satellitengestützte NASA-Experiment WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) hat die Hintergrundstrahlung in allen Himmelsrichtungen vermessen. Dieses ungeheure Datenmaterial zeigt, dass diese Strahlung nicht vollständig homogen ist, sondern es liegen geringfügige richtungsabhängige Abweichungen vor, die uns einen Blick auf die Struktur des Universums etwa 400 000 Jahre nach dem Urknall erlauben. Legt man das

Standardmodell der Kosmologie zugrunde, dann erhält man ein Alter des Universums von 13,7 Milliarden Jahren. Weitere Informationen kann man auf der Homepage der NASA finden.

Dunkle Materie: Die vorliegenden Messdaten lassen den Schluss zu, dass nur 4 Prozent der Materie und Energie unseres Universums klassischen Ursprungs sind, während 96 Prozent sogenannte dunkle Materie und dunkle Energie darstellen, deren Natur noch völlig ungeklärt ist. Das ist eine der großen offenen Fragen der modernen Kosmologie.

Literatur zu Kapitel 16

- [Adams und Laughlin 2004] Adams, F., Laughlin, G.: Die fünf Zeitalter des Universums: eine Physik der Ewigkeit. Übersetzung aus dem Amerikanischen. Deutscher Taschenbuchverlag, München (2004)
- [Börner 2003] Börner, G.: The Early Universe: Facts and Fiction, 4th edition. Springer, Berlin (2003)
- [Choquet-Bruhat et al. 1991] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M.: Analysis, Manifolds, and Physics, Vols. 1, 2. North-Holland, Amsterdam (1991)
- [Christodoulou 2009] Christodoulou, D.: The Formation of Black Holes in General Relativity, European Mathematical Society, Zurich (2009)
- [do Carmo 1991] do Carmo, M.: Riemannian Geometry. Transl. from the Portuguese. 2nd edition, Birkhäuser, Basel (1991)
- [Grøn und Hervik 2007] Grøn, Ø., Hervik, S.: Einstein's Theory of General Relativity: with Modern Applications in Cosmology. Springer, New York (2007)
- [Isham 1993] Isham, C.: Modern Differential Geometry for Physicists. World Scientific, Singapore (1993)
- [Jost 2008] Jost, J.: Riemannian Geometry and Geometric Analysis, 5th edition. Springer, Berlin (2008)
- [Misner et al. 1973] Misner, C., Thorne, K., Wheeler, J.: Gravitation. Freeman, San Francisco (1973)
- [Naber 1988] Naber, G.: Space-Time and Singularities. Cambridge University Press, Cambridge, England (1988)
- [Padmanabhan 2010] Padmanabhan, T.: Gravitation: Foundations and Frontiers, Cambridge University Press, Cambridge, England (2010)
- [Reichardt 1985] Reichardt, H.: Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie. Mit Originalarbeiten von J. Bolyai, N.I. Lobatschewski, F. Klein. Teubner, Leipzig (1985)
- [Straumann 2004] Straumann, N.: General Relativity with Applications to Astrophysics. Springer, Berlin (2004)
- [Weinberg 1992] Weinberg, S.: Die ersten drei Minuten: die moderne Vorstellung vom Beginn des Universums. Übers. a.d. Engl. 7. Auflage. Piper, München (1992)
- [Weinberg 2008] Weinberg, S.: Cosmology. Oxford University Press, Oxford (2008)
- [Weyl 1993] Weyl, H.: Raum, Zeit, Materie. 8. Auflage. Springer, Berlin (1993)
- [Zeidler 1995] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Vol. 4: Applications to Mathematical Physics. 2nd edition. Springer, New York (1995)

KAPITEL 17

LIEGRUPPEN, LIEALGEBREN UND ELEMENTARTEILCHEN – MATHEMATIK DER SYMMETRIE

In den Jahren 1870 bis 1874 entwickelte ich den Begriff der endlichen kontinuierlichen Gruppe und erkannte seine weitreichende Bedeutung für die Geometrie und für die Theorie der Differentialgleichungen.

Sophus Lie (1842-1899)

In diesem Kapitel betrachten wir das Zusammenspiel zwischen Algebra, Analysis, Geometrie und moderner Physik.

Viele Phänomene in der Natur lassen sich auf Symmetrien zurückführen. Es gibt sichtbare Symmetrien (z. B. die Symmetrien von Kristallen) und unsichtbare (abstrakte) Symmetrien (z. B. die $SU(n)$ -Symmetrien der Elementarteilchen, die im Fall $n = 3$ für den Aufbau eines Protons aus drei Quarks und für die Farbladungen der Quarks verantwortlich sind). Mathematisch werden Symmetrien durch Gruppen und deren Darstellungen (Realisierungen als lineare Operatoren) beschrieben. Lassen sich die Gruppenelemente durch endlich viele reelle (oder komplexe) Zahlen parametrisieren und hängt die Gruppenmultiplikation in glatter Weise von diesen Parametern ab, dann spricht man von kontinuierlichen Gruppen oder *Liegruppen* (z. B. die Gruppe $SO(3)$ aller Drehungen des dreidimensionalen Raumes). Auf Liegruppen kann man den gesamten Apparat der Analysis auf Mannigfaltigkeiten anwenden.

Eine fundamentale (auf Sophus Lie zurückgehende) Strategie zur Untersuchung von Liegruppen G besteht darin, dass man G am Einselement *linearisiert*. Dadurch ergibt sich die zu G gehörige *Liealgebra* $\mathbb{L}G$. Liealgebren sind wesentlich *einfachere Objekte* als Liegruppen. Ihre Untersuchung kann mit den Methoden der *linearen Algebra* erfolgen. Eines der Hauptergebnisse besteht darin, dass die Liealgebra $\mathbb{L}G$ grob gesprochen „alle Informationen“ über die lokale Struktur der Liegruppe G in einer Umgebung des Einselements enthält. Die globale Theorie der Liegruppen wird vom Begriff der *universellen Überlagerungsgruppe* beherrscht. Der Übergang von einer Liealgebra zu ihrer Liegruppe verallgemeinert den Übergang vom linearen Raum $\mathbb{L}G = \mathbb{R}$ (additive Gruppe der reellen Zahlen) zur multiplikativen Gruppe G der reellen Zahlen, der durch die Exponentialfunktion

$$e^r e^s = e^{r+s} \quad \text{für alle } r, s \in \mathbb{R}$$

gegeben ist, d. h., es ist $e^r \in G$ für alle $r \in \mathbb{L}G$. Die Theorie der Liegruppen und Liealgebren kann man als eine weitgehende *Verallgemeinerung der klassischen Exponentialfunktion* auffassen. Nach 11.6.3 ist für komplexe $(n \times n)$ -Matrizen A in natürlicher Weise die Exponentialfunktion e^A durch die Reihe

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

erklärt, die für jedes Matrixelement konvergent ist. Es gilt

$$e^A e^B = e^{A+B}, \quad \text{falls } AB = BA.$$

Für die Elementarteilchentheorie sind Liealgebren fundamentale mathematische Objekte. Der tiefere Grund besteht darin, dass nach Heisenberg die *Quantisierung* der klassischen Physik mit Hilfe von *Vertauschungsrelationen* geschieht und derartige Vertauschungsrelationen typisch für Liealgebren sind.

In diesem Kapitel steht \mathbb{K} für die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} bzw. der komplexen Zahlen \mathbb{C} .

17.1 Grundideen

Die Begriffe „Liealgebra, Gruppe, Liegruppe und Darstellung“ werden in den nächsten Abschnitten präzis definiert. Wir beschränken uns hier zur Erläuterung der Grundideen auf wichtige Beispiele. Für die moderne Elementarteilchentheorie sind besonders wichtig die *Liegruppe $SU(n)$* und ihre *Liealgebra $su(n)$* . Dabei besteht $SU(n)$ aus allen komplexen unitären $(n \times n)$ -Matrizen, deren Determinante gleich eins ist. Ferner bezeichnet $su(n)$ alle schieffadjungierten komplexen $(n \times n)$ -Matrizen mit verschwindender Spur (vgl. Tabelle 17.1).

Tabelle 17.1 Die Klassische Liegruppe G bezüglich des Matrizenprodukts AB mit der zugehörigen reellen Liealgebra $\mathbb{L}G$ bezüglich der Klammeroperation $[C, D] := CD - DC$; es gilt $d := \dim G = \dim \mathbb{L}G$

Bezeichnungen: $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$,

$\det A$ = Determinante von A ,

$\text{tr } A$ = Spur¹ von A ,

I_n = n -dimensionale Einheitsmatrix,

A^T (bzw. A^*) transponierte (bzw. adjungierte) Matrix zu A (vgl. 11.2.5.3)

$G = GL(n, \mathbb{K})$ (allgemeine lineare \mathbb{K} -Gruppe)	alle invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen mit Werten in \mathbb{K}	$d = n^2$
$\mathbb{L}G = gl(n, \mathbb{K})$	alle $(n \times n)$ -Matrizen mit Werten in \mathbb{K}	
$G = SL(n, \mathbb{K})$ (spezielle lineare \mathbb{K} -Gruppe)	alle $A \in GL(n, \mathbb{K})$ mit $\det A = 1$	$d = n^2 - 1$
$\mathbb{L}G = sl(n, \mathbb{K})$	alle $C \in gl(n, \mathbb{K})$ mit $\text{tr } C = 0$	
$G = GL^+(n, \mathbb{R})$ (Komponente des Einselements in $GL(n, \mathbb{R})$)	alle $A \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $\det A > 0$	$d = n^2$
$\mathbb{L}G = gl(n, \mathbb{R})$		
$G = O(n)$ (orthogonale Gruppe)	alle $A \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $AA^T = A^TA = I_n$	$d = \frac{n(n-1)}{2}$
$\mathbb{L}G = o(n)$	alle $C \in gl(n, \mathbb{R})$ mit $C^T = -C$	
$G = SO(n)$ (spezielle orthogonale Gruppe = Komponente des Einselements in $O(n)$)	alle $A \in O(n)$ mit $\det A = 1$	$d = \frac{n(n-1)}{2}$
$\mathbb{L}G = so(n) = o(n)$		

¹ $\text{tr } A$ ist gleich der Summe der Diagonalelemente von A .

Fortsetzung von Tabelle 17.1

$G = U(n)$ (unitäre Gruppe)	alle $A \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $AA^* = A^*A = I_n$	$d = n^2$
$\mathbb{L}G = u(n)$	alle $C \in gl(n, \mathbb{C})$ mit $C^* = -C$	
$G = SU(n)$ (spezielle unitäre Gruppe)	alle $A \in U(n)$ mit $\det A = 1$	$d = n^2 - 1$
$\mathbb{L}G = su(n)$	alle $C \in u(n)$ mit $\text{tr } C = 0$	
$G = O(n, \mathbb{C})$ (komplexe orthogonale Gruppe)	alle $A \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $AA^T = A^TA = I_n$	$d = n(n-1)$
$\mathbb{L}G = o(n, \mathbb{C})$	alle $C \in gl(n, \mathbb{C})$ mit $A^T = -A^T$	
$G = SO(n, \mathbb{C})$ (spezielle komplexe orthogonale Gruppe)	alle $A \in O(n, \mathbb{C})$ mit $\det A = 1$	$d = n(n-1)$
$\mathbb{L}G = so(n, \mathbb{C}) = o(n, \mathbb{C})$		
$G = Sp(2n, \mathbb{K})$ (sympaktische \mathbb{K} -Gruppe)	alle $A \in GL(2n, \mathbb{K})$ mit $A^TJA = J$, wo- bei $J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$	$d = n(2n+1)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $d = 2n(2n+1)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
$\mathbb{L}G = sp(2n, \mathbb{K})$	alle $C \in gl(2n, \mathbb{K})$ mit $C^TJ = -JC$	

$$Sp(2n, \mathbb{K}) \subseteq SL(2n, \mathbb{K}), \quad sp(2n, \mathbb{K}) \subseteq sl(2n, \mathbb{K})$$

$G = Sp(2n) := Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n),$ $\mathbb{L}G = sp(2n) := sp(2n, \mathbb{C}) \cap u(2n)$		$d = n(2n+1)$
$G = O(p, q)$	alle $A \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $A^T D_{p,q} A = D_{p,q}$, wobei $D_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad p+q=n$	$d = \frac{n(n-1)}{2}$
$\mathbb{L}G = o(p, q)$	alle $C \in gl(n, \mathbb{R})$ mit $C^T D_{p,q} = -D_{p,q} C$	
$G = SO(p, q) := O(p, q) \cap SL(n, \mathbb{R}),$ $\mathbb{L}G = so(p, q) = o(p, q)$		$d = \frac{n(n-1)}{2}$
$O(3, 1)$ (Lorentzgruppe) $SO^+(3, 1)$ (eigentliche Lorentzgruppe = Komponente des Einselementes in $O(3, 1)$) $\mathbb{L}SO^+(3, 1) = \mathbb{L}O(3, 1) = o(3, 1)$		$d = 6$
$G = U(p, q)$	alle $A \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $A^* D_{p,q} A = D_{p,q}$	$d = n^2$
$\mathbb{L}G = u(p, q)$	alle $C \in gl(n, \mathbb{C})$ mit $C^* D_{p,q} = -D_{p,q} C$	
$G = SU(p, q) := U(p, q) \cap SL(n, \mathbb{C}),$ $\mathbb{L}G = su(p, q) = u(p, q) \cap sl(n, \mathbb{C})$		$d = n^2 - 1$

► ELEMENTARES BEISPIEL 1 (unitäre Gruppe $U(1)$): Bezeichnet

$$U(1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

die Menge aller komplexen Zahlen vom Betrag eins, dann ist $U(1)$ eine *Liegruppe* bezüglich der üblichen Multiplikation (vgl. 17.5). Die Menge $U(1)$ entspricht dem Rand des Einheitskreises S^1 (Abb. 17.1). Der *Tangentialraum* $\mathbb{L}U(1) = u(1)$ im Einselement, d. h. im Punkt $z = 1$, ist durch

$$u(1) := \{i\varphi : \varphi \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Bezuglich der trivialen *Vertauschungsrelation*

$$[a, b] := ab - ba = 0 \quad \text{für alle } a, b \in u(1)$$

wird $u(1)$ zu einer *Liealgebra* (vgl. 17.4). Der Zusammenhang zwischen Liegruppe $U(1)$ und Liealgebra $u(1)$ ist im vorliegenden Fall durch

$$e^{i\varphi} \in U(1) \quad \text{für alle } i\varphi \in u(1)$$

gegeben. Die *Linearisierung* lautet für alle $i\varphi \in u(1)$:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + O(\varphi^2), \quad \varphi \rightarrow 0.$$

Alle Werte $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $|\varphi| < \varepsilon$ für ein hinreichend kleines ε stellen eine *lokale Parametrisierung* von $U(1)$ in einer Umgebung des Einselementes $z = 1$ dar.

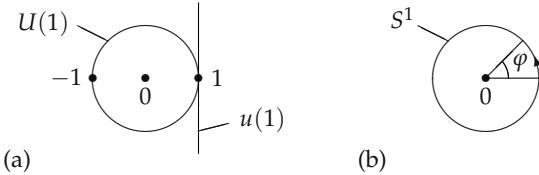


Abb. 17.1

► BEISPIEL 2 (unitäre Gruppe $U(n)$): Um eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen zu erhalten, sei $U(n)$ die Menge aller komplexen unitären $(n \times n)$ -Matrizen mit $n \geq 1$, d. h. $AA^* = A^*A = I$. Ferner sei $u(n)$ die Menge aller komplexen schiefadjungierten $(n \times n)$ -Matrizen, d. h. $B^* = -B$, und wir setzen

$$[C, D] := CD - DC.$$

Für $G := U(n)$ und $\mathbb{L}G := u(n)$ gilt dann folgendes:

- (i) *Multiplikation auf G .* Aus $A, B \in G$ folgt $AB \in G$.
- (ii) *Lieklammerprodukt auf $\mathbb{L}G$.* Aus $C, D \in \mathbb{L}G$ folgt $[C, D] \in \mathbb{L}G$.
- (iii) *Exponentialabbildung.* Für alle $C \in \mathbb{L}G$ gilt $e^C \in G$.
- (iv) *Tangentialvektoren im Einselement I von G .* Ist $A = A(t)$ eine Kurve in G , die durch das Einselement I geht, d. h., $t \mapsto A(t)$ ist eine C^1 -Abbildung² mit $A(t) \in G$ für alle $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ bei festem $\varepsilon > 0$ und $A(0) = I$, dann gilt

$$A'(0) \in \mathbb{L}G.$$

Umgekehrt existiert zu jeder Matrix $C \in \mathbb{L}G$ eine derartige Kurve mit $A'(0) = C$. Explizit ist $A(t) = e^{tC}$.

²Das bedeutet, dass alle Matrixelemente von $A(t)$ stetig differenzierbar sind (als Funktionen des reellen Parameters t). Die Ableitung $A'(t)$ erhält man, indem man jedes Matrixelement von $A(t)$ nach t differenziert.

(v) *Zusammenhang zwischen Gruppenmultiplikation und Lieklammern.* Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $C, D \in \mathbb{L}G$ hat man

$$e^{tC} e^{tD} e^{-tC} e^{-tD} = I + t^2 [C, D] + O(t^3), \quad t \rightarrow 0.$$

Im Sinne der allgemeinen Theorie ist $\mathbb{L}G = u(n)$ bezüglich der Klammeroperation $[C, D]$ eine *Liealgebra*, die zur *Liegruppe* $G = U(n)$ gehört, wobei das Produkt auf $U(n)$ dem üblichen Matrizenprodukt entspricht.

Nach (v) folgt aus der Kommutativitätsrelation $e^{tC} e^{tD} = e^{tD} e^{tC}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ stets $[C, D] = 0$. In der Regel ist jedoch $[C, D] \neq 0$. Somit kann die Lieklammer $[C, D]$ grob gesprochen als ein Maß für die *Nichtkommutativität* der zugehörigen Gruppe $U(n)$ ($n \geq 2$) angesehen werden.

Hauptsatz über klassische Gruppen: Es seien G und $\mathbb{L}G$ wie in Tabelle 17.1 vorgegeben. Dann gilt:

(a) Die Aussagen (i) bis (v) bleiben gültig.

(b) G ist eine d -dimensionale reelle C^∞ -Mannigfaltigkeit, und $\mathbb{L}G$ ist der Tangentialraum von G im Punkt I (Einselement von G), also $\dim \mathbb{L}G = \dim G$.

(c) Mit der Exponentialabbildung $C \mapsto e^C$ wird eine Nullumgebung der Liealgebra $\mathbb{L}G$ C^∞ -diffeomorph auf eine Umgebung der Eins der Liegruppe G abgebildet.

Für alle $C \in \mathbb{L}G$ hat man die Linearisierung

$$e^C = I + C + o(|C|_\infty), \quad |C|_\infty \rightarrow 0,$$

wobei $|C|_\infty := \max |c_{jk}|$ gilt (Maximum über die Beträge aller Matrixelemente).

Im Spezialfall der Gruppen $G = SO(n), U(n), SU(n)$ ist $C \mapsto e^C$ eine Abbildung von $\mathbb{L}G$ auf G (surjektive Exponentialabbildung).

Mannigfaltigkeitsstruktur: Jede $(n \times n)$ -Matrix $C = (c_{jk})$ mit Werten in \mathbb{K} kann aufgefasst werden als ein Punkt in \mathbb{K}^{n^2} mit den Komponenten

$$(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}; c_{21}, \dots, c_{2n}; \dots; c_{n1}, \dots, c_{nn}).$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ setzen wir $c_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$ mit $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$. Ordnen wir $c_{jk} \in \mathbb{C}$ den Punkt $(a_{jk}, b_{jk}) \in \mathbb{R}^2$ zu, dann kann jede Matrix C mit einem Punkt in \mathbb{R}^{n^2} bzw. \mathbb{R}^{2n^2} identifiziert werden, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt.

Bezüglich des Abstands

$$d(C, D) := |C - D|_\infty \quad \text{für alle } C, D \in GL(n, \mathbb{K}) \tag{17.1}$$

wird $GL(n, \mathbb{K})$ zu einem *metrischen Raum*. Sämtliche Gruppen G in Tabelle 17.1 mit Matrixelementen in \mathbb{K} sind abgeschlossene Teilmengen von $GL(n, \mathbb{K})$.

Gleichzeitig sind alle diese Gruppen G reelle C^∞ -Mannigfaltigkeiten, nämlich Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^{n^2} bzw. \mathbb{R}^{2n^2} für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Die *lokalen Mannigfaltigkeitskoordinaten* in der Umgebung eines Punktes $g \in G$ erhält man folgendermaßen: Wir betrachten alle Matrizen h der Form

$$h = g e^C, \quad C \in \mathbb{L}G,$$

mit $|C|_\infty < \varepsilon$ für hinreichend kleines ε . Alle diese Punkte h bilden eine Umgebung von g in der Gruppe G . Die lokalen Koordinaten von h sind nun die Komponenten der Matrix C , die in der zugehörigen Liealgebra $\mathbb{L}G$ liegt. Speziell für $g = I$ wird durch C eine Umgebung des Einselementes in G parametrisiert.

Glattheit der Multiplikation und der Inversenbildung:

Die Abbildungen

$$\varphi(AB) := AB \quad \text{und} \quad \psi(A) := A^{-1} \quad \text{für alle } A, B \in G,$$

wobei G durch Tabelle 17.1 gegeben ist, hängen in glatter Weise von den Matrixelementen ab. Durch die Exponentialabbildung überträgt sich das auf die Elemente der Matrizen der entsprechenden Liealgebra, also auf die lokalen Koordinaten. Deshalb sind die Abbildungen

$$\varphi : G \times G \rightarrow G \quad \text{und} \quad \psi : G \rightarrow G$$

C^∞ -Diffeomorphismen.

Topologische Struktur: Da jede Gruppe G in Tabelle 17.1 bezüglich der Metrik (17.1) ein metrischer Raum und somit ein topologischer Raum ist, sind für G alle topologischen Begriffe erklärt. Für die Darstellungstheorie sind die Eigenschaften von G „kompakt“, „zusammenhängend“ und „einfach zusammenhängend“ besonders wichtig. In Tabelle 17.2 findet man die betreffenden Eigenschaften der in Tabelle 17.1 angegebenen fundamentalen klassischen Gruppen.

Tabelle 17.2

Liegruppe	
kompakt	$O(n), SO(n), U(n), SU(n), Sp(2n)$
nicht kompakt	$GL(n, \mathbb{K}), SL(n, \mathbb{K}), O(n, \mathbb{C}), SO(n, \mathbb{C}), Sp(2n, \mathbb{K}), O(p, q), SO(p, q), U(p, q), SU(p, q) \quad (p, q \geq 1), SO^+(3, 1) \quad (\text{eigentliche Lorentzgruppe})$
zusammenhängend	$GL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{K}), SO(n), SO(n, \mathbb{C}), U(n), SU(n), Sp(2n, \mathbb{K}), Sp(2n), SO^+(3, 1) \quad (\text{eigentliche Lorentzgruppe})$
einfach zusammenhängend	$SL(n, \mathbb{C}), SU(n), Sp(2n), SO(1) = SL(1, \mathbb{R}) = \{1\}$
nicht zusammenhängend (k Anzahl der Komponenten)	$k = 2: GL(n, \mathbb{R}), O(n), O(n, \mathbb{C}), k = 4: O(p, q) \quad (\text{z. B. Lorentzgruppe } O(3, 1)), SO(p, q) \quad (p, q \geq 1)$

► **BEISPIEL 3:** Die zu $G = U(1)$ gehörige Mannigfaltigkeit ist der Rand S^1 des Einheitskreises (Abb. 17.1). Als topologischer Raum ist S^1 kompakt und zusammenhängend. Da es eine geschlossene Kurve in S^1 gibt, die sich in S^1 nicht auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ist S^1 nicht einfach zusammenhängend. Folglich ist die Liegruppe $U(1)$ kompakt und zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

Die zu $G = GL(1, \mathbb{R})$ gehörige Mannigfaltigkeit ist $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Somit ist $GL(1, \mathbb{R})$ nicht kompakt und besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten (Menge der positiven reellen Zahlen bzw. negativen reellen Zahlen). Allgemeiner ist die Liegruppe $GL(n, \mathbb{R})$ für alle $n \geq 1$ nicht zusammenhängend. Denn setzen wir

$$\varphi(C) = \det C \quad \text{für alle } C \in GL(n, \mathbb{R}),$$

und nehmen an, dass $GL(n, \mathbb{R})$ zusammenhängend ist, dann muss das Bild $\varphi(GL(n, \mathbb{R}))$ auf Grund der Stetigkeit von φ auch zusammenhängend sein. Diese Bildmenge ist jedoch wegen $\det C \neq 0$ gleich $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ und somit nicht zusammenhängend.

Die Drehgruppe: Im folgenden erläutern wir am Beispiel der Drehgruppe wichtige anschauliche Zusammenhänge zwischen Drehungen (Liegruppe $SO(3)$), infinitesimalen Drehungen (Liealgebra $so(3)$) und Differentialoperatoren (Drehimpuls in der Quantenmechanik).

► **STANDARDBEISPIEL 4:** Wir wählen ein kartesisches (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem im \mathbb{R}^3 und bezeichnen mit $SO(3)$ die Menge aller Drehungen. Diese Gruppe besteht aus allen reellen orthogonalen (3×3) -Matrizen, deren Determinante gleich eins ist, d. h.

$$SO(3) := \{A \in GL(3, \mathbb{R}) : A^T A = AA^T = I, \det A = 1\}.$$

Die zu $A \in SO(3)$ gehörige Drehung lautet

$$x' = Ax \quad (17.2)$$

mit der Spaltenmatrix $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. Die Liealgebra $so(3)$ der Liegruppe $SO(3)$ ist durch

$$so(3) := \{C \in gl(3, \mathbb{R}) : C^T = -C\}$$

gegeben, d. h., $so(3)$ besteht aus allen reellen schiefsymmetrischen (3×3) -Matrizen. Die Matrizen $B \in so(3)$ bezeichnet man als *infinitesimale Drehungen*. Diese Bezeichnung wird durch die Linearisierung

$$e^B = I + B + o(|B|_\infty), \quad |B|_\infty \rightarrow 0, \quad (17.3)$$

für alle $B \in so(3)$ motiviert. Tatsächlich kann man jede Drehung $A \in SO(3)$ in der Form (17.3) darstellen, d. h., es ist $A = e^B$ mit $B \in so(3)$.

Betrachten wir speziell die Matrizen

$$D_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad D_2 := \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$D_3 := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dann entspricht D_j einer Drehung um die x_j -Achse mit dem Drehwinkel φ . Wegen $\cos \varphi = 1 + O(\varphi^2)$ und $\sin \varphi = \varphi + O(\varphi^3)$ für $\varphi \rightarrow 0$ erhalten wir die Linearisierungen

$$D_j(\varphi) = I + \varphi \mathbb{T}_j + O(\varphi^2), \quad \varphi \rightarrow 0,$$

mit

$$\mathbb{T}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathbb{T}_j \in so(3)$ für $j = 1, 2, 3$. Im Falle kleiner Drehwinkel φ ist $I + \varphi \mathbb{T}_j$ eine erste Näherung für die Drehung $D_j(\varphi)$. Die Matrizen \mathbb{T}_j bilden eine Basis der reellen Liealgebra $so(3)$, d. h., es ist $so(3) = \text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \mathbb{T}_3)$, und wir erhalten die Vertauschungsrelationen

$$[\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2] = \mathbb{T}_3, \quad [\mathbb{T}_2, \mathbb{T}_3] = \mathbb{T}_1, \quad [\mathbb{T}_3, \mathbb{T}_1] = \mathbb{T}_2, \quad (17.4)$$

mit $[C, D] := CD - DC$. Diese Vertauschungsrelationen schreibt man auch in der Form

$$[\mathbb{T}_j, \mathbb{T}_k] = f_{jk}^r \mathbb{T}_r,$$

wobei wir über $j, k, r = 1, 2, 3$ summieren. Die Zahlen f_{jk}^r heißen die *Strukturkonstanten* der Liealgebra $so(3)$. Diese hängen von der Basiswahl ab und transformieren sich bei einem Basiswechsel wie ein Tensor mit dem angegebenen Indexbild.

Alle Drehungen $A \in SO(3)$ erhält man durch

$$A = e^{\varphi_1 T_1 + \varphi_2 T_2 + \varphi_3 T_3} \quad \text{für beliebige } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbb{R}.$$

Die Drehgruppe und der Drehimpuls in der Quantenmechanik: Es sei X der komplexe lineare Raum aller C^∞ -Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$. Für jedes $A \in SO(3)$ definieren wir einen linearen Operator $\mathbb{A} : X \rightarrow X$ durch

$$(\mathbb{A}f)(x) := f(A^{-1}x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

mit $x = (x_1, x_2, x_3)$. Setzen wir $\chi(A) := \mathbb{A}$, dann ergibt sich eine Darstellung

$$\chi : SO(3) \rightarrow L(X, X)$$

der Drehgruppe $SO(3)$ auf X , d.h., $SO(3)$ wird durch lineare Operatoren auf X realisiert.

Speziell für $A = D_j(\varphi)$ erhalten wir die Linearisierung

$$f(D_j(\varphi)^{-1}x) = f(x) + \varphi(T_j f)(x) + O(\varphi^2), \quad \varphi \rightarrow 0,$$

mit den Differentialoperatoren $\partial_j := \partial/\partial x_j$ und

$$T_1 = x_3 \partial_2 - x_2 \partial_3, \quad T_2 = x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1, \quad T_3 = x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2.$$

Definieren wir $[T_j, T_k](f) := (T_j T_k - T_k T_j)(f)$, dann erhalten wir

$$[T_1, T_2] = T_3, \quad [T_2, T_3] = T_1, \quad [T_3, T_1] = T_2. \quad (17.5)$$

Das sind die gleichen Vertauschungsregeln wie für T_j in (17.4).

Setzen wir $\mathbb{L} := \text{span}_{\mathbb{R}}(T_1, T_2, T_3)$, d.h., \mathbb{L} ist gleich der Menge aller reellen Linearkombinationen $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3$ mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$, dann ist die Liealgebra \mathbb{L} isomorph zur Liealgebra $so(3)$. Dieser Isomorphismus $\psi : \mathbb{L} \rightarrow so(3)$ wird durch

$$\psi \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j T_j \right) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j T_j \quad \text{für alle } \alpha_j \in \mathbb{R}$$

gegeben. Definieren wir

$$L_j := i\hbar T_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (17.6)$$

dann sind L_1, L_2, L_3 die Komponenten des Drehimpulsoperators der Quantenmechanik im \mathbb{R}^3 . Aus (17.5) erhalten wir die bekannten Vertauschungsrelationen

$$[L_1, L_2] = i\hbar L_3, \quad [L_2, L_3] = i\hbar L_1, \quad [L_3, L_1] = i\hbar L_2. \quad (17.7)$$

Hauptsatz über die lokale und globale Struktur der klassischen Gruppen: Für die klassischen Gruppen in Tabelle 17.1 gilt:

(a) Stimmen zwei Liegruppen in einer gewissen Umgebung des Einselementes überein, dann besitzen sie die gleichen Liealgebren.

(b) Ist die Liegruppe G zusammenhängend, dann erhält man G aus der Liealgebra $\mathbb{L}G$, indem man alle endlichen Produkte der Form

$$e^{B_1} e^{B_2} \dots e^{B_k}, \quad B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathbb{L}G, \quad (17.8)$$

bildet. Im Spezialfall $G = SO(n), U(n), SU(n)$ kann man $k = 1$ wählen.

Eine Liste zusammenhängender klassischer Gruppen findet man in Tabelle 17.2.

(c) Ist G nicht zusammenhängend, dann ergibt die Konstruktion (17.8) die Zusammenhangskomponente des Einselements von G .

Die Gleichheit der Liealgebren bedeutet somit Gleichheit der Zusammenhangskomponenten des Einselements der entsprechenden Liegruppen.

► **BEISPIEL 5:** Um das anschaulich zu erläutern, betrachten wir $SO(3)$ und $O(3)$. Dann gilt

$$O(3) = \{\pm C : C \in SO(3)\},$$

d. h., $O(3)$ besteht aus allen Drehungen und Spiegelungen des \mathbb{R}^3 . Benutzen wir die Metrik d aus (17.1), dann ist $d(I, -I) = 2$. Folglich stimmen $O(3)$ und $SO(3)$ auf einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathbb{U} := \{C \in O(3) : d(C, I) < 2\}$ des Einselements I überein, und es gilt $o(3) = so(3)$ für die entsprechenden Liealgebren.

Die zugehörigen Liegruppen $O(3)$ und $SO(3)$ sind global voneinander verschieden; sie besitzen aber die gleiche Zusammenhangskomponente des Einselements, nämlich $SO(3)$.

Die euklidische Bewegungsgruppe des \mathbb{R}^3 als ein semidirektes Produkt: Wir definieren den linearen Operator $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$Bx := Ax + b \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3 \tag{17.9}$$

mit der Matrix $A \in O(3)$ und der Spaltenmatrix $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ sowie $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. Durch B wird eine Bewegung des \mathbb{R}^3 beschrieben, die sich aus der Drehung $A \in SO(3)$ (bzw. der Drehspiegelung $A \in O(3)$) und der Translation b zusammensetzt. Alle diese Operatoren bilden die sogenannte dreidimensionale euklidische Bewegungsgruppe $E(3)$.

Die *eigentliche* dreidimensionale euklidische Bewegungsgruppe $E^+(3)$ besteht aus allen Transformationen $B \in E(3)$ mit $\det A = 1$, d. h. $A \in SO(3)$ in (17.9). Die Transformationen aus $E(3)$ ergeben sich aus denen von $E^+(3)$ durch Hinzufügung einer Spiegelung $Bx = -x$.

Definieren wir (4×4) -Matrizen durch

$$(A, b) := \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{C, b\} := \begin{pmatrix} C & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dann entspricht die Bewegung $y = Bx$ der Transformation

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = (A, b) \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe $E(3)$ kann somit als eine Untergruppe von $GL(4, \mathbb{R})$ aufgefasst werden mit

$$E(3) = \{(A, b) \in GL(4, \mathbb{R}) : A \in O(3), b \in \mathbb{R}^3\}.$$

Die zugehörige Liealgebra ist

$$\mathbb{L}E(3) = \{\{C, b\} \in gl(4, \mathbb{R}) : C \in o(3), b \in \mathbb{R}^3\}$$

mit $o(3) = so(3) = \mathbb{L}O(3)$. Es gilt $\dim E(3) = \dim \mathbb{L}E(3) = 6$. Man schreibt

$$E(3) = O(3) \rtimes \mathbb{R}^3 \quad \text{sowie} \quad \mathbb{L}E(3) = o(3) \rtimes \mathbb{R}^3$$

und bezeichnet das als *semidirekte Produkte*. Insbesondere liefert die Matrizenmultiplikation

$$(A_1, b_1)(A_2, b_2) = (A_1 A_2, A_1 b_2 + b_1),$$

und für die Lieklammer $[L, M] := LM - ML$ erhalten wir

$$[\{C_1, b_1\}, \{C_2, b_2\}] = \{[C_1, C_2], C_1 b_2 - C_2 b_1\}.$$

In analoger Weise kann man jede Gruppe $G \subseteq GL(n, \mathbb{K})$ aus Tabelle 17.1 mit Translationen zusammensetzen, d. h., wir betrachten Transformationen der Form

$$y = Ax + b \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n$$

mit $A \in G, b \in \mathbb{K}^n$. Dann erhalten wir die Liegruppe $G \rtimes \mathbb{K}^n$ mit der Liealgebra $\mathbb{L}G \rtimes \mathbb{K}^n$. Dabei gilt $\dim(G \rtimes \mathbb{K}^n) = \dim G + n$. Insbesondere ist

$$E^+(3) = SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbb{L}E^+(3) = \mathbb{L}E(3).$$

Die Lorentzgruppe in der speziellen Relativitätstheorie: Wir betrachten ein Inertialsystem Σ mit den kartesischen Raumkoordinaten (x_1, x_2, x_3) und der Zeit t . Ferner sei c die Lichtgeschwindigkeit. Der Übergang zu einem anderen Inertialsystem Σ' wird durch die *eigentliche Lorentztransformation*

$$y' = Ay \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^4 \tag{17.10}$$

mit der Spaltenmatrix $y := (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $x_4 := ct$ und der (4×4) -Matrix A mit $A \in SO^+(3, 1)$ beschrieben. Dabei besteht $SO^+(3, 1)$ aus allen Matrizen $A \in O(3, 1)$ (vgl. Tabelle 17.1) mit $\det A = 1$ und $\partial t'/\partial t > 0$ in (17.10), d. h., die Zeitrichtung bleibt erhalten, und es treten keine Raumspiegelungen auf.

Genau alle Matrizen $A \in SO^+(3, 1)$ erhält man durch $A = BLD$, wobei B, D einer Raumdrehung und L einer *speziellen Lorentztransformation*

$$x'_1 = \beta(x_1 - Vx_4/c), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \beta(x_4 - Vx_1/c),$$

entsprechen mit $\beta := (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ und $V \in \mathbb{R}$, $|V| < c$. Dabei ist V die Geschwindigkeit, mit der sich Σ' gegenüber Σ bewegt.

Benutzen wir die *Minkowskimetrik*

$$M(y, y') := x_4x'_4 - x_1x'_1 - x_2x'_2 - x_3x'_3,$$

dann besteht $O(3, 1)$ aus genau allen Matrizen $A \in GL(4, \mathbb{R})$, die die Minkowskimetrik invariant lassen, d. h.

$$M(Ay, Ay') = M(y, y') \quad \text{für alle } y, y' \in \mathbb{R}^4.$$

Die Komponente des Einselementes I von $O(3, 1)$ ist gleich $SO^+(3, 1)$. Insgesamt besteht $O(3, 1)$ aus 4 Komponenten K_j . Bezeichnen wir mit S bzw. Z die Matrix, die der *Raumspiegelung*

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3, \quad x'_4 = x_4,$$

bzw. der *Zeitspiegelung*

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = -x_4,$$

entspricht, dann ist $K_1 = SO^+(3, 1)$, $K_2 = ZK_1$, $K_3 = SK_1$ und $K_4 = SK_2$.

Die *Liealgebra* $\mathbb{L}O(3, 1)$ der Lorentzgruppe $O(3, 1)$ wird erzeugt von den *infinitesimalen Drehungen*

$$T_j := \begin{pmatrix} \mathbb{T}_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3,$$

und den *infinitesimalen speziellen Lorentztransformationen*

$$P_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. $\sigma(3,1) = \text{LO}(3,1) = \text{LSO}^+(3,1) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{T_1, T_2, T_3, P_1, P_2, P_3\}$.

So ist $\dim O(3,1) = \dim \text{LO}(3,1) = 6$, d. h., die Lorentzgruppe ist eine *6-dimensionale Liegruppe*.

Die Poincarétransformation in der speziellen Relativitätstheorie: Fügen wir zu der Lorentztransformation (17.10) noch eine *räumliche* und *zeitliche Translation* hinzu, dann erhalten wir eine Poincarétransformation

$$y' = Ay + b \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^4 \quad (17.11)$$

mit beliebiger Matrix $A \in O(3,1)$ und $b \in \mathbb{R}^4$. Diese Poincarétransformationen bilden die sogenannte *Poincarégruppe*

$$\mathbb{P} = O(3,1) \rtimes \mathbb{R}^4$$

mit der zugehörigen Liealgebra $\mathbb{L}\mathbb{P} = \text{LO}(3,1) \rtimes \mathbb{R}^4$. Es gilt $\dim \mathbb{P} = \dim \mathbb{L}\mathbb{P} = 10$, d. h., die Poincarégruppe \mathbb{P} ist eine *10-dimensionale Liegruppe*. Diese Gruppe beherrscht die gesamte moderne *relativistische Physik* der Elementarteilchen (Quantenfeldtheorie).

17.2 Gruppen

Gruppen sind Mengen, in denen ein Produkt gh erklärt ist.

17.2.1 Grundbegriffe

Definition: Unter einer *Gruppe* G verstehen wir eine Menge, in der jedem geordneten Paar $g, h \in G$ ein Element gh von G zugeordnet wird, so dass gilt:

- (i) $g(hk) = (gh)k$ für alle $g, h, k \in G$ (*Assoziativgesetz*).
- (ii) Es gibt genau ein Element e mit $eh = he = h$ für alle $h \in G$ (*Einselement*).
- (iii) Zu jedem $g \in G$ existiert genau ein Element $h \in G$ mit $gh = hg = e$. Anstelle von h schreiben wir g^{-1} (*inverses Element*).

Eine nichtleere Teilmenge H der Gruppe G heißt genau dann eine *Untergruppe* von G , wenn aus $g, h \in H$ stets $gh^{-1} \in H$ folgt.

Eine Gruppe G heißt genau dann *kommutativ* (oder Abelsch), wenn $gh = hg$ für alle $g, h \in G$ gilt.

Bei kommutativen Gruppen schreibt man häufig $g + h$ anstelle von gh und $-g$ anstelle von g^{-1} sowie 0 anstelle von e .

► **STANDARDBEISPIEL 1** (Zahlengruppen): Bezeichne \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}) die Menge der reellen (bzw. komplexen) Zahlen. Die Menge $GL(\mathbb{R})$ (bzw. $GL(\mathbb{C})$) der von null verschiedenen reellen (bzw. komplexen) Zahlen ist bezüglich der üblichen Multiplikation eine Gruppe mit dem Einselement $e = 1$. Die Menge $\{-1, 1\}$ bildet bezüglich der Multiplikation eine Untergruppe von $GL(\mathbb{R})$ und $GL(\mathbb{C})$.

\mathbb{R} und \mathbb{C} sind bezüglich der Addition kommutative Gruppen. Die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist bezüglich der Addition eine Untergruppe von \mathbb{R} und \mathbb{C} .

► **STANDARDBEISPIEL 2** (Matrizengruppen): Die Matrizenmenge $GL(n, \mathbb{K})$ sowie alle anderen in Tabelle 17.1 angegebenen Matrizenmengen G mit Matrixelementen in \mathbb{K} sind Gruppen (und gleichzeitig Untergruppen von $GL(n, \mathbb{K})$).

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Jeder lineare Raum ist bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe.

► **STANDARDBEISPIEL 4:** Alle bijektiven Abbildungen $\varphi : M \rightarrow M$ einer nichtleeren Menge M auf sich selbst bilden bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen „ $\varphi\psi$ “ eine Gruppe $G(M)$. Das Einselement entspricht der identischen Abbildung, und das inverse Element φ^{-1} ist gleich der inversen Abbildung.

Besteht M aus genau n Elementen, dann heißt $G(M) = S_n$ die Permutationsgruppe von n Elementen, die wir genauer in 17.6 betrachten.

Produkt von Gruppen: Sind G und H zwei Gruppen, dann wird die Produktmenge $G \times H := \{(g, h) : g \in G, h \in H\}$ zu einer Gruppe, indem man setzt

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

17.2.2 Morphismen von Gruppen

Definition: Unter einem *Morphismus* zwischen den beiden Gruppen G und H versteht man eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow H$ mit

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) \quad \text{für alle } g, h \in G. \quad (17.12)$$

Die Menge $\ker \varphi := \varphi^{-1}(e)$ bezeichnet man als den *Kern* von φ .

Bijektive Morphismen heißen *Isomorphismen*. Bei einem Isomorphismus ist auch die inverse Abbildung ein Morphismus. Definitionsgemäß ist die Gruppe G genau dann *isomorph* zur Gruppe H , wenn es einen Isomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ gibt. Isomorphe Gruppen besitzen die gleiche Struktur.

Ferner bezeichnet man surjektive (bzw. injektive) Morphismen als Epimorphismen (bzw. Monomorphismen). Ein Isomorphismus $\varphi : G \rightarrow G$ von G auf sich selbst heißt ein *Automorphismus*.

► **BEISPIEL 5:** Ist $G := \mathbb{R}_+$ die multiplikative Gruppe aller positiven reellen Zahlen und setzen wir $\varphi(g) := g^2$, dann gilt (17.12). Folglich ist $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ein Morphismus (und außerdem ein Automorphismus). Die inverse Abbildung φ^{-1} entspricht der Quadratwurzel, d. h., es ist $\varphi^{-1}(g) = \sqrt{g}$ für alle $g \in \mathbb{R}_+$.

► **BEISPIEL 6:** Setzen wir $\varphi(g) := \det g$, dann ist $\varphi : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(\mathbb{K})$ ein Morphismus in die multiplikative Gruppe $GL(\mathbb{K})$ der von null verschiedenen Elemente von \mathbb{K} , denn es gilt

$$\det(gh) = (\det g)(\det h) \quad \text{für alle } g, h \in GL(n, \mathbb{K}).$$

► **BEISPIEL 7** (innere Automorphismen): Ist G eine Gruppe und ordnen wir jedem $g \in G$ eine Abbildung $\varphi_g : G \rightarrow G$ zu mit

$$\varphi_g(h) := ghg^{-1} \quad \text{für alle } h \in G,$$

dann ist φ_g ein Automorphismus, den man als *inneren Automorphismus* bezeichnet.

Zwei Elemente $h, k \in G$ heißen genau dann *konjugiert*, wenn es ein Element $g \in G$ gibt mit $\varphi_g(h) = k$. Das liefert eine Äquivalenzrelation auf G . Die zugehörigen Äquivalenzklassen in G heißen *Klassen konjugierter Elemente* von G .

Nebenklassen: Ist H eine Untergruppe von G , dann bezeichnet man für $g \in G$ die Menge $gH := \{gh : h \in H\}$ als eine *Linksnebenklasse* von H in G . Analog bezeichnet man Hg mit $g \in G$ als eine *Rechtsnebenklasse* von H in G .

Normalteiler: Eine Untergruppe N der Gruppe G heißt genau dann normal (oder auch ein Normalteiler), wenn N unter jedem inneren Automorphismus invariant ist, d. h., es gilt

$$ghg^{-1} \in N \quad \text{für alle } h \in N, g \in G.$$

Die Normalteiler G und $\{e\}$ heißen triviale Normalteiler von G .

► **BEISPIEL 8:** Die Menge $Z = \{h \in G : ghg^{-1} = h \text{ für alle } g \in G\}$ heißt das *Zentrum* der Gruppe G . Dieses ist ein Normalteiler.

Das Zentrum von $GL(n, \mathbb{K})$ besteht aus genau allen Matrizen λI mit $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\lambda \neq 0$. Das Zentrum von $SL(n, \mathbb{K})$ besteht aus genau allen Matrizen λI mit $\lambda^n = 1, \lambda \in \mathbb{K}$.

Das Zentrum von $SU(n)$ besteht aus genau allen Matrizen λI mit $\lambda^n = 1, \lambda \in \mathbb{C}$.

Faktorgruppe: Ist H eine Untergruppe der Gruppe G , dann wird durch

$$g \sim h \quad \text{genau dann, wenn } g^{-1}h \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G erklärt. Ist H ein Normalteiler, dann wird die Menge aller Äquivalenzklassen $[g]$ durch

$$[g][h] := [gh]$$

zu einer Gruppe G/H , die man die Faktorgruppe von G nach H nennt.

Es gilt $[g] = gH = Hg$.

► **BEISPIEL 9** (zyklische Gruppen): Es sei \mathbb{Z} die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Setzen wir $N := p\mathbb{Z} = \{0, \pm p, \pm 2p, \dots\}$ mit der ganzen Zahl $p \geq 1$, dann heißt

$$\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

eine zyklische Gruppe. Die Gruppe \mathbb{Z}_p besteht aus genau allen Klassen $[0], \dots, [p-1]$ mit $[k] = \{k + np : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Die Addition in \mathbb{Z}_p ergibt sich durch

$$[a] + [b] = [c],$$

wobei c der Rest ist, den man bei der Division von $a + b$ durch p erhält.

Insbesondere besteht \mathbb{Z}_2 aus den Elementen $[0]$ und $[1]$ mit

$$[1] + [1] = [0], \quad [0] + [a] = [a] + [0] = [a], \quad a = 0, 1.$$

Jede Gruppe G mit zwei Elementen $\{e, b\}$ besitzt die Form

$$bb = e, \quad ea = ae = a \quad \text{für } a = e, b.$$

Setzen wir $\varphi(e) := [0]$ und $\varphi(b) := [1]$, dann ist $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ein Isomorphismus.

Der Morphismensatz: (i) Ist $\varphi : G \rightarrow H$ ein Morphismus, dann ist der Kern $\ker \varphi := \varphi^{-1}(e)$ ein Normalteiler von G , und man hat den Isomorphismus

$$\varphi(G) \cong G/\ker \varphi. \tag{17.13}$$

Insbesondere ist $\varphi : G \rightarrow H$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $\varphi(G) = H$ und $\ker \varphi = \{e\}$ gilt.

(ii) Ist umgekehrt N ein Normalteiler von G , dann ist die durch $\pi(g) := [g]$ gegebene sogenannte *kanonische Abbildung*

$$\pi : G \rightarrow G/N, \tag{17.14}$$

ein Epimorphismus mit $\ker \pi = N$.

Folglich erhält man (bis auf Isomorphie der Bildgruppen) alle Epimorphismen von G durch (17.14), indem man alle möglichen Normalteiler N von G wählt.

Einfache Gruppen: Eine Gruppe G heißt genau dann *einfach*, wenn sie nur triviale Normalteiler besitzt.

Satz: Eine Gruppe G ist genau dann einfach, wenn jeder Morphismus $\varphi : G \rightarrow H$ trivial ist, d. h., das Bild $\varphi(G)$ besteht nur aus dem Einselement oder ist zu G isomorph.

► **BEISPIEL 10:** Die Drehgruppe $SO(3)$ ist einfach. Ferner ist jede zyklische Gruppe \mathbb{Z}_p einfach (p Primzahl).

Endliche Gruppen: Eine Gruppe G heißt genau dann endlich, wenn sie nur aus endlich vielen Elementen besteht. Die Anzahl der Gruppenelemente bezeichnet man als Gruppenordnung. Die Ordnung der Untergruppe einer endlichen Gruppe ist ein Teiler der Gruppenordnung.

Endliche Untergruppen der Bewegungsgruppe $E(3)$ im \mathbb{R}^3 spielen eine wichtige Rolle in der Kristallographie bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den physikalischen Eigenschaften eines Kristalls und seinen Symmetrien.

Beispielsweise besteht diejenige maximale Untergruppe G von $E(3)$, die ein gleichseitiges Dreieck in sich abbildet, aus genau drei Elementen I, D, D^2 , wobei D einer Drehung um den Mittelpunkt mit einem Winkel von 120° entspricht, d. h. $D^3 = I$, und G ist isomorph zu \mathbb{Z}_3 . Diese Gruppe G beschreibt die Symmetrie des Dreiecks.

Erst vor einigen Jahren gelang es, alle einfachen endlichen Gruppen zu klassifizieren. Das ist das Resultat der Arbeit von etwa 100 Gruppentheoretikern während der letzten 30 Jahre. Der Beweis besteht aus etwa 500 Arbeiten mit insgesamt etwa 10 000 Seiten.

Alle einfachen endlichen Gruppen ergeben sich durch

- (a) die (additiven) zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p Primzahl oder $p = 1$),
- (b) die alternierenden Permutationsgruppen A_n mit $n \geq 5$ (Gruppe der geraden Permutationen von n Elementen),
- (c) die sogenannten einfachen endlichen Lieschen Gruppen und
- (d) 26 sogenannte sporadische Gruppen.

Die größte sporadische Gruppe – die *Monstergruppe* – besteht aus angenähert 10^{54} Elementen.

17.2.3 Darstellungen von Gruppen

Darstellungen liefern *Realisierungen* von Gruppen als lineare Operatoren auf linearen Räumen. Solche Realisierungen spielen eine fundamentale Rolle in der modernen Physik.

Es sei X ein komplexer linearer Raum. Dann bildet die Menge $GL(X)$ aller linearen bijektiven Operatoren $A : X \rightarrow X$ eine Gruppe (die Automorphismengruppe von X). Für $\dim X = n$ ist $GL(X)$ isomorph zu $GL(n, \mathbb{C})$, falls $1 \leq n < \infty$.

Definition: Unter einer (linearen) *Darstellung* φ der Gruppe G auf dem linearen Raum X versteht man einen Morphismus

$$\varphi : G \rightarrow GL(X), \quad (17.15)$$

d. h., jedem Gruppenelement $g \in G$ wird ein linearer bijektiver Operator $\varphi(g) : X \rightarrow X$ zugeordnet, so dass die Multiplikation respektiert wird, d. h., es gilt $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ für alle $g, h \in G$. Die Darstellung φ heißt genau dann *treu*, wenn φ injektiv ist. Dann ist G isomorph zur Untergruppe $\varphi(G)$ von $GL(X)$.

Man bezeichnet $\dim X$ als die *Dimension der Darstellung* φ in (17.15).

Irreduzible Darstellungen: Ist $A : X \rightarrow X$ ein linearer Operator, dann heißt der lineare Unterraum Y von X genau dann *invariant* bezüglich A , wenn $A(Y) \subseteq Y$ gilt.

Die Darstellung (17.15) heißt genau dann *irreduzibel*, wenn kein echter, von $\{0\}$ verschiedener Unterraum in X existiert, der bezüglich aller Operatoren $\varphi(g)$ mit $g \in G$ invariant ist.

Ist $\dim X < \infty$, so heißt die Darstellung φ in (17.15) genau dann *vollständig reduzibel*, wenn es eine Zerlegung von X in eine direkte Summe der Form

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_s$$

gibt, wobei φ bezüglich aller Räume X_j irreduzibel ist.³

Äquivalente Darstellungen: Sind X und Z komplexe lineare Räume, dann heißt die Darstellung $\varphi : G \rightarrow GL(X)$ genau dann äquivalent zur Darstellung $\psi : G \rightarrow GL(Z)$, wenn es einen linearen bijektiven Operator $A : X \rightarrow Z$ gibt, so dass für jedes $g \in G$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi(g)} & X \\ A \downarrow & & \downarrow A, \\ Z & \xrightarrow{\psi(g)} & Z \end{array} \quad (17.16)$$

d.h., es gilt $A\varphi(g) = \psi(g)A$, also $\varphi(g) = A^{-1}\psi(g)A$ für alle $g \in G$.

Unitäre Äquivalenz: Ist X ein komplexer Hilbertraum, dann heißt die Darstellung $\varphi : G \rightarrow GL(X)$ genau dann *unitär*, wenn alle Operatoren $\varphi(g) : X \rightarrow X$ mit $g \in G$ unitär sind.

Die beiden Darstellungen $\varphi : G \rightarrow GL(X)$ und $\psi : G \rightarrow GL(Z)$ heißen genau dann unitär äquivalent, wenn sie im Sinne von (17.16) äquivalent sind und der Operator $A : X \rightarrow Z$ unitär ist.

In der Quantentheorie ist man vorrangig an unitären Darstellungen interessiert.

Satz: (i) Ist G eine endliche Gruppe oder allgemeiner eine kompakte Liegruppe, dann ist jede endlichdimensionale Darstellung von G vollständig reduzibel und äquivalent zu einer unitären Darstellung.

(ii) Jede *unitäre* endlichdimensionale Darstellung einer beliebigen Gruppe ist vollständig reduzibel.

(iii) Die irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen *kommutativer* Gruppen sind *eindimensional*.

(iv) Es sei $\varphi : G \rightarrow GL(X)$ eine unitäre Darstellung der Gruppe G auf dem komplexen Hilbertraum X mit $\dim X \leq \infty$, und der Unterraum Y sei invariant bezüglich aller $\varphi(g) : X \rightarrow X$, $g \in G$. Dann hat das orthogonale Komplement Y^\perp von Y in X die gleiche Invarianzeigenschaft.

Kommentar: Eine der Hauptaufgaben der Darstellungstheorie besteht darin, alle irreduziblen Darstellungen einer gegebenen Gruppe (bis auf Äquivalenz) zu klassifizieren.

Sind alle Darstellungen einer Gruppe vollständig reduzibel, dann erhält man aus der Kenntnis aller irreduziblen Darstellungen zugleich einen Überblick über alle möglichen Darstellungen.

Konstruktives Verfahren zur Zerlegung von unitären Darstellungen in irreduzible Bestandteile: Es sei $\varphi : G \rightarrow GL(X)$ eine unitäre Darstellung von G in dem endlichdimensionalen komplexen Hilbertraum X . Wir wählen einen beliebigen Einheitsvektor $x \in X$ und setzen

$$X_1 := \text{span} \{ \varphi(g)x : g \in G \}.$$

³Das heißt explizit, dass jeder Raum X_j invariant bezüglich aller Operatoren $\varphi(g)$ mit $g \in G$ ist und kein echter linearer Unterraum $Y \neq \{0\}$ von X_j existiert, der auch diese Invarianzeigenschaft besitzt.

Dann wirkt φ als irreduzible Darstellung in X_1 . Konstruieren wir nun das orthogonale Komplement X_1^\perp , dann gilt $X = X_1 \oplus X_1^\perp$, und der Unterraum X_1^\perp ist invariant unter φ . Wendet man nun das gleiche Verfahren auf X_1^\perp an, dann erhält man die Zerlegung

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_2^\perp.$$

Nach endlich vielen Schritten ergibt sich eine Zerlegung von X in paarweise orthogonale Unterräume, die alle irreduzibel bezüglich φ sind.

Charaktere: Für eine endlichdimensionale Darstellung $\varphi : G \rightarrow GL(X)$ der Gruppe G bezeichnet man die durch

$$\chi(g) := \text{tr } \varphi(g), \quad g \in G,$$

definierte Spurfunktion $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ als Charakter von φ .

Äquivalente Darstellungen besitzen die gleichen Charaktere.

Anwendung auf die Spiegelungsgruppe S : Mit S bezeichnen wir die Gruppe $\{I, -I\}$, wobei I der Einheitsoperator des \mathbb{R}^3 ist, d.h., $-I$ entspricht einer Raumspiegelung.

Die Gruppe S besitzt (bis auf Äquivalenz) genau die beiden irreduziblen Darstellungen

$$\varphi_{\pm} : S \rightarrow GL(\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad \varphi_+(\pm I) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi_-(\pm I) = \pm 1.$$

Diese beiden Darstellungen sind eindimensional und unitär. Die Charakterfunktion von φ_+ bzw. φ_- ist $\chi(\pm I) = 1$ bzw. $\chi(\pm I) = \pm 1$.

Jede endlichdimensionale Darstellung von S ist vollständig reduzibel und äquivalent zu einer unitären Darstellung.

Ist X ein endlichdimensionaler oder ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum, dann existiert zu jeder Darstellung φ mit $\varphi : S \rightarrow GL(X)$ ein vollständiges Orthonormalsystem $\{e_j\}$ in X , so dass

$$\varphi(\pm I)e_j = \lambda_j e_j \quad \text{für alle } j$$

gilt mit $\lambda_j = \pm 1$.

In der Elementarteilchenphysik entspricht $\lambda_j = 1$ (bzw. $= -1$) gerader (bzw. ungerader) *Parität* von Teilchen.

17.2.4 Kategorien und Funktoren zur Beschreibung allgemeiner Strukturprinzipien der modernen Mathematik

Kategorie: Unter einer Kategorie (im engeren Sinn) versteht man eine Gesamtheit von *Objekten* G, H, \dots und *Abbildungen*

$$\varphi : G \rightarrow H$$

zwischen den Objekten, die man *Morphismen* nennt. Dabei verlangt man, dass die Zusammensetzung zweier Morphismen $\varphi : G \rightarrow H$ und $\psi : H \rightarrow M$ wieder einen Morphismus $\psi\varphi : G \rightarrow M$ ergibt. Außerdem soll die identische Abbildung $\text{id} : G \rightarrow G$ ein Morphismus sein.

Die Morphismen sind stets Abbildungen, die die „Struktur“ der Objekte erhalten.

Definitionsgemäß versteht man unter einem *Isomorphismus* einen bijektiven Morphismus $\varphi : G \rightarrow H$, für den auch die inverse Abbildung $\varphi^{-1} : H \rightarrow G$ ein Morphismus ist.

Isomorphe Objekte kann man im Rahmen der betreffenden Kategorie miteinander identifizieren, weil sie die gleiche „abstrakte Struktur“ besitzen.

Monomorphismen, Epimorphismen bzw. Automorphismen werden wie für Gruppen definiert (als injektive Morphismen, surjektive Morphismen bzw. Isomorphismen eines Objekts auf sich). Die Gesamtheit aller Automorphismen eines Objekts bildet bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe (die *Automorphismengruppe des Objekts*).

► BEISPIELE FÜR KATEGORIEN:

(i) Die Kategorie der *Gruppen* besteht aus der Gesamtheit der Gruppen (Objekte) und den oben eingeführten Morphismen, die man in der klassischen Literatur auch Homomorphismen nennt. Die Morphismen sind genau die Abbildungen, die die *Gruppenprodukte* ineinander überführen.

(ii) Die Kategorie der *linearen Räume* über \mathbb{K} besteht aus allen linearen Räumen über \mathbb{K} (Objekte). Die Morphismen sind die *linearen Abbildungen*. Das sind genau die Abbildungen, die die *Linearkombinationen* ineinander überführen.

(iii) Die Kategorie der *topologischen Räume* besteht aus allen topologischen Räumen (Objekte). Die Morphismen sind die *stetigen Abbildungen*. Das sind genau die Abbildungen, bei denen die Urbilder offener Mengen wieder offen sind. Die Isomorphismen entsprechen den *Homöomorphismen*.

(iv) Die Kategorie der *C^k -Mannigfaltigkeiten* besteht aus allen C^k -Mannigfaltigkeiten (Objekte). Die Morphismen sind die *C^k -Abbildungen*. Die Isomorphismen entsprechen den *C^k -Diffeomorphismen*.

(v) Die Kategorie der *metrischen Räume* besteht aus allen metrischen Räumen (Objekte). Die Morphismen sind genau die Abbildungen, die den *Abstand invariant* lassen. Die Isomorphismen entsprechen den *Isometrien*.

(vi) Die Kategorie der *normierten Räume* (bzw. Banachräume) über \mathbb{K} besteht aus allen normierten Räumen (bzw. Banachräumen) über \mathbb{K} . Die Morphismen sind genau die linearen Abbildungen, die die *Norm invariant* lassen. Die Isomorphismen entsprechen den *Normisomorphismen*.

(vii) Die Kategorie der *Hilberträume* über \mathbb{K} besteht aus allen Hilberträumen über \mathbb{K} (Objekte). Die Morphismen sind genau die linearen Abbildungen, die das *Skalarprodukt invariant* lassen. Die Isomorphismen entsprechen den *unitären Operatoren*.

(viii) Die Kategorie der *Liealgebren* über \mathbb{K} besteht aus allen Liealgebren über \mathbb{K} (Objekte). Die Morphismen werden in 17.4 eingeführt. Das sind genau die linearen Abbildungen, die die *Lieschen Klammerprodukte* ineinander überführen. Die Kategorie der Liealgebren über \mathbb{K} ist eine *Unterkategorie* der Kategorie der linearen Räume über \mathbb{K} .

(ix) Die Kategorie der *Liegruppen* besteht aus allen Liegruppen (Objekte). Die Morphismen sind die sogenannten *Liemorphismen* (vgl. 17.5).

Die Kategorie der Liegruppen ist eine *Unterkategorie* sowohl der Kategorie der Gruppen als auch der Kategorie der C^∞ -Mannigfaltigkeiten, wobei die Gruppenstruktur der Liegruppen mit der Mannigfaltigkeitsstruktur verträglich ist.

Weitere wichtige Kategorien in der Mathematik sind die Kategorie der Ringe und die Kategorie der Körper (vgl. 2.5.2.).

Funktoren: In der modernen Mathematik werden gegebene Strukturen häufig dadurch untersucht, dass man ihnen (einfachere) Strukturen zuordnet. Diese Zuordnung zwischen verschiedenen Strukturen geschieht dabei mit Hilfe von sogenannten Funktoren.

Es seien \mathbb{C} und \mathbb{D} zwei Kategorien. Unter einem *kovarianten* Funktor \mathbb{F} versteht man ein Diagramm der folgenden Form:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D} \xrightarrow{\psi} \mathbb{E} \\ \mathbb{F} \Downarrow & & \\ \mathbb{C}' & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbb{D}' \xrightarrow{\psi'} \mathbb{E}', \end{array} \tag{17.17}$$

d. h., jedem Objekt C (bzw. Morphismus φ) von \mathbb{C} wird ein Objekt $\mathbb{F}C = C'$ (bzw. Morphismus $\mathbb{F}\varphi = \varphi'$) von \mathbb{D} zugeordnet, so dass (17.17) gilt, d. h., der Zusammensetzung $\psi\varphi$ entspricht $\psi'\varphi'$.

► **BEISPIEL 12** (Liefunktör): In 17.5 werden wir den kovarianten Liefunktör \mathbb{L} von der Kategorie der Liegruppen in die Kategorie der Liealgebren betrachten. In (17.17) sind dann C, D, E Liegruppen, und $\mathbb{L}C = C'$, $\mathbb{L}D = D'$, $\mathbb{L}E = E'$ entsprechen den zugehörigen Liealgebren.

► **BEISPIEL 13** (Dualitätsfunktör): Es seien A und B lineare Operatoren der Form

$$X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$$

zwischen den linearen Räumen X, Y und Z über \mathbb{K} . Für die entsprechenden dualen Räume X^T, Y^T, Z^T und dualen Operatoren A^T, B^T gilt dann $(BA)^T = A^T B^T$, also

$$X^T \xleftarrow{A^T} Y^T \xleftarrow{B^T} Z^T.$$

Setzen wir $\mathbb{F}X := X^T$ und $\mathbb{F}A := A^T$, dann ist der sogenannte Dualitätsfunktör \mathbb{F} ein *kontravarianter* Funktor von der Kategorie der linearen Räume über \mathbb{K} in sich.

Exakte Sequenzen: Ein zentrales Instrument zum Nachweis der Isomorphie von Strukturen sind exakte Sequenzen. Zum Beispiel benutzen viele Beweise der algebraischen Topologie dieses Hilfsmittel.

Zur Erläuterung betrachten wir die Kategorie der Gruppen. Eine Folge

$$G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{\psi} M$$

von zwei Gruppenmorphismen φ und ψ heißt genau dann *exakt*, wenn

$$\ker \psi = \text{im } \varphi$$

gilt, wobei $\ker \psi = \psi^{-1}(e)$ der Kern von ψ ist und $\text{im } \varphi = \varphi(G)$ das Bild (image) von φ bezeichnet.

Eine Folge von Gruppenmorphismen

$$\dots \longrightarrow G_{-1} \xrightarrow{\varphi_0} G_0 \xrightarrow{\varphi_1} G_1 \xrightarrow{\varphi_2} G_2 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

heißt genau dann exakt, wenn $\ker \varphi_{n+1} = \text{im } \varphi_n$ für alle n gilt.

► **BEISPIEL 14:** Für einen Morphismus $\varphi : G \rightarrow H$ zwischen zwei Gruppen G und H gilt:

- (i) φ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn $G \xrightarrow{\varphi} H \rightarrow \{e\}$ exakt ist, d. h. $\text{im } \varphi = H$.
- (ii) φ ist genau dann ein Monomorphismus, wenn $\{e\} \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} H$ exakt ist, d. h. $\ker \varphi = \{e\}$.
- (iii) φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\{e\} \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} H \rightarrow \{e\}$ exakt ist.

Alle Aussagen gelten auch für additive Gruppen (z. B. lineare Räume) und deren Morphismen (z. B. lineare Abbildungen), falls man das Einselement e durch 0 ersetzt.

17.3 Darstellungen endlicher Gruppen

Für endliche Gruppen liegt eine perfekte Darstellungstheorie vor, die Ende des 19. Jahrhunderts von Frobenius und Schur geschaffen wurde. Diese Theorie lässt sich auf kompakte Gruppen verallgemeinern (vgl. 17.9).

Es sei G eine endliche Gruppe mit N Elementen. Die zugeordnete *Gruppenalgebra* $\mathbb{A}(G)$ besteht aus allen formalen komplexen Linearkombinationen

$$a = \sum_{g \in G} \alpha(g)g, \quad \alpha(g) \in \mathbb{C}. \tag{17.18}$$

In natürlicher Weise ist $\mathbb{A}(G)$ ein N -dimensionaler komplexer linearer Raum, in dem zusätzlich auf natürliche Weise ein Produkt ab erklärt ist, z. B. gilt

$$(\alpha g + \beta h)(\mu m + \nu r) = (\alpha\mu)gm + (\beta\mu)hm + (\alpha\nu)gr + (\beta\nu)hr.$$

Reguläre Darstellung: Die Bedeutung der Gruppenalgebra $\mathbb{A}(G)$ besteht darin, dass sich die Gruppe G auf dem linearen Raum $\mathbb{A}(G)$ darstellen lässt. Die zugehörige Darstellung $\varphi : G \rightarrow GL(\mathbb{A}(G))$ wird in natürlicher Weise durch

$$\varphi(g)w := gw \quad \text{für alle } w \in \mathbb{A}(G), g \in G,$$

definiert und heißt die *reguläre Darstellung* von G .

Mit $L_2(G)$ bezeichnen wir ferner die Gesamtheit aller komplexen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf der Gruppe G . Bezüglich des Skalarprodukts

$$(f_1, f_2) := \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$$

wird $L_2(G)$ ein N -dimensionaler komplexer Hilbertraum.

Eine Funktion $f \in L_2(G)$ heißt genau dann eine *Klassenfunktion*, wenn sie auf jeder Klasse konjugierter Elemente von G konstant ist, d. h., es ist $f(hgh^{-1}) = f(g)$ für alle $h, g \in G$.

Hauptsatz: (i) Jede endlichdimensionale Darstellung von G ist vollständig reduzibel und äquivalent zu einer unitären Darstellung.

(ii) Jede irreduzible Darstellung von G in einem beliebigen komplexen linearen Raum ist (bis auf Äquivalenz) in der regulären Darstellung enthalten.

(iii) Die Anzahl der (bis auf Äquivalenz) verschiedenen irreduziblen Darstellungen von G ist gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente in G .

Ein System $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von irreduziblen Darstellungen von G heißt genau dann *vollständig*, wenn jede irreduzible Darstellung zu genau einem φ_j äquivalent ist.

Satz von Burnside: Für ein vollständiges System von irreduziblen Darstellungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von G gilt

$$N = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2.$$

Dabei bezeichnet d_j die Dimension des Darstellungsraumes von φ_j .

► **BEISPIEL 1** (Spiegelungsgruppe): Es sei $G = \{I, -I\}$ die Spiegelungsgruppe des \mathbb{R}^3 . Wir setzen $e = I$, $g = -I$. Dann besteht die Gruppenalgebra $\mathbb{A}(G)$ aus der Menge aller komplexen Linearkombinationen

$$\alpha e + \beta g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Die reguläre Darstellung $\varphi : G \rightarrow GL(\mathbb{A}(G))$ lautet

$$\varphi(e)(\alpha e + \beta g) = \alpha ee + \beta eg = \alpha e + \beta g,$$

$$\varphi(g)(\alpha e + \beta g) = \alpha ge + \beta gg = \alpha g + \beta e.$$

Somit gilt $\mathbb{A}(G) = X_+ \oplus X_-$ mit $X_+ := \text{span}\{e + g\}$ und $X_- := \text{span}\{e - g\}$. Ferner sind X_+ und X_- irreduzibel bezüglich φ , wobei

$$\varphi(g) = \pm u \quad \text{für alle } u \in X_\pm \quad \text{gilt.}$$

Hauptsatz über Charaktere: Wichtige Aussagen über die Darstellungen von G lassen sich elegant mit Hilfe der Charaktere (vgl. 17.2.3) und des Skalarprodukts (\cdot, \cdot) in $L_2(G)$ gewinnen. Es gilt:

(i) Eine endlichdimensionale Darstellung von G mit dem Charakter χ ist genau dann *irreduzibel*, wenn $(\chi, \chi) = 1$ gilt.

(ii) Zwei endlichdimensionale Darstellungen von G sind genau dann *äquivalent*, wenn sie den gleichen Charakter besitzen.

(iii) Ein System von endlichdimensionalen Darstellungen von G ist genau dann ein *vollständiges System irreduzibler Darstellungen*, wenn die Charaktere ein vollständiges Orthonormalsystem im Unterraum der Klassenfunktionen von $L_2(G)$ bilden.

Korollar: Es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein vollständiges System irreduzibler Darstellungen von G mit den Charakteren χ_1, \dots, χ_n . Für jede endlichdimensionale Darstellung φ von G gilt dann

$$\chi = \sum_{j=1}^n (\chi_j, \chi) \chi_j.$$

Ist $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_s$ eine Zerlegung von X , wobei φ in jedem Unterraum X_k als irreduzible Darstellung wirkt, dann gibt (χ_j, χ) an, wie oft die zu χ_j gehörige irreduzible Darstellung φ_j in der Zerlegung von X vorkommt.

17.4 Liealgebren

Der Aufbau der Theorie der Liealgebren geschieht analog zum Aufbau der Gruppentheorie, indem man jeden Begriff der Gruppentheorie als einen Begriff der Kategorie der Gruppen interpretiert und den entsprechenden natürlichen Begriff in der Kategorie der Liealgebren sucht (vgl. 17.2.4). Zum Beispiel entsprechen den *Normalteilen* von Gruppen die *Ideale* von Liealgebren. In beiden Fällen handelt es sich um *Kerne von Morphismen*.

Liealgebren sind lineare Räume, in denen zusätzlich ein Liesches Klammerprodukt $[A, B]$ erklärt ist.

17.4.1 Grundbegriffe

Definition: Unter einer Liealgebra \mathbb{L} über \mathbb{K} verstehen wir einen linearen Raum über \mathbb{K} , wobei zusätzlich jedem geordneten Paar $A, B \in \mathbb{L}$ ein mit $[A, B]$ bezeichnetes Element von \mathbb{L} zugeordnet wird, so dass für alle $A, B, C \in \mathbb{L}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ folgendes gilt:

- (i) $[A, B] = -[B, A]$ (*Antikommunität*);
- (ii) $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$ (*Linearität*);
- (iii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (*Jacobi-Identität*).

Man kann (iii) als verallgemeinertes Assoziativgesetz auffassen. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) sprechen wir von einer reellen (bzw. komplexen) Liealgebra. Jede komplexe Liealgebra ist gleichzeitig auch eine reelle Liealgebra.

\mathbb{L} heißt genau dann *kommutativ*, wenn $[A, B] = [B, A]$ für alle $A, B \in \mathbb{L}$ gilt, d. h. $[A, B] = 0$ für alle $A, B \in \mathbb{L}$.

► **BEISPIEL 1:** Jeder lineare Raum X (z. B. $X = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) wird durch $[x, y] := 0$ für alle $x, y \in X$ in trivialer Weise zu einer kommutativen Liealgebra.

Eine Teilmenge \mathbb{U} der Liealgebra \mathbb{L} heißt genau dann eine *Lieunteralgebra* von \mathbb{L} , wenn \mathbb{U} ein linearer Unterraum von \mathbb{L} ist und aus $A, B \in \mathbb{U}$ stets $[A, B] \in \mathbb{U}$ folgt.

Unter einem Ideal \mathbb{U} von \mathbb{L} versteht man eine Lieunteralgebra, für die zusätzlich aus $A \in \mathbb{U}$ und $B \in \mathbb{L}$ stets $[A, B] \in \mathbb{U}$ folgt.

Morphismen: Ein Morphismus $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ zwischen zwei Liealgebren \mathbb{L} und \mathbb{M} ist definiti-
onsgemäß eine lineare Abbildung mit

$$\varphi([A, B]) = [\varphi(A), \varphi(B)] \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{L},$$

d. h., φ respektiert das Klammerprodukt. Der Kern von φ wird durch $\ker \varphi := \varphi^{-1}(0)$ definiert.

Genau die bijektiven Morphismen heißen *Isomorphismen*.

Produkt von Liealgebren: Sind \mathbb{L} und \mathbb{M} zwei Liealgebren über \mathbb{K} , dann ist die Produktmenge $\mathbb{L} \times \mathbb{M} := \{(A, B) : A \in \mathbb{L}, B \in \mathbb{M}\}$ ein linearer Raum, der bezüglich

$$[(A_1, B_1), (A_2, B_2)] := ([A_1, A_2], [B_1, B_2])$$

eine Liealgebra über \mathbb{K} wird.

Morphismensatz: (i) Ist \mathbb{I} ein Ideal der Liealgebra \mathbb{L} über \mathbb{K} , dann wird der Faktorraum \mathbb{L}/\mathbb{I} zu einer Liealgebra bezüglich des Lieschen Klammerprodukts

$$[\{A\}, \{B\}] := \{[A, B]\} \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{L},$$

wobei $\{A\} = A + \mathbb{I}$ das zu A gehörige Element von \mathbb{L}/\mathbb{I} bezeichnet.

Die durch $\pi(A) := \{A\}$ gegebene Abbildung $\pi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}/\mathbb{I}$ ist ein Epimorphismus.

(ii) Ist $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ ein Morphismus zwischen zwei Liealgebren, dann ist der Kern $\ker \varphi$ ein Ideal von \mathbb{L} , und der Faktorraum $\mathbb{L}/\ker \varphi$ ist eine zum Bildraum im φ isomorphe Liealgebra.

17.4.2 Beispiele von Liealgebren

Typische mathematische Objekte, die mit der Struktur einer Liealgebra versehen werden können, sind lineare Operatoren (z. B. Matrizen), Differentialoperatoren und Vektorfelder (Geschwindigkeitsfelder) auf Mannigfaltigkeiten.

Die Poissonklammern der klassischen Mechanik lassen die glatten Funktionen auf dem Phasenraum der klassischen Mechanik zu einer (unendlichdimensionalen) Liealgebra werden. Nach Heisenberg ergibt sich die Quantisierung der klassischen Mechanik, indem man Funktionen auf dem Phasenraum durch Operatoren und die Poissonklammern durch die entsprechenden Klammern für lineare Operatoren ersetzt. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

► **STANDARDBEISPIEL 2** (quadratische Matrizen): Die Menge $gl(n, \mathbb{K})$ aller $(n \times n)$ -Matrizen mit Elementen in \mathbb{K} bildet eine reelle Liealgebra bezüglich

$$[A, B] := AB - BA \quad \text{für alle } A, B \in gl(n, \mathbb{K}).$$

Ferner ist $gl(n, \mathbb{C})$ sowohl eine reelle als auch eine komplexe Liealgebra.

Jede Menge $\mathbb{L}G$ in Tabelle 17.1 von $(n \times n)$ -Matrizen mit Elementen in \mathbb{K} ist eine reelle Lieunteralgebra von $gl(n, \mathbb{K})$ (und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch eine Lieunteralgebra der komplexen Liealgebra $gl(n, \mathbb{C})$).

Struktursatz von Ado: Jede endlichdimensionale Liealgebra über \mathbb{K} ist isomorph zu einer Lieunteralgebra von $gl(n, \mathbb{K})$.

► **STANDARDBEISPIEL 3** (lineare Operatoren): Es sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} . Dann wird die Menge $L(X, X)$ aller linearen Operatoren $A : X \rightarrow X$ bezüglich des Klammerprodukts

$$[A, B] := AB - BA \quad \text{für alle } A, B \in L(X, X) \tag{17.19}$$

zu einer reellen Liealgebra, die wir mit $gl(X)$ bezeichnen.⁴

⁴Für $gl(X)$ verwenden wir die reellen Linearkombinationen $\alpha A + \beta B$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Im Fall $gl(X, \mathbb{C})$ benutzen wir die komplexen Linearkombinationen $\alpha A + \beta B$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $L(X, X)$ auch eine komplexe Liealgebra, für die wir $gl(X, \mathbb{C})$ schreiben.

$gl(X)$ ist isomorph zu der reellen Liealgebra $gl(n, \mathbb{K})$, falls $\dim X = n$ (bzw. $gl(X, \mathbb{C})$ ist isomorph zu der komplexen Liealgebra $gl(n, \mathbb{C})$).

Ist X ein endlichdimensionaler komplexer Hilbertraum, dann definieren wir die reellen Liealgebren

$$u(X) := \{A \in gl(X) : A^* = -A\}, \quad su(X) := \{A \in u(X) : \text{tr } A = 0\},$$

wobei das Klammerprodukt wiederum durch (17.19) gegeben ist.

$u(X)$ bzw. $su(X)$ ist isomorph zur reellen Liealgebra $u(n)$ bzw. $su(n)$ mit $n = \dim X$ (vgl. Tabelle 17.1).

► **STANDARDBEISPIEL 4** (Differentialoperatoren): Es sei \mathbb{L}_1 die Menge aller Differentialoperatoren erster Ordnung

$$\mathbb{D} := \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j \tag{17.20}$$

auf dem \mathbb{R}^n mit $\partial_j := \partial/\partial x_j$ und C^∞ -Funktionen $a_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$. Dann bildet \mathbb{L}_1 bezüglich

$$[\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2] := \mathbb{D}_1 \mathbb{D}_2 - \mathbb{D}_2 \mathbb{D}_1$$

eine Liealgebra über \mathbb{K} .

► **STANDARDBEISPIEL 5** (Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit): Es bezeichne X eine reelle n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit und $V(X)$ die Menge aller C^∞ -Vektorfelder \mathbf{v} auf X . Dann entspricht nach 15.4.6 jedem Vektorfeld $\mathbf{v} \in V(X)$ in lokalen Koordinaten ein Differentialoperator erster Ordnung der Form (17.20).

Der lineare Raum $V(X)$ wird durch die Lieableitung

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] := \mathbb{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{w}$$

zu einer reellen n -dimensionalen Liealgebra. Interpretiert man \mathbf{v} als Differentialoperator, dann gilt $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V(X)$.

► **STANDARDBEISPIEL 6** (Poissonklammer): Es sei U eine offene Menge des \mathbb{R}^{2n} mit den Koordinaten $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in U$. Die Menge $C^\infty(U, \mathbb{K})$ aller C^∞ -Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ wird bezüglich der sogenannten Poissonklammer

$$\{f, g\} := \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) \tag{17.21}$$

zu einer Liealgebra über \mathbb{K} . Ist $H : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion, dann folgt aus der kanonischen Gleichung

$$q'_j(t) = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q(t), p(t), t), \quad p'_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q(t), p(t), t), \quad j = 1, \dots, n,$$

die Gleichung

$$\frac{d\mathbb{F}}{dt} = \{H, F\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

mit $F = F(q, p, t)$ und $\mathbb{F}(t) := F(q(t), p(t), t)$.

Speziell für $f(q, p) := p_j$, $g(q, p) := q_k$ erhalten wir

$$\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad \{p_j, p_k\} = \{q_j, q_k\} = 0, \quad j, k = 1, \dots, n. \tag{17.22}$$

Wählt man anstelle von U eine $2n$ -dimensionale reelle C^∞ -Mannigfaltigkeit M , die einem Phasenraum der klassischen Mechanik entspricht (vgl. 15.6), dann wird die Menge $C^\infty(M, \mathbb{R})$ aller C^∞ -Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der Poissonklammer $\{f, g\}$ zu einer reellen Liealgebra. Genauer berechnet man $\{f, g\}$ gemäß (17.21) in lokalen Koordinaten. Tatsächlich sind diese Klammern jedoch unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten.

► **STANDARDBEISPIEL 7** (Heisenbergsche Vertauschungsrelationen in der Quantenmechanik): Wir setzen $X := C^\infty(U, \mathbb{C})$ und definieren die Ortsoperatoren $Q_j : X \rightarrow X$ und Impulsoperatoren $P_j : X \rightarrow X$ durch

$$Q_j \psi = q_j \psi, \quad P_j \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ferner sei I der identische Operator, d.h. es gilt $I\psi := \psi$. Mit der üblichen Lieklammer $[D_1, D_2] := D_1 D_2 - D_2 D_1$ erhalten wir

$$\frac{i}{\hbar} [P_j, Q_k] = \delta_{jk} I, \quad [P_j, P_k] = [Q_j, Q_k] = 0, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (17.23)$$

Dann wird die Menge aller komplexen Linearkombinationen

$$\mathbb{L} := \text{span}_{\mathbb{C}} \{Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n, I\}$$

zu einer komplexen $2n$ -dimensionalen Liealgebra.

Die Vertauschungsrelationen (17.23) der Quantenmechanik ergeben sich aus den klassischen Vertauschungsrelationen, indem man die Poissonklammer $\{., .\}$ durch $i[., .]/\hbar$ ersetzt. Dadurch erhält man in eleganter Weise den Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik.

17.4.3 Darstellungen von Liealgebren

Darstellungen von Liealgebren liefern Realisierungen von Liealgebren als lineare Operatoren auf linearen Räumen.

Definition: Es sei \mathbb{L} eine Liealgebra über \mathbb{K} , und X sei ein linearer Raum über \mathbb{K} . Unter einer *Darstellung* ψ von \mathbb{L} verstehen wir einen Morphismus

$$\psi : \mathbb{L} \rightarrow gl(X, \mathbb{K}), \quad (17.24)$$

d.h., jedem Element A der Liealgebra \mathbb{L} wird ein linearer Operator $\psi(A) : X \rightarrow X$ zugeordnet, wobei Linearkombinationen und die Lieklammern respektiert werden, d.h., für alle $A, B \in \mathbb{L}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt $\psi(\alpha A + \beta B) = \alpha\psi(A) + \beta\psi(B)$ und

$$\psi([A, B]) = [\psi(A), \psi(B)].$$

Die Darstellung ψ heißt genau dann *treu*, wenn ψ injektiv ist. Ferner bezeichnet man $\dim X$ als die Dimension der Darstellung ψ in (17.24).

Analog wie für Gruppen in 17.2.3 werden irreduzible, vollständig reduzible und äquivalente Darstellungen definiert.

Duale Darstellung: Es sei $\psi : \mathbb{L} \rightarrow gl(X, \mathbb{K})$ eine Darstellung der Liealgebra \mathbb{L} auf dem linearen Raum X über \mathbb{K} . Setzen wir

$$\psi_d(A) := -\psi(A)^T \quad \text{für alle } A \in \mathbb{L},$$

dann ist $\psi_d(A) : X^T \rightarrow X^T$ ein linearer Operator auf dem dualen Raum X^T , und $\psi_d : \mathbb{L} \rightarrow gl(X^T, \mathbb{K})$ ist eine Darstellung von \mathbb{L} auf X^T , die man die *duale Darstellung* zu ψ nennt.

