Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Entdeckung des Higgs-Bosons im Jahr 2012 [3] und die erstmalige Beobachtung von Gravitationswellen im Jahr 2016 [4] sind weitere Bestätigung zweier fundamentaler Theorien der heutigen Physik, des *Standardmodells der Teilchenphysik (SM)* und der *allgemeinen Relativitätstheorie (ART)*, die es vermögen, Phänomene auf Größenordnungen der Quantenphysik beziehungsweise der Kosmologie mit großer Genauigkeit zu beschreiben und zu erklären. Obwohl das SM durch die Entdeckung des Higgs in sich geschlossen ist, gibt es Hinweise sowohl von experimenteller als auch von theoretischer Seite, dass dieses Theoriegebäude nicht endgültig sein kann.

Kosmologische Experimente zeigen, dass es eine Art der Materie, *dunke Materie (DM)*, mit einer Energiedichte von $\Omega_{\mathrm{DM}} \approx 0,2$ in Einheiten der kritischen Massendichte im Universum geben muss [1], die eine schwache Ankopplung an die SM-Materie haben muss, jedoch gravitativ wechselwirkt. Im Rahmen von ΛCDM-Theorien wird eine kalte, d.h. nichtrelativistische, DM vorhergesagt, sodass Teilchentheorien mit schweren, schwach ans SM gekoppelten Elementarteilchen[1] naheliegend sind. Y. Bai und P. Schwaller schlagen dagegen vor, die DM Masse analog zur Masse der bekannten baryonischen Materie zu erzeugen. Die Masse der normalen Materie, d.h. der Protonen und Neutronen, wird im wesentlichen durch Quark und Gluon Wechselwirkungen der *Quantenchromodynamik (QCD)* erzeugt. Eine analoge Dynamik, genannt *dark QCD (dQCD)*, zusammen mit einem Mechanismus, der die Baryogenese in den dunklen Sektor erweitert, kann damit eine alternative Erklärung für DM sein. [6]

Von theoretischer Seite aus sind SM und ART völlig disjunkt, in dem Sinne, dass das SM keine gravitativen Wechselwirkungen enthält und die ART eine klassische, d.h. nicht quantisierte, Theorie ist. Um die in der ART auftretenden Singulatritäten konsistent beschreiben zu können, ist eine umfassendere Theorie der Gravitation auf quantenphysikalischen Skalen nötig [7]. Da es sich in beiden Fällen um eine Feldtheorie handelt, ist es naheliegend, die Wirkung der ART analog zum SM über den Pfadintegralformalismus nach Feynman zu quantisieren [8]. Praktisch führt dieses Vorgehen jedoch zu nichtrenormierbaren Theorien [9], die in der Regel unendlich viele Renormierungskonstanten erfordern um auf allen Energieskalen gültig zu sein und die deshalb häufig als unphysikalisch oder ungeeignet als fundamentale Theorie gelten. Durch ein *asymptotic safety (AS)* Szenario ist es jedoch möglich, die Theorie bis auf eine endliche Zahl von Parametern zu bestimmen, sodass AS als Erweiterung der üblichen Forderung nach Renormierbarkeit verstanden werden kann [9] [13]. Hierbei wird die Energieskalenabhängigkeit der Kopplungskonstanten einer Theorie mit Hilfe von *Renormierungsgruppen (RG)* untersucht; wenn die Kopplungskonstanen auf bestimmten Hyperfläche im Phasenraum der Kopplungskonstanten liegen ist das Energieskalenverhalten bis auf den Freiheitsgrad der Dimension dieser Hyperfläche bestimmt.