Darstellung auf dem Tensorprodukt: Es seien ψ, ϱ mit $\psi : \mathbb{L} \rightarrow gl(X, \mathbb{K})$ und $\varrho : \mathbb{L} \rightarrow gl(Y, \mathbb{K})$ zwei Darstellungen der Liealgebra \mathbb{L} über \mathbb{K} . Setzen wir (motiviert durch eine „Produktregel“)

$$(\psi \boxtimes \varrho)(A)(x \otimes y) := (\psi(A)x) \otimes y + x \otimes \varrho(A)y$$

für alle $x \in X, y \in Y$ und jedes $A \in \mathbb{L}$ und definieren wir in natürlicher Weise ferner

$$(\psi \boxtimes \varrho)(A) \sum_{j=1}^m \alpha_j (x_j \otimes y_j) := \sum_{j=1}^m \alpha_j (\psi \boxtimes \varrho)(A)(x_j \otimes y_j),$$

dann erhalten wir eine Darstellung

$$\psi \boxtimes \varrho : \mathbb{L} \rightarrow gl(X \otimes Y, \mathbb{K})$$

der Liealgebra \mathbb{L} auf dem Tensorprodukt $X \otimes Y$.

Adjungierte Darstellung und Killingform: Setzen wir

$$\text{ad}(A)B := [A, B] \quad \text{für alle } B \in \mathbb{L} \text{ und jedes } A \in \mathbb{L},$$

dann ist $\text{ad} : \mathbb{L} \rightarrow gl(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ eine Darstellung der Liealgebra \mathbb{L} auf sich selbst. Im Fall $\dim \mathbb{L} < \infty$ bezeichnet man die durch

$$K(A, B) = \text{tr}(\text{ad}(A)\text{ad}(B)) \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{L}$$

beschriebene symmetrische Bilinearform $K : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{K}$ als die *Killingform* der Liealgebra \mathbb{L} .

► **BEISPIEL 8:** Ist $\mathbb{L} = sl(n, \mathbb{K}), su(n), so(n, \mathbb{K}), sp(2n, \mathbb{K})$, dann erhält man für die zugehörigen Killingformen:

$$\begin{aligned} sl(n, \mathbb{K}) : \quad K(A, B) &= 2n \text{tr}(AB) & (n \geq 2), \\ su(n) : \quad K(A, B) &= -2n \text{tr}(A^*B) & (n \geq 2), \\ so(n, \mathbb{K}) : \quad K(A, B) &= (n-2) \text{tr}(AB) & (n \geq 3), \\ sp(2n, \mathbb{K}) : \quad K(A, B) &= 2(n+1) \text{tr}(AB) & (n \geq 1). \end{aligned}$$

17.5 Liegruppen

In Liegruppen ist eine Multiplikation erklärt, die in glatter Weise von endlich vielen reellen Parametern abhängt.

17.5.1 Grundbegriffe

Definition: Unter einer *Liegruppe* G versteht man eine reelle C^∞ -Mannigfaltigkeit der Dimension n , die gleichzeitig eine Gruppe darstellt, wobei die Abbildung

$$(g, h) \mapsto gh^{-1}$$

von $G \times G$ in G vom Typ C^∞ ist. Außerdem verlangen wir zusätzlich, dass es ein abzählbares System von offenen Mengen in G gibt, die G überdecken.

Unter einer *Lieschen Untergruppe* H von G versteht man eine Untermannigfaltigkeit H von G , die gleichzeitig eine Untergruppe von G ist.

Eine Untergruppe H von G heißt genau dann eine *verallgemeinerte Liesche Untergruppe* von G , wenn es eine Liesche Gruppe H_0 und eine injektive C^∞ -Abbildung

$$\varphi : H_0 \rightarrow G$$

mit $\varphi(H_0) = H$ gibt, wobei φ ein Gruppenmorphismus und $\varphi'(e)$ injektiv ist.

Ein Normalteiler der Liegruppe G , der zugleich eine Liesche Untergruppe ist, heißt *Liescher Normalteiler*.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Ist X ein n -dimensionaler linearer Raum über \mathbb{K} , dann ist die Gruppe $G = GL(X)$ aller linearen Operatoren $A : X \rightarrow X$ eine Liegruppe mit $\dim G = n^2$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\dim G = 2n^2$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.⁵

Alle Matrizengruppen in Tabelle 17.1 sind Liegruppen.

Jede endliche Gruppe ist eine 0-dimensionale Liegruppe.

Morphismen: Unter einem *Liemorphismus* $\varphi : G \rightarrow H$ zwischen zwei Liegruppen versteht man einen Gruppenmorphismus, der gleichzeitig eine C^∞ -Abbildung ist.

Die Abbildung φ heißt genau dann ein *Lie-Isomorphismus*, wenn φ ein Gruppenmorphismus und ein C^∞ -Diffeomorphismus ist.

Unter einem lokalen Liemorphismus zwischen zwei Liegruppen G und M versteht man eine C^∞ -Abbildung

$$\varphi : U(e) \subseteq G \rightarrow M$$

von einer offenen Umgebung $U(e)$ des Einselementes der Gruppe G in die Gruppe M , so dass $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ gilt, falls $g, h \in U(e)$ und $gh \in U(e)$.

Ist φ zusätzlich ein C^∞ -Diffeomorphismus von $U(e)$ auf eine offene Umgebung $V(e)$ des Einselementes in M , dann heißt φ ein lokaler Lie-Isomorphismus. Existiert eine solche Abbildung, dann sagen wir, dass G *lokal isomorph* zu M ist.

Haarsches Maß: Ist G eine Liegruppe, dann bezeichnet man die Abbildung $L_h : G \rightarrow G$ mit

$$L_h g = hg \quad \text{für alle } g \in G \text{ und festes } h \in G \tag{17.25}$$

als eine *Linkstranslation*.

Unter einem Haarschen Maß μ auf einer Liegruppe G versteht man ein nichtverschwindendes Borelmaß, das linksinvariant ist, d. h., es ist $\mu(hM) = \mu(M)$ für alle messbaren Mengen M von G und alle $h \in G$.

Jede kompakte Liegruppe G besitzt ein Haarsches Maß μ , das auch rechtsinvariant ist und durch $\mu(G) = 1$ eindeutig festgelegt wird.

17.5.2 Der enge Zusammenhang zwischen Liegruppen und ihren Liealgebren (das Liesche Linearisierungsprinzip)

Konstruktion der Liealgebra einer Liegruppe: Der Tangentialraum TG_e einer Liegruppe im Einselement e wird zu einer Liealgebra $\mathbb{L}G$, falls man zwei beliebigen Tangentialvektoren $A, B \in TG_e$ durch

$$[A, B] := \lim_{t \rightarrow 0} t^{-2} (a(t)b(t)a(t)^{-1}b(t)^{-1} - e) \tag{17.26}$$

eine Lieklammer zuordnet. Hier ist $t \mapsto a(t)$ bzw. $t \mapsto b(t)$ eine C^1 -Kurve auf der Gruppe G mit $a(0) = b(0) = e$ und $a'(0) = A$ bzw. $b'(0) = B$. Dabei hängt $[A, B]$ nicht von der Wahl der Kurven ab.

Der Liefunktör \mathbb{L} : Es seien G und H Liegruppen. Ist

$$\varphi : G \rightarrow H \tag{17.27}$$

⁵Man beachte, dass wir G stets als reelle Mannigfaltigkeit auffassen, und $\dim G$ die zugehörige Dimension von G ist.

ein Liemorphismus (bzw. Lie-Isomorphismus), und setzen wir $\mathbb{L}\varphi := \varphi'(e)$ (Ableitung $\varphi'(e) =$ Linearisierung am Einselement e), dann ist

$$\mathbb{L}\varphi : \mathbb{L}G \rightarrow \mathbb{L}H \quad (17.28)$$

ein Morphismus (bzw. Isomorphismus) der entsprechenden Liealgebren mit

$$\mathbb{L}(\ker \varphi) = \ker(\mathbb{L}\varphi).$$

Für die Zusammensetzung von Liemorphismen φ und ψ gilt

$$\mathbb{L}(\varphi\psi) = (\mathbb{L}\varphi)(\mathbb{L}\psi).$$

Alle diese Aussagen bleiben für lokale Liemorphismen richtig.

Der Morphismensatz: (i) Die beiden Liemorphismen $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ stimmen genau dann auf der Zusammenhangskomponente des Einselements von G überein, wenn $\mathbb{L}\varphi = \mathbb{L}\psi$ gilt.

(ii) Es sei $\lambda : \mathbb{L}G \rightarrow \mathbb{L}H$ ein Morphismus von Liealgebren. Dann existiert ein lokaler Liemorphismus

$$\varphi : U(e) \subseteq G \rightarrow H \quad \text{mit } \mathbb{L}\varphi = \lambda.$$

Ist G einfach zusammenhängend, dann gibt es genau einen Liemorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ mit $\mathbb{L}\varphi = \lambda$.

Jeder stetige Gruppenmorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ zwischen zwei Liegruppen ist ein Liemorphismus.

Der Untergruppensatz: Eine Untergruppe (bzw. Normalteiler) H einer Liegruppe G ist genau dann eine Liesche Untergruppe (Liescher Normalteiler), wenn H abgeschlossen ist (Satz von Cartan). Ferner gilt:

(i) Ist H eine verallgemeinerte Liesche Untergruppe der Liegruppe G , dann ist $\mathbb{L}H$ eine Lieunteralgebra von $\mathbb{L}G$. Ist H zusätzlich ein Normalteiler, dann ist $\mathbb{L}H$ ein Ideal.

(ii) Umgekehrt gibt es zu jeder Lieunteralgebra \mathbb{L} von $\mathbb{L}G$ genau eine zusammenhängende verallgemeinerte Liesche Untergruppe H von G mit $\mathbb{L} = \mathbb{L}H$. Ist \mathbb{L} ein Ideal von $\mathbb{L}G$, dann ist H ein Normalteiler von G .

Produkte: Das Produkt $G \times H$ zweier Liegruppen G und H ist wieder eine Liegruppe mit der Liealgebra $\mathbb{L}(G \times H) = \mathbb{L}G \times \mathbb{L}H$.

Der Faktorgruppensatz: Ist N ein Liescher Normalteiler einer Liegruppe G , dann ist die Faktorgruppe G/N eine Liegruppe mit

$$\mathbb{L}(G/N) = \mathbb{L}G/\mathbb{L}N.$$

Ferner ist die kanonische Abbildung $\pi : G \rightarrow G/N$ ein Lie-Epimorphismus.

Ist $\varphi : G \rightarrow H$ ein Lie-Epimorphismus zwischen den beiden Liegruppen G und H , dann ist $N := \ker \varphi$ ein Liescher Normalteiler von G , und es gilt $H \cong G/N$ (Lie-Isomorphie).

Zusammenhangskomponenten: Es sei G eine Liesche Gruppe. Bezeichnet G_e die Zusammenhangskomponente des Einselements e von G , dann ist G_e ein Liescher Normalteiler von G , und die Zusammenhangskomponenten von G stimmen mit den Nebenklassen von G_e , also mit den Elementen von G/G_e überein. Folglich ist die Ordnung von G/G_e gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G .

17.5.3 Struktur von Liegruppen

Der Hauptsatz über die lokale Struktur von Liegruppen: Zwei Liegruppen sind genau dann lokal isomorph, wenn ihre Liealgebren isomorph sind.

Jede Liegruppe ist lokal isomorph zu einer verallgemeinerten Lieschen Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ oder $GL(n, \mathbb{C})$.

Der Hauptsatz über die globale Struktur von Liegruppen: Es sei \mathbb{L} eine endlichdimensionale reelle Liealgebra.

(i) *Existenz und Eindeutigkeit.* Bis auf Lie-Isomorphie gibt es genau eine *einfach zusammenhängende* Liegruppe G_* mit $\mathbb{L}G_* = \mathbb{L}$.

(ii) *Universelle Überlagerungsgruppe.* Bezeichne G eine *zusammenhängende* Liegruppe mit $\mathbb{L}G = \mathbb{L}$, dann existiert ein Lie-Epimorphismus

$$\varphi_* : G_* \rightarrow G, \quad (17.29)$$

wobei $N = \ker \varphi_*$ ein diskreter (höchstens abzählbarer) Normalteiler von G_* ist,⁶ der im Zentrum von G_* liegt. Es gilt $G \cong G_*/N$ (Lie-Isomorphie). Man bezeichnet G_* als die universelle Überlagerungsgruppe von G (und \mathbb{L}).

(iii) Umgekehrt erhält man (bis auf Lie-Isomorphie) genau alle zusammenhängenden Liegruppen G_1 mit $\mathbb{L}G_1 = \mathbb{L}$, indem man $G_1 = G_*/N$ setzt, wobei N ein diskreter (höchstens abzählbarer) Normalteiler von G_* ist, der im Zentrum von G_* liegt.

17.5.4 Beispiele

► **STANDARDBEISPIEL 2:** Die einzigen zusammenhängenden eindimensionalen Liegruppen sind die additive Gruppe \mathbb{R} und die Gruppe $U(1)$. Dabei gilt $\mathbb{L}\mathbb{R} = \mathbb{L}U(1) = \mathbb{R}$. Ferner ist \mathbb{R} die universelle Überlagerungsgruppe zu $U(1)$.

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Unter einer *einparametrischen Untergruppe* einer Liegruppe G versteht man einen Liemorphismus $g : \mathbb{R} \rightarrow G$, d.h., es ist

$$g(t+s) = g(t)g(s) \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}.$$

Für die Untergruppe $H := g(\mathbb{R})$ gilt:

(i) Im Fall $g'(0) = 0$ ist $g(t) = e$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h., H ist eine 0-dimensionale Liesche Untergruppe von G .

(ii) Im Fall $g'(0) \neq 0$ ist H eine verallgemeinerte eindimensionale Liesche Untergruppe von G .

Die Gruppe H ist entweder isomorph zur Gruppe \mathbb{R} oder zur Gruppe $U(1)$.

(iii) Durch (ii) erhält man alle verallgemeinerten eindimensionalen Lieschen Untergruppen H von G .

Ist zusätzlich H abgeschlossen in G , dann ist H auch eine Liesche Untergruppe von G .

► **STANDARDBEISPIEL 4:** Es sei $U(1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Dann ist das n -fache Produkt $T^n := U(1) \times \dots \times U(1)$ eine kommutative zusammenhängende n -dimensionale Liegruppe mit der Liealgebra $\mathbb{L}T^n = \mathbb{R}^n$. Die Mannigfaltigkeit T^n ist ein n -dimensionaler Torus. Genau alle kommutativen zusammenhängenden Liegruppen erhält man durch

$$G = T^n \times \mathbb{R}^m, \quad G = T^n, \quad G = \mathbb{R}^m,$$

mit $n, m \geq 1$. Die zugehörige Liealgebra ist gleich $\mathbb{L}(T^n \times \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

⁶ N ist isomorph zur Fundamentalgruppe $\pi_1(G)$ von G .

Die universelle Überlagerungsgruppe zu der Liealgebra $\mathbb{L} = \mathbb{R}^n$ ist $G_* = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). Die durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$ gegebene Abbildung

$$\varphi : G_* \rightarrow T^n$$

ist ein Lie-Epimorphismus mit dem Kern $\ker \varphi = \mathbb{Z}^n$. Folglich erhält man den Lie-Isomorphismus $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \cong T^n$.

$G_* = \mathbb{R}^n$ ist die universelle Überlagerungsgruppe zu T^n .

Die natürliche Riemannsche Metrik auf $U(1)$, die der klassischen Bogenlänge auf dem Rand des Einheitskreises entspricht, erzeugt ein Haarsches Maß auf $T^1 = U(1)$. Analog erhält man eine Riemannsche Metrik und ein Haarsches Maß auf T^n .

► **BEISPIEL 5:** Die Liegruppen $SO(n)$ sind für $n \geq 2$ nicht einfach zusammenhängend. Die zugehörigen universellen Überlagerungsgruppen $G(n)$ heißen *Spingruppen* für $n \geq 3$ (vgl. 3.9.6.3.). Es ist $G(2) = \mathbb{R}$ und $G(3) = SU(2)$. Wir schreiben $\text{Spin}(n)$ für $G(n)$.

17.5.5 Physikalische Interpretation der Liealgebra einer Liegruppe

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen „Flüssigkeitsströmungen“ auf einer Liegruppe G und der dazugehörigen Liealgebra $\mathbb{L}G$. Genauer: jedes Element $\mathbf{v}_e \in \mathbb{L}G$ erzeugt eine globale linksinvariante Strömung auf G . Die Trajektorien haben dabei die Form $T(t) := hg(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $g(t)$ einer einparametrischen Untergruppe g von G mit $g(0) = e$ und $g'(0) = \mathbf{v}_e$ entspricht (Abb. 17.2).

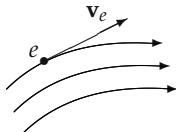


Abb. 17.2

Liealgebra und linksinvariante Geschwindigkeitsfelder: Die Liealgebra \mathbb{L} einer Liegruppe G ist isomorph zur Liealgebra aller *linksinvarianten Vektorfelder* (Geschwindigkeitsfelder) auf G (bezüglich der Lieklammer für Vektorfelder; vgl. Beispiel 5 in 17.4).

Alle diese Vektorfelder \mathbf{v} auf G erhält man durch

$$\mathbf{v}_h := L'_h(e)\mathbf{v}_e \quad \text{für alle } h \in G \text{ und festes } \mathbf{v}_e \in TG_e. \quad (17.30)$$

Dabei sind die Linkstranslationen $L_h : G \rightarrow G$ durch $L_h g = hg$ für alle $g \in G$ gegeben, und $L'_h(e) : TG_e \rightarrow TG_h$ bezeichnet die Linearisierung an der Stelle e (Tangentialabbildung).

Liealgebra und Flüssigkeitsströmung auf der Liegruppe: Es sei $\mathbf{v}_e \in \mathbb{L}G$ gegeben, d. h., \mathbf{v}_e ist ein Tangentialvektor (Geschwindigkeitsvektor) im Einselement. Dann gibt es genau eine einparametrische Untergruppe $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ mit $g'(0) = \mathbf{v}_e$. Definieren wir

$$F_t(h) := hg(t) \quad \text{für alle } g \in G \text{ und alle } t \in \mathbb{R},$$

dann erhalten wir eine Flüssigkeitsströmung auf der Gruppe G . Ein Teilchen, das sich zur Anfangszeit $t = 0$ im Punkt h befindet, ist zur Zeit t im Punkt $F_t(h)$. Der Geschwindigkeitsvektor der Strömung im Punkt h zur Zeit t ist durch \mathbf{v}_h in (17.30) gegeben.

Lokal besitzen die Flüssigkeitstrajektorien eine einfache Struktur, d. h., für kleine Zeiten entspricht die Menge $\{F_t(h) : |t| < \varepsilon\}$ einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit von G durch den Punkt h . Global kann sich jedoch die Trajektorie $t \mapsto F_t(h)$ als Abbildung von \mathbb{R} in G in komplizierter Weise durch die Gruppe G winden (z. B. dichte Umschlingung des Torus $G = T^2$). Deshalb sind verallgemeinerte Liesche Untergruppen in der Regel keine (globalen) Untermannigfaltigkeiten und somit keine Lieschen Untergruppen.

17.5.6 Darstellungen

Die folgenden Sätze zeigen, wie man die Untersuchung der Darstellungen von Liegruppen auf die Untersuchung von Darstellungen der entsprechenden Liealgebren zurückführen kann.

Sei X ein endlichdimensionaler komplexer linearer Raum. Unter einer *Liedarstellung* φ der Liegruppe G auf X verstehen wir einen Liemorphismus

$$\varphi : G \rightarrow GL(X). \quad (17.31)$$

Ist φ lediglich ein lokaler Liemorphismus, dann sprechen wir von einer lokalen Liedarstellung.

Hauptsatz: (i) Zu jeder (lokalen) Liedarstellung φ der Form (17.31) gehört eine Darstellung

$$\mathbb{L}\varphi : \mathbb{L}G \rightarrow gl(X) \quad (17.32)$$

der entsprechenden Liealgebren.

(ii) Umgekehrt gehört zu jeder Darstellung $\psi : \mathbb{L}G \rightarrow gl(X)$ eine lokale Liedarstellung der Form (17.31) mit $\mathbb{L}\varphi = \psi$.

(iii) Es sei G zusammenhängend. Dann ist die Liedarstellung φ in (17.31) genau dann irreduzibel (bzw. vollständig reduzibel), wenn $\mathbb{L}\varphi$ in (17.32) irreduzibel (bzw. vollständig reduzibel) ist.

(iv) Es sei G einfach zusammenhängend (z. B. $G = SU(n)$). Dann gehört zu jeder Darstellung $\psi : \mathbb{L}G \rightarrow gl(X)$ genau eine Liedarstellung $\varphi : G \rightarrow GL(X)$ mit $\mathbb{L}\varphi = \psi$.

Mehrdeutige Darstellungen: Es sei G eine zusammenhängende Liegruppe (z. B. die Zusammenhangskomponente des Einselementes einer beliebigen Liegruppe), und G_* sei die universelle Überlagerungsgruppe von G mit dem Lie-Epimorphismus aus (17.29):

$$\varphi_* : G_* \rightarrow G.$$

Zu einer gegebenen Darstellung

$$\psi : \mathbb{L}G \rightarrow gl(X)$$

der Liealgebra $\mathbb{L}G$ auf X gehört dann nach (iv) eine eindeutig bestimmte Darstellung der universellen Überlagerungsgruppe G_* :

$$\psi_* : G_* \rightarrow GL(X).$$

Setzen wir nun $g_* := \varphi_*^{-1}(g)$ für $g \in G$ und $\Psi_*(g) := \psi_*(g_*)$, dann sind g_* und $\Psi_*(g)$ Mengen, und wir erhalten die mehrdeutige Abbildung

$$\Psi_* : G \rightarrow GL(X),$$

die man die zu ψ gehörige mehrdeutige Darstellung der Liegruppe G nennt.

► **BEISPIEL 6** (Darstellungen der Drehgruppe $SO(3)$): Die universelle Überlagerungsgruppe zu $G = SO(3)$ ist $G_* = SU(2)$. Der zugehörige Lie-Epimorphismus $\varphi_* : SU(2) \rightarrow SO(3)$ besitzt die Eigenschaft, dass zu jeder Drehung $D \in SO(3)$ genau zwei Elemente B_1 und $B_2 = -B_1$ in $SU(2)$ gehören mit

$$\varphi_*(B_j) = D, \quad j = 1, 2.$$

Ist $\psi : so(3) \rightarrow gl(X)$ eine irreduzible Darstellung der Liealgebra $so(3) \cong su(2)$ auf X , dann gehört dazu eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$\psi_* : SU(2) \rightarrow GL(X)$$

von $SU(2)$ auf X . Die dazugehörige (höchstens zweideutige) Darstellung

$$\Psi_* : SO(3) \rightarrow GL(X)$$

lautet $\Psi_*(D) = \{\psi_*(B_1), \psi_*(-B_1)\}$.

Den Zusammenhang mit dem Elektronenspin erläutern wir in 17.7.

Das gleiche Resultat erhält man, wenn man $SO(3)$ durch die *eigentliche Lorentzgruppe* $SO^+(3, 1)$ und $SU(2)$ durch $SL(2, \mathbb{C})$ ersetzt.

Duale Darstellung: Ist $\varphi : G \rightarrow GL(X)$ eine Darstellung der Liegruppe G auf dem linearen Raum X über \mathbb{C} , dann erhält man durch

$$\varphi_d(g) := (\varphi(g)^{-1})^T \quad \text{für alle } g \in G$$

eine neue Darstellung $\varphi_d : G \rightarrow GL(X^T)$ von G auf dem dualen Raum X^T , die man die duale Darstellung zu φ nennt. Für die entsprechenden Darstellungen $\mathbb{L}\varphi : \mathbb{L}G \rightarrow gl(X)$ und $\mathbb{L}\varphi_d : \mathbb{L}G \rightarrow gl(X^T)$ der zugehörigen Liealgebra $\mathbb{L}G$ gilt

$$(\mathbb{L}\varphi_d)(A) = -(\mathbb{L}\varphi)(A)^T \quad \text{für alle } A \in \mathbb{L}G.$$

Tensordarstellung: Sind $\varphi : G \rightarrow GL(X)$ und $\psi : G \rightarrow GL(Y)$ zwei Darstellungen der Liegruppe G auf den endlichdimensionalen linearen Räumen X und Y , dann ergibt sich durch

$$(\varphi \otimes \psi)(g) := \varphi(g) \otimes \psi(g) \quad \text{für alle } g \in G$$

eine Darstellung $\varphi \otimes \psi : G \rightarrow GL(X \otimes Y)$, die man das Tensorprodukt (oder auch Kroneckerprodukt) zwischen φ und ψ nennt. Explizit gilt

$$(\varphi(g) \otimes \psi(g)) \sum_j \alpha_j (x_j \otimes y_j) = \sum_j \alpha_j (\varphi(g)x_j) \otimes (\psi(g)y_j).$$

Für die entsprechende Darstellung $\mathbb{L}(\varphi \otimes \psi) : \mathbb{L}G \rightarrow gl(X \otimes Y)$ der Liealgebra von G auf $X \otimes Y$ erhält man (vgl. 17.4)

$$\mathbb{L}(\varphi \otimes \psi) = \mathbb{L}\varphi \boxtimes \mathbb{L}\psi.$$

17.6 Darstellungen der Permutationsgruppe und Darstellungen klassischer Gruppen

Eine Permutation der Zahlen $1, \dots, n$ kann man durch das Symbol

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

beschreiben, d. h., die Zahl k geht in die Zahl i_k über ($k = 1, \dots, n$). Mit $\pi_1 \pi_2$ bezeichnen wir die Produktpermutation, d. h., zunächst wird die Abbildung π_2 und dann π_1 ausgeführt.⁷ Zum Beispiel ergibt sich für

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

das Produkt

$$\pi_1 \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

⁷Die Multiplikation von Permutationen wird in der Literatur unterschiedlich definiert. Die obige Definition ist für die Darstellungstheorie vorteilhaft.

denn π_2 bildet 1 in 2, und π_1 bildet 2 in 3 ab. Unter einer Transposition (km) mit $k \neq m$ versteht man eine Permutation, die k in m und m in k überführt, während alle übrigen Elemente fest bleiben. Jede Permutation π kann als Produkt von r Transpositionen geschrieben werden, wobei r stets entweder gerade oder ungerade ist. Deshalb können wir das Vorzeichen von π durch

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^r$$

definieren. Mit \mathbb{S}_n bezeichnen wir die Gruppe aller Permutationen von n Elementen.

Tensordarstellung der Permutationsgruppe: Es sei X ein q -dimensionaler komplexer Hilbertraum mit den orthonormierten Basisvektoren e_1, \dots, e_q . Dann bilden die Vektoren

$$e_{i_1 \dots i_n} := e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, \quad i_1, \dots, i_n = 1, \dots, q,$$

eine Orthonormalbasis im Tensorprodukt

$$Z := X \otimes \dots \otimes X \quad (n\text{-Faktoren}).$$

Jeder Permutation $\pi \in \mathbb{S}_n$ ordnen wir einen linearen Operator $\varphi_\pi : Z \rightarrow Z$ zu, indem wir setzen

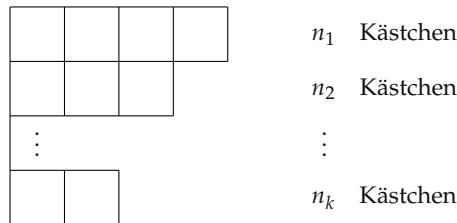
$$\varphi_\pi(t^{i_1 \dots i_n} e_{i_1 \dots i_n}) := t^{\pi(i_1 \dots i_n)} e_{i_1 \dots i_n},$$

d.h., φ_π entspricht der Permutation der Indizes von t^{\dots} . Dabei benutzen wir die Einsteinsche Summenkonvention, d.h., über gleiche obere und untere Indizes wird von 1 bis q summiert.

Young-Tableaus: Jeder Zerlegung

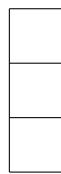
$$n = n_1 + \dots + n_k$$

mit natürlichen Zahlen $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ ordnen wir einen sogenannten *Young-Rahmen* der folgenden Form zu:

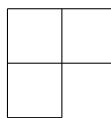


Daraus ergibt sich ein sogenanntes *Standardtableau*, indem man die Kästchen mit den Zahlen 1 bis n belegt, wobei keine Wiederholungen auftreten und die Nummerierung in den Zeilen von links nach rechts und in den Spalten von oben nach unten wächst. Das Gewicht g eines Young-Rahmens ist gleich der Anzahl der zugehörigen Standardtableaus.

► **BEISPIEL 1:** Für $n = 3$ erhalten wir die möglichen Young-Rahmen



$$3 = 1 + 1 + 1$$



$$3 = 2 + 1$$



$$3 = 3$$

mit den zugehörigen Standardtableaus

1
2
3

$$g = 1$$

(P₁)

1	2
3	

$$g = 2$$

(P₂)

1	3
2	

(P₃)

1	2	3
---	---	---

$$g = 1$$

(P₄).

(17.33)

Projektionsoperatoren: Bezeichne $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_M$ alle Standardtableaus. Jedem \mathbb{T}_j ordnen wir einen Operator

$$P_j := \frac{g}{n!} \left(\sum_{\pi \in V} (\text{sgn } \pi) \varphi_\pi \right) \left(\sum_{\pi \in H} \varphi_\pi \right)$$

zu, wobei H (bzw. V) die Menge aller Permutationen $\pi \in S_n$ bezeichnet, die die Zeilen (bzw. Spalten) des Standardtableaus \mathbb{T}_j invariant lassen. Jeder Operator $P_j : Z \rightarrow Z$ ist ein Projektionsoperator, d.h. $P_j^2 = P_j$.

Irreduzible Darstellungen klassischer Gruppen und klassischer Liealgebren: Auf $X = \text{span}\{e_1, \dots, e_q\}$ wirken in natürlicher Weise die Liegruppen $G = GL(q, \mathbb{C}), SL(q, \mathbb{C})$ und $SU(q)$ durch

$$A(t_j e_j) = a_{ij} t_j e_i, \quad (17.34)$$

wobei über gleiche Indizes von 1 bis q summiert wird und die Matrix (a_{ij}) zu G gehört.

Daraus erhält man die Produktdarstellung $\varphi : G \rightarrow GL(Z)$ von G auf Z mit

$$\varphi(A)(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) := A e_{i_1} \otimes \dots \otimes A e_{i_n} \quad \text{für alle } A \in G.$$

Ferner wirken auf X gemäß (17.34) die Liealgebren $\mathbb{L}G = gl(q, \mathbb{C}), sl(q, \mathbb{C}), su(q)$, die auf Z die Produktdarstellung $\psi : \mathbb{L}G \rightarrow gl(Z)$ erzeugen mit Hilfe der „Produktregel“

$$\psi(A)(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) = \sum_{j=1}^n e_{i_1} \otimes \dots \otimes A e_{i_j} \otimes \dots \otimes e_{i_n}.$$

Es gilt $\psi = \mathbb{L}\varphi$.

Hauptsatz 1: Man hat die direkte Summenzerlegung

$$Z = \bigoplus_{j=1}^M P_j(Z)$$

(vgl. 11.2.3.1). Jeder der linearen Teilräume $P_j(Z)$ ist irreduzibel bezüglich der Produktdarstellung φ der Liegruppen $G = GL(q, \mathbb{C}), SL(q, \mathbb{C}), SU(q)$.

Ferner ist jeder lineare Teilraum $P_j(Z)$ irreduzibel bezüglich der Produktdarstellung ψ der Liealgebren $\mathbb{L} = gl(q, \mathbb{C}), sl(q, \mathbb{C}), su(q)$.

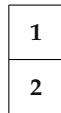
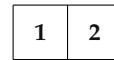
Anwendungen auf Elementarteilchen findet man in 17.8.

Wichtige Spezialfälle:

► **BEISPIEL 2:** Für $n = 2$ und $q = 2$ ist $X = \text{span}\{e_1, e_2\}$ und $Z = X \otimes X$. Die Gruppe S_2 besteht aus der identischen Permutation und der Transposition $\pi := (12)$. Durch

$$\varphi_\pi(t^{ij} e_i \otimes e_j) := t^{ji} e_i \otimes e_j$$

ergibt sich eine Darstellung $\varphi : S_2 \rightarrow gl(Z)$ von S_2 auf Z . Die Standardtableaus zu S_2 sind

 (P_1)  (P_2)

mit $P_1 = \frac{1}{2}(I - \varphi_\pi)$ und $P_2 = \frac{1}{2}(I + \varphi_\pi)$. Es gilt

$$Z = P_1(Z) \oplus P_2(Z).$$

Diese Zerlegung entspricht

$$t^{ij}e_i \otimes e_j = \frac{1}{2}(t^{ij} - t^{ji})e_i \otimes e_j + \frac{1}{2}(t^{ij} + t^{ji})e_i \otimes e_j.$$

So ist $P_1(Z) = \text{span}\{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1\}$ und $P_2(Z) = \text{span}\{e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1\}$, also $\dim P_1(Z) = 1$ und $\dim P_2(Z) = 3$; $P_1(Z)$ und $P_2(Z)$ entsprechen irreduziblen Darstellungen von $G = GL(2, \mathbb{C}), SL(2, \mathbb{C}), SU(2)$ bzw. $\mathbb{L} = gl(2, \mathbb{C}), sl(2, \mathbb{C}), su(2)$.

► **BEISPIEL 3:** Im Fall $n = 3, q = 3$ erhalten wir nach (17.33) die folgenden Projektionsoperatoren

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} (\text{sgn } \pi) \varphi_\pi, & P_4 &= \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \varphi_\pi, \\ P_2 &= \frac{2}{3!}(I - \varphi_{\pi_1})(I + \varphi_{\pi_2}), & P_3 &= \frac{2}{3!}(I - \varphi_{\pi_2})(I + \varphi_{\pi_1}) \end{aligned}$$

mit $\pi_1 = (13)$ und $\pi_2 = (12)$. Für $X = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ und $Z = X \otimes X \otimes X$ erhalten wir durch

$$\varphi(t^{ijk}e_{ijk}) := t^{\pi(ijk)}e_{ijk}, \quad e_{ijk} = e_i \otimes e_j \otimes e_k,$$

eine Darstellung $\varphi : S_3 \rightarrow gl(Z)$ von S_3 auf Z . Man hat die Zerlegung

$$Z = P_1(Z) \oplus P_2(Z) \oplus P_3(Z) \oplus P_4(Z).$$

Die folgenden Überlegungen zeigen, dass $\dim Z = 27$, $\dim P_1(Z) = 1$, $\dim P_4(Z) = 10$, $\dim P_2(Z) = \dim P_3(Z) = 8$.

Jeder der Räume $P_j(Z)$ ist irreduzibel bezüglich $G = GL(3, \mathbb{C}), SL(3, \mathbb{C}), SU(3)$ bzw. $\mathbb{L} = gl(3, \mathbb{C}), sl(3, \mathbb{C}), su(3)$. Explizit gilt folgendes.

(i) Raum $P_1(Z)$. Man hat

$$P_1(t^{ijk}e_{ijk}) = t^{[ijk]}e_{ijk} = t^{ijk}e_{[ijk]},$$

wobei $[ijk]$ der Antisymmetrisierung entspricht; $P_1(Z)$ wird vom Einheitsvektor

$$e_{[123]} = \frac{1}{6}(e_{123} - e_{132} + e_{231} - e_{213} + e_{312} - e_{321})$$

aufgespannt, also ist $\dim P_1(Z) = 1$.

(ii) Raum $P_4(Z)$. Wir erhalten

$$P_4(t^{ijk}e_{ijk}) = t^{(ijk)}e_{ijk} = t^{ijk}e_{(ijk)},$$

wobei (ijk) der Symmetrisierung entspricht, d. h.

$$e_{(ijk)} = \frac{1}{6}(e_{ijk} + e_{ikj} + e_{jki} + e_{jik} + e_{kij} + e_{kji}).$$

Als Basis von $P_4(Z)$ können wir die folgenden zehn Einheitsvektoren wählen:

$$u_{111}, u_{112}, u_{113}, u_{122}, u_{133}, u_{123}, u_{222}, u_{223}, u_{233}, u_{333}. \quad (17.35)$$

Dabei ist $u_{ijk} := \alpha_{ijk} e_{(ijk)}$, wobei α_{ijk} ein Normierungsfaktor ist.

(iii) Raum $P_2(Z)$. Wegen

$$\varphi_{\pi_1} \varphi_{\pi_2} = \varphi_{\pi} \quad \text{mit} \quad \pi = \pi_1 \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_1 = (13), \quad \pi_2 = (12),$$

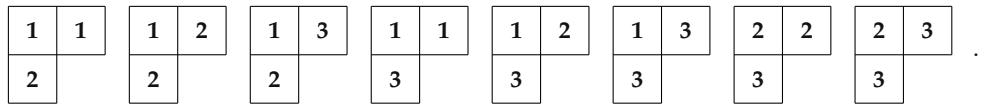
gilt $P_2 = \frac{1}{3}(I + \varphi_{\pi_2} - \varphi_{\pi_1} - \varphi_{\pi})$, d.h.

$$P_2(t^{ijk} e_{ijk}) = \frac{1}{3}(t^{ijk} + t^{jik} - t^{kji} - t^{kij}) e_{ijk} = \frac{1}{3} t^{ijk} v_{ijk}$$

mit $v_{ijk} := e_{ijk} + e_{jik} - e_{kji} - e_{kij}$. Die folgenden acht Vektoren

$$v_{112}, v_{122}, v_{132}, v_{113}, v_{123}, v_{133}, v_{223}, v_{233} \quad (17.36)$$

bilden eine Basis von $P_2(Z)$. Diese Indizes erhält man in übersichtlicher Weise, indem man die zugehörigen Young-Rahmen mit den Zahlen 1, 2, 3 belegt, wobei Wiederholungen erlaubt sind und die Nummerierung der Zeilen (bzw. Spalten) von links nach rechts wächst (bzw. von oben nach unten echt wächst), d.h., wir betrachten



► **BEISPIEL 4:** Im Fall $n = 3, q \geq 1$ erhalten wir $X = \text{span}\{e_1, \dots, e_q\}$ und $Z = X \otimes X \otimes X$ zusammen mit der Zerlegung

$$Z = P_1(Z) \oplus P_2(Z) \oplus P_3(Z) \oplus P_4(Z),$$

wobei jeder Raum $P_j(Z)$ irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{G} = GL(q, \mathbb{C}), SL(q, \mathbb{C}), SU(q)$ bzw. $\mathbb{L} = gl(q, \mathbb{C}), sl(q, \mathbb{C}), su(q)$ entspricht. Ferner gilt

$$\dim P_1(Z) = \frac{q(q-1)(q-2)}{6}, \quad \dim P_2(Z) = \dim P_3(Z) = \frac{q(q^2-1)}{3},$$

$$\dim P_4(Z) = \frac{q(q+1)(q+2)}{6}.$$

Irreduzible Darstellungen der Permutationsgruppe: Es sei

$$\mathbb{CS}_n = \left\{ \sum_{\pi \in S_n} c(\pi) \pi : c(\pi) \in \mathbb{C} \right\},$$

die Gruppenalgebra von S_n . Durch $\varphi : S_n \rightarrow GL(\mathbb{CS}_n)$ mit

$$\varphi(\alpha) (\sum c(\pi) \pi) := \sum c(\pi) \alpha \pi \quad \text{für alle } \alpha \in S_n$$

ergibt sich in natürlicher Weise eine Darstellung von S_n . Jedem Standardtableau \mathbb{T}_j mit $j = 1, \dots, M$ ordnen wir den Ausdruck

$$\Pi_j := \frac{g}{n!} \left(\sum_{\pi \in H} \pi \right) \left(\sum_{\pi \in V} (\text{sgn } \pi) \pi \right)$$

zu. Dann gilt die direkte Summenzerlegung

$$\mathbb{CS}_n = \bigoplus_{j=1}^M (\mathbb{CS}_n) \Pi_j$$

mit $(\mathbb{CS}_n) \Pi_j := \{\alpha\beta : \alpha \in \mathbb{CS}_n, \beta \in \Pi_j\}$.

Hauptsatz 2: Jeder lineare Teilraum $(\mathbb{CS}_n) \Pi_j$ ist irreduzibel bezüglich der Darstellung φ von S_n . Zwei derartige irreduzible Darstellungen sind genau dann inäquivalent, wenn die zugehörigen Young-Rahmen verschieden sind.

Auf diese Weise erhält man (bis auf Äquivalenz) alle irreduziblen Darstellungen von S_n .

Die Anzahl der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von S_n ist somit gleich der Anzahl der Young-Rahmen für n Elemente.

17.7 Anwendungen auf den Elektronenspin

Die Theorie des Elektronenspins beruht auf der Darstellungstheorie der Liealgebra $su(2)$. Wir betrachten hierzu einen zweidimensionalen komplexen Hilbertraum X mit der orthonormalen Basis $\{e_1, e_2\}$. Physikalisch entspricht e_1 bzw. e_2 dem Zustand eines Teilchens (z. B. eines Elektrons) mit dem Spin (Eigendrehimpuls) gleich $\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$ um die z -Achse in einem kartesischen (x, y, z) -System (Abb. 17.3).

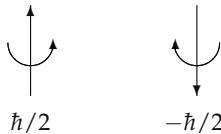


Abb. 17.3

Jeden linearen Operator $A : X \rightarrow X$ kann man mit Hilfe von

$$Ae_k = \sum_{j=1}^2 a_{jk} e_j$$

durch eine Matrix (a_{jk}) beschreiben. Die Liealgebra $su(2)$ besteht aus allen linearen Operatoren $A : X \rightarrow X$ mit $A^* = -A$ und $\text{tr } A = 0$. Eine Basis von $su(2)$ wird von den Operatoren $A_j, j = 1, 2, 3$, gebildet, die den Matrizen $-\frac{1}{2}i\sigma_j$ entsprechen, wobei σ_j die sogenannten Pauli-Matrizen sind mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die Vertauschungsrelationen

$$A_1 A_2 - A_2 A_1 = A_3, \quad A_2 A_3 - A_3 A_2 = A_1, \quad A_3 A_1 - A_1 A_3 = A_2.$$

Genau alle reellen Linearkombinationen $\sum_{j=1}^3 \alpha_j A_j$ ergeben $su(2)$.

Spinoperatoren s_j : Definieren wir $s_j := i\hbar A_j$, dann erhalten wir die Vertauschungsregeln

$$s_1 s_2 - s_2 s_1 = i\hbar s_3, \quad s_2 s_3 - s_3 s_2 = i\hbar s_1, \quad s_3 s_1 - s_1 s_3 = i\hbar s_2,$$

die mit den Vertauschungsregeln (17.7) für den Drehimpuls in der Quantenmechanik übereinstimmen. Die Gleichheit dieser Vertauschungsregeln beruht darauf, dass die Liealgebren $so(3)$

und $su(2)$ isomorph sind, während die zugehörigen Liegruppen verschieden sind, d. h., es existiert ein Liemorphismus $H : SU(2) \rightarrow SO(3)$ mit $H^{-1}(I_3) = \{\pm I_2\}$ (I_m ist die m -dimensionale Einheitsmatrix).

Für einen beliebigen Einheitsvektor $x \in X$ definieren wir den Erwartungswert der j -ten Spinkomponente (in einem kartesischen Koordinatensystem) durch das Skalarprodukt

$$\bar{s}_j = (x, s_j x).$$

Speziell bedeutet

$$s_3 e_1 = \frac{\hbar}{2} e_1, \quad s_3 e_2 = -\frac{\hbar}{2} e_2,$$

dass e_1 bzw. e_2 einem Teilchenzustand entspricht mit Spin $= \hbar/2$ (bzw. $= -\hbar/2$) in Richtung der z -Achse.

Darstellungen von $su(2)$: Die Tensordarstellungen von $su(2)$ ergeben die möglichen Spinwerte zusammengesetzter Teilchen (Gesamtdrehimpuls).

Ist $\varphi : su(2) \rightarrow gl(Z)$ eine irreduzible Darstellung von $su(2)$ auf dem endlichdimensionalen komplexen Hilbertraum Z , dann gibt es eine Spinzahl $s = N/2$, $N = 0, 1, 2, \dots$, so dass $\dim Z = 2s + 1$ gilt und in Z eine Orthonormalbasis $b_s, b_{s-1}, \dots, b_{-s}$ existiert mit

$$S_3 b_m = m \hbar b_m, \quad m = s, s-1, \dots, -s, \quad (17.37)$$

$$(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) b_m = \hbar^2 (m+1) m b_m.$$

Dabei setzen wir $S_j := i\hbar \varphi(A_j)$. Zu jeder Spinzahl $s = N/2$, $N = 0, 1, 2, \dots$, gibt es eine derartige irreduzible Darstellung von $su(2)$. Zwei irreduzible Darstellungen von $su(2)$ sind genau dann äquivalent, wenn ihre Spinzahlen übereinstimmen.

Physikalisch interpretieren wir S_j als Spinoperatoren. Nach (17.37) besitzt die dritte Komponente des Spins im Zustand b_m den scharfen Wert $m\hbar$, und das Quadrat des Gesamtspins hat im Zustand b_m den scharfen Wert $\hbar^2(m+1)m$.

Durch dieses Resultat erhält man einen Überblick über alle möglichen Werte des Spins (Gesamtdrehimpulses) in der Quantenmechanik.

Zusammengesetzte Zustände: Es seien $\varphi : su(2) \rightarrow gl(Z)$ und $\psi : su(2) \rightarrow gl(W)$ zwei irreduzible Darstellungen von $su(2)$ auf den komplexen Hilberträumen Z und W mit den Spinzahlen s_φ und s_ψ . Dann zerfällt das Tensorprodukt

$$Z \otimes W = \bigoplus_{s=|s_\varphi-s_\psi|}^{s_\varphi+s_\psi} Y_s \quad (17.38)$$

in eine direkte Summe von linearen Teilräumen Y_s , wobei Y_s irreduzibel bezüglich der Darstellung $\varphi \boxtimes \psi$ von $su(2)$ mit der Spinzahl s ist.

Physikalisch beschreibt (17.38) die *Additionsregel* für den Spin. Um das zu erläutern, interpretieren wir $z \in Z$ bzw. $w \in W$ als Zustand eines Teilchens mit der Spinzahl s_φ bzw. s_ψ . Dann beschreibt

$$z \otimes w$$

den Zustand eines zusammengesetzten Teilchens. Allgemeiner entspricht jedes auf eins normierte Element

$$\sum_j \alpha_j (z_j \otimes w_j)$$

des Tensorprodukts $Z \otimes W$ einem zusammengesetzten Teilchenzustand. Nach (17.38) existieren zusammengesetzte Zustände mit den Spinzahlen

$$s = |s_\varphi - s_\psi|, |s_\varphi - s_\psi| + 1, \dots, s_\varphi + s_\psi.$$

Setzen wir

$$S_{j\varphi} := i\hbar \varphi(A_j), \quad S_{j\psi} := i\hbar \psi(A_j) \quad \text{und} \quad S_j := i\hbar(\varphi \boxtimes \psi)(A_j),$$

dann folgt aus

$$\begin{aligned} S_{3\varphi} b_m &= m\hbar b_m, & m &= s_\varphi, s_\varphi - 1, \dots, -s_\varphi, \\ S_{3\psi} c_k &= k\hbar c_k & k &= s_\psi, s_\psi - 1, \dots, -s_\psi, \end{aligned}$$

für den zusammengesetzten Zustand $b_m \otimes c_k$ die Beziehung

$$S_3(b_m \otimes c_k) = (S_{3\varphi} b_m) \otimes c_k + b_m \otimes (S_{3\psi} c_k) = (m+k)\hbar(b_m \otimes c_k).$$

► **BEISPIEL** (zwei Elektronen): Es sei $X = \text{span}\{e_1, e_2\}$. Dann hat man die direkte Summenzerlegung

$$X = X_{\text{symm}} \oplus X_{\text{anti}}$$

mit $X_{\text{symm}} := \text{span}\{u_{11}, u_{22}, u_{12}\}$ und $X_{\text{anti}} := \text{span}\{v_{12}\}$ sowie den Einheitsvektoren

$$u_{jk} := \alpha(e_j \otimes e_k + e_k \otimes e_j), \quad v_{12} := \alpha(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1),$$

mit $\alpha := \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nach Beispiel 2 in 17.6 sind X_{symm} und X_{anti} irreduzibel bezüglich der Tensordarstellung von $su(2)$.

Physikalisch entspricht $e_j \otimes e_k$ einem Zustand bestehend aus zwei Elektronen mit

$$S_3(e_j \otimes e_k) = (s_3 e_j) \otimes e_k + e_j \otimes (s_3 e_k) = -((-1)^j + (-1)^k) \frac{\hbar}{2} (e_j \otimes e_k).$$

Daraus folgt

$$S_3 u_{11} = \hbar u_{11}, \quad S_3 u_{12} = 0, \quad S_3 u_{22} = -\hbar u_{22}, \quad S_3 v_{12} = 0,$$

d.h., der zusammengesetzte Elektronenzustand u_{11} besitzt eine scharfe dritte Komponente des Gesamtspins, und diese ist gleich \hbar usw. Die Zustände in X_{symm} bzw. X_{anti} entsprechen der Spinzahl $s = 1$ bzw. $s = 0$. Explizit gilt

$$(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)x = \hbar^2(s+1)sx$$

für alle $x \in X_{\text{symm}}$ und $s = 1$ (bzw. alle $x \in X_{\text{anti}}$ und $s = 0$). Ferner ist

$$S_j(e_k \otimes e_m) = (s_j e_k) \otimes e_m + e_k \otimes (s_j e_m).$$

Irreduzible Darstellungen der Gruppe $SU(2)$: Die Liegruppe $SU(2)$ besteht aus allen unitären (2×2) -Matrizen $A = (a_{ij})$ mit $\det A = 1$. Wir betrachten den Raum P aller komplexen Polynome

$$a_0 x^{2s} + a_1 x^{2s-1} y + a_2 x^{2s-2} y^2 + \dots + a_{2s} y^{2s}.$$

Unterwerfen wir diese Polynome der Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \in SU(2),$$

dann erhalten wir eine irreduzible Darstellung $\varphi : SU(2) \rightarrow GL(P)$, die man mit \mathbb{D}_s bezeichnet ($s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$). Es ist $\dim \mathbb{D}_s = 2s + 1$. Ferner gilt:

- (i) Jede irreduzible Liedarstellung von $SU(2)$ ist zu einer Darstellung \mathbb{D}_s äquivalent.
- (ii) Für $s = 0, 1, \dots$ ist \mathbb{D}_s zu einer irreduziblen Liedarstellung von $SO(3)$ äquivalent. Auf diese Weise erhält man (bis auf Äquivalenz) alle irreduziblen Liedarstellungen von $SO(3)$.
- (iii) Die zu \mathbb{D}_s gehörende irreduzible Darstellung $\varphi : su(2) \rightarrow gl(P)$ der Liealgebra $su(2)$ besitzt die Spinzahl s .
- (iv) Die beiden Liegruppen $SU(2)$ und $SO(3)$ haben die gleiche Liealgebra.

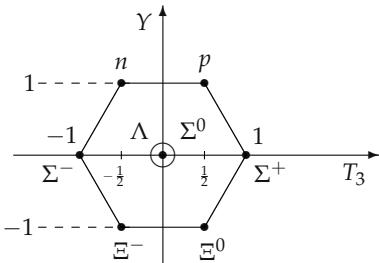
In der Quantenmechanik entspricht der Bahndrehimpuls von Elektronen in Atomen oder Molekülen ganzzahligen Werten von s , während der Elektronenspin zu dem Wert $s = \frac{1}{2}$ gehört und der Gesamtdrehimpuls durch ganzzahlige oder halbzahlig Werte von s beschrieben wird.

17.8 Anwendungen auf das Quarkmodell der Elementarteilchen

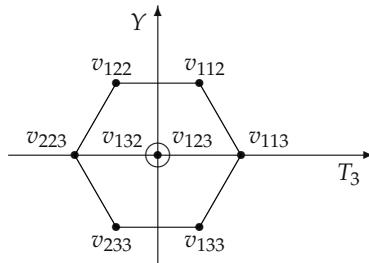
Die experimentelle Erfahrung der Physiker zeigt, dass sich die Eigenschaften von Elementarteilchen durch Quantenzahlen wie elektrische Ladung Q , Isospin T , dritte Komponente des Isospins T_3 , Hyperladung Y usw. beschreiben lassen. Dabei gilt

$$Q = |e| \left(T_3 + \frac{1}{2} Y \right)$$

(e Ladung des Elektrons).



(a) Baryonenoktett



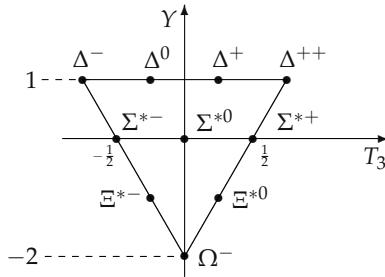
(b) $D(1,1)$

Abb. 17.4

Die Abbildungen 17.4(a) und 17.5(a) stellen experimentell gewonnene Diagramme dar, die die Quantenzahlen T_3 und Y von Elementarteilchen angeben. Die Massen der Teilchen eines jeden solchen Diagramms sind annähernd gleich. Für die Teilchen auf einer horizontalen Geraden gilt $T_3 = T, T-1, \dots, -T$. Zum Beispiel folgt aus Abb. 17.4(a), dass das Proton p (bzw. Neutron n) die Quantenzahlen $T_3 = \frac{1}{2}, Y = 1, T = \frac{1}{2}$ (bzw. $T_3 = -\frac{1}{2}, Y = 1, T = \frac{1}{2}$) besitzt.

Im Jahre 1964 stellten Gell-Mann und Zweig die Hypothese auf, dass die Baryonen aus Quarks aufgebaut sind und die Mesonen aus Quark-Antiquarkpaaren bestehen. Auf diese Hypothese wurden sie durch Vergleich der Diagramme von Abb. 17.4(a) und Abb. 17.5(a) mit den sogenannten Gewichtsdiagrammen der Darstellungen der Liealgebra $su(3)$ geführt (Abb. 17.4(b) und Abb. 17.5(b); vgl. (17.35) und (17.36)). Der mathematische Hintergrund soll im folgenden erläutert werden.

Die Liealgebra $su(3)$ und Quarks: Es sei X ein komplexer dreidimensionaler Hilbertraum mit der Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$. Die Liealgebra $su(3)$ besteht aus allen linearen Operatoren $A : X \rightarrow X$ mit $A^* = -A$ und $\text{tr } A = 0$. Die Cartanalgebra von $su(3)$, d. h. die größte kommutative



(a) Baryonendekuplett

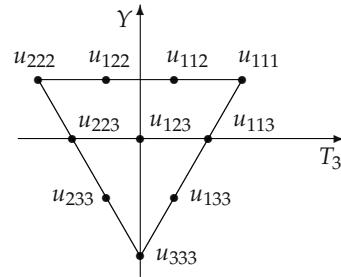
(b) $D(3,0)$

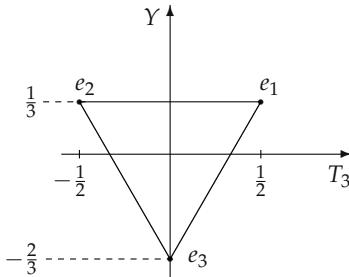
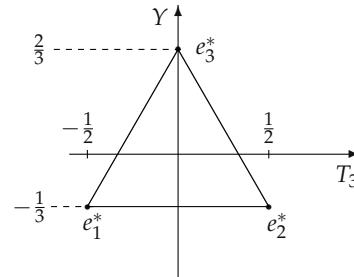
Abb. 17.5

Lieunteralgebra von $su(3)$, ist zweidimensional. Sie wird von den beiden Elementen iT_3 und iY aufgespannt mit

$$\begin{aligned} t_3 e_1 &= \frac{1}{2} e_1, & t_3 e_2 &= -\frac{1}{2} e_2, & t_3 e_3 &= 0, \\ ye_1 &= \frac{1}{3} e_1, & ye_2 &= \frac{1}{3} e_2, & ye_3 &= -\frac{2}{3} e_3. \end{aligned} \quad (17.39)$$

Es gilt die Vertauschungsrelation $t_3y = yt_3$. Die Eigenwerte von t_3 (bzw. y) bezeichnen wir mit T_3 (bzw. Y).

Physikalisch interpretieren wir e_1, e_2, e_3 als drei Quarks, die die Physiker als u -Quark, d -Quark und s -Quark bezeichnen. Ferner interpretieren wir T_3 (bzw. Y) als dritte Komponente des Isospins (bzw. als Hyperladung) der Quarks. Zum Beispiel erhält man für e_1 die Werte $T_3 = \frac{1}{2}$ und $Y = \frac{1}{3}$ (Abb. 17.6(a) und Tabelle 17.3).

(a) Quarks $e_1 = u, e_2 = d, e_3 = s$ (b) Antiquarks $e_1^* = \bar{u}, e_2^* = \bar{d}, e_3^* = \bar{s}$ Abb. 17.6

Die Quantenzahlen T_3 und Y : Ist $\delta : su(3) \rightarrow gl(Z)$ eine beliebige Darstellung von $su(3)$ auf dem Raum Z , dann setzen wir

$$iT_3 := \delta(iT_3), \quad iY := \delta(iY),$$

und bezeichnen die Eigenwerte von iT_3 (bzw. iY) durch T_3 (bzw. Y). Die Paare von Eigenwerten (T_3, Y) nennt man die *Gewichte* von δ . Unter dem *Gewichtsdiagramm* einer Darstellung versteht man die graphische Repräsentation der Gewichte in einem (T_3, Y) -Koordinatensystem (vgl. z. B. Abb. 17.4(b)). Äquivalente Darstellungen besitzen die gleichen Gewichtsdiagramme.

Duale Darstellung und Antiquarks: In der Elementarteilchentheorie ordnet man jedem Teilchen sein Antiteilchen zu. Das geschieht allgemein mit Hilfe dualer Darstellungen. Ist $\varphi : su(3) \rightarrow gl(X)$ die identische Darstellung mit $\varphi(A) := A$ für alle $A \in su(3)$, dann erhält

Tabelle 17.3

Quantenzahl	T_3	T	Y
u -Quark e_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
d -Quark e_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
s -Quark e_3	0	0	$-\frac{2}{3}$
\bar{u} -Antiquark e_1^*	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
\bar{d} -Antiquark e_2^*	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
\bar{s} -Antiquark e_3^*	0	0	$\frac{2}{3}$
Proton p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 (besteht aus zwei u -Quarks und einem d -Quark)
Neutron n	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 (besteht aus zwei d -Quarks und einem u -Quark)
Meson π_+	1	1	0 (besteht aus einem u -Quark und einem \bar{d} -Antiquark)

Die Quantenzahlen T_3 und Y verhalten sich additiv bei der Zusammensetzung von Teilchen. Beim Übergang zum Antiteilchen ändern T_3 und Y das Vorzeichen (Spiegelung im (T_3, Y) -Diagramm), während T unverändert bleibt.

man die zugehörige duale Darstellung $\varphi_d : su(3) \rightarrow gl(X^*)$ durch $\varphi_d(A) := -A^T$. Für die Operatoren $i\mathbb{T}_3 := \varphi_d(it_3)$, $i\mathbb{Y} := \varphi_d(iy)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_3 e_1^* &= -\frac{1}{2} e_1^*, & \mathbb{T}_3 e_2^* &= \frac{1}{2} e_2^*, & \mathbb{T}_3 e_3^* &= 0, \\ \mathbb{Y} e_1^* &= -\frac{1}{3} e_1^*, & \mathbb{Y} e_2^* &= -\frac{1}{3} e_2^*, & \mathbb{Y} e_3^* &= \frac{2}{3} e_3^*. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von \mathbb{T}_3 (bzw. \mathbb{Y}) bezeichnen wir wie vereinbart mit T_3 (bzw. Y). Physikalisch interpretieren wir e_j^* als ein Antiquark zu e_j mit den Quantenzahlen T_3 und Y (vgl. Abb. 17.6(b) und Tabelle 17.3).

Physiker bezeichnen die Antiquarks e_1^*, e_2^*, e_3^* der Reihe nach mit $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$.

Zusammengesetzte Quarkzustände: Um zu erkennen, dass die Elementarteilchen der Diagramme in den Abbildungen 17.4(a) und 17.5(a) zusammengesetzte Teilchen darstellen, die aus Quarks aufgebaut sind, betrachten wir die zur identischen Darstellung $\varphi : su(3) \rightarrow gl(X)$ gehörige Darstellung

$$\psi : su(3) \rightarrow gl(X \otimes X \otimes X)$$

von $su(3)$ auf dem Tensorprodukt $X \otimes X \otimes X$. Explizit gilt

$$\psi(A)(e_j \otimes e_k \otimes e_m) = (Ae_j) \otimes e_k \otimes e_m + e_j \otimes (Ae_k) \otimes e_m + e_j \otimes e_k \otimes (Ae_m)$$

für alle $A \in su(3)$. Wie oben vereinbart, setzen wir $i\mathbb{T}_3 := \psi(it_3)$ sowie $i\mathbb{Y} := \psi(iy)$ und bezeichnen die Eigenwerte von \mathbb{T}_3 (bzw. \mathbb{Y}) mit T_3 (bzw. Y). Wir interpretieren $e_j \otimes e_k \otimes e_m$ als einen Zustand, der aus den drei Quarks e_j, e_k, e_m besteht.

Nach Beispiel 3 in 17.6 erhalten wir für $Z := X \otimes X \otimes X$ die direkte Summenzerlegung

$$Z = P_1(Z) \oplus P_2(Z) \oplus P_3(Z) \oplus P_4(Z), \quad (17.40)$$

wobei jeder der linearen Unterräume $P_j(Z)$ bezüglich ψ irreduzibel ist.

(i) Der Raum $P_2(Z)$. Dieser Raum wird von den acht Einheitsvektoren

$$v_{112}, v_{122}, v_{132}, v_{113}, v_{123}, v_{133}, v_{223}, v_{233} \quad (17.41)$$

aufgespannt mit $v_{ijk} := \alpha_{ijk}(e_{ijk} + e_{jik} - e_{kji} - e_{kij})$ und $e_{ijk} := e_i \otimes e_j \otimes e_k$. Jeder Vektor e_{ijk} ist ein Einheitsvektor. Der Normierungsfaktor α_{ijk} wird so gewählt, dass auch v_{ijk} ein Einheitsvektor ist. Ferner ist jeder der Zustände v_{ijk} ein gemeinsamer Eigenvektor von T_3 und \mathbb{Y} . Diese Eigenwerte ergeben sich durch Addition der entsprechenden Eigenwerte für die Quarkzustände e_j . Die zugehörigen Eigenwerte findet man in Abb. 17.4(b). Vergleicht man Abb. 17.4(a) mit Abb. 17.4(b), dann ergibt sich die *fundamentale Tatsache*, dass die Vektoren v_{ijk} in (17.41) mit den Teilchenzuständen des Baryonenoktetts in Abb. 17.4(a) identifiziert werden können.

Zum Beispiel entspricht das Proton p dem Vektor

$$v_{112} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1),$$

d. h., das Proton besteht aus zwei u -Quarks e_1 und einem d -Quark e_2 . Ferner erhalten wir

$$\mathbb{T}_3 v_{112} = T_3 v_{112}, \quad \mathbb{Y} v_{112} = Y v_{112} \quad \text{mit} \quad T_3 = \frac{1}{2}, \quad Y = 1,$$

in Übereinstimmung mit Tabelle 17.3.

(ii) Der Raum $P_4(Z)$. Dieser Raum wird von den zehn Einheitsvektoren

$$u_{111}, u_{112}, u_{113}, u_{122}, u_{133}, u_{123}, u_{222}, u_{223}, u_{233}, u_{333}$$

aufgespannt. Dabei gilt $u_{ijk} := \alpha_{ijk} e_{(ijk)}$, wobei sich $e_{(ijk)}$ durch Symmetrisierung aus e_{ijk} ergibt und α_{ijk} einen Normierungsfaktor bezeichnet.

Nach Abb. 17.5 kann man die Teilchenzustände des Baryonendekupletts durch die Vektoren u_{ijk} beschreiben.

Mesonen als Quark-Antiquarkpaare: Wir betrachten die Darstellung von $su(3)$ auf dem Tensorprodukt $X \otimes X^*$. Explizit gilt für diese Darstellung $\psi : su(3) \rightarrow gl(X \otimes X^*)$ die Formel

$$\psi(A)(e_j \otimes e_k^*) = A e_j \otimes e_k^* + e_j \otimes (-A^T e_k^*)$$

für alle $A \in su(3)$. Bezeichnet $\varphi : su(3) \rightarrow gl(X)$ die identische Darstellung, dann ist $\psi = \varphi \boxtimes \varphi_d$. Jedes Element $t_k^j e_j \otimes e_k^* \in X \otimes X^*$ lässt sich in der Form

$$t_k^j e_j \otimes e_k^* = (t_k^j - \frac{1}{3} \delta_k^j t_m^m)(e_j \otimes e_k^*) + \frac{1}{3} \delta_k^j t_m^m (e_j \otimes e_k^*)$$

darstellen, wobei über zwei gleiche Indizes von 1 bis 3 summiert wird. Das entspricht der direkten Summenzerlegung

$$X \otimes X^* = V \oplus W$$

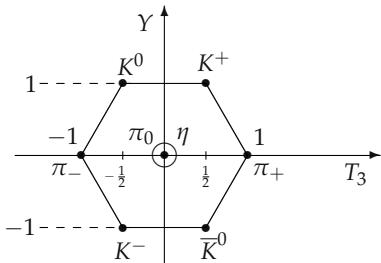
mit $V := \{s_k^j e_j \otimes e_k^* : s_j^j = 0\}$ und $W := \text{span}\{\delta_k^j e_j \otimes e_k^*\}$.

Sowohl V als auch W entspricht einer irreduziblen Darstellung von ψ . Eine Basis in V ergibt sich durch die acht Einheitsvektoren

$$z_{12}, z_{21}, z_{13}, z_{31}, z_{23}, z_{32},$$

$$z_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1^* - e_2 \otimes e_2^*), \quad (17.42)$$

$$z_2 := \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 \otimes e_1^* + e_2 \otimes e_2^* - 2e_3 \otimes e_3^*)$$



(a) Mesonenoktett

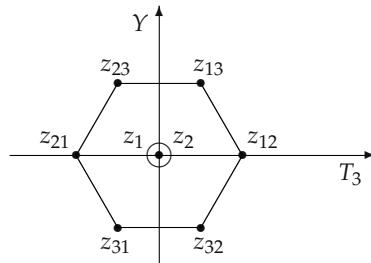
(b) $D(1,1)$

Abb. 17.7

mit $z_{jk} := e_j \otimes e_k^*$. Abbildung 17.7 zeigt, dass man die Teilchenzustände des Mesonenoktets durch die Vektoren in (17.42) beschreiben kann. Zum Beispiel entspricht das Meson π_+ dem Zustandsvektor $z_{12} = e_1 \otimes e_2^*$, d. h., π_+ setzt sich aus einem u -Quark e_1 und einem \bar{d} -Antiquark e_2^* zusammen.

Die Massenformel von Gell-Mann–Okubo: Wir betrachten ein Multiplett von Elementarteilchen wie z. B. in Abb. 17.4 oder Abb. 17.5. Dann kann man aufgrund von Überlegungen, die im Wesentlichen Eigenschaften der Liealgebra $su(3)$ ausnutzen, für die Masse der Teilchen die folgende Formel herleiten:

$$M = M_0 + a + bY + c \left[T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right].$$

Dabei sind a, b, c freie Parameter, und T ist der Isospin. Diese Formel ergibt Relationen zwischen den Massen der Elementarteilchen, die in guter Übereinstimmung mit dem Experiment stehen. Zum Beispiel erhält man

$$2(M_n + M_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma,$$

während das Experiment $2(M_n + M_\Xi) = 4508$ MeV und $3M_\Lambda + M_\Sigma = 4536$ MeV ergibt. Mit Hilfe dieser von Okubo aus dem Jahre 1962 angegebenen Formel konnte Gell-Mann die Masse des damals noch nicht bekannten Ω^- -Teilchens richtig vorhersagen (vgl. Abb. 17.5(a)).

Die irreduziblen Darstellungen der Liealgebra $su(3)$ (Tensormethode): Es sei $\varphi : su(3) \rightarrow gl(X)$ die identische Darstellung von $su(3)$ auf dem Raum X , und ψ sei die zugehörige Darstellung von $su(3)$ auf dem Tensorprodukt

$$Z := X \otimes X \otimes \dots \otimes X \otimes X^* \otimes \dots \otimes X^* \quad (17.43)$$

(q -faches Produkt von X mit dem p -fachen Produkt von X^*).⁸

(i) Es sei W derjenige lineare Unterraum von Z , der aus allen Vektoren⁹

$$t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \otimes e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_p}^* \quad (17.44)$$

besteht mit der Zusatzbedingung (verschwindende Spur):

$$t_{i_1 \dots i_q j_{q+1} \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = 0 \quad \text{für } q \leq p$$

bzw.

$$t_{i_1 \dots i_p}^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_q} = 0 \quad \text{für } p < q.$$

⁸Für $q = 1$ und $p = 2$ ist zum Beispiel

$$\psi(A)(e_j \otimes e_k^* \otimes e_m^*) = (Ae_j) \otimes e_k^* \otimes e_m^* + e_j \otimes (-A^T e_k^*) \otimes e_m^* + e_j \otimes e_k^* \otimes (-A^T e_m^*)$$

für alle $A \in su(3)$. Wie üblich setzen wir $i\mathbb{T}_3 := \psi(it_3)$, $i\mathbb{Y} := \psi(iy)$ und bezeichnen die Eigenwerte von \mathbb{T}_3 (bzw. \mathbb{Y}) mit T_3 (bzw. Y).

⁹Über gleiche Indizes wird von 1 bis 3 summiert.

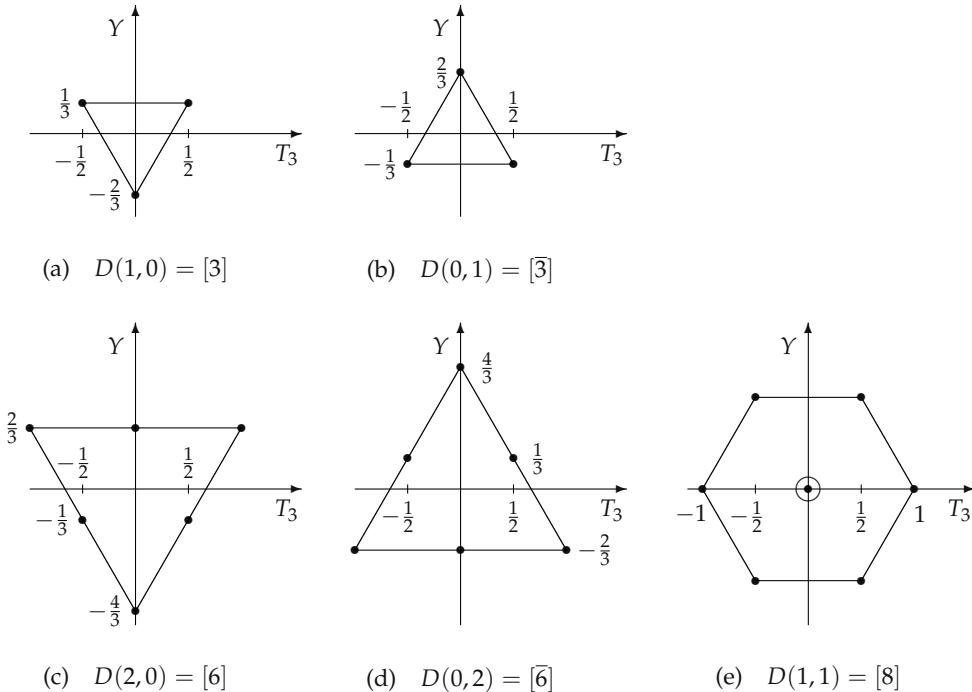


Abb. 17.8

Dann ist W irreduzibel bezüglich der Darstellung ψ von $su(3)$. Diese irreduzible Darstellung von $su(3)$ bezeichnen wir mit $D(q, p)$.

(ii) Jede irreduzible Darstellung von $su(3)$ ist äquivalent zu einer Darstellung $D(q, p)$ mit $q, p = 0, 1, \dots$. In Abb. 17.8 findet man die Gewichtsdiagramme zu einigen niedrigdimensionalen irreduziblen Darstellungen.

(iii) Eine beliebige Darstellung $\chi : su(3) \rightarrow gl(V)$ von $su(3)$ auf dem endlichdimensionalen komplexen linearen Raum V ist vollständig reduzibel, d. h., es existiert eine direkte Summenzerlegung

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m,$$

wobei jeder lineare Teilraum V_j bezüglich χ irreduzibel ist.

Die irreduziblen Darstellungen der Gruppe $SU(3)$ (Tensormethode): Bezeichnen wir mit $SU(3)$ die Gruppe aller linearen unitären Operatoren $B : X \rightarrow X$ mit $\det B = 1$, so ergibt sich in natürlicher Weise eine Liedarstellung¹⁰ $\delta : SU(3) \rightarrow GL(Z)$ von $SU(3)$ auf dem Tensorprodukt Z in (17.43).

(i) Der lineare Teilraum W von Z ist irreduzibel bezüglich δ (vgl. (17.44)). Diese irreduzible Darstellung von $SU(3)$ bezeichnen wir mit $\mathbb{D}(q, p)$.

Die entsprechende Darstellung $\mathbb{L}\delta : su(3) \rightarrow gl(Z)$ der zugehörigen Liealgebra $su(3)$ ist gleich $D(q, p)$.

¹⁰Setzen wir $C := (B^T)^{-1}$, dann gilt

$$\delta(B)(e_j \otimes e_k^* \otimes e_m^*) = (Be_j) \otimes e_k^* \otimes e_m^* + e_j \otimes (Ce_k^*) \otimes e_m^* + e_j \otimes e_k^* \otimes (Ce_m^*).$$

(ii) Jede irreduzible Liedarstellung von $SU(3)$ ist äquivalent zu einer Darstellung $\mathbb{D}(q, p)$ mit $q, p = 0, 1, \dots$. Es gilt

$$\dim D(q, p) = \dim \mathbb{D}(q, p) = \frac{1}{2}(q+1)(p+1)(q+p+2).$$

(iii) Jede Liedarstellung von $SU(3)$ ist äquivalent zu einer unitären Darstellung und vollständig reduzibel.

Die Methode des höchsten Gewichts: Es sei $\varphi : su(3) \rightarrow gl(V)$ eine Darstellung der Liealgebra $su(3)$ auf dem endlichdimensionalen Raum V mit den Gewichten (T_3, Y) . Wir schreiben

$$(T_3^*, Y^*) < (T_3, Y)$$

genau dann, wenn entweder $T_3^* < T_3$ oder $T_3^* = T_3, Y^* < Y$ gilt. Zu jeder irreduziblen Darstellung φ existiert ein eindeutig bestimmtes höchstes Gewicht. Das höchste Gewicht von $D(q, p)$ ist gleich

$$T_3 = \frac{1}{2}(q+p), \quad Y = \frac{1}{3}(q-p). \quad (17.45)$$

Um die Zerlegung einer Produktdarstellung in irreduzible Darstellungen rasch zu erhalten, bestimmt man zunächst das höchste Gewicht und daraus die Werte (q, p) der „höchsten“ Darstellung $D(q, p)$ gemäß (17.43). Das höchste Gewicht aller nicht zu $D(q, p)$ gehörenden Gewichte ergibt den nächsten Bestandteil $D(q_1, p_1)$ usw.

► **BEISPIEL 1:** Wir wollen die Formel

$$D(1, 0) \otimes D(0, 1) = D(1, 1) \oplus D(0, 0) \quad (17.46)$$

begründen. Die Darstellung $D(1, 0) \otimes D(0, 1)$ wirkt auf dem Tensorprodukt $X \otimes X^*$. Die Formel (17.46) behauptet, dass $X \otimes X^*$ in die direkte Summe von zwei Teilräumen zerfällt, die den irreduziblen Darstellungen $D(1, 1)$ und $D(0, 0)$ entsprechen. Tatsächlich gilt

$$\mathbb{T}_3(e_1 \otimes e_1^*) = t_3 e_1 \otimes e_1^* + e_1 \otimes (-t_3^T e_1^*) = \frac{1}{2}e_1 \otimes e_1^* - \frac{1}{2}e_1 \otimes e_1^* = 0,$$

$$\mathbb{Y}(e_1 \otimes e_1^*) = y e_1 \otimes e_1^* + e_1 \otimes (-y^T e_1^*) = \frac{1}{3}e_1 \otimes e_1^* - \frac{1}{3}e_1 \otimes e_1^* = 0,$$

also entspricht $e_1 \otimes e_1^*$ dem Gewicht $(T_3, Y) = (0, 0)$. Für die neun Basisvektoren $e_j \otimes e_k^*$ von $X \otimes X^*$ erhält man in analoger Weise die folgenden neun Gewichte

$$(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, 1), (0, 0), (-1, 0), (-\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, -1), (-\frac{1}{2}, -1), (0, 0). \quad (17.47)$$

Das höchste Gewicht ist $(1, 0)$. Dieses entspricht $D(1, 1)$ nach (17.45). Abbildung 17.8(e) zeigt, dass die ersten acht Gewichte von (17.47) zu $D(1, 1)$ gehören. Es verbleibt das Gewicht $(0, 0)$, welches $D(0, 0)$ entspricht.

Physiker schreiben anstelle von $D(1, 0)$, $D(0, 1)$, $D(1, 1)$ die Symbole $[3]$, $[\bar{3}]$, $[8]$, wobei die Zahl die Dimension des Darstellungsraumes angibt. Deshalb entspricht (17.46) der Formel

$$[3] \otimes [\bar{3}] = [8] \oplus [1].$$

Die adjungierte Darstellung und Wurzeln: Die Gewichte der adjungierten Darstellung von $su(3)$, die zu $D(1, 1)$ äquivalent ist, bezeichnet man als die Wurzeln von $su(3)$ (vgl. Abb. 17.8(e)). Wurzeln spielen bei der Klassifikation allgemeiner Liealgebren eine wichtige Rolle.

Die Farben der Quarks: Quarks besitzen einen halbzahligen Spin. Nach dem Pauli-Prinzip müssen deshalb die Quarkfunktionen antisymmetrisch gegenüber Teilchenvertauschungen sein. Die oben angegebenen Quarkfunktionen besitzen diese Eigenschaft noch nicht. Deshalb wurde das oben betrachtete Quarkmodell von den Physikern in entscheidender Weise modifiziert.

(i) Im ersten Schritt wird der Zustand eines Quarks durch Tensorprodukte der Form

$$e_j \otimes s_k, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = \pm 1,$$

beschrieben. Ein solcher Zustand entspricht einem e_j -Quark mit einer scharfen dritten Spinkomponente, die gleich $k\hbar/2$ ist. Im sechsdimensionalen Raum $Z := \text{span}\{e_j \otimes s_k\}$ wirkt in natürlicher Weise die Liealgebra $su(6)$, welche aus allen linearen Operatoren $A : Z \rightarrow Z$ mit $A^* = -A$ und $\text{tr } A = 0$ besteht. Wir setzen

$$p_j := e_j \otimes s_1, \quad p_{3+j} := e_j \otimes s_{-1}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Diese Tensorprodukte entsprechen gebundenen Zuständen von drei Quarks mit Spin. Bezeichnen wir mit V die Menge aller Vektoren

$$\sum_{\mathbb{P}} p_r \otimes p_s \otimes p_t, \quad (17.48)$$

wobei über alle Permutationen von (r, s, t) summiert wird, so ist V ein 56-dimensionaler Unterraum von $Z \otimes Z \otimes Z$, der bezüglich der natürlichen Produktdarstellung χ von $su(6)$ auf $Z \otimes Z \otimes Z$ irreduzibel ist. Die Vektoren der Form (17.48) sind symmetrisch bezüglich Permutationen der Quarkteilchen.

(ii) In einem zweiten Schritt fügen wir den Quarks Farben hinzu, d. h., wir betrachten die Zustände

$$p_j \otimes f^m, \quad j = 1, \dots, 6, \quad m = 1, 2, 3,$$

wobei f^m mit $m = 1, 2, 3$ der Reihe nach den „Farben“ rot, grün und blau entspricht.¹¹ Parallel zur Hyperladung der Liealgebra $su(3)$ definieren wir durch

$$\mathbb{Y}_F(p_j \otimes f^m) = \lambda_m p_j \otimes f^m$$

den Farbladungsoperator \mathbb{Y}_F mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$ und $\lambda_3 = -\frac{2}{3}$. Anstelle von (17.48) betrachten wir nunmehr die zusammengesetzten Zustände

$$z := \sum_{\mathbb{P}} \sum_{\mathbb{A}} (p_r \otimes f^\alpha) \otimes (p_s \otimes f^\beta) \otimes (p_t \otimes f^\gamma), \quad (17.49)$$

wobei wir zunächst bezüglich der Indizes (r, s, t) symmetrisieren und anschließend bezüglich der Indizes (α, β, γ) antisymmetrisieren. Diese Zustände z haben nunmehr die durch das Pauli-Prinzip geforderte Eigenschaft, dass sie gegenüber Permutationen der farbigen Quarkteilchen *antisymmetrisch* sind.

Eine genauere Analyse zeigt, dass der Raum aller z in (17.49) Basisvektoren besitzt, die Zustandsfunktionen der Teilchen in Abb. 17.4 und Abb. 17.5 entsprechen. Wegen der Antisymmetrisierung in (17.49) gilt

$$\mathbb{Y}_F z = 0,$$

d. h., die Teilchen (z. B. Proton und Neutron) sind „farblos“. Die Farben lassen sich somit nicht direkt beobachten.

Im Rahmen der Eichfeldtheorie spielen die Farben der Quarks jedoch eine fundamentale Rolle. Sie sind verantwortlich für die Gluonen, die die Quantenteilchen der starken Wechselwirkung darstellen. Die zugehörige Eichfeldtheorie bezeichnet man als *Quantenchromodynamik*.

¹¹Bezeichnen wir $F := \text{span}\{f^1, f^2, f^3\}$ als Farbraum, dann wirkt in F die Liealgebra $su(3)$ aller linearen Operatoren $A : F \rightarrow F$ mit $A = -A^*$ und $\text{tr } A = 0$, die man in diesem Zusammenhang die Farb-Liealgebra (colour Lie algebra) nennt.

► **BEISPIEL 2:** Die Zustandsfunktion eines Protons lautet

$$\frac{1}{\sqrt{108}} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha, \beta, \gamma} \{ 2|u_+^\alpha d_+^\beta u_-^\gamma\rangle + 2|u_+^\alpha u_+^\beta d_-^\gamma\rangle + 2|d_-^\alpha u_+^\beta u_+^\gamma\rangle - |u_+^\alpha u_+^\beta d_-^\gamma\rangle \\ - |u_-^\alpha d_+^\beta u_+^\gamma\rangle - |d_+^\alpha u_-^\beta u_+^\gamma\rangle - |d_+^\alpha u_+^\beta u_-^\gamma\rangle - |u_-^\alpha u_+^\beta d_+^\gamma\rangle \}.$$

Dabei bezeichnet $\varepsilon_{\alpha, \beta, \gamma}$ das Vorzeichen¹² der Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$. Ferner steht u bzw. d für e_1 bzw. e_2 . Also entspricht $|u_+^\alpha d_+^\beta u_-^\gamma\rangle$ dem Tensorprodukt

$$(e_1 \otimes s_1 \otimes f^\alpha) \otimes (e_2 \otimes s_1 \otimes f^\beta) \otimes (e_1 \otimes s_{-1} \otimes f^\gamma), \quad \text{usw.}$$

17.9 Darstellungen kompakter Liegruppen und spezielle Funktionen der mathematischen Physik

Für kompakte Liegruppen existiert eine perfekte allgemeine Darstellungstheorie, die auf Hermann Weyl zurückgeht und die klassische Darstellungstheorie für endliche Gruppen verallgemeinert. Eine besondere Rolle spielt dabei der *Hilbertraum* $L_2(G)$.

In diesem Abschnitt sei G eine *kompakte Liegruppe* (z. B. sei G eine endliche Gruppe oder $G = O(n), SO(n), U(n), SU(n)$).

Das Haarsche Maß auf G und Funktionenräume: Es existiert genau ein linksinvariantes Borelmaß μ auf G mit $\int_G d\mu = 1$, das wir das Haarsche Maß von G nennen.

Mit $L_2(G)$ bezeichnen wir den Hilbertraum aller messbaren Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_G |f(g)|^2 d\mu < \infty$. Das Skalarprodukt ist gegeben durch

$$(f, h) := \int_G \overline{f(g)} h(g) d\mu.$$

Der Unterraum $\mathbb{K}(L_2(G))$ der *Klassenfunktionen* von $L_2(G)$ besteht definitionsgemäß aus allen $f \in L_2(G)$ mit $f(hgh^{-1}) = f(g)$ für alle $g, h \in G$.

Mit $C(G)$ bezeichnen wir den Banachraum aller stetigen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Maximumsnorm $\|f\|_\infty := \max_{g \in G} |f(g)|$. Die Menge aller stetigen Klassenfunktionen auf G bildet einen abgeschlossenen Unterraum von $C(G)$, den wir mit $\mathbb{K}(C(G))$ bezeichnen. Die Menge $C(G)$ ist dicht in $L_2(G)$.

Der Raum $L_2(G)$ ist genau dann endlichdimensional, wenn G eine endliche Gruppe ist. Für eine endliche Gruppe G mit N Elementen gilt $\int_G f d\mu = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f(g)$.

Reguläre Darstellung: Setzen wir

$$(\rho(h)f)(g) := f(h^{-1}g) \quad \text{für alle } g \in G \text{ und jedes } h \in G,$$

dann erhalten wir eine Darstellung ρ von G auf $L_2(G)$, die man die *reguläre Darstellung* von G nennt.

¹²Speziell ist $\varepsilon_{\alpha, \beta, \gamma} = 0$ für zwei gleiche Indizes.

Darstellungen in Hilberträumen: Es sei $\psi : G \rightarrow GL(X)$ eine stetige¹³ unitäre Darstellung von G in dem komplexen separablen Hilbertraum X mit $\dim X \leq \infty$. Dann existiert eine höchstens abzählbare orthogonale Summe

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots,$$

so dass jeder Unterraum X_j von X endlichdimensional ist, und ψ in X_j als irreduzible Darstellung wirkt.

Insbesondere ist die reguläre Darstellung ρ unitär und stetig; sie enthält (bis auf Äquivalenz) alle irreduziblen endlichdimensionalen stetigen Darstellungen von G .

Die Rolle der Charaktere:

- (i) Jede endlichdimensionale stetige Darstellung ψ von G ist äquivalent zu einer unitären Darstellung und deshalb vollständig reduzibel.
- (ii) ψ ist genau dann irreduzibel, wenn $(\chi, \chi) = 1$ für den Charakter $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ von ψ gilt.
- (iii) Zwei endlichdimensionale stetige Darstellungen von G sind genau dann äquivalent, wenn die Charaktere gleich sind.
- (iv) Die Charaktere χ_1 und χ_2 zweier inäquivalenter endlichdimensionaler stetiger Darstellungen von G sind zueinander orthogonal, d.h. $(\chi_1, \chi_2) = 0$.
- (v) Ein System ψ_1, ψ_2, \dots von endlichdimensionalen stetigen irreduziblen Darstellungen von G ist genau dann vollständig,¹⁴ wenn die zugehörigen Charaktere χ_1, χ_2, \dots ein vollständiges Orthogonalsystem in $\mathbb{K}(L_2(G))$ bilden.

Ist das der Fall, dann ist die lineare Hülle von χ_1, χ_2, \dots dicht in $\mathbb{K}(C(G))$.

Reduktionssatz: Es sei $\psi : G \rightarrow GL(X)$ eine stetige Darstellung von G auf dem komplexen endlichdimensionalen linearen Raum X mit dem Charakter χ . Dann gilt

$$\chi = \sum_j (\chi_j, \chi) \chi_j.$$

Zerlegen wir den Raum $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ in Unterräume, welche irreduziblen Darstellungen ψ_j von ψ entsprechen, dann gibt die Zahl (χ_j, χ) an, wie oft (bis auf Äquivalenz) die irreduzible Darstellung ψ_j in dieser Zerlegung auftritt.

Orthogonalitätsrelationen für Matrixelemente irreduzibler Darstellungen: Es sei $\psi : G \rightarrow GL(X)$ eine irreduzible unitäre stetige Darstellung von G in dem endlichdimensionalen komplexen Hilbertraum X mit $d = \dim X$. Wir wählen eine orthonormale Basis in X und bezeichnen mit $\psi(g)_{ij}$ die Matrixelemente von $\psi(g)$ (bezüglich dieser Basis) multipliziert mit \sqrt{d} .

- (i) Die Matrixelemente $\psi_{ij} : G \rightarrow \mathbb{C}$ bilden ein orthonormiertes System in $L_2(G)$, d.h., es gilt

$$(\psi_{ij}, \psi_{rs}) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = r, j = s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (ii) Die Matrixelemente zweier inäquivalenter irreduzibler unitärer stetiger Darstellungen $\psi^{(j)} : G \rightarrow GL(X_j)$ sind in $L_2(G)$ zueinander orthogonal, d.h.

$$(\psi_{ij}^{(1)}, \psi_{rs}^{(2)}) = 0 \quad \text{für alle Indizes } i, j, r, s.$$

- (iii) Das System ψ_1, ψ_2, \dots von irreduziblen unitären stetigen endlichdimensionalen Darstellungen von G ist genau dann vollständig, wenn die zugehörigen Matrixelemente ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum $L_2(G)$ bilden.

Ist dies der Fall, dann ist die lineare Hülle der Matrixelemente dicht in $C(G)$.

¹³Dies bedeutet, dass die Abbildung $(g, x) \mapsto \psi(g)x$ von $G \times X$ in X stetig ist.

¹⁴Dies bedeutet, dass jede irreduzible stetige Darstellung von G zu genau einem ψ_j äquivalent ist.

Die Rolle des Tensorprodukts: Es existiert ein endlichdimensionaler komplexer Hilbertraum X , so dass die Gruppe G eine treue unitäre stetige Darstellung der Form $\psi : G \rightarrow GL(X)$ besitzt.

Ist ψ eine solche Darstellung, dann ist jede irreduzible endlichdimensionale stetige Darstellung von G (bis auf Äquivalenz) in einer der durch ψ induzierten Darstellungen auf dem endlichen Tensorprodukt

$$X \otimes \dots \otimes X \otimes X^* \otimes \dots \otimes X^*$$

enthalten.

► **STANDARDBEISPIEL 1** (Gruppe $U(1)$): Für die Gruppe $G := U(1)$ wird die Riemannsche Metrik durch die natürliche Metrik auf dem Rand des Einheitskreises S^1 (mit dem Winkel φ) gegeben (Abb. 17.1(b)). Das Haarsche Maß $d\mu = d\varphi/2\pi$ entspricht der (auf eins normierten) Bogenlänge von S^1 . Der Raum $L_2(G)$ besteht aus allen messbaren Funktionen $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2 d\varphi < \infty$$

und dem Skalarprodukt

$$(f, h) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(\varphi)} h(\varphi) d\varphi.$$

Jede Funktion auf $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ kann man auffassen als eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Periode 2π und umgekehrt. Jede Funktion aus $L_2(G)$ ist eine Klassenfunktion.

Definieren wir

$$\psi_n(g) := g^n \quad \text{für alle } g \in U(1), \quad n = 0, 1, \dots,$$

dann ist ψ_n eine irreduzible stetige unitäre Darstellung von $U(1)$ auf \mathbb{C} . Setzen wir $g := e^{i\varphi}$, dann ist das Matrixelement von $\psi_n(g)$ gleich $e^{in\varphi}$. Ferner ist der Charakter $\chi_n : U(1) \rightarrow \mathbb{C}$ von ψ_n durch $\chi_n(g) = e^{in\varphi}$ gegeben.

Nach der allgemeinen Theorie bilden die Funktionen

$$\varphi \mapsto e^{in\varphi} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{17.50}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(G)$. Das entspricht dem allgemeinen Entwicklungssatz von 2π -periodischen Funktionen in Fourierreihen.

Ferner ist die lineare Hülle der Funktionen (17.50) dicht im Raum $C(G)$ (Raum der stetigen 2π -periodischen Funktionen). Das ist der *Approximationssatz von Weierstraß*.

Dieses Beispiel zeigt, dass zwischen den Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen $e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ und der Darstellungstheorie der Gruppe $U(1)$ ein enger Zusammenhang besteht. Dahinter verbirgt sich ein allgemeiner Tatbestand. Viele spezielle Funktionen der mathematischen Physik lassen sich am besten im Rahmen der Darstellungstheorie von Liegruppen verstehen (z. B. Kugelfunktionen, Legendrepolygone, Jacobipolygone, Besselfunktionen, automorphe Funktionen). Eine ausführliche Darstellung findet man in [Vilenkin, Klimyk (1991)].

17.10 Transformationsgruppen und Symmetrie von Mannigfaltigkeiten

Geometrie ist die Invariantentheorie von Transformationsgruppen.

Felix Klein (Erlanger Programm 1872)

Die anschauliche Symmetrie einer Kugeloberfläche S kann man präzis durch die Invarianz von S unter Drehungen erfassen, d. h., die Drehgruppe wirkt als sogenannte Transformationsgruppe

auf S. Mit Hilfe von Transformationsgruppen kann man allgemein die Symmetrieeigenschaften von Mannigfaltigkeiten beschreiben und die Lösung von Differentialgleichungen wesentlich vereinfachen (vgl. 17.11).

Unter einer Mannigfaltigkeit verstehen wir hier stets eine Mannigfaltigkeit vom Typ C^∞ . Ferner sollen alle glatten Abbildungen und Diffeomorphismen vom Typ C^∞ sein.

Die entscheidende Entdeckung von Sophus Lie (1842-1899) bestand darin, dass man einer Transformationsgruppe auf einer Mannigfaltigkeit in natürlicher Weise Flüssigkeitsströmungen auf der Mannigfaltigkeit zuordnen kann (Flüsse), so dass die Transformationsgruppen durch die Geschwindigkeitsfelder dieser Flüssigkeitsströmungen bestimmt sind. Diese Geschwindigkeitsfelder heißen Lievektorfelder.

Transformationsgruppen: Es sei M eine Mannigfaltigkeit, und G sei eine *Liesche Gruppe* mit der Liealgebra \mathcal{G} . Die Menge aller Diffeomorphismen der Form

$$\mathbb{D} : M \rightarrow M$$

bilden eine Gruppe, die sogenannte *Diffeomorphismengruppe* $\text{Diff}(M)$ von M . Unter einer von G auf M erzeugten Transformationsgruppe verstehen wir eine Darstellung

$$\varphi : G \rightarrow \text{Diff}(M),$$

d. h., jedem Gruppenelement $g \in G$ wird ein *Diffeomorphismus* $\mathbb{D}_g : M \rightarrow M$ zugeordnet, so dass

$$\mathbb{D}_{gh} = \mathbb{D}_g \mathbb{D}_h \tag{17.51}$$

für alle $g, h \in G$ gilt. Aus (17.51) folgt speziell, dass dem Einselement e der Gruppe G die identische Abbildung $\text{id} = \mathbb{D}_e$ auf M entspricht.

Ferner soll diese Darstellung in glatter Weise von den Gruppenelementen abhängen. Genauer fordern wir, dass die Abbildung

$$(g, x) \mapsto \mathbb{D}_g(x) \tag{17.52}$$

von $G \times M$ in M glatt ist.

Existiert eine derartige Transformationsgruppe, dann sagen wir kurz, dass G auf der Mannigfaltigkeit M wirkt.¹⁵

Orbits: Ist x_0 ein Punkt der Mannigfaltigkeit M , dann heißt die Menge

$$O(x_0) := \{\mathbb{D}_g(x_0) : g \in G\}$$

der von G auf M erzeugte Orbit durch x_0 .

Jeder (lokal) abgeschlossene Orbit ist eine Untermannigfaltigkeit von M .

Wirkung von Transformationsgruppen: Definitionsgemäß wirkt die Gruppe G genau dann effektiv auf der Mannigfaltigkeit M , wenn aus

$$\mathbb{D}_g(x) = x \quad \text{für alle } x \in M$$

stets $g = e$ folgt. Das heißt, dass nur die Identität alle Punkte der Mannigfaltigkeit M fest lässt.

G wirkt genau dann frei auf M , wenn nur die Identität Fixpunkte besitzt, d. h., aus $g \neq e$ folgt

$$\mathbb{D}_g(x) \neq x \quad \text{für alle } x \in M.$$

¹⁵Wir sagen ferner, dass G als *lokale Transformationsgruppe* auf M wirkt, falls (17.51) lediglich für alle $g, h \in G$ in einer Umgebung U des Einselementes e gilt und die Abbildung (17.52) auf $U \times M$ glatt ist.

Die ursprüngliche Liesche Theorie bezog sich auf lokale Transformationsgruppen. Die hier dargestellte globale Theorie wurde erst im 20. Jahrhundert von dem französischen Mathematiker Élie Cartan (1869-1951) begründet.

Schließlich wirkt G genau dann *transitiv* auf M , wenn sich zwei Punkte der Mannigfaltigkeit M stets durch einen Orbit verbinden lassen. Das bedeutet, zu $x \in M$ und $y \in M$ existiert ein Gruppenelement $g \in G$, so dass gilt:

$$y = \mathbb{D}_g(x).$$

► **BEISPIEL 1:** Die Gruppe $U(1) = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ wirkt in natürlicher Weise auf der Ebene $M = \mathbb{R}^2$ als Drehungen um den Ursprung (Abb. 17.9). Genauer wird jedem Element e^{it} von $U(1)$ eine Drehung der Ebene um den Ursprung mit dem Winkel t (im mathematisch positiven Sinn) zugeordnet. Explizit bedeutet das

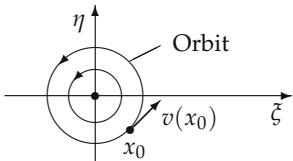
$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 \cos t - \eta_0 \sin t, \\ \eta &= \xi_0 \sin t + \eta_0 \cos t.\end{aligned}\tag{17.53}$$

Bei festem Anfangspunkt $x_0 = (\xi_0, \eta_0)$ können wir (17.53) als die Trajektorie eines Flüssigkeitsteilchens auffassen. Differentiation an der Stelle $t = 0$ liefert $\xi'(0) = -\eta_0$, $\eta'(0) = \xi_0$. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld

$$v(x_0) = (-\eta_0, \xi_0)$$

heißt das zu (17.53) gehörige Lievektorfeld.

Da jede derartige Drehung den Ursprung als Fixpunkt hat, ist die Wirkung von $U(1)$ auf der Ebene nicht frei. Diese Wirkung ist jedoch effektiv, denn nur die identische Transformation lässt jeden Punkt der Ebene fest. Die Orbits sind Kreise um den Ursprung (Abb. 17.9). Deshalb wirkt $U(1)$ nicht transitiv auf der Ebene.



$v(x_0)$ – Lievektor (Geschwindigkeitsvektor) Abb. 17.9

Einparametrische Untergruppen und Lievektorfelder: Es sei H eine einparametrische Untergruppe von G , d.h., es ist $H = \{h(t) \in G : t \in \mathbb{R}\}$ mit

$$h(t+s) = h(t)h(s) \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir

$$F_t(x) := \mathbb{D}_{h(t)}(x),$$

dann wird dadurch ein Fluss $\{F_t\}$ auf M erzeugt (vgl. 15.4.5), den man sich anschaulich als Flüssigkeitsströmung auf der Mannigfaltigkeit M vorstellen kann. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld

$$v(x) = \left. \frac{dF_t(x)}{dt} \right|_{t=0} \tag{17.54}$$

ist ein Element der Menge $\text{Vekt}(M)$ aller glatten Vektorfelder auf M , die eine Liealgebra bilden (vgl. 17.4.2). Wir bezeichnen v als das zu H gehörige *Lievektorfeld*¹⁶ auf der Mannigfaltigkeit M .

¹⁶Die Terminologie ist nicht einheitlich in der Literatur. Handelt es sich um Isometrien, dann bezeichnet man das zugehörige Lievektorfeld auch als Killingvektorfeld. Mitunter verwendet man auch die Bezeichnung Killingvektorfeld für Lievektorfelder beliebiger Transformationsgruppen.

Auf diese Weise ergibt sich in natürlicher Weise eine Darstellung

$$\psi : \mathbb{G} \rightarrow \text{Vekt}(M) \quad (17.55)$$

der Liealgebra \mathbb{G} von G in der Liealgebra $\text{Vekt}(M)$ der Vektorfelder auf M . Explizit erhält man ψ in der folgenden Form. Zu jedem Element $V \in \mathbb{G}$ gibt es eine einparametrische Untergruppe H der Liegruppe G mit

$$h'(0) = V.$$

Dann ist $\psi(V)$ das durch (17.54) konstruierte Vektorfeld v auf M .

Satz: Die Abbildung (17.55) ist genau dann injektiv, wenn die Gruppe G auf der Mannigfaltigkeit M effektiv wirkt.

Strategie: Die Strategie in der Theorie der Liegruppen besteht darin, alles auf die Untersuchung der zugehörigen Liealgebra zurückzuführen. Wie der folgende Hauptsatz zeigt, ist diese Strategie auch für Transformationsgruppen wirksam. Durch (17.55) haben wir Transformationsgruppen gewisse Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit M zugeordnet. Nach dem Hauptsatz ergeben sich umgekehrt aus geeigneten Vektorfeldern auf M auch Transformationsgruppen. Entscheidend ist, dass eine Darstellung der Form (17.55) vorliegt.

Vollständige Vektorfelder: Ein Vektorfeld v auf einer Mannigfaltigkeit M heißt genau dann vollständig, wenn es das Geschwindigkeitsfeld eines (globalen) Flusses auf M ist (vgl. 15.4.5).

► **BEISPIEL 2:** Jedes Vektorfeld auf einer *kompakten* Mannigfaltigkeit ist vollständig.

Hauptsatz über Transformationsgruppen: Wir setzen voraus:

(a) Gegeben sei eine reelle Liealgebra \mathbb{G} .

(b) Mit G bezeichnen wir die universelle Überlagerungsgruppe von \mathbb{G} , und G_1 bezeichne eine beliebige Liegruppe, deren Liealgebra gleich \mathbb{G} ist.

(c) Gegeben sei eine Darstellung $\psi : G \rightarrow \text{Vekt}(M)$ von G in der Liealgebra aller glatten Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit M . Dadurch wird jedem $V \in \mathbb{G}$ ein Vektorfeld $\psi(V)$ auf M zugeordnet.

Dann gilt:

(i) *Lokale Wirkung.* Es existiert eine (lokal) eindeutig bestimmte lokale Transformationsgruppe auf M , welche einer lokalen Wirkung von G_1 auf M entspricht, wobei die Vektorfelder $\psi(V)$ genau die zugehörigen Lievektorfelder sind.

(ii) *Globale Wirkung.* Sind alle Vektorfelder $\psi(V)$ *vollständig* (z. B. M ist kompakt), dann gibt es genau eine Transformationsgruppe, die einer Wirkung von G auf M entspricht, wobei genau die Vektorfelder $\psi(V)$ die zugehörigen Lievektorfelder sind.

Ist G_1 *einfach zusammenhängend*, dann gilt $G = G_1$.

Ist die Abbildung $\psi : \mathbb{G} \rightarrow \text{Vekt}(M)$ injektiv, dann wirkt G effektiv auf M .

Wichtiger Spezialfall: Es sei eine Menge \mathbb{G} von Vektorfeldern v auf der Mannigfaltigkeit M gegeben, so dass aus $v, w \in \mathbb{G}$ stets $\alpha v + \beta w \in \mathbb{G}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$[v, w] \in \mathbb{G}$$

folgt. Dann bildet \mathbb{G} eine reelle Liealgebra, und wir können den Hauptsatz auf die identische (injektive) Abbildung $\psi : \mathbb{G} \rightarrow \text{Vekt}(M)$ anwenden, d. h., es ist $\psi(V) = v$ für alle $V \in \mathbb{G}$ mit $V = v$.

Dieser Spezialfall unterstreicht die fundamentale Rolle der *Lieklammern von Vektorfeldern* in der Theorie der Transformationsgruppen.

► **BEISPIEL 3:** Es sei $G = \mathbb{R}$ die additive Gruppe der reellen Zahlen mit der Liealgebra $\mathbb{G} = \mathbb{R}$. Ferner sei $\{\mathbb{D}_t\}$ eine Transformationsgruppe auf der Mannigfaltigkeit M , die einer Wirkung von G entspricht. Setzen wir $F_t := \mathbb{D}_t$, dann ist $\{F_t\}$ ein Fluss auf M .

Anwendungen dieser Transformationsgruppen auf die Lösung des Quadraturproblems für gewöhnliche Differentialgleichungen findet man in 17.11.3 (Theorem von Lie).

► **BEISPIEL 4:** Es sei v das identische Vektorfeld auf \mathbb{R}^m mit $m \geq 1$, d.h., es gilt $v(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Dann ist v das Lievektorfeld einer Transformationsgruppe, die der Wirkung der multiplikativen Gruppe G der positiven reellen Zahlen entspricht. Explizit wird jedem $g \in G$ die Transformation

$$\mathbb{D}_g x = gx \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^m$$

zugeordnet. Setzen wir $g = e^t$, dann wird der entsprechende Fluss durch $F_t(x) := e^t x$ gegeben, und Differentiation an der Stelle $t = 0$ liefert

$$\frac{d}{dt} F_t(x) \Big|_{t=0} = x = v(x).$$

Anwendungen dieser Transformationsgruppen auf die Wärmeleitungsgleichung findet man in 17.11.4.

Homogene Räume: Eine Mannigfaltigkeit heißt genau dann ein homogener Raum, wenn auf ihr eine Liesche Gruppe als transitive Transformationsgruppe wirkt.

► **BEISPIEL 5:** Der \mathbb{R}^n ist ein homogener Raum bezüglich der Translationsgruppe. Ferner ist jede Kugeloberfläche im \mathbb{R}^n mit $n \geq 2$ ein homogener Raum bezüglich aller Drehungen um den Mittelpunkt der Kugel.

Ist G eine Liesche Gruppe, dann erhält man durch

$$\mathbb{D}_g(x) = gx \quad \text{für alle } g, x \in G$$

eine Transformationsgruppe auf G , die einer Wirkung von G auf sich selbst entspricht. Damit wird G zu einem homogenen Raum.

17.11 Differentialgleichungen und Symmetrie

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts untersuchten der norwegische Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829) und der französische Mathematiker Evariste Galois (1811-1832) das Lösungsverhalten von algebraischen Gleichungen n -ten Grades. Die von Galois geschaffene Theorie zeigte, dass Eigenschaften von (*diskreten*) Permutationsgruppen dafür verantwortlich sind, dass sich Gleichungen vom Grade $n \geq 5$ nicht durch allgemeine Formeln lösen lassen, in denen neben den vier Grundrechenarten nur noch Wurzeln vorkommen. Das war der historische Ausgangspunkt für die Gruppentheorie und allgemeiner die moderne Strukturtheorie.

Der norwegische Mathematiker Sophus Lie (1842-1899) verallgemeinerte die gruppentheoretischen Überlegungen von Galois und zeigte, wie man mit Hilfe der von ihm geschaffenen (lokalen) Theorie der *kontinuierlichen* Transformationsgruppen die Untersuchung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen wesentlich vereinfachen kann, wenn die Gleichungen Symmetrieeigenschaften besitzen. Dabei werden in entscheidender Weise invarianten Funktionen benutzt.

Im folgenden seien alle auftretenden Funktionen und Mannigfaltigkeiten glatt.

17.11.1 Invariante Funktionen

Es sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer reellen Mannigfaltigkeit M .

Der allgemeine Fall: Es sei $\psi = \psi(x, p)$ eine Abbildung der Form $\psi : M \times P \rightarrow M$, wobei der Parameter $p = (p_1, \dots, p_m)$ in einer offenen Menge P des \mathbb{R}^m liegt. Ferner sei $\psi(x, 0) = x$ für alle $x \in M$. Die Funktion f heißt genau dann bezüglich ψ invariant, wenn

$$f(\psi(x, p)) = f(x) \quad \text{für alle } x \in M, p \in P$$

gilt. Das ist äquivalent zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial p_j} f(\psi(x, p)) = 0 \tag{17.56}$$

für alle $x \in M, p \in P, j = 1, \dots, m$. Die entscheidende Beobachtung von Sophus Lie bestand darin, dass man im Fall von Transformationsgruppen ψ die Differentialgleichung nur für einen festen Parameterwert (z. B. $p = 0$) erfüllen muss, damit sie für alle p gilt.

Das ist der Inhalt der folgenden Sätze 1 und 2.

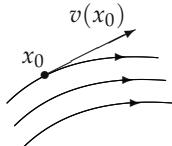


Abb. 17.10

Flüsse: Es sei $\{F_t\}$ ein Fluss (vgl. 15.4.5) auf der Mannigfaltigkeit M . Wir interpretieren $\{F_t\}$ als eine Flüssigkeitsströmung auf M (Abb. 17.10). Dann beschreibt

$$x(t) = F_t x_0$$

die Trajektorie eines Flüssigkeitsteilchens, das sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt x_0 befindet. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld v auf M ergibt sich dann durch

$$v(x_0) = x'(0).$$

Satz 1: Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Funktion f ist invariant bezüglich des Flusses $\{F_t\}$, d. h., es gilt¹⁷

$$f(F_t x) = f(x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, x \in M.$$

(ii) Die Lieableitung von f bezüglich des Vektorfeldes v verschwindet, d. h., es ist

$$\mathbb{L}_v f = 0 \quad \text{auf } M. \tag{17.57}$$

► **BEISPIEL 1:** Es sei $M = \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ und $x = (x_1, \dots, x_n)$ sowie $\partial_j := \partial/\partial x_j$. Dann gilt

$$\mathbb{L}_v = \sum_{j=1}^n v_j(x) \partial_j.$$

Die Bedingung (17.57) bedeutet

$$(\mathbb{L}_v f)(x) = \sum_{j=1}^n v_j(x) \partial_j f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

¹⁷Vom physikalischen Standpunkt aus bedeutet dies, dass f eine Erhaltungsgröße der Flüssigkeitsströmung ist.

Nach Lie bezeichnet man die Linearisierung der Transformation $x = F_t x_0$, d.h.

$$x = x_0 + tv(x_0),$$

als zugehörige *infinitesimale Transformation*. Dabei ist t ein reeller Parameter. Die *Lieklammer* von Vektorfeldern auf \mathbb{R}^n ergibt sich durch

$$[v, w] = \mathbb{L}_v \mathbb{L}_w - \mathbb{L}_w \mathbb{L}_v = \sum_{j,k=1}^n (v_j \partial_j w_k - w_j \partial_j v_k) \partial_k.$$

Allgemeine Transformationsgruppen: Die Liegruppe G wirke als Transformationsgruppe $\{\mathbb{D}_g\}$ auf der Mannigfaltigkeit M , und w_1, \dots, w_k sei eine Basis der Liealgebra der zugehörigen Lievektorfelder.

Satz 2: Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Funktion f ist invariant, d.h., es ist $f(\mathbb{D}_g(x)) = f(x)$ für alle $x \in M, g \in G$.
- (ii) $\mathbb{L}_{w_j} f = 0$ auf M für $j = 1, \dots, k$.

17.11.2 Invariante Differentialgleichungen

Wir betrachten im \mathbb{R}^n die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f(\tau, x, x') = 0. \quad (17.58)$$

Gesucht wird $x = x(\tau)$ mit dem reellen Parameter τ und $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$. Wir setzen dabei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als Funktion der Argumente $\tau \in \mathbb{R}, x, x' \in \mathbb{R}^n$ voraus.

Lie–Bäcklund-Transformation: Es sei p ein Parameter. Jede Transformation

$$x_* = A(\tau, x, x'; p), \quad \tau_* = B(\tau, x, x'; p), \quad x'_* = C(\tau, x, x'; p),$$

die die Funktion f invariant lässt, heißt eine Lie–Bäcklund-Transformation der Differentialgleichung (17.58).

Definition: Die Differentialgleichung (17.58) heißt genau dann invariant unter der Transformation

$$x_* = A(\tau, x), \quad (17.59)$$

wenn (17.58) invariant ist unter der induzierten Lie–Bäcklund-Transformation

$$x_* = A(\tau, x), \quad x'_* = A_\tau(\tau, x) + A_x(\tau, x)x'. \quad (17.60)$$

Man erhält (17.60) in natürlicher Weise, indem man in (17.59) eine Funktion $x = x(\tau)$ einsetzt und nach τ differenziert.

In analoger Weise kann man die Invarianz definieren, falls eine Transformation τ_* mit $\tau_* = B(\tau, x)$ der unabhängigen Variablen τ hinzukommt. Ferner lässt sich diese Überlegung auch sofort auf partielle Differentialgleichungen verallgemeinern.

► **BEISPIEL 2:** Die Differentialgleichung

$$\eta' - \Phi(\xi + \eta) = 0, \quad \xi' - 1 = 0 \quad (17.61)$$

mit $x = (\xi, \eta)$ ist invariant unter der Transformation $\eta_* = \eta - p$, $\xi_* = \xi + p$, $\tau_* = \tau$. Die zugehörige Lie–Bäcklund-Transformation lautet

$$\eta_* = \eta - p, \quad \xi_* = \xi + p, \quad \tau_* = \tau, \quad \eta'_* = \eta', \quad \xi'_* = \xi'.$$

17.11.3 Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen

Man sagt, dass eine Differentialgleichung durch Quadraturen lösbar ist, wenn man die Lösung durch Integrationen gewinnen kann. Es sei $G = (G_1, G_2)$ und $x = (\xi, \eta)$.

Theorem von Lie: Ist eine Differentialgleichung

$$x' - G(x) = 0 \quad (17.62)$$

im \mathbb{R}^2 unter einem Fluss $\{F_t\}$ mit dem Vektorfeld v invariant, dann lässt sie sich durch Quadraturen lösen, falls $G(x)$ und $v(x)$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind.

Ausführlicher: Wählen wir den sogenannten Multiplikator $M := 1/(G_1 v_2 - G_2 v_1)$, dann gilt $d\omega = 0$ für

$$\omega := M(x)(G_2(x)d\xi - G_1(x)d\eta), \quad x = (\xi, \eta).$$

Somit hat die Gleichung $\omega = d\Omega$ eine Lösung, nämlich

$$\Omega(x) := \int_b^x \omega.$$

Dieses Integral ist vom Weg unabhängig. Die sich aus

$$\Omega(\xi, \eta) = \text{const}$$

ergebenden Kurven sind dann Lösungen von (17.62). Das ist die Methode des Eulerschen Multiplikators (vgl. 1.12.4.10.).

Dieser Satz beinhaltet als Spezialfälle bekannte Integrationsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen.

► **BEISPIEL 3:** Die Differentialgleichung

$$\eta'(\xi) = \Phi(\xi + \eta) \quad (17.63)$$

kann in der Form (17.61) geschrieben werden. Nach Beispiel 2 ist sie invariant unter dem durch

$$\xi = \xi_0 + t, \quad \eta = \eta_0 - t$$

gegebenen Fluss $x = F_t(x_0)$. Die zugehörigen Trajektorien sind die Geraden der Form $\xi + \eta = \text{const}$. Führen wir die neuen Koordinaten (ζ, ξ) ein mit

$$\zeta := \xi + \eta,$$

dann besitzen die Trajektorien des Flusses die einfache Gestalt $\zeta = \text{const}$, und die Differentialgleichung (17.63) geht über in

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = 1 + \Phi(\zeta).$$

Die Methode der Trennung der Variablen (vgl. 1.12.4.4.) liefert die Lösung

$$\int_a^\zeta \frac{d\tau}{1 + \Phi(\tau)} = \xi,$$

d. h., die Lösung ergibt sich tatsächlich durch eine Quadratur (Integration).

Strategie: Das hier angewendete Verfahren gehört zu einer allgemeinen Strategie für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, die zum Beispiel häufig in der mathematischen Physik benutzt wird:

Ist eine Differentialgleichung unter einem Fluss invariant, dann wählen wir solche neue Koordinaten, in denen die Trajektorien des Flusses eine besonders einfache Gestalt haben.

17.11.4 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$T_t = aT_{xx}, \quad (17.64)$$

wobei $T = T(x, t)$ die Temperatur in einem Stab im Punkt $x \in \mathbb{R}$ zur Zeit $t \geq 0$ bezeichnet. Dabei ist a eine Materialkonstante.

Ähnlichkeitstransformation: Wir betrachten die Transformation

$$x^* = \alpha x, \quad t^* = \beta t, \quad T^* = \gamma T, \quad (17.65)$$

wobei α, β, γ positive Konstanten bezeichnen. Die zu dieser Transformation gehörige Lie-Bäcklund-Transformation lautet

$$T_{t^*}^* = \gamma \frac{1}{\beta} T_t, \quad T_{x^*}^* = \gamma \frac{1}{\alpha} T_x, \quad T_{x^* x^*}^* = \gamma \frac{1}{\alpha^2} T_{xx}. \quad (17.66)$$

Diese Transformation erhält man, indem man jeder Funktion $T = T(x, t)$ die transformierte Funktion

$$T^*(x^*, t^*) := \gamma T(x, t), \quad x^* = \alpha x, \quad t^* = \beta t,$$

zuordnet und nach x^*, t^* differenziert. Für die Wärmeleitungsgleichung (17.64) erhalten wir

$$T_{t^*}^* - aT_{x^* x^*}^* = \gamma \frac{1}{\beta} (T_t - aT_{xx}), \quad (17.67)$$

falls wir $\beta = \alpha^2$ wählen.

Invariante Lösungen der Wärmeleitungsgleichung: Wir suchen nunmehr Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (17.64), welche unter der Transformation (17.65) mit $\beta = \alpha^2$ invariant bleiben. Explizit heißt das $T^*(x^*, t^*) = T(x^*, t^*)$, also

$$\gamma T(x, t) = T(\alpha x, \alpha^2 t).$$

Diese Beziehung kann durch den Ansatz

$$T(x, t) := t^k f(\zeta), \quad \zeta := -x^2/4at,$$

mit $\gamma = \alpha^{2k}$ erfüllt werden. Setzen wir das in (17.64) ein, dann ergibt sich anstelle der partiellen Differentialgleichung (17.64) die *gewöhnliche Differentialgleichung*

$$kf(\zeta) + \frac{1}{2}f'(\zeta) + f'(\zeta)\zeta - f''(\zeta)\zeta = 0.$$

Für $k = -\frac{1}{2}$ ist $f(\zeta) = \text{const} \cdot e^\zeta$ eine Lösung. Das liefert die sogenannte Fundamentallösung

$$\mathbb{T}(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-x^2/4at}$$

der Wärmeleitungsgleichung (17.64).

Die Bedeutung von \mathbb{T} liegt darin, dass wir bei gegebener Funktion $T_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ durch die Superposition

$$T(x, t) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{T}(x-y) T_0(y) dy$$

die Lösung der Gleichung (17.64) mit der Anfangstemperatur $T(x, 0) = T_0(x)$ auf \mathbb{R} erhalten.

Physikalische Interpretation der Ähnlichkeitstransformation: Die Transformation (17.65) entspricht einer Änderung der Einheiten von Länge, Zeit und Temperatur. Die Größe ζ ist dabei dimensionslos. Die Invarianz von Differentialgleichungen bezüglich einer Ähnlichkeitstransformation entspricht der Methode der Dimensionsanalyse in der Physik.

17.12 Die innere Symmetrie Liescher Gruppen und ihrer Liealgebren

Es sei G eine Liegruppe, und $\mathbb{L}G$ bezeichne die Liealgebra von G . Viele Begriffsbildungen von G und $\mathbb{L}G$ hängen mit der inneren Symmetrie von G zusammen. Besonders einfach werden die Formeln für die klassischen Matrizengruppen (vgl. das Standardbeispiel am Ende dieses Abschnitts).

Diese Symmetrieeigenschaften spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Hauptfaserbündel (vgl. 19.3 und 19.4).

Linkstranslationen einer Liegruppe: Für jedes $g \in G$ erklären wir die sogenannte Linkstranslation $L_g : G \rightarrow G$ durch

$$L_g h := gh$$

für alle $h \in G$. In analoger Weise definiert man durch $R_g h := hg$ eine Rechtstranslation auf G .

Symmetrieeigenschaften der Liegruppe G sind solche, die unter Linkstranslationen (bzw. Rechtstranslationen) invariant bleiben. Durch Linearisierung am Einselement e von G ergeben sich daraus die entsprechenden Symmetrieeigenschaften der Liealgebra $\mathbb{L}G$.

Linksinvariante Vektorfelder: Ein Vektorfeld v auf der Liegruppe G heißt genau dann linksinvariant, wenn es unter der Linearisierung aller L_g invariant ist, d. h., es gilt

$$(L_g)_* v = v.$$

Explizit bedeutet das $L'_g(h)v_h = v_{gh}$ für alle $g, h \in G$. Genau alle linksinvarianten Vektorfelder auf G erhält man durch

$$v_g = L'_g(e)v_e$$

für alle $g \in G$. Dabei durchläuft v_e alle Tangentialvektoren von G im Einselement e .

Die Liealgebra $\text{Vekt}_l(G)$: Mit $\text{Vekt}_l(G)$ bezeichnen wir die Menge aller linksinvarianten Vektorfelder auf G . Das ist eine Unteralgebra der Liealgebra $\text{Vekt}(G)$ aller Vektorfelder auf G mit der Lieklammer

$$[v, w]_g = (\mathbb{L}_v w)_g$$

für alle $g \in G$, wobei \mathbb{L}_v die Lieableitung bezeichnet (vgl. 15.4.6). Dabei gilt

$$[v, w]_g = L'_g(e)[v_e, w_e]_e$$

für alle $v, w \in \text{Vekt}_l(G)$. Die Lieklammer auf $\mathbb{L}G = TG_e$ erhält man daraus in natürlicher Weise durch

$$[v_e, w_e] = [v, w]_e$$

für alle $v_e, w_e \in \mathbb{L}G$, wobei v und w die durch v_e, w_e erzeugten linksinvarianten Vektorfelder bezeichnen.

Der Isomorphismus zwischen $\text{Vekt}_l(G)$ und $\mathbb{L}G$ mittels der Maurer–Cartan–Form: Wir konstruieren eine Abbildung $\mu : \text{Vekt}_l(G) \rightarrow \mathbb{L}G$ durch

$$\mu_g(v_g) := v_e$$

für alle $g \in G$, wobei v ein beliebiges linksinvariantes Vektorfeld auf G bezeichnet. Dann ist μ ein Isomorphismus¹⁸ zwischen $\text{Vekt}_l(G)$ und der Liealgebra $\mathbb{L}G$.

¹⁸Isomorphe Liealgebren kann man miteinander identifizieren. In der Literatur definiert man häufig die Liealgebra von G durch $\text{Vekt}_l(G)$. Im Hinblick auf die Einfachheit der Formulierung für die in der Physik besonders wichtigen klassischen Matrizengruppen empfiehlt es sich jedoch, die Liealgebra $\mathbb{L}G$ von G mit dem Tangentialraum TG_e zu identifizieren, wie wir das bei der Definition von $\mathbb{L}G$ in 17.5.2 getan haben.

Man nennt μ die Maurer–Cartan-Form der Liegruppe G . Es gilt die *Strukturgleichung von Cartan* für Liegruppen:

$$d\mu + \frac{1}{2}[\mu, \mu] = 0. \quad (17.68)$$

Explizit bedeutet das $d\mu_g(v, w) + [\mu_g(v), \mu_g(w)] = 0$ für alle $g \in G$ und alle Tangentialvektoren $v, w \in TG_g$.

Die adjungierte Darstellung Ad einer Liegruppe G auf sich selbst: Für alle $g, h \in G$ setzen wir

$$\text{Ad}(g)h := ghg^{-1}.$$

Jede Abbildung $\text{Ad}(g) : G \rightarrow G$ ist ein Diffeomorphismus mit

$$\text{Ad}(gk) = \text{Ad}(g)\text{Ad}(k) \quad \text{für alle } g, k \in G,$$

d. h., Ad ist eine Darstellung von G auf G .

Die adjungierte Darstellung Ad einer Liegruppe G auf ihrer Liealgebra $\mathbb{L}G$: Die Linearisierung $\text{Ad}'(e)$ von Ad am Einselement e liefert für jedes $g \in G$ eine lineare Abbildung $\text{Ad}(g) : \mathbb{L}G \rightarrow \mathbb{L}G$ mit

$$\text{Ad}(gk) = \text{Ad}(g)\text{Ad}(k) \quad \text{für alle } g, k \in G,$$

d. h., Ad ist eine Darstellung von G auf $\mathbb{L}G$. Explizit gilt

$$\text{Ad}(g)v = (L_g R_h)'(e)v$$

für alle $g \in G, v \in \mathbb{L}G$ mit $h := g^{-1}$.

Die adjungierte Darstellung ad der Liealgebra $\mathbb{L}G$ auf sich selbst: Für alle $v, w \in \mathbb{L}G$ setzen wir

$$\text{ad}(v)w := [v, w].$$

Dann ist $\text{ad}(v) : \mathbb{L}G \rightarrow \mathbb{L}G$ ein linearer Operator mit

$$\text{ad}([v, z]) = [\text{ad}(v), \text{ad}(z)] \quad \text{für alle } v, z \in \mathbb{L}G,$$

d. h., ad ist eine Darstellung von $\mathbb{L}G$ auf $\mathbb{L}G$. Es gilt

$$\text{Ad}'(e)v = \text{ad}(v) \quad \text{für alle } v \in \mathbb{L}G,$$

d. h., ad entspricht der Linearisierung von Ad am Einselement e .

► **STANDARDBEISPIEL** (klassische Matrizengruppen): Mit $G := GL(n, \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Liegruppe aller invertierbaren reellen $(n \times n)$ -Matrizen. Die dazu gehörige Liealgebra $\mathbb{L}G = gl(n, \mathbb{R})$ besteht aus allen reellen $(n \times n)$ -Matrizen mit der Lieklammer

$$[V, W] = VW - WV \quad \text{für alle } V, W \in \mathbb{L}G.$$

Ferner bezeichnen wir mit e die Einheitsmatrix in G .

Genau alle linksinvarianten Vektorfelder v auf G erhält man durch

$$v_g = gV$$

für alle $g \in G$, wobei V alle Matrizen aus $\mathbb{L}G$ durchläuft. Die Lieklammer auf $\text{Vekt}_l(G)$ ergibt sich durch

$$[v, w]_g = g(VW - WV)$$

für alle $g \in G$. Dabei ist $v_g = gV$ und $w_g = gW$ mit $V, W \in \mathbb{L}G$. Die Maurer–Cartan–Form μ auf G hat die Gestalt

$$\mu_g(gV) = V$$

für alle $g \in G$ und alle $V \in \mathbb{L}G$. Für jedes $g \in G$ ist die adjungierte Darstellung Ad der Gruppe G auf $\mathbb{L}G$ durch

$$\text{Ad}(g)V = gVg^{-1}, \quad g \in G, \quad V \in \mathbb{L}G,$$

gegeben. Schließlich erhält man die adjungierte Darstellung ad von $\mathbb{L}G$ auf sich selbst durch

$$\text{ad}(V)W = VW - WV, \quad V, W \in \mathbb{L}G.$$

Jede Matrix $V \in \mathbb{L}G$ erzeugt durch

$$h(t) := e^{tV}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine einparametrische Untergruppe von G . Daraus ergibt sich durch $F_t g := gh(t)$ ein Fluss auf der Liegruppe G mit dem zugehörigen Geschwindigkeitsfeld

$$v_g := \frac{dF_t g}{dt} \Big|_{t=0} = gV,$$

d. h., v stellt das durch V erzeugte linksinvariante Vektorfeld mit $v_e = V$ dar.

Die auf der Liegruppe G wirkende Transformationsgruppe $\{R_g\}$ der Rechtstranslationen erzeugt nach 17.10 Lievektorfelder auf G . Diese sind identisch mit den rechtsinvarianten Vektorfeldern auf G .

Analoge Formeln gelten für jede abgeschlossene Untergruppe von $G = GL(n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Zahlreiche Beispiele hierfür findet man in Tabelle 17.1.

17.13 Differentialformen mit Werten in einer Liealgebra

Es sei B_1, \dots, B_m eine Basis der reellen Liealgebra \mathbb{L} . Im folgenden wird über gleiche obere und untere Indizes von 1 bis m summiert.

Unter einer p -Form ω auf der reellen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Werten in \mathbb{L} verstehen wir einen Ausdruck der Gestalt

$$\omega = \omega^j B_j, \tag{17.69}$$

wobei jedes ω^j eine klassische p -Form auf M ist. Explizit bedeutet (17.69), dass

$$\omega_x(v_1, \dots, v_p) = \omega_x^j(v_1, \dots, v_p)B_j$$

für alle $x \in M$ und alle Tangentialvektoren $v_1, \dots, v_p \in TM_x$ gilt. Im Spezialfall der klassischen Liealgebren von Tabelle 17.1 sind alle B_j Matrizen.

Definition: Wir setzen

- (i) $d\omega := d\omega^j B_j$.
- (ii) $[\omega, \varrho] := (\omega^j \wedge \varrho^k)[B_j, B_k]$.

Dabei sei ω eine p -Form und ϱ eine q -Form mit Werten in \mathbb{L} . Diese Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Basis $\{B_j\}$.

Satz: Es gilt

- (a) $[\omega, \varrho] = (-1)^{pq+1}[\varrho, \omega]$.

$$(b) d[\omega, \varrho] = [d\omega, \varrho] + (-1)^p [\omega, d\varrho].$$

Sind zum Beispiel ω und ϱ 1-Formen, dann erhalten wir

$$\frac{1}{2}[\omega, \varrho](v, w) = [\omega(v), \varrho(w)]$$

für alle Tangentialvektoren $v, w \in TM_x$.

Literatur zu Kapitel 17

- [Belger und Ehrenberg 1988] Belger, M., Ehrenberg, L.: Theorie und Anwendung der Symmetriegruppen. 2. Auflage. Teubner, Leipzig (1988)
- [Chaichian und Hagedorn 1998] Chaichian, M., Hagedorn, R.: Symmetries in Quantum Mechanics: From Angular Momentum to Supersymmetry. Institute of Physics, Bristol (1998)
- [Fuchs 1992] Fuchs, J.: Affine Lie Algebras and Quantum Groups: An Introduction with Applications in Conformal Field Theory. Cambridge University Press, Cambridge, England (1992)
- [Fuchs und Schweigert 1997] Fuchs, J., Schweigert, C.: Symmetries, Lie Algebras, and Representations: A Graduate Course for Physicists. Cambridge University Press, Cambridge, England (1997)
- [Golubitsky et al. 1988] Golubitsky, M., Stewart, I., Schaeffer, D.: Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vols. 1, 2. Springer, New York (1988)
- [Hall 2003] Hall, B.: Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction. Springer, New York (2003)
- [Hein 1990] Hein, W.: Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen. Springer, Berlin (1990)
- [Ibragimov 1993] Ibragimov, N.: CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. CRC Press, Boca Raton, FL (1993)
- [Isham 1989] Isham, C.: Lectures on Groups and Vector Spaces for Physicists. World Scientific, Singapore (1989)
- [Klimyk und Schmüdgen 1997] Klimyk, A., Schmüdgen, K.: Quantum Groups. Springer, Berlin (1997)
- [Majid 2002] Majid, M.: A Quantum Groups Primer. Cambridge University Press, Cambridge, England (2002)
- [Neumark 1963] Neumark, M.: Lineare Darstellungen der Lorentzgruppe. Übers. a.d. Russ., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1963)
- [Olver 1999] Olver, P.: Classical Invariant Theory. Cambridge University Press, Cambridge, England (1999)
- [Schottenloher 1997] Schottenloher, M.: A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory. Berlin, Springer (1997)
- [Sepanski 2007] Sepanski, M.: Compact Lie Groups, Springer, Berlin (2007)
- [Simon 1996] Simon, B.: Representations of Finite and Compact Groups. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1996)
- [Speiser 1956] Speiser, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Birkhäuser, Basel (1956)
- [Sternberg 1994] Sternberg, S.: Group Theory and Physics. Cambridge University Press, Cambridge, England (1994)
- [Tits 1967] Tits, J.: Tabellen zu den einfachen Liegruppen und ihren Darstellungen. Springer, Berlin (1967)
- [van der Waerden 1932] van der Waerden, B.: Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Springer, Berlin (1932)
- [Vilenkin und Klimyk 1991–94] Vilenkin, N., Klimyk, A.: Special Functions and Representations of Lie Groups, Vols. 1–3. Kluwer, Dordrecht (1991–94)
- [Weyl 1997] Weyl, H.: The Classical Groups. 15th printing, Princeton University Press, Princeton, NJ (1997)

KAPITEL 18

TOPOLOGIE – MATHEMATIK DES QUALITATIVEN VERHALTENS

Auf allen meinen Wegen bin ich immer wieder der analysis situs (Topologie) begegnet.

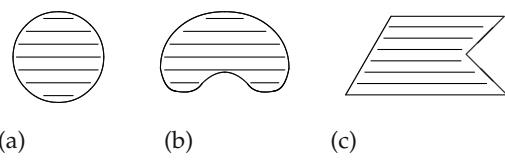
Henri Poincaré (1854-1912)

18.1 Das Ziel der Topologie

Die Topologie stellt die allgemeinste Form der Geometrie dar. Deshalb spielt sie überall dort eine zentrale Rolle, wo es um die Untersuchung *qualitativer* Eigenschaften geht. Tiefliegende topologische Resultate sind nicht nur für die Mathematik, sondern auch für die moderne Physik von besonderer Bedeutung (z. B. qualitative Theorie der dynamischen Systeme, Stringtheorie und Elementarteilchentheorie, Festkörpertheorie, Kosmologie). Die moderne Topologie ist geprägt von einem bewundernswerten Zusammenspiel scharfsinniger Methoden der Geometrie, Algebra und Analysis. Grundbegriffe über topologische Räume findet man in 11.2.1.

Die Topologie untersucht die Eigenschaften von topologischen Räumen (z. B. von Teilmengen des \mathbb{R}^n oder von Mannigfaltigkeiten), die sich bei *Homöomorphismen nicht ändern*. Solche Eigenschaften bezeichnet man als *topologische Eigenschaften*. Anschaulich gesprochen gilt:

Homöomorphismen eines topologischen Raumes T sind gummiartige Verbiegungen von T , bei denen keine Risse auftreten.



(a)

(b)

(c)

homöomorphe Mengen

Abb. 18.1

Beispielsweise sind die in Abb. 18.1 dargestellten Mengen zueinander homöomorph, während die Mengen in Abb. 18.2 nicht zueinander homöomorph sind.

Ein klassisches topologisches Resultat ist der Jordansche Kurvensatz. Unter einer *Jordankurve* C versteht man eine Menge des \mathbb{R}^2 , die zu der Kreislinie S^1 homöomorph ist (Abb. 18.3). Offensichtlich teilt S^1 den \mathbb{R}^2 (d. h. die Ebene) in ein äußeres und ein inneres Gebiet. Das ist eine topologische Eigenschaft. Genauer gilt folgendes.

Jordanscher Kurvensatz: Ist C eine Jordankurve, dann besteht das Komplement von C aus genau zwei disjunkten Gebieten. Diese beiden Gebiete nennt man das Innere und das Äußere von C . Abb. 18.3(c) vermittelt eine Vorstellung davon, dass der Jordansche Kurvensatz nicht

trivial ist. Generell haben viele Aussagen der Topologie einen sehr einfachen anschaulichen Hintergrund; ihre Beweise sind aber außerordentlich schwierig und erfordern einen aufwendigen, sehr abstrakten mathematischen Apparat.

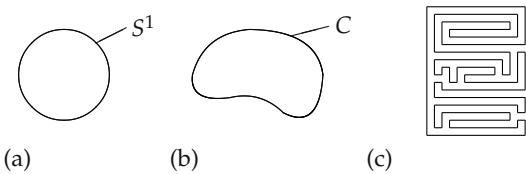


(a) (b) (c)
nicht homöomorphe Mengen

Abb. 18.2

Begründet wurde die Topologie Ende des 19. Jahrhunderts von dem französischen Mathematiker Henri Poincaré. Er knüpfte an das Werk von Bernhard Riemann (1826-1866) an, der sich bei der Schaffung der komplexen Funktionentheorie topologischer Methoden bediente, um das globale Verhalten analytischer Funktionen und ihrer Integrale mit Hilfe von Riemannschen Flächen zu untersuchen.

Topologische Invarianten: Unter einer topologischen Invariante versteht man eine (ganze) Zahl, die sich bei Homöomorphismen nicht ändert. Mit Hilfe topologischer Invarianten kann man topologische Räume klassifizieren. Zwei topologische Räume, für die eine topologische Invariante unterschiedliche Werte annimmt, können nicht homöomorph sein. Die Eulersche Charakteristik $\chi(M)$ einer Mannigfaltigkeit M ist eine grundlegende topologische Invariante.



(a) (b) (c)

Abb. 18.3

Funktoren: In der modernen Topologie ordnet man topologischen Räumen *algebraische Strukturen* zu (z. B. Fundamentalgruppen, Homologiegruppen, Kohomologiegruppen, Homotopiegruppen), die sich bei Homöomorphismen nicht ändern. Daraus ergeben sich topologische Invarianten (z. B. die Bettischen Zahlen und die Eulersche Charakteristik in 18.5).

Genauer gesagt, man verwendet Funktoren. Zum Beispiel stellt der Homologiefunktor einen Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der linearen Räume dar (vgl. 18.6.2). Der Begriff des Funktors wurde in 17.2.4 eingeführt.

Konvention für Mannigfaltigkeiten: In diesem Kapitel verstehen wir unter einer Mannigfaltigkeit immer eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Glatte Abbildungen und Diffeomorphismen sowie Formen sind stets vom Typ C^∞ .

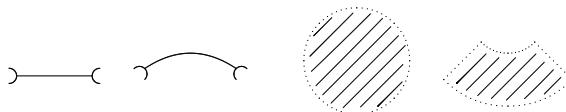
Zellen: Für $n = 1, 2, \dots$ setzen wir

$$K^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \quad (\text{n-dimensionale offene Einheitskugel}),$$

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \quad ((n-1)\text{-dimensionale Sphäre, Rand von } K^n).$$

Mit $\bar{K}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ bezeichnen wir die abgeschlossene Einheitskugel.

Unter einer n -Zelle verstehen wir einen topologischen Raum, der zu K^n homöomorph ist; 0-Zellen sind Punkte (Abb. 18.4).



(a) 1-Zellen

(b) 2-Zellen

Abb. 18.4

Topologische Invarianz der Dimension: Zwei homöomorphe endlichdimensionale reelle Mannigfaltigkeiten besitzen stets die gleiche Dimension ≥ 0 .

Zellkomplexe und Eulersche Charakteristik: Es sei M eine n -dimensionale kompakte reelle Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand). Wir nehmen an, dass wir M als einen Zellkomplex darstellen können, d. h. als eine Vereinigung von endlich vielen, paarweise disjunkten Zellen, wobei α_q die Anzahl der auftretenden q -Zellen ist. Dann wird die Eulersche Charakteristik von M durch

$$\chi(M) := \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q$$

definiert.¹ Die gleiche Definition benutzen wir für einen topologischen Raum M , der zu einer der oben angegebenen Mannigfaltigkeiten homöomorph ist.

Die Eulersche Charakteristik $\chi(M)$ besitzt die außerordentlich bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie nicht von der Art der Zellzerlegung von M abhängt und eine topologische Invariante von M darstellt.

► **BEISPIEL 1:** Die Kreislinie S^1 besteht aus einer 0-Zelle P und einer 1-Zelle $c_1 = S^1 - P$ (Abb. 18.5). Folglich ist

$$\chi(S^1) = \alpha_0 - \alpha_1 = 1 - 1 = 0.$$

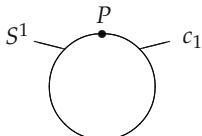
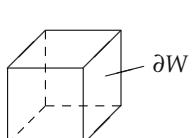


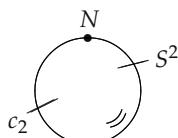
Abb. 18.5

► **BEISPIEL 2:** Eine Würfeloberfläche ∂W besteht aus acht 0-Zellen (Eckpunkte), zwölf 1-Zellen (offene Kanten) und sechs 2-Zellen (offene Randflächen) (Abb. 18.6(a)). Somit gilt

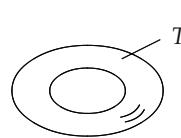
$$\chi(\partial W) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 8 - 12 + 6 = 2.$$



(a)



(b)



(c)

Abb. 18.6

Die 2-Sphäre S^2 ist homöomorph zum Würfelrand ∂W (Abb. 18.6). Deshalb muss $\chi(S^2) = \chi(\partial W) = 2$ gelten. Um das über eine Zellzerlegung zu bestätigen, beachten wir, dass S^2 aus einer 0-Zelle N (Nordpol) und der 2-Zelle $c_2 = S^2 - N$ besteht (Abb. 18.6(b)). Deshalb gilt

$$\chi(S^2) = \alpha_0 + \alpha_2 = 1 + 1 = 2.$$

¹In 18.5 werden wir eine abstrakte algebraische Definition für die Eulersche Charakteristik $\chi(M)$ angeben, die zu der hier verwendeten anschaulichen geometrischen Definition äquivalent ist.

In analoger Weise erhält man

$$\chi(S^n) = \alpha_0 + (-1)^n \alpha_n = 1 + (-1)^n.$$

► **BEISPIEL 3:** Einen Torus T kann man als disjunkte Vereinigung eines Längenkreises L und seines Komplements $R = T - L$ darstellen (Abb. 18.7(a)).

Die Kreislinie L besteht nach Beispiel 1 aus einer 0-Zelle und einer 1-Zelle. Ferner kann man R zu einem offenen Zylindermantel aufbiegen, der aus einer 1-Zelle c_1 und einer 2-Zelle c_2 aufgebaut ist (Abb. 18.7(b)). Somit besteht T aus einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle, d. h.

$$\chi(T) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

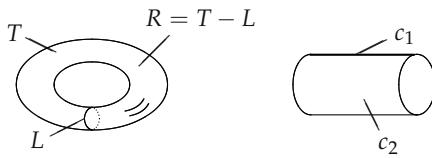
Aufgrund von $\chi(S^2) \neq \chi(T)$ kann die Sphäre S^2 nicht homöomorph zum Torus T sein (Abb. 18.6).

► **BEISPIEL 4:** Ein abgeschlossener Würfel W besteht aus dem Rand ∂W und einer 3-Zelle (Inneres von W). Nach Beispiel 2 gilt somit

$$\chi(W) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 8 - 12 + 6 - 1 = 1.$$

Wichtige Anwendungen der Eulerschen Charakteristik findet man in 18.2.

Deformationen (Homotopien) von Abbildungen: Die Topologie untersucht nicht nur Homöomorphismen von topologischen Räumen, sondern auch stetige Deformationen (Homotopien) von stetigen Abbildungen und topologischen Räumen (vgl. 18.3).



(a)

(b)

Abb. 18.7

Topologische Existenzsätze: Für die Anwendungen der Topologie auf Gleichungen ist es wichtig, dass man Existenzsätze formulieren kann, bei denen aus qualitativen Eigenschaften einer Gleichung auf die Existenz von Lösungen geschlossen werden kann. Zur Erläuterung geben wir einige typische topologische Existenzsätze an.

(i) **Satz von Bolzano:** Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall besitzt eine Nullstelle, falls gilt (Abb. 18.8):

$$f(a)f(b) \leq 0. \quad (18.1)$$

Wegen (18.1) kommt es hier nur auf das qualitative Verhalten von f in den beiden Randpunkten a und b an. Die Existenz einer Lösung bleibt bei weitgehenden Störungen (Deformationen) von f erhalten. Der Satz von Bolzano steht im engen Zusammenhang mit dem Abbildungsgrad und den daraus folgenden topologischen Existenzaussagen (z. B. die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder in 12.9).

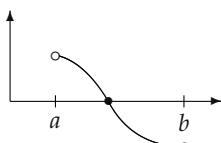


Abb. 18.8

(ii) **Antipodensatz von Borsuk:** Ist $f : \bar{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ($n \geq 1$) und gilt $f(x) \neq 0$ auf dem Rand ∂K^n mit der zusätzlichen Antipodenbedingung

$$\frac{f(x)}{|f(x)|} \neq \frac{f(-x)}{|f(-x)|} \quad \text{für alle } x \in \partial K^n,$$

dann hat die Gleichung $f(x) = 0, x \in K^n$, eine Lösung.

Das ist eine direkte Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano.

(iii) **Satz von Poincaré:** Ein stetiges (tangentliches) Vektorfeld auf einer n -dimensionalen Sphäre S^n von gerader Dimension n hat stets eine Nullstelle.

Im Fall $n = 2$ können wir das Vektorfeld als Haare auf einem Kopf interpretieren. Der Nullstelle des Vektorfeldes entspricht dann ein Haarscheitelpunkt.

Viele Sätze der komplexen Funktionentheorie sind topologischer Natur (z. B. der Residuensatz zur Berechnung von Integralen in 1.14.7. und der Monodromiesatz über analytische Fortsetzung in 1.14.15.).

Äquivalenzklassen: Die meisten Begriffsbildungen der Topologie beruhen auf Äquivalenzrelationen und der Zusammenfassung von Objekten in Äquivalenzklassen. Die entsprechenden Definitionen findet man in der Einleitung zu 11.1. Insbesondere werden wir im Zusammenhang mit der Homologie- und Kohomologietheorie Faktorräume linearer Räume verwenden. Deren Definition findet man in 11.2.3.

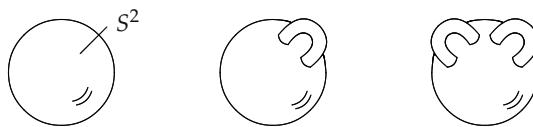
18.2 Die Bedeutung der Eulerschen Charakteristik

Die Eulersche Charakteristik erlaubt viele wichtige qualitative Aussagen.

18.2.1 Der Hauptsatz der topologischen Flächentheorie

Unter einer orientierten topologischen Fläche verstehen wir einen topologischen Raum, der zu einer zweidimensionalen orientierten kompakten zusammenhängenden reellen Mannigfaltigkeit homöomorph ist.

Hauptsatz: Jede orientierte topologische Fläche ist homöomorph zu einer Sphäre S^2 mit p Henkeln (Abb. 18.9).



(a) $p = 0$

(b) $p = 1$

(c) $p = 2$

Abb. 18.9

Die Zahl $p = 0, 1, 2, \dots$ heißt das *Geschlecht* der Fläche F . Das Geschlecht ist eine fundamentale topologische Invariante, denn zwei orientierte topologische Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie das gleiche Geschlecht besitzen.



(a) $p = 1$

(b) $p = 1$

Abb. 18.10

Zwischen dem Geschlecht p von F und der Eulerschen Charakteristik von F besteht der Zusammenhang

$$\chi(F) = 2 - 2p.$$

► **BEISPIEL 1:** Für die Sphäre S^2 ist $p = 0$, während für den Torus $p = 1$ gilt (Abb. 18.10).

► **BEISPIEL 2:** Jede kompakte Riemannsche Fläche (vgl. 15.1.1) ist eine orientierte topologische Fläche und besitzt daher ein Geschlecht.

18.2.2 Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten

Die Topologie einer Mannigfaltigkeit M beeinflusst wesentlich das Verhalten von Strömungen (dynamischen Systemen) auf M .

Satz von Poincaré–Hopf über stationäre Punkte von Vektorfeldern: Sei M eine kompakte n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, und auf M sei ein stetiges Vektorfeld v gegeben, das nur höchstens endlich viele Nullstellen (stationäre Punkte) P_1, \dots, P_m besitzt. Dann gilt²

$$\sum_{j=1}^m \text{ind}(P_j) = \chi(M).$$

Korollar: Aus $\chi(M) \neq 0$ folgt, dass jedes stetige Vektorfeld auf M mindestens eine Nullstelle besitzt.

► **BEISPIEL 1:** Speziell aus $\chi(S^n) = 2$ für gerades n folgt aus dem Korollar der Satz von Poincaré in 18.1.

► **BEISPIEL 2:** Abb. 18.11 zeigt eine Strömung auf der Sphäre S^2 . Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld v besitzt genau zwei stationäre Punkte im Nordpol N und im Südpol S . Nach der Abb. 13.6(a),(b) gilt $\text{ind}(N) = \text{ind}(S) = 1$. Somit hat man

$$\chi(S^2) = \text{ind}(N) + \text{ind}(S) = 2.$$

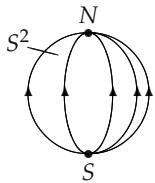


Abb. 18.11

²Der Index $\text{ind}(P)$ wird folgendermaßen erklärt. Wir betrachten das Vektorfeld v in lokalen Koordinaten $u \in \mathbb{R}^n$, wobei der Punkt P die Koordinate u_0 hat. Dann gilt

$$\text{ind}(P) = \text{Grad}(v, u_0)$$

(vgl. 12.9). Ist insbesondere das Vektorfeld glatt, dann hat man

$$\text{ind}(P) = \text{sgn} \det v'(u_0),$$

wobei $v'(u_0)$ die Matrix der ersten partiellen Ableitungen von v im Punkte u_0 bezeichnet und $\det v'(u_0) \neq 0$ vorausgesetzt wird. Diese Definition ist unabhängig von den gewählten lokalen Koordinaten. Im Spezialfall $n = 2$ ergibt sich die Bestimmung des Index aus Abb. 13.6.

18.2.3 Morsetheorie für Extremalprobleme auf Mannigfaltigkeiten

Die Topologie einer Mannigfaltigkeit beeinflusst wesentlich das Extremalverhalten von Funktionen auf M .

Hauptsatz: Es sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Morsefunktion³ auf der n -dimensionalen kompakten reellen Mannigfaltigkeit M mit $n = 1, 2, \dots$ und m_q bezeichne die Anzahl der kritischen Punkte vom Morseindex q . Dann gilt die *Morsegleichung*

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^n (-1)^q m_q.$$

Ferner hat man die *Morseungleichungen*

$$m_q \geq \beta_q, \quad q = 0, 1, \dots, n,$$

sowie die Relation

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \beta_q.$$

Dabei bezeichnet β_q die q -te Bettizahl von M (vgl. 18.5).

Speziell ist m_0 gleich der Anzahl der lokalen Minima von F auf M , und m_n ist gleich der Anzahl der lokalen Maxima. Schließlich ist $m_1 + \dots + m_{n-1}$ gleich der Anzahl der Sattelpunkte von F auf M .

► **BEISPIEL 1:** Für eine Kreislinie S^1 gilt $\chi(S^1) = m_0 - m_1 = 0$. Deshalb besitzt jede glatte Morsefunktion $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ die gleiche Anzahl von lokalen Maxima und lokalen Minima.

► **BEISPIEL 2:** Für einen Torus M hat man $\beta_0 = \beta_2 = 1$ und $\beta_1 = 2$. Folglich besitzt jede glatte Morsefunktion auf M mindestens ein Maximum, mindestens ein Minimum und mindestens zwei Sattelpunkte. Diese Aussage lässt sich nicht verschärfen.

Für eine zweidimensionale kompakte orientierte zusammenhängende reelle Mannigfaltigkeit M vom Geschlecht p gilt $\beta_0 = \beta_2 = 1$, $\beta_1 = 2p$. Somit ist $\chi(M) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 2 - 2p$ und

$$m_0 \geq 1, \quad m_1 \geq 2p, \quad m_2 \geq 1,$$

d. h., jede glatte Morsefunktion auf M besitzt mindestens ein Maximum, mindestens ein Minimum und mindestens $2p$ Sattelpunkte.

18.2.4 Der Satz von Gauß-Bonnet-Chern

Die Gesamtkrümmung einer geschlossenen Fläche hängt nur von ihrem topologischen Typ ab und bleibt deshalb bei Homöomorphismen (Gummitransformationen) unverändert (vgl. (18.4)). Somit besteht ein tiefer Zusammenhang zwischen der Topologie und der Gesamtkrümmung von Mannigfaltigkeiten.

³Das bedeutet, dass F höchstens endlich viele kritische Punkte P_1, \dots, P_m besitzt, die alle außerdem nicht entartet sind. Führen wir in einer Umgebung von P_j lokale Koordinaten $u \in \mathbb{R}^n$ ein, wobei P_j der Koordinate u_j entspricht, dann ist P_j genau dann ein *kritischer Punkt* von F , wenn

$$F'(u_j) = 0$$

gilt. P_j ist genau dann *nicht entartet*, wenn $\det F''(u_j) \neq 0$. Dabei bezeichnet $F''(u_j)$ die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von F im Punkt u_j .

Der *Morseindex* von F im Punkt P_j ist gleich der Anzahl der negativen Eigenwerte der Matrix $F''(u_j)$ (vgl. Beispiel 9 in 13.13). Alle diese Begriffe sind unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten.

Hauptsatz: Es sei M eine kompakte orientierte $2n$ -dimensionale reelle eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $n \geq 1$. Dann gibt es eine $2n$ -Form ω auf M mit⁴

$$\int_M \omega = \chi(M). \quad (18.2)$$

Die Bedeutung dieses Satzes, welcher 1944 von dem chinesischen Mathematiker Chern bewiesen wurde, besteht darin, dass eine *topologische Invariante* (die Eulersche Charakteristik $\chi(M)$ der Mannigfaltigkeit M) mit einem *analytischen Ausdruck* (der Differentialform ω auf M) verknüpft wird. Somit stellt (18.2) einen tiefliegenden Zusammenhang zwischen Topologie und Analysis her.

Die Differentialform ω genügt der Gleichung $d\omega = 0$. Im Sinne von 18.5 ist deshalb ω ein $2n$ -Kozyklus, zu dem eine de Rhamsche Kohomologiekasse

$$[\omega] = \{\omega + d\mu : \mu \text{ beliebige glatte } (2n-1)\text{-Form}\}$$

gehört, d. h., $[\omega]$ ist ein Element der $2n$ -ten de Rhamschen Kohomologiegruppe $H^{2n}(M)$ von M . Wegen des Satzes von Stokes gilt $\int_M d\mu = \int_{\partial M} \mu = 0$, denn M besitzt keinen Rand. Folglich hat man auch für jede beliebige glatte $(2n-1)$ -Form μ auf M

$$\int_M \omega + d\mu = \chi(M).$$

Somit hängt die Eulersche Charakteristik $\chi(M)$ nur von der Kohomologiekasse $[\omega]$ ab. Man bezeichnet $[\omega]$ als eine charakteristische Klasse, genauer als die *Eulerklasse* von M .

In der modernen Topologie werden eine Fülle von charakteristischen Klassen betrachtet (z. B. Chernklassen, Pontrjaginklassen, Toddklassen), um wichtige topologische Invarianten zu konstruieren (vgl. 19.10).

Wichtiger Spezialfall: Wir nehmen an, dass die obige Mannigfaltigkeit M eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{2n+1} ist. Definitionsgemäß ordnet die Gaußabbildung

$$\mathbb{N} : M \rightarrow S^{2n}$$

jedem Punkt x von M den äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbb{N}(x)$ in x zu. Dann ergibt sich die sogenannte Gaußsche Krümmung von M im Punkt x durch

$$K(x) := \det \mathbb{N}'(x),$$

und es gilt die fundamentale Formel

$$\int_M K dm = \frac{1}{2} \chi(M) m(S^{2n}). \quad (18.3)$$

Hier bezeichnet m das Maß auf M (bezüglich der Riemannschen Metrik auf M), und $m(S^{2n})$ ist gleich dem Oberflächenmaß der Sphäre S^{2n} . Das Integral $\int_M K dm$ heißt die *Gesamtkrümmung* von M .

⁴Explizit gilt

$$\omega := \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 2n \\ i_1 & \dots & i_{2n} \end{pmatrix} \Omega_{i_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2n}}^{i_{2n}}$$

mit $\Omega_j^i := \frac{1}{2} R_{jkm}^i du^k \wedge du^m$, wobei u_1, \dots, u_{2n} lokale Koordinaten auf M bezeichnen und R_{jkm}^i der Riemannsche Krümmungstensor ist (vgl. 16.1).

Speziell für $n = 2$ (d. h., M ist eine randlose kompakte Fläche im \mathbb{R}^3) erhalten wir die wichtige Oberflächenintegralformel

$$\int_M K \, dO = 4\pi(1 - p), \quad (18.4)$$

wobei p das Geschlecht von M bezeichnet. Das ist ein Spezialfall des klassischen Satzes von Gauß-Bonnet (vgl. 3.6.4.). Insbesondere für eine Kugeloberfläche M ist $p = 0$, und für einen Torus M gilt $p = 1$.

18.3 Homotopie (Deformation)

Die Homotopietheorie untersucht die Deformation von stetigen Abbildungen und topologischen Räumen.

Deformation stetiger Abbildungen: Zwei stetige Abbildungen $f, g : M \rightarrow N$ zwischen den beiden topologischen Räumen M und N heißen genau dann *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung $H = H(x, t)$ der Form

$$H : M \times [0, 1] \rightarrow N$$

gibt mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in M$. Wir schreiben dafür

$$f \cong g.$$

Diese Homotopierelation ist eine Äquivalenzrelation. Interpretieren wir t als Zeit, so wird anschaulich die Abbildung f im Zeitintervall $[0, 1]$ in die Abbildung g deformiert.

Es bezeichne $[f]$ die Äquivalenzklasse der Abbildung f , d. h., $[f]$ besteht aus genau allen Abbildungen g , die zu f homotop sind.

► **BEISPIEL 1:** Für zwei stetige Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt stets $f \cong g$ mit $H(x, t) := (1 - t)f(x) + tg(x)$ (Abb. 18.12).

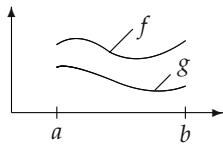


Abb. 18.12

Wir sprechen von einer glatten Homotopie, falls es sich bei M und N um Mannigfaltigkeiten handelt und die Abbildungen f, g, H glatt sind.

Deformation topologischer Räume (Homotopieäquivalenz): Zwei topologische Räume M und N heißen genau dann *homotopieäquivalent*, wenn es zwei stetige Abbildungen $f : M \rightarrow N$ und $h : N \rightarrow M$ gibt mit

$$h \circ f \cong \text{id}_M \quad \text{und} \quad f \circ h \cong \text{id}_N. \quad (18.5)$$

Dabei bezeichnet $h \circ f : M \rightarrow N \rightarrow M$ die Zusammensetzung der beiden Abbildungen f und h , während id_M für die identische Abbildung auf M steht.

Die Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation. Zwei homöomorphe topologische Räume M und N sind stets auch homotopieäquivalent.⁵ Die Umkehrung ist falsch wie das folgende Beispiel 2 zeigt.

⁵Ist $f : M \rightarrow N$ ein Homöomorphismus, dann gilt (18.5) mit $h := f^{-1}$, wobei anstelle von „ \cong “ sogar das Gleichheitszeichen steht.

► **BEISPIEL 2:** Ein topologischer Raum M heißt genau dann *kontrahierbar*, wenn er zu einem Punkt homotopieäquivalent ist.

Das ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Punktes $x_1 \in M$ und einer stetigen Abbildung $H = H(x, t)$ der Form

$$H : M \times [0, 1] \rightarrow M,$$

wobei $H(x, 0) = x$ und $H(x, 1) = x_1$ für alle $x \in M$ gilt.

Anschaulich gilt: Jeder Punkt $x_0 \in M$ bewegt sich auf der Trajektorie $x(t) := H(x_0, t)$ im Zeitintervall $[0, 1]$ zum Kontraktionspunkt x_1 hin (Abb. 18.13). Beispielsweise sind konvexe Mengen im \mathbb{R}^n mit $n \geq 0$ stets kontrahierbar. Ferner ist jede Menge des \mathbb{R}^n kontrahierbar, die zu einer konvexen Menge des \mathbb{R}^n (oder allgemeiner eines normierten Raumes) homöomorph ist.

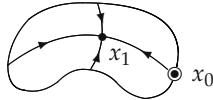


Abb. 18.13

Dagegen sind ein Kreisring, eine Kreislinie oder allgemeiner eine Sphäre S^n ($n \geq 1$) nicht kontrahierbar. Ferner ist auch ein Torus nicht kontrahierbar.

18.3.1 Erweiterung stetiger Abbildungen

Nullhomotope Abbildungen: Eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei topologischen Räumen M und N heißt genau dann nullhomotop, wenn f zu einer konstanten Abbildung $g : M \rightarrow N$ homotop ist, d. h., es ist $g(x) = y_0$ für alle $x \in M$.

Erweiterungssatz: Für eine stetige Abbildung $f : S^n \rightarrow Y$ in den topologischen Raum Y mit $n \geq 0$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) f lässt sich zu einer stetigen Abbildung $F : \overline{K}^{n+1} \rightarrow Y$ fortsetzen.
- (ii) f ist nullhomotop.

► **BEISPIEL:** Eine stetige Funktion $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $n, m \geq 0$ ist stets nullhomotop.⁶ Deshalb besitzt f eine stetige Erweiterung $F : \overline{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Existenzsatz: Es sei $F : \overline{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung ($n \geq 0, m \geq 1$) mit $F(x) \neq 0$ auf dem Rand S^n . Wir setzen $f(x) := F(x)/|F(x)|$. Dann besitzt die Gleichung

$$F(x) = 0, \quad x \in K^{n+1},$$

eine Lösung, falls $f : S^n \rightarrow S^m$ nicht nullhomotop ist. Für $n = m$ sind die folgenden drei Bedingungen zueinander äquivalent:

- (i) $f : S^n \rightarrow S^n$ ist nicht nullhomotop.
- (ii) Der Abbildungsgrad $\text{Grad}(F, K^{n+1})$ ist ungleich null (vgl. 12.9).
- (iii) Der Abbildungsgrad $\text{Grad } f$ ist ungleich null (vgl. 18.3.2).

18.3.2 Der Abbildungsgrad

Es seien $f, h : M \rightarrow N$ glatte Abbildungen zwischen den n -dimensionalen kompakten orientierten reellen Mannigfaltigkeiten M und N mit $n \geq 1$ (z. B. $M = N = S^n$). Dann gibt es eine ganze Zahl

⁶Wählen wir $H(x, t) := tf(x)$ für alle $x \in S^n, t \in [0, 1]$, dann ist f homotop zur konstanten Abbildung $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $g(x) \equiv 0$.

$\text{Grad } f$, die man den *Abbildungsgrad* von f nennt, so dass

$$\int_M f^* \omega = \text{Grad } f \int_N \omega$$

für jede glatte n -Form ω auf N gilt.⁷

Satz: Sind f und h glatt homotop, dann ist $\text{Grad } f = \text{Grad } h$.

► **BEISPIEL:** Es sei $f : S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung ($n \geq 1$). Dann lässt sich f stets zu einer stetigen Abbildung $F : \overline{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ erweitern. Wir definieren

$$\text{Grad } f := \text{Grad } (F, K^{n+1}),$$

wobei der rechts stehende Abbildungsgrad im Sinne von 12.9 zu verstehen ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Erweiterung und stimmt für glatte Abbildungen f mit der oben gegebenen Definition überein.

Erster Satz von Hopf: (i) Zwei stetige Abbildungen $f, g : S^n \rightarrow S^n$ mit $n \geq 1$ sind genau dann homotop, wenn $\text{Grad } f = \text{Grad } g$ gilt.

(ii) f ist genau dann nullhomotop, wenn $\text{Grad } f = 0$ gilt.

(iii) Zwischen den Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $f : S^n \rightarrow S^n$ und den ganzen Zahlen besteht eine bijektive Abbildung φ , die durch $\varphi([f]) = \text{Grad } f$ gegeben ist.

Zweiter Satz von Hopf: (i) Es gibt eine stetige Abbildung $f : S^3 \rightarrow S^2$, die nicht nullhomotop ist.

(ii) Zwischen den Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $f : S^3 \rightarrow S^2$ und den ganzen Zahlen besteht eine bijektive Abbildung ψ .

(iii) Man bezeichnet die ganze Zahl $\psi([f])$ als verallgemeinerten Abbildungsgrad von f . Die Charakterisierung der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $f : S^n \rightarrow S^m$ für beliebige n und m ist ein kompliziertes topologisches Problem, das bis heute noch nicht vollständig gelöst ist (Berechnung aller Homotopiegruppen von Sphären).

18.3.3 Die Fundamentalgruppe

Unser Ziel ist es, das Verhalten von Kurven in einem topologischen Raum in algebraischer Weise durch eine sogenannte Fundamentalgruppe zu beschreiben.

Äquivalenzklassen stetiger Kurven: Es sei M ein topologischer Raum (vgl. 11.2.1). Wir wählen einen festen Punkt x_0 in M und betrachten die Menge $C(x_0)$ aller stetigen Kurven $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$, die im Punkt x_0 anfangen und enden, d. h. $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Für zwei Kurven $\varphi, \psi \in C(x_0)$ schreiben wir genau dann

$$\varphi \cong \psi, \tag{18.6}$$

wenn die Abbildung φ zu ψ homotop ist. Anschaulich bedeutet dies, dass man die Kurve φ stetig in die Kurve ψ (innerhalb von M) deformieren kann.

In (18.6) handelt es sich um eine Äquivalenzrelation. Die zu φ gehörige Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit $[\varphi]$. Ferner sei $\pi_1(M, x_0)$ die Menge aller derartigen Äquivalenzklassen.

Multiplikation für stetige Kurven: Es ist wichtig, dass man $\pi_1(M, x_0)$ in natürlicher Weise mit einer Gruppenstruktur versehen kann. Hierzu erklären wir zunächst eine Multiplikation

⁷Das pull-back $f^* \omega$ von ω wurde in 15.4.3 eingeführt.

$\varphi \times \psi$ zwischen zwei stetigen Kurven $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow M$ durch

$$(\varphi \times \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \psi(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

d. h., die Produktkurve $\varphi \times \psi$ ergibt sich, indem man im Zeitintervall $[0, \frac{1}{2}]$ die Kurve φ und im Zeitintervall $[\frac{1}{2}, 1]$ die Kurve ψ durchläuft. Diese Produktbildung ist mit der Äquivalenzrelation (18.6) verträglich, d. h., aus $\varphi_1 \cong \varphi_2$ und $\psi_1 \cong \psi_2$ folgt die Beziehung $\varphi_1 \times \psi_1 \cong \varphi_2 \times \psi_2$. Folglich ist die Definition der Multiplikation von Äquivalenzklassen

$$[\varphi][\psi] := [\varphi \times \psi]$$

unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Damit wird $\pi_1(M, x_0)$ zu einer Gruppe.

(i) Das *Einselement* ist durch die Klasse $[\varphi]$ gegeben mit der konstanten Kurve φ , d. h. $\varphi(t) := x_0$ für alle $t \in [0, 1]$.

(ii) Das *inverse Element* zu $[\varphi]$ erhalten wir durch $[\varphi]^{-1} = [\psi]$, wobei die Kurve ψ einer Zeitumkehr der Kurve φ entspricht, d. h., es ist $\psi(t) := \varphi(1-t)$ für alle $t \in [0, 1]$.

Definition der Fundamentalgruppe: Der topologische Raum M sei jetzt bogenweise zusammenhängend. Wählt man einen anderen Basispunkt x_1 in M , dann sind die beiden Gruppen $\pi_1(M, x_0)$ und $\pi_1(M, x_1)$ isomorph. In diesem Sinne ist die Gruppe $\pi_1(M, x_0)$ unabhängig vom Basispunkt. Diese Gruppe heißt die Fundamentalgruppe von M und wird kurz mit $\pi_1(M)$ bezeichnet.

Es gibt topologische Räume, in denen die Fundamentalgruppe nicht kommutativ ist.

► **BEISPIEL 1:** Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1)$ der Kreislinie S^1 besteht aus allen Potenzen

$$[\varphi]^n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

wobei φ der (im mathematisch positiven Sinne) orientierten Kreislinie entspricht (Abb. 18.14(a)).

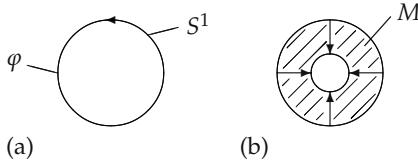


Abb. 18.14

Dagegen gehört $[\varphi]^n$ zu einer Kurve, die S^1 $|n|$ -fach umschlingt. Das Vorzeichen von n gibt an, ob es sich um eine Umschlingung im mathematisch positiven oder negativen Sinne handelt.

Hauptsatz: Homöomorphe (oder allgemeiner homotopieäquivalente) topologische Räume besitzen die gleiche Fundamentalgruppe.

► **BEISPIEL 2:** Ein Kreisring M lässt sich stetig in eine Kreislinie deformieren, wobei die Kreislinie punktweise fest bleibt (Abb. 18.14(b)). Deshalb ist M homotopieäquivalent zu S^1 . Folglich gilt $\pi_1(M) = \pi_1(S^1)$.

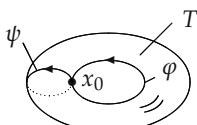


Abb. 18.15

► **BEISPIEL 3:** Es sei T ein Torus. Dann besteht $\pi_1(T)$ aus allen Produkten der Form

$$[\varphi]^n [\psi]^m, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{18.7}$$

mit $[\varphi][\psi] = [\psi][\varphi]$, d.h., $\pi_1(T)$ ist kommutativ. Als Basiskurven φ und ψ kann man einen Breitenkreis und einen Längenkreis wählen (Abb. 18.15). Anschaulich entspricht (18.7) der n -fachen Umschlingung von φ und der m -fachen Umschlingung von ψ unter Berücksichtigung der Orientierung wie in Beispiel 1.

Einfacher Zusammenhang: Ein bogenweise zusammenhängender topologischer Raum ist genau dann einfach zusammenhängend (vgl. 11.2.1), wenn die Fundamentalgruppe trivial ist, d.h. nur aus dem Einselement besteht.

► **BEISPIEL 4:** Jeder kontrahierbare topologische Raum ist einfach zusammenhängend. Ferner ist jede Sphäre S^n mit $n \geq 2$ einfach zusammenhängend.

Nach den Beispielen 1 bis 3 sind jedoch Kreisringe, Kreislinien und Tori nicht einfach zusammenhängend.

Der Fundamentalgruppenfunktor: Durch die Fundamentalgruppe wird in natürlicher Weise ein kovarianter Funktor von der Kategorie der bogenweise zusammenhängenden topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen erzeugt. Explizit wird jeder stetigen Abbildung

$$f : M \rightarrow N$$

zwischen zwei bogenweise zusammenhängenden topologischen Räumen M und N ein Gruppenmorphismus

$$f_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$$

zugeordnet, wobei der Zusammensetzung von stetigen Abbildungen die Zusammensetzung der entsprechenden Gruppenmorphismen entspricht (vgl. 17.2.4).

Dieser Funktor respektiert Homotopien. Genauer gesagt wird homotopen Abbildungen f der gleiche Gruppenmorphismus f_* zugeordnet, und homotopieäquivalenten topologischen Räumen entspricht die gleiche Fundamentalgruppe.

Die moderne Topologie wird vom Begriff des Funktors beherrscht. Dadurch wird die Untersuchung von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen auf viel einfachere algebraische Strukturen zurückgeführt (z.B. Gruppen und Gruppenmorphismen).

► **BEISPIEL 5:** Sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung. Der zugeordnete Gruppenmorphismus $f_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$ bildet nach Beispiel 1 die Klasse $[\varphi]$ in ein Gruppenelement $[\varphi]^n$ mit einer gewissen ganzen Zahl n ab. Definitionsgemäß heißt

$$n = \text{Grad } f$$

der Abbildungsgrad von f . Anschaulich misst n , wie oft das durch f erzeugte Bild der Kurve φ die Kreislinie S^1 umschlingt (vgl. Beispiel 1).

Für glatte Abbildungen f ist diese Definition von $\text{Grad } f$ zu der in 18.3.1 gegebenen Definition äquivalent.

18.3.4 Überlagerungsmannigfaltigkeiten

Hauptsatz: Es sei M eine zusammenhängende n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis (vgl. 15.1.10) und $n \geq 1$. Dann existieren eine *einfach zusammenhängende* n -dimensionale Mannigfaltigkeit N und eine surjektive glatte Abbildung

$$\psi : N \rightarrow M \tag{18.8}$$

mit der Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U von x in M gibt, wobei das Urbild $\psi^{-1}(U)$ gleich der Vereinigung $\bigcup_k V_k$ von höchstens abzählbar vielen offenen

Mengen V_k in N ist und

$$\psi : V_k \rightarrow U$$

für jedes k einen Diffeomorphismus darstellt.

Man bezeichnet N als *Überlagerungsmannigfaltigkeit* von M , und ψ heißt die zugehörige *Überlagerungsabbildung*.

Beim Beweis dieses Satzes von Poincaré wird wesentlich die Fundamentalgruppe von M zur Konstruktion von N benutzt.

► **BEISPIEL:** Für die Kreislinie $M = S^1$ ist die Gerade $N = \mathbb{R}$ eine Überlagerungsmannigfaltigkeit. Die Abbildung ψ in (18.8) ist durch die Exponentialfunktion

$$\psi(\alpha) = e^{i(\alpha - \pi/2)} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

gegeben (Abb. 18.16). Durch die Überlagerungsabbildung ψ wird eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der reellen Funktionen auf der Kreislinie S^1 und der Menge der reellen 2π -periodischen Funktionen auf der Überlagerungsmannigfaltigkeit \mathbb{R} hergestellt.

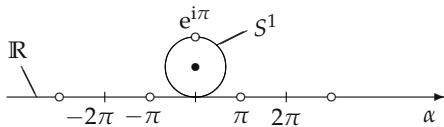


Abb. 18.16

Überlagerungsmannigfaltigkeiten wurden von Poincaré im Zusammenhang mit seinem langen Ringen um das Uniformisierungstheorem für Riemannsche Flächen eingeführt (vgl. 19.8.3). Insbesondere lassen sich elliptische (und allgemeinere Abelsche Integrale) sehr elegant behandeln, indem man Wege auf der zugehörigen Riemannschen Fläche zu Wegen auf der universellen Überlagerungsfläche liftet (vgl. 19.8.1).

Überlagerungsmannigfaltigkeiten spielen ferner eine zentrale Rolle in der globalen Theorie der Lieschen Gruppen (vgl. die universelle Überlagerungsgruppe in 17.5.3). Beispielsweise beruht die Existenz des Elektronenspins auf der Tatsache, dass die eigentliche Drehgruppe $SO(3)$ von der einfach zusammenhängenden Gruppe $SU(2)$ überlagert wird und beide Gruppen die gleiche Liealgebra besitzen.

18.4 Der anschauliche Hintergrund der Dualität zwischen Homologie und Kohomologie

Die folgenden geometrischen Überlegungen werden in den beiden nächsten Abschnitten streng begründet.

In der komplexen Funktionentheorie kann man die Berechnung von Kurvenintegralen wesentlich vereinfachen, indem man die Kurven zerlegt und die Wegunabhängigkeit des Integrals (für holomorphe Funktionen) in einfach zusammenhängenden Gebieten ausnutzt. Diese Methode wollen wir weitgehend auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Die Begriffe Homologie und Kohomologie sind auf das engste mit der Lösung der Differentialgleichung

$$d\omega = \mu \quad \text{auf } M \tag{18.9}$$

verbunden, wobei M eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit darstellt. Gegeben ist die q -Form μ , gesucht wird die $(q-1)$ -Form ω mit $q = 1, \dots, n$. Man nennt μ genau dann einen Korand, wenn die Gleichung (18.9) eine Lösung besitzt. Für (18.9) gibt es zwei wichtige *notwendige* Lösbarkeitsbedingungen:

- (i) $d\mu = 0$ (Kohomologie);
- (ii) $\int_c \mu = 0$ für alle q -Zyklen c von M (Homologie).

Dabei verstehen wir unter einem q -Zyklus grob gesprochen eine q -dimensionale Teilmenge von M , die keinen Rand hat, d. h. $\partial c = 0$. Beispielsweise sind 0-Zyklen, 1-Zyklen sowie 2-Zyklen der Reihe nach Punkte, geschlossene Kurven und geschlossene zweidimensionale Flächen. Da bei der Integration die Orientierung eine Rolle spielt, werden Zyklen stets als orientiert vorausgesetzt.

Die Bedingung (i) folgt aus $d(d\omega) = 0$. Dagegen ergibt sich (ii) wegen $\partial c = 0$ aus dem Satz von Stokes:

$$\int_c \mu = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0.$$

Die fundamentale Frage lautet: Sind die Bedingungen (i), (ii) auch hinreichend für die Lösbarkeit von (18.9)? Tatsächlich gilt:

(a) Die Bedingung (i) ist hinreichend, falls die q -te Kohomologiegruppe von M trivial ist, d. h. $H^q(M) = \{0\}$.

(b) Die Bedingungen (i) und (ii) zusammen sind stets hinreichend.

Dabei ist $H^q(M)$ ein reeller linearer Raum, und $\beta_q = \dim H^q(M)$ heißt die q -te Bettische Zahl der Mannigfaltigkeit M .

Homologie: Die Bedingung (ii) sieht auf den ersten Blick sehr unhandlich aus, weil unendlich viele Lösbarkeitsbedingungen auftreten. Tatsächlich kann man (ii) in vielen wichtigen Fällen durch endlich viele Lösbarkeitsbedingungen ersetzen:

$$(ii^*) \quad \int_{c_j} \mu = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, \beta_q.$$

Hier sind c_1, c_2, \dots geeignete gewählte Basiszyklen von M . Um das zu motivieren, bezeichnen wir nach Poincaré zwei q -Zyklen c und d genau dann als *homolog* und schreiben

$$c \sim d,$$

wenn sich c und d nur um einen Rand $\partial\Omega$ einer Menge Ω in M unterscheiden, d. h., es gilt $c = d + \partial\Omega$. Diese Summe ist im Sinne von

$$\int_c \mu = \int_d \mu + \int_{\partial\Omega} \mu \tag{18.10}$$

aufzufassen (Zusammensetzung von orientierten Kurven usw.). Aus dem Stokesschen Satz folgt wegen $\partial(\partial\Omega) = 0$ sofort

$$\int_{\partial\Omega} \mu = \int_{\partial\Omega} d\omega = \int_{\partial(\partial\Omega)} \omega = 0. \tag{18.11}$$

Somit gilt

$$\int_c \mu = \int_d \mu.$$

Das heißt:

Homologe Zyklen liefern das gleiche Integral über einen Korand μ .

Folglich braucht man in (ii) nur ein System c_1, \dots von q -Zyklen zu verwenden, die bezüglich der Homologierelation (linear) unabhängig sind. Das liefert (ii*).

Ein Zyklus c heißt genau dann *nullhomolog* ($c \sim 0$), wenn c ein Rand ist. Solche Zyklen sind von unserem Standpunkt aus unwesentlich, weil nach (18.11) das Integral über nullhomologe Zyklen $c = \partial\Omega$ verschwindet. Deshalb fordern wir zusätzlich, dass keiner der Basiszyklen c_j nullhomolog ist.

Dualität: Setzen wir $\langle G, \omega \rangle := \int_G \omega$, dann lautet der Stokesche Satz $\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$:

$$\langle \partial c, \omega \rangle = \langle c, d\omega \rangle.$$

Das bedeutet, dass der Randoperator ∂ zum sogenannten Korandoperator d dual ist. Die obigen Überlegungen basierten auf den fundamentalen Relationen $\partial(\partial\Omega) = 0$ und $d(d\omega) = 0$, kurz

$$\partial^2 = 0 \quad \text{und} \quad d^2 = 0.$$

Kohomologie: Parallel zur Homologie nennen wir zwei q -Formen ω und α kohomolog, wenn sie sich um einen Korand unterscheiden, d.h., es gilt $\omega = \alpha + d\beta$.

Besitzt die Gleichung $d\omega = \mu$ für gegebenes μ eine Lösung ω , dann ist μ ein Korand und wegen $d\mu = 0$ gleichzeitig ein Kozyklus.

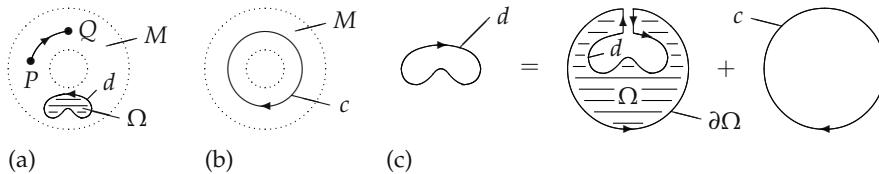


Abb. 18.17

► **BEISPIEL 1:** Es sei M ein offener Kreisring im \mathbb{R}^2 . Die beiden Punkte P und Q in Abb. 18.17(a) sind homolog, weil sie sich durch eine (orientierte) Kurve verbinden lassen. Deshalb besitzt M bis auf Homologie genau einen⁸ 0-Zyklus (z. B. P).

Der 1-Zyklus d in Abb. 18.17(a) ist wegen $d = \partial\Omega$ ein Rand, also $d \sim 0$. Dagegen ist der 1-Zyklus c in Abb. 18.17(b) kein Rand. Alle anderen 1-Zyklen sind (bis auf die Orientierung) nullhomolog oder zu c homolog. Man benutze dabei (wie in der komplexen Funktionentheorie) Kurvenzerlegungen wie in Abb. 18.17(c) usw. Somit besitzt der Kreisring M genau einen 1-Basiszyklus (z. B. c).

Als physikalische Anwendung betrachten wir die Gleichung

$$\mathbf{grad} U = \mathbf{K} \quad \text{im Kreisring } M. \tag{18.12}$$

Das bedeutet, für ein gegebenes glattes Kraftfeld \mathbf{K} suchen wir ein Potential U . Das Problem (18.12) besitzt genau dann eine Lösung U , wenn die beiden Bedingungen

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = 0 \quad \text{in } M \tag{18.13}$$

und

$$\int_c \mathbf{K} dx = 0 \tag{18.14}$$

⁸Allgemein ist die Anzahl der bis auf Homologie vorhandenen 0-Zyklen eines topologischen Raumes T gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von T (bezüglich des bogenweisen Zusammenhangs).

erfüllt sind. Die Bedingung (18.13) folgt aus (18.12) durch Anwendung von **rot**, und (18.14) erhält man durch Integration von (18.12). Um den Zusammenhang mit den obigen allgemeinen Überlegungen herzustellen, schreiben wir $\omega = U$ (0-Form) und $\mu = K_1 dx_1 + K_2 dx_2$ (1-Form). Gleichung (18.12) lautet dann $d\omega = \mu$ (vgl. 10.2.7.3). Die Lösbarkeitsbedingung $d\mu = 0$ entspricht (18.13), während die Lösbarkeitsbedingung (ii*), d.h. $\int_C \mu = 0$, mit (18.14) identisch ist.

► **BEISPIEL 2:** Ersetzen wir den Kreisring M durch eine offene Kreisscheibe, dann ist jeder 1-Zyklus nullhomolog. Deshalb entfällt hier die integrale Lösbarkeitsbedingung (18.14).

18.5 De Rhamsche Kohomologie

Kozyklen und Koränder: Es sei M eine reelle Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 0$, und μ sei eine q -Form auf M mit $q = 1, \dots, n$.

(i) μ heißt genau dann ein q -Kozyklus, wenn gilt:

$$d\mu = 0 \quad \text{auf } M.$$

Die Menge aller q -Kozyklen auf M bezeichnen wir mit $Z^q(M)$.

(ii) μ ist genau dann ein q -Korand, wenn es eine $(q-1)$ -Form ω gibt mit

$$\mu = d\omega \quad \text{auf } M.$$

Durch $R^q(M)$ bezeichnen wir die Menge aller q -Koränder von M . Wir setzen dabei $R^0(M) := \{0\}$.

Wegen $d(d\omega) = 0$ erhält man die fundamentale Beziehung

$$R^q(M) \subseteq Z^q(M), \quad q = 0, 1, \dots, n,$$

d.h., jeder Korand ist auch ein Kozyklus. Die q -Formen auf M bilden bezüglich $a\mu + bv$ für $a, b \in \mathbb{R}$ einen linearen Raum. Ferner ist $R^q(M)$ ein linearer Teilraum des linearen reellen Raumes $Z^q(M)$.

Definition der Kohomologiegruppen: Der Faktorraum $H^q(M) := Z^q(M)/R^q(M)$ heißt die q -te de Rhamsche Kohomologiegruppe von M .

Der Begriff des Faktorraumes wurde in 11.2.3 eingeführt. Explizit besteht $H^q(M)$ für $q = 1, \dots, n$ aus allen Klassen

$$[\mu] = \{\mu + d\alpha : \alpha \text{ beliebige } (q-1)\text{-Form}\},$$

wobei μ eine q -Form ist mit $d\mu = 0$. Für $q = 0$ entfällt $d\alpha$. Durch

$$a[\mu] + b[v] = [a\mu + bv] \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}$$

wird $H^q(M)$ zu einem linearen reellen Raum. Diese lineare Operation hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten von $[.]$ ab. Die Dimension

$$\beta_q := \dim H^q(M)$$

heißt die q -te Bettische Zahl von M . Die Eulersche Charakteristik von M wird durch

$$\chi(M) := \sum_{q=0}^n (-1)^q \beta_q$$

definiert, falls alle Bettischen Zahlen endlich sind. Schließlich setzen wir $H^q(M) = \{0\}$ für $q > n$.

Kohomologe Kozyklen: Nach 18.4 heißen zwei q -Kozyklen μ und ν genau dann *kohomolog*, d.h. $\mu \sim \nu$, wenn sie sich um einen q -Korand unterscheiden, also $\nu = \mu + d\alpha$. Das ist eine Äquivalenzrelation für q -Kozyklen. Die q -te Kohomologiegruppe $H^q(M)$ besteht genau aus den zugehörigen Äquivalenzklassen $[\mu]$.

► **BEISPIEL 1:** Die nullte Kohomologiegruppe $H^0(M)$ besteht genau aus allen glatten Funktionen $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d\mu = 0$, d.h., μ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von M konstant. Somit gilt:

Die nullte Bettische Zahl β_0 ist gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M .

(a) *Intervalle:* Ist $M := (a, b)$, dann gilt $\beta_0 = 1$ wegen des Zusammenhangs von (a, b) . Das bedeutet $H^0 = \mathbb{R}$.

Wir wollen zeigen, dass $H^1 = \{0\}$ gilt, also $\beta_1 = 0$. Tatsächlich ist jede 1-Form $\omega = f(x) dx$ wegen $d\omega = 0$ ein 1-Zyklus. Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f(x) = \mu'(x) \quad \text{auf } M \tag{18.15}$$

für $\mu(x) := \int_c^x f(t) dt$. Das bedeutet $\omega = d\mu$. Folglich ist jeder 1-Zyklus auch ein 1-Korand. Aus $Z^1 = R^1$ folgt $H^1 = Z^1 / R^1 = \{0\}$.

Die genauere Analyse zeigt:

Die de Rhamsche Kohomologie stellt eine tiefliegende Verallgemeinerung des klassischen Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung dar.

(b) *Kreislinie:* Wir wählen jetzt $M = S^1$. Wegen des Zusammenhangs von S^1 ist $\beta_0 = 1$. Wir zeigen $\beta_1 = 1$, also $H^1 = \mathbb{R}$. Tatsächlich hat die Gleichung (18.15) im vorliegenden Fall nur genau dann eine Lösung, wenn

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$$

gilt. Das ist genau eine Lösbarkeitsbedingung für die 1-Koränder. Somit ist $\text{codim } R^1 = 1$. Das bedeutet $\beta_1 = \dim Z^1 / R^1 = \text{codim } R^1 = 1$.

Das folgende Beispiel verallgemeinert unser Resultat (a) für Intervalle auf allgemeine kontrahierbare Mannigfaltigkeiten.

► **BEISPIEL 2:** Ist M kontrahierbar, dann gilt

$$H^q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } q = 0, \\ \{0\} & \text{für } q > 0. \end{cases} \tag{18.16}$$

Daraus folgt $\beta_0 = 1$ und $\beta_q = 0$ für $q \geq 1$ sowie $\chi(M) = 1$.

Nach (18.16) sind alle q -Kozyklen auch q -Koränder, falls $q = 1, \dots, n$. Daraus ergibt sich die folgende wichtige Existenzaussage.

Lemma von Poincaré: Ist M kontrahierbar, dann besitzt die Gleichung

$$\mu = d\omega \quad \text{auf } M \tag{18.17}$$

für eine gegebene q -Form μ mit $q = 1, \dots, n$ genau dann eine Lösung ω , wenn $d\mu = 0$ gilt. Die Lösungsmenge von (18.17) ist dann durch

$$\omega = \omega_{\text{spez}} + d\alpha$$

gegeben, wobei ω_{spez} eine spezielle Lösung von (18.17) darstellt und α eine beliebige $(q-2)$ -Form ist. Im Fall $q=1$ muss man $d\alpha$ durch eine Konstante ersetzen.

► **BEISPIEL 3:** Für die Sphäre S^n mit $n \geq 1$ gilt

$$H^q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } q = 0, n, \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Vergleich mit Beispiel 2 zeigt, dass S^n nicht kontrahierbar ist. Ferner hat man $\beta_0 = \beta_n = 1$, $\beta_q = 0$ für $q = 1, \dots, n-1$ und $\chi(S^n) = \beta_0 + (-1)^n \beta_n = 1 + (-1)^n$.

► **BEISPIEL 4:** Für eine kompakte orientierte zusammenhängende zweidimensionale reelle Mannigfaltigkeit M vom Geschlecht p gilt

$$H^q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } q = 0, 2, \\ \mathbb{R}^{2p} & \text{für } q = 1. \end{cases}$$

Daraus folgt $\beta_0 = \beta_2 = 1$, $\beta_1 = 2p$ und $\chi(M) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 2 - 2p$. Eine derartige Mannigfaltigkeit ist nach Beispiel 2 nicht kontrahierbar. Im Spezialfall des Torus M hat man $p=1$.

► **BEISPIEL 5:** Es sei M eine orientierte zusammenhängende reelle Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$. Dann gilt $H^0(M) = \mathbb{R}$. Ferner hat man

$$H^n(M) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } M \text{ kompakt ist,} \\ \{0\}, & \text{falls } M \text{ nicht kompakt ist.} \end{cases}$$

Eine derartige Mannigfaltigkeit ist im kompakten Fall (nach Beispiel 2) nicht kontrahierbar.

Poincarésche Dualität für die Bettizahlen: Für eine kompakte reelle Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 0$ sind alle Bettischen Zahlen endlich. Ist M zusätzlich orientiert, dann gilt

$$\beta_q = \beta_{n-q} \quad \text{für } q = 1, \dots, n.$$

Hauptsatz: Zwei homöomorphe (oder allgemeiner zwei homotopieäquivalente) endlichdimensionale reelle Mannigfaltigkeiten besitzen die gleichen de Rhamschen Kohomologiegruppen.

Deshalb sind die Bettischen Zahlen und die Eulersche Charakteristik einer Mannigfaltigkeit topologische Invarianten; sie ändern sich auch nicht bei Homotopieäquivalenz.

Definition: Es sei T ein topologischer Raum, der zu einer endlichdimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M homöomorph (oder allgemeiner homotopieäquivalent) ist. Dann ordnen wir T die de Rhamschen Kohomologiegruppen von M zu.

Nach dem Hauptsatz ist diese Definition von der Wahl des Repräsentanten M unabhängig.

► **BEISPIEL 6:** Jeder kontrahierbare topologische Raum ist zu einem Punkt homotopieäquivalent und besitzt deshalb die de Rhamschen Kohomologiegruppen von Beispiel 2, d.h. $\beta_0 = 1$ und $\beta_q = 0$ für $q \geq 1$.

► **BEISPIEL 7:** Ein offener oder abgeschlossener Kreisring K ist zu der Kreislinie S^1 homotopieäquivalent. Deshalb gilt $H^q(K) = H^q(S^1)$ für alle q .

► **BEISPIEL 8:** Das Gebiet G des \mathbb{R}^2 besitze k Löcher⁹ mit $k \geq 0$ (Abb. 18.18). Dann gilt

$$H^q(G) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } q = 0, \\ \mathbb{R}^k & \text{für } q = 1, \\ \{0\} & \text{für } q \geq 2. \end{cases}$$

Deshalb ist $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = k$, $\beta_2 = 0$ und $\chi(G) = 1 - k$.

⁹Genauer: G sei zu einer Menge des \mathbb{R}^2 homöomorph, die aus einer offenen Kreisscheibe K (oder aus dem \mathbb{R}^2) durch Wegnahme von k abgeschlossenen Kreisscheiben entsteht, die alle zu K gehören und paarweise disjunkt sind.

(a) $k = 0$ (b) $k = 1$ (c) $k = 2$

Abb. 18.18

Die gleichen Kohomologiegruppen erhält man für den Abschluss von G .

Anschauliche Interpretation: In allen obigen Beispielen besitzen die Bettizahlen im Sinne von 18.4 die folgende anschauliche Bedeutung:

β_q ist gleich der Anzahl der bis auf Homologie wesentlichen q -Zyklen.

Auf diesem Weg wurden die Bettischen Zahlen ursprünglich eingeführt.

In Beispiel 8 enthält G genau k wesentliche 1-Zyklen. Das sind geschlossene Kurven in G , die jeweils genau ein Loch umkreisen. Deshalb ist $\beta_1 = k$. Ferner enthält G keinen 2-Zyklus (geschlossene zweidimensionale Fläche). Deshalb ist $\beta_2 = 0$.

Anf der Sphäre S^2 ist jeder 1-Zyklus (geschlossene Kurve) ein Rand, also nullhomolog. Folglich gilt $\beta_1 = 0$. Ferner enthält S^2 genau einen wesentlichen 2-Zyklus (geschlossene Fläche). Das ist S^2 selbst. Deshalb gilt $\beta_2 = 1$.

Der Torus T enthält bis auf Homologie genau zwei 1-Zyklen (einen Breitenkreis und einen Längenkreis), also gilt $\beta_1 = 2$. Der einzige wesentliche 2-Zyklus ist T selbst. Das ergibt $\beta_2 = 1$.

Die Eulersche Charakteristik kann man anschaulich in einfacher Weise durch die Methode der Zellzerlegung in 18.1 gewinnen.

18.6 Homologie

Die gesamte Homologietheorie basiert auf einer Verknüpfung von Geometrie und Algebra mit Hilfe eines Randoperators, der geometrischen Gebilden einen orientierten Rand zuordnet. Die einfache Grundidee wird bereits am Beispiel eines Dreiecks deutlich.

18.6.1 Die Homologie eines Dreiecks

Wir betrachten ein abgeschlossenes Dreieck mit den Eckpunkten P_0, P_1, P_2 , wobei das Dreieck durch die Reihenfolge der Punkte orientiert ist (vgl. Abb. 18.19). Den Randoperator ∂ definieren wir durch

$$\partial(P_0P_1P_2) := (P_0P_1) + (P_1P_2) + (P_2P_0),$$

wobei $(P_0P_1P_2)$ das orientierte Dreieck und (P_0P_1) die orientierte Strecke von P_0 nach P_1 bezeichnet. Ferner setzen wir

$$\partial(P_iP_j) := P_j - P_i \quad \text{und} \quad \partial P_i = 0.$$

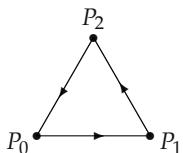


Abb. 18.19

Für beliebige reelle Zahlen a, b, c betrachten wir die folgenden Linearkombinationen:

$$\begin{aligned} aP_0 + bP_1 + cP_2 & \quad (0\text{-Kette}), \\ a(P_0P_1) + b(P_1P_2) + c(P_2P_0) & \quad (1\text{-Kette}), \\ a(P_0P_1P_2) & \quad (2\text{-Kette}). \end{aligned}$$

Der Randoperator für Ketten ergibt sich durch lineare Fortsetzung. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \partial(a(P_0P_1) + b(P_1P_2)) &= a\partial(P_0P_1) + b\partial(P_1P_2) \\ &= a(P_1 - P_0) + b(P_2 - P_1) = -aP_0 + (a - b)P_1 + bP_2. \end{aligned}$$

Man prüft leicht den folgenden Satz nach.

Satz 1: Es gilt $\partial(\partial C) = 0$ für jede Kette C .

Über Ketten kann man in natürlicher Weise integrieren. Zum Beispiel setzen wir

$$\int_C \omega := a \int_{(P_0P_1)} \omega + b \int_{(P_1P_2)} \omega$$

für die 1-Kette $C = a(P_0P_1) + b(P_1P_2)$.

Zyklen und Ränder: Es sei C eine q -Kette.

(a) C heißt genau dann ein q -Zyklus, wenn $\partial C = 0$ gilt. Die Menge aller dieser q -Zyklen bezeichnen wir mit Z_q .

(b) C heißt genau dann ein q -Rand, wenn $C = \partial D$ für eine gewisse $(q+1)$ -Kette D gilt. Die Menge aller q -Ränder bezeichnen wir mit R_q . Für $q = 2$ setzen wir $R_2 := \{0\}$.

Aus $C = \partial D$ folgt $\partial C = \partial(\partial D) = 0$ nach Satz 1. Deshalb ist jeder Rand ein Zyklus. Das ergibt die folgende Aussage.

Satz 2: R_q ist ein linearer Teilraum des linearen Raumes Z_q .

Definition der Homologiegruppen: Der Faktorraum $H_q := Z_q / R_q$ heißt die q -te Homologiegruppe des Dreiecks (mit reellen Koeffizienten).

Berechnung der Homologiegruppen: Ein endlichdimensionaler linearer Raum ist bis auf Isomorphie durch seine Dimension bestimmt. Zur Berechnung der Homologiegruppen genügt es deshalb, die Zahl $m := \dim Z_q - \dim R_q$ zu kennen. Dann ist $m = \dim H_q$ und $H_q = \mathbb{R}^m$ (bis auf Isomorphie).

Haupsatz: Es gilt

$$H_q = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } q = 0, \\ \{0\} & \text{für } q = 1, 2. \end{cases} \quad (18.18)$$

Ferner setzen wir $H_q := \{0\}$ für $q = 3, 4, \dots$

Ein Dreieck ist ein kontrahierbarer topologischer Raum. Nach Beispiel 6 in 18.5 gilt

$$H_q = H^q \quad \text{für alle } q,$$

d.h., die Homologiegruppen eines Dreiecks stimmen mit seinen de Rhamschen Kohomologiegruppen überein. Das ist kein Zufall, sondern Spezialfall eines tiefliegenden topologischen Resultats (vgl. den Haupsatz in 18.6.3).

Beweis des Haupsatzes: Fall 1: $q = 2$. Eine 2-Kette $C = a(P_0P_1P_2)$ ist genau dann ein Zyklus, wenn $\partial C = 0$ gilt, d.h.

$$a[(P_0P_1) + (P_1P_2) + (P_2P_0)] = 0, \quad \text{also } a = 0.$$

Das bedeutet $\dim Z_2 = 0$. Ferner ist $\dim R_2 = 0$ nach Definition, also erhalten wir $\dim H_2 = \dim Z_2 - \dim R_2 = 0$.

Fall 2: $q = 1$. Eine 1-Kette $C = a(P_0P_1) + b(P_1P_2) + c(P_2P_0)$ ist genau dann ein Zyklus, wenn $\partial C = 0$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned}\partial C &= a(P_1 - P_0) + b(P_2 - P_1) + c(P_0 - P_2) \\ &= (c - a)P_0 + (a - b)P_1 + (b - c)P_2\end{aligned}\tag{18.19}$$

heißt das $c - a = a - b = b - c = 0$, also $a = b = c$. Das ergibt

$$C = a[(P_0P_1) + (P_1P_2) + (P_2P_0)].$$

Anschaulich entspricht das dem a -fachen der Randkurve des Dreiecks in Abb. 18.19. Wegen $C = \partial(a(P_0P_1P_2))$ ist jeder 1-Zyklus ein Rand. Das bedeutet $Z_1 = R_1$ und somit $\dim H_1 = \dim Z_1 - \dim R_1 = 0$.

Fall 3: $q = 0$. Jede 0-Kette

$$D = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2\tag{18.20}$$

ist wegen $\partial D = 0$ ein Zyklus, d.h. $\dim Z_0 = 3$. Es wird angenommen, D ist ein Rand, also $D = \partial C$. Aus (18.19) und (18.20) folgt

$$\alpha = c - a, \quad \beta = a - b, \quad \gamma = b - c.$$

Ein 0-Zyklus D der Form (18.20) ist deshalb genau dann ein Rand, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 0$ gilt. Daraus folgt $\dim R_0 = 2$ und $\dim H_0 = \dim Z_0 - \dim R_0 = 1$.

18.6.2 Singuläre Homologie topologischer Räume

Unter einem n -Simplex versteht man für $n = 0, 1, 2, 3$ der Reihe nach einen Punkt, eine abgeschlossene Strecke, ein abgeschlossenes Dreieck, ein abgeschlossenes Tetraeder. Allgemein besteht ein n -Simplex aus der abgeschlossenen konvexen Hülle von $n + 1$ Punkten im \mathbb{R}^n , die nicht alle in einem echten linearen Teilraum liegen. Homöomorphe Bilder von n -Simplexen heißen topologische n -Simplexe.

In der klassischen Topologie versuchte man, topologische Räume aus topologischen Simplizes aufzubauen und die Homologie parallel zu 18.6.1 zu berechnen. Dieser Zugang versagte jedoch für allgemeine topologische Räume. Deshalb verwendet man heute sogenannte singuläre Simplizes. Das sind stetige Abbildungen von Simplizes in topologische Räume. Eine derartige Bildmenge kann eine sehr komplizierte Struktur besitzen. Entscheidend ist jedoch, dass man mit singulären Simplizes sehr bequem rechnen kann und die topologische Invarianz der Homologiegruppen sich sehr einfach ergibt, im Unterschied zum klassischen Zugang.

Singuläre Simplizes: Unter einem q -Standardsimplex mit $q = 0, 1, 2, \dots$ verstehen wir die Menge

$$\Delta^q := \{x \in \mathbb{R}^{q+1} : x_j \geq 0, x_0 + x_1 + \dots + x_q = 1, j = 0, 1, \dots, q\}.$$

Ist T ein topologischer Raum, dann heißt jede stetige Abbildung

$$f : \Delta^q \rightarrow T$$

ein singuläres q -Simplex von T . Den Randoperator ∂ erklären wir durch

$$\partial f := \sum_{j=0}^q (-1)^j f^{(j)}$$

mit $f^{(j)}(x_0, \dots, x_{q-1}) := f(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{q-1})$. Anschaulich ist jedes $f^{(j)}$ ein singuläres $(q-1)$ -Randsimplex von f , das mit einer Orientierung versehen wird.

Singuläre q -Ketten: Unter einer derartigen Kette verstehen wir eine beliebige reelle Linear-kombination

$$C := a_1 f_1 + \dots + a_m f_m, \quad a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}, \quad (18.21)$$

von singulären q -Simplizes f_1, \dots, f_m . Ferner setzen wir

$$\partial C := a_1 \partial f_1 + \dots + a_m \partial f_m.$$

Ist T eine Mannigfaltigkeit, dann heißt C eine glatte singuläre Kette, falls alle Abbildungen f_j glatt sind. Über solche Ketten kann man vermöge der folgenden Definition integrieren:

$$\int_C \omega := a_1 \int_{f_1} \omega + \dots + a_m \int_{f_m} \omega.$$

Dabei setzen wir

$$\int_{f_j} \omega := \int_{\Delta^q} f_j^* \omega,$$

d. h., wir integrieren über das Standardsimplex Δ^q und transformieren die Form ω vermöge f_j auf Δ^q .

Integralsatz von Stokes für glatte Ketten auf Mannigfaltigkeiten: Es gilt

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

Singuläre Zyklen und singuläre Ränder: Es sei C eine singuläre q -Kette.

(i) C heißt genau dann ein singulärer q -Zyklus, wenn $\partial C = 0$ gilt. Die Menge aller derartigen Zyklen wird mit $Z_q(T)$ bezeichnet.

(ii) C heißt genau dann ein singulärer q -Rand, wenn für eine gewisse $(q+1)$ -Kette D die Beziehung $C = \partial D$ gilt. Die Menge aller derartigen Ränder wird mit $R_q(T)$ bezeichnet.

Es gilt $R_q \subseteq Z_q$ für alle q .

Singuläre Homologiegruppen: Der Faktorraum $H_q(T) := Z_q(T)/R_q(T)$ heißt die q -te singuläre Homologiegruppe des topologischen Raumes T (mit reellen Koeffizienten).

$H_q(T)$ ist ein linearer reeller Raum. Explizit besteht $H_q(T)$ aus den Homologieklassen

$$[C] := \{C + \partial D : D \text{ beliebige singuläre } (q+1)\text{-Kette}\}.$$

Die Linearkombinationen der Homologieklassen ergeben sich durch

$$a_1 [C_1] + a_2 [C_2] = [a_1 C_1 + a_2 C_2], \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

wobei diese Definition von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist.

Hauptsatz: Zwei homöomorphe (oder allgemeiner zwei homotopieäquivalente) topologische Räume besitzen die gleichen singulären Homologiegruppen (bis auf Isomorphie).

Der Homologiefunktör: Durch die singulären Homologiegruppen wird ein kovarianter Funktör von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der linearen reellen Räume erzeugt (vgl. 17.2.4). Das heißt, jeder stetigen Abbildung

$$f : T \rightarrow S$$

wird eine lineare Abbildung

$$f_* : H_q(T) \rightarrow H_q(S), \quad q = 0, 1, \dots,$$

zugeordnet, wobei der Zusammensetzung von stetigen Abbildungen die Zusammensetzung der zugehörigen linearen Abbildungen entspricht. Dieser Funktor respektiert die Homotopie, d. h., homotopen stetigen Abbildungen wird die gleiche lineare Abbildung zugeordnet.

Der obige Hauptsatz ist eine einfache Konsequenz aus der Existenz des Homologiefunktors.

18.6.3 Singuläre Kohomologie topologischer Räume

Definition: Die q -te singuläre Kohomologiegruppe (mit reellen Koeffizienten) des topologischen Raumes T ist gegeben durch den dualen Raum

$$H_*^q(T) := H_q(T)^*,$$

d. h., $H_*^q(T)$ besteht aus allen linearen Abbildungen $\varphi : H_q(T) \rightarrow \mathbb{R}$.

Der Kohomologiefunktor ergibt sich, indem man auf den Homologiefunktor den Dualitätsfunktor anwendet (vgl. Beispiel 13 in 17.2.4).

Hauptsatz: Es sei M eine reelle Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 0$. Dann sind die de Rhamschen Kohomologiegruppen zu den singulären Kohomologiegruppen isomorph.

Ist die Bettische Zahl β_q endlich, dann hat man

$$H_q(M) = H_*^q(M) = H^q(M) = \mathbb{R}^{\beta_q}.$$

Das gilt speziell für kompakte Mannigfaltigkeiten und kontrahierbare topologische Räume.

18.6.4 Der Satz von de Rham über Differentialgleichungen für Formen auf Mannigfaltigkeiten

Es sei M eine kompakte reelle Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$. Wir wollen die Gleichung

$$d\omega = \mu \quad \text{auf } M \tag{18.22}$$

lösen. Gegeben ist die glatte q -Form μ mit $q = 1, \dots, n$. Die glatte $(q-1)$ -Form ω wird gesucht. Das Lösungsverhalten hängt von der Bettizahl β_q der Mannigfaltigkeit M ab.

Erster Hauptsatz: Ist $\beta_q = 0$, so besitzt (18.22) genau dann eine Lösung, wenn $d\mu = 0$ gilt.

Zweiter Hauptsatz: Im Fall $\beta_q \neq 0$ wählen wir glatte singuläre q -Zyklen C_1, \dots, C_{β_q} von M , so dass die zugehörigen Homologieklassen $[C_j]$, $j = 1, \dots, \beta_q$, linear unabhängig sind. Unter dieser Voraussetzung besitzt (18.22) genau dann eine Lösung, wenn $d\mu = 0$ ist und

$$\int_{C_j} \mu = 0, \quad j = 1, \dots, \beta_q,$$

gilt, d. h., die Perioden von μ sind alle gleich null.

Korollar: Zu vorgegebenen reellen Zahlen p_1, \dots, p_{β_q} , gibt es stets eine q -Form μ mit $d\mu = 0$ und

$$\int_{C_j} \mu = p_j, \quad j = 1, \dots, \beta_q.$$

Die Zahlen p_j heißen die Perioden von μ .

Wählen wir speziell die q -Formen $\mu_1, \dots, \mu_{\beta_q}$, so dass $d\mu_j = 0$ für alle j gilt und die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{C_j} \mu_k = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, \beta_q,$$

erfüllt sind, dann bilden die Kohomologieklassen $[\mu_1], \dots, [\mu_{\beta_q}]$ eine Basis der de Rhamschen Kohomologiegruppe $H^q(M)$.

Dieses fundamentale Theorem verallgemeinert die klassischen Riemannschen Resultate über die Perioden Abelscher (z. B. elliptischer) Integrale.

► **BEISPIEL:** Ist M ein Torus, dann gilt $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = 1$.

Im Fall $q = 1$ wählen wir einen Längenkreis C_1 und einen Breitenkreis C_2 (Abb. 18.20). Dann sind $[C_1]$ und $[C_2]$ linear unabhängig.

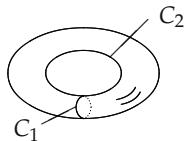


Abb. 18.20

Im Fall $q = 2$ wählen wir $C_1 = M$.

Dann können wir den zweiten Hauptsatz und das Korollar anwenden. Insbesondere gibt es auf dem Torus zwei Perioden.

18.7 Exakte Sequenzen

Um Aussagen über topologische Eigenschaften von geometrischen Gebilden zu erhalten, muss man ihre Homotopiegruppen, Homologiegruppen und Kohomologiegruppen berechnen. Das ist die höchst nichttriviale Grundaufgabe der algebraischen Topologie. Der klassische Apparat hierzu war sehr schwerfällig. In der modernen Topologie benutzt man die elegante Methode der exakten Sequenzen (vgl. 17.2.4). Der Vorteil dieser Methode, die in den vierziger Jahren als „homologische Algebra“ entwickelt wurde, besteht darin, dass man die konkrete Konstruktion der Homotopie-, Homologie- und Kohomologiegruppen gar nicht zu kennen braucht. Man verwendet lediglich die Exaktheit gewisser Sequenzen und die beiden folgenden elementaren Tatsachen:

(i) Die Exaktheit der Sequenz¹⁰

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$$

ist äquivalent zu der Isomorphie $A = B$.

(ii) Die Exaktheit der Sequenz

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

ist äquivalent zu der Isomorphie $B = A \oplus C$.

¹⁰Anstelle von $\{0\}$ schreiben wir kurz 0. Mit A, B, C bezeichnen wir lineare Räume (oder allgemeiner additive Gruppen).

18.7.1 Die Mayer–Vietoris-Sequenz

Hauptsatz: Sind V und W Teilmengen eines topologischen Raumes T mit

$$T = \text{int } V \cup \text{int } W,$$

dann ist für $q = 0, 1, 2, \dots$ die folgende Sequenz exakt.¹¹

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow \mathbb{H}_{q+1}(V \cap W) \rightarrow \mathbb{H}_{q+1}(V) \oplus \mathbb{H}_{q+1}(W) \rightarrow \mathbb{H}_{q+1}(T) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbb{H}_q(V \cap W) \rightarrow \mathbb{H}_q(V) \oplus \mathbb{H}_q(W) \rightarrow \mathbb{H}_q(T) \rightarrow \cdots \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbb{H}_0(V \cap W) \rightarrow \mathbb{H}_0(V) \oplus \mathbb{H}_0(W) \rightarrow \mathbb{H}_0(T). \end{aligned} \quad (18.23)$$

Ist $V \cap W \neq \emptyset$, dann darf man in (18.23) überall \mathbb{H}_0 durch die entsprechende reduzierte Homologiegruppe \mathbb{H}_{r0} ersetzen.

Bei Anwendungen dieses grundlegenden Satzes benutzt man zusätzlich die folgenden Aussagen.

(i) Für einen beliebigen topologischen Raum X ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{H}_{r0}(X) \rightarrow \mathbb{H}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

exakt, d. h. $\mathbb{H}_0(X) = \mathbb{H}_{r0}(X) \oplus \mathbb{Z}$, also $\mathbb{H}_{r0}(X) = \mathbb{H}_0(X)/\mathbb{Z}$.

(ii) Besteht der topologische Raum aus genau N Komponenten (bezüglich des bogenweisen Zusammenhangs), dann ist

$$\mathbb{H}_0(X) = \mathbb{Z}^N, \quad \mathbb{H}_{r0}(X) = \mathbb{Z}^{N-1}.$$

(iii) Besteht der topologische Raum X aus genau N Punkten, dann ist

$$\mathbb{H}_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}^N & \text{für } q = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also $\mathbb{H}_{r0}(X) = \mathbb{Z}^{N-1}$.

(iv) Homöomorphe (oder allgemeiner homotopieäquivalente) topologische Räume haben die gleichen Homologiegruppen \mathbb{H}_q und die gleichen reduzierten Homologiegruppen \mathbb{H}_{r0} .

Beispielsweise ist ein kontrahierbarer Raum X homotopieäquivalent zu einem Punkt. Deshalb gilt $\mathbb{H}_0(X) = \mathbb{Z}$, $\mathbb{H}_{r0}(X) = \mathbb{H}_q(X) = 0$ für alle $q \geq 1$.

► **STANDARDBEISPIEL** (die n -dimensionale Sphäre S^n mit $n \geq 1$): Es ist

$$\mathbb{H}_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0, n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (18.24)$$

Das ergibt $\mathbb{H}_{r0}(S^n) = 0$.

Beweis: Da S^n für $n \geq 1$ zusammenhängend ist, erhalten wir zunächst (18.24) für $q = 0$. Die Berechnung der höheren Homologiegruppen erfolgt induktiv mit Hilfe der Mayer–Vietoris-Sequenz.

Schritt 1: Wir setzen

$$V := S^n - \{\mathbf{N}\}, \quad W := S^n - \{\mathbf{S}\},$$

¹¹ $\mathbb{H}_q(X)$ bezeichnet die q -te Homologiegruppe von X mit ganzzahligen Koeffizienten, d. h., in (18.21) werden nur solche singulären Ketten betrachtet, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind. Die Menge der ganzen Zahlen wird mit \mathbb{Z} bezeichnet.

wobei N den Nordpol und S den Südpol der n -dimensionalen Sphäre S^n bezeichnet. Dann sind V und W kontrahierbar, während sich der Durchschnitt $V \cap W$ stetig auf den Äquator \tilde{A} zusammenziehen lässt, d. h., die Menge $V \cap W$ ist homotopieäquivalent zum Äquator \tilde{A} . Somit ist $V \cap W$ homotopieäquivalent zu S^{n-1} . Folglich gilt:

- (i) $H_0(V) = H_0(W) = \mathbb{Z}$ und $H_{r0}(V) = H_{r0}(W) = 0$.
- (ii) $H_q(V) = H_q(W) = 0$ für alle $q \geq 1$.
- (iii) $H_q(V \cap W) = H_q(\tilde{A}) = H_q(S^{n-1})$ für alle $q \geq 0$.
- (iv) $H_{r0}(V \cap W) = H_{r0}(\tilde{A}) = H_{r0}(S^{n-1})$.

Schritt 2: Für $n = 1, 2, \dots$ gilt:

- (a) $H_1(S^n) = H_{r0}(S^{n-1})$.
- (b) $H_{q+1}(S^n) = H_q(S^{n-1})$, $q \geq 1$.

Tatsächlich liefert die Exaktheit der Mayer–Vietoris-Sequenz

$$H_1(V) \oplus H_1(W) \rightarrow H_1(S^n) \rightarrow H_{r0}(V \cap W) \rightarrow H_{r0}(V) \oplus H_{r0}(W)$$

die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_1(S^n) \rightarrow H_{r0}(S^{n-1}) \rightarrow 0.$$

Das ist (a). Ferner erhält man aus der Exaktheit der Mayer–Vietoris-Sequenz

$$H_{q+1}(V) \oplus H_{q+1}(W) \rightarrow H_{q+1}(S^n) \rightarrow H_q(V \cap W) \rightarrow H_q(V) \oplus H_q(W)$$

die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_{q+1}(S^n) \rightarrow H_q(S^{n-1}) \rightarrow 0$$

für $q \geq 1$. Das ist (b).

Schritt 3: Es sei $n = 1$. Da S^0 aus zwei Punkten besteht, gilt $H_{r0}(S^0) = \mathbb{Z}$, $H_q(S^0) = 0$ für $q \geq 1$. Aus (a) und (b) folgt

$$H_1(S^1) = \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad H_{q+1}(S^1) = 0 \quad \text{für } q \geq 1.$$

Schritt 4: Es sei $n = 2$. Da S^1 zusammenhängend ist, gilt $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$ und damit $H_{r0}(S^1) = H_0(S^1)/\mathbb{Z} = 0$. Nach (a) und (b) ergibt sich deshalb

$$H_1(S^2) = H_{r0}(S^1) = 0, \quad H_2(S^2) = H_1(S^1) = \mathbb{Z},$$

und $H_{q+1}(S^2) = H_q(S^1) = 0$ für $q \geq 2$.

Analog schließt man für $n \geq 3$. q.e.d.

18.7.2 Homologie- und Kohomologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten

Mit G bezeichnen wir eine beliebige kommutative (additive) Gruppe (z. B. $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$). Für eine Reihe von topologischen Fragen ist es wichtig, dass man die Flexibilität ausnutzt, die man bei der Wahl der Koeffizienten von singulären Ketten (18.21) besitzt.

Definition: Unter einer singulären G -Kette versteht man wie in (18.21) einen Ausdruck der Form

$$C := a_1 f_1 + \dots + a_m f_m, \tag{18.25}$$

wobei jedoch jetzt die Koeffizienten a_1, \dots, a_m zu G gehören.

Die gleiche Konstruktion wie in 18.6.2 ergibt dann die singulären Homologiegruppen $H_q(X, G)$ des topologischen Raumes X (mit Koeffizienten in G).

Unter einer singulären G -Kokette verstehen wir einen Morphismus ω von der additiven Gruppe der singulären G -Ketten in G , d.h., jeder singuläre Kette C wird ein Element $\omega(C)$ in G zugeordnet, so dass

$$\omega(C_1 + C_2) = \omega(C_1) + \omega(C_2)$$

für alle singulären G -Ketten C_1 und C_2 gilt. Durch

$$(d\omega)(C) := \omega(\partial C)$$

für alle singulären G -Ketten C ergibt sich ein Korandoperator d mit $d^2 = 0$. Analog zur Konstruktion der de Rhamschen Kohomologiegruppen in 18.5 erhält man dann die singulären Kohomologiegruppen $H^q(X, G)$ des topologischen Raumes X (mit Koeffizienten in G).

In den beiden Spezialfällen $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ benutzen wir die Bezeichnungen

$$H_q(X) := H_q(X, \mathbb{R}), \quad \mathbb{H}_q(X) := H_q(X, \mathbb{Z}).$$

Koeffiziententheorem: Für festes $q = 0, 1, 2, \dots$ gilt¹²

$$H_q(X, G) = \mathbb{H}_q(X) \otimes G \quad \text{und} \quad H^q(X, G) = H_q(X, G)^*,$$

falls eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) $q = 0$;
- (b) $H_{q-1}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^m$, $m = 0, 1, \dots$ und $q \geq 1$;
- (c) $G = \mathbb{R}$ (Körper der reellen Zahlen) oder $G = \mathbb{Q}$ (Körper der rationalen Zahlen) und $q \geq 0$.

Dieses Theorem ist der Spezialfall des sogenannten *universellen Koeffiziententheorems* für beliebige kommutative Gruppen G :

$$H_q(X, G) = (\mathbb{H}_q(X) \otimes G) \oplus \text{Tor}(\mathbb{H}_{q-1}(X), G),$$

$$H^q(X, G) = H_q(X, G)^* \oplus \text{Ext}(\mathbb{H}_{q-1}(X), G), \quad q \geq 1.$$

Danach kann man durch rein algebraische Überlegungen aus den ganzzahligen Homologiegruppen $\mathbb{H}_q(X) := H_q(X, \mathbb{Z})$ alle Homologiegruppen und Kohomologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten berechnen. Die genaue Definition der Funktoren Tor und Ext in der Sprache der exakten Sequenzen findet man in [Bredon (1993)]. Speziell ist

$$\text{Tor}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{K}) = \text{Ext}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{K}) = 0 \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q},$$

und

$$\text{Tor}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = \text{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p,$$

wobei $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe der Primzahlordnung $p \geq 2$ bezeichnet.

► **BEISPIEL 1:** Für einen kontrahierbaren topologischen Raum X gilt $\mathbb{H}_0(X) = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{H}_q(X) = 0$ für $q \geq 1$. Wegen der Isomorphie $\mathbb{Z} \otimes G = G$ folgt daraus

$$H_0(X, G) = G, \quad H_q(X, G) = 0, \quad q \geq 1.$$

► **BEISPIEL 2:** (de Rhamsche Kohomologie): Für die singuläre Homologie und Kohomologie mit reellen Koeffizienten erhalten wir

$$H_q(X) = H_q(X, \mathbb{R}) = \mathbb{H}_q(X) \otimes \mathbb{R}, \quad H^q(X, \mathbb{R}) = H_q(X, \mathbb{R})^*.$$

¹²Mit $H_q(X, G)^*$ oder auch $\text{Hom}(H_q(X, G), G)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Morphismen $\mu : H_q(X, G) \rightarrow G$.

Nach dem Satz von de Rham gilt $H^q(X) = H^q(X, \mathbb{R})$, $q \geq 0$, für die de Rhamschen Kohomologigruppen $H^q(X)$.

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Für die n -dimensionale Sphäre S^n mit $n \geq 1$ gilt

$$\mathbb{H}_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0, n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$ und $H_q(S^n) = \mathbb{H}_q(S^n) \otimes \mathbb{R}$ erhalten wir daraus

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } q = 0, n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner ist $H^q(S^n) = H_q(S^n)^* = H_q(S^n)$ (Isomorphie).

18.7.3 Höhere Homotopiegruppen

Homotopiegruppen verallgemeinern die Fundamentalgruppe.

Es sei X ein topologischer Raum. Wir wählen einen festen Punkt $x_0 \in X$. Durch $P_n(X, x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Abbildungen

$$\varphi : I^n \rightarrow X \quad \text{mit} \quad \varphi(\partial I^n) = \{x_0\}.$$

Dabei ist $I^n := \{(t_1, \dots, t_n) : 0 \leq t_j \leq 1 \text{ für alle } j\}$ der abgeschlossene n -dimensionale Einheitswürfel.

Für zwei Abbildungen φ und ψ aus $P_n(X, x_0)$ schreiben wir genau dann

$$\varphi \cong \psi, \tag{18.26}$$

wenn sie zueinander homotop sind.

Definition: Es bezeichne $\pi_n(X, x_0)$ die Menge aller zugehörigen Äquivalenzklassen ($n=1, 2, \dots$).

Die Menge $\pi_n(X, x_0)$ kann analog zur Fundamentalgruppe mit einer Gruppenstruktur versehen werden¹³ und heißt die n -te Homotopiegruppe von X (bzgl. des Punktes x_0).

Satz: (i) Ist der Raum X bogenweise zusammenhängend, dann ist $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(X, x_1)$ (Isomorphie) für alle $x_0, x_1 \in X$ und alle n .

(ii) Für $n \geq 2$ sind alle Homotopiegruppen $\pi_n(X, x_0)$ kommutativ. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ braucht nicht kommutativ zu sein.

(iii) Wir betrachten alle stetigen Abbildungen

$$\psi : S^n \rightarrow X \tag{18.27}$$

mit $\psi(y_0) = x_0$, wobei $y_0 \in S^n$ und $x_0 \in X$ feste Punkte sind. Dann besteht eine bijektive Abbildung zwischen $\pi_n(X, x_0)$ und der Menge aller Homotopieklassen $[\psi]$ von Abbildungen der Form (18.27).

(iv) Homöomorphe (oder allgemeiner homotopieäquivalente) topologische Räume besitzen die gleichen Homotopiegruppen.

¹³Beispielsweise für $n = 2$ definieren wir

$$(\varphi \times \psi)(t_1, t_2) := \begin{cases} \varphi(2t_1, t_2) & \text{für } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ \psi(2t_1 - 1, t_2) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Diese Multiplikation $\varphi \times \psi$ ist mit der Äquivalenzrelation (18.26) verträglich.

► **BEISPIEL 1:** Für einen kontrahierbaren Raum sind alle seine Homotopiegruppen trivial, d. h. gleich dem neutralen Element.

Satz von Hurewicz: Sei X ein bogenweise zusammenhängender topologischer Raum X . Dann gilt:

(i) Ist die Fundamentalgruppe von X kommutativ, dann ist sie isomorph zur ersten Homologiegruppe von X mit ganzzahligen Koeffizienten, d. h.

$$\pi_1(X) = \mathbb{H}_1(X).$$

(ii) Im allgemeinen Fall gilt $\pi_1(X)/K = \mathbb{H}_1(X)$, wobei K die Kommutatorgruppe von $\pi_1(X)$ bezeichnet.¹⁴

► **STANDARDBEISPIEL 2:** Für den Rand des Einheitskreises S^1 gilt

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{H}_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

nach dem Satz von Hurewicz und dem Standardbeispiel aus 18.7.1. In 18.7.4 werden wir mit Hilfe der exakten Homotopiesequenz eines Faserbündels zeigen, dass $\pi_n(S^1) = 0$ für $n \geq 2$ gilt.

Für n -dimensionale Sphären S^n mit $n \geq 2$ hat man

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z},$$

während $\pi_k(S^n)$ für $1 \leq k < n$ trivial ist. Die Berechnung von $\pi_m(S^n)$ mit $m > n$ ist in der Regel sehr schwierig und wird bis heute noch nicht vollständig beherrscht.

Der Periodizitätssatz von Bott: Für $2N \geq n \geq 2$ gilt

$$\pi_{n-1}(GL(N, \mathbb{C})) = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n, \\ \mathbb{Z} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $GL(N, \mathbb{C})$ die Gruppe aller invertierbaren komplexen $(N \times N)$ -Matrizen. Explizit bedeutet diese Aussage folgendes: Wir betrachten stetige Abbildungen

$$f, g : S^{n-1} \rightarrow GL(N, \mathbb{C}).$$

(i) Ist n ungerade, dann sind f und g homotop zu konstanten Abbildungen.

(ii) Ist n gerade, dann kann man f eine ganze Zahl $\text{Grad}(f)$ zuordnen, die man den Abbildungsgrad von f nennt. Zwei Abbildungen f und g sind genau dann homotop, wenn $\text{Grad}(f) = \text{Grad}(g)$ gilt. Ferner gibt es zu jeder ganzen Zahl γ eine Abbildung f mit $\text{Grad}(f) = \gamma$.

Der Periodizitätssatz von Bott spielte beim ursprünglichen Beweis des Atiyah–Singer–Indextheorems eine entscheidende Rolle (vgl. 19.11).

18.7.4 Die exakte Homotopiesequenz eines Faserbündels

Hauptsatz: Es sei

$$p : \mathbb{B} \rightarrow M$$

eine surjektive stetige Abbildung des topologischen Raumes \mathbb{B} auf den topologischen Raum M , die ein Faserbündel mit lokaler Produktstruktur darstellt.¹⁵ Wählen wir einen festen Punkt

¹⁴ K ist die kleinste Untergruppe von $\pi_1(X)$, die alle Elemente der Form $aba^{-1}b^{-1}$ mit $a, b \in \pi_1(X)$ enthält.

¹⁵Genauer verlangen wir folgendes:

(i) \mathbb{B} und M sind bogenweise zusammenhängend.

(ii) Der Bündelraum \mathbb{B} besitzt eine lokale Produktstruktur mit dem topologischen Raum Y als typischer Faser, d. h., zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine offene Umgebung U in M und ein Homöomorphismus

$$\psi : U \times Y \rightarrow p^{-1}(U)$$

mit $p(\psi(u, y)) = u$ für alle $u \in U, y \in Y$.

$x \in M$ und einen festen Punkt $y \in F$, wobei $F := p^{-1}(x)$ die sogenannte Faser über dem Punkt x bezeichnet, dann ist für $n = 1, 2, \dots$ die folgende Sequenz exakt:

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow \pi_n(F, y) \rightarrow \pi_n(\mathbb{B}) \rightarrow \pi_n(M) \rightarrow \\ &\rightarrow \pi_{n-1}(F, y) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{B}) \rightarrow \pi_{n-1}(M) \rightarrow \cdots \\ \cdots &\rightarrow \pi_1(F, y) \rightarrow \pi_1(\mathbb{B}) \rightarrow \pi_1(M). \end{aligned} \quad (18.28)$$

Satz: Es sei¹⁶ $\pi_n(F, y)$ trivial für alle $n = 1, 2, \dots$. Dann gilt

$$\pi_n(M) = \pi_n(\mathbb{B}) \quad \text{für } n \geq 2. \quad (18.29)$$

Ist speziell der Bündelraum \mathbb{B} kontrahierbar, dann gilt

$$\pi_n(M) = 0 \quad \text{für } n \geq 2. \quad (18.30)$$

Beweis: Aus (18.28) folgt, dass die Sequenz

$$0 \rightarrow \pi_n(\mathbb{B}) \rightarrow \pi_n(M) \rightarrow 0$$

für $n \geq 2$ exakt ist. Das ergibt (18.29). q.e.d.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Wir bezeichnen mit φ eine Winkelvariable. Die durch $p(\varphi) := e^{i\varphi}$ gegebene Abbildung

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

stellt die universelle Überlagerung der Einheitskreislinie S^1 dar (vgl. 18.3.4). Jede Faser besteht hier aus abzählbar vielen Punkten. Da \mathbb{R} kontrahierbar ist, folgt aus (18.30)

$$\pi_n(S^1) = 0 \quad \text{für } n \geq 2.$$

► **STANDARDBEISPIEL 2** (Hopffaserung): Die sogenannte Hopfabbildung

$$f : S^3 \rightarrow S^2$$

stellt ein Faserbündel mit der Basismannigfaltigkeit S^2 , der Bündelmannigfaltigkeit S^3 und der typischen Faser $U(1)$ dar. Aus der Exaktheit der Homotopiesequenz (18.28) erhalten wir die exakte Sequenz

$$\pi_n(U(1)) \rightarrow \pi_n(S^3) \rightarrow \pi_n(S^2) \rightarrow \pi_{n-1}(U(1))$$

für $n \geq 2$. Die Gruppe $U(1)$ der komplexen Zahlen vom Betrag eins ist homöomorph zu S^1 . Folglich gilt $\pi_k(U(1)) = \pi_k(S^1) = 0$ für $k \geq 2$. Das ergibt die Exaktheit der Sequenz

$$0 \rightarrow \pi_n(S^3) \rightarrow \pi_n(S^2) \rightarrow 0$$

für $n \geq 3$. Somit erhalten wir

$$\pi_n(S^3) = \pi_n(S^2) \quad \text{für alle } n = 3, 4, \dots.$$

Nach Standardbeispiel 2 aus 18.7.3 ist $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Das liefert die berühmte Aussage von Heinz Hopf aus dem Jahre 1936:

$$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}. \quad (18.31)$$

¹⁶Diese Bedingung ist zum Beispiel erfüllt, falls F nur aus isolierten Punkten besteht oder F kontrahierbar ist.

Explizit erhält man die Hopfabbildung wie folgt. Wir beschreiben die 3-dimensionale Einheits sphäre S^3 durch die Menge aller komplexen Paare (z, w) mit $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Dann ist $f(z, w)$ definitionsgemäß gleich dem Punkt der Riemannschen Zahlenkugel, der dem Quotienten z/w entspricht. Für einen Punkt $P \in S^2$ besteht das Urbild $f^{-1}(P)$ aus allen Punkten $\lambda(z_0, w_0)$ mit $\lambda \in U(1)$, d. h., $f^{-1}(P)$ kann mit $U(1)$ identifiziert werden. Durch

$$S^3 = \bigcup_{P \in S^2} f^{-1}(P)$$

entsteht die sogenannte Hopffaserung von S^3 . Im Sinne von 19.4 ist f ein Hauptfaserbündel mit der Strukturgruppe $U(1)$. Durch

$$S^3 \xrightarrow{F} S^3 \xrightarrow{f} S^2$$

erhält man alle stetigen Abbildungen von S^3 in S^2 , falls man F als beliebige stetige Abbildung von S^3 in S^3 wählt.

Ist $g : S^3 \rightarrow S^2$ eine glatte Abbildung und bezeichnet ω eine 2-Form auf S^2 , dann gilt

$$\int_{S^3} g^* \omega = \text{Grad } g \int_{S^2} \omega$$

mit einer von ω unabhängigen ganzen Zahl $\text{Grad } g$, die man als die Hopfinvariante von g (oder den verallgemeinerten Abbildungsgrad von g) bezeichnet. Allgemeiner kann man jeder stetigen Abbildung $g : S^3 \rightarrow S^2$ in geeigneter Weise eine derartige Zahl $\text{Grad } g$ zuordnen. Der Isomorphismus (18.31) wird durch $g \mapsto \text{Grad } g$ erzeugt. Hinter (18.31) verbirgt sich der zweite Satz von Hopf aus 18.3.2.

18.7.5 Fundamentalgruppe und Symmetrie

Wir nehmen an, dass die glatte Abbildung

$$p : \mathbb{B} \rightarrow M \tag{18.32}$$

der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit \mathbb{B} auf die bogenweise zusammenhängende Mannigfaltigkeit M eine universelle Überlagerung darstellt (vgl. 18.3.4). Die Mengen $p^{-1}(x)$ mit $x \in M$ heißen Fasern.

Decktransformationen: Unter einer Decktransformation von (18.32) verstehen wir einen faser treuen Homöomorphismus

$$D : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B},$$

d. h., D bildet Fasern wieder in Fasern ab. Die Menge aller Decktransformationen von \mathbb{B} bildet eine Gruppe, die wir mit $\text{Deck}(p)$ bezeichnen.

Satz: Es gilt

$$\pi_1(M) = \text{Deck}(p),$$

d. h., die Fundamentalgruppe von M ist gleich der Gruppe der Decktransformationen von p . Dieser Satz erlaubt eine anschauliche Interpretation der Fundamentalgruppe.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Bezeichnet φ eine Winkelvariable, dann stellt die durch $p(\varphi) := e^{i\varphi}$ gegebene Abbildung

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \tag{18.33}$$

eine universelle Überlagerung dar. Die Faser eines Punktes auf S^1 besteht aus abzählbar vielen Punkten im Abstand von 2π auf der Zahlengeraden \mathbb{R} . Die Gruppe der Decktransformationen wird durch alle Translationen von \mathbb{R} um ganzzahlige Vielfache von 2π gegeben. Diese Gruppe ist isomorph zur additiven Gruppe \mathbb{Z} . Deshalb gilt

$$\pi_1(S^1) = \text{Deck}(p) = \mathbb{Z}.$$

Quotiententopologie: Ist eine Äquivalenzrelation „~“ auf dem topologischen Raum X gegeben, dann wird die Menge X/\sim der Äquivalenzklassen in natürlicher Weise zu einem topologischen Raum, indem man eine Menge von Äquivalenzklassen genau dann offen nennt, wenn die zugehörige Menge aller Repräsentanten offen in X ist.

► **STANDARDBEISPIEL 2** (der projektive Raum \mathbb{RP}^n mit $n \geq 1$): Wir identifizieren auf der n -dimensionalen Einheitssphäre S^n Antipodenpunkte x und $-x$ miteinander. Die Menge der Paare $\{x, -x\}$ mit $x \in S^n$ bildet dann definitionsgemäß den reellen projektiven Raum \mathbb{RP}^n , den wir mit der Quotiententopologie versehen.

Fall 1: $n \geq 2$. Die stetige Abbildung

$$\psi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n \quad (18.34)$$

mit $\psi(x) := \{x, -x\}$ entspricht einem Faserbündel. Jede Faser besteht aus einem Antipodenpunktpaar. Die fasertreuen Homöomorphismen sind durch die identische Abbildung I und die Spiegelung $-I$ gegeben. Die zugehörige Spiegelungsgruppe $\{I, -I\}$ ist isomorph zur zyklischen Gruppe \mathbb{Z}_2 . Da S^n für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend ist, erhalten wir

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \text{Deck}(\psi) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{für } n = 2, 3, \dots.$$

Fall 2: $n = 1$. Wir wählen die Abbildung $q = \psi \circ p$, d. h.

$$q : \mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1 \xrightarrow{\psi} \mathbb{RP}^1,$$

wobei p bzw. ψ durch (18.33) bzw. (18.34) gegeben sind. Dann ist q eine universelle Überlagerung von \mathbb{RP}^1 . Jede Faser besteht aus einer abzählbaren Menge von Punkten auf der Zahlengeraden \mathbb{R} mit dem Abstand π . Die fasertreuen Homöomorphismen sind dann durch alle Translationen von \mathbb{R} um ganzzahlige Vielfache von π gegeben. Die Gruppe dieser Translationen ist isomorph zur additiven Gruppe \mathbb{Z} . Deshalb gilt

$$\pi_1(\mathbb{RP}^1) = \text{Deck}(q) = \mathbb{Z}.$$

Aus dem Satz von Hurewicz (vgl. 18.7.3) erhalten wir dann für die erste Homologiegruppe H_1 von \mathbb{RP}^n mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$H_1(\mathbb{RP}^n) = \pi_1(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{für } n \geq 2. \end{cases}$$

Das Koeffiziententheorem (vgl. 18.7.2) ergibt ferner

$$H_1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{R}) = H_1(\mathbb{RP}^n) \otimes \mathbb{R}, \quad H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{R}) = H_1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{R})^*, \quad n \geq 1.$$

Wegen der Isomorphismen¹⁷ $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{R} = 0$ und $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$ erhalten wir

$$H_1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{R}) = H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n \geq 2. \end{cases}$$

Nach dem Satz von de Rham ergibt sich die erste de Rhamsche Kohomologiegruppe durch $H^1(\mathbb{RP}^n) = H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{R})$.

¹⁷Aus $g \in \mathbb{Z}_2$, $r \in \mathbb{R}$, folgt $2g = 0$ und somit $g \otimes r = 2g \otimes (r/2) = 0$.

Literatur zu Kapitel 18

- [Adams 1994] Adams, C.: *The Knot Book*. Cambridge University Press, Cambridge, England (1994)
- [Boltjanskij und Efrimovič 1986] Boltjanskij, V., Efrimovič, V.: *Anschauliche kombinatorische Topologie*. Übers. a.d. Russ., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1986)
- [Bott und Wu 1986] Bott, R., Wu, T.: *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer, New York (1986)
- [Bredon 1993] Bredon, G.: *Topology and Geometry*. Springer, New York (1993)
- [Bröcker und Jänich 1990] Bröcker, J., Jänich, K.: *Einführung in die Differentialtopologie*. 2. Auflage. Springer, Berlin (1990)
- [Fomenko 1994] Fomenko, A.: *Visual Geometry and Topology*. Springer, Berlin (1994)
- [Guillemin und Polack 1974] Guillemin, V., Polack, A.: *Differential Topology*. Prentice hall, Englewood Cliffs, NJ (1974)
- [Hatcher 2002] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, England (2002)
- [Kinsey 1993] Kinsey, L.: *Topology of Surfaces*. Springer, New York (1993)
- [Lück 2005] Lück, W.: *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten*. Vieweg, Wiesbaden (2005)
- [Matveev 2006] Matveev, S.: *Lectures on Algebraic Topology*. Transl. from the Russian. European Mathematical Society, Zurich (2006)
- [Milnor 1963] Milnor, J.: *Morse Theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ (1963)
- [Milnor 1969] Milnor, J.: *Topology from the Differential Point of View*. University of Virginia Press, Charlottesville (1969)
- [Naber 1980] Naber, G.: *Topological Methods in Euclidean Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, England (1980)
- [Naber 1997] Naber, G.: *Topology, Geometry, and Gauge Fields*. Springer, Berlin (1997)
- [Nakahara 1990] Nakahara, M.: *Geometry, Topology, and Physics*. Hilger, Bristol (1990)
- [Novikov und Fomenko 1987] Novikov, S., Fomenko, A.: *Basic Elements of Differential Geometry and Topology*. Kluwer, Dordrecht (1987)
- [Novikov 1996] Novikov, S.: *Topology I: General Survey*. Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 12. Transl. from the Russian. Springer, New York (1996)

KAPITEL 19

KRÜMMUNG, TOPOLOGIE UND ANALYSIS

Die Bedeutung der Gruppentheorie wird durch die moderne Entwicklung der Differentialgeometrie nicht geschmälert. Im Gegenteil, die Liesche Gruppentheorie ist die einzige Theorie, die in der Lage ist, die Verbindung zwischen den einzelnen Gebieten der Differentialgeometrie herzustellen.

Élie Cartan (1869-1951)

Die Mathematik ist ein Organ der Erkenntnis und eine unendliche Verfeinerung der Sprache. Sie erhebt sich aus der gewöhnlichen Sprache und Vorstellungswelt wie eine Pflanze aus dem Erdreich, und ihre Wurzeln sind Zahlen und einfache räumliche Vorstellungen ...

Wir wissen nicht, welcher Inhalt die Mathematik als die ihm allein angemessene Sprache verlangt, wir können nicht ahnen, in welche Ferne und Tiefe dieses geistige Auge Mathematik den Menschen noch blicken lässt.

Erich Kähler (1906-2000)

19.1 Grundideen

In diesem Kapitel sollen die beiden fundamentalen Begriffe der Differentialgeometrie

- (i) kovariante Richtungsableitung und
- (ii) Krümmung

betrachtet werden. Dabei spielt der Begriff des *Bündels* eine zentrale Rolle. Bündel gehören zu den wichtigsten Objekten der modernen Mathematik und Physik.

Während sich die Mathematiker, ausgehend von den fundamentalen Untersuchungen von Gauß (Flächentheorie) und Riemann (Riemannsche Geometrie), in einem mühevollen Erkenntnisprozess um die Klärung des Begriffes „Krümmung“ bemühten, gelangten die Physiker bei ihrer Suche nach der mathematischen Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur (allgemeine Relativitätstheorie der Gravitation und Standardmodell der Elementarteilchen) auf völlig unterschiedlichen Wegen zu dem *gleichen mathematischen Formalismus*.

Überraschenderweise wurde diese Übereinstimmung erst 1975 von dem theoretischen Physiker N.C. Yang in den USA entdeckt, obwohl sich die mathematische Theorie und die physikalische Theorie (Eichfeldtheorie) bereits in den fünfziger Jahren herauskristallisiert hatten (Theorie der Zusammenhänge von Cartan–Ehresmann und Yang–Mills-Gleichungen als Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen). Tabelle 19.1 beschreibt einen Übersetzungsschlüssel zwischen der Sprache der Physik und der Mathematik, der dem allgemeinen Prinzip

Kraft (Wechselwirkung) ist gleich Krümmung

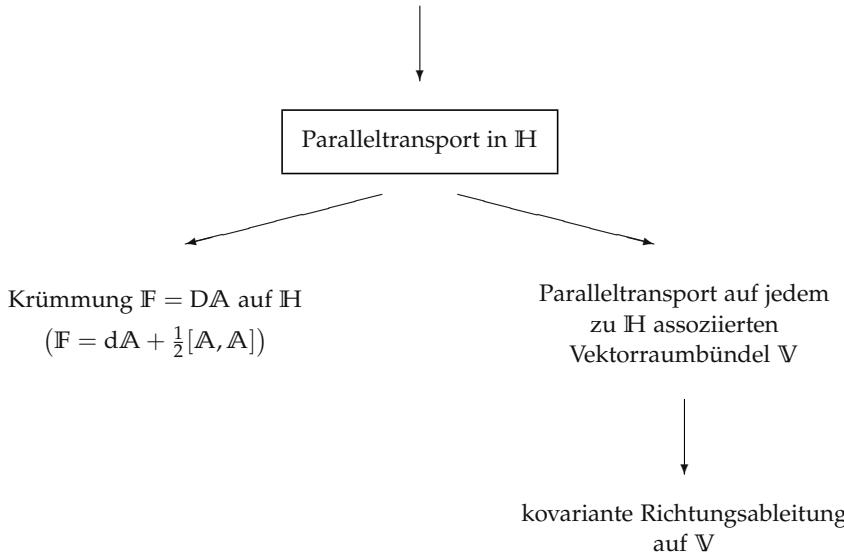
entspricht. Die ausführliche physikalische Diskussion dieses Prinzips findet man in 14.9.

Tabelle 19.1

Sprache der Mathematik	Sprache der Physik
Zusammenhang \mathbb{A} eines Hauptfaserbündels \mathbb{H}	Potential \mathbb{A}
Krümmung $\mathbb{F} = D\mathbb{A}$ von \mathbb{H}	Wechselwirkungsfeld $\mathbb{F} = D\mathbb{A}$
Schnitte im assoziierten Vektorraumbündel \mathbb{V}	physikalische Felder von Teilchen, die der Wechselwirkungskraft \mathbb{F} unterliegen
Wechsel der lokalen Bündelkoordinaten (oder äquivalente Diffeomorphismen von \mathbb{H} auf sich)	Eichtransformationen
Paralleltransport in \mathbb{H} und \mathbb{V}	Transport der Information über die benutzten Eichungen
kovariante Richtungsableitung in \mathbb{V}	eichinvariante Differentiation physikalischer Felder

Vom mathematischen Standpunkt aus hat man das folgende Schema:

*Zusammenhangsform \mathbb{A} auf einem Hauptfaserbündel \mathbb{H}
(horizontale und vertikale Tangentialvektoren auf \mathbb{H})*



Grob gesprochen gilt:

(i) Hauptfaserbündel \mathbb{H} sehen lokal wie Produkte $U \times G$ zwischen offenen Mengen U und Liegruppen G aus.

(ii) Vektorraumbündel \mathbb{V} sehen lokal wie Produkte $U \times Y$ zwischen offenen Mengen U und linearen Räumen Y aus.

Anschaulich ergeben sich \mathbb{H} (bzw. \mathbb{V}) durch „Zusammenkleben“ von Produkten der Form $U \times G$ (bzw. $U \times Y$).

(iii) Der Wechsel zwischen den lokalen Koordinaten von \mathbb{H} (bzw. \mathbb{V}) wird durch die Gruppenstruktur von G (bzw. die lineare Struktur von Y) bestimmt.

(iv) Die Symmetrie der Geometrie auf dem zu \mathbb{H} assoziierten Vektorraumbündel \mathbb{V} wird durch die zu \mathbb{H} gehörige Gruppe G beschrieben (G -Geometrie). Beispielsweise spielt in der speziellen Relativitätstheorie die Lorentzgruppe (oder allgemeiner die Poincaré-Gruppe) die entscheidende Rolle.

Die moderne Differentialgeometrie basiert auf (i) bis (iv). Der historische Ausgangspunkt hierfür war die Methode der bewegten Vektorbasen (repères mobiles) von É. Cartan (vgl. 19.6).

Moderne Strukturtheorie der Mannigfaltigkeiten: In diesem Kapitel legen wir großen Wert darauf, die Zusammenhänge zwischen der klassischen Theorie der *Riemannschen Flächen* und der modernen Theorie der Mannigfaltigkeiten herauszuarbeiten. Diese Ergebnisse sind im Zusammenhang mit der Stringtheorie der Elementarteilchen in den Mittelpunkt des Interesses vieler theoretischer Physiker gerückt (vgl. 19.13). Dabei sind folgende mathematische Gegenstände von entscheidender Bedeutung:

- (a) Krümmung von Hauptfaserbündeln und charakteristische Klassen (de Rham'sche Kohomologie);
- (b) Garbenkohomologie;
- (c) Atiyah-Singer-Indextheorem;
- (d) Theorem von Riemann-Roch-Hirzebruch.

Die Krümmungstheorie auf Hauptfaserbündeln liefert mit Hilfe des sogenannten Weil-Morphismus Differentialformen, die fundamentale Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten widerspiegeln. Das sind die sogenannten charakteristischen Klassen (z.B. die Eulerklasse und die Chernklassen). Zu den tiefsten Ergebnissen der Mathematik gehört in diesem Zusammenhang das Atiyah-Singer-Indextheorem (vgl. 19.11). Benutzt man die Garbentheorie, dann ergibt sich als ein Spezialfall des Atiyah-Singer-Indextheorems das Theorem von Riemann-Roch-Hirzebruch für komplexe Mannigfaltigkeiten (vgl. 19.11.6).

Konvention: In den Abschnitten 19.3ff werden alle auftretenden Abbildungen und Mannigfaltigkeiten als glatt vorausgesetzt (vom Typ C^∞).

19.2 Bündel

Bündel verallgemeinern Produktmengen.

Definition: Unter einem Bündel versteht man eine beliebige *surjektive Abbildung*

$$\pi : \mathbb{B} \rightarrow M$$

zwischen zwei Mengen \mathbb{B} und M . Dabei heißt \mathbb{B} der *Bündelraum* und M der *Basisraum*. Für jeden Punkt x in M bezeichnet man das Urbild

$$F_x := \pi^{-1}(x)$$

als *Faser* über x . Die Fasern zu verschiedenen Punkten sind disjunkt. Wegen der Zerlegung des Bündelraumes

$$\mathbb{B} = \bigcup_{x \in M} F_x$$

in Fasern bezeichnet man $\pi : \mathbb{B} \rightarrow M$ (oder kurz auch \mathbb{B}) als Faserbündel.

Schnitte: Jede Abbildung $s : M \rightarrow \mathbb{B}$ mit $\pi(s(x)) = x$ für alle $x \in M$ heißt ein Schnitt des Bündels. Das ist gleichbedeutend mit $s(x) \in F_x$ für alle $x \in M$.

► **STANDARDBEISPIEL** (Produktbündel): Die Projektionsabbildung

$$\pi : X \times Y \rightarrow X$$

mit $\pi(x, y) := x$ ist ein Bündel. Jeder Schnitt $s : X \rightarrow X \times Y$ hat die Form

$$s(x) = (x, f(x)),$$

wobei $f : X \rightarrow Y$ eine beliebige Abbildung bezeichnet (Abb. 19.1).

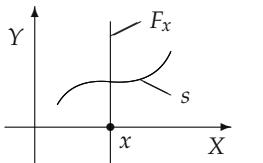


Abb. 19.1

Weitere wichtige Beispiele für Bündel sind:

- (i) **Hauptfaserbündel** (vgl. 19.4) (z. B. das Repèrebündel).
- (ii) **Vektorraumbündel** (vgl. 19.5) (z. B. das Tangentialbündel TM und das Kotangentialbündel TM^* einer Mannigfaltigkeit M).
- (iii) Die Überlagerungsabbildung $\psi : N \rightarrow M$ stellt ein Bündel dar. Dabei ist N die *universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit* von M (vgl. 18.3.3). Hier sind alle Fasern diskret und höchstens abzählbar.

Ist M eine Liegruppe, dann stellt N die *universelle Überlagerungsgruppe* von M dar (vgl. 17.5.3). Beispielsweise steht die Überlagerungsabbildung $\psi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ in enger Beziehung zum Elektronenspin (vgl. 17.7).

Die universellen Überlagerungsflächen Riemannscher Flächen wurden von Poincaré im Zusammenhang mit dem berühmten Uniformisierungsproblem für Riemannsche Flächen eingeführt (z. B. die Existenz globaler Parametrisierungen für algebraische Funktionen) (vgl. 19.8.3).

Das Lифten von Wegen und Paralleltransport: Es sei $x = x(\sigma)$ eine Kurve in der Basismenge M . Viele Bündel $\pi : \mathbb{B} \rightarrow M$ besitzen folgende wichtige Eigenschaft: Es gibt eine Kurve $b = b(\sigma)$ im Bündelraum \mathbb{B} mit

$$\pi(b(\sigma)) = x(\sigma)$$

für alle Parameterwerte σ . Dabei kann $b(0)$ beliebig vorgegeben werden mit der Bedingung $\pi(b(0)) = x(0)$.

Man bezeichnet $b = b(\sigma)$ als eine *Liftung* von $x = x(\sigma)$ und sagt, dass der Punkt $b(0)$ längs des Weges $x = x(\sigma)$ in \mathbb{B} parallel transportiert wird (Abb. 19.2).

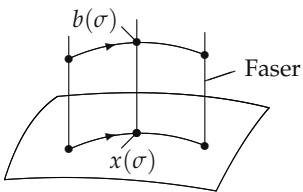


Abb. 19.2

Fasertreue Abbildungen (Bündelmorphismen):

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ zwischen zwei Bündelräumen heißt genau dann ein Morphismus (oder auch fasertreu), wenn φ Fasern wieder in Fasern abbildet.

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ heißt genau dann ein Isomorphismus, wenn φ bijektiv ist und sowohl φ als auch φ^{-1} Morphismen sind.

Die Bedeutung von Faserbündeln für die Berechnung von Homotopiegruppen findet man in 18.7.4.

19.3 Produktbündel und Eichfeldtheorie

Um die allgemeine Theorie besser verstehen zu können, betrachten wir zunächst den Spezialfall von Produktbündeln. Der allgemeine Fall ergibt sich dann grob gesprochen durch das „Zusammenkleben“ von Produktbündeln.

Mit $GL(n, \mathbb{K})$ bezeichnen wir die Liegruppe aller invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen mit Elementen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ferner sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$, und $\mathbb{L}G$ bezeichne die zugehörige Liealgebra. Viele wichtige Beispiele findet man in Tabelle 17.1.

Die folgenden Überlegungen ergeben im Spezialfall $U = \mathbb{R}^4$ und $G = U(1)$ die Maxwell'sche Theorie des Elektromagnetismus (vgl. 10.2.10).

Es sei U eine offene Menge des \mathbb{R}^m . Wir setzen

$$\mathbb{H} := U \times G, \quad \mathbb{V} := U \times \mathbb{C}^n,$$

mit $x = (x^1, \dots, x^m)$ und $\partial_j := \partial/\partial x^j$. Ein Punkt des Hauptfaserbündels \mathbb{H} hat die Form (x, g) mit $x \in U$, $g \in G$, während die Punkte des assoziierten Vektorraumbündels \mathbb{V} die Gestalt (x, ψ) haben mit $x \in U$, $\psi \in \mathbb{C}^n$. Dabei fassen wir ψ als Spaltenmatrix $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)^T$ auf. Im folgenden wird über zwei gleiche obere und untere Indizes von 1 bis m summiert.

Die Differentialgleichung des Paralleltransports im Hauptfaserbündel \mathbb{H} : Es sei $x = x(\sigma)$ eine Kurve in der Basismenge U mit dem reellen Parameter σ . Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{g}(\sigma) + \dot{x}^j(\sigma) \mathbb{A}_j(x(\sigma)) g(\sigma) = 0. \quad (19.1)$$

Der Punkt bezeichnet die Ableitung nach σ . Gegeben sind die Matrizen $\mathbb{A}_j(x) \in \mathbb{L}G$. Gesucht wird $g(\sigma) \in G$. Ist $g = g(\sigma)$ eine Lösung von (19.1), dann heißt die folgende Kurve in \mathbb{H} ,

$$x = x(\sigma), \quad g = g(\sigma),$$

ein *Paralleltransport* des Anfangspunktes $(x(0), g(0))$ längs der Basiskurve $x = x(\sigma)$ (Abb. 19.3).

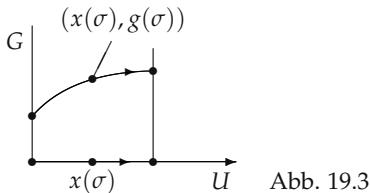


Abb. 19.3

Ferner definieren wir

$$\mathbb{F}_{jk} := \partial_j \mathbb{A}_k - \partial_k \mathbb{A}_j + [\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_k], \quad j, k = 1, \dots, m,$$

mit der Lieklammer $[\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_k] = \mathbb{A}_j \mathbb{A}_k - \mathbb{A}_k \mathbb{A}_j$ in $\mathbb{L}G$.

Paralleltransport im assoziierten Vektorraumbündel \mathbb{V} : Wir definieren den Operator $\Pi_\sigma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ des Paralleltransports durch

$$\Pi_\sigma \psi := g(\sigma) \psi_0$$

mit $g(0) = e$. Die Kurve $x = x(\sigma)$, $\psi = g(\sigma) \psi_0$ heißt dann ein Paralleltransport des Anfangspunktes $(x(0), \psi_0)$ in \mathbb{V} entlang der Basiskurve $x = x(\sigma)$.

Kovariante Richtungsableitung: Wir setzen $x_0 := x(0)$, $w := \dot{x}(0)$. Für eine Funktion $\psi = \psi(x)$ von U in \mathbb{C}^n definieren wir die kovariante Richtungsableitung von ψ im Punkt x_0 in Richtung von w durch

$$(\nabla_w \psi)(x_0) := \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\Pi_\sigma^{-1} \psi(x(\sigma)) - \psi(x_0)}{\sigma}. \quad (19.2)$$

Explizit gilt

$$(\nabla_w \psi)(x_0) = w^j (\nabla_j \psi)(x_0) \quad \text{mit } \nabla_j := \partial_j + \mathbb{A}_j.$$

Satz 1: Es ist $\mathbb{F}_{jk} = \nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j$.

Die verallgemeinerten Maxwell'schen Gleichungen (Yang–Mills-Gleichungen): Diese Gleichungen lauten für $j, k, r = 1, \dots, m$:

$$\nabla_j \mathbb{F}^{jk} = 0, \quad (19.3)$$

$$\nabla_j \mathbb{F}_{kr} + \nabla_k \mathbb{F}_{rj} + \nabla_r \mathbb{F}_{jk} = 0 \quad (\text{Identität von Bianchi}), \quad (19.4)$$

$$\mathbb{F}_{jk} = \partial_j \mathbb{A}_k - \partial_k \mathbb{A}_j + [\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_k]. \quad (19.5)$$

Es werden Matrizenfunktionen $\mathbb{A}_j = \mathbb{A}_j(x)$ auf U mit Werten in der Liealgebra $\mathbb{L}G$ gesucht. Definitionsgemäß ist

$$\mathbb{F}^{jk} := g^{jr} g^{ks} \mathbb{F}_{rs},$$

wobei (g^{ij}) die inverse Matrix zur fest vorgegebenen Matrix (g_{ij}) bezeichnet, die nicht von x abhängt. Die Identität von Bianchi (19.4) ist eine Folge von (19.5).

Lokale Eichtransformationen: Wir betrachten eine Transformation $(x, g) \mapsto (x, g_+)$ im Hauptfaserbündel \mathbb{H} , die durch

$$g_+ = \mathbb{G}(x)g \quad (19.6)$$

mit $\mathbb{G}(x) \in G$ für alle $x \in U$ gegeben ist. Das heißt, $\mathbb{G}(x)$ ist eine Matrix der Strukturgruppe G . Als zugehörige Transformation $(x, \psi) \mapsto (x, \psi_+)$ in dem assoziierten Vektorbündel \mathbb{V} wählen wir in natürlicher Weise

$$\psi_+ = \mathbb{G}(x)\psi. \quad (19.7)$$

Das Attribut „lokal“ bezieht sich auf die Tatsache, dass \mathbb{G} von x abhängt.

Satz 2 (einfaches Transformationsverhalten): Setzen wir

$$\mathbb{A}_j^+ := \mathbb{G} \mathbb{A}_j \mathbb{G}^{-1} - (\partial_j \mathbb{G}) \mathbb{G}^{-1}, \quad \nabla_j^+ := \partial_j + \mathbb{A}_j^+,$$

dann gilt:

(i) Die Gleichung des Paralleltransports (19.1) geht über in

$$\dot{g}_+(\sigma) + \dot{x}^j(\sigma) \mathbb{A}_j^+(x(\sigma)) g_+(\sigma) = 0.$$

(ii) $\nabla_j^+ \psi_+ = \mathbb{G} \nabla_j \psi$ und $\mathbb{F}_{jk}^+ = \mathbb{G} \mathbb{F}_{jk} \mathbb{G}^{-1}$.

(iii) Die verallgemeinerten Maxwell'schen Gleichungen (19.3) bis (19.5) sind eichinvariant.¹

¹Das bedeutet: Ist \mathbb{A}_j eine Lösung von (19.3) bis (19.5), dann ist \mathbb{A}_j^+ eine Lösung des neuen Systems, welches aus (19.3) bis (19.5) entsteht, indem man alle Größen mit dem Zeichen „+“ versieht.

Die Sprache der Differentialformen: Wir definieren die sogenannte *Zusammenhangsform* \mathbb{A} auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} durch

$$\mathbb{A}_b := \mu_g + g^{-1} \mathbb{A}_j(x) g \, dx^j$$

für alle Punkte $b = (x, g)$ auf \mathbb{H} . Dabei bezeichnet μ die sogenannte Maurer–Cartan–Form der Liegruppe G , d.h., es ist $\mu_g(gV) := V$ für alle $V \in \mathbb{L}G$, $g \in G$. Ferner definieren wir die *Krümmungsform* \mathbb{F} auf dem Hauptfaserbündel durch

$$\mathbb{F} := d\mathbb{A} + \frac{1}{2} [\mathbb{A}, \mathbb{A}].$$

Explizit heißt das $\mathbb{F}_b(v, w) = d\mathbb{A}_b(v, w) + [\mathbb{A}_b(v), \mathbb{A}_b(w)]$ für alle Tangentialvektoren v, w von \mathbb{H} im Punkt b . Explizit gilt $v = gV, w = gW$ mit $V, W \in \mathbb{L}G$.

Satz: Die Gleichung (19.1) des Paralleltransports auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} lautet

$$\mathbb{A}_{b(\sigma)}(\dot{b}(\sigma)) = 0$$

mit $b(\sigma) = (x(\sigma), g(\sigma))$.

Die Formen \mathbb{A} und \mathbb{F} sind auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} definiert. Die Potentialkomponenten \mathbb{A}_j und die Feldkomponenten \mathbb{F}_{jk} auf der Basismannigfaltigkeit U kann man jedoch leicht aus \mathbb{A} und \mathbb{F} rekonstruieren, indem man einen trivialen Schnitt

$$s : U \rightarrow \mathbb{H}$$

der Gestalt $s(x) := (x, e)$ betrachtet, wobei e das Einselement der Gruppe G bezeichnet.

Satz: Für die „pull-backs“ von \mathbb{A} und \mathbb{F} bezüglich des Schnitts s gilt:

$$s^*\mathbb{A} = \mathbb{A}_j \, dx^j, \quad s^*\mathbb{F} = \frac{1}{2} \mathbb{F}_{jk} \, dx^j \wedge dx^k.$$

Assoziierte Vektorraumbündel bezüglich einer Darstellung der Strukturgruppe G : Wir betrachten jetzt ein Produktbündel

$$\mathbb{W} = U \times Y$$

mit einem endlichdimensionalen linearen Raum Y . Es sei $\gamma : G \rightarrow L(Y, Y)$ eine Darstellung von G in Y , d.h., jedem $g \in G$ wird ein linearer Operator $\gamma(g) : Y \rightarrow Y$ zugeordnet mit

$$\gamma(gh) = \gamma(g)\gamma(h) \quad \text{für alle } g, h \in G.$$

Ein Punkt von \mathbb{W} hat die Gestalt (x, ψ) mit $x \in U$ und $\psi \in Y$. Ein Schnitt $s : U \rightarrow \mathbb{W}$ besitzt die Form $s(x) = (x, \psi(x))$. Dabei kann $\psi = \psi(x)$ als ein physikalisches Feld mit Werten in Y aufgefasst werden.

Wir definieren jetzt den Paralleltransport durch

$$\Pi_\sigma \psi_0 = \gamma(g(\sigma))\psi_0, \tag{19.8}$$

und die lokale Eichtransformation (19.6), (19.7) wird durch

$$\psi_+ = \gamma(\mathbb{G}(x))\psi, \quad g_+ = \mathbb{G}(x)g,$$

ersetzt. Das berücksichtigt die Tatsache, dass sich physikalische Felder ψ nach einer Darstellung der Strukturgruppe G transformieren.

Die kovariante Richtungsableitung $\nabla_w \psi$ wird dann analog zu (19.2) definiert mit dem modifizierten Operator des Paralleltransports aus (19.8).

19.4 Paralleltransport in Hauptfaserbündeln und Krümmung

Es sei G eine Liegruppe mit der zugehörigen Liealgebra $\mathbb{L}G$. Hauptfaserbündel verallgemeinern Produktmengen der Form $U \times G$, wobei U eine offene Menge des \mathbb{R}^n bezeichnet. Grob gesprochen entstehen Hauptfaserbündel durch „Zusammenkleben“ solcher Produktmengen.

Die einfachsten Hauptfaserbündel sind Liegruppen selbst (vgl. das Beispiel am Ende dieses Abschnitts).

Definition von Hauptfaserbündeln: Unter einem Hauptfaserbündel \mathbb{H} mit der Strukturgruppe G verstehen wir eine surjektive Abbildung

$$\pi : \mathbb{H} \rightarrow M$$

zwischen den Mannigfaltigkeiten \mathbb{H} (Bündelmannigfaltigkeit) und M (Basismannigfaltigkeit), wobei die folgende lokale Produktstruktur vorliegt:²

(i) *Lokale Bündelkarten:* Es gibt eine Überdeckung $\{U_j\}$ der Basismannigfaltigkeit M durch offene Mengen U_j . Zu jedem Index j existiert ein Diffeomorphismus

$$\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times G.$$

Wir bezeichnen $\varphi_j(b)$ als lokale Bündelkoordinate des Bündelpunktes $b \in \mathbb{H}$. Genauer verlangen wir, dass

$$\varphi_j(b) = (x, g_j) \quad (19.9)$$

gilt mit $x = \pi(b)$ und $g_j \in G$.

(ii) *Wechsel der lokalen Bündelkoordinaten:* Ist $x \in U_j \cap U_k$, dann werden jedem Bündelpunkt $b \in \mathbb{H}$ mit $\pi(b) = x$ zwei lokale Koordinaten (x, g_j) und (x, g_k) zugeordnet. Wir verlangen, dass sich der Wechsel dieser lokalen Koordinaten nach einem Gesetz der Form

$$g_j = \mathbb{G}_{jk}(x)g_k \quad (19.10)$$

vollzieht mit $\mathbb{G}_{jk}(x) \in G$ für alle $x \in U_j \cap U_k$.

Wirkung der Strukturgruppe G auf \mathbb{H} : Die Gruppe G wirkt in natürlicher Weise von rechts auf \mathbb{H} . Hierzu setzen wir

$$\mathbb{R}_g b := b_* \quad (19.11)$$

für alle $b \in \mathbb{H}$, $g \in G$. Dabei hat b_* die lokale Koordinate $(x, g_j g)$, falls b die lokale Koordinate (x, g_j) besitzt.³ Es gilt $\mathbb{R}_{gh} = \mathbb{R}_h \mathbb{R}_g$ für alle $g, h \in G$.

Fundamentals Vektorfeld auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} : Zu jedem Element V der Liealgebra $\mathbb{L}G$ gibt es wegen der Wirkung der Gruppe G auf \mathbb{H} in natürlicher Weise ein Vektorfeld V^* auf \mathbb{H} , welches das Lievektorfeld zu $\{\mathbb{R}_g\}$ ist. Man bezeichnet V^* als das *fundamentale Vektorfeld* zu V auf \mathbb{H} .

Explizit erhält man V^* in folgender Weise: Zu $V \in \mathbb{L}G$ gibt es genau eine einparametrische Untergruppe⁴ $\{g(t)\}$ von G mit $g(0) = e$ und $g'(0) = V$. Durch

$$F_t b := \mathbb{R}_{g(t)} b$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ wird ein Fluss $\{F_t\}$ auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} erzeugt, dessen Geschwindigkeit gleich V^* ist, d.h.

$$V_b^* := \left. \frac{dF_t b}{dt} \right|_{t=0}.$$

²Man spricht auch von einer lokalen Trivialisierung.

³Aus (19.10) folgt $g_j g = \mathbb{G}_{jk}(x)g_k g$. Deshalb ist die Definition (19.11) unabhängig von der Wahl der lokalen Bündelkoordinaten.

⁴Im Fall von Matrizengruppen G gilt $g(t) = e^{tV}$.

19.4.1 Die Zusammenhangsform \mathbb{A} auf \mathbb{H}

Definition: Unter einer *Zusammenhangsform* \mathbb{A} auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} verstehen wir eine 1-Form auf \mathbb{H} mit Werten in der Liealgebra $\mathbb{L}G$, so dass gilt:

- (i) $\mathbb{A}(V^*) = V$ für alle $V \in \mathbb{L}G$.
- (ii) $\mathbb{R}_g^*\mathbb{A} = g^{-1}\mathbb{A}g$ für alle $g \in G$.

Diese beiden natürlichen Bedingungen besagen, dass \mathbb{A} mit der auf \mathbb{H} durch die Wirkung von G erzeugten Symmetrie verträglich ist.

Existenzsatz: Auf jedem Hauptfaserbündel \mathbb{H} existiert eine Zusammenhangsform, falls die Basismannigfaltigkeit M eine abzählbare Basis besitzt.

Kommentar: Ist $\{X_j\}$ eine Basis von $\mathbb{L}G$, dann gilt $\mathbb{A} = \omega^j X_j$, wobei alle ω^j klassische 1-Formen auf \mathbb{H} sind (vgl. 15.4.3).

Explizit bedeutet die Bedingung (i), dass $\mathbb{A}_b(V_b^*) = V$ für alle Punkte $b \in \mathbb{H}$ gilt. Ferner besagt (ii) explizit, dass

$$\mathbb{A}_{bg}(vg) = g^{-1}\mathbb{A}_b(v)g \quad (19.12)$$

für alle Punkte $b \in \mathbb{H}$ und alle Tangentialvektoren $v \in T\mathbb{H}_b$ sowie alle $g \in G$ gilt. Dabei steht bg für $\mathbb{R}_g b$, und vg steht für die Linearisierung $\mathbb{R}'_g(b)v$.

(a) Im Fall einer Matrizengruppe G ist $\mathbb{A}_b(v)$ eine Matrix in $\mathbb{L}G$, und $g^{-1}\mathbb{A}_b(v)g$ entspricht der Matrizenmultiplikation.

(b) Im Fall beliebiger Liegruppen steht das Symbol $g^{-1}\mathbb{A}_b(v)g$ für $\text{ad}(g^{-1})\mathbb{A}_b(v)$, wobei ad die adjungierte Darstellung von G auf $\mathbb{L}G$ bezeichnet (vgl. 17.12).

Die Differentialgleichung des Paralleltransports: Es sei eine Kurve $x = x(\sigma)$ auf der Basismannigfaltigkeit M gegeben. Definitionsgemäß heißt eine Kurve $b = b(\sigma)$ im Hauptfaserbündel \mathbb{H} ein Paralleltransport des Anfangspunktes $b(0)$ längs der Basiskurve $x = x(\sigma)$, wenn die folgende Differentialgleichung erfüllt ist:

$$\mathbb{A}_{b(\sigma)}(\dot{b}(\sigma)) = 0. \quad (19.13)$$

Ferner soll $\pi(b(\sigma)) = x(\sigma)$ für alle σ gelten.

Der Punkt bezeichnet hier die Ableitung nach dem reellen Kurvenparameter σ .

19.4.2 Die Krümmungsform \mathbb{F} auf \mathbb{H}

Die durch

$$\mathbb{F} := d\mathbb{A} + \frac{1}{2} [\mathbb{A}, \mathbb{A}] \quad (19.14)$$

auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} definierte 2-Form \mathbb{F} mit Werten in der Liealgebra $\mathbb{L}G$ heißt die Krümmungsform von \mathbb{H} . Explizit bedeutet (19.14), dass

$$\mathbb{F}_b(v, w) = d\mathbb{A}_b(v, w) + [\mathbb{A}_b(v), \mathbb{A}_b(w)]$$

für alle Punkte $b \in \mathbb{H}$ und alle Tangentialvektoren $v, w \in T\mathbb{H}_b$ gilt.

19.4.3 Geometrische Interpretation

Horizontale und vertikale Tangentialvektoren: Es seien h und v Tangentialvektoren des Hauptfaserbündels \mathbb{H} im Punkt b .

(i) h heißt genau dann *horizontal*, wenn $\mathbb{A}_b(h) = 0$ gilt.

(ii) v heißt genau dann *vertikal*, wenn v ein Tangentialvektor an die Faser F_x durch b ist, d.h., es gilt $F_x = \pi^{-1}(x)$ mit $\pi(b) = x$.

Bezeichnen wir mit H_b bzw. V_b die Menge aller horizontalen bzw. vertikalen Tangentialvektoren im Punkt b , dann gestattet der Tangentialraum $T\mathbb{H}_b$ eine direkte Summenzerlegung der Form

$$T\mathbb{H}_b = H_b \oplus V_b, \quad (19.15)$$

d.h., jeder Tangentialvektor $u \in T\mathbb{H}_b$ gestattet eine eindeutige Zerlegung $u = h + v$ mit $h \in H_b$, $v \in V_b$. Hierzu gehört ein Projektionsoperator $\text{pr} : T\mathbb{H}_b \rightarrow H_b$ mit $\text{pr } u := h$.

Kovariante Differentiation von q -Formen auf dem Hauptfaserbündel: Es sei ω eine q -Form auf \mathbb{H} . Wir definieren die kovariante Ableitung $D\omega$ durch

$$D\omega_b(v_1, \dots, v_q) := d\omega_b(\text{pr } v_1, \dots, \text{pr } v_q) \quad (19.16)$$

für alle Punkte $b \in \mathbb{H}$ und alle Tangentialvektoren $v_1, \dots, v_q \in T\mathbb{H}_b$.

Die Darstellung der Krümmungsform durch eine kovariante Ableitung der Zusammenhangsform: Auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} gilt:

(i) $\mathbb{F} = D\mathbb{A}$.

(ii) $D\mathbb{F} = 0$ (Identität von Bianchi).

► **BEISPIEL** (Liegruppen): Wir wollen zeigen, wie die in 17.12 eingeführten Symmetrieeigenschaften Liescher Gruppen in der Sprache der Hauptfaserbündel lauten.

Jede Liegruppe G wird durch $\pi : G \rightarrow \{e\}$ mit $\pi(g) := e$ für alle $g \in G$ zu einem Hauptfaserbündel \mathbb{H} . Die einzige Zusammenhangsform \mathbb{A} auf \mathbb{H} ist die Maurer–Cartan-Form μ . Wegen der Maurer–Cartanschen Strukturgleichung

$$\mathbb{F} := d\mu + \frac{1}{2}[\mu, \mu] = 0 \quad (19.17)$$

ist die Krümmung von \mathbb{H} gleich null.

Genau die linksinvarianten Vektorfelder von G sind die fundamentalen Vektorfelder von \mathbb{H} .

Die allgemeinen Yang–Mills-Gleichungen (verallgemeinerte Maxwellsche Gleichungen): Diese Gleichungen lauten

$$D\mathbb{F} = 0, \quad D * \mathbb{F} = 0, \quad \mathbb{F} = D\mathbb{A}. \quad (19.18)$$

Gesucht wird ein Zusammenhang \mathbb{A} auf \mathbb{H} . Dabei entspricht $*\mathbb{F}$ dem Hodge-Operator auf \mathbb{H} bezüglich einer gegebenen Riemannschen Metrik auf \mathbb{H} (vgl. 16.1.8).

Ein Zusammenhang \mathbb{A} heißt genau dann selbstdual, wenn die zugehörige Krümmungsform \mathbb{F} der Bedingung $*\mathbb{F} = \mathbb{F}$ genügt.

Satz: Jeder selbstduale Zusammenhang \mathbb{A} auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} ergibt eine Lösung der Yang–Mills-Gleichungen (19.18).

Beweis: Wegen der Identität von Bianchi gilt $D\mathbb{F} = 0$. Aus $*\mathbb{F} = \mathbb{F}$ folgt daraus sofort $D * \mathbb{F} = 0$. q.e.d.

Lokalisierung: Es sei $s : U \rightarrow \mathbb{H}$ ein Schnitt, der in der zu $U := U_j$ gehörigen lokalen Bündelkarte die Gestalt $s(x) := (x, e)$ besitzt. Dann sind die „pull-backs“

$$\mathbb{A}_U := s^*\mathbb{A} \quad \text{und} \quad \mathbb{F}_U := s^*\mathbb{F}$$

Formen auf der offenen Menge U der Basismannigfaltigkeit M . Es gilt

$$\mathbb{F}_U = d\mathbb{A}_U + \frac{1}{2}[\mathbb{A}_U, \mathbb{A}_U]. \quad (19.19)$$

Wählen wir lokale Koordinaten auf U , dann besitzen \mathbb{A}_U und \mathbb{F}_U die Darstellung

$$\mathbb{A}_U = \mathbb{A}_j \, dx^j, \quad \mathbb{F}_U := \frac{1}{2} \mathbb{F}_{ij} \, dx^i \wedge dx^j.$$

Physikalische Interpretation: In der Physik ist die Basismannigfaltigkeit M gleich einer vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit. Einem Beobachtungssystem Σ entsprechen die lokalen Raum-Zeit-Koordinaten x^j . Zu Σ gehören die Potentiale \mathbb{A}_j und die Kraftfeldkomponenten \mathbb{F}_{ij} .

19.5 Paralleltransport in Vektorraumbündeln und kovariante Richtungsableitung

Es sei Y ein endlichdimensionaler linearer Raum. Vektorraumbündel verallgemeinern Produktmengen der Form $U \times Y$, wobei U eine offene Menge des \mathbb{R}^n ist. Grob gesprochen entstehen Vektorraumbündel durch „Zusammenkleben“ solcher Produktmengen.

Definition von Vektorraumbündeln: Unter einem Vektorraumbündel \mathbb{V} mit der typischen Faser Y verstehen wir eine surjektive Abbildung

$$\pi : \mathbb{V} \rightarrow M$$

zwischen den Mannigfaltigkeiten \mathbb{V} (Bündelmannigfaltigkeit) und M (Basismannigfaltigkeit), wobei die folgende lokale Produktstruktur vorliegt:⁵

(i) *Lokale Bündelkarten:* Es gibt eine Überdeckung $\{U_j\}$ der Basismannigfaltigkeit M durch offene Mengen U_j . Zu jedem Index j existiert ein Diffeomorphismus

$$\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times Y.$$

Wir bezeichnen $\varphi_j(b)$ als lokale Bündelkoordinate des Bündelpunktes $b \in \mathbb{V}$. Genauer verlangen wir, dass

$$\varphi_j(b) = (x, \psi_j) \tag{19.20}$$

gilt mit $x = \pi(b)$ und $\psi_j \in Y$.

(ii) *Wechsel der lokalen Bündelkoordinaten:* Ist $x \in U_j \cap U_k$, dann werden jedem Bündelpunkt $b \in \mathbb{V}$ mit $\pi(b) = x$ zwei lokale Koordinaten (x, ψ_j) und (x, ψ_k) zugeordnet. Wir verlangen, dass sich der Wechsel dieser lokalen Koordinaten nach einem Gesetz der Form

$$\psi_j = \mathbb{L}_{jk}(x)\psi_k \tag{19.21}$$

vollzieht, wobei $\mathbb{L}_{jk}(x) : Y \rightarrow Y$ für jedes $x \in U_j \cap U_k$ eine lineare bijektive Abbildung ist.

Assoziierte Vektorraumbündel: Mit $GL(Y)$ bezeichnen wir die Gruppe aller linearen bijektiven Abbildungen des linearen Raumes Y auf sich. Es sei $\pi_1 : \mathbb{H} \rightarrow M$ ein Hauptfaserbündel mit der Strukturgruppe G und dem Transformationsgesetz

$$g_j = \mathbb{G}_{jk}(x)g_k$$

für die lokalen Koordinaten. Ferner sei $\gamma : G \rightarrow GL(Y)$ eine Darstellung der Gruppe G auf dem linearen Raum Y , d. h., jedem Gruppenelement g wird ein linearer bijektiver Operator $\gamma(g) : Y \rightarrow Y$ mit $\gamma(gh) = \gamma(g)\gamma(h)$ für alle $g, h \in G$ zugeordnet.

Das Vektorraumbündel $\pi : \mathbb{V} \rightarrow M$ heißt *assoziiert* zum Hauptfaserbündel $\pi_1 : \mathbb{H} \rightarrow M$ (bezüglich der Darstellung γ) genau dann, wenn (19.21) gilt mit

$$\mathbb{L}_{jk}(x) = \gamma(\mathbb{G}_{jk}(x)).$$

⁵Man spricht auch von einer lokalen Trivialisierung.

Liegen alle $\mathbb{L}_{jk}(x)$ in einer Untergruppe G von $GL(Y)$, dann nennen wir G die Strukturgruppe von \mathbb{V} .

Paralleltransport im assoziierten Vektorraumbündel: Gegeben sei eine Kurve $x = x(\sigma)$ auf der Basismannigfaltigkeit M des Vektorraumbündels $\pi : \mathbb{V} \rightarrow M$, das zu dem Hauptfaserbündel $\pi_1 : \mathbb{H} \rightarrow M$ assoziiert ist. Mittels der Darstellung γ von G kann man jedem Paralleltransport auf \mathbb{H} in natürlicher Weise einen Paralleltransport auf \mathbb{V} zuordnen, indem man lokale Bündelkoordinaten benutzt. Die folgende Konstruktion ist unabhängig von der Wahl der Bündelkoordinaten.

Unter einem Paralleltransport des Punktes $\psi(0) \in \mathbb{V}$ im Vektorraumbündel \mathbb{V} entlang der Basiskurve $x = x(\sigma)$ verstehen wir eine Kurve

$$\psi = \psi(\sigma) \quad \text{in } \mathbb{V}$$

mit $\pi(\psi(\sigma)) = x(\sigma)$ für alle σ , wobei in lokalen Bündelkoordinaten auf \mathbb{V} (bezüglich U_j) die Kurve $\psi = \psi(\sigma)$ durch

$$\psi_j(\sigma) = \gamma(g_j(\sigma))\psi_j(0) \tag{19.22}$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet $b = b(\sigma)$ einen Paralleltransport in \mathbb{H} längs des Weges $x = x(\sigma)$, der in lokalen Bündelkoordinaten (bezüglich U_j) die Form $g_j = g_j(\sigma)$ besitzt.

Durch $\Pi_\sigma \psi(0) := \psi(\sigma)$ definieren wir den zugehörigen Operator des Paralleltransports.

Kovariante Richtungsableitung für Schnitte in Vektorraumbündeln: Es sei $\psi : M \rightarrow \mathbb{V}$ ein Schnitt in dem Vektorraumbündel \mathbb{V} , d.h., es gilt $\pi(\psi(x)) = x$ für alle $x \in M$. Wir setzen $x_0 := x(0)$ und $v := \dot{x}(0)$. Dann heißt

$$(\nabla_v \psi)(x_0) := \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\Pi_\sigma^{-1} \psi(x(\sigma)) - \psi(x_0)}{\sigma}$$

die kovariante Richtungsableitung von ψ im Punkt x_0 in Richtung von v .

Diese Definition hängt tatsächlich nur von x und v ab.

Mit Hilfe der kovarianten Richtungsableitung ∇_v kann man in übersichtlicher Weise den Differentialkalkül auf Vektorraumbündeln aufbauen.

Das soll jetzt gezeigt werden.

Krümmung und Torsion des Vektorraumbündels \mathbb{V} : Es seien v und w Vektorfelder auf der Basismannigfaltigkeit M von \mathbb{V} .

Mit $C^\infty(M; \mathbb{V})$ bezeichnen wir den Raum aller C^∞ -Schnitte $\psi : M \rightarrow \mathbb{V}$. Dann erhalten wir durch

$$\varphi(x) := (\nabla_v \psi)(x)$$

einen neuen Schnitt $\varphi : M \rightarrow \mathbb{V}$. Genauer ist $\nabla_v : C^\infty(M; \mathbb{V}) \rightarrow C^\infty(M; \mathbb{V})$ ein linearer Operator im Raum der Schnitte.

Wir definieren nun den *Torsionsoperator* $\alpha(v, w)$ und den *Krümmungsoperator* $\beta(v, w)$ durch

$$\alpha(v, w) := \nabla_v - \nabla_w - [v, w],$$

$$\beta(v, w) := \nabla_v \nabla_w - \nabla_w \nabla_v - \nabla_{[v, w]}.$$

Dann sind $\alpha(v, w) : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ und $\beta(v, w) : C^\infty(\mathbb{V}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{V})$ lineare Abbildungen, die von v und w abhängen.⁶

⁶Mit $[v, w]$ bezeichnen wir die Lieklammer von Vektorfeldern auf M (vgl. 15.4.6).

Die Kurve $\psi = \psi(\sigma)$ in \mathbb{V} mit $\pi(\psi(\sigma)) = x(\sigma)$ für alle σ beschreibt genau dann einen Paralleltransport, wenn

$$\frac{D\psi(\sigma)}{d\sigma} := (\nabla_v \psi)(x(\sigma)) = 0$$

für alle σ gilt mit $v := \dot{x}(\sigma)$. Das ist eine verallgemeinerte Geradengleichung.

Kovariante Ableitung von p -Formen mit Werten im Vektorraumbündel \mathbb{V} : Unter einer p -Form auf der Basismannigfaltigkeit M mit Werten in \mathbb{V} verstehen wir ein Tensorprodukt

$$\omega \otimes \psi,$$

wobei ω eine klassische p -Form auf M und $\psi : M \rightarrow \mathbb{V}$ einen Schnitt von \mathbb{V} darstellt.

Wir definieren die kovariante Ableitung d_{∇} in natürlicher Weise durch⁷

$$d_{\nabla}(\omega \otimes \psi) = d\omega \otimes \psi + (-1)^p \omega \otimes \nabla \psi.$$

Allgemeinheit der Konstruktion: Die hier angegebenen Konstruktionen für Vektorraumbündel sind allgemeiner Natur, weil man zu jedem Vektorraumbündel $\pi : \mathbb{V} \rightarrow M$ in kanonischer Weise ein *Hauptfaserbündel* $\pi_1 : \mathbb{H} \rightarrow M$ konstruieren kann, das zu \mathbb{V} assoziiert ist. Man wählt hierzu die Gruppe $GL(Y)$ aller linearen bijektiven Operatoren $L : Y \rightarrow Y$. Während \mathbb{V} lokal wie $U_j \times Y$ aussieht, besitzt \mathbb{H} lokal die Struktur von

$$U_j \times GL(Y).$$

Den Übergangsabbildungen $\psi_j = \mathbb{L}_{jk}(x)\psi_k$ in \mathbb{V} mit $\mathbb{L}_{jk}(x) \in GL(Y)$ entsprechen die Übergangsabbildungen

$$g_j = \mathbb{L}_{jk}(x)g_k$$

in \mathbb{H} mit $g_j, g_k \in GL(Y)$.

Die direkte Summe (Whitneysumme) $\mathbb{V}^{(1)} \oplus \mathbb{V}^{(2)}$ zweier Vektorraumbündel: Gegeben seien zwei Vektorraumbündel

$$\pi_1 : \mathbb{V}^{(1)} \rightarrow M \quad \text{und} \quad \pi_2 : \mathbb{V}^{(2)} \rightarrow M$$

über der n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M . Man kann dann stets eine Überdeckung $\{U_j\}$ von M durch offene Mengen U_j wählen, so dass $\mathbb{V}^{(m)}$ lokal aussieht wie

$$U_j \times Y^{(m)},$$

d.h., der Übergang zwischen den lokalen Bündelkoordinaten $(x, \psi_j^{(m)}) \in U_j \times Y^{(m)}$ und $(x, \psi_k^{(m)}) \in U_k \times Y^{(m)}$ eines Punktes b von $\mathbb{V}^{(m)}$ mit $x \in U_j \cap U_k$ und $\pi_m(b) = x$ wird für festes $m = 1, 2$ durch

$$\psi_j^{(m)} = \mathbb{L}_{jk}^{(m)}(x)\psi_k^{(m)}$$

gegeben (vgl. (19.21)). Dabei sind $Y^{(1)}$ und $Y^{(2)}$ lineare Räume. Man kann nun in natürlicher Weise ein Vektorraumbündel konstruieren, das lokal wie

$$U_j \times (Y^{(1)} \oplus Y^{(2)})$$

aussieht, wobei die lokalen Bündelkoordinaten durch $(x, \psi^{(1)} \oplus \psi^{(2)})$ gegeben sind. Dieses Bündel bezeichnen wir mit $\mathbb{V}^{(1)} \oplus \mathbb{V}^{(2)}$.

⁷Explizit bedeutet das

$$d_{\nabla}(\omega \otimes \psi)(v_1, \dots, v_p, v) = d\omega(v_1, \dots, v_p, v) \otimes \psi + (-1)^p \omega(v_1, \dots, v_p) \otimes \nabla_v \psi$$

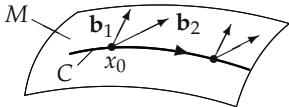
für alle $v_1, \dots, v_p, v \in TM_x$, wobei ω und ψ im Punkt $x \in M$ zu nehmen sind.

19.6 Anwendung auf die Methode des repère mobile von É. Cartan

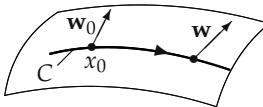
Grundidee: Es sei M eine Fläche im \mathbb{R}^3 . Ist im Punkt $x_0 \in M$ eine Basis $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ des Tangentialraumes gegeben, dann kann man jeden Tangentialvektor \mathbf{w}_0 , im Punkt x_0 in der Form

$$\mathbf{w}_0 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2$$

darstellen. Der Paralleltransport von \mathbf{w}_0 längs einer Kurve C ergibt sich in natürlicher Weise dadurch, dass man für alle Basen den Paralleltransport beherrscht (Abb. 19.4).



(a) Paralleltransport
von Repères



(b) Paralleltransport
von Tangentialvektoren

Abb. 19.4

Die Basen bezeichnet man auch als Repères.

Allgemeiner sei jetzt M eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit, und $GL(n)$ bezeichne die Liegruppe aller invertierbaren reellen $(n \times n)$ -Matrizen. Ferner sei $gl(n)$ die Liealgebra zu $GL(n)$, d. h., $gl(n)$ besteht aus allen reellen $(n \times n)$ -Matrizen. Das Ziel der eleganten Cartanschen Theorie besteht darin, die Krümmungsverhältnisse einer Mannigfaltigkeit M dadurch zu untersuchen, dass man zu dem Tangentialbündel TM von M das assoziierte Hauptfaserbündel konstruiert. Dieses ist gleich dem Repèrebündel $R(M)$ von M . Jede Zusammenhangsform A auf $R(M)$ induziert nach 19.5 auf TM einen Paralleltransport, eine kovariante Richtungsableitung, einen Torsionsoperator α und einen Krümmungsoperator β . Diese Größen entsprechen exakt den in 16.2.4 für lineare Zusammenhänge auf der Mannigfaltigkeit M eingeführten Größen. Man bezeichnet deshalb jede Zusammenhangsform A auf $R(M)$ als einen *linearen Zusammenhang* von M .

Das Tangentialbündel TM einer Mannigfaltigkeit M : Das Tangentialbündel TM einer n -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M besteht aus allen Paaren

$$(x, \mathbf{v}), \quad (19.23)$$

wobei x ein Punkt von M und $\mathbf{v} \in TM_x$ ein Tangentenvektor von M im Punkte x ist. Die Bündelabbildung $\pi : TM \rightarrow M$ ergibt sich durch $\pi(x, \mathbf{v}) := x$. Aus diesem Grund ist die Faser F_x über x gleich dem Tangentialraum TM_x im Punkte x . Um lokale Bündelkoordinaten einzuführen, wählen wir eine Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ von M mit $x \in U$ und die dazugehörige natürliche Basis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ im Tangentialraum TM_x (vgl. 15.1.6). Für $\mathbf{v} \in TM_x$ gilt

$$\mathbf{v} = \psi^j \mathbf{e}_j. \quad (19.24)$$

Definitionsgemäß heißt $(x; \psi^1, \dots, \psi^n)$ die Bündelkoordinate von (x, \mathbf{v}) .

Damit wird TM zu einem Vektorraumbündel mit der typischen Faser $Y = \mathbb{R}^n$.

Das Repèrebündel $R(M)$ einer Mannigfaltigkeit M : Definitionsgemäß besteht $R(M)$ aus allen $(n+1)$ -Tupeln

$$(x; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n), \quad (19.25)$$

wobei x ein beliebiger Punkt von M ist und $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ eine beliebige Basis des Tangentialraumes TM_x im Punkte x bezeichnet. Parallel zu (19.24) setzen wir

$$\mathbf{b}_k = g_k^j \mathbf{e}_j. \quad (19.26)$$

Die Matrix $g = (g_k^j)$ gehört dabei zu $GL(n)$. Ordnen wir dem Bündelpunkt in (19.25) die lokale Koordinate (x, g) zu, dann wird $\mathbf{R}(M)$ zu einem Hauptfaserbündel mit der Strukturgruppe $GL(n)$.

Satz: Das Tangentialbündel TM ist ein assoziiertes Vektorbündel zu dem Hauptfaserbündel $\mathbf{R}(M)$.

Beweis: Wählen wir eine neue Basis $\mathbf{e}_1^+, \dots, \mathbf{e}_n^+$ in TM_x , dann gilt

$$\mathbf{v} = \psi_+^j \mathbf{e}_j^+, \quad \mathbf{b}_k = g_{+k}^j \mathbf{e}_j^+, \quad \mathbf{e}_j = \mathbf{G}_j^r \mathbf{e}_r^+.$$

Daraus folgt $\psi_+^r = \mathbf{G}_j^r \psi_j^+$ und $g_{+k}^r = \mathbf{G}_j^r g_{jk}^+$. Fassen wir den oberen Index als Zeilenindex und den unteren Index als Spaltenindex auf, dann gilt in der Sprache der Matrizen

$$\psi_+ = \mathbf{G}(x)\psi, \quad g_+ = \mathbf{G}(x)g$$

mit $\mathbf{G}(x) \in GL(n)$, d.h., die lokalen Koordinaten von TM und $\mathbf{R}(M)$ transformieren sich in gleicher Weise. Folglich ist TM zu $\mathbf{R}(M)$ assoziiert. q.e.d.

Paralleltransport: Als Differentialgleichung des Paralleltransports entlang der Kurve $x = x(\sigma)$ wählen wir

$$\dot{g}(\sigma) + \dot{x}^j(\sigma) \mathbb{A}_j(x(\sigma)) g(\sigma) = 0.$$

Explizit entspricht das dem Paralleltransport von Repères

$$\mathbf{b}_j(\sigma) = g_j^k(\sigma) \mathbf{e}_k$$

und dem Paralleltransport

$$\mathbf{w}(\sigma) = w^j \mathbf{b}_j(\sigma)$$

von Tangentialvektoren mit $w^j = \text{const}$ für alle j . Der Operator des Paralleltransports ergibt sich dann durch

$$\Pi_\sigma \mathbf{w}(0) := \mathbf{w}(\sigma).$$

Kovariante Richtungsableitung von Tangentialvektorfeldern auf M : Gegeben sei ein Vektorfeld \mathbf{w} auf M . Durch

$$(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w})(x_0) := \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\Pi_\sigma^{-1} \mathbf{w}(x(\sigma)) - \mathbf{w}(x_0)}{\sigma}$$

definieren wir die kovariante Richtungsableitung des Vektorfeldes im Punkt $x = x(0)$ in Richtung von $\mathbf{v} = \dot{x}(0)$. Diese Definition hängt tatsächlich nur von der Richtung \mathbf{v} ab.

Die hier in anschaulicher Weise eingeführten Begriffe stimmen mit der allgemeinen Theorie überein, wenn man von einer Zusammenhangsform \mathbb{A} auf dem Repèrebündel $\mathbf{R}(M)$ ausgeht.

Die Christoffelsymbole: Stellen wir speziell den Paralleltransport durch die natürliche Basis dar, dann gilt

$$\mathbf{w}(\sigma) = v^k(\sigma) \mathbf{e}_k,$$

und wir erhalten für die Komponenten v^k die Differentialgleichung

$$\dot{v}^k(\sigma) = -\Gamma_{mj}^k(x(\sigma)) v^m(\sigma) \dot{x}^j(\sigma)$$

für alle σ . Das ist gleichbedeutend mit der Matrizengleichung

$$\dot{v}(\sigma) = -\dot{x}^j(\sigma) \mathbb{A}_j(x(\sigma)) v(\sigma).$$

Somit sind die klassischen Christoffelsymbole $\Gamma_{mj}^k(x)$ genau die Elemente derjenigen Matrix $\mathbb{A}_j(x)$, die in der Differentialgleichung des Paralleltransports auftritt.

Die kanonische Form θ auf $\mathbf{R}(M)$: Es sei $\pi'(p) : T\mathbf{R}(M)_p \rightarrow TM_x$ die Linearisierung der natürlichen Projektionsabbildung $\pi : \mathbf{R}(M) \rightarrow M$ im Punkte $p = (x; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$. Für jeden Tangentialvektor $v \in T\mathbf{R}(M)_p$ gehört $\pi'(p)v$ zum Tangentialraum TM_x und besitzt deshalb die Basisdarstellung

$$\pi'(p)v = v^j \mathbf{b}_j.$$

Die kanonische Form θ auf dem Repèrebündel $\mathbf{R}(M)$ wird durch die Spaltenmatrix

$$\theta_p(v) := (v^1, \dots, v^n)^T$$

für alle $p \in \mathbf{R}(M)$ und alle $v \in T\mathbf{R}(M)_p$ definiert.

19.6.1 Die globalen Strukturgleichungen von Cartan

Es sei \mathbb{A} ein linearer Zusammenhang, d. h., \mathbb{A} ist eine Zusammenhangsform auf dem Repèrebündel $\mathbf{R}(M)$ der Mannigfaltigkeit M . Daraus ergeben sich nach der allgemeinen Theorie die Krümmungsform \mathbb{F} und die Torsionsform \mathbb{T} durch

$$\mathbb{F} = D\mathbb{A}, \quad \mathbb{T} = D\theta \quad \text{auf } \mathbf{R}(M). \quad (19.27)$$

Das sind die *globalen Strukturgleichungen von Cartan*.

Durch Anwendung des Operators D auf (19.27) erhalten wir

$$D\mathbb{F} = 0, \quad D\mathbb{T} = \mathbb{F} \wedge \theta \quad \text{auf } \mathbf{R}(M). \quad (19.28)$$

Das sind die sogenannten *Bianchi-Identitäten*.

Die außerordentlich eleganten Gleichungen (19.27) und (19.28) beherrschen die Krümmungstheorie auf der Mannigfaltigkeit M .

Explizite Form der globalen Strukturgleichungen: Die Gleichung (19.27) ist gleichbedeutend mit

$$\mathbb{F} = d\mathbb{A} + \mathbb{A} \wedge \mathbb{A}, \quad \mathbb{T} = d\theta + \mathbb{A} \wedge \theta \quad \text{auf } \mathbf{R}(M). \quad (19.29)$$

Dabei sind \mathbb{A} und \mathbb{F} Formen auf $\mathbf{R}(M)$ mit Werten in der Liealgebra $gl(n)$, und θ sowie \mathbb{T} sind Formen auf $\mathbf{R}(M)$ mit Werten in \mathbb{R}^n , d. h., man hat für $i, j = 1, \dots, n$ die Matrizendarstellungen

$$\mathbb{A} = (\mathbb{A}_j^i), \quad \mathbb{F} = (\mathbb{F}_j^i), \quad \theta = (\theta^i), \quad \mathbb{T} = (\mathbb{T}^i).$$

Dabei sind die Komponenten \mathbb{A}_j^i usw. klassische Differentialformen auf $\mathbf{R}(M)$.

Die obigen Gleichungen sind als Matrizengleichungen zu verstehen, wobei die übliche Zahlenmultiplikation durch die \wedge -Multiplikation von Formen zu ersetzen ist. Die Strukturgleichungen (19.29) lauten explizit:⁸

$$\mathbb{F}_j^i = d\mathbb{A}_j^i + \mathbb{A}_k^i \wedge \mathbb{A}_j^k, \quad \mathbb{T}^i = d\theta^i + \mathbb{A}_j^i \wedge \theta^j \quad \text{auf } \mathbf{R}(M). \quad (19.30)$$

⁸Über gleiche obere und untere Indizes wird von 1 bis n summiert.

19.6.2 Die lokalen Strukturgleichungen von Cartan

Lokalisierung der Formen auf $\mathbb{R}(M)$: Sei U eine offene Menge der Basismannigfaltigkeit M . Wir betrachten einen Schnitt $s : U \rightarrow \mathbb{R}(M)$, d.h., für alle $x \in U$ ist

$$s(x) := (x, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n).$$

Mit Hilfe von s kann man die Formen $\mathbb{A}, \mathbb{F}, \mathbb{T}, \theta$ auf die offene Teilmenge U von M „herunterziehen“, indem man zu den „pull-backs“

$$\mathbb{A}_U := s^* \mathbb{A}, \quad \mathbb{F}_U := s^* \mathbb{F}, \quad \mathbb{T}_U := s^* \mathbb{T}, \quad \theta_U := s^* \theta \quad \text{auf } U,$$

übergeht. Wir setzen $\mathbb{A}_U = (\omega_j^i)$, $\mathbb{F}_U = (\Omega_j^i)$, $\mathbb{T}_U = (\Theta^i)$ und $\theta_U = (b^i)$.

Dann ist $\{b^i\}$ die duale Basis zu $\{\mathbf{b}_j\}$, d.h., es gilt $b^i(\mathbf{b}_j) = \delta_j^i$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ in jedem Punkt $x \in U$.

Lokalisierung der Strukturgleichungen: Man erhält sofort aus den globalen Strukturgleichungen (19.30) die sogenannten *lokalen Strukturgleichungen von Cartan*

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k, \quad \Theta^i = db^i + \omega_j^i \wedge b^j \quad \text{auf } U.$$

Damit ist der Anschluss an die in 16.2.4 dargestellte Theorie auf der Basismannigfaltigkeit M hergestellt. Speziell hängt ω_j^i bzw. Ω_j^i von den Christoffelsymbolen bzw. vom Krümmungstensor ab. Ferner lässt sich Θ^i durch die Torsionskoeffizienten darstellen, die identisch verschwinden, falls die Christoffelsymbole in den unteren Indizes symmetrisch sind (z.B. in der Riemannschen Geometrie).

19.7 Die Wegabhängigkeit des Paralleltransports, Holonomiegruppen und der Aharonov-Bohm-Effekt in der Quantenmechanik

Die Holonomiegruppen eines Hauptfaserbündels messen die *Wegabhängigkeit* des Paralleltransports in Hauptfaserbündeln und somit auch in den assoziierten Vektorraumbündeln. Es sei $\pi : \mathbb{H} \rightarrow M$ ein Hauptfaserbündel über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M mit einem festen Zusammenhang \mathbb{A} . Wir betrachten alle stetigen geschlossenen Wege

$$C : x = x(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

in M , die im Punkt x beginnen und enden, d.h., es ist $x(0) = x(1) = x$. Durch den Paralleltransport in \mathbb{H} entsteht eine Kurve

$$p = p(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

wobei jeder Kurvenpunkt $p(\sigma)$ in der Faser $F_{x(\sigma)}$ über dem Basispunkt $x(\sigma)$ liegt (Abb. 19.5). Setzen wir $\Pi_C p(0) := p(1)$, dann ergibt sich ein Diffeomorphismus

$$\Pi_C : F_x \rightarrow F_x$$

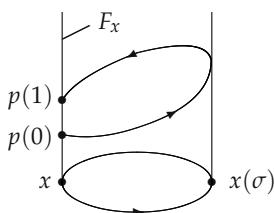


Abb. 19.5

der Faser F_x in sich. Wir definieren das Produkt DC zweier Wege C und D als denjenigen Weg, der entsteht, wenn man zuerst C und anschließend D durchläuft. In natürlicher Weise setzen wir

$$\Pi_D \Pi_C := \Pi_{DC}.$$

Definition der Holonomiegruppe: Mit dem soeben definierten Produkt wird die Menge aller Faserdiffeomorphismen Π_C zu einer Gruppe, die man die Holonomiegruppe G_x von \mathbb{H} im Punkt x nennt (bezüglich des Zusammenhangs \mathbb{A}).

Satz von Ambrose und Singer: (i) Die Holonomiegruppe G_x ist eine Lieuntergruppe der Strukturgruppe G des Hauptfaserbündels \mathbb{H} .

(ii) Die Liealgebra $\mathbb{L}G_x$ wird von allen Elementen der Form

$$\mathbb{F}_p(v, w)$$

mit $v, w \in T\mathbb{H}_p$ aufgespannt, wobei p irgendein fester Punkt auf der Faser F_x ist und $\mathbb{F} = D\mathbb{A}$ die Krümmungsform bezeichnet.

► **BEISPIEL:** Gilt $\mathbb{F}_p = 0$ für einen festen Punkt $p \in F_x$, dann ist die Holonomiegruppe G_x trivial, d.h., sie besteht nur aus dem Einselement. Folglich führt der Paralleltransport von p längs jedes geschlossenen Weges C wieder auf den Ausgangspunkt p .

► **STANDARDBEISPIEL** (Holonomie in der Elektrodynamik): Wie in 10.2.10 betrachten wir das Hauptfaserbündel $\mathbb{H} = M_4 \times U(1)$ über dem vierdimensionalen Minkowskiraum M_4 . Die Gleichung des Paralleltransports lautet dann

$$\dot{g}(t) + i\dot{x}^j(t) A_j(x(t)) g(t) = 0$$

mit $g(t) \in U(1)$, also $g(t) = e^{i\varphi(t)}$. Dabei bezeichnet A_j das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes. Die Lösung ist

$$g(t) = e^{i\varphi(t)}, \quad \varphi(t) = \varphi(0) - \int_0^t A_j(\mathbf{x}(\sigma)) \dot{x}^j(\sigma) d\sigma.$$

Ist nur ein magnetisches Feld \mathbf{B} vorhanden, dann gilt $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ und $A_0 = 0$. Für die Phasenverschiebung erhalten wir jetzt

$$\varphi(t) = \varphi(0) - \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{x}(\sigma)) \dot{\mathbf{x}}(\sigma) d\sigma.$$

Wichtig ist, dass diese Phasenverschiebung vom Weg $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ abhängt.

Diese Holonomie kann physikalisch direkt *beobachtet* werden. Hinter einer Wand mit zwei Spalten befindet sich eine stromdurchflossene Spule mit einem Magnetfeld \mathbf{B} (Abb. 19.6). Schickt man einen Elektronenstrahl durch die beiden Spalten, dann entsteht bei der Zusammenführung der beiden Strahlen auf einem Schirm ein *Interferenzbild*. Dieses verändert sich bei Einschalten des Stroms in der Spule, obwohl sich am Schirm kein Magnetfeld befindet. Das ist der berühmte *Aharonov–Bohm-Effekt*. Dieser kann dadurch erklärt werden, dass das Interferenzbild durch Superposition der Wellenfunktionen

$$\Psi_j := e^{i\varphi_j} \psi_j(\mathbf{x}, t)$$

der beiden Strahlen C_1 und C_2 am Schirm entsteht. Da beide Strahlen unterschiedliche Wege durchlaufen, differiert ihre Phasenverschiebung φ_j . Um die Phasenverschiebung zu erklären, beachten wir den Zusammenhang $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ zwischen dem Magnetfeld \mathbf{B} und dem Vektorpotential \mathbf{A} zusammen mit dem Integralsatz von Stokes:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B} \mathbf{n}) dF = \int_{\Omega} (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A}) dF = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} dx.$$

In Abb. 19.6 ergibt sich deshalb der Ausdruck

$$\int_{C_1} \mathbf{A} d\mathbf{x} - \int_{C_2} \mathbf{A} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{n}) dF.$$

Aus $\int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{n}) dF \neq 0$ folgt

$$\int_{C_1} \mathbf{A} d\mathbf{x} \neq \int_{C_2} \mathbf{A} d\mathbf{x}.$$

Das ist die beobachtete Phasenverschiebung, welche durch das nicht verschwindende Magnetfeld \mathbf{B} im Gebiet Ω zwischen den beiden Kurven C_1 und C_2 verursacht wird.

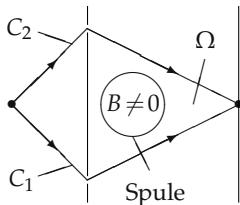


Abb. 19.6

Zusätzlich beachte man folgendes. Für jede glatte Funktion U hat man die Identität $\text{rot}(\text{grad } U) = 0$. Daraus folgt

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad } U).$$

Somit ist das Vektorpotential \mathbf{A} durch das Magnetfeld \mathbf{B} nicht eindeutig bestimmt. Die oben erwähnte Phasenverschiebung kann physikalisch gemessen werden, während das Vektorpotential \mathbf{A} selbst nicht physikalisch messbar ist. Mathematisch entspricht \mathbf{A} einem Zusammenhang auf dem Hauptfaserbündel $M_4 \times U(1)$.

Derartige physikalisch relevante Phasenverschiebungen auf Grund von Holonomieeffekten in Eichtheorien stellen ein allgemeines Phänomen dar und werden häufig unter dem Stichwort *Berry's Phase* zusammengefasst (vgl. [Nakahara 1990]).

19.8 Die Struktur Riemannscher Flächen

Der Begriff der Riemannschen Fläche R wurde von Bernhard Riemann (1826-1866) eingeführt, um mehrdeutige Funktionen eines komplexen Arguments auf R eindeutig werden zu lassen. Dadurch gelang es ihm, schwierige Probleme für algebraische Funktionen und deren Integrale (elliptische und Abelsche Integrale) in sehr durchsichtiger Weise mit Hilfe von topologischen Betrachtungen zu lösen. Die Untersuchung Riemannscher Flächen hat die Entwicklung vieler Zweige der Mathematik außerordentlich befriedigt (z. B. Analysis, Topologie, algebraische Geometrie und Zahlentheorie). Zu den tiefsten klassischen Sätzen über Riemannsche Flächen gehören der Satz von Abel, der Satz von Riemann-Roch und der Uniformisierungssatz von Poincaré-Koebe.

Definition: Unter einer *Riemannschen Fläche* R verstehen wir eine zusammenhängende eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

Einfachste Beispiele für Riemannsche Flächen sind die komplexe Ebene \mathbb{C} und die Riemannsche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (vgl. 1.14.11.4.).

Aufgrund des Satzes von Radó besitzt jede Riemannsche Fläche eine abzählbare Basis (vgl. 15.1.10).

Konforme Äquivalenz: Zwei Riemannsche Flächen R und S heißen genau dann *äquivalent*, wenn es einen Diffeomorphismus

$$\varphi : R \rightarrow S$$

gibt. Dann ist φ eine konforme (winkeltreue) Abbildung von R auf S . Deshalb spricht man auch häufig von konformer Äquivalenz.

Äquivalente Riemannsche Flächen entsprechen in der modernen Stringtheorie dem gleichen Stringzustand (vgl. 19.13).

Holomorphe und meromorphe Funktionen: Eine Funktion $f : R \rightarrow C$ heißt genau dann *holomorph*, wenn sich f in jedem Punkt von R bezüglich lokaler Koordinaten in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

Ferner heißt f genau dann *meromorph*, wenn f holomorph ist bis auf eine Menge von isolierten Punkten, denen in lokalen Koordinaten Pole endlicher Ordnung entsprechen (vgl. 1.14.6.4.).

Holomorphe und meromorphe 1-Formen: Wir können jede Riemannsche Fläche X als zweidimensionale reelle Mannigfaltigkeit auffassen, indem wir die lokale Koordinate $z = x + iy$ mit (x, y) identifizieren. Dann ist X orientiert. Es sei ω eine 1-Form auf der reellen Mannigfaltigkeit X mit komplexen Werten. Dann besitzt ω in lokalen Koordinaten die Gestalt

$$\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy.$$

Die 1-Form ω heißt genau dann *holomorph* (bzw. *meromorph*), wenn nach der Substitution $z = x + iy$, also $x = (z + \bar{z})/2$ und $y = (z - \bar{z})/2i$, die lokale Gestalt

$$\omega = f(z) dz$$

entsteht, wobei f holomorph (bzw. meromorph) ist. Das Residuum

$$(\text{Res } \omega)(P) := (\text{Res } f)(z_p)$$

der 1-Form ω im Punkt P ist definitionsgemäß gleich dem Residuum der Funktion f im Punkt z_p , wobei z_p die lokale Koordinate von P bezeichnet (vgl. 1.14.6.2.). Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten.

Abelsche Integrale: Unter einem Abelschen Integral verstehen wir ein Integral

$$J = \int_C \omega$$

über eine meromorphe 1-Form ω , wobei C eine Kurve auf der Riemannschen Fläche ist. In lokalen Koordinaten gilt

$$J = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Genauer zerlegt man die Kurve C in Teilkurven und verwendet für jede Teilkurve eine lokale Koordinatendarstellung $z = z(t)$.

Elliptische Integrale sind spezielle Abelsche Integrale.

19.8.1 Algebraische Funktionen als komplexe Kurven

► **STANDARDBEISPIEL 1** (Quadratwurzel): Um die mehrdeutige Funktion $w = \sqrt{z}$ zu studieren, betrachten wir die Gleichung

$$F(z, w) := w^2 - z = 0. \quad (19.31)$$

Die folgenden Untersuchungen werden so durchgeführt, dass sie sich auf beliebige algebraische Funktionen verallgemeinern lassen. Wir fassen (19.31) als Gleichung einer *komplexen Kurve* auf mit dem Graphen

$$\mathbf{R}_0 := \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : F(z, w) = 0\}.$$

Lokale Uniformisierung und Riemannsche Fläche: Es sei $(z_0, w_0) \in \mathbf{R}_0$. Dann existiert eine Nullumgebung $V(0)$ in \mathbb{C} , so dass sich die Lösung von (19.31) in einer Umgebung des Kurvenpunktes (z_0, w_0) durch

$$z = z_0 + t^n, \quad w = \varphi(t) \quad \text{für alle } t \in V(0) \quad (19.32)$$

darstellen lässt mit einer natürlichen Zahl $n = 1, 2$ und einer holomorphen Funktion $\varphi : V(0) \rightarrow \mathbb{C}$.

Dabei gilt $n = 1$ für $F_w(z_0, w_0) \neq 0$. Das folgt aus dem Satz über implizite Funktionen (vgl. 12.5). Im Fall $n = 1$ (bzw. $n = 2$) heißt z_0 ein *regulärer Punkt* (bzw. ein *Verzweigungspunkt*). Im vorliegenden Spezialfall ist jeder Punkt $z_0 \neq 0$ ein regulärer Punkt mit $n = 1$ und $\varphi(t) := t^2$, während $z_0 = 0$ einen Verzweigungspunkt darstellt mit $n = 2$ und $\varphi(t) := t$.⁹

Um das Verhalten der Kurve im Unendlichen zu untersuchen, setzen wir

$$z = \frac{1}{Z}, \quad w = \frac{1}{W}.$$

Aus $w^2 - z = 0$ folgt dann $Z - W^2 = 0$ mit der lokalen Lösung

$$Z = t^n, \quad W = \varphi(t) \quad \text{für alle } t \in V(0). \quad (19.33)$$

Im vorliegenden Spezialfall ist $n = 2$ und $\varphi(t) := t$. Die erweiterte Menge

$$\mathbf{R} := \mathbf{R}_0 \cup \{(\infty, \infty)\}$$

wird nun zu einer (kompakten) *Riemannschen Fläche*, falls man als lokale Koordinaten jeweils alle t in $V(0)$ wählt.

Globale Uniformisierung von \mathbf{R} : Auf der punktierten Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ führen wir die lokale Koordinate w ein, während wir auf $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ die lokale Koordinate $W = \frac{1}{w}$ verwenden. Dann entspricht $W = 0$ dem Punkt ∞ (vgl. Abb. 1.182). Setzen wir

$$\psi(w) := (w^2, w) \quad \text{auf } \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}, \quad \psi(W) := (W^2, W) \quad \text{auf } \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\},$$

dann erhalten wir einen Diffeomorphismus

$$\psi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbf{R}$$

von der Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ auf die Riemannsche Fläche \mathbf{R} , d. h., \mathbf{R} ist äquivalent zu $\overline{\mathbb{C}}$.

⁹Für allgemeine algebraische Funktionen gilt $n = 1, 2, \dots$; Verzweigungspunkte entsprechen $n \geq 2$.

Überlagerung und Faserbündel: Durch $p(z, w) := z$ ergibt sich eine glatte surjektive Abbildung

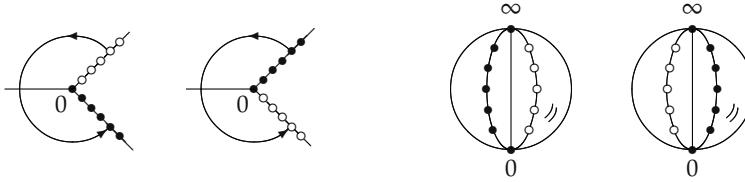
$$p : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}.$$

Die Faser $F_z := p^{-1}(z)$ entspricht dabei den beiden Werten w von \sqrt{z} , die für $z = 0$ und $z = \infty$ zusammenfallen. Entfernen wir die beiden Verzweigungspunkte aus \mathbb{R} , dann erhalten wir die reduzierte Riemannsche Fläche R_* . Nunmehr ist

$$p : R_* \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

eine Überlagerung, wobei jede Faser aus genau zwei Punkten besteht (vgl. 18.3.3).

Anschauliche Darstellung der Riemannschen Fläche: Nach 1.14.11.6. kann man eine Riemannsche Fläche R_1 für $w = \sqrt{z}$ aufbauen, indem man zwei Exemplare der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} längs der positiven reellen Achse aufschneidet, die Schnittufer kreuzweise miteinander verklebt und den Punkt ∞ hinzufügt. Umläuft man den Nullpunkt wie in Abb. 19.7(a), dann erreicht man nach zwei Umläufen den Ausgangspunkt.



(a) zwei Zahlenebenen

(b) zwei Zahlenkugeln
(kreuzweise verheftet)

Abb. 19.7

Stattdessen kann man auch eine Riemannsche Fläche R_2 konstruieren, indem man zwei Riemannsche Zahlenkugeln längs eines halben Längenkreises vom Nordpol zum Südpol aufschneidet und die Schnittufer kreuzweise miteinander verklebt. Bläst man R_2 wie einen Luftballon auf, dann erkennt man, dass R_2 homöomorph ist zur Riemannschen Zahlenkugel, d. h., R_2 besitzt das Geschlecht $g = 0$ (vgl. 18.2.1).

Alle so konstruierten Riemannschen Flächen R, R_1 und R_2 sind zueinander äquivalent.

Um die vorliegende Situation anschaulich zu erläutern, betrachten wir den reellen Spezialfall der Kurve $z = w^2$ mit $z, w \in \mathbb{R}$ (Abb. 19.8). Der Graph dieser Kurve ist eine Mannigfaltigkeit und verhält sich völlig regulär. Die scheinbare Komplikation tritt nur auf, falls man z als unabhängige Variable wählt. Dann entsprechen jedem Wert $z > 0$ zwei Kurvenpunkte (z, w) .

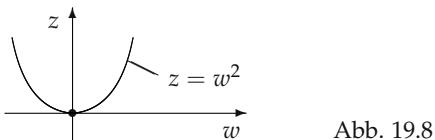


Abb. 19.8

► **STANDARDBEISPIEL 2** (elliptische Integrale und elliptische Funktionen): Wir betrachten die Gleichung

$$F(z, w) := w^2 - 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3) = 0 \quad (19.34)$$

mit den drei verschiedenen, fest vorgegebenen komplexen Zahlen e_1, e_2, e_3 , d. h., wir studieren die mehrdeutige Funktion

$$w = \sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}. \quad (19.35)$$

Der Graph der zugehörigen komplexen Kurve ist durch

$$\mathbf{R}_0 := \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : F(z, w) = 0\}$$

gegeben.

Lokale Uniformisierung: Es sei $(z_0, w_0) \in \mathbf{R}_0$.

(i) *Regulärer Fall* $F_w(z_0, w_0) \neq 0$, also $z_0 \neq e_1, e_2, e_3$: Nach dem Satz über implizite Funktionen erhalten wir die lokale Darstellung (19.32) von \mathbf{R}_0 mit $n = 1$.

(ii) *Verzweigungsfall* $F_w(z_0, w_0) = 0$, also $z_0 = e_1, e_2, e_3$: Der Ansatz $z = e_1 + t^2, w(t) = t\psi(t)$ in (19.34) liefert

$$t^2\psi(t)^2 = 4t^2(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2) = t^2(a_0 + a_1t + \dots),$$

also $\psi(t) = \sqrt{a_0 + a_1t + \dots}$. Wegen $a_0 \neq 0$ stellt das in einer kleinen Umgebung von $t = 0$ eine holomorphe Funktion dar (nach Fixierung des Vorzeichens der Wurzel). Wir erhalten auf diese Weise für die Verzweigungspunkte $z_0 = e_1, e_2, e_3$ eine lokale Darstellung von \mathbf{R}_0 der Form (19.32) mit $n = 2$.

(iii) *Verhalten im Unendlichen:* Setzen wir $z = 1/Z, w = 1/W$, dann erhalten wir aus (19.34) die Gleichung

$$Z^3 = 4W^2(1 - e_1Z)(1 - e_2Z)(1 - e_3Z).$$

Analog zu (ii) ergibt sich die lokale Lösungsdarstellung

$$W = t^3, \quad Z = t^2\zeta(t)$$

in einer kleinen Umgebung von $t = 0$ mit einer geeigneten holomorphen Funktion ζ .

Kompakte Riemannsche Fläche: Die erweiterte Menge

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \cup \{(\infty, \infty)\}$$

wird zu einer kompakten Riemannschen Fläche, falls man die in (i) bis (iii) eingeführten lokalen Koordinaten t verwendet. Wir bezeichnen \mathbf{R} als die Riemannsche Fläche der algebraischen Funktion (19.35).

Anschauliche Konstruktion der Riemannschen Fläche: Wir wählen zwei Exemplare der Riemannschen Zahlenkugel, schneiden diese längs der Punkte e_1, e_2 bzw. e_3, ∞ auf und verkleben die Schnittufer kreuzweise.

Das ergibt die Riemannsche Fläche \mathbf{R}_1 (Abb. 19.9). Diese ist homöomorph zum Torus vom Geschlecht $g = 1$. Ferner ist \mathbf{R} äquivalent zu \mathbf{R}_1 .

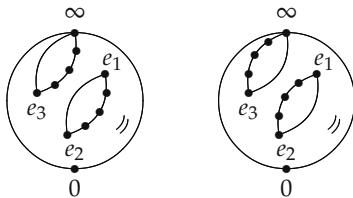


Abb. 19.9

Globale Uniformisierung: Unter der globalen Uniformisierung einer Kurve versteht man eine globale Parametrisierung mit einem einfach zusammenhängenden Parameterbereich.¹⁰ Für die

¹⁰Das klassische Standardbeispiel ist die Parameterdarstellung $z = \cos t, w = \sin t, t \in \mathbb{R}$, der Kreislinie S^1 . Betrachten wir die Komplexfizierung $S := \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z^2 + w^2 = 1\}$, dann erhält man eine globale Parameterdarstellung durch

$$z = \cos t, \quad w = \sin t, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Das ist die globale Uniformisierung der komplexen Kurve S , welche der Riemannschen Fläche von $w = \sqrt{1 - z^2}$ entspricht (ohne Kompaktifizierung im Unendlichen).

Kurve (19.34) erhält man die globale Parametrisierung (Uniformisierung)

$$z = \wp(t), \quad w = \wp'(t), \quad t \in \mathbb{C}. \quad (19.36)$$

Dabei bezeichnet $\wp : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ die meromorphe Weierstraßsche \wp -Funktion. Diese Funktion ist doppelperiodisch (elliptisch) mit den beiden gegebenen komplexen Perioden $2\omega_1, 2\omega_2$, wobei $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ gilt, d.h., es ist

$$\wp(t + 2\omega_1 n + 2\omega_2 m) = \wp(t)$$

für alle $t \in \mathbb{C}$ und alle ganzen Zahlen n, m (Abb. 19.10(a)).

Explizit gilt

$$\wp(t) := \frac{1}{t^2} + \sum_{\Omega} \left(\frac{1}{(t - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right).$$

Summiert wird dabei über alle Gitterpunkte $\Omega = 2\omega_1 n + 2\omega_2 m$ mit $\Omega \neq 0$. Ferner ist $\wp(0) = \infty$, $\wp(\omega_1) = e_1$, $\wp(\omega_2) = e_2$ und $\wp(\omega_1 + \omega_2) = e_3$.

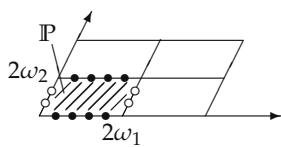
Definieren wir $p(t) := (\wp(t), \wp'(t))$, dann erhalten wir eine universelle Überlagerung

$$p : \mathbb{C} \rightarrow R \quad (19.37)$$

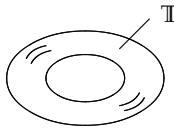
der Riemannschen Fläche R (vgl. 18.3.4). Bezeichnet \mathbb{P} das Periodenparallelogramm in Abb. 19.10(a), wobei wir gegenüberliegende Seiten miteinander identifizieren, dann ist

$$p : \mathbb{P} \rightarrow R$$

ein Diffeomorphismus, d.h., die Riemannsche Fläche R ist zu \mathbb{P} äquivalent. Ferner ist \mathbb{P} zum Torus T in Abb. 19.10(b) homöomorph.



(a)



(b)

Abb. 19.10

Das Lften von Wegen: Ist $p : \mathbb{B} \rightarrow M$ eine universelle Überlagerung (vgl. 18.3.4), dann kann jede stetige Kurve

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow M$$

auf der Basismannigfaltigkeit M bei Vorgabe eines Punktes $P \in \mathbb{B}$ eindeutig zu einer stetigen Kurve $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}$ in der Überlagerungsmannigfaltigkeit \mathbb{B} geliftet werden, d.h., es ist

$$p(b(\sigma)) = \varphi(\sigma) \quad \text{für alle Parameterwerte } \sigma \in [0, 1].$$

Elliptische Integrale: Es sei K eine glatte Kurve auf der Riemannschen Fläche R der algebraischen Funktion (19.35). Bezeichnet $t = t(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq 1$, eine Liftung von K in die universelle Überlagerungsfläche \mathbb{C} von R , dann gilt

$$\int_K F(z, w) dz = \int_0^1 F(\wp(t(\sigma)), \wp'(t(\sigma))) z'(\sigma) d\sigma.$$

Diese Formel ist unabhängig von der gewählten Liftung von K .

Durch die Lifting können Kurvenintegrale auf der Riemannschen Fläche R in Kurvenintegrale auf der viel *einfacheren* universellen Überlagerungsfläche U überführt werden. Im vorliegenden Fall ist U gleich der komplexen Ebene C . Im allgemeinen Fall ist U die komplexe Ebene, die Riemannsche Zahlenkugel oder der offene Einheitskreis. Das war der historische Ausgangspunkt für die Uniformisierungstheorie (vgl. 19.8.3).

Beispielsweise erhält man wegen $z = \wp(t)$, $w = \wp'(t)$ sofort

$$\int_K \frac{dz}{w} = \int_K \frac{dz}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}} = \int_0^1 \frac{\wp'(t(\sigma))t'(\sigma)}{\wp'(t(\sigma))} d\sigma = \int_0^1 t'(\sigma) d\sigma = t(1) - t(0).$$

Folglich stellt dieses elliptische Integral die Umkehrfunktion der \wp -Funktion dar. Die Perioden von \wp erhält man dadurch, dass man in Abb. 19.10(a) von $t = 0$ bis $t = 2\omega_1$ (bzw. von $t = 0$ bis $t = 2\omega_2$) integriert. Der tiefere *topologische Grund* für die Existenz der beiden Perioden ergibt sich daraus, dass es auf dem Torus T in Abb. 19.10(b) zwei geschlossene Kurven gibt, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen. (Man wähle z. B. einen Breitenkreis und einen Längenkreis.)

Sind K_1 und K_2 zwei Kurven auf der Riemannschen Fläche (bzw. auf dem Torus T) mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt, dann gilt

$$\int_{K_1} F(z, w) dz = \int_{K_2} F(z, w) dz,$$

falls sich K_1 und K_2 auf R (bzw. auf T) stetig ineinander deformieren lassen, d. h., beide Wege sind zueinander homotop.

19.8.2 Kompakte Riemannsche Flächen

Unter einer (mehrdeutigen) algebraischen Funktion $w = w(z)$ verstehen wir die Lösungsmenge einer algebraischen Gleichung der Form

$$a_n(z)w^n + a_{n-1}(z)w^{n-1} + \dots + a_1(z)w + a_0(z) = 0, \quad z, w \in C. \quad (19.38)$$

Dabei seien alle a_j Polynome mit $a_n(z) \not\equiv 0$. Ferner sei die Gleichung (19.38) irreduzibel, d. h., die linke Seite lässt sich nicht in zwei nichttriviale Faktoren zerlegen.¹¹

Wie in 19.8.1 erhält man für (19.38) lokale Uniformisierungen, aus denen sich die zugehörige Riemannsche Fläche R ergibt. Diese ist kompakt und somit homöomorph zu einer Kugel mit g Henkeln (vgl. 18.2.1). Da g die einzige topologische Invariante von R ist, müssen sich alle topologischen Eigenschaften der algebraischen Funktionen (19.38) durch das von Riemann eingeführte *Geschlecht* g ausdrücken lassen.

Satz von Riemann: Jede kompakte Riemannsche Fläche R ist äquivalent zur Riemannschen Fläche einer algebraischen Funktion.

Satz von Liouville: Eine holomorphe Funktion auf einer kompakten Riemannschen Fläche ist konstant.

Deshalb sind auf kompakten Riemannschen Flächen nur meromorphe Funktionen mit Polstellen interessant. Die Struktur dieser meromorphen Funktionen wird durch den berühmten Satz von Riemann–Roch beschrieben. Hierzu benötigt man Divisoren, die die Ordnungen der Null- und Polstellen meromorpher Funktionen beschreiben.

¹¹Für $w^2 - z^2 = 0$ gilt zum Beispiel $(w - z)(w + z) = 0$. Diese Gleichung zerfällt in die beiden irreduziblen Gleichungen $w - z = 0$ und $w + z = 0$. Es genügt deshalb, irreduzible Gleichungen zu betrachten.

Divisoren: Unter einem Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche R versteht man eine 0-Kette mit ganzzahligen Koeffizienten

$$D = \sum_{P \in R} D(P)P,$$

d.h., alle $D(P)$ sind ganzzahlig und nur in endlich vielen Punkten P von null verschieden (vgl. 18.6.2). Der *Grad* des Divisors wird durch

$$\text{grad } D := \sum_{P \in R} D(P)$$

erklärt.

► **BEISPIEL 1:** Ist $f : R \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion auf R , dann definieren wir den *Ordnungsdivisor* ord_f durch

$$\text{ord}_f := \sum_{P \in R} \text{ord}_f(P)P.$$

Dabei ist $\text{ord}_f(P) := n$ (bzw. $:= -n$), falls f in P eine Nullstelle (bzw. eine Polstelle) der Ordnung n besitzt. In den übrigen Punkten sei $\text{ord}_f(P) = 0$.

Der folgende grundlegende Satz von Abel (1802-1829) gibt darüber Auskunft, wann meromorphe Funktionen mit vorgeschriebenen Null- und Polstellen existieren.

Satz von Abel: Zu einem Divisor D auf der kompakten Riemannschen Fläche R mit $\text{grad } D = 0$ gibt es genau dann eine meromorphe Funktion $f : R \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$\text{ord}_f = D,$$

falls eine singuläre¹² 1-Kette c auf R existiert mit $\partial c = D$ und

$$\int_c \omega_j = 0, \quad j = 1, \dots, g,$$

für eine beliebige feste Basis $\omega_1, \dots, \omega_g$ des linearen Raumes der holomorphen 1-Formen auf R .

► **BEISPIEL 2:** Auf der Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ mit $g = 0$ gibt es zu jedem Divisor D mit $\text{grad } D = 0$ stets eine meromorphe Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit $\text{ord}_f = D$. Schreiben wir zum Beispiel eine Nullstelle erster Ordnung in $z = 0$ und eine Polstelle n -ter Ordnung in $z = \infty$ vor, dann folgt aus $\text{grad } D = 1 - n = 0$ sofort $n = 1$. Die gesuchte Funktion ist $f(z) := z$.

Die wichtigsten Objekte auf Riemannschen Flächen sind meromorphe Funktionen und meromorphe 1-Formen. Der folgende grundlegende Satz gibt Auskunft über die Struktur dieser Objekte.

Satz von Riemann–Roch: Auf einer kompakten Riemannschen Fläche R gilt für jeden Divisor D :

$$D^0 - D^1 = 1 - g + \text{grad } D. \tag{19.39}$$

Kommentar: Dabei ist D^0 gleich der Maximalzahl linear unabhängiger meromorpher Funktionen $f : R \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$\text{ord}_f(P) \geq -D(P) \quad \text{für alle Punkte } P \in R.$$

¹²Es ist $c = \sum_{P,Q} \alpha_{PQ}(PQ)$ mit $\partial c = \sum_{P,Q} \alpha_{PQ}(Q - P)$. Dabei bezeichnet (PQ) eine glatte Kurve auf R , die von P nach Q führt, und α_{PQ} sind reelle Zahlen (vgl. 18.6.2). Definitionsgemäß gilt

$$\int_c \omega = \sum_{P,Q} \alpha_{PQ} \int_{(PQ)} \omega.$$

Ferner ist D^1 gleich der Maximalzahl meromorpher 1-Formen ω auf R mit

$$\text{ord}_\omega(P) \geq D(P) \quad \text{für alle Punkte } P \in R.$$

Das bedeutet $\omega = f(z) dz$ und $\text{ord}_f(z) \geq D(z)$ in lokalen Koordinaten.

Satz von Riemann: Es gilt

$$D^0 \geq 1 - g + \text{grad } D.$$

Beweis: Wegen $D^1 \geq 0$ folgt das sofort aus (19.39).

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Für eine kompakte Riemannsche Fläche R vom Geschlecht g gilt:

(i) Es gibt genau g linear unabhängige holomorphe 1-Formen auf R .

(ii) Zu einem vorgegebenen Punkt $Q \in R$ gibt es eine meromorphe Funktion auf R , die in Q eine Polstelle der Ordnung $\leq g+1$ besitzt und in den übrigen Punkten von R holomorph ist.

Beweis: Zu (i). Wir wählen den Divisor $D \equiv 0$. Die einzigen holomorphen Funktionen auf R sind die Konstanten (Satz von Liouville). Deshalb ist $D^0 = 1$. Aus (19.39) mit $\text{grad } D = 0$ folgt dann $D^1 = g$.

Zu (ii). Wir wählen den Divisor D mit $D(Q) := g+1$ und $D(P) := 0$ für alle Punkte $P \neq Q$. Dann ist $\text{grad } D = g+1$, also $D^0 \geq 2$ nach dem Satz von Riemann. Folglich muss es eine nichtkonstante meromorphe Funktion f geben mit $\text{ord}_f(Q) \geq -g-1$. q.e.d.

Die Sprache der Garbentheorie: Um den Satz von Riemann–Roch auf komplexe n -dimensionale Mannigfaltigkeiten verallgemeinern zu können (vgl. den Satz von Riemann–Roch–Hirzebruch in 19.11.6), muss man die Garbenkohomologie benutzen (vgl. 19.8.4). Dann gilt

$$D^0 = \dim H^0(R, \mathbb{M}_D), \quad D^1 = \dim H^1(R, \mathbb{M}_D) = \dim H^0(R, \Omega_{-D}).$$

Dabei ist \mathbb{M}_D die Garbe der meromorphen Funktionen $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ auf R mit $\text{ord}_f \geq -D$, und Ω_{-D} bezeichnet die Garbe der meromorphen 1-Formen ω auf R mit $\text{ord}_\omega \geq D$. Ferner bezeichnet $H^q(R, \mathbb{G})$ die q -te Kohomologiegruppe der Riemannschen Fläche R mit Werten in der Garbe \mathbb{G} .

Der *Satz von Riemann–Roch* lautet deshalb in eleganter Weise:

$$\dim H^0(R, \mathbb{M}_D) - \dim H^1(R, \mathbb{M}_D) = 1 - g + \text{grad } D \tag{19.40}$$

mit $H^1(R, \mathbb{M}_D) = H^0(R, \Omega_{-D})$ (Dualität von Serre).

Die linke Seite in (19.40) erinnert an die Definition der Eulercharakteristik mit Hilfe der de Rhamschen Kohomologie (vgl. 18.5).

19.8.3 Der Uniformisierungssatz

Der folgende Uniformisierungssatz stellt eine weitgehende Verallgemeinerung des klassischen Riemannschen Abbildungssatzes dar (vgl. 1.14.10.).

Uniformisierungssatz: (i) Zu jeder Riemannschen Fläche R gibt es eine surjektive konforme (winkeltreue) Abbildung

$$p : \mathbb{B} \rightarrow R.$$

Diese Abbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Genauer betrachtet ist das eine universelle Überlagerung (vgl. 18.3.4). Für die Überlagerungsfläche \mathbb{B} kann man genau eine der folgenden drei Möglichkeiten wählen:

- (a) \mathbb{B} ist gleich der komplexen Ebene \mathbb{C} ,
- (b) \mathbb{B} ist gleich der Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$,
- (c) \mathbb{B} ist gleich dem offenen Einheitskreis.
- (ii) Genau alle meromorphen Funktionen auf der Riemannschen Fläche R ergeben sich, indem man die rationalen Funktionen auf \mathbb{B} durch p auf R verpflanzt.
- (iii) Ist R einfach zusammenhängend, dann stellt p einen Diffeomorphismus dar, d. h., R ist äquivalent zu \mathbb{B} .

Diesen Satz bewiesen unabhängig voneinander Poincaré und Koebe im Jahre 1907. Tatsächlich hat Poincaré sehr lange um diesen Satz gerungen und dabei wichtige topologische Hilfsmittel geschaffen.

► **STANDARDBEISPIEL:** Jede einfach zusammenhängende, offene Menge M der komplexen Ebene mit mindestens zwei Randpunkten ist als Riemannsche Fläche äquivalent zum offenen Einheitskreis. Das ist der klassische Riemannsche Abbildungssatz.

Klassifikation inäquivalenter Riemannscher Flächen: Eine solche Klassifikation ist für die moderne Stringtheorie von fundamentaler Bedeutung (vgl. 19.13).

(i) Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = 0$ ist äquivalent zur Riemannschen Zahlenkugel.

(ii) Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = 1$ ist äquivalent zu einer der Riemannschen Flächen aus dem Standardbeispiel 2 von Abschnitt 19.8.1. Zwei derartige Riemannsche Flächen R und R' sind genau dann äquivalent, wenn gilt:

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b \text{ ganze Zahlen.}$$

Dabei ist $\tau = \omega_2/\omega_1$ und $\tau' = \omega'_2/\omega'_1$, wobei $2\omega_1, 2\omega_2$ bzw. $2\omega'_1, 2\omega'_2$ die Perioden von R bzw. R' bezeichnen. Ferner wird vorausgesetzt, dass τ und τ' einen positiven Imaginärteil besitzen.

(iii) Die Menge aller Klassen von inäquivalenten kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geq 2$ ergibt sich durch geeignete Faktorisierung einer $(3g - 3)$ -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit (Teichmüllerraum; vgl. [Jost 1997]).

Decktransformationen: Es sei R eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann existiert eine universelle Überlagerung

$$p : \mathbb{B} \rightarrow R,$$

wobei \mathbb{B} den offenen Einheitskreis bezeichnet. Unter einer Decktransformation verstehen wir einen Diffeomorphismus

$$D : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B},$$

der alle Fasern $p^{-1}(P)$ in sich abbildet. Alle diese Decktransformationen bilden die Deckgruppe $\text{Deck}(R)$. Es gilt

$$\text{Deck}(R) = \pi_1(R) = \mathbb{Z}^{2g}$$

im Sinne eines Gruppenisomorphismus.¹³ Die Orbits der Decktransformationen sind diskret, und nur die identische Decktransformation besitzt Fixpunkte.

Wir sehen zwei Punkte von \mathbb{B} als äquivalent an, falls sie sich durch eine Decktransformation ineinander überführen lassen. Die Menge dieser Äquivalenzklassen $\mathbb{B}/\text{Deck}(R)$ lässt sich bijektiv auf R abbilden. Wir schreiben kurz

$$\text{Einheitskreis} / \text{Deck}(R) = R.$$

¹³Mit $\pi_1(R)$ bezeichnen wir die Fundamentalgruppe von R . Die Gruppe \mathbb{Z}^{2g} besteht aus allen $2g$ -Tupeln ganzer Zahlen mit der üblichen Addition als Gruppenoperation.

Diese tiefe Beziehung verbindet die Gruppentheorie mit der Theorie der algebraischen Funktionen und der komplexen Funktionentheorie.

19.8.4 Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen

Unter einem analytischen Keim K_a im Punkt $a \in \mathbb{C}$ verstehen wir eine Potenzreihenentwicklung

$$a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

mit positivem Konvergenzradius. Mit \mathbf{K} bezeichnen wir die Gesamtheit aller analytischen Keime.

Für jede offene Menge U in der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} mit $a \in U$ bezeichne $U(K_a)$ die Menge aller analytischen Keime K_b , für die gilt:

- (i) $b \in U$,
- (ii) K_b stimmt mit K_a auf einer Umgebung von b überein.

Ordnen wir jedem Keim K_b in $U(K_a)$ die lokale Koordinate $b \in \mathbb{C}$ zu, dann wird der Raum der Keime \mathbf{K} zu einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit, wobei $U(K_a)$ eine Umgebung von K_a darstellt.

Definition: Unter der Riemannschen Fläche $R_*(K_a)$ eines Keims K_a versteht man die Zusammenhangskomponente von K_a in \mathbf{K} .

Diese elegante Definition benutzte Hermann Weyl in seinem berühmten Buch „Die Idee der Riemannschen Fläche“, das im Jahre 1913 erschienen ist. Anschaulich ergibt sich $R_*(K_a)$ durch „Zusammenkleben“ aller Konvergenzkreise von Potenzreihen, die durch analytische Fortsetzung aus K_a hervorgehen (vgl. 1.14.15.).

Durch die Abbildung $p(K_b) := b$ entsteht eine Überlagerung

$$p : R_*(K_a) \rightarrow \mathbb{C}.$$

► **STANDARDBEISPIEL:** Genügt die K_a entsprechende Potenzreihe einer algebraischen Gleichung der Form (19.38), dann gehört zu der betreffenden algebraischen Funktion nach 19.8.2 eine kompakte Riemannsche Fläche R . Entfernt man aus R alle Verzweigungspunkte und alle über $z = \infty$ liegenden Punkte, dann erhält man die sogenannte reduzierte Riemannsche Fläche R_* , die äquivalent zu $R_*(K_a)$ ist.

19.9 Garbenkohomologie und die Konstruktion meromorpher Funktionen

Die Anwendungen der Leray–Cartanschen Garbentheorie auf die Funktionentheorie von mehreren komplexen Veränderlichen und die algebraische Geometrie, die in letzter Zeit von H. Cartan, Serre, Kodaira, Spencer, Atiyah und Hodge so erfolgreich durchgeführt wurden, haben beide Disziplinen einer gemeinsamen systematischen Behandlung zugänglich gemacht.¹⁴

Friedrich Hirzebruch (1956)

Die im Jahre 1945 von dem französischen Mathematiker Jean Leray geschaffene *Garbentheorie* gestattet es, tiefliegende Sätze über analytische Objekte (z. B. Funktionen, Differentialformen) auf Mannigfaltigkeiten in eleganter Weise zu formulieren und zu beweisen.

¹⁴Professor Hirzebruch (1927–2012) (Universität Bonn) verdankt man tiefe Ergebnisse zur Theorie der Mannigfaltigkeiten. Er hat entscheidenden Anteil an der Entwicklung der Mathematik in Deutschland seit den 50er Jahren. Er gründete das international hoch angesehene Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn. Für sein mathematisches Lebenswerk wurde Professor Hirzebruch mit dem Wolf-Preis geehrt, der an die bedeutendsten Gelehrten unserer Zeit verliehen wird.

Die Grundidee besteht darin, globale analytische Objekte aus lokalen Elementen aufzubauen (z. B. analytische Fortsetzung von Potenzreihen). Als wichtige Anwendungen betrachten wir das Cousinsche Problem und das Problem von Mittag–Leffler zur Konstruktion meromorpher Funktionen aus ihren Polbestandteilen sowie den fundamentalen Satz von Riemann–Roch–Hirzebruch über n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten, der 1953 von Hirzebruch bewiesen wurde. Dieser Satz verknüpft die Garbentheorie mit der Theorie der Vektorraumbündel (charakteristische Klassen). Der Satz von Riemann–Roch–Hirzebruch ist wiederum ein Spezialfall des berühmten Atiyah–Singer–Indextheorems aus dem Jahre 1963, das zu den tiefsten mathematischen Entdeckungen des 20. Jahrhunderts gehört (vgl. 19.11).

19.9.1 Garben

Prägarben und Garben verallgemeinern den Begriff der Gesamtheit aller stetigen oder glatten Funktionen, die lokal oder global auf einer Mannigfaltigkeit X gegeben sind.

Definition von Prägarben: Gegeben sei ein topologischer Raum X . Unter einer *Prägarbe* \mathbb{G} auf X verstehen wir folgendes:

(i) *Lokal gegebene Gruppen*: Jeder offenen Menge U in X wird eine kommutative (additive) Gruppe $\mathbb{G}(U)$ zugeordnet.

(ii) *Restriktionsabbildung*: Für $V \subseteq U$ existiert ein Gruppenmorphismus

$$r_{U,V} : \mathbb{G}(U) \rightarrow \mathbb{G}(V).$$

(iii) Für $U = V$ gilt $r_{U,U} = \text{id}$ (identische Abbildung auf $\mathbb{G}(U)$).

(iv) Im Fall $W \subseteq V \subseteq U$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}(U) & \xrightarrow{r_{U,W}} & \mathbb{G}(W) \\ & \searrow r_{U,V} & \nearrow r_{V,W} \\ & \mathbb{G}(V) & \end{array}$$

kommutativ, d. h. $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$.

Konvention: Es sei $f, g \in \mathbb{G}(U)$. Wir nennen $r_{U,V}(f)$ die Einschränkung von $f \in \mathbb{G}(U)$ auf die Menge V und schreiben dafür kurz $f|_V$. Ferner soll

$$f = g \quad \text{auf } V$$

in üblicher Weise für $f|_V = g|_V$ stehen.

In den folgenden Standardbeispielen ist $f|_V$ die Einschränkung einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ auf die Menge V im üblichen Sinne.

► **STANDARDBEISPIEL 1** (stetige Funktionen): Mit $\mathbb{C}(U)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller stetigen Funktionen

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann entsteht durch $\mathbb{G}(U) := \mathbb{C}(U)$ eine Prägarbe, die man die Prägarbe der stetigen reellen Funktionen auf X nennt. Die Gruppenstruktur auf $\mathbb{G}(U)$ entspricht der üblichen Addition von Funktionen.

► **STANDARDBEISPIEL 2** (glatte Funktionen): Es sei X eine reelle (bzw. komplexe) Mannigfaltigkeit. Mit $\mathbb{C}^\infty(U)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller C^∞ -Funktionen

$$f : U \rightarrow \mathbb{K}.$$

Dabei sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ für eine reelle bzw. komplexe Mannigfaltigkeit. Setzen wir $\mathbb{G}(U) := \mathbb{C}^\infty(U)$, dann erhalten wir die Prägarbe \mathbb{C}^∞ aller glatten Funktionen auf X .

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ stimmen die Funktionen aus $\mathbb{C}^\infty(U)$ mit den *holomorphen Funktionen* $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ überein, d. h., diese Funktionen lassen sich (in lokalen Koordinaten) in Potenzreihen entwickeln.

► **STANDARDBEISPIEL 3** (meromorphe Funktionen): Es sei X eine Riemannsche Fläche. Mit $\mathbb{M}(U)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller meromorphen Funktionen

$$f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

(vgl. 19.8). Durch $\mathbb{G}(U) := \mathbb{M}(U)$ erhalten wir die Prägarbe \mathbb{M} der auf X meromorphen Funktionen.

Alle Prägarben der obigen Standardbeispiele sind zugleich Garben im Sinne der folgenden Definition.

Garben: Eine Prägarbe heißt genau dann eine Garbe, wenn zusätzlich für beliebige offene Mengen U, U_j mit $U = \bigcup_j U_j$ folgendes gilt:

(i) *Lokalisierungsprinzip*: Aus $f, g \in \mathbb{G}(U)$ und

$$f = g \quad \text{auf } U_j \text{ für alle } j$$

folgt $f = g$.

(ii) *Globales Fortsetzungsprinzip*: Aus $f_j \in \mathbb{G}(U_j)$ und

$$f_i = f_j \quad \text{auf } U_i \cap U_j \text{ für alle } i, j$$

folgt die Existenz eines (globalen) Objekts $f \in \mathbb{G}(U)$ mit $f = f_j$ auf U_j für alle j .

19.9.2 Die Lösung des Cousinschen Problems

Es sei X eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, die durch das System $\{U_j\}$ offener Mengen überdeckt wird. Gegeben seien holomorphe Funktionen $f_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$, so dass für alle i, j, k gilt:

$$f_{ij} = -f_{ji} \quad \text{auf } U_i \cap U_j, \tag{19.41}$$

$$f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} = 0 \quad \text{auf } U_i \cap U_j \cap U_k. \tag{19.42}$$

Gesucht werden holomorphe Funktionen $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f_{ij} = f_i - f_j \quad \text{auf } U_i \cap U_j \text{ für alle } i, j. \tag{19.43}$$

Formulierung in der Sprache der Garbenkohomologie: Dieses Problem kann als Motivation für die Konstruktion der Garbenkohomologie dienen. Mit den in dem Abschnitt 19.9.4 weiter unten eingeführten Begriffen lautet das Cousinsche Problem: Gegeben ist eine 1-Kokette $\{f_{ij}\}$. Gesucht wird eine 0-Kokette $\{f_j\}$ mit

$$\{f_{ij}\} = \delta\{f_i\}. \tag{19.44}$$

Das ist gleichbedeutend mit (19.43). Wegen $\delta^2 = 0$ folgt aus (19.44) die *Integrabilitätsbedingung*

$$\delta\{f_{ij}\} = 0, \quad (19.45)$$

d. h., $\{f_{ij}\}$ muss ein 1-Kozyklus sein. Die Bedingung (19.45) entspricht (19.42).

Erste Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathbb{C}^\infty)$ mit Werten in der Garbe \mathbb{C}^∞ und Lösung des Cousinschen Problems: Es gilt:

Die Bedingung $H^1(X, \mathbb{C}^\infty) = 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, dass das Cousinsche Problem auf X stets lösbar ist.

Die Definition von $H^1(X, \mathbb{C}^\infty)$ findet man in 19.9.4.

► **STANDARDBEISPIEL 1** (Polyzyylinder): Es sei X ein offener Polyzyylinder in \mathbb{C}^n , d. h., es ist

$$X = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_k - z_{k0}| < r_k, k = 1, \dots, n\}$$

mit festen Mittelpunkten $z_{k0} \in \mathbb{C}$ und festen Radien $0 < r_k \leq \infty$.

Dann gilt $H^1(X, \mathbb{C}^\infty) = 0$, d. h., das Cousinsche Problem ist auf X stets lösbar.

► **STANDARDBEISPIEL 2** (Riemannsche Flächen): Es sei X eine Riemannsche Fläche. Dann gilt $H^1(X, \mathbb{C}^\infty) = 0$, d. h., das Cousinsche Problem ist lösbar, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) X ist nicht kompakt (z. B. X ist gleich der komplexen Ebene \mathbb{C});
- (ii) X ist kompakt vom Geschlecht $g = 0$ (z. B. X ist die Riemannsche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$; vgl. 1.14.11.4.).

Gegenbeispiel: Für eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g gilt die Gleichung $\dim H^1(X, \mathbb{C}^\infty) = g$. Im Fall $g \geq 1$ ist somit das Cousinsche Problem nicht stets lösbar.

19.9.3 Die Lösung des Problems von Mittag-Leffler

Es sei eine Überdeckung $\{U_j\}$ der Riemannschen Fläche X durch offene Mengen U_j gegeben. Ferner seien meromorphe Funktionen $f_j : U_j \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ gegeben. Gesucht wird eine (globale) meromorphe Funktion

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}},$$

so dass die Differenz $f - f_j$ auf U_j für alle j holomorph ist, d. h., f besitzt den gleichen singulären Hauptteil wie f_j .

Hauptsatz: Gilt $H^1(X, \mathbb{C}^\infty) = 0$, dann ist das Problem von Mittag-Leffler stets lösbar.

Das trifft speziell auf die komplexe Ebene \mathbb{C} und die Riemannsche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ zu.

Für eine kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht $g \geq 1$ ist das Problem von Mittag-Leffler nicht immer lösbar. Es ist genau dann lösbar, wenn $\{f_{ij}\}$ mit $f_{ij} = f_i - f_j$ ein 1-Kozyklus ist.

19.9.4 Garbenkohomologie

Die Einführung der Garbenkohomologie (auch Čechsche Kohomologie genannt) wird durch das Cousinsche Problem in 19.9.2 motiviert. Diese Kohomologietheorie stellt ein mächtiges Instrument der modernen Mathematik dar.

Koketten mit Werten in einer Prägarbe \mathcal{G} : Es sei \mathcal{G} eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X , der durch das System $\mathbb{U} = \{U_j\}$ offener Mengen U_j überdeckt wird.

(i) Unter einer 0-Kokette (mit Werten in \mathbb{G}) verstehen wir ein Tupel $\{f_j\}$ mit $f_j \in \mathbb{G}(U_j)$ für alle j .

(ii) Unter einer 1-Kokette verstehen wir ein Tupel $\{f_{ij}\}$ mit $f_{ij} \in \mathbb{G}(U_i \cap U_j)$ und $f_{ij} = -f_{ji}$ für alle i, j .

(iii) Unter einer $(q+1)$ -Kokette verstehen wir allgemein ein Tupel

$$\{f_{i_0 \dots i_q}\} \quad \text{mit} \quad f_{i_0 \dots i_q} \in \mathbb{G}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}),$$

wobei $f_{...}$ in allen Indizes schiefsymmetrisch ist.

Der Korandoperator δ : Für eine 0-Kokette $\{f_j\}$ definieren wir

$$\delta\{f_j\} := \{g_{ij}\} \quad \text{mit} \quad g_{ij} := f_i - f_j \quad \text{auf } U_i \cap U_j.$$

Für eine 1-Kokette $\{f_{ij}\}$ sei

$$\delta\{f_{ij}\} := \{g_{ijk}\} \quad \text{mit} \quad g_{ijk} := f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \quad \text{auf } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Für eine beliebige $(q+1)$ -Kokette $\{f_{i_0 \dots i_q}\}$ setzen wir

$$\delta\{f_{i_0 \dots i_q}\} := \{g_{i_0 \dots i_{q+1}}\}$$

mit

$$g_{i_0 \dots i_{q+1}} := \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k f_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{q+1}}$$

auf dem Durchschnitt $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{q+1}}$. Dabei wird der Index mit dem Dach weggelassen.

Die q -te Kohomologiegruppe $H^q(X, \mathbb{U}; \mathbb{G})$ bezüglich der Überdeckung \mathbb{U} mit Werten in der Garbe \mathbb{G} : Die Konstruktion dieser Kohomologiegruppen geschieht analog zur Konstruktion der de Rhamischen Kohomologiegruppen $H^q(X)$ (vgl. 18.5). Es sei c eine q -Kokette.

- (i) c heißt genau dann ein *Kozyklus*, wenn $\delta c = 0$ gilt.
- (ii) c heißt genau dann ein *Korand*, wenn $c = \delta b$ für eine feste $(q-1)$ -Kokette b gilt.
- (iii) Wir nennen zwei q -Kozyklen c_1 und c_2 genau dann *kohomolog* und schreiben

$$c_1 \sim c_2,$$

wenn die Differenz $c_1 - c_2$ ein Korand ist.

Definition: $H^q(X, \mathbb{U}; \mathbb{G})$ besteht aus allen Äquivalenzklassen $[c]$ von q -Kozyklen. Durch

$$[c] + [d] := [c + d]$$

wird $H^q(X, \mathbb{U}; \mathbb{G})$ in natürlicher Weise zu einer kommutativen Gruppe.

Die absoluten Kohomologiegruppen $H^q(X, \mathbb{G})$: Wir befreien uns von der willkürlichen Wahl der Überdeckung \mathbb{U} , indem wir zum induktiven Limes

$$H^q(X, \mathbb{G}) := \lim_{\mathbb{U}} \text{ind } H^q(X, \mathbb{U}; \mathbb{G})$$

übergehen. Explizit erhält man diesen Limes in folgender Weise. Zunächst führen wir für Überdeckungen $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}, \dots$ eine Halbordnungsrelation ein. Wir schreiben genau dann

$$\mathbb{W} \leq \mathbb{U},$$

wenn jede Menge von \mathbb{W} in einer Menge von \mathbb{U} enthalten ist. In diesem Fall ergibt sich in natürlicher Weise (durch Einschränkung der Koketten von \mathbb{U} auf Koketten von \mathbb{W}) ein Gruppenmorphismus

$$\varrho_{\mathbb{U}, \mathbb{W}} : H^q(X, \mathbb{U}; \mathbb{G}) \rightarrow H^q(X, \mathbb{W}; \mathbb{G}).$$

Es sei $A \in H^q(X, \mathbb{U}; \mathbb{G})$ und $B \in H^q(X, \mathbb{V}; \mathbb{G})$. Wir schreiben genau dann

$$A \sim B,$$

wenn $\varrho_{\mathbb{U}, \mathbb{W}}(A) = \varrho_{\mathbb{V}, \mathbb{W}}(B)$ für eine Überdeckung \mathbb{W} mit $\mathbb{W} \leq \mathbb{U}$ und $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ gilt. Die zugehörigen Äquivalenzklassen bilden dann bezüglich¹⁵

$$[C] + [D] := [C + D] \quad (19.46)$$

die kommutative Gruppe $H^q(X, \mathbb{G})$.

► **STANDARDBEISPIEL:** Es sei X eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis. Mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Garbe der konstanten reellen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$H^q(X, \mathbb{R}) = H^q(X), \quad q = 0, 1, \dots,$$

wobei rechts die q -te de Rhamsche Kohomologiegruppe steht (vgl. 18.5).

Bezeichnet $\mathbb{G} = \mathbb{C}$ die Garbe der konstanten Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer Riemannschen Fläche X , dann hat man

$$H^1(X, \mathbb{C}) = H^1(X).$$

19.10 Charakteristische Klassen für Vektorraumbündel

Charakteristische Klassen eines Vektorraumbündels \mathbb{V} sind Elemente der Kohomologiealgebra der Basismannigfaltigkeit. Sie messen die Nichttrivialität von \mathbb{V} . Für Produktbündel verschwinden die charakteristischen Klassen.

Orientierungsklasse: Auf einer orientierten, n -dimensionalen, kompakten, reellen Mannigfaltigkeit M gibt es eine n -Form ω mit

$$\int_M \omega = 1.$$

Die zugehörige eindeutig bestimmte Kohomologieklasse $[\omega] \in H^n(M)$ heißt die Orientierungsklasse von M . Dabei gilt $[\omega] = \{\omega + d\mu\}$, wobei μ eine beliebige $(n-1)$ -Form auf M ist.

19.10.1 Grundideen

Standardresultat (Eulerklasse): Es sei M eine n -dimensionale, kompakte, zusammenhängende, reelle Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine gewisse n -Form ω auf M mit $d\omega = 0$. Die zugehörige Klasse

$$[\omega] \in H^n(M)$$

¹⁵Genauer: Man wähle solche Repräsentanten C und D , die in einer gemeinsamen Gruppe $H^q(X, \mathbb{W}; \mathbb{G})$ liegen. Das kann durch Wahl einer Verfeinerung \mathbb{W} von \mathbb{U} und \mathbb{V} stets erreicht werden. Die Definition (19.46) hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.

der n -ten de Rhamschen Kohomologiegruppe $H^n(M)$ (vgl. 18.5) heißt die *Eulerklasse* $e(TM)$ des Tangentialbündels TM . Die Form ω besitzt die folgenden beiden fundamentalen Eigenschaften:

(i) *Satz von Gauß–Bonnet–Chern.* Für jedes $\omega \in e(TM)$ erhält man die Eulercharakteristik $\chi(M)$ der Mannigfaltigkeit M durch

$$\chi(M) = \int_M \omega.$$

Ist n ungerade, dann gilt $e(TM) = 0$.

(ii) *Verallgemeinerter Satz von Poincaré–Hopf.* Gilt $e(TM) \neq 0$, dann besitzt jeder stetige Schnitt $s : M \rightarrow TM$ eine Nullstelle, d. h., jedes stetige Tangentialvektorfeld auf M verschwindet in mindestens einem Punkt.

Speziell folgt aus $\chi(M) \neq 0$ stets $e(TM) \neq 0$.

► **BEISPIEL 1:** Für die n -dimensionale Sphäre S^n gilt $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. Für gerades n ist $\chi(S^n) = 2$. Folglich hat jedes stetige Vektorfeld auf einer Sphäre gerader Dimension eine Nullstelle (Staupunkt).

Die geometrische Interpretation der Eulerklasse eines Vektorraumbündels hängt eng mit der Orientierung des Bündels zusammen (vgl. 19.10.2). Die explizite Berechnung von $e(TM)$ findet man in (19.51).

Die Chernklassen kompakter Riemannscher Flächen: Es sei M eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht p . Im folgenden beschreiben wir fundamentale topologische Charakteristika von M .

(i) Für die erste Chernklasse $c_1(TM)$ des Tangentialbündels TM gilt

$$c_1(TM) = e(TM) = (2 - 2p)\sigma = \chi(M)\sigma.$$

Dabei ist $\sigma \in H^2(M)$ die Orientierungsklasse von M .

(ii) Der Cherncharakter $\text{ch}(TM)$ und die Toddklasse $\text{td}(TM)$ von TM lauten

$$\text{ch}(TM) = 1 + (2 - 2p)\sigma, \quad \text{td}(TM) = 1 + (1 - p)\sigma.$$

(iii) Versehen wir M mit einer Riemannschen Metrik, dann gehört die 2-Form

$$\omega = \frac{1}{4\pi}(\Omega_2^1 - \Omega_1^2) = \frac{1}{2\pi}K\sqrt{g} \, dx^1 \wedge dx^2$$

zur Eulerklasse $e(TM)$. Dabei ist $\Omega_j^i = 2^{-1}R_{jkm}^i dx^k \wedge dx^m$ die Krümmungsform, R_{jkm}^i der Riemannsche Krümmungstensor, $K = R_{1212}$ die Gaußsche Krümmung, (g_{ij}) der metrische Tensor und $g = \det(g_{ij})$ (vgl. 16.1 und 16.2).

Man kann stets eine Metrik wählen, so dass die Gaußsche Krümmung konstant ist. Genauer gilt

$$K = \begin{cases} 1 & \text{für } p = 0, \\ 0 & \text{für } p = 1, \\ -1 & \text{für } p \geq 2. \end{cases}$$

(iv) Für die Fundamentalgruppe gilt $\pi_1(M) = \mathbb{Z}^{2p}$.

(v) Für die singulären Homologiegruppen mit ganzzahligen Koeffizienten hat man

$$H_q(M, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^{2p} & \text{für } q = 1, \\ 0 & \text{für } q = 3, 4, \dots. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die singulären Homologiegruppen mit reellen Koeffizienten nach der universellen Koeffizientenformel durch $H_q(M) = H_q(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$, also ist

$$H_q(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } q = 0, 2, \\ \mathbb{R}^{2p} & \text{für } q = 1, \\ 0 & \text{für } q = 3, 4, \dots \end{cases}$$

im Sinne eines Isomorphismus. Die de Rhamsche Kohomologie erhält man daraus durch $H^q(M) = H_q(M)^*$, d.h., es gilt

$$H_q(M) = H^q(M) = H^q(M, \mathbb{R})$$

für alle $q = 0, 1, \dots$ im Sinne eines Isomorphismus. Mit $H^q(M, \mathbb{R})$ bezeichnen wir dabei die q -te Kohomologiegruppe von M mit Werten in der Garbe der konstanten reellen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf M .

► **BEISPIEL 2:** Für $p = 0$ und $p \geq 2$ gilt $\chi(M) \neq 0$. Folglich besitzt jedes stetige Tangentenvektorfeld auf M eine Nullstelle.

19.10.2 Die Kohomologiealgebra $H^*(M)$ einer Mannigfaltigkeit M

Alternierendes Produkt (cup-Produkt) und Kohomologiealgebra: Bezeichne $H^q(M)$ die q -te (de Rhamsche) Kohomologiegruppe der kompakten Mannigfaltigkeit M . Definitionsgemäß sei $H^*(M)$ die Gesamtheit aller (endlichen) Summen der Form

$$a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \dots \quad (19.47)$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$ und $\sigma_j \in H^j(M)$. Somit ist σ_j gleich der Klasse

$$[\omega_j] := \{\omega_j + d\mu\},$$

wobei ω_j eine feste j -Form auf M ist mit $d\omega_j = 0$, und μ eine beliebige $(j-1)$ -Form auf M bezeichnet. Für die Elemente der Gestalt (19.47) erklären wir ein alternierendes Produkt $\sigma_j \wedge \sigma_k$ durch

$$[\omega_j] \wedge [\omega_k] := [\omega_j \wedge \omega_k].$$

Für alle $\mu \in H^j(M)$ und $\nu \in H^k(M)$ gilt

$$\mu \wedge \nu = (-1)^{jk} \nu \wedge \mu. \quad (19.48)$$

Ferner ist das Produkt \wedge assoziativ. Mit dieser Multiplikation für die Elemente der Gestalt (19.47) wird $H^*(M)$ zu einer Algebra, die man die *Kohomologiealgebra* der Mannigfaltigkeit M nennt.

Für $\mu \in H^*(M)$ definieren wir

$$\mu[M] := \int_M \mu, \quad (19.49)$$

wobei nur die zu μ gehörigen n -Formen einen Beitrag liefern.

► **STANDARDBEISPIEL 1:** Die Kohomologiealgebra $H^*(S^n)$ einer n -dimensionalen Sphäre S^n mit $n = 1, 2, \dots$ besteht aus allen Ausdrücken

$$a + b\sigma$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, wobei σ die Orientierungsklasse von S^n bezeichnet. Es gilt $\sigma \wedge \sigma = 0$. Deshalb ist $(a + b\sigma) \wedge (c + e\sigma) = ac + (bc + ae)\sigma$. Ferner hat man

$$(a + b\sigma)[M] = b \int_M \sigma = b.$$

► **STANDARDBEISPIEL 2** (Riemannsche Flächen): Es sei M eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht p . Dann besteht die Kohomologiealgebra $H^*(M)$ aus allen Ausdrücken der Gestalt

$$a + \sum_{k=1}^{2p} a_k \sigma_k + b\sigma$$

mit $a, a_1, \dots, a_{2p} \in \mathbb{R}$ und der Orientierungsklasse σ . Ferner können wir 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{2p}$ wählen, so dass die Klassen $\sigma_k := [\omega_k], k = 1, \dots, 2p$, eine Basis von $H^1(M)$ bilden. Dann ist

$$\sigma_k \wedge \sigma_j = a_{jk} \sigma, \quad j, k = 1, \dots, 2p,$$

mit $a_{jk} \in \mathbb{R}$ und $a_{jk} = -a_{kj}$ sowie $\sigma_j \wedge \sigma = 0$ und $\sigma \wedge \sigma = 0$.

Die Kohomologiealgebra $H_c^*(M)$: Für eine nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeit M erklären wir die q -te de Rhamsche Kohomologiegruppe $H_c^q(M)$ mit kompaktem Träger analog zu $H^q(M)$ in 18.5, indem wir nur Formen betrachten, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von M verschwinden. In analoger Weise ergibt sich $H_c^*(M)$ parallel zu $H^*(M)$.

Für kompakte Mannigfaltigkeiten M ist $H_c^q(M) = H^q(M)$ für alle q . Des Weiteren gilt in diesem Fall $H_c^*(M) = H^*(M)$.

Poincarésche Dualität: Es sei M eine orientierte n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$H^q(M) = H_c^{n-q}(M)^*, \quad q = 0, 1, \dots, n.$$

Dabei bezeichnet der Stern den dualen linearen Raum.

► **STANDARDBEISPIEL 3:** Da der Raum \mathbb{R}^n für $n = 1, 2, \dots$ kontrahierbar ist, gilt $H^q(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ für $q = 0$ und $H^q(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ für $q > 0$. Daraus folgt

$$H_c^r(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \{0\} & \text{für } r \neq n, \\ \mathbb{R} & \text{für } r = n. \end{cases}$$

Die Produktformel von Künneth: Für reelle Mannigfaltigkeiten M und N gilt

$$H_c^*(M \times N) = H_c^*(M) \otimes H_c^*(N).$$

Die Eulerklasse eines orientierten Vektorraumbündels: Es sei \mathbb{V} ein orientiertes Vektorraumbündel über der orientierten Mannigfaltigkeit M mit der typischen Faser \mathbb{R}^m , d.h., die Wechsel der Bündelkarten in \mathbb{V} und M vollziehen sich durch lineare Transformationen mit positiver Determinante.

Es gibt dann genau eine Kohomologieklassse $\tau \in H^*(\mathbb{V})$, die auf den Fasern F von \mathbb{V} mit der Orientierungsklasse $\sigma \in H_c^m(F)$ übereinstimmt. Das ist die sogenannte Thomklasse. Definitionsgemäß erhält man die Eulerklasse $e(\mathbb{V})$ von \mathbb{V} durch das pull-back

$$e(\mathbb{V}) := s^* \tau$$

(vgl. 15.4.3). Dabei ist $s : M \rightarrow \mathbb{V}$ der triviale Schnitt, der in lokalen Koordinaten durch $s(x) := (x, 0)$ gegeben ist.

Für ein Produktbündel $\mathbb{V} = U \times X$ gilt $e(\mathbb{V}) = 0$.

Der Nullstellensatz für Schnitte: Ist $e(\mathbb{V}) \neq 0$, dann besitzt jeder stetige Schnitt $s : M \rightarrow \mathbb{V}$ eine Nullstelle (in lokalen Koordinaten).

Produktsatz: Für die Whitneysumme zweier orientierter Vektorraumbündel \mathbb{V} und \mathbb{W} gilt

$$e(\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}) = e(\mathbb{V})e(\mathbb{W}).$$

Wir schreiben dabei kurz $e(\mathbb{V})e(\mathbb{W})$ anstelle von $e(\mathbb{V}) \wedge e(\mathbb{W})$.

19.10.3 Der Weil-Morphismus und charakteristische Klassen

Die charakteristischen Klassen bilden eine Teilalgebra \mathbb{T} der Kohomologiealgebra $H^*(M)$ einer Mannigfaltigkeit M . Die Konstruktion von \mathbb{T} hängt von einem gegebenen Vektorraumbündel \mathbb{V} über M und seiner Strukturgruppe \mathbb{G} ab.

Es sei \mathbb{G} eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe $GL(m, \mathbb{K})$ der invertierbaren $(m \times m)$ -Matrizen mit Elementen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dann ist \mathbb{G} eine Liegruppe. Die zugehörige Liealgebra \mathbb{LG} besteht aus gewissen $(m \times m)$ -Matrizen mit Werten in \mathbb{K} (vgl. Tabelle 17.1).

Die Algebra $\mathbb{P}(\mathbb{LG})$ der Ad \mathbb{G} -invarianten Polynome: Mit $\mathbb{P}_k(\mathbb{LG})$ bezeichnen wir alle symmetrischen k -linearen Abbildungen

$$f : \mathbb{LG} \times \dots \times \mathbb{LG} \rightarrow \mathbb{R},$$

d. h., $f(B_1, \dots, B_k)$ ist für jedes Tupel von $(m \times m)$ -Matrizen B_1, \dots, B_k eine reelle Zahl, die sich bei Permutationen der B_j nicht ändert. Ferner fordern wir, dass

$$f(GB_1G^{-1}, \dots, GB_kG^{-1}) = f(B_1, \dots, B_k)$$

für alle $G \in \mathbb{G}$ und alle $B_1, \dots, B_k \in \mathbb{LG}$ gilt. Durch $\mathbb{P}(\mathbb{LG})$ bezeichnen wir alle endlichen reellen Linearkombinationen

$$a_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots$$

mit $f_k \in \mathbb{P}_k(\mathbb{LG})$. Wir führen ferner auf $\mathbb{P}(\mathbb{LG})$ ein Produkt ein, indem wir fg durch

$$(fg)(B_1, \dots, B_{k+m}) := \frac{1}{(k+m)!} \sum f(B_{i_1}, \dots, B_{i_k})g(B_{i_{k+1}}, \dots, B_{i_{k+m}})$$

definieren, wobei rechts über alle Permutationen der Indizes $1, \dots, k+m$ summiert wird.

Hauptsatz der Theorie der charakteristischen Klassen: Es existiert eine lineare Abbildung

$$W : \mathbb{P}(\mathbb{LG}) \rightarrow H^*(M),$$

die Produkte in entsprechende \wedge -Produkte abbildet. Genau die Bilder $W(f)$ heißen *charakteristische Klassen* des Vektorraumbündels \mathbb{V} mit der Basismannigfaltigkeit M und der Strukturgruppe \mathbb{G} .

Konstruktion des Weil-Morphismus W : Zu dem Vektorraumbündel \mathbb{V} wählen wir das entsprechende Hauptfaserbündel \mathbb{H} mit der typischen Faser \mathbb{G} (vgl. 19.5). Auf \mathbb{H} zeichnen wir einen Zusammenhang aus. Dann besitzt die zugehörige Krümmungsform \mathbb{F} Werte in der Liealgebra \mathbb{LG} . Für jedes Polynom $f \in \mathbb{P}_k(\mathbb{LG})$ definieren wir durch¹⁶

$$f(\mathbb{F})(v_1, \dots, v_{2k}) := \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma f(\mathbb{F}(v_{i_1}, v_{i_2}), \dots, \mathbb{F}(v_{i_{2k-1}}, v_{i_{2k}}))$$

¹⁶Summiert wird über alle Permutationen σ der Indizes $1, \dots, 2k$.

eine $2k$ -Form $f(\mathbb{F})$ auf dem Hauptfaserbündel \mathbb{H} . Es gibt dann genau eine $2k$ -Form ω auf der Basismannigfaltigkeit M mit

$$f(\mathbb{F}) := \pi^*(\omega),$$

wobei π^* das pull-back bezüglich der Projektion $\pi : \mathbb{H} \rightarrow M$ bezeichnet (vgl. 15.4.3). Dabei gilt $d\omega = 0$. Abschließend definieren wir

$$W(f) := [\omega].$$

Hier bezeichnet $[\omega] \in H^{2k}(M)$ die de Rhamsche Kohomologieklasse von ω .

Invarianzeigenschaft: Die Bedeutung dieser Konstruktion von W besteht darin, dass sie unabhängig ist von der Wahl des Zusammenhangs auf \mathbb{H} , also unabhängig von der Wahl der Krümmungsform \mathbb{F} .

19.10.4 Chernklassen

Gegeben sei ein Vektorraumbündel \mathbb{V} mit der typischen Faser \mathbb{C}^m über der reellen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Ein solches Bündel heißt ein komplexes Vektorraumbündel vom Rang m . Der Wechsel lokaler Koordinaten von \mathbb{V} geschieht mit Hilfe von invertierbaren komplexen $(m \times m)$ -Matrizen (vgl. 19.5). Deshalb ist $G := GL(m, \mathbb{C})$ die Strukturgruppe von \mathbb{V} .

Definition: Die sich nach 19.10.3 durch den zugehörigen Weil-Morphismus W ergebenden charakteristischen Klassen heißen die charakteristischen Klassen des Vektorraumbündels \mathbb{V} .

Wählen wir speziell das charakteristische Polynom

$$\det \left(\lambda I - \frac{1}{2\pi i} B \right) := \sum_{k=0}^m f_k(B, \dots, B) \lambda^{m-k}$$

für alle komplexen $(m \times m)$ -Matrizen B , dann gehört f_k zu $\mathbb{P}_k(\mathbb{L}G)$. Die Kohomologieklasse

$$c_k(\mathbb{V}) := W(f_k(\mathbb{F})), \quad k = 1, \dots, m,$$

mit $c_k(\mathbb{V}) \in H^{2k}(M)$ heißt die k -te Chernklasse des Vektorraumbündels \mathbb{V} .

Der Produktsatz: Für zwei komplexe Vektorraumbündel \mathbb{V} und \mathbb{W} über der gleichen Basismannigfaltigkeit gilt

$$c_k(\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}) = c_k(\mathbb{V})c_k(\mathbb{W}).$$

Wir schreiben dabei kurz $c_k(\mathbb{V})c_k(\mathbb{W})$ für $c_k(\mathbb{V}) \wedge c_k(\mathbb{W})$.

Satz: Die Chernklassen c_1, \dots, c_m erzeugen die Algebra aller charakteristischen Klassen bezüglich der Gruppe $GL(m, \mathbb{C})$.

Der folgende Kalkül liefert eine explizite Darstellung aller charakteristischen Klassen bezüglich $GL(m, \mathbb{C})$ durch Chernklassen.

Der Polynomkalkül für charakteristische Klassen: Sei ein Polynom $P(x_1, \dots, x_m)$ mit reellen Koeffizienten, das in den reellen Variablen x_1, \dots, x_m symmetrisch ist, gegeben. Jedes derartige Polynom lässt sich eindeutig als Polynom

$$P = \Phi(S_1, \dots, S_m)$$

in den sogenannten elementarsymmetrischen Funktionen $S_k(x_1, \dots, x_m)$ darstellen.¹⁷ Wir ordnen nun dem Polynom P die charakteristische Klasse

$$\Phi(c_1, \dots, c_m)$$

zu, indem wir S_k durch die k -te Chernklasse c_k von \mathbb{V} ersetzen. Den Produkten der S_1, \dots entsprechen dabei die \wedge -Produkte der c_1, \dots . Es ist jedoch üblich, das \wedge -Zeichen wegzulassen.

► **BEISPIEL 1:** Für $P = (x_1 - x_2)^2$ gilt $P = S_1^2 - 4S_2$ mit $S_1 = x_1 + x_2$ und $S_2 = x_1 x_2$. Somit entspricht P der charakteristischen Klasse

$$c_1^2 - 4c_2.$$

Das ist eine Abkürzung für $c_1 \wedge c_1 - 4c_2$.

Die beiden folgenden charakteristischen Klassen spielen eine fundamentale Rolle bei der Formulierung des Atiyah-Singer-Indextheorems (vgl. 19.11).

Der Cherncharakter $\text{ch}(\mathbb{V})$: Die charakteristische Klasse zu

$$e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_m}$$

heißt der Cherncharakter $\text{ch}(\mathbb{V})$ des Vektorraumbündels \mathbb{V} . Genauer hat man diese Potenzreihenentwicklung nach den Termen m -ter Ordnung abzubrechen.

Die Toddklasse $\text{td}(\mathbb{V})$: Die charakteristische Klasse zu

$$\prod_{k=1}^m \frac{x_k}{1 - e^{-x_k}}$$

heißt die Toddklasse $\text{td}(\mathbb{V})$ des Vektorraumbündels \mathbb{V} .

Die Chernklassen $c_k(M)$ einer Mannigfaltigkeit M : Es sei M eine n -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. Mit $TM_{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir das komplexifizierte¹⁸ Tangentialbündel von M . Dann heißt

$$c_k(M) := c_k(TM_{\mathbb{C}})$$

die k -te Chernklasse von M .

Explizit erhält man $c_k(M) \in H^{2k}(M)$ durch $c_k(M) = [\gamma_k]$ mit

$$\gamma_k := \frac{(-1)^k}{(2\pi i)^k k!} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix} \Omega_{i_1}^{j_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_k}^{j_k}. \quad (19.50)$$

Genauer verstehen wir M mit einer beliebigen Riemannschen Metrik. Dann ist

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkm}^i dx^k \wedge dx^m$$

gleich der Krümmungsform auf M (vgl. 16.2.4). In (19.50) wird rechts über zwei gleiche obere und untere Indizes von 1 bis n summiert, und $\operatorname{sgn} \dots$ bezeichnet das Vorzeichen der entsprechenden Permutation.

Hauptsatz: Die Chernklassen $c_k(M) = [\gamma_k]$ der Mannigfaltigkeit M sind unabhängig von der Wahl der Riemannschen Metrik auf M .

¹⁷Es gilt

$$\prod_{k=1}^m (1 + \lambda x_k) = \sum_{k=0}^m S_k(x_1, \dots, x_m) \lambda^k$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Speziell ist $S_1(x_1, \dots, x_m) := x_1 + \dots + x_m$.

¹⁸Man ersetze die typische Faser \mathbb{R}^n von TM durch \mathbb{C}^n und wähle die gleichen Übergangsfunktionen.

Tatsächlich sind die Chernklassen topologische Invarianten von M .

Chernzahlen und topologische Ladungen: Es sei $\dim M = n$ gerade. Die Zahl

$$Q := \int_M \gamma_{n/2}$$

ist ganz und heißt Chernzahl oder topologische Ladung von M .

► **STANDARDBEISPIEL 2:** Für 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten M sind die beiden Zahlen

$$Q := \int_M \gamma_2 \quad \text{und} \quad C := \int_M \gamma_1 \wedge \gamma_1$$

ganz. Die Form γ_2 bzw. $\gamma_1 \wedge \gamma_1$ entspricht der charakteristischen Klasse c_2 bzw. c_1^2 .

Die Eulerklasse $e(M)$: Unter der Eulerklasse $e(M)$ einer reellen orientierten Mannigfaltigkeit M der Dimension n verstehen wir die Eulerklasse $e(TM)$ des Tangentialbündels TM . Für ungerades n gilt $e(M) = 0$. Parallel zu (19.50) erhalten wir für gerades n explizit $e(M) = e(TM) = [\gamma]$ mit

$$\gamma := \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}, \quad (19.51)$$

wobei über alle Indizes i_1, \dots, i_n von 1 bis n summiert wird.

Der Satz von Yau: Auf jeder komplexen Mannigfaltigkeit M existiert genau dann eine Ricci-flache Kählermetrik, d. h., es ist

$$R_{ij} = 0 \quad \text{auf } M,$$

wenn die erste Chernklasse verschwindet, d. h., es gilt $c_1(M) = 0$. Solche Räume heißen Calabi-Yau-Räume. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Stringtheorie.

19.11 Das Atiyah-Singer-Indextheorem

Das Atiyah-Singer-Indextheorem zeigt, dass der Index eines elliptischen Differentialoperators oder allgemeiner eines elliptischen Komplexes auf einer kompakten Mannigfaltigkeit nur von topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit und des Symbols des Differentialoperators abhängt. Tatsächlich kann man den Index explizit berechnen, falls man das Spektrum der zugehörigen verallgemeinerten Laplaceoperatoren kennt.

Dieses Indextheorem wurde 1963 von Atiyah und Singer bewiesen. Es stellt eine der tiefsten mathematischen Entdeckungen des 20. Jahrhunderts dar.

Klassische elliptische Operatoren: Es sei U eine offene Menge des \mathbb{R}^n , und D sei ein linearer Differentialoperator k -ter Ordnung, d. h., es gilt

$$Df(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(x) \partial^\alpha f(x) \quad (19.52)$$

für alle $x \in U$. Wie in 10.1.3 sei $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$. Ferner ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ eine glatte Funktion, die wir als Spaltenmatrix auffassen, und $A_\alpha(x)$ bezeichnet eine komplexe $(m \times m)$ -Matrix. Ersetzen wir die partielle Ableitung ∂_j durch die reelle Variable ξ_j und berücksichtigen wir nur die höchsten Ableitungen, dann ergibt sich das sogenannte *Symbol*

$$\sigma(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Der Operator D heißt genau dann *elliptisch*, wenn die Symbolabbildung

$$\sigma(x, \xi) : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m \quad (19.53)$$

für alle $x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi \neq 0$ bijektiv ist.

► **BEISPIEL:** Der Laplaceoperator $\Delta f := \partial_1^2 f + \dots + \partial_n^2 f$ hat das Symbol

$$\sigma(x, \xi) = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Folglich ist Δ elliptisch.

Konvention: Bis zum Ende von 19.11.3 sei M eine n -dimensionale kompakte reelle Mannigfaltigkeit, die wir mit einer eigentlichen Riemannschen Metrik versehen. Das Integral $\int_M f \, dV$ beziehe sich auf das zur Riemannschen Metrik gehörige Volumenmaß.

19.11.1 Die analytische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren

Komplexwertige Funktionen: Bezeichne $C^\infty(M)$ die Menge aller C^∞ -Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$. Die Vervollständigung von $C^\infty(M)$ bezüglich des Skalarprodukts

$$(f | g)_2 := \int_M (f(x) | g(x)) \, dV \quad (19.54)$$

mit $(f(x) | g(x)) := \overline{f(x)}g(x)$ ergibt den Hilbertraum $L_2(M)$.

Elliptischer Operator: Gegeben sei ein elliptischer Differentialoperator

$$D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

d.h., D ist ein linearer Operator, der in lokalen Koordinaten auf M ein elliptischer Operator der Form (19.52) ist mit $m = 1$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Operator

$$D^+ : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

mit $(D^+ f | g) = (f | Dg)$ für alle $f, g \in C^\infty(M)$. Der Operator $-D^+ D$ heißt der verallgemeinerte Laplaceoperator zu D .

Index von D : Die wichtigste Größe eines linearen Operators ist sein Index. Wir definieren

$$\text{ind } D := \dim N(D) - \text{codim } R(D).$$

Dabei bezeichnet $N(D)$ bzw. $R(D)$ den Nullraum bzw. den Bildraum von D . Es gilt $\text{codim } R(D) = \dim N(D^+)$.

Satz 1: Gegeben sei $h \in C^\infty(M)$. Die Differentialgleichung

$$Df = h, \quad f \in C^\infty(M), \quad (19.55)$$

besitzt genau dann eine Lösung f , wenn $(h | g)_2 = 0$ für alle Lösungen $g \in C^\infty(M)$ der adjunktiven Gleichung

$$D^+ g = 0 \quad (19.56)$$

gilt. Dabei sind die Dimensionen $\dim N(D)$ und $\dim N(D^+)$ endlich.

Diskussion: Die Dimension der Lösungsmannigfaltigkeit von (19.55) bzw. (19.56) ist gleich $\dim N(D)$ bzw. $\dim N(D^+)$. Im Spezialfall

$$\text{ind } D = 0$$

folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung von (19.55) die Existenz einer Lösung. Denn dann ist $\dim N(D) = 0$, und $\text{ind}(D) = 0$ ergibt $\dim N(D^+) = 0$, d.h., die Lösbarkeitsbedingung $(h|g)_2 = 0$ für alle g mit (19.56) ist identisch erfüllt.

Satz 2: Der verallgemeinerte Laplaceoperator $-D^+D$ besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem $\{f_j\}$ in $L_2(M)$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\{\lambda_j\}$. Die Funktion

$$G(x, y, t) := \sum_{j=1}^{\infty} e^{t\lambda_j} f_j(x) \overline{f_j(y)}, \quad x, y \in M, \quad t > 0,$$

gestattet für $t \rightarrow +0$ eine *asymptotische Entwicklung* der Form

$$\begin{aligned} G(x, x, t) \sim & \frac{G_0(x)}{t^{n/2}} + \frac{G_1(x)}{t^{(n-1)/2}} + \dots \\ & \dots + \frac{G_{n-1}(x)}{t^{1/2}} + G_n(x) + G_{n+1}(x)t + G_{n+2}(x)t^2 + \dots . \end{aligned}$$

Explizit bedeutet dies: Bricht man die rechts stehende Reihe nach dem Term der Ordnung t^k ab, $k = -n/2, \dots$, dann ist der Fehler von der Ordnung $o(t^k)$ für $t \rightarrow +0$.

Die analytische Form des Atiyah-Singer-Indextheorems: Für $n = \dim M$ gilt¹⁹

$$\text{ind } D = \int_M G_n(x) \, dV. \quad (19.57)$$

Für ungerades n ist stets $\text{ind } D = 0$.

► **BEISPIEL:** Wir betrachten den elliptischen Operator $D = \text{id}/dx$ auf der Kreislinie S^1 . Dabei bezeichne x eine Winkelvariable. Da die Dimension von S^1 ungerade ist, gilt $\text{ind } D = 0$. Wir wollen das explizit nachprüfen, indem wir $G_1(x) = 0$ bestätigen. Es gilt $D^+ = D$, also $-D^+D = d^2/dx^2$. Für $f_k(x) := e^{ikx}$, $k = 0, 1, \dots$, erhalten wir

$$-D^+Df_k = -k^2 f_k, \quad \text{also } \lambda_k = -k^2.$$

Die Funktionen $\{f_k\}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum $L_2(S^1)$. Deshalb erhalten wir

$$G(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 t} e^{ik(x-y)}$$

mit der asymptotischen Entwicklung $G(x, x, t) \sim (4\pi t)^{-1/2}$, $t \rightarrow +0$. Somit ist $G_1(x) = 0$.

Die Tatsache, dass $\text{ind } D = 0$ gilt, kann man leicht direkt verifizieren. Man beachte hierzu, dass die Gleichung

$$Df = 0 \quad \text{auf } S^1$$

gleichbedeutend ist mit $f = \text{const.}$ Somit gilt $\dim N(D) = 1$, und wir erhalten wegen $D^+ = D$ sofort $\text{ind } D = \dim N(D) - \dim N(D^+) = 0$.

¹⁹Die übrigen Entwicklungsfunktionen G_j enthalten keinerlei tiefliegende Informationen über M , denn es ist $\int_M G_j \, dV = 0$ für alle $j \neq \dim M$.

Verallgemeinerungen: Die Indexformel wird weiter unten auf elliptische Differentialoperatoren verallgemeinert, die auf Schnitte von Vektorraumbündeln über der Basismannigfaltigkeit M wirken.

Für viele Anwendungen ist es wichtig, das Indextheorem auch auf elliptische Komplexe zu verallgemeinern. Dann enthält die Indexformel (19.57) die in Tabelle 19.2 angegebenen tiefliegenden Spezialfälle.

Anstelle von elliptischen Differentialoperatoren kann man auch elliptische Pseudodifferentialoperatoren wählen, weil nur das Symbol von D wichtig ist. Auf diese Weise erhält man auch einen Indexsatz für große Klassen von *Integraloperatoren*, die z. B. inverse Operatoren zu elliptischen Differentialoperatoren sind (vgl. [Booss 1977] und [Gilkey 1995]).

Im Jahre 1973 bewiesen Atiyah, Patodi und Singer ein Indextheorem für Mannigfaltigkeiten M mit Rand. Dabei ergeben sich zusätzliche Terme, die die Eigenschaften des Randes reflektieren (vgl. [Melrose 1993]).

19.11.2 Die topologische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren

Schnitte von Vektorraumbündeln: Es seien \mathbb{V} und \mathbb{W} zwei Vektorraumbündel über der Basismannigfaltigkeit M mit der typischen Faser \mathbb{C}^m . Mit $C^\infty(M, \mathbb{V})$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller C^∞ -Schnitte

$$f : M \rightarrow \mathbb{V},$$

d. h., $f(x)$ liegt für jedes $x \in M$ in der Faser F_x . Wir nehmen an, dass jede Faser F_x ein Hilbertraum ist. Analog zu (19.54) erhalten wir dann den Hilbertraum $L_2(M, \mathbb{V})$, falls wir in (19.54) das Skalarprodukt $(f(x) | g(x))$ auf der Faser F_x wählen.

Elliptischer Differentialoperator: Gegeben sei ein elliptischer Differentialoperator

$$D : C^\infty(M, \mathbb{V}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{W}),$$

d. h., D ist ein linearer Operator, der in lokalen Koordinaten einem elliptischen Differentialoperator der Form (19.52) entspricht.

Die analytische Form des Indextheorems (19.57) bleibt unverändert bestehen.

Weiter unten konstruieren wir ein Faserbündel $\varrho : C(M) \rightarrow M$, wobei $C(M)$ eine geeignete Kompaktifizierung des Kotangentialbündels TM^* von M darstellt. Ferner werden wir ein komplexes Vektorraumbündel

$$\pi : \mathbb{D} \rightarrow C(M)$$

konstruieren, das man das *Indexbündel* des Differentialoperators D nennt. Dieses Bündel hängt von den Eigenschaften des Symbols von D ab.

Topologische Form des Atiyah–Singer–Indextheorems: Es gilt

$$\text{ind } D = \int_{C(M)} \text{ch}(D) \wedge \varrho^* \text{td}(TM_C). \quad (19.58)$$

Speziell gilt $\text{ind } D = 0$, falls die Dimension von M ungerade ist.

Topologische Invarianz: In (19.58) bezeichnet $\text{ch}(D)$ den Cherncharakter des Indexbündels \mathbb{D} , und $\varrho^* \text{td}(TM_C)$ ist das pull-back der Toddklasse des komplexifizierten Tangentialbündels TM_C von M (vgl. 19.10.4).

Tabelle 19.2

elliptischer Komplex	$\text{ind } D$	Indexsatz
de Rham-Komplex	Eulercharakteristik von M	Satz von Gauß-Bonnet-Chern
Dolbeaut-Komplex	arithmetisches Geschlecht von M	Satz von Riemann-Roch-Hirzebruch
Signaturkomplex	Signatur von M mit $\dim M = 4n$	Signatursatz von Hirzebruch
Spinkomplex einer Spinmannigfaltigkeit	Spinorindex von M	Satz von Hirzebruch über das \hat{A} -Geschlecht

Der Kern G_n entspricht in allen Fällen einer geeigneten charakteristischen Klasse.

Die Formel (19.58) demonstriert die fundamentale Invarianz des Index von D unter topologischen Transformationen der Basismannigfaltigkeit M und des Symbols σ von D .

Konstruktion des Indexbündels: Jeder Tangentialraum TM_x der Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist ein Hilbertraum. Deshalb ist der duale Raum TM_x^* (Kotangentialraum) ein Banachraum.

Durch die Symbolabbildung (19.53) in lokalen Koordinaten erhalten wir für jedes Element (x, v) von TM^* mit $v \neq 0$ einen linearen Isomorphismus der Fasern

$$\sigma(x, v) : F_x \rightarrow G_x. \quad (19.59)$$

(i) Die *Mannigfaltigkeit* $C(M)$: Wir betrachten die Menge P aller Tupel

$$(x, v, j), \quad j = 1, 2,$$

mit $x \in M$, $v \in TM_x^*$ und $\|v\| \leq 1$. Wir schreiben $(x, v, 1) \sim (x, w, 2)$, wenn $v = w$ und $\|v\| = 1$ gelten. Die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen P / \sim bildet die Mannigfaltigkeit $C(M)$.

(ii) Das *Indexbündel* \mathbb{ID} : Wir betrachten die Menge P_* aller Tupel

$$(x, v, p, j), \quad j = 1, 2, \quad (19.60)$$

mit $x \in M$, $v \in TM_x^*$, $\|v\| \leq 1$ und $p \in F_x$ bzw. $p \in G_x$ für $j = 1$ bzw. $j = 2$. Wir schreiben

$$(x, v, p, 1) \sim (x, w, q, 2),$$

wenn $\sigma(x, v)p = q$ und $v = w$ mit $\|v\| = 1$ gelten. Die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen P_* / \sim ergibt das Indexbündel \mathbb{ID} . Das ist ein Vektorraumbündel über $C(M)$.

19.11.3 Das Indextheorem für elliptische Komplexe

Wie Tabelle 19.2 zeigt, lassen sich wichtige topologische Invarianten als Index eines geeigneten elliptischen Komplexes darstellen.

Elliptische Komplexe über der Basismannigfaltigkeit M : Darunter verstehen wir eine Folge von linearen Differentialoperatoren

$$0 \xrightarrow{D_{-1}} X_0 \xrightarrow{D_0} X_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_{N-1} \xrightarrow{D_{N-1}} X_N \xrightarrow{D_N} 0 \quad (19.61)$$

mit $X_q := C^\infty(M, \mathbb{V}_q)$. Dabei sind alle \mathbb{V}_q komplexe Vektorraumbündel über der Basismannigfaltigkeit M . Wir fordern

$$D_{q+1} D_q = 0 \quad \text{für alle } q.$$

Parallel zu (19.59) erhalten wir für jedes Tupel $(x, v) \in TM^*$ mit $\|v\| = 1$ lineare Operatoren

$$\sigma_q(x, v) : F_{x,q} \rightarrow F_{x,q+1},$$

die durch die Symbole von D_q auf den Fasern induziert werden. Wir verlangen, dass diese Sequenz exakt ist, d. h., es gilt²⁰ $N(\sigma_{q+1}) = R(\sigma_q)$ für alle q .

Eine wichtige *Strategie* der Theorie elliptischer Komplexe besteht darin, die Untersuchungen auf den symmetrischen Laplaceoperator Δ_q zurückzuführen.

Verallgemeinerter Laplaceoperator Δ_q : Wir definieren

$$\Delta_q := -(D_q^+ D_q + D_{q-1} D_{q-1}^+).$$

Dann ist $\Delta_q : X_q \rightarrow X_q$ elliptisch für $q = 0, 1, \dots, N$.

Kohomologiegruppen und Index: Der Faktorraum

$$H^q(D) := N(D_q) / R(D_{q-1})$$

heißt die q -te Kohomologiegruppe des elliptischen Komplexes $D = \{D_q\}$.

Die Sequenz (19.61) ist genau dann exakt, wenn $H^q(D) = \{0\}$ für alle q gilt. Somit messen die nichtverschwindenden Kohomologiegruppen, in welcher Weise die Sequenz (19.61) von einer exakten Sequenz abweicht.

Der Index von D wird durch

$$\text{ind } D := \sum_{q=0}^N (-1)^q \dim H^q(D)$$

eingeführt.

Satz von Hodge: Es sei $q = 0, \dots, N$.

(i) *Orthogonale Zerlegung:* In dem Hilbertraum $L_2(M, \mathbb{V}_q)$ hat man die direkte orthogonale Summenzerlegung

$$C^\infty(M, \mathbb{V}_q) = R(D_{q-1}) \oplus R(D_q^+) \oplus N(\Delta_q).$$

(ii) *Kohomologiegruppen:* Es gilt $H^q(D) = N(\Delta_q)$ im Sinne einer Isomorphie. Daher ist

$$\text{ind } D = \sum_{q=0}^N (-1)^q \dim N(\Delta_q).$$

Existenzsatz von Poincaré: Es sei $H^{q+1}(D) = \{0\}$ für ein festes q . Dann besitzt die Differentialgleichung

$$D_q f = g, \quad f \in X_q,$$

für gegebenes $g \in X_{q+1}$ genau dann eine Lösung f , wenn die Integritätsbedingung $D_{q+1} g = 0$ erfüllt ist.

Die Bedingung $H^q(D) = \{0\}$ ist nach dem Satz von Hodge gleichbedeutend damit, dass die Gleichung $\Delta_q h = 0$, $h \in X_q$, nur die triviale Lösung $h = 0$ besitzt.

²⁰Nach (19.61) ist $D_{-1} = D_N = 0$. Deshalb setzen wir $\sigma_{-1} = \sigma_N := 0$ und $D_{-1}^+ = D_N^+ := 0$.

Das Atiyah–Singer-Indextheorem für elliptische Komplexe:

(i) *Analytische Form:* Für jeden verallgemeinerten Laplaceoperator Δ_q erhalten wir parallel zu 19.11.1 eine Funktion G_n , die wir mit $G_{n,q}$ bezeichnen. Setzen wir

$$G_n := \sum_{q=0}^N (-1)^q G_{n,q},$$

dann ist

$$\text{ind } D = \int_M G_n(x) \, dV. \quad (19.62)$$

(ii) *Topologische Form:* Die Formel (19.58) bleibt bestehen, wobei die Definition des Indexbündels zu modifizieren ist.

19.11.4 Anwendungen auf den de Rham Komplex

Es sei M eine n -dimensionale, kompakte, orientierte, reelle Mannigfaltigkeit. Ferner sei \mathbb{V}_q die Gesamtheit aller Paare

$$(x, \omega_x),$$

wobei $x \in M$ gilt und ω_x eine q -Form auf M im Punkt x bezeichnet. Ein C^∞ -Schnitt

$$x \mapsto \omega_x$$

im Vektorraumbündel \mathbb{V}_q stellt eine glatte q -Form auf der Basismannigfaltigkeit M dar. Somit ist der Raum $X_q := C^\infty(M, \mathbb{V}_q)$ identisch mit dem Raum der glatten q -Formen auf M (vgl. 15.4.3). Setzen wir $D_q := d$, dann erhalten wir die Sequenz

$$0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{d} X_1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} X_n \longrightarrow 0.$$

Das ist ein elliptischer Komplex.

Hilbertraumstruktur: Wir definieren das Skalarprodukt

$$(\omega | \mu)_2 := \int_M \omega \wedge * \mu$$

für alle $\omega, \mu \in X_q$. Der $*$ -Operator von Hodge wurde in 16.1.8 eingeführt. Vervollständigung von X_q bezüglich $(\cdot | \cdot)_2$ ergibt den Hilbertraum $L_2(M, \mathbb{V}_q)$. Für den in 16.1.6 definierten Operator δ erhalten wir

$$(d\omega | \mu)_2 = (\omega | \delta\mu)_2$$

für alle $\omega, \mu \in X_q$. Deshalb ist $D_q^+ = \delta$, und für den verallgemeinerten Laplaceoperator ergibt sich $\Delta_q = -(D_q^+ D_q + D_{q-1} D_{q-1}^+)$, also

$$\Delta_q \omega = -(\delta d + d\delta) \omega$$

für alle $\omega \in X_q$.

Satz: (i) Die Kohomologiegruppen des elliptischen de Rham-Komplexes sind identisch mit den de Rhamschen Kohomologiegruppen $H^q(M)$ (vgl. 18.5).

(ii) Für die Bettizahlen der Mannigfaltigkeit M erhalten wir

$$\beta_q = \dim H^q(M) = \dim N(\Delta_q),$$

d. h., β_q ist gleich der Dimension des Lösungsraums der Gleichung $\Delta_q \omega = 0$, $\omega \in X_q$.

(iii) Es gilt

$$\text{ind } D = \sum_{q=0}^n (-1)^q \beta_q = \chi(M),$$

d. h., der Index des de Rham-Komplexes ist gleich der Eulercharakteristik der Mannigfaltigkeit M (vgl. 18.2).

(iv) Aus dem Atiyah–Singer-Indextheorem erhalten wir

$$\chi(M) = \int_M G_n(x) dV.$$

Das ist der Satz von Gauß–Bonnet–Chern.

Poincaré-Dualität: Der $*$ -Operator induziert durch $*[\omega] := [\ast\omega]$ einen Isomorphismus von $H^q(M)$ auf $H^{n-q}(M)$. Deshalb gilt $\beta_q = \beta_{n-q}$ für alle q .

19.11.5 Anwendung auf den Dolbeaut-Komplex

Es sei M eine n -dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Mit X_q bezeichnen wir den Raum aller q -Formen auf M , die in lokalen Koordinaten die Gestalt

$$f(z, \bar{z}) d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \quad (19.63)$$

besitzen mit $z = (z_1, \dots, z_n)$ und $z_j \in \mathbb{C}$. Der Operator $\bar{\partial}$ besitze in lokalen Koordinaten die Wirkung

$$\bar{\partial}_k f(z, \bar{z}) d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$$

mit $\bar{\partial}_k = \partial / \partial \bar{z}_k$, wobei über k von 1 bis n summiert wird. Dann bildet

$$0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} X_1 \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} X_n \longrightarrow 0$$

einen *elliptischen Komplex* mit dem Index

$$\text{ind } \bar{\partial} := \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H^q(M, \bar{\partial}).$$

Satz von Dolbeaut: Für alle q gilt

$$H^q(M, \bar{\partial}) = H^q(M, \mathbb{C}^\infty)$$

im Sinne eines Isomorphismus. Dabei ist $H^q(M, \mathbb{C}^\infty)$ die q -te Kohomologiegruppe von M mit Werten in der Garbe \mathbb{C}^∞ der C^∞ -Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf offenen Teilmengen U von M (vgl. 19.9.4).

19.11.6 Das Theorem von Riemann–Roch–Hirzebruch

Es sei $\pi : \mathbb{V} \rightarrow M$ ein komplexes Vektorraumbündel über der n -dimensionalen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit M .

Wir betrachten jetzt Formen der Struktur (19.63) mit Werten im Raum $C^\infty(M, \mathbb{V})$ der glatten Schnitte $s : M \rightarrow \mathbb{V}$. Genauer: $X_q(\mathbb{V})$ sei der lineare Raum aller q -Formen auf M der Gestalt

$$\omega \otimes s$$

mit $s \in C^\infty(M, \mathbb{V})$ und $\omega \in X_q$ (vgl. 19.11.5). Den Operator $\bar{\partial}_{\mathbb{V}}$ definieren wir durch²¹

$$\bar{\partial}_{\mathbb{V}}(\omega \otimes s) := \bar{\partial}\omega \otimes s + (-1)^q \omega \otimes \bar{\partial}s.$$

Der zugehörige Komplex

$$0 \longrightarrow X_0(\mathbb{V}) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathbb{V}}} X_1(\mathbb{V}) \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathbb{V}}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{\mathbb{V}}} X_n(\mathbb{V}) \longrightarrow 0 \quad (19.64)$$

ist *elliptisch* mit dem Index

$$\text{ind } \bar{\partial}_{\mathbb{V}} := \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H^q(M, \bar{\partial}_{\mathbb{V}}).$$

Man nennt $\text{ind } \bar{\partial}_{\mathbb{V}}$ das *arithmetische Geschlecht* der komplexen Mannigfaltigkeit M . Es gilt

$$\text{ind } \bar{\partial}_{\mathbb{V}} = \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H^q(M, \mathbb{C}_{\mathbb{V}}^\infty),$$

wobei $H^q(M, \mathbb{C}_{\mathbb{V}}^\infty)$ die q -te Kohomologiegruppe von M mit Werten in der Garbe aller C^∞ -Schnitte $s : U \rightarrow \mathbb{V}$ auf offenen Teilmengen U der Basismannigfaltigkeit M bezeichnet (vgl. 19.9.4).

Als Spezialfall des Atiyah–Singer–Indextheorems erhält man das folgende fundamentale Resultat der algebraischen Geometrie.

Theorem von Riemann–Roch–Hirzebruch: Es gilt

$$\text{ind } \bar{\partial}_{\mathbb{V}} = \int_M \text{ch}(\mathbb{V}) \wedge \text{td}(TM).$$

Hier ist $\text{ch}(\mathbb{V})$ der Cherncharakter des Vektorraumbündels \mathbb{V} , und $\text{td}(TM)$ bezeichnet die Toddklasse des Tangentialbündels von M (vgl. 19.10.4).

Dieses Theorem stellt eine weitgehende Verallgemeinerung des Satzes von Riemann–Roch dar (vgl. 19.8.2) und beschreibt einen tiefliegenden Zusammenhang zwischen der Indextheorie, der Garbentheorie und der Theorie der charakteristischen Klassen von Vektorraumbündeln.

19.12 Minimalflächen

Das Plateausche Problem: Dieses berühmte Problem der Geometrie und Analysis lautet: Gesucht wird eine Fläche \mathbb{F} im \mathbb{R}^3 , die von einer gegebenen Kurve C berandet wird, wobei der Flächeninhalt $\mu(\mathbb{F})$ minimal oder allgemeiner stationär sein soll, d. h.

$$\mu(\mathbb{F}) = \text{stationär}!, \quad \partial\mathbb{F} = C, \quad (19.65)$$

(vgl. Abb. 19.11).

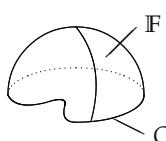


Abb. 19.11

²¹In lokalen Koordinaten hat s die Gestalt $s(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^m$, und $\bar{\partial}s$ entspricht $\bar{\partial}_k s(z, \bar{z}) dz^k$, wobei über k von 1 bis n summiert wird.

Für hinreichend reguläre Flächen ist dieses Problem äquivalent zu der Aufgabe

$$H = 0 \quad \text{auf } \mathbb{F}, \quad \partial\mathbb{F} = C, \quad (19.66)$$

wobei H die mittlere Krümmung der Fläche \mathbb{F} bezeichnet (vgl. 3.6.3.2.). Flächen mit identisch verschwindender mittlerer Krümmung H heißen *Minimalflächen*.²²

► **BEISPIEL:** Liegt die Fläche \mathbb{F} in der speziellen Form $z = z(x, y)$ vor, dann lautet das Minimalflächenproblem:

$$\int_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = \text{stationär!}, \quad (19.67)$$

$$z = \varphi \quad \text{auf } \partial G.$$

Dabei bezeichne G ein Gebiet des \mathbb{R}^2 , und die Funktion $\varphi = \varphi(x, y)$ sei gegeben. Für eine hinreichend reguläre Situation ist das Variationsproblem (19.67) äquivalent zu der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0 \quad \text{auf } G,$$

$$z = \varphi \quad \text{auf } \partial G, \quad (19.68)$$

(vgl. 14.5.2). Diese Gleichung wurde 1762 von Lagrange als ein Spezialfall seiner allgemeinen Gleichungen für mehrdimensionale Variationsprobleme gefunden. Taucht man einen Drahtrahmen C in eine Seifenlösung, dann entstehen in Abhängigkeit von der Gestalt des Rahmens sehr verschiedenartige Seifenblasen (Abb. 19.11). Derartige Experimente wurden von dem belgischen Physiker Plateau im 19. Jahrhundert durchgeführt. Vernachlässigt man die Schwerkraft, dann erhält man nach dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie die zu (19.65) bzw. (19.67) gehörende Minimumsaufgabe. Mit diesem Problem haben sich zahlreiche berühmte Mathematiker des 19. Jahrhunderts beschäftigt, ohne einen Durchbruch zu erzielen. Dazu benötigte man die Methoden der Variationsrechnung des 20. Jahrhunderts.

Für Flächen vom Kreistyp wurde das Plateausche Problem um 1930 unabhängig voneinander von Douglas und Radó gelöst. Um deren Resultat zu formulieren, setzen wir $K := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$.

Theorem von Douglas und Radó: Gegeben sei eine geschlossene rektifizierbare Jordankurve²³ C im \mathbb{R}^3 . Dann existiert eine Fläche

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v), \quad (u, v) \in \bar{K},$$

im \mathbb{R}^3 mit den folgenden Eigenschaften:

(a) *Regularität*. Die Funktion $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ ist stetig als Abbildung vom abgeschlossenen Einheitskreis \bar{K} in den \mathbb{R}^3 und vom Typ C^2 auf K .

(b) *Minimalflächeneigenschaft*. Die mittlere Krümmung verschwindet, d. h., es gilt $H = 0$ für alle Parameterwerte $(u, v) \in K$.

(c) *Randkurve*. Die Einschränkung von $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ auf den Rand ∂K liefert einen Homöomorphismus von ∂K auf C .

An weitgehenden Verallgemeinerungen dieses nunmehr bereits klassischen Resultats wird heute noch intensiv gearbeitet. Dabei interessiert insbesondere die Beantwortung der schwierigen

²²Diese klassische Terminologie ist nicht sehr glücklich gewählt, weil Minimalflächen im Sinne der obigen Definition nicht unbedingt einem minimalen Flächeninhalt entsprechen müssen.

²³ C ist homöomorph zum Rand des Einheitskreises und besitzt eine endliche Kurvenlänge.

Frage, wieviel Minimalflächen von einer gegebenen Anzahl von Jordankurven aufgespannt werden und welches Geschlecht diese Minimalflächen besitzen. Es zeigt sich, dass Minimalflächen einen außerordentlichen Formenreichtum von großem ästhetischen Reiz besitzen (vgl. die zahlreichen Abbildungen in [Dierkes et al. 2010], die mit Methoden der modernen Computergrafik gewonnen wurden).

Darstellungsformel von Weierstraß: Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Ebene mit $0 \in G$. Wählt man zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ ohne gemeinsame Nullstellen, dann erhält man durch die Formeln

$$x = \operatorname{Re} \int_0^\zeta (f^2 - g^2) d\zeta, \quad y = \operatorname{Re} \int_0^\zeta i(f^2 + g^2) d\zeta, \quad z = \operatorname{Re} \int_0^\zeta 2fg d\zeta,$$

eine glatte Minimalfläche durch den Punkt $(0, 0, 0)$.

Auf diese Weise können alle glatten, einfach zusammenhängenden Minimalflächen durch $(0, 0, 0)$ (ohne die Randkurve) erzeugt werden.

Theorem von Bernstein: Jede C^2 -Lösung der Minimalflächengleichung (19.68) auf dem gesamten Raum \mathbb{R}^2 hat die triviale Gestalt $z = ax + by + c$, wobei a, b, c reelle Konstanten bezeichnen.

Geometrisch bedeutet das: Jede Minimalfläche in Form eines Graphen über dem \mathbb{R}^2 ist eine Ebene.

Dieser 1916 von Bernstein bewiesene Satz zeigt, dass die nichtlineare elliptische Differentialgleichung (19.68) völlig andere Eigenschaften als ihre Linearisierung $z_{xx} + z_{yy} = 0$ besitzt.

Empfehlenswert als elementare, aber inhaltsreiche Einführung in die Theorie der Minimalflächen ist [Eschenburg und Jost 2007]. Das moderne Standardwerk ist [Dierkes et al. 2010].

Kapillarflächen und Raumfahrtexperimente: Wir betrachten einen zylinderartigen Behälter mit der Grundfläche G , in dem sich eine Flüssigkeit befindet, die in einem Raumschiff nicht der Schwerkraft, sondern nur der Oberflächenspannung unterliegt (Abb. 19.12). Gesucht wird die Gestalt $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, der Flüssigkeitsoberfläche.

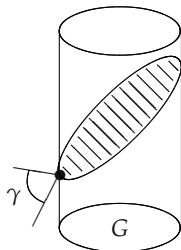


Abb. 19.12

Mathematisch führt das auf das folgende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} &= 2H && \text{auf } G, \\ \mathbf{n} \mathbf{T} &= \cos \gamma && \text{auf } \partial G \quad (\text{Randbedingung}). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet \mathbf{n} den äußeren Einheitsnormalenvektor am Rand ∂G und γ den Kontaktwinkel (Abb. 19.12). Die Größen H und γ sind Konstanten. Ferner setzen wir

$$\mathbf{T} := \frac{\operatorname{grad} z}{|\operatorname{grad} z|}.$$

Folglich ist $\operatorname{div} \mathbf{T}$ gleich dem Minimalflächenoperator, d. h.

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right).$$

Dabei gilt

$$2H \operatorname{meas}(G) = (\cos \gamma) \operatorname{meas}(\partial G),$$

wobei $\operatorname{meas}(G)$ den Flächeninhalt des Grundgebietes G und $\operatorname{meas}(\partial G)$ die Länge der Randkurve ∂G bezeichnet.

Die Gleichung $\operatorname{div} \mathbf{T} = 2H$ besagt, dass die Flüssigkeitsoberfläche eine konstante mittlere Krümmung H besitzt, die im *Unterschied* zu Minimalflächen nicht zu verschwinden braucht.

Derartige Kapillarflächen, die bereits von Laplace (1749-1827) betrachtet wurden, sind zur Zeit Gegenstand von Experimenten der amerikanischen und europäischen Raumfahrtbehörden in Raumschiffen. Insbesondere interessieren sich die Ingenieure für die Messung des Kontaktwinkels γ aufgrund einer mathematischen Analyse der Lösungen des Randwertproblems. Besonders interessant sind Ecken des Grundgebietes G . Dort kann die Lösung singulär werden, d. h., die Flüssigkeit kann dort sehr hoch steigen (theoretisch bis ins Unendliche). Besitzt beispielsweise die Randkurve ∂G eine Ecke mit dem Winkel 2α , dann muss für eine Lösung notwendigerweise $\alpha + \gamma \geq \pi/2$ gelten.

Lässt man die Schwerkraft zu, dann hat man die Gleichung $\operatorname{div} \mathbf{T} = 2H$ durch

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \varkappa z + \lambda$$

zu ersetzen. Dabei gilt $\varkappa = \varrho g / \sigma$ mit ϱ = konstante Dichte der Flüssigkeit, σ = Oberflächenspannung, g = Gravitationsbeschleunigung. Für die Konstante λ erhält man

$$\lambda \operatorname{meas}(G) = (\cos \gamma) \operatorname{meas}(\partial G) - \varkappa V,$$

wobei V das Volumen der Flüssigkeit in dem Behälter bezeichnet. Der Kontaktwinkel γ hängt nur von der Flüssigkeit und nicht von der Form des Grundgebietes G oder von der Flüssigkeitsoberfläche ab.

Eine ausführliche Darstellung findet man in dem Standardwerk [Finn 1985].

Sowohl Minimalflächen als auch Kapillarflächen sind typische Beispiele für nichtlineare elliptische Randwertprobleme, die außerordentlich vielgestaltige Lösungen besitzen und den Einsatz scharfsinniger mathematischer Methoden erfordern. Die nichtlineare Struktur der Probleme ist dabei wesentlich für das Lösungsverhalten, d. h., die Linearisierung $z_{xx} + z_{yy} = 0$ besitzt zum Teil völlig andere Lösungseigenschaften als das volle nichtlineare Problem. Die häufig benutzte Methode der Linearisierung zur Behandlung nichtlinearer Probleme darf deshalb nicht unkritisch angewandt werden, weil sie völlig falsche Ergebnisse vortäuschen kann.

19.13 Stringtheorie

In der klassischen Physik wird die Bewegung eines Teilchens durch eine Gleichung der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \tag{19.69}$$

mit dem Ortsvektor \mathbf{x} und der Zeit t beschrieben. Führen wir einen Parameter p ein, dann können wir anstelle von (19.69) die Gleichung

$$x^j = x^j(p), \quad ct = p, \quad p_0 \leq p \leq p_1, \quad j = 1, 2, 3, \tag{19.70}$$

schreiben ($c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$). In der allgemeinen Relativitätstheorie entspricht die Bewegung eines Teilchens einer Kurve

$$x^\alpha = x^\alpha(p), \quad p_0 \leq p \leq p_1, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad (19.71)$$

in einer vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, wobei x^1, x^2, x^3 raumartige Koordinaten darstellen und x^4 eine zeitartige Koordinate bezeichnet (Abb. 19.13(a)).

Die *Grundidee* der Stringtheorie besteht darin, die Bewegung eines Teilchens nicht durch eine (eindimensionale) Kurve, sondern durch eine zweidimensionale Fläche der Gestalt

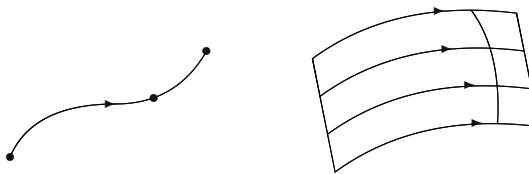
$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma, p), \quad (\sigma, p) \in W, \quad (19.72)$$

zu beschreiben, wobei die Parameter σ, p in der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit W (mit oder ohne Rand) variieren.

► **BEISPIEL:** Die Bewegung eines Fadens entspricht der Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma, t), \quad \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (19.73)$$

Für jeden festen Zeitpunkt $t = p_*$ ergibt sich eine Kurve $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma, p_*)$ mit $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ im \mathbb{R}^3 (Abb. 19.13(b)).



(a) Bewegung eines
Punktteilchens

(b) Bewegung eines
Fadens (String)

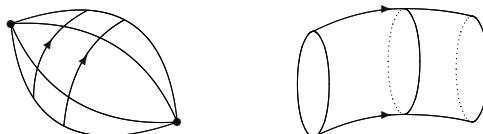
Abb. 19.13

Die Gleichung (19.73) entspricht Gleichung (19.72), falls wir die äquivalente Darstellung $x^j = x^j(\sigma, p)$, $x^4 = cp$, $j = 1, 2, 3$, mit $x^4 := ct$ benutzen.

(i) *Offener String*. Hält man in (19.73) die Endpunkte fest, dann hat man die Randbedingungen

$$\mathbf{x}(\sigma, t_0) = \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}(\sigma, t_1) = \mathbf{b}, \quad \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad (19.74)$$

hinzuzufügen, wobei die Punkte **a** und **b** fest gegeben sind. Dann stellt Gleichung (19.73) eine zweidimensionale Fläche dar.



(a) Bewegung eines
offenen Strings

(b) Bewegung eines
geschlossenen Strings

Abb. 19.14

Diese Situation entspricht einer eingespannten Violinsaite²⁴ (Abb. 19.14(a)). Allgemeiner kann man **a** und **b** in (19.74) durch $\mathbf{x}_0(\sigma)$ bzw. $\mathbf{x}_1(\sigma)$ ersetzen (Abb. 19.13(b)).

²⁴Das englische Wort für Saite ist string.

(ii) *Geschlossener String*. Verlangen wir, dass zu jedem Zeitpunkt t eine geschlossene Kurve vorliegt, dann entspricht das der Periodizitätsbedingung (Abb. 19.14(b)):

$$\mathbf{x}(\sigma_0, t) = \mathbf{x}(\sigma_1, t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (19.75)$$

Abb. 19.15 zeigt die Wechselwirkung zweier geschlossener Strings.

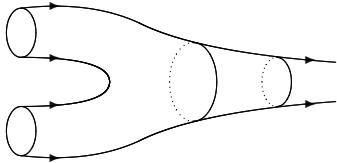


Abb. 19.15

Das Prinzip der stationären Wirkung: Das Variationsproblem der Stringtheorie lautet

$$\frac{T}{2} \int_W (g^{ij} \partial_i x^\alpha \partial_j x^\beta) G_{\alpha\beta} d\mu = \text{stationär}, \quad (19.76)$$

$$x^\alpha = x_0^\alpha \quad \text{auf } \partial W, \quad \alpha = 1, \dots, d.$$

Dabei bezeichnet W eine zweidimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand ∂W (z. B. ein Rechteck im \mathbb{R}^2 oder eine Riemannsche Fläche). Ferner gilt:

(i) Die *Weltfläche* W ist eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem metrischen Tensorfeld (g_{ij}) und dem zugehörigen Volumenmaß μ , d. h., in lokalen Koordinaten (σ, p) auf W gilt $d\mu = \sqrt{|g|} d\sigma dp$.

(g_{ij}) besitzt die Signatur $1, -1$, d. h., in geeigneten lokalen Koordinaten ist $g_{11} = -g_{22} = 1$ und $g_{12} = g_{21} = 0$.

(ii) Die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit²⁵ X , in der der String „lebt“, ist eine d -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem metrischen Tensorfeld $(G_{\alpha\beta})$.

(iii) Summiert wird in (19.76) über $i, j = 1, 2$ und $\alpha, \beta = 1, \dots, d$. Mit (g^{ij}) bezeichnen wir die inverse Matrix zu (g_{ij}) .

Gesucht werden die Bewegung des Strings

$$x = x(P), \quad P \in W,$$

als Abbildung $x : W \rightarrow X$ und die Riemannsche Metrik (g_{ij}) auf W . Gegeben sind die Randwerte x_0 auf ∂W , falls ein Rand ∂W existiert.

Die Bewegungsgleichungen des Strings: Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen zu (19.76) lauten:

$$g^{ij} \nabla_i \nabla_j x^\alpha = 0 \quad \text{auf } W, \quad \alpha = 1, \dots, d,$$

$$T_{ij} = 0 \quad \text{auf } W, \quad i, j = 1, 2,$$
(19.77)

mit dem sogenannten *Energie-Impulstensor*

$$T_{ij} := \left(\partial_i x^\alpha \partial_j x^\beta - \frac{1}{2} g_{ij} g^{km} \partial_k x^\alpha \partial_m x^\beta \right) G_{\alpha\beta}.$$

²⁵Der Zusammenhang mit der 4-dimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit unserer makroskopischen Erfahrungen wird in (19.79) diskutiert.

Die kovariante Ableitung ∇_j bezieht sich dabei auf die Metrik g_{ij} von W . In geeigneten lokalen Koordinaten besitzt die erste Gleichung in (19.77) die Form einer Gleichung der schwingenden Saite:

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \sigma^2} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, d.$$

Dabei ist p eine zeitartige und σ eine raumartige Koordinate.

Eine Lösung der Gleichung $T_{ij} = 0$ in (19.77) ist durch $g_{ij} = \partial_i x^\alpha \partial_j x^\beta G_{\alpha\beta}$ gegeben.

Die Plancksche Skala: Aus den fundamentalen Naturkonstanten

- c = Lichtgeschwindigkeit,
- h = Plancksches Wirkungsquantum ($\hbar = h/2\pi$),
- G = Gravitationskonstante,
- k = Boltzmannkonstante,
- e_p = Ladung des Protons

kann man die folgenden Größen bilden

Plancklänge	$l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$,
Planckzeit	$t_p = l_p/c = 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ s}$,
Planckenergie	$E_p = \hbar/t_p = 1,22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$,
Planckmasse	$m_p = E_p/c^2 = 1,3 \cdot 10^{19} \text{ Protonenmassen}$,
Plancktemperatur	$T_p = E_p/k = 1,4 \cdot 10^{32} \text{ K}$,
Planckladung	$e_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$.

Die Physiker nehmen an, dass diese Größen eine besondere Bedeutung besitzen. Zum Beispiel wird postuliert, dass unterhalb der Plancklänge der Begriff der Länge seine Bedeutung verliert, d. h., unsere Raumvorstellung bricht unterhalb der Plancklänge zusammen.

Stringspannung T: Der Parameter T im Variationsproblem (19.76) heißt Stringspannung. Die Größe

$$L := \sqrt{c\hbar/\pi T}$$

besitzt die Dimension einer Länge. Man wählt nun T so, dass L gleich der Plancklänge ist.

Konforme Invarianz der Stringtheorie: Ersetzen wir die Metrik g_{ij} auf W durch λg_{ij} mit einer positiven Funktion λ , dann bleibt das Integral in (19.76) unverändert. Diese konforme Invarianz spielt eine fundamentale Rolle in der Stringtheorie.

Quantisierung und Dimension: Für den Physiker sind nicht die klassischen Lösungen der Euler–Lagrangeschen Gleichungen (19.77), sondern nur deren Quantisierung interessant. Dabei ergeben sich in den Heisenbergschen Vertauschungsrelationen Anomalien, die nur für gewisse Dimensionen verschwinden. Zum Beispiel wird in der Superstringtheorie die Dimension $d = 10$ des Raumes X besonders ausgezeichnet (vgl. 19.14).

Harmonische Abbildungen: Betrachtet man das Variationsproblem (19.76), wobei jetzt W und X eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension sind, dann wird jede Lösung $x : W \rightarrow X$ von (19.76) als eine harmonische Abbildung bezeichnet. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen geodätischen Linien ($\dim W = 1$), Minimalflächen²⁶ ($\dim W = 2$), der Stringtheorie ($\dim W = 2$) und harmonischen Abbildungen (vgl. [Jost 1984]).

²⁶Der Beweis des berühmten Satzes von Douglas–Radó (vgl. 19.12) basiert wesentlich auf der Erkenntnis, dass man die Minimalfläche in der Gestalt einer harmonischen Abbildung vom Einheitskreis in den Raum \mathbb{R}^3 suchen kann (vgl. [Eschenburg, Jost 2007]).

Satz von Eells und Simpson: Es seien W und X kompakte, eigentliche Riemannsche Mannigfaltigkeiten, wobei die Zielmannigfaltigkeit X eine nichtpositive Schnittkrümmung²⁷ besitzt. Dann existieren harmonische Abbildungen von M nach X .

19.14 Supermathematik und Superstringtheorie

Supersymmetrie: In der Natur beobachtet man Teilchen mit halbzahligem Spin (Fermionen) und Teilchen mit ganzzahligem Spin (Bosonen). Im Standardmodell der Elementarteilchen sind die Basisteilchen Fermionen (6 Leptonen [z. B. das Elektron und das Neutrino] sowie 6 Quarks), während die zugehörigen 12 Teilchen, die für die Wechselwirkung zwischen den Basisteilchen verantwortlich sind, Bosonen darstellen (8 Gluonen, das Photon, das W^\pm -Boson und das Z-Boson). Man nimmt ferner an, dass ein Teilchen mit dem Spin 2 für die Gravitationskräfte verantwortlich ist (Graviton).

Die Hypothese der Supersymmetrie geht davon aus, dass kurz nach dem Urknall eine vollständige Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen bestand, d. h., zu jedem Boson gehört ein entsprechendes Fermion (z. B. gehört zum Graviton das Gravitino mit dem Spin 3/2). Von den Grundgleichungen muss man dann fordern, dass sie vollständig symmetrisch sind bezüglich einer Vertauschung von Bosonen mit Fermionen. Die Supersymmetrie wird in der heutigen Welt nicht mehr beobachtet. Die Physiker sagen, dass im Laufe der Abkühlung des Kosmos die Supersymmetrie „gebrochen“ wurde. Es besteht jedoch die Möglichkeit, dass in Zukunft bei sehr hohen Energien am CERN-Teilchenbeschleuniger Rudimente der Supersymmetrie beobachtet werden.

Superzahlen: Der mathematische Apparat zur Beschreibung der Supersymmetrie basiert auf der Verwendung von Graßmannvariablen $\theta_1, \theta_2, \dots$, die der nichtklassischen Vertauschungsregel

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i \quad (19.78)$$

für alle i, j genügen. Speziell ist $\theta_i^2 = 0$. Unter einer Superzahl versteht man einen Ausdruck der Form

$$a + a_i \theta_i + a_{ij} \theta_i \theta_j + a_{ijk} \theta_i \theta_j \theta_k + \dots,$$

wobei alle $a, a_i, a_{ij}, a_{ijk}, \dots$ komplexe Zahlen sind und über gleiche Indizes summiert wird. Die sogenannte Supermathematik stellt sich die Aufgabe, für wichtige Gebiete der klassischen Mathematik inhaltsreiche Verallgemeinerungen unter Verwendung von Superzahlen aufzuspüren (Superanalysis, Supermannigfaltigkeiten, Super-Liegruppen, Super-Liealgebren usw.).

► **BEISPIEL 1:** Für eine Graßmannvariable θ erhält man wegen $\theta^n = 0$, $n = 2, 3, \dots$, sofort

$$e^\theta = 1 + \theta + \frac{1}{2!} \theta^2 + \dots = 1 + \theta.$$

Superdifferentiation: Die allgemeinste analytische Funktion bezüglich θ lautet

$$f(\theta) = a + b\theta$$

mit festen komplexen Zahlen a und b . Die Ableitung ergibt sich dann durch

$$f'(\theta) := b.$$

²⁷Gegeben sei ein zweidimensionaler Unterraum L_x des Tangentialraumes TX_x einer eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeit X . Die geodätischen Linien durch den Punkt x , deren Tangentialvektoren im Punkt x in L_x liegen, spannen lokal eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit F von X auf. Die Gaußsche Krümmung K der Fläche F im Punkt x heißt die **Schnittkrümmung** der Riemannschen Mannigfaltigkeit X im Punkt x bezüglich L_x . Definitionsgemäß besitzt X eine konstante (bzw. nichtpositive) Schnittkrümmung, wenn K für alle L_x und alle x konstant ist (bzw. nichtpositiv ist).

Partielle Ableitungen: $\partial_j := \partial/\partial\theta_j$ berechnet man mit Hilfe der Regel $\partial_j\theta_j = 1$ und
 $\partial_j\theta_j \dots := \dots$,

indem man θ_j unter Benutzung der Vertauschungsregel (19.78) neben ∂_j plaziert.

► **BEISPIEL 2:** Es ist

$$\partial_1(\theta_2\theta_1) = \partial_1(-\theta_1\theta_2) = -\theta_2.$$

Superintegration: Das Integral bezüglich einer Graßmannvariablen θ ist durch

$$\int (a + b\theta) \, d\theta := b$$

definiert, wobei a und b komplexe Zahlen sind. Dieses Integral ist translationsinvariant, d. h., es gilt

$$\int f(\theta) \, d\theta = \int f(\theta + c) \, d\theta \quad \text{für alle } c \in \mathbb{C}.$$

Superstringtheorie: Die gleichzeitige Verallgemeinerung von klassischer Stringtheorie und Eichfeldtheorie im Rahmen der Supermathematik führt auf Superstringtheorien. Die Quantisierung derartiger Theorien erlaubt 10-dimensionale Modelle. Da wir nur eine 4-dimensionale Raum-Zeit beobachten, nehmen die Stringtheoretiker an, dass die 10-dimensionale Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit X in 19.13 beispielsweise die Form eines Produktraumes der Gestalt

$$X = M_4 \times K_6 \tag{19.79}$$

besitzt, wobei M_4 die beobachtete Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit darstellt und K_6 einen kompakten metrischen Raum bezeichnet, dessen Durchmesser kleiner als die Plancklänge $l_p = 10^{-35} \text{ m}$ ist. Deshalb kann K_6 nicht makroskopisch beobachtet werden. Man spricht von einer Kompaktifizierung der restlichen 6 Dimensionen. Es wird sogar die kühne Hypothese geäußert, dass der Urknall einem Phasenübergang der ursprünglichen 10-dimensionalen Raum-Zeit entsprach, bei dem sich 6 Dimensionen plötzlich der makroskopischen Welt entzogen, indem sie sich zu den winzigen Räumen K_6 „aufwickelten“.

Da das zur Zeit akzeptierte Standardmodell der Elementarteilchentheorie eine Fülle von Teilchenzuständen postuliert (z. B. farbige sowie links- und rechtshändige Quarks), besteht die Hoffnung der Superstringtheoretiker darin, eine wesentlich fundamentalere Theorie aufzustellen, die im Gegensatz zum Standardmodell auch das Graviton mit einschließt und die Fülle der Teilchenzustände als Anregungszustände eines Superstrings darstellt, analog zu den Tönen, die eine Violinsaite hervorbringen kann. Zur Zeit ist man von diesem Ziel jedoch noch weit entfernt und besitzt keine experimentellen Anhaltspunkte für die Existenz von Strings. Die Stringtheoretiker gehen davon aus, dass für Energien, die klein sind gegenüber der Planckenergie E_p , Punktteilchen eine gute Approximation von Strings darstellen. Das entspricht Teilchenmassen, die klein sind gegenüber der Planckmasse (10^{19} Protonenmassen).

Es ist sehr bemerkenswert, dass von der Stringtheorie bereits viele Impulse für die sogenannte reine Mathematik (z. B. Topologie, algebraische Geometrie und Zahlentheorie) ausgegangen sind. Zum Beispiel fanden Physiker einen durchsichtigen „supersymmetrischen“ Beweis des Atiyah-Singer-Indextheorems.

Diese Entwicklung zeigt, dass die Trennung der Mathematik in reine und angewandte Mathematik künstlich ist. Die großen Meister der Mathematik haben immer wieder mit ihren schöpferischen Leistungen die Einheit der Mathematik betont. Wenn überhaupt eine Antwort auf die Frage nach der fundamentalen physikalischen Theorie des Mikrokosmos und des Makrokosmos existiert, dann ist zu erwarten, dass sie die Kraft der gesamten Mathematik erfordern wird.

Literatur zu Kapitel 19

- [Becker 2007] Becker, K., Becker, M., Schwarz, J.: String Theory and *M*-Theory. Cambridge University Press, Cambridge, England (2007)
- [Boos 1977] Boos, B.: Topologie und Analysis. Springer, Berlin (1977)
- [Buchbinder und Kuzenko 1995] Buchbinder, I., Kuzenko, S.: Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or A Walk Through Superspace. Institute of Physics, Bristol (1995)
- [Choquet-Bruhat et al. 1991] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M.: Analysis, Manifolds, and Physics, Vols. 1, 2. North-Holland, Amsterdam (1991)
- [Dierkes et al. 2010a] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Sauvigny, F.: Minimal Surfaces, Vol. I. Springer, Berlin (2010)
- [Dierkes et al. 2010b] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Tromba, T.: Minimal Surfaces, Vol. II: Regularity of Minimal Surfaces, Vol. III: Global Analysis of Minimal Surfaces. Springer, Berlin (2010)
- [Dieudonné 1985] Dieudonné, J.: History of Algebraic Geometry, 400 BC–1985 AC. Chapman, New York (1985)
- [Dieudonné 1989] Dieudonné, J.: A History of Algebraic and Differential Topology. Birkhäuser, Boston (1989)
- [Dubrovin et al. 1992] Dubrovin, B., Fomenko, A., Novikov, S.: Modern Geometry, Vols. 1–3. Transl. from the Russian. Springer, New York (1992)
- [Eisenreich 1980] Eisenreich, G.: Vorlesung über Funktionentheorie mehrerer Variabler. Teubner, Leipzig (1980)
- [Eschenburg und Jost 2007] Eschenburg, J., Jost, J.: Differentialgeometrie und Minimalflächen, zweite wesentlich erweiterte Auflage. Springer, Berlin (2007)
- [Farkas und Kra 1992] Farkas, H., Kra, I.: Riemann Surfaces. Springer, New York (1992)
- [Felsager 1997] Felsager, B.: Geometry, Particles, and Fields. Springer, New York (1997)
- [Finn 1985] Finn, R.: Equilibrium Capillary Surfaces. Springer, New York (1985)
- [Ford 1931] Ford, L.: Automorphic Functions. McGraw-Hill, New York (1931)
- [Forster 1977] Forster, O.: Riemannsche Flächen. Springer, Berlin (1977)
- [Frankel 2004] Frankel, T.: The Geometry of Physics, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, England (2004)
- [Gilkey 1995] Gilkey, P.: Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem, 2nd edition. CRC Press, Boca Raton, FL (1995)
- [Green et al. 1987] Green, M., Schwarz, J., Witten, E.: Superstrings, Vols. 1, 2. Cambridge University Press, Cambridge, England (1987)
- [Greene 1999] Greene, B.: The Elegant Universe: Supersymmetric Strings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory. Norton, New York (1999)
- [Griffith 1978] Griffith, P., Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. Wiley, New York (1978)
- [Hirzebruch 1995] Hirzebruch, F.: Topological Methods in Algebraic Geometry. Transl. from the German into English. 2nd edition. Springer, Berlin (1995)
- [Husemoller 2004] Husemoller, D.: Elliptic Curves. Springer, New York (2004)
- [Husemoller 1993] Husemoller, D.: Fiber Bundles. 3rd edition. Springer, New York (1993)
- [Ivey und Landsberg 2003] Ivey, T., Landsberg, J.: Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2003)
- [Jost 1984] Jost, J.: Harmonic Maps between Surfaces. Springer, Berlin (1984)
- [Jost 1997] Jost, J.: Compact Riemann Surfaces: An Introduction to Contemporary Mathematics. Springer, Berlin (1997)
- [Jost 2008] Jost, J.: Geometry and Physics. Springer, Berlin (2008)
- [Kalka 1997] Kalka, H., Sofe, G.: Supersymmetrie. Teubner, Stuttgart (1997)
- [Kobayashi und Nomizu 1963–65] Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of Differential Geometry, Vols. 1, 2. Wiley, New York (1963–65)
- [Lawden 1989] Lawden, D.: Elliptic Functions and Applications. Springer, New York (1989)
- [Lüst und Theissen 1989] Lüst, D., Theissen, S.: Lectures on String Theory. Springer, New York (1989)

- [Marathe 2010] Marathe, M.: Topics in Physical Mathematics. Springer, London (2010)
- [Melrose 1993] Melrose, R.: The Atiyah–Patodi–Singer Indextheorem. Peters, Wellesley, MA (1993)
- [Milnor und Stasheff 1974] Milnor, J., Stasheff, J.: Characteristic Classes. Princeton University Press, Princeton, NJ (1974)
- [Monastirsky 1993] Monastirsky, M.: Topology of Gauge Fields and Condensed Matter. Transl. from the Russian. Plenum Press, New York (1993)
- [Moore 1996] Moore, J.: Lectures on Seiberg-Witten Invariants. Springer, Berlin (1996)
- [Naber 1997] Naber, G.: Topology, Geometry, and Gauge Fields. Springer, New York (1997)
- [Nakahara 1990] Nakahara, M.: Geometry, Topology, and Physics. Hilger, Bristol (1990)
- [Novikov und Taimanov 2006] Novikov, S., Taimanov, I.: Modern Geometric Structures and Fields. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006)
- [Roe 1988] Roe, J.: Elliptic Operators, Topology, and Asymptotic Methods. Longman, London (1988)
- [Polchinski 1998] Polchinski, J.: String Theory. Vols. 1, 2. Cambridge University Press, Cambridge, England (1998)
- [Schwarz 1993] Schwarz, A.: Quantum Field Theory and Topology. Transl. from the Russian. Springer, New York (1993)
- [Schwarz 1994] Schwarz, A.: Topology for Physicists. Transl. from the Russian. Springer, New York (1994)
- [Shanahan 1978] Shanahan, P.: Th Atiyah-Singer Indextheorem. Springer, Berlin (1978)
- [Sharpe 1997] Sharpe, R.: Differential Geometry: Cartan’s Generalization of Klein’s Erlangen Program. Springer, New York (1997)
- [Varadarajan 2004] Varadarajan, V.: Supersymmetry for Mathematicians. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2004)
- [Waldschmidt et al. 1993] Waldschmidt, M. et al. (eds.): From Number Theory to Physics. Springer, New York (1993)
- [Wells 2008] Wells, R.: Differential Analysis on Complex Manifolds. Springer, New York (2008)
- [Zeidler 2011] Zeidler, E.: Quantum Field Theory: A Bridge between Mathematicians and Physicists, Vol. III: Gauge Theory, Springer, Berlin (2011)
- [Zwiebach 2004] Zwiebach, B.: A First Course in String Theory. Cambridge University Press, Cambridge, England (2004)

Zeittafel zur Geschichte der Mathematik

Man kann dasjenige, was man besitzt, nicht rein erkennen, bis man das, was andere vor uns besessen, zu erkennen weiß.

Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)

Der Anfang

vor 13,7 Milliarden Jahren	Entstehung des Universums durch einen „Urknall“. Innerhalb von drei Minuten hat sich das Universum auf 900 Millionen Grad abgekühlt und die Heliumsynthese beginnt. Damit ist die entscheidende Energiequelle des Kosmos entstanden. ²⁸
vor 4,6 Milliarden Jahren	Entstehung des Sonnensystems und der Erde
vor 4 Milliarden Jahren	Entstehung des Lebens auf der Erde
vor 65 Millionen Jahren	Die Dinosaurier sterben durch einen gewaltigen Asteroideneinschlag aus.
vor 200 000 Jahren	Der Homo sapiens (vernunftbegabte Mensch) entwickelt sich in Afrika, wo die Wiege der Menschheit steht.

Die Entwicklung der Mathematik ist von erstaunlich langfristigen Entwicklungslinien geprägt. Von den „Elementen“ des Euklid zur Geometrie bis zur Schaffung einer nichteuklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert und Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie sind es über 2000 Jahre.

Mathematik der Frühzeit

8000 v. Chr.	Die Eisdecke schmilzt in Asien und Europa. Die Menschen werden sesshaft. Der Warenaustausch fördert die Entstehung des Zählens und der Zahlworte (Revolution in der Jungsteinzeit).
4000 v. Chr.	Anfänge der Mathematik in den Hochkulturen, die an den großen Strömen Huang He (gelber Fluss in China), Indus, Nil, Euphrat und Tigris entstehen.
3200 v. Chr.	Die Sumerer, deren Herkunft unbekannt ist, wandern nach Mesopotamien (Zweistromland zwischen Euphrat und Tigris) und gründen Stadstaaten (z. B. Ur). In unserer heutigen Kultur finden sich noch viele Elemente der sumerischen Kultur.
3000 v. Chr.	Es existiert eine Schrift in Ägypten und Mesopotamien.
2600 v. Chr.	Die Cheopspyramide wird in Ägypten errichtet.
2000 v. Chr.	Die Sumerer verfügen in Mesopotamien über ein gut ausgebildetes Positionszahlensystem zur Basis 60 (Sexagesimalsystem). Zu diesem Zeitpunkt wird die Kultur der Sumerer von den Babylonieren absorbiert.
800 v. Chr.	Das ägyptische Papyrus Rind enthält eine gut entwickelte Bruchrechnung. In Ägypten wird die Geometrie im Zusammenhang mit praktischen Bedürfnissen der Landvermessung entwickelt.
1800 v. Chr.	König Hammurapi regiert das altbabylonische Reich. Keilschrifttexte zeigen die Blüte der babylonischen Mathematik, die lineare und quadratische (zum Teil sogar kubische und biquadratische) Gleichungen lösen kann. Der Satz des Pythagoras ist bereits den Babylonieren bekannt. Die babylonische Mathematik trägt stark ausgeprägte algebraische Züge. Im Gegensatz dazu wird die spätere griechische Mathematik vom geometrischen Denken beherrscht.
1800–500 v. Chr.	Veda-Periode des Sanskrit in Indien (heilige Schriften, die auch mathematische Aussagen enthalten). Die klassische Periode des Sanskrit währt von 500 v. Chr. bis 1000 n. Chr.
575 v. Chr.	Die babylonische Kultur erreicht unter König Nebukadnezar ihren Höhepunkt. Die Null tritt als Leerstelle im Sexagesimalsystem der Babylonier auf.

Mathematik der Antike

624–547 v. Chr.	Der griechische Kaufmann und Naturphilosoph Thales von Milet, der Babylon und Ägypten bereist, gilt als Vater der griechischen Mathematik.
580–500 v. Chr.	Der Grieche Pythagoras von Samos lernt in Phönizien (der heutigen Küstenregion Syriens) die hochentwickelte babylonische und altägyptische Mathematik kennen. Er gründet in Oberitalien die Sekte der Pythagoreer und lehrt, dass Zahl und Maß das Wesen aller Dinge bestimmen. Die Pythagoreer studieren die Gesetze harmonisch schwingender Saiten und entdecken, dass die Zahl $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Das löst eine Grundlagenkrise der Mathematik aus.
551–478 v. Chr.	Konfuzius (Meister Kung) – chinesischer Philosoph und Staatsmann.
550–480 v. Chr.	Der indische Fürstensohn Gautama Buddha begründet die buddhistische Religion.
469–399 v. Chr.	Sokrates lehrt, dass der Mensch das Wesen der Dinge nicht erkennen kann; er kann nur sich selbst erkennen.
460–371 v. Chr.	Demokrit von Abdera begründet die Theorie des Atomismus.
428–348 v. Chr.	Platon von Athen übernimmt von seinem Lehrer Sokrates die Theorie von den Allgemeinbegriffen als dem Wesen der Dinge. Er trennt jedoch die Allgemeinbegriffe völlig von den Dingen und stellt sie als ewig unveränderliche, absolute Ideen dar, die in einer eigenen jenseitigen Welt existieren. Die Philosophie Platons hat Heisenberg bei seiner Formulierung der Quantenmechanik im Jahre 1925 stark beeinflusst. Platon war der Verfechter einer reinen Mathematik, die um ihrer selbst und nicht um praktischer Anwendungen willen betrieben werden sollte. Dem steht das Lebenswerk von Gauß (1777–1855) gegenüber, in dem sich die Einheit von reiner und angewandter Mathematik widerspiegelt. Das vorliegende Taschenbuch der Mathematik folgt der Philosophie von Gauß. Platon gründet die berühmte Akademie in Athen.
408–355 v. Chr.	Eudoxos von Knidos schafft eine Theorie der Proportionen, die auch inkommensurable Strecken (irrationale Zahlen) einschließt. Damit ist die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik behoben.
348–322 v. Chr.	Aristoteles – Universalgelehrter des Altertums (Schüler von Platon und Lehrer von Alexander dem Großen). Schöpfer der formalen Logik. Zusammenfassung und Weiterentwicklung des Wissens seiner Zeit auf den Gebieten Ästhetik, Biologie, Chemie, Ethik, Geschichte, Logik, Metaphysik, Psychologie, Rhetorik. Die Lehre des Aristoteles beherrschte fast 2000 Jahre die Wissenschaft und wird erst durch die von Galileo Galilei (1564–1642) begründete, auf Experimenten basierende Physik in ihren Grundfesten erschüttert.
365–300 v. Chr.	Euklid von Alexandria; seine berühmten „Elemente“ sind 2000 Jahre lang das Standardwerk der Geometrie und das Vorbild für die axiomatische Methode in der Mathematik.
332 v. Chr.	Alexander der Große (356–323 v. Chr.) gründet Alexandria (an der Mündung des Nils), das mit seiner riesigen Bibliothek von 400 000 Papyrusrollen und dem ersten Forschungsinstitut (Museion genannt) das geistige Zentrum der Antike darstellt. Die Bibliothek wird 47 v. Chr. bei kriegerischen Auseinandersetzungen mit den Römern durch einen Brand vernichtet.
287–212 v. Chr.	Archimedes von Syrakus – bedeutendster Mathematiker der Antike; Hebelgesetz, Bestimmung des Schwerpunkts einfacher Körper und Flächen, Gleichgewicht schwimmender Körper, Bestimmung von Flächen- und Rauminhhalten (Vorläufer der Integralrechnung).
200 v. Chr.	Han-Dynastie in China; es erscheinen „Neun Bücher über die Kunst der Mathematik“, in denen praktische Probleme der Mathematik behandelt werden (z. B. Quadratwurzeln und Kubikwurzeln). Bei der Lösung linearer Gleichungssysteme treten erstmalig negative ganze Zahlen auf.
0–30	Jesus Christus begründet die christliche Religion.
85–169 n. Chr.	Ptolemaios von Alexandria verfasst den „Almagest“ (Hauptwerk der Antike zur Astronomie). Im ptolemäischen Weltbild steht die Erde im Mittelpunkt der Welt. Dieses Weltbild besteht über 1300 Jahre.
um 100 n. Chr.	Heron von Alexandria verfasst die Hauptwerke über die antiken Ingenieurwissenschaften (Hebel, schiefe Ebene, Pneumatik, Vermessungskunde, Geschützkunde).

um 250 n. Chr.	Diophantos von Alexandria – berühmtester Zahlentheoretiker der Antike. Von seinem dreizehnbändigen Hauptwerk „Arithmetika“ sind zehn Bände erhalten geblieben; seine Lebensdaten sind sehr unsicher.
500 n. Chr.	Höchste Entfaltung der Maya-Kultur in Mittelamerika. Die Mayas führen außerordentlich präzise astronomische Beobachtungen durch. Der Maya-Kalender bricht im Jahre 2012 ab. Die komplizierte Sprache der Mayas und Tolteken ist bis heute (trotz des Einsatzes moderner Computer) nicht vollständig entziffert.
529 n. Chr.	Gewaltsame Schließung der platonischen Akademie in Athen durch den römischen Kaiser Justinian (Untergang der antiken Mathematik).
600 n. Chr.	Indische Astronomen verwenden das Dezimalsystem mit der Null.

Mathematik des Mittelalters

570–632	Mohammed begründet die islamische Religion.
um 800	Der islamische Mathematiker Al-Kwarizmi aus Chorsem (das Gebiet um den Aralsee in Zentralasien) behandelt in seiner „Algebra“ Verfahren zur Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen.
1125–1213	Der islamische Mathematiker Saraf ad-Din at-Tusi (aus dem heutigen Iran) stellt in seinem Hauptwerk die Trigonometrie als selbständigen Zweig der Mathematik dar und fasst damit die seit dem 8. Jahrhundert von islamischen Mathematikern erzielten Ergebnisse zusammen.
1180–1227	Leonardo von Pisa (Fibonacci); nach mehr als einem Jahrtausend des Verfalls und der Stagnation beginnt mit seinen Arbeiten zur Algebra und Zahlentheorie die Wiederbelebung der europäischen Mathematik. In seinem 1202 erschienenen „Abacus“ stellt er das Rechnen mit arabischen Ziffern dar und trägt zur Verbreitung der indischen und islamischen Mathematik in Europa bei.
1199	Die Universität in Bologna wird gegründet (älteste Universität der Welt); zu Beginn des 13. Jahrhunderts entstehen die Universitäten in Paris, Oxford und Cambridge; über ein Jahrhundert später erreicht eine Gründungswelle das übrige Europa; es entstehen die Universitäten in Prag 1348, Wien 1365, Heidelberg 1386, Köln 1388, Erfurt 1392, Leipzig 1409, Rostock 1419 und anschließend in einer Reihe weiterer Städte.
1225–1274	Thomas von Aquino – italienischer Theologe und Philosoph mit geistiger Ausstrahlung bis in die Gegenwart.
1200	Die Zahl Null setzt sich in Europa durch.
1415	Jan Hus, der 46jährige tschechische Reformator und Rektor der Prager Universität, wird auf dem Scheiterhaufen verbrannt.

Mathematik der Renaissance

Die Renaissance (Wiedergeburt) geht im 15. Jahrhundert von Florenz aus. In der Malerei und bildenden Kunst entstehen die Meisterwerke von Leonardo da Vinci (1452–1519), Michelangelo Bounarroti (1475–1564) und Raffaelo Santi (1483–1520).

1436–1476	Regiomontanus (Johannes Müller); ebene und sphärische Trigonometrie.
1452–1519	Leonardo da Vinci (Universalgenie der Renaissance).
1473–1543	Nicolaus Copernicus; Schöpfer des heliozentrischen Weltbildes, wonach die Erde um die Sonne kreist. 1473 erscheint sein Werk „De revolutionibus orbium coelestium“.
1492	Christopher Columbus erreicht Nordamerika.
1492–1559	Adam Ries; seit 1525 Rechenmeister in Annaberg/Erzgebirge. 1524 erscheint sein Buch „Coß“, das die schriftliche Rechenkunst propagiert.
1517	Martin Luther (1483–1546) leitet die Reformation ein.
1519	Hernando Cortez (1485–1547) beginnt mit der blutigen Eroberung Mexikos, die zum gewaltsamen Tod einer blühenden Kultur führt.
1525	Der Maler Albrecht Dürer (1471–1528) verfasst ein Lehrbuch über die Perspektive (Ausgangspunkt der projektiven Geometrie).
1531/34	Francisco Pizarro (1475–1541) erobert in einem grausamen Krieg das blühende Inkareich (auf dem Gebiet der heutigen Staaten Peru und Chile) und zerstört dessen Kultur. Die Inkas kannten keine Schrift. Sie benutzten geknotete Schnüre (auch in der Mathematik).

1540–1603	François Vietè; Einführung der Buchstabenrechnung.
1544	Michael Stifel (1487–1567) veröffentlicht seine „Arithmetica integra“ (quadratische und kubische Gleichungen).
1545	Geronimo Cardano (1501–1576) veröffentlicht seine „Ars Magna“ (große Kunst), die die Lösung von kubischen und biquadratischen Gleichungen behandelt. Das ist der erste Schritt, der über das mathematische Wissen der Antike wesentlich hinausgeht.
1550	Rafael Bombelli (1526–1572) führt in seinen Büchern „Geometrie“ (1550) und „Algebra“ (1572) die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ ein und verwendet systematisch komplexe Zahlen, um kubische Gleichungen zu lösen.

Mathematik der Zeit des Rationalismus

Die europäische Geistesgeschichte wird von zwei unterschiedlichen Philosophien geprägt, die wesentlich auf Francis Bacon (Dominanz des Experiments und der Erfahrung) und René Descartes (Dominanz des Denkens und der Ideen) zurückgehen.

1561–1626	Francis Bacon; Philosoph, Begründer des Empirismus der (im Unterschied zu Platon, Aristoteles und Descartes) Erkenntnisse aufgrund von Experimenten zu gewinnen sucht und nicht nur durch reines Nachdenken.
1564–1642	Galileio Galilei; Beginn der modernen Physik auf der Basis von Experimenten (Fallgesetze, Entdeckung der Jupitermonde mit dem Fernrohr). Im Gegensatz zur Lehre des Aristoteles erkennt Galilei, dass alle Körper gleich schnell fallen. Galileis Hauptwerk „Discorsi“ (Unterredungen) erscheint 1632. Wegen seines Eintretens für das heliozentrische Weltbild findet 1633 ein Prozess vor der Inquisition statt. Galilei schwört ab und ist bis an sein Lebensende Gefangener auf einem Landgut bei Florenz.
1564–1616	William Shakespeare – größter Dramatiker aller Zeiten.
1571–1630	Johannes Kepler – Astronom und Mathematiker am Prager Kaiserhof; aufgrund einer riesigen Menge an astronomischen Beobachtungsdaten, die auf Tycho Brahe (1546–1601) zurückgehen, entdeckt er durch langwierige Rechnungen empirisch die drei Gesetze der Planetenbewegung.
1596–1650	René Descartes; mit ihm und Fermat beginnt das Zeitalter der modernen Mathematik. Descartes begründet die analytische Geometrie, die (im Unterschied zur Antike) Geometrie und Algebra miteinander verschmilzt.
1601–1665	Pierre de Fermat; Zahlentheorie, analytische Geometrie (zusammen mit Descartes), Wahrscheinlichkeitsrechnung, geometrische Optik. Die Fermatsche Vermutung in der Theorie der diophantischen Gleichungen wird erst 1994 von Andrew Wiles bewiesen.
1614	John Neper (1550–1617), schottischer Gutsbesitzer, veröffentlicht sein Werk „Mirifici logarithmorum canonis description“ (Logarithmenrechnung). Kepler benutzt Nepers Logarithmentafeln, um seine umfangreichen astronomischen Berechnungen zu vereinfachen.
1618–1648	Der dreißigjährige Krieg wütet in Mitteleuropa.
1623–1662	Blaise Pascal; Geometrie, Hydrostatik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bau einer Addiermaschine.
1629–1695	Christian Huygens; Wellenoptik, Verwendung von Kettenbrüchen, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erfindung der Pendeluhr.
1636	Gründung der Harvard-Universität in Cambridge, Massachusetts (älteste Universität der USA).

Mathematik des Aufklärungszeitalters

Der Hauptvertreter der Aufklärung ist der französische Philosoph François-Marie Voltaire (1694–1778).

1643–1727	Isaac Newton; Schöpfer der modernen Physik (Mechanik) und der modernen Mathematik (Differential- und Integralrechnung). Der Titel des Hauptwerks von Newton lautet: „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687).
1645	Englische Revolution.

1646–1716	Gottfried Wilhelm Leibniz; Universalgelehrter, Erfindung der Differential- und Integralrechnung (später als Newton, aber unabhängig von Newton). Leibniz erkennt als erster die Bedeutung einer gut ausgebildeten Zeichen- und Begriffssprache (z.B. Differential, Differentialquotient und Integralzeichen). Er postulierte, dass ein guter Kalkül von allein arbeiten muss. Leibniz glaubt, dass unsere Welt die beste unter allen möglichen Welten ist (Verwandtschaft mit dem allgemeinen Prinzip der kleinsten Wirkung in der modernen Physik). Leibniz lehrt, dass die Welt aus geistigen Einheiten besteht, die er Monaden nennt. Das führte ihn auf den Begriff des Differentials, der fundamental für die moderne Mathematik ist. Die Hauptwerke von Leibniz sind „Theodizee“ (1719) und „Monadologie“ (1714). Viele Ideen von Leibniz weisen weit in die Zukunft (z. B. die Schaffung einer mathematischen Logik, die Konstruktion von Rechenmaschinen, das Arbeiten mit invarianten geometrischen Größen und die Schaffung der Topologie).
1652	Gründung der Akademie Leopoldina, die seit 2008 die Nationale Akademie der Bundesrepublik Deutschland ist. Die Leopoldina ist die älteste ununterbrochen tätige Akademie der Naturwissenschaften; es folgen Royal Society in London 1663, Académie des sciences in Paris 1666, Berliner Akademie 1700 (gegründet durch Leibniz) und Petersburger Akademie 1725.
1654–1705	Jakob Bernoulli; Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Gesetz der großen Zahl).
1667–1748	Johann Bernoulli; erstes Lehrbuch über die Differential-und Integralrechnung, Vorläufer der Variationsrechnung.
1685–1731	Brook Taylor; Taylorscher Lehrsatz.
1685–1750	Johann Sebastian Bach – Komponist.
1700–1782	Daniel Bernoulli; Hydrodynamik.
1707–1783	Leonhard Euler – der produktivste Mathematiker aller Zeiten (die gesammelten Werke umfassen 72 Bände und 3000 Briefe); Variationsrechnung, Differentialgleichungen, unendliche Reihen, Exponentialfunktion, komplexwertige Funktionen, Zahlentheorie, Hydrodynamik, Elastizitätstheorie.
1724–1804	Immanuel Kant; Philosoph und Naturgelehrter. Verfasser der „Kritik der reinen Vernunft.“ Kant unterscheidet zwischen <i>a priori</i> Begriffen (die dem Menschen von Geburt an gegeben sind) und <i>a posteriori</i> Begriffen (die der Mensch durch Erfahrung im Laufe seines Lebens erwirbt). Irrtümlicherweise glaubt Kant, dass die euklidische Geometrie <i>a priori</i> gegeben ist. Das wird von Gauss, Bolyai, Lobatschewski und Riemann durch die Konstruktion nichteuklidischer Geometrien und durch Einsteins allgemeine Relativitätstheorie (1915) korrigiert.
1736–1813	Joseph Louis Lagrange; mehrdimensionale Variationsrechnung, Vollendung der Newtonschen Mechanik durch die analytische Mechanik in dem Hauptwerk „Mécanique analytique“ (1811). Arbeiten zur Himmelsmechanik, Algebra und Zahlentheorie.
1749–1827	Pierre Simon Laplace; Himmelsmechanik, Kapillaritätstheorie. 1812 erscheint sein Werk „Théorie analytique de probabilité“ – die erste systematische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
1749–1832	Johann Wolfgang von Goethe – Dichter und vielseitig interessierter Wissenschaftler.
1756–1791	Wolfgang Amadeus Mozart – Komponist.
1770–1827	Ludwig van Beethoven – Komponist.
1789	Französische Revolution.
1794	Die jakobinische Regierung gründet die École Polytechnique in Paris, die rasch zu einem führenden Zentrum der Mathematik und Naturwissenschaften wird. Dort wirken unter anderem Lagrange, Laplace, Monge, Cauchy, Poncelet, Ampère, Gay-Lussac, Fresnel, Dulong, Petite, Poincaré, Hadamard, Laurent Schwartz.
1798	Gaspar Monge (1746–1818) begründet die darstellende Geometrie mit seinem Buch „Géométrie descriptive“.
1799	Napoleon in Ägypten (Begründung der Ägyptologie durch mitreisende Wissenschaftler).

Mathematik des 19. Jahrhunderts

Die Mathematik des 19. Jahrhunderts, die durch Gauss, Cauchy, Riemann, Lie, Klein und Poincaré dominiert wird, verändert vollständig das Gesicht der Mathematik (vgl. die Geschichte der Mathematik des 19. Jahrhunderts von [Klein 1925] auf Seite 601). Im 19. Jahrhundert wurden die Begriffe „Mannigfaltigkeit, Krümmung, nichtkommutative Algebra und Symmetriegruppe“ klar von den Mathematikern herausgearbeitet. Diese Begriffe spielen im 20. Jahrhundert eine zentrale Rolle in Einsteins spezieller und allgemeiner Relativitätstheorie sowie in der Quantentheorie.

- | | |
|-----------|--|
| 1799 | Carl Friedrich Gauß (1777–1855) beweist in seiner Dissertation den Fundamentalsatz der Algebra. In den Jahren 1815, 1816 und 1849 veröffentlicht Gauß noch drei weitere Beweise dieses Fundamentalsatzes. |
| 1801 | Gauss begründet mit seinem Werk „Disquisitiones arithmeticæ“ die moderne Zahlentheorie (Kongruenzen, quadratische Formen und Kreisteilung). Gauss wird auf einer zeitgenössischen Münze als „Princeps Mathematicorum“ (Fürst der Mathematiker) bezeichnet. Er ist einer der größten Mathematiker und Naturgelehrten aller Zeiten. Er hat auf allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik grundlegende Ergebnisse erzielt; er schreckt auch nicht zurück vor gewaltigen Rechnungen in der Astronomie und Geodäsie. In zeitlicher Reihenfolge: Konstruktion des 17-Ecks mit Zirkel und Lineal, Kreisteilungskörper, Lemniskate und elliptische Funktionen, hypergeometrische Funktionen, Grundlagen der Zahlentheorie (z.B. Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes), empirische Bestimmung des Primzahlverteilungsgesetzes, Grundlagen der Bahnberechnung von Himmelskörpern, Methode der kleinsten Quadrate, Prinzip des kleinsten Zwanges in der Mechanik, Fehlerfortpflanzungsgesetz, Grundlagen der Flächentheorie, konforme Abbildungen, Potentialtheorie, Theorie des Magnetismus, magnetische Experimente, Grundlagen der Geodäsie, Konstruktion einer nichteuclidischen Geometrie (vgl. [Wußing 2011] auf Seite 602). |
| 1802 | Georg Friedrich Grotefend (1775–1853) entziffert die Keilschrift der Assyrier und Babylonier. |
| 1804–1851 | Carl Gustav Jacob Jacobi: Thetafunktionen, Himmelsmechanik, Variationsrechnung, Zahlentheorie. |
| 1805–1865 | William Rowan Hamilton–Schöpfer der Hamiltonschen Mechanik als Verallgemeinerung der geometrischen Optik; 1843 führt er Quaternionen und Vektoren ein. |
| 1815–1897 | Karl Weierstraß; ausgehend von dem Jacobischen Umkehrproblem widmet er sein ganzes Leben dem systematischen Aufbau der komplexen Funktionentheorie; Höhepunkte sind eine allgemeine Theorie der elliptischen Funktionen und der Abelschen Integrale; wichtige Beiträge zur Algebra (Elementarteilertheorie für Matrizen), und zur Variationsrechnung (hinreichende Bedingung für ein Minimum); strenge Begründung der Analysis. |
| 1817 | Bernhard Bolzano (1781–1848); tschechischer Priester; bemüht sich um einen strengen Aufbau der Analysis und gibt in einer langen Abhandlung einen (aus damaliger Sicht) strengen Beweis des Mittelwertsatzes für stetige Funktionen (Mittelwertsatz von Bolzano). Dieser Mittelwertsatz wird im 20. Jahrhundert zu einem fundamentalen topologischen Existenzprinzip ausgebaut (Fixpunktsatz von Brouwer und Schauder; vgl. Kapitel 12). |
| 1821 | Cauchy (1789–1855) veröffentlicht seinen „Cours d’analyse“. Cauchy ist einer der produktivsten Mathematiker aller Zeiten (800 Abhandlungen). Seine Arbeiten betreffen: Analysis (strenge Begründung des Grenzwertbegriffs), komplexe Funktionentheorie, Elastizitätstheorie, Himmelsmechanik, partielle Differentialgleichungen. |
| 1821–1894 | Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew; grundlegende Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (zentraler Grenzwertsatz), Approximationstheorie, und Zahlentheorie; großer Einfluss auf die Entwicklung der russischen mathematischen Schule. |
| 1822 | Jean-Baptiste Fourier (1768–1830) veröffentlicht sein Werk „Théorie analytique de la chaleur“ (analytische Wärmetheorie); er setzt systematisch Fourierreihen und Fourierintegrale zur Lösung partieller Differentialgleichungen ein und begründet die harmonische Analysis. |
| 1822 | Jean-François Champollion entziffert die ägyptischen Hieroglyphen, nachdem er in Verfolgung dieses Ziels mehr als ein Dutzend Sprachen gelernt hat. |
| 1822 | Jean-Victor Poncelet (1790–1867) begründet die projektive Geometrie mit dem Werk „Traité projectif des figures“. |
| 1826 | Niels Henrik Abel (1802–1829) zeigt, dass die allgemeine Gleichung vom Grade $n \geq 5$ nicht durch Radikale gelöst werden kann. Seine Ergebnisse über Integrale algebraischer Funktionen (Abelsche Integrale) bereiten den Weg für Riemanns Theorie der Riemannschen Flächen. |

- 1826–1866 Bernhard Riemann beeinflusst mit seinen neuartigen Ideen wesentlich die Mathematik des 20. Jahrhunderts (vgl. [Maurin 1997] auf Seite 596): geometrische komplexe Funktionentheorie (konforme Abbildungen), Riemannsche Flächen, Riemannsche Geometrie, Abelsche Integrale, Zahlentheorie, Gasdynamik.
- 1827 Gauss veröffentlicht seine Abhandlung „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ (allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen). Dabei begründet er die moderne Differenzialgeometrie. Mit seinem „theorema egregium“ (vorzügliches Theorem) zeigt er, dass die Krümmung einer zweidimensionalen Fläche (z.B. die Krümmung der Erdoberfläche) allein durch Messungen auf der Fläche bestimmt werden kann, ohne den umgebenden dreidimensionalen Raum zu benutzen. Es gibt eine faszinierende Entwicklungslinie vom Gaußschen „theorema egregium“ über Riemanns Krümmungstensor bis zu Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie im Jahre 1915 und der modernen Kosmologie. In Weiterverfolgung dieser Linie gelangt man zu dem um 1973 vollendeten Standardmodell der Elementarteilchenphysik (Krümmung eines Hauptfaserbündels mit der Symmetriegruppe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$).
- 1829 Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793–1856) beweist unabhängig von Gauss die Existenz einer hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie. Ebenfalls einen unabhängigen Beweis gibt Janos Bolyai (1802–1860) im Jahre 1832.
- 1831 Michael Faraday (1791–1867) entdeckt die elektromagnetische Induktion und entwickelt die völlig neuartige Idee von der Existenz eines elektromagnetischen Feldes (Nahwirkungstheorie): Faraday schafft die experimentellen Grundlagen für die Maxwell'sche Theorie des Elektromagnetismus.
- 1831 Evariste Galois (1801–1832) entwickelt auf der Basis von Symmetriegruppen (Galoisgruppen) eine allgemeine Theorie zur Auflösung algebraischer Gleichungen. Dabei verallgemeinert er die Gaußsche Theorie der Kreisteilungskörper und wird zum Begründer der modernen Strukturtheorie. Der Beweis der Fermatschen Vermutung von Andrew Wiles im Jahre 1994 benutzt die Galoistheorie als ein wichtiges Hilfsmittel.
- 1841 Robert Mayer (1814–1878), Arzt aus Heilbronn, entdeckt das Naturgesetz von der Erhaltung der Energie (erster Hauptsatz der Thermodynamik). Emmy Noether (1882–1935) zeigt mathematisch im Jahre 1918, dass eine physikalische Theorie stets ein Energieerhaltungsgesetz besitzt, falls diese Theorie aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgt und das zugehörige Variationsproblem invariant unter Zeittranslationen ist.
- 1842–1899 Sophus Lie – Schöpfer der Theorie der kontinuierlichen Gruppen (Liegruppen und Liealgebren). Diese Theorie spielt im 20. Jahrhundert eine fundamentale Rolle sowohl in der Differenzialgeometrie als auch in der mathematischen Physik (z.B., beim Verständnis der Atom- und Molekülspektren und bei der Schaffung des Standardmodells in der Elementarteilchenphysik).
- 1844 Joseph Liouville (1809–1882) beweist in konstruktiver Weise die Existenz transzenter Zahlen.
- 1844 Hermann Grassmann (1809–1877) veröffentlicht sein Werk „Lineare Ausdehnungslehre“, in dem wesentliche Elemente der linearen und multilinear Algebra in endlichdimensionalen Räumen enthalten sind. Grassmann wird von seinen Zeitgenossen nicht verstanden. Der fundamentale Cartansche Kalkül der alternierenden Differentialformen in der modernen Analysis und Differenzialgeometrie basiert auf Grassmannalgebren. In den supersymmetrischen Theorien der modernen Elementarteilchenphysik wird Grassmanns \wedge -Produkt benutzt, um Fermionen (z. B. Elektronen) zu beschreiben.
- 1844–1906 Ludwig Boltzmann – Schöpfer der statistischen Physik – erkennt, dass die Entropie und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik einen statistischen Charakter besitzen.
- 1845–1918 Georg Cantor begründet mit der Schaffung der Mengenlehre eine neue Denkrichtung und eine neue, universelle Sprache der Mathematik, die es den Mathematikern des 20. Jahrhunderts erlaubt, sehr abstrakte und tiefliegende Sachverhalte kompakt zu formulieren. Mit Hilfe von Kardinal- und Ordinalzahlen strukturiert Cantor das Unendliche.
- 1847 Ernst Eduard Kummer (1810–1894) entwickelt eine Teilbarkeitslehre unter Einbeziehung idealer Zahlen, um Spezialfälle der Fermatschen Vermutung zu beweisen.
- 1847 George Boole (1815–1869) veröffentlicht sein Buch „The Mathematical Analysis of Logic“. Dort zeigt er, dass man nicht nur mit Zahlen, sondern auch mit logischen Ausdrücken rechnen kann (Boolesche Algebren). Er bereitet damit den Weg für die moderne mathematische Logik und Informatik.
- 1849–1925 Felix Klein; grundlegende Beiträge zur Geometrie, Algebra (Ikosaedergruppe und die Lösung von Gleichungen fünften Grades) und zur komplexen Funktionentheorie (Theorie der automorphen Funktionen). Felix Klein, der brillante Lehrbücher verfasst, ist auch ein glänzender Wissenschaftsorganisator, und er reformiert das Schulsystem in Deutschland.
- 1854 Riemann hält im Beisein des greisen Gauß seinen berühmten Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen“. Damit verallgemeinert er die Flächentheorie von Gauß auf höhere Dimensionen und schafft die mathematischen Grundlagen für Einsteins allgemeine Relativitätstheorie im Jahre 1915. Auf dem Nachhauseweg äußerte sich Gauß tief bewegt über das Gehörte.

- 1854–1912 Henri Poincaré; äußerst vielseitiger und ideenreicher Mathematiker und mathematischer Physiker, der die Mathematik des 20. Jahrhunderts stark beeinflusst hat. Poincaré ist der Schöpfer der Theorie dynamischer Systeme und der algebraischen Topologie sowie der Differentialtopologie. Ferner erzielte er fundamentale Ergebnisse in der Himmelsmechanik, der Theorie partieller Differentialgleichungen und der komplexen Funktionentheorie (Differentialgleichungen vom Fuchschen Typ, automorphe Funktionen, Beweis des Uniformisierungssatzes über die globale Parametrisierung Riemannscher Flächen, hyperbolische nichteuklidische Geometrie).
- 1855 Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) wird der Nachfolger von Gauß in Göttingen; Schöpfer der analytischen Zahlentheorie. Zu seinen Schülern gehören Eisenstein, Kronecker, Kummer und Riemann.
- 1859 Riemann wird der Nachfolger von Dirichlet in Göttingen. Im gleichen Jahr veröffentlicht er seine fundamentale Arbeit über die analytische Fortsetzung der Riemannschen ζ -Funktion, und er formuliert die berühmte, bis heute ungelöste Riemannsche Vermutung über die Nullstellen der ζ -Funktion (vgl. Kapitel 2).
- 1864 James Clerk Maxwell (1831–1879) formuliert seine Maxwellschen Gleichungen und begründet damit die Theorie des Elektromagnetismus. Im Unterschied zur klassischen Mechanik werden die Maxwellschen Gleichungen in Einsteins spezieller Relativitätstheorie (1905) nicht verändert. Im Jahre 1929 erkannte Hermann Weyl (1885–1955), dass man die Maxwellschen Gleichungen als Eichtheorie mit einer kommutativen Liegruppe als Eichgruppe formulieren kann. Das moderne Standardmodell der Elementarteilchenphysik entspricht einer Eichtheorie mit einer nichtkommutativen Liegruppe als Eichgruppe.
- 1864 Weierstraß wird an die Berliner Universität berufen. Er schafft einen großen Schülerkreis um sich und ist für seine mathematische Strenge bekannt.
- 1869–1891 Élie Cartan ist der Schöpfer der modernen Differentialgeometrie für beliebige Symmetriegruppen durch Weiterentwicklung der Theorie der Liegruppen und Liealgebren. Seine Ideen zur Schaffung einer allgemeinen Krümmungstheorie auf der Basis von Hauptfaserbündeln spielen heute die zentrale Rolle in den Eichtheorien der Elementarteilchenphysik (Standardmodell).
- 1871 Richard Dedekind (1831–1916) veröffentlicht seine Idealtheorie (verallgemeinerte Teilbarkeitslehre). In der Theorie der Operatoralgebren des 20. Jahrhunderts, die wichtige Anwendungen in der Quantentheorie besitzen, spielen Ideal eine zentrale Rolle.
- 1872 Dedekind veröffentlicht sein Buch „Stetigkeit und irrationale Zahlen“. Darin wird erstmalig ein strenger Aufbau der Theorie der reellen Zahlen gegeben.
- 1872 Felix Klein formuliert sein Erlanger Programm: „Geometrie ist die Invariantentheorie einer Transformationsgruppe“. Damit wird es möglich, die unterschiedlichsten Geometrien mit Hilfe eines einheitlichen Prinzips zu ordnen (vgl. Kapitel 3). Im 20. Jahrhundert schafft Hermann Weyl (1885–1955) eine allgemeine Invariantentheorie für die klassischen Liegruppen.
- 1873 Charles Hermite (1822–1901) beweist die Transzendenz der Eulerschen Zahl e .
- 1874 Georg Cantor (1845–1918) veröffentlicht seine erste Abhandlung zur Mengentheorie, in der er einen nichtkonstruktiven Beweis für die Existenz transzenterter Zahlen gibt. Ferner beweist er, dass die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen gleichmächtig sind, während die Menge der irrationalen Zahlen mächtiger als die Menge der rationalen Zahlen ist.
- 1878 William Clifford (1845–1879) verallgemeinert komplexe Zahlen und Hamiltons Quaternionen durch Einführung von Cliffordalgebren. Im Jahre 1928 benutzt Dirac die Cliffordalgebra der komplexen (4×4) -Matrizen, um seine Diracgleichung für das relativistische Elektron aufzustellen.
- 1882 Ferdinand Lindemann (1852–1939) beweist die Transzendenz der Zahl π und zeigt damit, dass das 2000 Jahre alte Problem der Quadratur des Kreises unlösbar ist. Lindemann ist der akademische Lehrer von Hilbert.
- 1882 Leopold Kronecker (1823–1891) veröffentlicht eine grundlegende Abhandlung über die Theorie der algebraischen Zahlen, die Hilbert sehr beeinflusst bei der Schaffung seiner Klassenkörpertheorie.
- 1886 Felix Klein wird an die Universität Göttingen berufen.
- 1886 Sophus Lie wird als Nachfolger von Felix Klein an die Universität Leipzig berufen und wirkt dort bis kurz vor seinem Tod im Jahre 1899.
- 1890 Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) durch Hilbert.
- 1895 David Hilbert (1862–1943) wird durch Felix Klein nach Göttingen berufen und baut Göttingen zu einem Weltzentrum der Mathematik aus, das im Jahre 1933 von den neuen faschistischen Machthabern durch die Verfolgung jüdischer Wissenschaftler in kurzer Zeit zerstört wird.
- 1895 Henri Poincaré begründet mit seiner Arbeit „Analyse situs“ die algebraische Topologie, die im 20. Jahrhundert zu einem Juwel der Mathematik und der mathematischen Physik wird (Mathematik des qualitativen Verhaltens).

- 1890 David Hilbert beweist den Basissatz für Ideale und den Endlichkeitssatz der Invariantentheorie, der wegen seiner großen Allgemeinheit und seines abstrakten Beweises für die damaligen Mathematiker eine Sensation darstellt. Damit begründet Hilbert die kommutative Algebra, die im 20.Jahrhundert von zentraler Bedeutung für die algebraische Geometrie und die Computeralgebra ist.
- 1896 Jaques Hadamard (1865–1963) und Charles de la Valée-Poussin (1866–1962) beweisen unabhängig den Satz über die asymptotische Verteilung der Primzahlen. Hundert Jahre zuvor war dieses Gesetz empirisch von Legendre und Gauss entdeckt worden; sie konnten es aber nicht beweisen.
- 1897 David Hilbert veröffentlicht seinen „Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper“, der die Zahlentheorie des 20. Jahrhunderts wesentlich beeinflusst hat.
- 1897 Erster mathematischer Weltkongress in Zürich. Diese Weltkongresse finden aller vier Jahre statt.
- 1899 Kurt Hensel (1861–1941) entdeckt die p -adischen Zahlen.
- 1899 Élie Cartan begründet seinen eleganten Kalkül der alternierenden Differentialformen, der den Leibnizschen Kalkül auf Funktionen mehrerer Variabler verallgemeinert. Dieser Kalkül ist das Hauptinstrument der modernen Differenzial- und Integralrechnung sowie der modernen Differenzialgeometrie.
- 1899 Hilberts Buch „Grundlagen der Geometrie“ erscheint. Damit wird die moderne axiomatische Methode begründet. Dieses Buch löst nach 2000 Jahren die „Elemente“ des Euklid ab.

Mathematik des 20. Jahrhunderts

Im 20. Jahrhundert findet eine Explosion des mathematischen Wissens statt, wie in keinem anderen Jahrhundert zuvor.

- Einerseits werden die Erkenntnisse des 19. Jahrhunderts wesentlich vertieft. Das betrifft: Algebra, algebraische Geometrie, Zahlentheorie, Logik, Differenzialgeometrie, Liegruppen und Liealgebren, komplexe Analysis, Theorie der dynamischen Systeme und der partiellen Differenzialgleichungen, Variationsrechnung, harmonische Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik.
- Andererseits entstehen völlig neue Gebiete der Mathematik:
 - algebraische Topologie, Differentialtopologie, homologische Algebra, de Rham Kohomologie, Kohomologie von Liealgebren, Garbenkohomologie, Theorie der Faserbündel, algebraische und topologische K -Theorie, Quantengruppen und Deformationstheorie für mathematische Strukturen, Hodgetheorie, Theorie der Motive (allgemeine Kohomologietheorie),
 - Maß- und Integrationstheorie, lineare und nichtlineare Funktionalanalysis, Operatoralgebren, nichtkommutative Geometrie,
 - dynamische Optimierung und optimale Steuerung; lineare, konvexe, ganzzahlige Optimierung, Spieltheorie,
 - Wahrscheinlichkeitstheorie (basierend auf der Maßtheorie), stochastische Prozesse und stochastische Integrale, Informationstheorie, Ergodentheorie, Chaostheorie, Bedienungstheorie,
 - Wissenschaftliches Rechnen zur Lösung partieller Differenzialgleichungen in Technik und Naturwissenschaften (finite Elemente, Mehrgitterverfahren, Wellenelemente (wavelets), hierarchische Matrizen und Tensorverfahren, Verfahren zur Entschlüsselung der DNA),
 - mathematische Biologie, mathematische Physik,
 - Wirtschaftsmathematik (mathematische Ökonomie), Finanzmathematik, Versicherungsmathematik,
 - Algorithmik, Informatik und Komplexitätstheorie, Beweistheorie, Computeralgebra, Theorie der biologischen Computer und der Quantencomputer.
- Um schwierige Probleme zu lösen, werden immer abstraktere Hilfsmittel entwickelt (z.B. die von Alexandre Grothendieck (geb. 1928) geschaffene Theorie der Schemata, die die algebraische Geometrie und die Zahlentheorie unter einem Dach vereint).
- Die wesentlichen mathematischen Strukturen werden axiomatisch herausgefiltert (z.B. topologische Räume, metrische Räume, Mannigfaltigkeiten, Faserbündel, Hilberträume, Banachräume, Gruppen, Ringe, Körper, von Neumann-Algebren, C^* -Algebren, Wahrscheinlichkeitsräume). In diesem Zusammenhang wird um 1950 eine neue Theorie der mathematischen Strukturen geschaffen, die man Kategorientheorie nennt und inzwischen auch von Physikern angewandt wird, um Einsteins allgemeines Relativitätsprinzip auf die Quantengravitation zu übertragen. Topostheorie ist die Theorie von mathematischen Universen mit einer verallgemeinerten Logik und einer verallgemeinerten Mengentheorie. Eine Reihe von Physikern versuchen die Topostheorie auf Quantensysteme anzuwenden.

1900	David Hilbert – einer der größten Mathematiker aller Zeiten– formuliert auf dem 2. Weltkongress in Paris dreiundzwanzig offene Probleme (vgl. [Yandell 2001] auf Seite 595). Hilbert hat grundlegende Ergebnisse auf folgenden Gebieten erzielt: Algebra und Invariantentheorie, Zahlentheorie, Grundlagen der Geometrie, Integralgleichungen und Schaffung der Funktionalanalysis (Hilberträume), Variationsrechnung, mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik (vgl. [Reid 1970] auf Seite 602).
1900	Hilbert beweist das Dirichletprinzip und begründet damit die für Technik und Physik grundlegenden direkten Methoden der Variationsrechnung, die in der modernen numerischen Mathematik sehr eng mit der Methode der finiten Elemente verbunden sind.
1900	Max-Planck (1858–1947) leitet sein Strahlungsgesetz aus der Quantenhypothese ab, die besagt, dass die Energie des harmonischen Oszillators gequantelt ist (d.h., die Energie nimmt nur gewisse diskrete Werte an). Das läutet die Quantenrevolution in der Physik ein. Max Planck erhält 1918 den Nobelpreis für Physik.
1902	Henri Lebesgue (1875–1941) begründet die moderne Maß- und Integrationstheorie (vgl. Kapitel 10).
1904	David Hilbert beginnt im Anschluss an die im Jahre 1900 erschienene Arbeit von Fredholm (1866–1927) mit der Veröffentlichung seiner allgemeinen Theorie der Integralgleichungen und begründet damit die Funktionalanalysis, die die Analysis des 20. Jahrhunderts dominiert (partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Variationsprobleme, verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)).
1905	Albert Einstein (1879–1955) – einer der größten Physiker aller Zeiten, schreibt in diesem Jahr vier fundamentale Arbeiten: (i) Begründung der speziellen Relativitätstheorie, (ii) Erklärung des photoelektrischen Effekts und des Planckschen Strahlungsgesetzes durch die Existenz von Lichtquanten, die später Photonen genannt werden, (iii) Äquivalenz zwischen Energie und Masse ($E = mc^2$), (iv) Theorie der Brownschen Bewegung. Die spezielle Relativitätstheorie postuliert, dass Raum und Zeit eine Einheit bilden und physikalische Effekte sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Einstein erhält 1921 den Nobelpreis für Physik (siehe Kapitel 10/16 und [Boden 2001] auf Seite 603).
1907	Henri Poincaré (1854–1912) und Paul Koebe (1882–1945) beweisen unabhängig voneinander den Uniformisierungssatz über die globale Parametrisierung Riemannscher Flächen. Das ist eine der Glanztaten der Mathematik.
1908	Hermann Minkowski (1864–1909) stellt die spezielle Relativitätstheorie als vierdimensionale Geometrie eines Minkowski-Raumes dar. Weitere Beiträge: Geometrie der konvexen Körper und Geometrie der Zahlen (Gitterprobleme).
1912	Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) beweist seinen Fixpunktsatz; Brouwer verdankt man grundlegende topologische Ergebnisse (Abbildungsgrad, Dimensionstheorie). Philosophisch ist Brouwer ein engagierter Vertreter des Intuitionismus, der nur konstruktive Beweise zulässt, und indirekte Beweise ausschließt. Hermann Weyl (1885–1955) veröffentlicht sein Buch „Die Idee der Riemannschen Fläche“. Weyl ist der Schöpfer der modernen harmonischen Analysis (Verschmelzung von Analysis und Symmetry). In seinen grundlegenden Büchern stellt er enge Beziehungen zur modernen Physik her: „Raum, Zeit Materie“(1918) (Einstiens allgemeine Relativitätstheorie), „Gruppentheorie und Quantenmechanik“(1929), „Die klassischen Gruppen, ihre Invarianten und ihre Darstellungen“(1938). Weyl entdeckt 1929, dass man die Maxwell'schen Gleichungen als Eichtheorie mit der Strukturgruppe $U(1)$ formulieren kann. Die Weiterentwicklung dieser Idee führt zur Schaffung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik (vgl. Kapitel 19).
1913	Felix Hausdorff (1868–1942) veröffentlicht sein Buch „Grundzüge der Mengenlehre– die erste Gesamtdarstellung der Mengenlehre mit vielfältigen Anwendungen. Hausdorff arbeitet auf folgenden Gebieten: halbgeordnete Mengen, topologische und metrische Räume, Maßtheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie. Als ihm die Deportation in ein Konzentrationslager bevorsteht, nimmt er sich zusammen mit seiner Familie das Leben. In der Universität Bonn erinnert eine Gedenktafel an dieses schreckliche Ereignis.
1914	Der von Deutschland und der Habsburger Monarchie begonnene erste Weltkrieg wütet in Europa.
1915	Einstein begründet seine allgemeine Relativitätstheorie, in der die Gravitationskraft als Krümmung einer 4-dimensionalen pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit beschrieben wird (vgl. Kapitel 16).
1918	Emmy Noether (1882–1935) beweist das Noethertheorem, welches besagt, dass Symmetrien von physikalischen Theorien, die auf dem Prinzip der kleinsten Wirkung basieren, Erhaltungsgesetze erzeugen. Dieses Theorem ist fundamental für die moderne Elementarteilchenphysik. Emmy Noether ist eine wesentliche Wegbereiterin für die Schaffung der modernen Algebra.

- 1923 Norbert Wiener (1894–1964) begründet die mathematische Theorie der stochastischen Prozesse (Wiener Prozesse). Er wird dazu durch Einsteins Theorie der Brownschen Bewegung angeregt.
- 1925 Werner Heisenberg (1901–1976) begründet die Quantenmechanik als Matrizenmechanik. Er erhält 1932 den Nobelpreis für Physik.
- 1926 Erwin Schrödinger (1887–1961) veröffentlicht die Schrödinger-Gleichung zur Berechnung von Quantenprozessen (vgl. Kapitel 13). Er erhält 1933 zusammen mit Dirac den Nobelpreis für Physik.
- 1926 Max Born (1882–1970) formuliert im Zusammenhang mit der von ihm geschaffenen Streutheorie von Quantenteilchen die statistische Deutung der Schrödingerschen Wellenmechanik. Er erhält dafür den Nobelpreis für Physik im Jahre 1954.
- 1927 Heisenberg entdeckt die Unschärferelation in der Quantenmechanik: im Unterschied zur klassischen Mechanik können Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens nicht gleichzeitig genau gemessen werden. Das führt zu einem tiefgreifenden Umdenkungsprozess in der Physik.
- 1928 Paul Dirac (1902–1984) stellt die Grundgleichung für das relativistische Elektron auf (Dirac-Gleichung). Er benutzt dabei eine spezielle Cliffordalgebra und sagt die Existenz des Positrons voraus, das 1932 von Anderson in der Höhenstrahlung gefunden wird. Damit ist das erste Antiteilchen entdeckt. Dirac erhält den Nobelpreis für Physik im Jahre 1933 zusammen mit Erwin Schrödinger. Edwin Hubble (1899–1953) entdeckt eine Rotverschiebung in den Spektren ferner Galaxien, die durch die Expansion des Weltalls nach dem Urknall ausgelöst wird. Neuere verfeinerte Meßtechniken zeigen, dass die Ausdehnung in beschleunigter Weise erfolgt.
- 1930 Das Institute for Advanced Study (Institut für Höhere Studien) wird als außeruniversitäre Forschungseinrichtung in Princeton (New Jersey, USA) gegründet.
- 1930 Bartel Leendert van der Waerden (1903–1998) veröffentlicht seine zweibändige „Moderne Algebra“. Damit wird die axiomatische Algebra begründet (Axiome für Gruppen, Ringe, Körper, Algebren, usw.); van der Waerden stützt sich auf Vorlesungen von Emil Artin (1998–1962) und Emmy Noether (1882–1935) in Göttingen. Weitere Forschungsgebiete von van der Waerden sind algebraische Geometrie, Liegruppen und Liealgebren, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Spinoranalysis, mathematische Statistik, Geschichte der Algebra und der Quantenmechanik.
- 1930 Juliusz Paweł Schauder (1899–1943) beweist seinen den Fixpunktsatz, der den Fixpunktsatz von Brouwer auf unendlichdimensionale Banachräume verallgemeinert. Schauder erzielte fudamentale Ergebnisse über lineare und nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Nachdem er sich einige Zeit verstecken konnte, wurde er entdeckt und zusammen mit seiner Frau von deutschen Besatzern in Polen ermordet.
- 1930 Hermann Weyl wird Nachfolger von Hilbert in Göttingens. Drei Jahre später emigriert er in die USA.
- 1931 Kurt Gödel (1906–1978) beweist den Vollständigkeitssatz des Prädikatenkalküls der ersten Stufe in der mathematischen Logik. Ein Jahr später entdeckt Gödel die Existenz nichtentscheidbarer Probleme in axiomatisch formulierten, nichttrivialen mathematischen Theorien.
- 1931 John (János) von Neumann (1903–1957) wird Professor am Institute for Advanced Study in Princeton. John von Neumann (Schüler von Hilbert) hat die Mathematik des 20. Jahrhunderts in vielfältiger Weise mitgeprägt. Er arbeitete auf folgenden Gebieten: axiomatische Grundlegung der Mengentheorie (Mengen und Mengenmengen), mathematische Logik, Funktionalanalysis, Operatoralgebren und Quantenmechanik, topologische Gruppen, Ergodentheorie, numerische Verfahren, Schockwellen in der Gasdynamik, Meteorologie, Spieltheorie, Wirtschaftsmathematik, Architektur von Computern (vgl. [Macrae 1994] auf Seite 602).
- 1931 Leon Lichtenstein (1878–1932) veröffentlicht sein Buch „Vorlesungen über eine Klasse nichtlinearer Integralgleichungen mit zahlreichen Anwendungen auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen“. Lichtenstein beschäftigte sich intensiv mit nichtlinearer Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten und der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten (z.B. Sternmodelle).
- 1932 John von Neumann veröffentlicht sein Buch „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“. Damit wird die moderne mathematische Physik begründet.
- 1932 Stefan Banach (1892–1945) veröffentlicht sein Buch „Théorie des opérations linéaires“ (Theorie der linearen Operatoren) und begründet damit die Theorie der Banachräume in der Funktionalanalysis (vgl. Kapitel 11).
- 1932 Erich Kähler (1906–2000) veröffentlicht seine Arbeit „Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik“, mit der er die Theorie der Kählermannigfaltigkeiten begründet, die wichtige Verallgemeinerungen von Riemannschen Flächen darstellen und in der modernen Differenzialgeometrie und Stringtheorie eine zentrale Rolle spielen. Kählers Arbeiten sind dem Zusammenführen von Analysis, algebraischer Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Physik gewidmet. Parallel zum

	Cartanschen äußeren Differentialkalkül der Differentialformen (auf der Basis von Grassmannalgebren) konstruierte er einen inneren Differentialkalkül (auf der Basis von Cliffordalgebren) mit engem Bezug zur Diracgleichung des relativistischen Elektrons. Das ist der Beginn der Spingometrie, die später stark ausgebaut wird.
1932	Jaques Hadamard (1865–1963) veröffentlicht sein Buch „Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaire hyperboliques“ über das Anfangswertproblem linearer hyperbolischer partieller Differentialgleichungen (Wellenprozesse). Er konstruiert die hochsingulären Grundlösungen, die Wellenfronten beschreiben, und zeigt, wie man daraus die Lösungen konstruieren kann. Die moderne Fassung dieser Theorie, die verallgemeinerte Funktionen benutzt, wird heute wesentlich in der Quantengravitation benutzt.
1933	Emigration von Emmy Noether (1882–1935), Paul Bernays (1888–1977), Otto Blumenthal (1876–1944), ²⁹ Max Born (1882–1970), Richard Courant (1888–1972), Leon Lichtenstein (1878–1933), Hermann Weyl (1885–1955) und vielen anderen Wissenschaftlern. Der berühmte Zahlentheoretiker Edmund Landau (1877–1938) und der Nobelpreisträger für Physik James Franck (1882–1962) werden ihres Amtes entbunden. Albert Einstein und Hermann Weyl gehen an das Institute for Advanced Study in Princeton und begründen zusammen mit John von Neumann und Kurt Gödel den Weltruf dieses Instituts (vgl. [Regis, 1989] auf Seite 602).
1933	Andrei Kolmogorov (1903–1987) veröffentlicht das Buch „Die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“. Damit wird die moderne axiomatische Wahrscheinlichkeitstheorie begründet. Kolmogorov gehört zu den bedeutendsten Mathematikern des 20. Jahrhunderts. Er arbeitete auf vielen Gebieten: dynamische Systeme, stochastische Prozesse, Ergodentheorie, Turbulenztheorie, Funktionalanalysis, Approximationstheorie, mathematische Logik, Topologie (vgl. [Bolibruch et al. 2006] auf Seite 602).
1934	Jean Leray (1906–1998) und Juliusz Schauder (1899–1943) verallgemeinern den Brouwerschen Abbildungsgrad auf unendlichdimensionale Banachräume, um die Existenz von Lösungen für nichtlineare Operatorgleichungen (z. B. Differentialgleichungen oder Integralgleichungen) zu beweisen. Das ist die Geburtsstunde der nichtlinearen Funktionalanalysis. Jean Leray erzielte grundlegende Ergebnisse in der Analysis (Navier–Stokesche Differentialgleichungen für viskose Flüssigkeiten, nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungen), und Topologie (Spektralfolgen, Garbentheorie).
1935	Pawel Sergejewitsch Alexandrow (1896–1982) und Heinz Hopf (1894–1971) veröffentlichen mit dem Buch „Topologie“ die erste Gesamtdarstellung der Topologie, zu deren Entwicklung beide Autoren fundamentale Beiträge geleistet haben.
1935	Richard Courant (1888–1972) gründet das später nach ihm benannte weltberühmte Courant-Institut in New York. Er selbst arbeitet auf dem Gebiet der Analysis und Geometrie (z.B. Theorie der Minimalflächen). Vgl. [Reid, 1976] auf Seite 602.
1936	Konrad Zuse (1910–1995) baut den ersten mechanischen Computer Z1 (vgl. [Zuse 1993] auf Seite 602).
1936	Alan Turing (1912–1954) begründet die moderne Automatentheorie durch Einführung eines theoretischen, universell einsetzbaren Automaten (Turing-Maschine). Das ist die Geburtsstunde der Informatik.
1938	Otto Hahn (1879–1968) und Fritz Straßmann (1902–1980) entdecken die Kernspaltung des Urans. Ein wesentlicher Beitrag wird dazu von Lise Meiner (1878–1986) geleistet. Die Uranspaltung ist wenige Jahre später die physikalische Grundlage der Atombombe.
1939	Der erste Band der „Éléments de mathématique“ von Nicolas Bourbaki erscheint. Der Name „Bourbaki“ ist ein Pseudonym für eine Gruppe von jungen Mathematikern in Frankreich, die sich das Ziel stellt, unter Ausschluß der angewandten Mathematik, wichtige Gebiete der reinen Mathematik axiomatisch darzustellen. Zu den Gründungsmitgliedern dieser Gruppe gehören Henri Cartan (1904–2008), Claude Chevalley (1909–1984), Jean Dieudonné (1906–1992), André Weil (1906–1998) und andere. Inzwischen sind 26 Bände in französischer Sprache erschienen (z. B. Mengentheorie, Topologie, Algebra, Analysis, Liegruppen und Liealgebren). Die Bourbaki-Gruppe wird ständig durch neue Mitglieder verjüngt (vgl. [Borel 1993] auf Seite 601). Noch heute erscheinen neue Bände.
1939–1945	Der vom faschistischen Deutschland begonnene zweite Weltkrieg und die Vernichtung von 6 Millionen Juden bringen unendliches Leid über die Völker.
1942	Robert Oppenheimer (1904–1967) wird Leiter des Manhattan-Projekts in Los Alamos (New Mexiko, USA) und sammelt die brillantesten Köpfe zum Bau der Atombe am sich.
1944	John von Neumann und Oscar Morgenstern veröffentlichen „Theory of Games and Economical Behavior“ (Spieltheorie und ökonomisches Verhalten). Damit wird die mathematische Ökonomie begründet.
1944	Das mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald) wird gegründet.

- 1945 Abwurf der ersten beiden Atombomben auf die beiden japanischen Städte Hiroshima und Nagasaki durch die USA.
- 1945 Shiing-Shen Chern (1911–2004) verallgemeinert den Satz von Gauß–Bonnet auf höherdimensionale Riemannsche Räume und schafft in diesem Zusammenhang kraftvolle neue topologische Invarianten, die man charakteristische Klassen nennt (Äquivalenzklassen von Differentialformen).
- 1946 ENIAC – der erste leistungsfähige elektronische Röhrenrechner wird in den USA gebaut. Sein Vorläufer MANIAC wird beim Bau der Atombombe eingesetzt.
- 1946 Claude Chevalley (1909–1984) veröffentlicht sein Buch „Theory of Lie Groups“ über die globale Theorie der Liegruppen; grundlegende Ergebnisse zur Zahlentheorie und der Theorie der algebraischen Gruppen.
- 1946/49 Richard Feynman (1918–1988), Julian Schwinger (1918–1994) und Sin-Itiro Tomonaga (1906–1979) begründen mit unterschiedlichen Methoden die Quantenelektrodynamik. Sie erhalten dafür gemeinsam im Jahre 1965 den Nobelpreis für Physik.
- 1948 Claude Shannon (1916–2001) begründet die Informationstheorie. Sein Begriff der Information entspricht in der Thermodynamik der Entropie.
- 1948 Norbert Wiener veröffentlicht sein Buch „Cybernetics“ (vgl. [Wiener, 1965] auf Seite 602).
- 1948 John Bardeen (1908–1991), Walter Brattain (1902–1987) und William Shockley (1910–1989) entwickeln in den Bell Telephone Laboratories (USA) den Transistor, der auf der Quantenmechanik von Festkörpern beruht. Im Jahre 1956 erhalten diese drei Physiker den Nobelpreis. Der Transistor leitet eine technologische Revolution ein.
- 1949 Freeman Dyson (geb. 1923) – Mathematiker und theoretischer Physiker – zeigt die Renormierbarkeit der Quantenelektrodynamik (vgl. [Schweber 1994] auf Seite 601). Er erzielt grundlegende Ergebnisse zur Stabilität der Materie im Rahmen der Quantenmechanik, zur statistischen Physik, zur Quantenfeldtheorie und zur Theorie der stochastischen Matrizen. Eine Reihe seiner Arbeiten beschäftigen sich mit dem Ursprung des Lebens auf der Erde und der Suche nach außerirdischem Leben. Freeman Dyson arbeitet am Institute for Advanced Study in Princeton. Er gehört zu den führenden Intellektuellen unserer Zeit und hat zahlreiche, hochinteressante Bücher und Essays über die Geschichte und Philosophie von Mathematik und Physik verfasst (vgl. [Dyson 1999] auf Seite 603). Dyson ist 1981 mit dem Wolfpreis für Physik ausgezeichnet worden.
- 1950/70 Die reine Mathematik erhält wesentlich neue Impulse durch die Schaffung der Theorie der Faserbündel und Garben, der K -Theorie, der Differentialtopologie und der Kobordismentheorie, der homologischen Algebra, der Theorie der Schemata und der Kategorientheorie.
- 1950/1970 In der angewandten Mathematik wird die Optimierungstheorie einschließlich der Theorie der optimalen Steuerung geschaffen. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen und der dynamischen Systeme (in Technik und Himmelsmechanik) wird wesentlich weiterentwickelt (z.B. durch die von Andrei Kolmogorow (1903–1987), Wladimir Arnold (1937–2010) und Jürgen Moser (1928–1999) geschaffene KAM-Theorie, die unter anderem die chaotische Bewegung von Asteroiden mathematisch erfaßt).
- 1952 Samuel Eilenberg (1913–1998) und Norman Steenrod (1910–1971) veröffentlichen ihre Monographie „Foundations of Algebraic Topology“ (Grundlagen der algebraischen Topologie), die die Topologie revolutioniert.
- 1954 Chen Ning Yang (geb. 1922) und Robert Mills (1927–1999) verallgemeinern Hermann Weyls Formulierung der Maxwellschen Gleichungen im Rahmen einer Eichtheorie. Sie ersetzen Weyls kommutative Liegruppe $U(1)$ durch die nichtkommutative Liegruppe $SU(2)$. Die dadurch entstehenden Yang–Mills Gleichungen sind von fundamentaler Bedeutung für die Elementarteilchenphysik und die von Simon Donaldson (geb. 1957) geschaffene topologische Theorie der 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Dafür erhält er 1986 die Fieldsmedaille (vgl. Kapitel 19).
- 1956 Tsung Dao Lee (geb. 1926) und Chen Ning Yang (geb. 1922) stellen die Theorie auf, dass eine fundamentale Asymmetrie in der Natur herrscht. Bei Prozessen der schwachen Wechselwirkung ist die Spiegelungssymmetrie gebrochen. Beide Physiker erhalten dafür bereits ein Jahr später den Nobelpreis.
- 1956 Henri Cartan und Samuel Eilenberg begründen mit ihrem Buch „Homological Algebra“ einen neuen mächtigen Zweig der Algebra.
- 1956 Friedrich Hirzebruch (1927–2012) veröffentlicht sein Buch „Neuere Methoden in der algebraischen Geometrie“, in der er eine tiefe Verallgemeinerung des berühmten Satzes von Riemann–Roch über die Analysis auf Riemannschen Flächen beweist. Diese Verallgemeinerung bezieht sich auf kompakte komplexe n -dimensionale Mannigfaltigkeiten (Satz von Riemann–Roch–Hirzebruch). In dem Buch werden mächtige Hilfsmittel der modernen Topologie eingesetzt

	(Faserbündel, Garben, charakteristische Klassen, Kobordismentheorie). Dieses Buch hat einen großen Einfluß auf die Entwicklung der Topologie der Mannigfaltigkeiten, die ein zentrales Thema der Mathematik in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts darstellt. Zusammen mit Michael Atiyah entwickelt Friedrich Hirzebruch die topologische K-Theorie (kraftvolle verallgemeinerte Kohomologietheorie).
1956	Mark Alexandrowitsch Krasnoselski (1920–1977) veröffentlicht sein Buch „Topologische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen“ (russisch). Damit wird eine stürmische Entwicklung der nichtlinearen Funktionalanalysis eingeleitet mit vielen Anwendungen auf nichtlineare Differential- und Integralgleichungen in Technik und Naturwissenschaften, Variations- und Optimierungsprobleme. Führende Köpfe sind Mark Krasnoselski, Felix Browder (geb. 1927), Jaques-Louis Lions (1928–2001) und Louis Nirenberg (geb. 1925) mit ihren zahlreichen Schülern.
1957	Der von der Sowjetunion aus gestartete „Sputnikumkreis“ als erster, von Menschen geschaffener Himmelskörper die Erde.
1957	Israel Moisejewitsch Gelfand (1913–2009) veröffentlicht seine fünfbandige Monographie über die vielseitigen Anwendungen der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen) auf partielle Differentialgleichungen, stochastische Prozesse, die Spektraltheorie von Operatoren und die Darstellungstheorie von Gruppen. Gelfand gehört zu den bedeutendsten Mathematikern des 20. Jahrhunderts. Er hat auf vielen Gebieten der Mathematik fundamentale Ergebnisse erzielt: Funktionalanalysis, harmonische Analysis, Darstellungstheorie von C^* -Algebren und nicht-kompakten Liegruppen (z.B. die Lorentzgruppe), partielle Differentialgleichungen. Gelfands weltberühmtes Seminar an der Moskauer Lomonossow-Universität war neuesten Resultaten der gesamten Mathematik und ihren Anwendungen gewidmet. Gelfand hat wichtige neue Forschungsrichtungen angeregt (z.B. das Aiyah-Singer-Indextheorem und die nichtkommutative Geometrie von Alain Connes, die eine weitreichende Verallgemeinerung des Gelfand-Naimark Theorems für C^* -Algebren darstellt).
1961	Juri Aleksejewitsch Gagarin (1934–1968) umkreist als erster Mensch im All die Erde.
1962	Francis Crick (1916–2004) und James Watson (geb. 1928) erhalten den Medizin-Nobelpreis für ihr DNA-Modell in Form einer Doppelhelix. Sie analysieren dabei Röntgenspektren in genialer Weise. Diese Entdeckung gilt als eine der bedeutendsten Leistungen der Naturwissenschaft des 20. Jahrhunderts. Der verdrillte Doppelstrang ist von fundamentaler Bedeutung für die Weitergabe von Information in Lebewesen.
1963	Michael Atiyah (geb. 1929) und Isadore Singer (geb. 1924) beweisen das Atiyah-Singer Indextheorem, das einen tiefen Zusammenhang zwischen der Topologie von Mannigfaltigkeiten und den darauf existierenden elliptischen partiellen Differentialgleichungen beschreibt. Sir Michael Atiyah ist einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Er erhielt die Fieldsmedaille, den Wolfpreis und den Abelpreis.
1963	Paul Cohen (geb. 1934) beweist die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese von den übrigen Axiomen der Mengentheorie. Das führt zu der überraschenden erkenntnistheoretischen Einsicht, dass die von Cantor Ende des 19. Jahrhunderts vorgenommene Strukturierung des Unendlichen nicht eindeutig festgelegt ist. Es gibt mehrere derartige, logisch widerspruchsfreie Strukturen. Paul Cohen erhielt die Fieldsmedaille im Jahre 1966.
1964	Murray Gell-Mann (geb. 1929) stellt die Theorie auf, dass das Proton nicht elementar ist, sondern aus drei Quarks besteht. Er erhält den Nobelpreis für Physik im Jahre 1969. Der mathematische Hintergrund ist die Analyse experimenteller Daten mit Hilfe der Liealgebra der Liegruppe $U(3)$ (vgl. Kapitel 17).
1965	Arno Penzias (geb. 1933) und Robert Wilson (geb. 1936) entdecken die aus dem Kosmos kommende energieschwache 3K-Strahlung, die ein Relikt des Urknalls ist. Sie erhalten den Nobelpreis für Physik im Jahre 1978.
1969	Neil Armstrong (geb. 1930) betritt als erster Mensch den Mond.
1970/80	Der breite Einsatz finiter Elemente revolutioniert die numerische Mathematik.
1979	Abdus Salam (1926–1996), Sheldon Glashow (geb. 1932) und Steven Weinberg (born 1933) erhalten den Physik-Nobelpreis für die Vereinigung der elektromagnetischen Wechselwirkung mit der schwachen Wechselwirkung im Rahmen einer Eichtheorie. Die vorhergesagten Bosonen, die zusammen mit dem Photon für diese Wechselwirkung verantwortlich sind (das Z-Boson und die W^\pm -Bosonen) werden 1983 an dem Teilchenbeschleuniger des CERN-Instituts (Genf) experimentell nachgewiesen. Das zur Zeit benutzte sehr symmetrische Standardmodell der Elementarteilchentheorie besteht aus 6 Quarks und 6 Leptonen (z. B. Elektron und Neutrino). Die Wechselwirkung wird durch 12 Eichteilchen beschrieben (das Photon, 8 Gluonen, das Z-Boson und die beiden W^\pm -Bosonen).
1980	Der PC (personal computer) beginnt seinen Siegeszug um die Welt und revolutioniert die Mathematik, die analog zur experimentellen Physik jetzt auch eine experimentelle Dimension erhält.

- 1983 Gerd Faltings (geb. 1954) beweist die Mordellsche Vermutung über die höchstens endliche Anzahl der Lösungen von diophantischen Gleichungen. Er erhält 1986 die Fieldsmedaille.
- 1994 Alain Connes (geb. 1947) veröffentlicht sein Buch „Noncommutative Geometrie“, die eng mit nichtkommutativen Operatoralgebren zusammenhängt. Damit begründet Alain Connes die nichtkommutative Geometrie, die sich in der Folgezeit durch die Beiträge von Mathematikern und Physikern stürmisch entwickelt. Connes und Lott zeigen 1990, dass die nichtkommutative Geometrie eine versteckte, fundamentale Symmetrie des Standardmodells der Elementarteilchenphysik beschreibt.
- 1994 Andrew Wiles (geb. 1953) beweist die Fermatsche Vermutung in der Theorie diophantischer Gleichungen. Andrew Wiles erhält auf dem Weltkongress der Mathematiker 1998 in Berlin einen Ehrenpreis.
- 1998 Die Entschlüsselung des menschlichen Genoms ist eine Meisterleistung der mathematischen Statistik.

Die Hilbertschen Probleme: Die meisten der von Hilbert im Jahre 1900 formulierten 23 Probleme konnten im 20. Jahrhundert gelöst werden. Das findet man in den folgenden beiden Büchern:

Yandell, B., The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers, Peters Ltd, Natick, Massachusetts (2001).

Odifreddi, P., The Mathematical Century: The 30 Greatest Problems of the Last 100 Years, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (2004).

Im Jahre 1994 konnte Andrew Wiles (geb. 1953) die Richtigkeit der **Fermatschen Vermutung** beweisen. Dieses berühmte Problem der Mathematik bestand seit über 350 Jahren (vgl. Kapitel 2). Hierzu empfehlen wir das folgende Buch:

Singh, S., Fermats letzter Satz: die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. Carl Hanser Verlag, München (1997).

Die Millenniumsprobleme: Im Jahre 2000 fand in Paris zur Erinnerung an Hilberts berühmten Vortrag im Jahre 1900 eine Feier im Amphitheater der Französischen Akademie statt. Dort formulierte das Clay Institute (Cambridge, Massachusetts, USA) sieben Millenniumsprobleme, die folgende Gebiete betreffen:

- algebraische Geometrie (Hodge-Vermutung),
- mathematische Physik (Turbulenz und Quantenfeldtheorie),
- theoretische Informatik (Hauptproblem der Komplexitätstheorie),
- Topologie (Poincaré-Vermutung) und
- Zahlentheorie (Riemannsche Vermutung und Birch–Swinnerton Vermutung).

Diese Probleme werden ausführlich in dem folgenden Buch erläutert:

Devlin, E., The Millennium Problems: The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time, Basic Books, Perseus, New York (2002).

Für die Lösung jedes Problems ist ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt.

Die Poincaré-Vermutung und die Ricci-Strömung auf Mannigfaltigkeiten: Eines der Millenniumsprobleme konnte inzwischen gelöst werden. Der russische Mathematiker Grigori Jakowlewitsch Perelman (geb. 1966) bewies in genialer Weise die Poincaré-Vermutung. Diese betrifft die Charakterisierung der **dreidimensionalen Sphäre** durch topologische Invarianten.³⁰ Interessant ist, dass Perelman eine physikalisch motivierte Idee benutzte. Auf der Erdoberfläche gibt es eine Wasserströmung der Weltmeere, die durch ein Geschwindigkeitsvektorfeld beschrieben werden kann. Analog ist es möglich, Geschwindigkeitsvektorfelder (Tangentenvektorfelder) auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten zu benutzen, um „Strömungen“ auf Mannigfaltigkeiten zu konstruieren. Perelman verwendet die sogenannte **Ricci-Strömung**, um eine vorgegebene dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit geeigneten, einfachen topologischen Invarianten in eine dreidimensionale Sphäre stetig zu deformieren. Die entscheidende technische Schwierigkeit besteht darin, dass die Strömung im Laufe der Zeit Singularitäten entwickeln kann, so dass die Strömung zusammenbricht. Diese kritische Situation konnte Perelman durch feinsinnige Überlegungen ausschließen. Wir empfehlen das folgende Buch:

O’Shea, D., Poincarés Vermutung: Die Geschichte eines mathematischen Abenteuers. Fischer, Frankfurt/Main (2007).

Das Erbe von Riemann: Um das qualitative Verhalten komplexwertiger analytischer Funktionen und ihrer Integrale zu verstehen, führte Riemann den Begriff der **Riemannschen Fläche** ein, die eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit darstellt. Damit ergab sich das **Programm**, die **Struktur von Mannigfaltigkeiten** zu untersuchen. Ende des 19. Jahrhunderts bewies Poincaré, dass auf einer zweidimensionalen Sphäre (z.B. auf der Erdoberfläche) jedes stetige Geschwindigkeitsvektorfeld mindestens einen Staupunkt besitzt, in dem

³⁰Die Erdoberfläche ist eine schwach deformierte zweidimensionale Sphäre.

die Geschwindigkeit verschwindet. Das ist der Prototyp für tiefliegende **Zusammenhänge** zwischen

- der **Topologie** einer Mannigfaltigkeit (gegeben zum Beispiel durch die Eulercharakteristik einer Sphäre) und
- den auf der Mannigfaltigkeit existierenden **analytischen Objekten** (z.B. Geschwindigkeitsfelder oder allgemeinere physikalische Felder, Differentialformen, Integrale).

Diese faszinierende **Entwicklungslinei** der Mathematik begann Mitte des 19. Jahrhunderts mit dem Satz von Riemann–Roch über Riemannsche Flächen. Im Jahre 1953 gelang Friedrich Hirzebruch (1927–2012) ein Durchbruch, der die algebraische Geometrie und die Topologie der Mannigfaltigkeiten in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts revolutionierte und fundamentale Neuentwicklungen der Mathematik veranlasste. Hirzebruch verallgemeinerte den Satz von Riemann–Roch auf komplexe Vektorbündel über kompakten, komplexen, n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Das ist der **Satz von Riemann–Roch–Hirzebruch**. Dafür erhielt Friedrich Hirzebruch den Wolfpreis im Jahre 1988 (vgl. [Chern und Hirzebruch 2001]). Diese Entwicklungslinei gipfelte in dem **Atiyah–Singer–Indextheorem**, das im Jahre 1963 von Michael Atiyah (geb. 1929) und Isadore Singer (geb. 1924) bewiesen wurde. Dabei wurde gezeigt,

- dass die Struktur der **Lösungsmengen von elliptischen Differentialgleichungen** (z.B. die stationäre Wärmeleitungsgleichung) auf einer kompakten Mannigfaltigkeit (z.B. einer Sphäre)
- von der **Topologie** der Mannigfaltigkeit abhängt (vgl. Kapitel 19).

Diese Abhängigkeit kann explizit mit Hilfe topologischer Invarianten beschrieben werden. Das ist ein tiefer Zusammenhang zwischen **Analysis und Topologie**. Sir Michael Atiyah erhielt 1966 die Fieldmedaille, und im Jahre 2003 wurde ihm zusammen mit Isadore Singer der Abelpreis verliehen.

Motiviert durch das Studium Riemannscher Flächen, gelang es Ende des 19. Jahrhunderts, die **zweidimensionalen** kompakten Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren. Die Theorie von Thurston (geb. 1946) und die Methode der Ricci-Strömung von Perelman erlauben es, die Struktur **dreidimensionaler** Mannigfaltigkeiten aufzudecken. Wesentliche Strukturaussagen über **vierdimensionale** Mannigfaltigkeiten erhielten Simon Donaldson (geb. 1957) und Michael Freedman (geb. 1951). Donaldson benutzte die **Yang–Mills Gleichungen**; das sind partielle Differentialgleichungen, die im **Standardmodell der Elementarteilchenphysik** die zentrale Rolle spielen (vgl. Kapitel 19). Thurston erhielt 1982 die Fieldsmedaille. Im Jahre 1986 wurde die Fieldsmedaille an Donaldson, Faltings und Freedman verliehen. Gerd Faltings (geb. 1954) (Max-Planck Institute für Mathematik in Bonn) erhielt die Fieldsmedaille für den Beweis der **Mordellschen Vermutung**, die besagt, dass eine große Klasse diophantischer Gleichungen höchsten endlich viele Lösungen besitzt. Der große Einfluß von Riemann (1826–1966) auf die Mathematik des 20. Jahrhunderts wird in dem folgenden Buch aufgezeigt:

Maurin, K., The Riemann Legacy: Riemannian Ideas in Mathematics and Physics of the 20th Century, Kluwer, Dordrecht (1997).

Dieses Buch gibt gleichzeitig einen Überblick über wichtige Fortschritte der Mathematik im 20. Jahrhundert.

Stringtheorie: Im letzten Viertel des 20. Jahrhunderts beschäftigten sich viele theoretische Physiker mit der Stringtheorie. Hier wird angenommen, dass Quantenteilchen **Anregungszustände winziger schwingender Saiten** sind (strings). Dabei spielt die Geometrie höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten eine zentrale Rolle.

- Einerseits übernahmen die Physiker viele bereits vorhandene mathematische Resultate (z.B. Riemanns konforme Klassifikation Riemannscher Flächen).
- Andererseits ergoss sich ein sehr ergiebiger **Strom neuer Ideen** von der Physik in die Mathematik.

Im Mittelpunkt steht dabei der Physiker **Edward Witten** (geb. 1951), der am Institute for Advanced Study in Princeton (New Jersey, USA)³¹ arbeitet und für seine mathematischen Leistungen im Jahre 1990 die Fieldsmedaille erhielt. Michael Atiyah sagte 1990 anlässlich seiner Laudatio für Edward Witten: Die letzten 10 Jahre haben eine bemerkenswerte Renaissance in der Wechselwirkung zwischen der Mathematik und der Physik erlebt". Zum aktuellen Stand der Stringtheorie empfehlen wir die beiden Bücher:

Greene, B., Das elegante Universum, supersymmetrische Strings, verborgene Dimensionen und die Suche nach der Weltformel 3. Aufl., Goldmann, München (2006).

Lüst, D., Quantenfische: die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel. Beck, München (2011).

Ferner empfehlen wir:

Fritsch, H., Quarks: Urstoff unserer Welt: aktualisierte Neuausgabe, Piper, München (2008).

Singh, S., Big Bang: Der Ursprung des Kosmos und die Erfindung der modernen Naturwissenschaften, Carl Hanser Verlag, München (2005).

³¹Einstein wirkte nach seiner Emigration aus Deutschland in die USA von 1933 bis zu seinem Tod im Jahre 1955 an diesem Institut (vgl. [Regis 1989]).

Neben den oben diskutierten Resultaten wurden in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts eine Fülle von sehr wichtigen Ergebnissen erzielt. Einen Überblick erhält man, indem man auf die weiter unten zusammengestellten Preisträger blickt: Abelpreis, Fieldsmedaille, Rolf-Nevanlinna-Preis, Carl-Friedrich-Gauß-Preis, Wolfpreis und Henri-Poincaré-Preis.

Das mathematische Wissen des 20. Jahrhunderts

Eine umfassende Darstellung der modernen Mathematik vermittelt die bis jetzt aus 142 Bänden bestehende *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, Springer, Berlin (1990ff).

Ferner verweisen wir auf folgende Bände:

Encyclopedia of Mathematical Physics, vols. 1–5. Edited by J. Françoise, G. Naber, and T. Tsun, Elsevier, Amsterdam (2006).

Dautray, R. and Lions, J., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vols. 1–6, Springer, New York (1988).

Eine umfassende Darstellung der reinen Mathematik (ohne Bezug auf Anwendungen) findet man in den Bänden:

Bourbaki, N., *The Elements of Mathematics*, vols. 1–26. Springer, New York (1990–2012).

Die berühmtesten Werke der europäischen Geistesgeschichte, z.B. die Werke von Ptolemaios, Copernicus, Kepler, Galilei, Newton usw. sind in der folgenden Sammlung enthalten:

Great Books of the Western World, 60 volumes. Chicago, Publisher of the Encyclopedia Britannica (1994ff).

Vielseitiges Wissen, das ständig aktualisiert wird, findet man in der „Wikipedia“-Enzyklopädie im Internet.

Abelpreis in der Mathematik

Dieser Preis wird seit 2003 jährlich von der Norwegischen Akademie der Wissenschaften in Oslo für herausragende mathematische Leistungen verliehen. Der Abelpreis und die Fieldsmedaille sind vergleichbar mit dem Nobelpreis:

2003	Jean-Pierre Serre; Topologie, algebraische Geometrie, Zahlentheorie.
2004	Sir Michael Atiyah und Isadore Singer; Topologie und Analysis (Atiyah–Singer Indextheorem).
2005	Peter Lax; partielle Differenzialgleichungen in Naturwissenschaft und Technik und ihre numerische Lösung.
2006	Lennart Carleson; harmonische Analysis und dynamische Systeme.
2007	Srinivasa Varadhan; Wahrscheinlichkeitstheorie für große Abweichungen.
2008	Jaques Tits und John Thompson; Algebra, Gruppentheorie.
2009	Michail Gromov; Differenzialgeometrie.
2010	John Tate; Zahlentheorie.
2011	John Milnor; Topologie.

Fieldsmedaille in der Mathematik

Dieser Preis wird seit 1936 aller vier Jahre auf den mathematischen Weltkongressen an Mathematiker unter 40 Jahren für bahnbrechende Leistungen verliehen:

1936	Lars Ahlfors; Analysis, quasikonforme Abbildungen. Jesse Douglas; Analysis, Existenzbeweis für Minimalflächen.
1950	Laurent Schwartz; Analysis, Theorie der Distributionen (verallgemeinerte Funktionen). Atle Selberg; Zahlentheorie, Primzahlverteilung.
1954	Kunihiko Kodaira; verallgemeinerte Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Jean-Pierre Serre; Algebra und Topologie, Homotopiegruppen von Sphären.
1958	Klaus Roth; Zahlentheorie, Approximierbarkeit von algebraischen Zahlen durch rationale Zahlen. René Thom; Differenzialtopologie von Mannigfaltigkeiten, Kobordismentheorie.

1962	Lars Hörmander; Analysis; allgemeine Theorie der linearen partielle Differentialgleichungen. John Milnor; Topologie, exotische Sphären.
1966	Michael Atiyah; Topologie, K-Theorie, Atiyah-Singer-Indextheorem. Paul Cohen; Grundlagen der Mathematik; Beweis der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und der Kontinuumshypothese von den übrigen Axiomen der Mengentheorie. Alexandre Grothendieck; Analysis (nukleare Räume, K-Theorie, Theorie der Schémas in der algebraischen Geometrie und Zahlentheorie, Stephen Smale; Topologie, Beweis der Poincaré-Vermutung für Sphären der Dimension $n \geq 5$, Chaos von dynamischen Systemen.
1970	Alan Baker; Zahlentheorie, Theorie transzenter Zahlen. Heisuke Hironaka; algebraische Geometrie; Auflösung von Singularitäten. Sergej Novikov; Topologie, Homologie- und Homotopietheorie. John Thompson; Algebra, Gruppentheorie.
1974	Enrico Bombieri; analytische Zahlentheorie und Geometrie der Zahlen. David Mumford; algebraische Geometrie; Struktur der Abelschen Mannigfaltigkeiten.
1978	Pierre Deligne; Beweis der Weil-Vermutung (Modifikation der Riemannschen Vermutung bezüglich endlicher Körper). Charles Fefferman; harmonische Analysis. Grigori Margulis; Differenzialgeometrie; Struktur der diskreten Untergruppen von Liegruppen. David Quillen; Algebra; algebraische K-Theorie, Beweis der Serreschen Vermutung über die Struktur von projektiven Moduln über Polynomringen.
1982	Alain Connes; Funktionalanalysis, von Neumann Algebren vom Typ III. Shing Tung Yau; globale Analysis; nichtlineare partielle Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten. William Thurston; Topologie, Struktur der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.
1986	Gerd Faltings; Beweis der Mordellvermutung für diophantische Gleichungen. Simon Donaldson; Topologie der 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten auf der Basis der Yang-Mills-Gleichungen in der mathematischen Physik. Michael Friedman; Topologie, Beweis der Poincaré-Vermutung für 4-dimensionale Sphären.
1990	Wladimir Drinfeld; algebraische Geometrie, Quantengruppen. Vaughan Jones; neue Knoteninvarianten (Jones Polynomials) und statistische Physik. Shigefumi Mori; algebraische Geometrie; Klassifikation der Singularitäten von 3-dimensionalen Varietäten. Edward Witten; geniale Verbindung von Methoden der Quantenfeldtheorie (Feynman-Integral) mit Topologie, Differenzialgeometrie und algebraischer Geometrie, supersymmetrische Stringtheorie.
1994	Jean Bourgain; harmonische Analysis, dynamische Systeme, analytische Zahlentheorie. Pierre-Louis Lions; Analysis, neue Methoden zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen in Physik und Technik. Jean-Christophe Yoccoz; Analysis; Stabilität dynamischer Systeme. Efim Selmanow; Algebra, Jordanalgebren, endliche Gruppen.
1998	Richard Borcherds; Algebra, Theorie der automorphen Formen, mathematische Physik. Timothy Gowers; Funktionalanalysis, Geometrie. Maxim Kontsewitsch; mathematische Physik, algebraische Geometrie, Topologie, Knoteninvarianten, Quantisierung von Poissonmannigfaltigkeiten, Curtis McMullen; komplexe Dynamik, Chaos, hyperbolische Geometrie. Andrew Wiles; Ehrenpreis für den Beweis der Fermatschen Vermutung.
2002	Laurent Lafforgue; Zahlentheorie (Beiträge zum Langlands-Programm). Wladimir Wojewodski; Topologie, algebraische Geometrie, Theorie der Motive, neue Kohomologietheorien, Beweis der Milnorvermutung.
2006	Andrej Okunkow; algebraische Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wladimir Perelman; Ricci-Fluss auf Mannigfaltigkeiten, Beweis der Poincaré-Vermutung (der Preis wurde von Perelman abgelehnt). Terence Tao; partielle Differentialgleichungen, Kombinatorik, Fourieranalyse, additive Zahlentheorie. Wendelin Werner; mathematische Physik, Brownsche Bewegung, konforme Quantenfeldtheorie.
2010	Elon Lindenstrauss; Ergodentheorie, Zahlentheorie. Ngô Bao Châu; Zahlentheorie, automorphe Formen. Stanislaw Smirnow; mathematische Physik, Modelle der statistischen Physik. Cédric Villani; mathematische Physik, thermodynamisches Gleichgewicht und die Boltzmann-Gleichung.

Rolf-Nevanlinna-Preis in der theoretischen Informatik

Der Rolf-Nevanlinna-Preis wird aller vier Jahre auf dem mathematischen Weltkongress an Wissenschaftler unter 40 Jahren für bahnbrechende Leistungen auf dem Gebiet der mathematischen Methoden der Informatik verliehen:

1982	Robert Tarjan; besonders effektive Algorithmen für Rechnungen auf Computern.
1986	Leslie Valiant; algebraische Komplexitätstheorie, künstliche Intelligenz.
1990	Alexander Razborow; Komplexität von Computernetzwerken.
1994	Avi Wigderson; Verifikation von Beweisen mit stochastischen Methoden.

- 1998 Peter Shor; sehr leistungsfähige Algorithmen für Quantencomputer.
 2002 Mahdu Sudan; Verifikation von Beweisen mit stochastischen Methoden.
 2006 Jon Kleinberg; Struktur von Netzwerken (z.B. das World Wide Web).
 2010 Daniel Spielman; Algorithmen und Graphentheorie.

Carl–Friedrich-Gauß-Preis

Dieser Preis wird wie die Fieldsmedaille aller vier Jahre auf dem mathematischen Weltkongress von der Internationalen Mathematikerunion (IMU) und der Deutschen Mathematikervereinigung (DMV) für mathematische Leistungen verliehen, die einen großen Einfluss auf Wissenschaft und Technik außerhalb der Mathematik haben:

- 2006 Kiyoshi Itô; stochastische Differentialgleichungen, Itô-Kalkül.
 2010 Yves Meyer; harmonische Analysis, Signalübertragung (wavelets).

Wolfpreis in der Mathematik

Dieser Preis wird in der Regel jährlich von der Wolf-Foundation für „Verdienste zum Wohle der Menschheit und freundschaftliche Beziehungen unter den Völkern“ folgenden Gebieten vergeben: Agrarwissenschaft, Chemie, Mathematik, Medizin, Physik und Kunst:

- 1978 Israel Moisejewitschs Gelfand; Funktionalanalysis, harmonische Analysis; Darstellung von Gruppen, partielle Differentialgleichungen und verallgemeinerte Funktionen. Carl Ludwig Siegel; Zahlentheorie, komplexe Funktionentheorie, Himmelsmechanik.
 1979 Jean Leray; Topologie und partielle Differentialgleichungen. André Weil; algebraische Geometrie und Zahlentheorie.
 1980 Henri Cartan; algebraische Topologie, komplexe Funktionentheorie mehrerer Variablen, homologische Algebra. Andrej Kolmogorow; Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik, stochastische Prozesse, dynamische Systeme, Ergodentheorie, Funktionalanalysis, Informations- und Algorithmentheorie.
 1981 Lars Ahlfors; geometrische Funktionentheorie. Oscar Zariski; algebraische Geometrie und kommutative Algebra.
 1982 Hassler Whitney; algebraische Topologie, Differenzialtopologie, Differenzialgeometrie. Mark Krein; Funktionalanalysis.
 1983/84 Shiing Chern; globale Differentialgeometrie, Chernklassen. Paul Erdös; Zahlentheorie, diskrete Mathematik.
 1984/85 Kuhiniko Kodaira; algebraische Geometrie, komplexe Mannigfaltigkeiten. Hans Lewy; partielle Differentialgleichungen.
 1986 Samuel Eilenberg; algebraische Topologie und homologische Algebra. Atle Selberg; Zahlentheorie, diskrete Gruppen, automorphe Formen.
 1987 Kiyoshi Itô; stochastische Differential- und Integralrechnung. Peter Lax; Analysis, partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendungen.
 1988 Friedrich Hirzebruch; algebraische Geometrie und Topologie, Beweis des Satzes von Riemann–Roch–Hirzebruch. Lars Hörmander; verallgemeinerte Funktionen und allgemeine Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, Pseudodifferentialoperatoren Fourierintegraloperatoren.
 1989 Alberto Calderon; singuläre Integraloperatoren und partielle Differentialgleichungen. John Milnor; Geometrie und Topologie.
 1990 Ennio De Giorgi; Differenzialgleichungen und Variationsrechnung. Ilya Piatecki Schapiro; Zahlentheorie, diskrete Gruppen, Darstellungstheorie und automorphe Formen.
 1992 Lennart Carleson; Fourieranalysis, quasikonforme Abbildungen und dynamische Systeme. John Thompson; Algebra, Theorie endlicher Gruppen.
 1993 Mikail Gromov; globale Riemannsche Geometrie und symplektische Geometrie, partielle Differentialgleichungen. Jaques Tits; Algebra, algebraische Gruppen, Titsgebäude.
 1994/95 Jürgen Moser; Stabilität dynamischer Systeme, Himmelsmechanik, partielle Differentialgleichungen.
 1995/96 Robert Langlands; Zahlentheorie, Darstellungen von Gruppen, automorphe Formen. Andrew Wiles; Zahlentheorie, Beweis der Fermatschen Vermutung.

1996/97	Joseph Keller; mathematische Physik, Ausbreitung elektromagnetischer, optischer und akustischer Wellen, Hydrodynamik und statistische Physik. Yakov Sinai; dynamische Systeme, Ergodentheorie, statistische Physik.
1999	Laszlo Lovasz; diskrete Mathematik, kombinatorische Optimierung, theoretische Computerwissenschaft. Elias Stein; harmonische Analysis.
2000	Rauol Bott; Topologie und Differenzialgeometrie. Jean-Pierre Serre; Algebra, Topologie, algebraische Geometrie, Zahlentheorie.
2001	Wladimir Arnold; Analysis, Stabilität dynamischer Systeme, Himmelsmechanik, Klassifikation von Singularitäten. Saharon Shelah; mathematische Logik und Mengentheorie.
2002/03	Mikio Sato; Begründung der algebraischen Analysis (Hyperfunktionen), Solitonen. John Tate, algebraische Zahlentheorie.
2005	Georg Margulis; Algebra, Gitter in Liealgebren und ihre Anwendungen. Sergej Novikov; algebraische Topologie, Differenzialtopologie und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik.
2006/07	Stephen Smale; Differenzialtopologie, dynamische Systeme und Chaos, mathematische Ökonomie. Harry Furstenberg; dynamische Systeme, Ergodentheorie.
2008	Pierre Deligne; Zahlentheorie; Topologie, Beweis der Weil-Vermutung, Hodgetheorie, Riemann-Hilbert Korrespondenzen. Phillip Griffith; algebraische Geometrie, komplexe Differenzialgeometrie. David Mumford; algebraische Geometrie, algebraische Mannigfaltigkeiten, Thetafunktionen.
2010	Shing-Tung Yau; geometrische Analysis, nichtlineare partielle Differenzialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten, Beweis des Satzes über positive Gravitationsenergie in der allgemeinen Relativitätstheorie und Beweis der Calabivermutung für Kählermannigfaltigkeiten. Dennis Sullivan; Topologie, Chaos, dynamische Systeme.
2012	Michael Aschbacher; Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Louis Caffarelli; Analysis, partielle Differenzialgleichungen und ihre Anwendungen.

Henri-Poincaré-Preis in der Mathematischen Physik

Der Henri-Poincaré-Preis wurde 1997 von der Daniel-Iagolnitzer-Foundation geschaffen. Dieser Preis wird aller drei Jahre auf dem Weltkongress der International Association of Mathematical Physics (IAMP) für bahnbrechende Leistungen auf dem Gebiet der Mathematischen Physik verliehen.

1997	Rudolph Haag (axiomatische Quantenfeldtheorie, Prinzip der Lokalität, lokale Operatoralgebren, statistische Physik), Maxim Konzewitsch (topologische Quantumgravitation, Quantisierung von Poissonmannigfaltigkeiten, Knotentheorie), Arthur Wightman (axiomatische Quantenfeldtheorie).
2000	Joel Lebowitz (statistische Physik, Phasenübergänge), Walter Thirring (Stabilität der Materie, Quantenfeltheorie, Relativitätstheorie, statistische Physik), Horng-Tzer Yau (Gewinnung makroskopischer Gesetze aus mikroskopischen Gesetzen der statistischen Physik).
2003	Huzihiro Araki (Quantenfeldtheorie, statistische Physik, Operatoralgebren), Elliott Lieb (Stabilität der Materie, Schrödingeroperatoren, statistische Physik, Modell des Eises, Thomas-Fermi-Theorie, Bosekondensation, Analysis), Oded Schramm (diskrete konforme Geometrie, integrable Systeme, stochastischer Loewnerprozesse).
2006	Ludwig Faddeev (Quantenfeldtheorie, Quantisierung von nichtkommutativen Eichtheorien, Streutheorie, integrable Systeme), David Ruelle (Quantenfeldtheorie, Streutheorie, dynamische Systeme, Chaos), Edward Witten (Superstringtheorie, Geometrie, Topologie).
2009	Jürg Fröhlich (Quantenfeldtheorie, Schrödingeroperatoren, statistische Physik), Robert Seiringer (statistische Physik, Bosekondensation), Yakov Sinai (dynamische Systeme, dynamische Entropie, Ergodentheorie, Chaos, Phasenübergänge). Cédric Villani (statistische Physik, Boltzmanngleichung).

Literatur zur Geschichte der Mathematik

- [Wußing 2008] Wußing, H., 6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgechichtliche Zeitreise. Bd. 1, 2. Springer, Heidelberg (2008)
- [Scriba und Schreiber 2005] Scriba, C. und Schreiber, P., 5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen. 2. Auflage. Springer, Heidelberg (2005)
- [Alten et al. 2003] Alten, W. et al., 4000 Jahre Algebra: Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer, Heidelberg (2003)
- [Sonar 2011] Sonar, T., 3000 Jahre Analysis: Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer, Heidelberg (2011)

- [Kline 1990] Kline, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, vols. 1–3. Oxford University Press, Oxford (1990)
- [Ifrah 1991] Ifrah, G., Universalgeschichte der Zahl. Campus Verlag, Frankfurt/Main (1991)
- [Klein 1926] Klein, F., Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Bd. 1, 2. Springer, Berlin (1926)
- [Dieudonné 1985a] Dieudonné, J. (Hrsg.), Geschichte der Mathematik 1700–1900. Vieweg, Braunschweig (1985)
- [Dieudonné 1983] Dieudonné, J., History of Functional Analysis, 1900–1975, North-Holland, Amsterdam (1983)
- [Dieudonné 1985b] Dieudonné, J., History of Algebraic Geometry, 400 B.C.–1985 A.D., Chapman, New York (1985)
- [Dieudonné 1989] Dieudonné, J., A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960, Birkhäuser, Boston (1989)
- [van der Waerden 1984] van der Waerden, B., History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Springer, New York (1984)
- [Borel 1998] Borel, A., Twenty-Five Years with Nicolas Bourbaki, 1949–1973, Notices Amer. Math. Soc. **45** (1998) (3), 373–380
- [Borel 2001] Borel, A., Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups, History of Mathematics, Vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (2001)
- [Schweber 1994] Schweber, S., QED (Quantum Electrodynamics) and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1994).
- [James 1999] James, I. (Ed.) (1999), History of Topology, Elsevier, Amsterdam (1999)
- [Bynum und Browne 1984] Bynum, W., Browne, E., and Potter, R. (eds.), Dictionary of the History of Science. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1984)
- [Atiyah 2002] Atiyah, M., Mathematics in the 20th century, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 1–15
- [Maurin 1997] Maurin, K.: Riemann's Legacy. Riemann's Ideas in Mathematics and Physics of the 20th Century. Kluwer, Dordrecht (1997)
- [Zeidler 2008] Zeidler, E., Gedanken zur Zukunft der Mathematik. In: H. Wußing, 6000 Jahre Mathematik, Bd. 2, pp. 553–586. Springer, Heidelberg (2008)

Berühmte Internationale Preise und ihre Preisträger

- [Monastirsky 1997] Monastirsky, M., Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals. Peters, Wellersley, Massachusetts (1997)
- [Atiyah und Iagolnitzer 2003] Atiyah, M. und Iagolnitzer, D. (Hrsg.), Fields Medallists' Lectures. World Scientific, Singapore (2003)
- [Chern und Hirzebruch 2001] Chern, S. und Hirzebruch, F. (Hrsg.), Wolf Prize in Mathematics, vols. 1, 2. World Scientific, Singapore (2001)
- [Harenberg-Verlag 2000] Harenberg Lexikon der Nobelpreisträger. Harenberg-Verlag, Dortmund (2000)
- [Nobel Foundation 1954ff] Nobel Prize Lectures, Nobel Foundation, Stockholm (1954ff)

Biographien

- [Gillispie 1970–1980] Gillispie, C. (Hrsg.), Dictionary of Scientific Biography. Scribner, New York (1970–1980)
- [Gottwald et al. 1990] Gottwald, S., Ilgauds, H., und Schlotte, K. (Hrsg.), Lexikon bedeutender Mathematiker. Bibliographisches Institut, Leipzig (1990)
- [Kraft 1999] Kraft, F., Vorstoß ins Unbekannte: Lexikon großer Naturwissenschaftler. Wiley, Weinheim (1999)
- [Bell 1986] Bell, E., Men of Mathematics: Biographies of the Greatest Mathematicians of all Times. Simon, New York (1986)
- [Brennan 1997] Brennan, R., Heisenberg Probably Slept Here: The Lives, Times, and Ideas of the Great Physicists of the 20th Century. Wiley, New York (1997)

- [von Weizsäcker 1999] von Weizsäcker, C., Große Physiker: von Aristoteles bis Heisenberg. Carl Hanser Verlag, München (1999)
- [Wußing 1975] Wußing, H. und Arnold, W. (Hrsg.), Biographien bedeutender Mathematiker. Verlag Volk und Wissen, Berlin (1975)
- [Wußing 2009] Wußing, H., Adam Ries. 3. erweiterte Auflage. Leipzig, EAGL (2009)
- [Wußing 2010] Wußing, H., Von Leonardo da Vinci bis Galilei; Mathematik und Renaissance. EAGLE, Leipzig (2010)
- [Wußing 1990] Wußing, H., Isaac Newton, 4. Auflage. Teubner-Verlag, Leipzig (1990)
- [Thiele 1982] Thiele, R., Leonhard Euler. Leipzig, Teubner-Verlag, Leipzig (1982)
- [Wußing 2011] Wußing, H., Carl Friedrich Gauß, 6., erweiterte Auflage. EAGLE, Leipzig (2011)
- [Wußing 2009] Wußing, H., Von Gauß bis Poincaré: Mathematik und Industrielle Revolution. EAGLE, Leipzig (2009)
- [Laugwitz 1995] Laugwitz, B., Bernhard Riemann (1826–1866). Wendepunkte in der Auffassung der Geometrie. Birkhäuser, Basel (1995)
- [Monastirsky 1987] Monastirsky, M., Riemann, Topology, and Physics. Birkhäuser, Basel (1987)
- [Tobies 1982] Tobies, R., Felix Klein, Teubner-Verlag, Leipzig (1982)
- [Tuschmann und Hawking 1993] Tuschmann, W. und Hawking, P., Sofia Kovalevskaja. Ein Leben für Mathematik und Emanzipation. Birkhäuser, Basel (1993)
- [Kanigel 1999] Kanigel, R., Der das Unendlich kannte: das Leben des genialen Mathematikers Srinivasa Ramanujan, 2. Auflage. Vieweg, Wiesbaden (1999)
- [Reid 1970] Reid, C., Hilbert. Springer, New York (1970)
- [Reid 1976] Reid, C., Courant in Göttingen und New York. Springer, New York (1976)
- [Regis 1989] Regis, E., Einstein, Gödel & Co. Genialität und Exzentrizität: die Princeton-Geschichte. Birkhäuser, Basel (1989)
- [Macrae 1965] Macrae, N., John von Neumann: Mathematik und Computerforschung – die Facetten eines Genies. Fischer, Frankfurt/Main (1965).
- [Wiener 1965] Wiener, N., Mathematik mein Leben. Fischer, Frankfurt/Main (1965)
- [Weil 1993] Weil, A., Lehr- und Wanderjahre eines Mathematikers. Birkhäuser, Basel (1993)
- [Bolibruch et al. 2006] Bolibruch, A., Osipov, Yu., and Sinai, Ya. (eds.), Mathematical Events in the 20th Century. Springer, Berlin (2006) (die Leistungen russischer Mathematiker)
- [Zuse 1993] Zuse, K., Der Computer – mein Lebenswerk, 3. Auflage. Springer, Berlin (1993)

Mathematik, Philosophie, Computer und menschliche Kultur

- [Grattan-Guiness 1994] Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. Edited by I. Grattan-Guiness. Routledge, London (1994)
- [Cambridge University Press 2005] The Cambridge Dictionary of Philosophy, second edition. Edited by R. Audi, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom (2005)
- [Hofstadter 1979] Hofstadter, D., Gödel, Escher, Bach: ein endloses geflochtenes Band, Klett-Kotta, Stuttgart (1979)
- [Taschner 2005] Taschner, R., Der Zahlen gigantische Schatten: Mathematik im Zeichen der Zeit. Vieweg, Wiesbaden (2005)
- [Behrends et al. 2008] Behrends, E., Gritzmann, P. und Ziegler, G. (Hrsg.), π and Co. Kaleidoskop der Mathematik. Springer, Heidelberg (2008)
- [Behrends 2006] Behrends, E., Fünf Minuten Mathematik: 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT. Vieweg, Wiesbaden (2006)
- [Weyl 1981] Weyl, H., Symmetrie, 2. Auflage. Birkhäuser, Basel (1981)
- [Flachsmeyer et al. 1990] Flachsmeyer, J., Feiste, U. und Manteuffel, K., Mathematik und ornamentale Kunstformen. Teubner-Verlag, Leipzig (1990)
- [Mandelbrot 1991] Mandelbrot, B., Die fraktale Geometrie der Natur. Birkhäuser, Basel (1991)
- [Bovil 1995] Bovil, C., Fractal Geometry in Architecture and Design. Birkhäuser, Basel (1995)

- [Bochner 1984] Bochner, S., *The Role of Mathematics and the Rise of Science*, 4th edition. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1984)
- [Ruelle 1992] Ruelle, D., *Zufall und Chaos*. Springer, Berlin (1992)
- [Kobzarev und Manin 1989] Kobzarev, I. Yu. und Manin, Yu. I., *Elementary Particles: Mathematics, Physics, and Philosophy*, Kluwer, Dordrecht (1989)
- [Manin 2001] Manin, Yu. I., Mathematics: recent developments and cultural aspects, pp. 89–94. In: *Science and the Future of Mankind*, Proceedings, Pontifical Ac. Sci, Vatican (2001)
- [Manin 2008] Manin, Yu. I., *Matematika kak metafora (Mathematik als eine Metapher)* (russisch), Izd. MTNO, Moskau (2008). Englische Ausgabe: *Mathematics as a Metaphor*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (2007) (ausgewählte Essays)
- [Wendt 2008] Wendt, S., *Was Sokrates nicht wissen konnte. Eine Gesamtschau über die Grundlagen unserer technischen Zivilisation*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2008)
- [Einstein 1992] Einstein, A., *Mein Weltbild*. Ullstein, Berlin (1992)
- [Bodenis 2001] Bodenis, D., *Bis Einstein kam: die abenteuerliche Suche nach dem Geheimnis der Welt*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart (2001)
- [Veltman 2003] Veltman, M., *Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics*, World Scientific, Singapore (2003)
- [Penrose 2004] Penrose, R., *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, London (2004). Gekürzte deutsche Fassung: R. Penrose, *Der Weg zur Wirklichkeit: die Teilübersetzung für Seiteneinsteiger*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2010)
- [Zeilinger 2008] Zeilinger, A., *Einstiens Schleier: die neue Welt der Quantenphysik*, Beck, München (2008)
- [Dyson 1999] Dyson, F., *The Sun, the Genome and the Internet: Tools of Scientific Revolution*, Oxford University Press, New York (1999)
- [Dyson 2009] Dyson, F., Birds and frogs in mathematics and physics, Einstein lecture 2008, Notices Amer. Math. Soc. **56**(2) (2009), 212–223
- [Langville und Meyer 2006] Langville, A. und Meyer, C., *Google's Page Rank and Beyond: The Science of Search Rankings*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (2006)
- [Brown 2000] Brown, J., *Minds, Machines, and Multiverse: the Quest for the Quantum Computer*, Simon & Schuster, New York (2000)
- [Triebel 2011] Triebel, H., *Anmerkungen zur Mathematik* (drei Vorträge über die Philosophie der Mathematik). EAGL, Leipzig (2011)
- [Zeidler 2008] Zeidler, E., Die Faszination der Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaften, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **109** (2008), p. S19–S40, Sonderheft zum Jahr der Mathematik 2008

Mathematische Symbole

Die folgende Liste umfasst häufig benutzte Symbole.

Logische Symbole

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	Aus \mathcal{A} folgt \mathcal{B} (d.h., die Aussage \mathcal{A} ist hinreichend für \mathcal{B} , und \mathcal{B} ist notwendig für \mathcal{A}).
$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	Das Symbol bedeutet: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ (d.h., \mathcal{A} ist hinreichend und notwendig für \mathcal{B}).
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	Es gilt die Aussage \mathcal{A} oder die Aussage \mathcal{B} .
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	Es gelten die Aussagen \mathcal{A} und \mathcal{B} .
$\neg \mathcal{A}$	Es gilt nicht die Aussage \mathcal{A} (Negation von \mathcal{B}).
$\forall x : \dots$	Alle Dinge x besitzen die Eigenschaft "...".
$\exists x : \dots$	Es existiert ein Ding x mit der Eigenschaft "...".
$\exists! x : \dots$	Es existiert genau ein Ding x mit der Eigenschaft "...".
\square	Ende eines Beweises; andere Schreibweise „q.e.d.“ (lateinisch: quod erat demonstrandum - was zu beweisen war)
$x = y$	Das Ding x ist gleich dem Ding y .
$x \neq y$	Das Ding x ist nicht gleich dem Ding y .
$x \sim y$	Das Element x der Menge M ist äquivalent zu dem Element y der Menge M .
M / \sim	Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation \sim auf der Menge M
$f(x) := x^2$	$f(x)$ ist definitionsgemäß gleich x^2 .
$f(x) \equiv 0$	Die Funktion f ist identisch gleich 0 (d.h., $f(x) = 0$ für alle x).
$f = \text{const}$	Die Funktion f ist konstant (d.h., $f(x)$ nimmt für alle Punkte x den gleichen Wert an).

Mengen

$x \in M$	x ist ein Element der Menge M .
$x \notin M$	x ist nicht ein Element der Menge M .
$S \subseteq M$,	S ist eine Teilmenge von M (vgl. 4.3.1). ¹
$S \subset M, S \subsetneq M$	S ist eine echte Teilmenge von M (d.h. $S \subseteq M$ und $S \neq M$).
$\{x \in M : \dots\}$	Menge aller Elemente von M mit der Eigenschaft "...".
\emptyset	leere Menge

¹Unsere Konvention ist mnemotechnisch so gewählt, dass $S \subseteq M$ bzw. $S \subset M$ den Relationen $s \leq m$ bzw. $s < m$ für reelle Zahlen entspricht.

$M \cup N$	Vereinigung der Mengen M und N (d.h., die Menge aller Elemente, die in M oder N enthalten sind)
$M \cap N$	Durchschnitt der Mengen M und N (d.h., die Menge aller Elemente, die in M und N enthalten sind)
$M \setminus N$	Differenzmenge (d.h., die Menge aller Elemente von M , die <i>nicht</i> zu N gehören)
$A \times B$	kartesische Produktmenge (d.h., die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A, b \in B$)
2^M	Potenzmenge von M (d.h. die Menge aller Teilmengen von M)
∂M	Rand der Menge M
\overline{M}	Abschluss der Menge M ($\overline{M} := M \cup \partial M$)
$\text{int } M$	Inneres (lateinisch: interior) der Menge M ($\text{int } M := \overline{M} \setminus \partial M$)
$\text{meas } M$	Maß (measure) der Menge M
$\text{card } M$	Kardinalzahl der Menge M (vgl. 4.4.4.2)
\aleph	Aleph (hebräischer Buchstabe)
\aleph_0	Kardinalzahl der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen (vgl. 4.4.4.3)
$d(x, y)$	Abstand (distance) des Punktes x von dem Punkt y (vgl. 1.3.2)

Abbildungen

$f : X \rightarrow Y$	Die Funktion (oder Abbildung) f ordnet jedem Element x von X genau ein Element $f(x)$ von Y zu.
$f : X \subseteq M \rightarrow Y$	Dieses Symbol steht für das Symbol $f : X \rightarrow Y$ zusammen mit der Zusatzinformation $X \subseteq M$.
$D(f), \text{dom}(f)$	Definitionsbereich der Funktion f (d.h., $f(x)$ ist genau für alle Punkte x in $D(f)$ erklärt)
$R(f), \text{im}(f)$	Wertevorrat (range) oder Bild (image) der Funktion f (d.h., $R(f)$ ist die Menge aller Punkte $f(x)$ mit $x \in D(f)$)
$f(A)$	Bild der Menge A (d.h., $f(A)$ besteht aus genau allen Punkten $f(x)$ mit $x \in A$)
$f^{-1}(B)$	Urbild der Menge B (d.h., $f^{-1}(B)$ besteht aus genau allen Punkten x mit $f(x) \in B$)
I, id	identische Abbildung oder Einheitsoperator (d.h. für die Abbildung $I : X \rightarrow X$ gilt $I(x) := x$ für alle $x \in X$)

Zahlen

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$
\mathbb{N}_+	Menge der positiven (eigentlichen) natürlichen Zahlen $1, 2, \dots$
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \dots$
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$)

\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{K}	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
\mathbb{R}^n	Menge der n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) , wobei x_1, x_2, \dots, x_n reelle Zahlen sind
\mathbb{C}^n	Menge der n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) , wobei x_1, x_2, \dots, x_n komplexe Zahlen sind
π	Ludolfsche Zahl (sprich: pi); $\pi = 3,14\,159\dots$
e	Eulersche Zahl; $e = 2,71\,82\,818\dots$
C	Eulersche Konstante; $C = 0,57\,72\dots$

Natürliche Zahlen

$n!$	n -Fakultät; $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ ($0! = 1$)
$\binom{m}{n}$	Binomialkoeffizient, $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \binom{m}{n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-n+1)}{n!}$

Ganze Zahlen

$a \in \mathbb{Z}$	a ist ein Element der Menge \mathbb{Z} , d. h. a ist eine ganze Zahl.
$a \equiv b \pmod{p}$	Die ganze Zahl a ist kongruent zur ganzen Zahl b modulo p , d. h., die Differenz $b - a$ ist durch die ganze Zahl p teilbar.

Reelle Zahlen und Grenzwerte

$a < b$	Die reelle Zahl a ist kleiner als die reelle Zahl b .
$a = b$	a ist gleich b .
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b .
$a \ll b$	a ist wesentlich kleiner als b .
$a \neq b$	a ist ungleich b .
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall, $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (d. h., $[a, b]$ ist definitionsgemäß die Menge aller reellen Zahlen x mit $a \leq x \leq b$)
$]a, b[$	offenes Intervall, $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a, b[$	halboffenes Intervall, $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$\operatorname{sgn}(a)$	Vorzeichen (sign) der reellen Zahl a (z. B. $\operatorname{sgn}(\pm 2) = \pm 1$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$)
$\min\{a, b\}$	die kleinere der beiden reellen Zahlen a und b
$\max\{a, b\}$	die größere der beiden reellen Zahlen a und b
$\sum_{i=1}^n a_i$	die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\prod_{i=1}^n a_i$	das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$
$ a $	Betrag der reellen Zahl a ($ a := a$, falls $a \geq 0$, sonst $ a := -a$)
$\inf M$	Infimum der Menge M reeller Zahlen (vgl. 1.2.2.3)
$\sup M$	Supremum der Menge M reeller Zahlen (vgl. 1.2.2.3)

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	Grenzwert (lateinisch: limes) der reellen Zahlenfolge (x_n) (z.B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; vgl. 1.2.3.1)
$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$	oberer Grenzwert (lateinisch: limes superior) (vgl. 1.2.4.3)
$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$	unterer Grenzwert (lateinisch: limes inferior) (vgl. 1.2.4.3) ²
$ x $	Euklidische Norm für $x \in \mathbb{R}^n$, $ x := \sqrt{\sum_{j=1}^n x_i^2}$
$\langle x y \rangle$	Euklidisches Skalarprodukt für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$
$f = o(g), x \rightarrow a$	Der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ strebt gegen null für $x \rightarrow a$.
$f = O(g), x \rightarrow a$	Der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist beschränkt in einer Umgebung des Punktes a (ohne Berücksichtigung des Punktes a).
$f \cong g, x \rightarrow a$	Der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ strebt gegen eins für $x \rightarrow a$.

Komplexe Zahlen

i	imaginäre Einheit, $i^2 = -1$
z	komplexe Zahl, $z = x + yi$; x und y sind reelle Zahlen
$\operatorname{Re} z$	Realteil der komplexen Zahl $z = x + yi$, $\operatorname{Re} z := x$
$\operatorname{Im} z$	Imaginärteil der komplexen Zahl $z = x + yi$, $\operatorname{Im} z := y$
\bar{z}	konjugiert komplexe Zahl zu der komplexen Zahl $z = x + yi$, $\bar{z} := x - yi$
$ z $	Betrag der komplexen Zahl $z = x + yi$, $ z := \sqrt{x^2 + y^2}$
$\arg z$	Argument der komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$, $r := z $, $\arg z := \varphi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ (vgl. 1.1.2)
$\langle z w \rangle$	Skalarprodukt in dem Hilbertraum \mathbb{C}^n , $\langle z w \rangle := \sum_{j=1}^n \bar{z}_j w_j$, $z, w \in \mathbb{C}^n$
$ z $	Norm des Elements z von \mathbb{C}^n , $ z := \sqrt{\langle z z \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n z_j ^2}$

Elementare Funktionen

Die Eigenschaften der elementaren Funktionen findet man in 0.2.

\sqrt{x}	die positive Quadratwurzel aus der positiven reellen Zahl x ; z. B. $\sqrt{4} = 2$ ($\sqrt{0} = 0$)
$\sqrt[n]{x}$	n -te Wurzel aus x ; z. B. $2^3 = 8$ ergibt $\sqrt[3]{8} = 2$
$e^x, \exp(x)$	Exponentialfunktion von x
$\ln x$	natürlicher Logarithmus von x (lateinisch: logarithmus naturalis)
$\log_a x$	Logarithmus von x zur Basis a
$\sin x, \cos x$	Sinus von x , Kosinus von x
$\tan x, \cot x$	Tangens von x , Kotangens von x
$\arcsin x, \arccos x$	Arkussinus von x , Arkuskosinus von x

²Zum Beispiel gilt $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$ und $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$.

$\arctan x, \operatorname{arccot} x$	Arkustangens von x , Arkuskotangens von x
$\sinh x, \cosh x$	Sinus hyperbolicus von x , Kosinus hyperbolicus von x
$\tanh x, \coth x$	Tangens hyperbolicus von x , Kotangens hyperbolicus von x
$\operatorname{Arsinh} x, \operatorname{Arcosh} x$	Areasinus von x , Areakosinus von x
$\operatorname{Artanh} x, \operatorname{Arcoth} x$	Areatangens von x , Areakotangens von x

Differentiation

$f'(x), \frac{df(x)}{dx}$	Ableitung der Funktion f an der Stelle x (vgl. 1.4.1)
$f'', f^{(2)}$	zweite Ableitung der Funktion f
$\frac{\partial f}{\partial x}, f_x$	partielle Ableitung der Funktion f nach x (vgl. 1.5.1)
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, f_{xy}$	zweite partielle Ableitung von f zunächst nach x dann nach y
$\partial_j f$	partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x^j}$ von f nach x_j
$\partial^\alpha f$	Abkürzung für die partielle Ableitung $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$, d.h. $\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{ \alpha } f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ mit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ und $ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$
df	totales Differential der Funktion f (vgl. 1.5.10.1)
$d\omega$	Cartansche Ableitung der Differentialform ω (vgl. 1.5.10.4)
∇	Nablaoperator; $\nabla := \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$
$\operatorname{grad} T$	Gradient des Temperaturfeldes T ; $\operatorname{grad} T = \nabla T$ (vgl. 1.9.4)
$\operatorname{div} v$	Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes v ; $\operatorname{div} v = \nabla \cdot v$ (vgl. 1.9.4)
$\operatorname{rot} v$	Rotation des Geschwindigkeitsfeldes v ; $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$ (vgl. 1.9.4)
ΔT	Laplaceoperator $\Delta := \nabla \nabla$ angewandt auf das Temperaturfeld T ; $\Delta T = \nabla(\nabla T) = \operatorname{div} \operatorname{grad} T$ (vgl. 1.9.4)

Integration

$\int f(x) dx$	unbestimmtes Integral; z.B. $\int 3x^2 dx = x^3 + \text{const}$ (vgl. 0.9.1)
$\int_a^b f(x) dx$	Integral der Funktion f über das Intervall $[a, b]$ (vgl. 0.9.2)
$\int_M f(x) dx$	Integral der Funktion über die Teilmenge M des \mathbb{R}^n (vgl. 0.1.7)
$\int_M \omega$	Integral der Differentialform ω über die Mannigfaltigkeit M (vgl. 1.7.6)
$\int_M f dF$	Oberflächenintegral der Funktion f ; dabei ist dF das Differential des Flächenmaßes auf der Fläche M (vgl. 1.7.7)

Vektoren, Matrizen und lineare Räume

$a + b$	Summe der beiden Vektoren a und b (vgl. 1.8.1)
αa	Produkt des Vektors a mit der reellen Zahl α (vgl. 1.8.1)
ab	Skalarprodukt der beiden Vektoren a und b (vgl. 1.8.3)
$a \times b$	Vektorprodukt der beiden Vektoren a und b (vgl. 1.8.3)
(abc)	Spatprodukt $(a \times b) \times c$
i, j, k	orthonormierte Basisvektoren eines (rechtshändigen) kartesischen Koordinatensystems; diese Vektoren besitzen die Länge eins, sie stehen paarweise aufeinander senkrecht und sind wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand orientiert (vgl. 1.8.2).
A^T	<i>transponierte</i> Matrix zur Matrix A (Vertauschung von Zeilen und Spalten; vgl. 2.1.3)
A^*	<i>adjungierte</i> Matrix zur Matrix A (Vertauschung der Zeilen mit den Zeilen und Übergang zu den konjugiert komplexen Elementen; vgl. 2.1.3)
A^{-1}	<i>inverse</i> Matrix zu der quadratischen Matrix A (vgl. 2.1.3)
Rang A	Rang der Matrix A (vgl. 2.1.4.4)
$\det A$	Determinante der quadratischen Matrix A (vgl. 2.1.2, 2.3.3.2)
$\text{tr } A$	Spur (trace) der quadratischen Matrix A (vgl. 2.1.3, 2.3.3.2)
δ_{jk}	Kroneckersymbol ($\delta_{jk} := 1$ für $j = k$ und $\delta_{jk} := 0$ für $j \neq k$)
E, I	Einheitsmatrix (vgl. 2.1.3)
span S	die lineare Hülle der Teilmenge S des linearen Raumes L (d. h., span S ist der kleinste lineare Unterraum des linearen Raumes L , der die Menge S enthält; vgl. 2.3.4.1)
$X \oplus Y$	direkte Summe der linearen Räume X und Y (vgl. 2.3.4.3)
$X \times Y$	kartesisches Produkt der linearen Räume X und Y (vgl. 2.4.3.1)
X/Y	Faktorraum des linearen Unterraumes Y von X (bzw. Faktorgruppe oder Fakterring) (vgl. 2.3.4.2)
$a \otimes b$	Tensorprodukt der Multilinearformen a und b (vgl. 2.4.2)
$a \wedge b$	äußereres Produkt der antisymmetrischen Multilinearformen a und b ($a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a$; vgl. 2.4.2.1)
$X \otimes Y$	Tensorprodukt der linearen Räume X und Y (vgl. 2.4.3.1)
$X \wedge Y$	äußereres Produkt (Graßmannprodukt) der linearen Räume X und Y (vgl. 2.4.3.3)

Funktionenräume

$C(G)$	Menge aller stetigen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge G des Raumes \mathbb{R}^n
$C^k(G)$	Menge aller stetigen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, die stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen
$C(\overline{G})$	Menge aller stetigen Funktionen $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$

$C^k(\overline{G})$	Menge aller Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ vom Typ $C^k(G)$, die sich zusammen mit allen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k stetig auf den Abschluss \overline{G} der offenen Menge G fortsetzen lassen
$C^\infty(G)$	Menge aller glatten Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge G (d. h., f ist stetig auf G und besitzt stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung auf G)
$C_0^\infty(G)$	Menge aller Funktionen aus $C^\infty(G)$, die außerhalb irgendeiner kompakten Teilmenge von G gleich null sind
$L_2(G)$	Menge aller messbaren Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_G f(x) ^2 dx < \infty$ (Das Integral ist im Sinne des Lebesgueintegrals zu verstehen (vgl. Kapitel 10))

Griechisches Alphabet

A, α	Alpha	I, ι	Jota	R, ϱ , ρ	Rho
B, β	Beta	K, κ , \varkappa	Kappa	Σ , σ , ς	Sigma
Γ , γ	Gamma	Λ , λ	Lambda	T, τ	Tau
Δ , δ	Delta	M, μ	My	Y, v	Ypsilon
E, ε , ϵ	Epsilon	N, ν	Ny	Φ , φ , ϕ	Phi
Z, ζ	Zeta	Ξ , ξ	Xi	X, χ	Chi
H, η	Eta	O, o	Omikron	Ψ , ψ	Psi
Θ , ϑ , θ	Theta	Π , π	Pi	Ω , ω	Omega

Index

- a posteriori Fehlerabschätzung, 187
- a priori Fehlerabschätzung, 187
- Abbildung, 606
 - harmonische, 575
- Abbildunggrad, 255, 496
- Abel, 478
- Abelsche Integralgleichung, 57
- Abelsches Integral, 540
- abgeschlossen, 132, 137
- abgeschlossene konvexe Hülle, 204
- abgeschlossener Operator, 206
- Ableitung
 - Cartan-, 23
 - kovariante, 22
 - Lie-, 24
 - Weyl-, 24
- Abschluss, 132
- absolute Stetigkeit, 107
- Abstandsbegriff, 136
- adjungierte Darstellung, 450, 470, 484
- adjungierter Operator, 158, 207
- Ähnlichkeitstransformation, 482
- äquivalente Darstellung, 441
- äquivalente Norm, 163
- Äquivalenzrelation, 118
- äußerer Punkt, 132
- Aharonov–Bohm-Effekt, 537
- Aleph, 606
- Algebra
 - C-Algebra, 227
 - C*-Algebra, 227
 - σ -Algebra, 102
- algebraische Vielfachheit, 216
- Alter des Universums, 425
- Alternantensatz, 202
- alternierende Differentiation, 376
- alternierende Multiplikation, 375
- Amann, 237
- Analysis
 - auf Mannigfaltigkeiten, 373
 - Grundidee, 1
 - höhere, 1
- Anfangswertproblem, 92
- Antikommutativität, 446
- Antipodensatz, 491
- Antiquarks, 465
- Approximationssatz von Weierstraß, 474
- Approximationstheorie, Hauptsatz, 201
- Arnold, 284
- Assoziativität, 138
- asymptotisch stabil, 268
- Atiyah, 596
- Atlas, 359
- Attraktor, 276
 - globaler, 317
- Automorphismengruppe, 443
- Automorphismus, 438, 442
- autonomes Differentialgleichungssystem, 265
- Bénardproblem, 326
- Bacon, 584
- Bairemaß, 110
- Bairesche Kategorie
 - erste, 205
 - zweite, 205
- Bairesches Kategorieprinzip, 204
- Balkenbiegung, 339
- Banachalgebra, 226
- Banachraum, 148
 - halbgeordneter, 241
- Baryonendekuplett, 465
- Baryonenoktett, 464
- Basisraum, 523
- Bernoulli, Johann, 54
- beschränkte Variation, 109
- Besselsche Ungleichung, 169
- Bettizahl, 493, 503
- Bifurkation, 269, 339
 - und Stabilitätsverlust, 248
- Bifurkationsbedingung, 246
- Bifurkationsgleichung, 249
- Bifurkationstheorie, 246
- bijektiv, 118
- Bildpunkt, 118
- Bilinearform, 145, 180
- bogenweise zusammenhängend, 134, 369
- Borelalgebra, 104
- Borelmaß, 110
- Borelmenge, 104
- Bose–Einstein-Statistik, 396
- Brouwer, 590
- Bündel, 523
- Bündelkarte, 528
- Bündelkoordinate, 528
- Bündelmorphismus, 524
- Bündelraum, 517, 523
- Calabi–Yau-Raum, 561
- C-Algebra, 227
- Cantormenge, 278
- Cartan
 - Élie, 521
 - Henri, 549
- Cartanfeld, 363
- Cartanscher Kalkül, 26
- Cayleytransformation, 207
- C^k -Diffeomorphismus, 12
- CERN, 343
- Chaos, 279, 292
- Charakter, 442, 445, 473

- Charakteristik, 313
Cherncharakter, 560
Chernklasse, 555, 559
Chernzahl, 561
Christoffelsymbole, 22, 413, 535
Comptoneffekt, 348
Cousinsches Problem, 551
 C^* -Algebra, 227
cup-Produkt, 556
- Darstellung, 455
der Permutationsgruppe, 460
endlicher Gruppen, 444
identische, 465
in Hilberträumen, 473
mehrdeutige, 455
von Gruppen, 440
von Liealgebren, 449
- Darstellungstheorie für Operatoralgebren, 229
de Rham Kohomologie, 9
de Rham Komplex, 567
Decktransformation, 518
Defektindex, 207
Definitionsreich, 118
Deformation, 490, 495
Dehnungstensor, 336
Descartes, 584
dicht, 133, 137
Dichtematrix, 399
Dichtheitskriterium, 156
Diffeomorphismus, 245, 370
 C^k -Diffeomorphismus, 12
Differentialform, 375, 385
 meromorphe 1-Form, 540
 mit Werten in einer Liealgebra, 485
- Differentialformenkalkül, 26
Dimension, 139, 489
Dirac, 345, 353
Diracgleichung, 344
Diracsche δ -Funktion, 83
Diracsches Punktmaß, 103
direkte Summe, 142
 topologische, 143
Dirichletproblem, 77, 124, 170
Dirichletsche Randbedingung, 319
diskretes dynamisches System, 264
Dispersion, 395
Distribution, 84
 temperierte, 94
Distributivität, 139
Divergenz, 23, 26, 32
Divisor, 546
Dolbeaut-Komplex, 568
Drehgruppe, 433, 455
Drehimpuls in der Quantenmechanik, 434
Dreiecksungleichung, 136
duale Darstellung, 449, 456, 465
duale Ergänzung, 18
dualer Operator, 144, 159
dualer Raum, 143, 154
duales Paar, 179
- Dualität, 154, 158, 502
 zwischen Homologie und Kohomologie, 500
Dualitätsabbildung, 158
Dualitätsfaktor, 444
Dunfordkalkül, 221
Durchmesser, 136
Dynamik von Quantensystemen, 304
dynamisches System, 492
 auf einer Mannigfaltigkeit, 381
Grundideen, 261
in der Ebene, 265
Klassifikation, 264
unendlichdimensionales, 294
- effektiv, 475
Eichfeldtheorie, 341, 342, 349, 525
Eichinvarianz, 346
Eichtransformation, 51, 341, 350, 526, 527
Eigenfunktion, 71
Eigenlösung, 61
eigentliche Abbildung, 246
eigentliche Lorentzgruppe, 428
Eigenwert, 61
Eigenwertproblem, 174
Eigenzeit, 42, 421
Einbettung, 371
Einbettungssatz von Nash, 416
Einbettungssatz von Whitney, 372
einfach zusammenhängend, 134, 499
einfache Gruppe, 440
Einheitsoperator, 606
Einheitstensor, 20
einparametrische Untergruppe, 476
Einstein, 115, 352, 401
Einstinsche Summenkonvention, 12, 343
Einstinsches Relativitätsprinzip, 42
Elastizitätstheorie, nichtlineare, 334
Elastodynamik, 25, 337
Elastostatik, 334
elektrische Ladungsdichte, 45
elektrischer Feldstärkevektor, 45
elektrisches Potential, 45
Elektrodynamik, 44
 Hauptsatz, 49
elektromagnetische Energie, 45
elektromagnetische Wechselwirkung, 343
elektromagnetische Welle, 49
elektromagnetisches Feld, 46
 geometrische Interpretation (Eichfeld), 51
Elektronenspin, 461
Elektrostatik, 332
Elementarkatastrophe, 269, 290
Elementarteilchen, 341, 464
elliptische Geometrie, 406
elliptisches Rand-Eigenwertproblem, 194
Elliptizität, 319
Empirismus, 584
endliche Gruppe, 440
energetische Fortsetzung, 184
energetischer Raum, 183
Energie, dunkle, 425
Energie-Impulstensor, 420

- Enthalpie, 396
 Entropie, 395
 Entropiefunktion, 271
 Entropieverlust der Erde, 293
 Entwicklung nach Eigenfunktionen, 70
 Epimorphismus, 442
 Ergodensatz, 283
 Ergodizität, 282
 Erhaltung der elektrischen Ladung, 9
 Erhaltung von Energie und Impuls, 46
 Erhaltungsgesetze, 331
 Erhaltungsgleichungen, 332
 Erhaltungsgrößen, 330
 Erlanger Programm, 415, 474
 Erweiterung stetiger Abbildungen, 496
 Euklid, 405
 euklidische Bewegungsgruppe, 435
 Euler, 352
 Euler–Lagrange–Gleichungen, 329
 Eulerklasse, 554, 557, 561
 Eulersche Charakteristik, 489, 491, 503
 Eulersche Gleichungen für ideale Flüssigkeiten, 322
 Eulerzahl, 9
 exakte Homotopiesequenz, 516
 exakte Sequenz, 444, 511
 Expansion des Weltalls, 422
 Exponentialabbildung, 414
 Exponentialfunktion für Matrizen, 427
 Extremalprinzip, 200, 210
 von Weierstraß, 135
- Faktorgruppe, 439
 Faktorraum, 141, 155
 Faltung, 89
 Faraday, 352
 Farbe der Quarks, 470
 Faser, typische, 531
 Faserbündel, 516, 542
 fast komplexe Mannigfaltigkeit, 418
 Fermat, 353
 Fermi–Dirac–Statistik, 397
 Feynman, 353
 finite Elemente, 128
 Fixpunkt, 237
 Fixpunktsatz
 Banach, 237, 278
 Bourbaki–Kneser, 240
 Brouwer, 240, 277
 Schauder, 240
 Tychonov, 240
 Fluss, 264, 381, 476
 auf Banachräumen, 301
 Flüssigkeitsströmung auf einer Liegruppe, 454
 Formel von Dyson, 304
 Formel von Trotter, 306
 fortschreitende Welle, 316
 Fortsetzung
 analytische, 549
 eines Operators, 118
 symmetrischer Operatoren, 207
 Fortsetzung von Friedrichs, 182
 Fortsetzungsprinzip für Operatoren, 158
- Fourierintegraloperator, 98
 Fourierkoeffizient, 76
 Fourierreihe, 74, 169
 Fouriertransformation, 93
 Fréchetableitung, 242
 Fraktal, 278
 Fredholmoperator, 119, 176, 208
 nichtlinear, 258
 Fredholmsche Alternative, 61, 176, 208
 physische Interpretation, 62
 Fredholmsche Integralgleichung, 61, 70
 Freedman, 596
 frei, 475
 freie Energie, 395
 Frobenius, 444
 fundamentales Vektorfeld, 528
 Fundamentalgruppe, 497
 und Symmetrie, 518
 Fundamentalgruppenfunktör, 499
 Funktion, 606
 algebraische, 541
 elliptische, 542
 holomorphe, 540
 meromorphe, 540, 549
 Funktion mit beschränkter Variation, 152
 Funktionalanalysis
 Geschichte, 129
 lineare, 115
 nichtlineare, 237
 Prinzipien, 199
 Funktionenräume, 131
 Bezeichnung, 610
 Funktor, 443, 488
 Ext, 514
 Tor, 514
- Galerkinverfahren, 82, 192, 196, 255
 Galilei, 1, 352
 Galois, 478
 Garbe, 550
 Garbenkohomologie, 549, 552
 Garbentheorie, 547
 Gauß, 353, 357
 Gebiet, 134
 Gebirgspasstheorem, 253
 Gelfanddarstellung, 230
 Gell–Mann, 354, 464
 Generizität, 286
 Geodätische, 413
 geodätische Kurve, 404
 geographische Breite, 417
 geographische Länge, 417
 Geometrie, 354, 398
 Geometrisierung der modernen Physik, 352
 Gesamtdrehimpuls, 345
 Gesamtkrümmung, 494
 Geschichte der Mathematik, 581
 Geschlecht einer Fläche, 491
 Gewicht einer Darstellung, 470
 Gibbsche Statistik, 397
 Glashow, 343
 glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, 369

- Glattheit, 11
Gleichgewichtspunkt, 267, 277
Gleichgewichtszustand, 269
Gleichung von Poincaré, 29
GNS-Darstellung, 230
Gradient, 26, 31
Gradientensystem, 271
Gravitationskonstante, 421
Greensche Formeln, 8
Greensche Funktion, 91, 123, 233, 296
Grenzyklus, 267
griechisches Alphabet, 611
Grundlösung, 89
Gruppe, 437
 $SO(3)$, 427
Gruppenalgebra, 444

Haarsches Maß, 451, 472
Hahn-Banach-Theorem, 199
halbgeordneter Banachraum, 241
Halbgruppe, 186
Halbnorm, 165
Halbordnung, 240
Hamiltonoperator, 305
Hamiltonsche Mechanik, 393
harmonischer Oszillator, 300
Hauptfaserbündel, 51, 522, 525, 528
Hausdorffraum, 132
Heisenberg, 305, 344, 353
Henckymaterial, 336
hermitesche Funktion, 168
hermitesche Metrik, 419
Hertz, 8, 353
Higgs-Boson, 343
Hilbert, 1, 115, 217, 261
 23 Probleme, 589, 595
Hilbert-Einstein-Wirkung, 421
Hilbert-Schmidt-Operatoren, 229
Hilbert-Schmidt-Theorie, 70, 173
Hilbertraum, 156
Hilbertraummethode, 70
Hilberts Zerlegungssatz, 217
Hintergrundstrahlung, 424
Hirzebruch, 549, 596
Hodgeoperator, 408
Holonomiegruppe, 537
homogener Raum, 478
Homologie, 501, 506
 eines Dreiecks, 506
Homologieruppe, 507
Homotopie, 495
Homotopiegruppe, höhere, 515
Homotopieinvarianz, 256
Homotopieäquivalenz, 495
homöomorphe Menge, 487
Homöomorphismus, 134, 369, 487
Hooke'sches Gesetz, 336
Hopf, 517
Hopfbifurkation, 270
Hopffaserung, 517
Huygens, 353
Hydrodynamik, 25, 322

hyperbolische Geometrie, 406
Hyperladung, 465
Höldersche Ungleichung, 149, 152

Ideal
 Hilbert-Schmidt-Operatoren, 229
 kompakter Operatoren, 228
 nuklearer Operatoren, 229
identische Abbildung, 606
Identität von
 Bianchi, 404
 Jacobi, 446
 Ricci, 404
Immersion, 371
Index, 208
Indexbündel, 565
Indexprinzip der mathematischen Physik, 25
Indextheorem, 561
Inertialsystem, 39
infinitesimale Drehung, 436
Information, 292
injektiv, 118
Innere, 132
innerer Punkt, 132
instabile Mannigfaltigkeit, 272
Integrabilitätsbedingung, 386
Integral, 104
 elliptisches, 542, 544
Integralgleichung, 53
Integralmannigfaltigkeit, 386
Integralsatz
 Gauß, 6
 Stokes, 6
Integration
 auf Mannigfaltigkeiten, 108
 von n -Formen, 34
Integrationstheorie, 101
Interpolation, 224
Interpolationsungleichungen, 164
Intervallschachtelungsprinzip, 138
Intuitionismus, 590
invariante
 Differentialgleichung, 480
 Funktion, 479
 Mannigfaltigkeit, 275
Invariantentheorie, 474
inverser Operator, 205
irreduzible Darstellung, 441, 458
Isometrie, 137, 415
 globale, 415
 infinitesimale, 415
Isomorphismus, 438, 442
Isospin, 465
Iterationsverfahren, 82, 186, 237, 264

Jordankurve, 487
Jordansche Normalform, 178
Jordanscher Kurvensatz, 487

Kähler, 591
Kählermannigfaltigkeit, 591
KAM-Theorie, 283

- Kapillarfläche, 571
 Karte, 359
 zulässige, 360
 Kartenabbildung, 359
 Katastrophentheorie, 286
 Kategorie, 442
 Killingform, 450
 Killingvektorfeld, 415
 Klasse, charakteristische, 554
 klassische Liegruppe, 428
 klassische Mechanik, 391
 auf Mannigfaltigkeiten, 392
 Klein, 415, 474
 Klein-Gordon-Gleichung, 345
 Kochkurve, 279
 Kodaira, 234
 Kodimension, 141
 Kohomologie, 502
 Kohomologiealgebra, 556
 Kohomologiegruppe, 501, 503, 552, 566
 Kohomologiekasse, 511
 Kokette, 552
 Kolmogorov, 284
 Kommutativität, 138
 kompakt homotop, 256
 kompakte Abbildung, 240
 kompakte Liegruppe, 472
 kompakte Menge, 133
 relativ kompakt, 133
 kompakte Störung der Identität, 256
 kompakter Operator, 138
 Kompaktheit, 209
 Kompaktheitssatz
 Alaoglu–Bourbaki, 211
 Eberlein–Šmuljan, 209
 Riesz, 209
 Komplex, elliptischer, 565
 komplexe Mannigfaltigkeit, 419
 komplexe orthogonale Gruppe, 428
 Komponente, 134
 Konfigurationsraum, 392
 konforme Abbildung, 417
 konjugiertes Element, 438
 kontinuierliche Gruppe, 427
 kontinuierliches dynamisches System, 264
 kontrahierbar, 496
 Kontraktion, 374
 kontravariantes Tensorfeld, 13
 konvergente Folge, 136
 Konvergenz, 135
 einer Fourierreihe, 124
 im quadratischen Mittel, 71, 124
 in der Operatornorm, 213
 in einem normierten Raum, 148
 in metrischen Räumen, 136
 in topologischen Räumen, 135
 lineare, 187
 schwache Operatorkonvergenz, 213
 schwache*, 167, 210
 starke Operatorkonvergenz, 213
 Konvergenzrate, 187
 konvex, 203
 konvexe Hülle, 204
 Konvexität, 203
 Konvexitätstheorem von Riesz, 225
 Korand, 503
 kosmologische Konstante, 424
 Kotangentenvektor, 366
 Kotangentalfeld, 367
 Kotangentialraum, 367
 kovariante
 Ableitung, 342, 350
 Differentiation, 410
 Richtungsableitung, 526, 531, 535
 kovariantes Tensorfeld, 13
 Kozyklus, 503
 kohomologer, 504
 Kraft, 32
 Krümmung, 52, 403, 413, 521, 528
 Krümmungsform, 52, 529
 Krümmungstensor, 23, 52, 420
 Kurven minimaler Länge, 414
 Kähler, 521
 Kählermannigfaltigkeit, 418
 Ladung, topologische, 11, 561
 Lagrange, 352
 Laguerresche Funktionen, 169
 Laplace, 572
 Laplacegleichung, 7, 297
 Laplaceoperator, 407, 566
 Lebesgue-Stieltjes-Integral, 109
 Lebesgue-Stieltjes-Maß, 104
 Lebesgueintegral, 105, 108
 Lebesguemaß, 103
 Legendrepoly nome, 168
 Lemma
 Fatou, 107
 Lax–Milgram, 180
 Poincaré, 31, 504
 Ricci, 413
 Leray, 130
 Leray–Schauder–Abbildunggrad, 256
 Levi–Civita Pseudotensor, 18
 LHC (*Large Hadron Collider*), 343
 Lichtablenkung, 422
 Lichtgeschwindigkeit, 50
 Lie, 311, 354, 427, 475, 478
 Lie–Bäcklund–Transformation, 480
 Lie–Isomorphismus, 451
 Lieableitung, 363, 382
 Liealgebra, 427, 446
 $su(3)$, 468
 $su(n)$, 428
 physische Interpretation, 454
 Produkt, 447
 Liefunktör, 444, 451
 Liegruppe, 427, 428
 $SO(3)$, 427, 433
 $SU(3)$, 469
 $SU(n)$, 428
 $U(1)$, 430
 $U(n)$, 430

- einfach zusammenhängende, 432
globale Struktur, 453
Grundbegriffe, 450
Grundideen, 430
kompakte, 432
lokale Struktur, 453
nicht kompakte, 432
nicht zusammenhängende, 432
physikalische Interpretation, 454
zusammenhängende, 432
Lieklammer, 53, 383, 431
Liemorphismus, 451
Liesches Linearisierungsprinzip, 451
Lievektorfeld, 476
linear unabhängig, 139
lineare
Algebra, 138
Funktionalanalysis, 115
Isomorphie, 139
Optimierung, 214
linearer
kompakter Operator, 153
Operator, 139
Raum, 138
stetiger Operator, 153
Unterraum, 139
Zusammenhang, 412
lineares stetiges Funktional, 154
Linearisierung, 430
Linearität, 446
linksinvariantes Geschwindigkeitsfeld, 454
Linkstranslation, 483
Liouvilleform, 393
Ljapunovfunktion, 270
Ljusternik–Schnirelman-Theorie, 253
logische Symbole, 605
lokal flach, 403
lokalkonvexer Raum, 165
Lorentzgruppe, 428, 436
Lorenz-Eichbedingung, 45, 347
Lorenz-System, 279
Lorenzgruppe, 41
Lorenztransformation, 40
Länge, 402, 409
Längenkontraktion, 40
längentreue Abbildung, 415
lösender Kern, 59

mager, 205
magische Formel von Cartan, 385
magnetische Monopole, 351
magnetischer Feldstärkevektor, 45
magnetisches Potential, 45
Majorantenkriterium, 106
Mannigfaltigkeit, 358
Grundbegriffe, 357
mit Rand, 368
Massenformel von Gell-Mann–Okubo, 468
Materie, dunkle, 425
Mathematik
der Selbstorganisation, 293
der Symmetrie, 427

der Zeit, 261
des qualitativen Verhaltens, 487
mathematische Symbole, 605
Matrizengruppen, 428
Maurer-Cartan-Form, 51
Maxwell, 8, 352
Maxwell-Boltzmann-Statistik, 397
Maxwell-Dirac-Gleichungen, 346
Maxwellsche Gleichungen, 8, 45, 48, 99, 526
in Sprache der Differentialformen, 8
spezielle Lösungen, 49
symmetrisches hyperbolisches System, 50
verallgemeinerte, 351
Mayer-Vietoris-Sequenz, 512
Maß, 102
Maßintegral, 104
Maßtheorie, 101
Menge
kompakte, 137
konvexe, 204
relativ kompakte, 137
Mengenalgebra, 102
Mengensymbole, 605
Merkatorprojektion, 417
Meson, 345, 466
Mesonenoktett, 468
messbar, 102
Funktion, 104
Methode der finiten Elemente, 189
Methode der kleinsten Quadrate, 124, 169
Methode von Ljapunov–Schmidt, 249
metrischer Raum, 136
metrischer Tensor, 401
Metrisierbarkeit, 166
mikrolokale Analysis, 101
Millenniumsprobleme, 595
Minimalfläche, 569
Minimumproblem, 250
Minkowski, 352
Minkowskimetrik, 41, 402, 436
Minkowskische Ungleichung, 149, 151
Mittelwert, 395
mittlere Gesamtenergie, 395
mittlere Gesamtteilchenzahl, 395
Momentenproblem, 200
Monomorphismus, 442
monotoner Operator, 254
Monotoniekriterium, 107
Monstergruppe, 440
Morphismsatz, 439
Morphismus, 442
von Gruppen, 438
Morsefunktion, 287, 493
Morsegleichung, 493
Morsetheorie, 493
Moser, 261, 284
multilineare Algebra, 145
multilinearer beschränkter Operator, 242
Multilinearform, 145
Multiplikation, alternierende, 20
Multivektor, 20

- natürliche Basis, 15
Navier-Stokesche Differentialgleichungen, 25, 323
Nebenklasse, 438
Neeman, 354
Neumannsche Randbedingung, 319
Neumannsche Reihe, 215
Neutron, 464
Newton, 352
Newtonverfahren, 243
nicht stabil, 269
nichteuklidische Geometrie, 405
nichtexpansiver Semifluss, 302
nichtkommutative Geometrie, 399
nichtlineare Funktionalanalysis, 130, 237
nichtlineare partielle Differentialgleichungen, 311
nilpotent, 216
nirgends dicht, 204
Noethertheorem, 330
normaler Operator, 231
Normalkoordinaten, 414
Normalteiler, 439, 451
normierter Raum, 147
Normisomorphie, 148
nullhomotop, 496
numerische Funktionalanalysis, 186, 211
Hauptsatz, 198
Näherungsverfahren, 80, 186

Oberlösung, 241
Observable, 304
offen, 132
Operator
 k -kontraktiver, 238
 Differentiation, 241
 eigentlicher, 246
 elliptischer, 561
 kompakter, 138
 linearer, 139
 linear kompakter, 153
 linear stetiger, 153
 monotoner, 254
 stetiger, 133, 135, 137
Operatoralgebra, 226
Operatordifferentialgleichung, 301
Operatorenideal, 228
Operatorfunktion, 219, 224
Operatorgleichung, 119
optimale Steuerung einer Rakete, 202
Orbit, 264, 476
Ordnungskegel, 241
Orientierbarkeit, 361
Orientierungsklasse, 554
orthogonal, 61
orthogonale Gruppe, 428
Orthogonalität, 156
Orthogonalitätsrelation, 76, 473
Orthonormalsystem, vollständiges, 71
Ortsvektor, 45

Parallelogrammgleichung, 156
Parallelprojektion, 142
Paralleltransport, 23, 51, 404, 410, 525–535

Parameterintegral, 108
Parametrisierung, 430
Parsevalsche Gleichung, 169
partielle Integration, 108, 160
Pauli-Dirac-Darstellung, 344
Perelman, 596
Periheldrehung, 422
Periode, 511
Periodenverdopplung, 280
Permutationsgruppe, 456
Phasenraum, 397
Planck, 353
Plancksches Wirkungsquantum, 299, 343
Plastizität, 337
Plateausches Problem, 569
Poincaré, 487
 Vermutung, 595
Poincaré-Dualität, 505, 557, 568
Poincaré-Gruppe, 41
Poincaré-Modell, 406
Poincaré-Transformation, 41
Poissonformel, 92
Poissongleichung, 90, 184, 295
Potentialtheorie, 77
Prinzip der maximalen Entropie, 395
Prinzip der stationären Wirkung, 421
Produktbündel, 524
Produktformel von Künneth, 557
Produktraum, 143, 155
Projektions-Iterationsverfahren, 197
Projektionsoperator, 142, 458
 orthogonaler, 173
Propagator, 304
Proton, 427, 464, 467
Prä-Hilbertraum, 155
Prägarbe, 550
Prämaß, 102
pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, 402
Pseudodifferentialoperator, 96
Pseudoskalar, 17
Pseudotensor, 14, 17
Pseudotensorfeld, 17
pull-back, 377, 379, 497
Punktspektrum, 215
 reines, 218
push-forward, 379
Pythagoras, 582

quadratisches Minimumproblem, 170
Quadraturformel, 211
Quadraturverfahren, 80
Quantenelektrodynamik, 346
Quantenfeldtheorie, 347
Quantenhypothese von Planck, 301
Quantenmechanik, 434
Quantenstatistik, 396
Quantenteilchen auf der x -Achse, 306
Quantenzahl, 466
Quantisierung, 300
Quark, 427, 464
Quarkmodell der Elementarteilchen, 464
quasilineares parabolisches System, 318

- quasiperiodische Bewegung, 283
quasistatischer Prozess, 390
Quotiententopologie, 519
- Randbedingung, 91
Randpunkt, 132
Randwertproblem, 91
Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, 419
Raumfahrtexperiment, 571
Reaktions-Diffusionsgleichung, 316
Reflexivität, 154
Regularität, 126
reguläre Distribution, 85
regulärer Punkt, 371
Reihenentwicklungen, mathematische Physik, 232
relativ abgeschlossen, 133
relativ offen, 133
relativistische Mechanik, 42
relativistisches Elektron, 344
Relativitätstheorie
 allgemeine, 44, 341, 352, 401, 419
 spezielle, 39, 436
Relaxation, 285
Relaxationszeit, 285
Renormierung, 349
repère mobile, 534
Repèrebündel, 534
Resolvente, 60
Resolventenmenge, 214
Resonanz, 284
retardiertes Potential, 49
Ricci-Strömung, 595
Ricci-Tensor, 403
Riemann, 125, 353, 596
Riemann-Hilbert-Problem, 79
Riemann-Roch-Hirzebruch Theorem, 592
Riemannsche Fläche, 360, 539, 542, 557
 kompakt, 545
Riemannsche Geometrie, 401
Riemannsche Mannigfaltigkeit, 401, 409
 eigentliche, 409
 nichteigentliche, 409
Riemannsche Vermutung, 588
Riemannsche Zahlenkugel, 548
Riemannscher Krümmungstensor, 403
Ritzsches Verfahren, 188
 duales, 190
Rotation, 23, 26, 31
Rückwärtstransformation, 379
- Salam, 343
Sattelpunktproblem, 253
Satz von
 Abel, 546
 Ado, 447
 Alaoglu-Bourbaki, 211
 Ambrose und Singer, 538
 Arzelà-Ascoli, 150
 Atiyah-Singer, 561
 Baire, 205
 Banach, 237
 Banach und Steinhaus, 205
- Birkhoff, 283
Bolzano, 490
Bott, 516
Bourbaki-Kneser, 240
Brouwer, 240
Burnside, 445
de Rham, 510
Dolbeaut, 568
Douglas und Radó, 570
Eberlein-Šmuljan, 209
Eells und Simpson, 576
Fischer-Riesz, 170
Frobenius, 385
Fubini, 108
Gauß, 6
Gauß-Bonnet-Chern, 9, 493, 555
Gelfand-Neumark, 229
Hahn, 103
Hahn-Banach, 199
Hausdorff, 138
Hille-Yosida, 302
Hodge, 566
Hopf, 497
Hopf-Rinow, 414
Jackson, 186
Jordan, 487
Kodaira-Weyl, 234
Krein-Milman, 214
Lebesgue, 107
Lie, 481
Liouville, 392, 417, 545
Malgrange-Ehrenpreis, 90
Mittag-Leffler, 552
Nash, 416
Noether, 330
Poincaré, 379
Poincaré-Hopf, 492, 555
Radon-Nikodym, 107
Rellich, 220
Riemann, 403, 545, 547
Riemann-Roch, 546, 547
Riemann-Roch-Hirzebruch, 568
Riesz, 158, 172, 209
Riesz-Markov, 110
Sard, 286, 371
Schauder, 240
Sobolev, 162
Stokes, 6, 8, 36, 379, 509
Stone, 303
Stone-Weierstraß, 227
Szegö, 212
Toeplitz, 212
Tychonov, 240
Weierstraß, 150, 474
Weyl, 223
Whitney, 372
Yau, 561
- Satz über
 den abgeschlossenen Graphen, 206
 den abgeschlossenen Wertebereich, 208
 implizite Funktionen, 245

- inverse Abbildungen, 246
- klassische Gruppen, 434
- offene Abbildungen, 205
- Scharmittel, 283
- Schauder, 130
- schiefsymmetrischer Pseudotensor, 18
- Schmidt, 129
- Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren, 168
- Schnitt, 523
- Schnitzzahl, 287
- Schock, 313
- Schrödinger, 344, 353
- Schrödingergleichung, 294, 299
- Schur, 444
- schwache Konvergenz, 209
- schwache Wechselwirkung, 343
- Schwartz, 7, 130
- schwarzes Loch, 422
- Schwarzschildmetrik, 421, 422
- Schwarzschildradius, 421
- schwingende Saite, 74
- Schwinger, 353
- selbstadjungiert, 207
- selbstadjungierter Operator, 159
- Selbstorganisation, 293
- semidirektes Produkt, 435
- Semifluss auf Banachräumen, 301
- separabel, 133
- separiert, 132
- Singer, 596
- Singularitätentheorie, 286
- singuläre
 - Homologie, 508
 - Homologiegruppe, 509
 - Integralgleichung, 78
 - Kette, 509
 - Kohomologie, 510
- singulärer
 - Punkt, 371
 - Rand, 509
 - Simplex, 508
 - Zyklus, 509
- skalare Dichte, 16
- skalare Krümmung, 403
- Skalarprodukt, 155
- Smale, 357
- Sobolevraum, 160
- Sobolevsche Einbettungssätze, 162
- Soliton, 314
- Spannungstensor, 336
- Spektralmaß, 218
- Spektralradius, 215
- Spektralsatz, 70, 231
- Spektralschar, 216
- Spektraltheorie
 - erster Hauptsatz, 217
 - normaler Operatoren, 231
 - selbstadjungierter Operatoren, 217
 - zweiter Hauptsatz, 218
- Spektrum, 214, 227
- absolutstetiges, 218
- rein diskretes, 218
- rein kontinuierliches, 218
- singuläres, 218
- spezielle
 - komplexe orthogonale Gruppe, 428
 - orthogonale Gruppe, 428
 - unitäre Gruppe, 428
- spezielle Funktionen der mathematischen Physik, 472
- Sphäre, 490
- sphärische Geometrie, 406
- Spiegelungsgruppe, 442
- Spin, 345
- Spur, 228
- Spurklasse, 229
- stabile Mannigfaltigkeit, 272
- Stabilität stationärer Punkte, 268
- Stabilität unseres Planetensystems, 283
- Standardmodell
 - Elementarteilchenphysik, 343, 587, 594
 - Kosmologie, 591
- starke Wechselwirkung, 343
- stationärer Punkt, 268
- statistische Physik, 394
- statistisches Potential, 396
- stetig, 369
- stetige Abbildung, 133, 137
- streng konvex, 201
- Streumatrix (S -Matrix), 304
- Streuprozess, 308
- Streutheorie, 224
- Stringtheorie, 572, 596
- Strukturbildung, 293
- strukturelle Stabilität, 267, 288
- Strukturgleichung, 536
- Strukturgleichungen von Cartan, 413
- Strukturgruppe, 528
- Strömung, 492
- Störungstheorie, 222
- stückweise glatter Rand, 161
- Submersion, 371
- Substitutionsregel, 108
- sukzessive Approximation, 60
- Summation, 212
- Supermathematik, 576
- Superpositionsprinzip, 70
- Superstringtheorie, 576
- Supersymmetrie, 576
- Superzahl, 576
- surjektiv, 118
- Symmetrie, 354, 427
 - Liescher Gruppen, 483
 - und Differentialgleichungen, 478
 - von Mannigfaltigkeiten, 474
- symmetrisch, 207
- symmetrischer Operator, 159
- symmetrisches hyperbolisches System, 320
- symplektische Geometrie, 391, 393
- symplektische Gruppe, 428
- Tangentenvektor, 364
- Tangentialabbildung, 370
- Tangentialbündel, 366, 534
- Tangentialraum, 360, 364

- Tangentialvektor
 - horizontaler, 529
 - vertikaler, 529
- Taylorproblem, 326
- Teichmüllerraum, 548
- Tensor, 13
 - Antisymmetrisierung, 20
 - Permutation der Indizes, 19
 - schiefsymmetrischer, 20
 - symmetrischer, 19
 - Symmetrisierung, 19
 - Überschiebung von, 19
- Tensoralgebra, 18, 373
- Tensoranalysis, 12, 21
- Tensordarstellung, 456, 457
- Tensordichte, 14
- Tensorfeld, 13, 362, 375
 - Differentiation, 363
- Tensorgleichung, 25
- Tensorkalkül auf Mannigfaltigkeiten, 362
- Tensorprodukt, 450, 462, 474
 - linearer Räume, 146
 - von Distributionen, 88
- Testfunktion, 84
- Theorema egregium, 5, 404
- Thermodynamik, 389
 - erster Hauptsatz, 389
 - zweiter Hauptsatz, 389
- thermodynamischer Prozess, 389
- Thom, 286
- Thurston, 596
- Toddklasse, 560
- Tomonaga, 353
- Topologie, 487
- Topologien für Operatoren, 213
- topologische Invariante, 488
- topologische Invarianz, 489
- Torsion, 412, 532
- Torus, 490
- total beschränkt, 137
- Totalvariation, 152
- Transformation
 - von Integralen, 35
 - von Tensorfeldern, 379
- Transformationsgruppe, 474
- transitiv, 476
- Transversalität, 286, 372
- Trefftzsches Verfahren, 188, 190
- Trennung konvexer Mengen, 203
- Träger
 - einer Distribution, 85
 - einer Funktion, 85
- Tschebyshevapproximation, 201
- Turbulenz, 323
- Überlagerung, 542
- Überlagerungsabbildung, 500
- Überlagerungsgruppe, universelle, 427, 453, 524
- Überlagerungsmannigfaltigkeit, 499, 524
- Umgebung, 132
- Ungleichung von
 - Gagliardo-Nirenberg, 164
- Kato, 222
- Poincaré, 164
- Poincaré-Friedrichs, 164
- Uniformisierung, 541, 543
- Uniformisierungssatz, 547
- unitäre Gruppe, 428
- unitäre Äquivalenz, 156, 441
- unitärer Fluss, 302
- Universalitätsprinzip von Feigenbaum, 282
- Unschärferelation, 305
- Unteralgebra, 227
- Unterlösung, 241
- Untermannigfaltigkeit, 371
- Unterraumtopologie, 133
- Urbildmenge, 606
- Urknall, 422
- Variablenwechsel, 33
- Variation, 328
- Variationsproblem, 326
- Vektoranalysis, 26
- Vektorboson, 343
- Vektorfeld, 382, 477
 - auf einer Mannigfaltigkeit, 448
- Vektorraumbündel, 525, 531
 - assoziiertes, 527, 531
- verallgemeinerte
 - Ableitung, 160
 - Fourierreihe, 71
 - Lösung, 7, 121
 - Randwerte, 162
- Vergleich von Topologien, 135
- Vergleichssätze für Eigenwerte, 223
- Verjüngung eines Tensors, 19
- Versklavungsprinzip, 272
- Vertauschungsrelation, 430
 - in der Quantenmechanik, 449
- Vervollständigungsprinzip, 124, 137, 148, 156
- Viererpotential, 45
- vollständig, 137
 - integrabel, 386
 - reduzibel, 441
- vollständiges Orthonormalsystem, 167
- vollständiges Vektorfeld, 477
- Volterrasche Integralgleichung, 59
- Volumen, 402, 409
- Volumenform, 408
- von Neumann, 138, 217, 226, 353
 - Algebra, 227
 - Diagonalisierungssatz, 218
 - Minimaxtheorem, 253
- Vorwärtstransformation, 379
- Wahrscheinlichkeit in der Quantenmechanik, 305
- Wasserstoffatom, 307
- Wechselwirkung
 - elektromagnetische, 343
 - gravitative, 343
 - schwache, 343
 - starke, 343
- Weierstraß, 125
- Weil-Morphismus, 558

Weinberg, 343
Wellenfront, 100
Wellenfrontmenge, 100
Wellengleichung, 45, 294, 298
 nichtlineare, 319
Wellenoperator, 308
Weltmodell
 geschlossenes, 422
 offenes, 422
Weyl, 234
Weyl-Hodge-Homologie, 9
Weylfeld, 363
Whitneysumme, 533
Wiener, 353
Wikipedia, 597
Wiles, 595
Winkel, 402, 409
winkeltreue Abbildung, 417
WMAP (Wilkinson Microwave
 Anisotropy Probe), 424
Wurzel einer Liealgebra, 470
Wärmeleitungsgleichung, 294, 297, 482

Yamabe-Problem, 418
Yang-Mills-Gleichung, 526, 530
Young-Tableau, 457

Zeitdilatation, 40
Zeitmittel, 283
Zeitordnungsoperator, 304
Zelle, 488
Zentrumsmannigfaltigkeit, 272
zusammengesetzter Quarkzustand, 466
zusammengesetzter Zustand, 462
Zusammenhangsform, 529
Zusammenhangskomponente, 452
zusammenhängend, 134
Zustand, 304
Zustandsraum, 319
Zustandssumme, 395
Zweig, 354, 464
Zwillingsparadoxon, 421
Zyklen, homologe, 501
zyklische Gruppe, 439