[1] Sog. WIMPs, weakly interacting massive particles

2 Quantenfeldtheorie und Standardmodell

In einer *Quantenfeldtheorie (QFT)* werden physikalische Entitäten als Anregungszustände von Quantenfeldern verstanden. Ein Schlüssel zu den experimentell zugänglichen Wirkungsquerschnitten ist die Berechnung von *Korrelatorfunktionen* oder *n-Punkt Funktionen*

$$\left\langle \mathbf{T}\ \phi^{r_1}(x_1)\ldots\phi^{r_N}(x_N)\right\rangle = \frac{\int \mathscr{D}\phi\ \phi^{r_1}(x_1)\ldots\phi^{r_N}(x_N)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi]}}{\int \mathscr{D}\phi\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi]}} \tag{1}$$

im Pfadintegralformalismus von Feynman [12]. Die Information über die möglichen physikalischen Prozesse der Quantenfelder ϕ ist dabei in dem Wirkungsfunktional S bzw. der Lagrangedichte $\mathscr{L}$ enhalten, welche in einer d-Dimensionalen Raumzeit über

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^d x\ \mathscr{L}(\phi, \partial\phi, t) \tag{2}$$

verknüpft sind [12]. Die Felder ϕ können dabei qualitativ unterschiedlich sein, d.h. in verschiedene Räume abbilden und somit verschiedene Teilcheneigenschaften darstellen. Dies soll durch den Index r verdeutlicht werden.

2.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das SM ist eine QFT nach dem Prinzip, invariant unter bestimmten Symmetrietransformationen zu sein. Die Dynamik wird dabei durch die Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ in der Lagrangedichte repräsentiert sowie der Angabe, unter welcher Darstellung der Eichgruppe die Felder transformieren. Neben den Feldern der Quarks, Leptonen und des Higgs wird so die Existenz von Eichfeldern und Wechselwirkungen mit den übrigen Feldern gefordert, welche keine Singletts der entsprechenden Eichgruppe sind.

Als eine der fundamentalen Kräfte des SM beschreibt die *Quantenchromodynamik (QCD)* die Wechselwirkungen zwischen Quarks, den Bausteinen der Hadronen, und den Gluonen, den Eichfeldern der QCD. Die mathematische Beschreibung erfolgt durch Darstellungen der $SU(3)$, sodass einem Quark mit Flavour-Quantenzahl f eine Colour-Quantenzahl $a \in 1,2,3$ zugeordnet wird, außerdem folgt die Existenz von acht masselosen Gluonen, die mit Quarks und untereinander wechselwirken [**?**]. Eine genauere mathematische Beschreibung folgt in Abschnitt **??**. Charakteristisch für die QCD des SM ist die in Abbildung **??** dargestellte Energieabhängigkeit der QCD Kopplungskonstanten. Der Landau-Pol bei Λ_{QCD} ist dabei für die hadronische Bindung bei niedrigen Energien verantwortlich und somit insbesondere für die baryonische Massendichte Ω_{B} im Universum, während es bei hohen Energien gerade zum AF kommt.

Die Symmetriegruppe $SU(2) \times U(1)$ beschreibt die Elektroschwache Wechselwirkung. Sie wird

2.2 Effektive Quantenwirkung und Gell-Mann-Low Gleichung

Um das Hochenergieverhalten von Wechselwirkungen zu untersuchen, ist es sinnvoll die *Quantenwirkung* Γ einzuführen. Dazu werden nun die wichtigsten Punkte der Berechnung von Korrelationsfunktionen mit Hilfe von erzeugenden Funktionalen gezeigt[2].

Der Einfachheit halber wird nun nur ein komplexes Fermionfeld ψ und ein komplexes Skalarfeld ϕ betrachtet. Wegen der linearen Eigenschaften von (1) ist die Erweiterung auf mehrere Felder trivial. Lorentz- und Eichinvarianz der Lagrangedichte erfordern direkt die Einführung der Felder $\overline{\psi}$ und ϕ^*[3]. Das *erzeugende Funktional* wird definiert als

$$Z[J] := \int \mathscr{D}\Psi \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\Psi]+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^d x (J\cdot\Psi)} \quad , \tag{3}$$

dabei wurden die Ströme η, $\overline{\eta}$, ζ und ζ^* und die Schreibweise $J = (\eta, \overline{\eta}, \zeta, \zeta^*)^{\mathrm{T}}$ und $\Psi = (\overline{\psi}, \psi, \phi^*, \phi)^{\mathrm{T}}$ eingeführt. Eine Reihenentwicklung kann durch

$$Z[J] = \sum_\alpha \frac{\mathrm{i}^{|\alpha|}}{\alpha!} \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{|\alpha|} Z^\alpha(x_1, \ldots, x_{|\alpha|}) J^\alpha(x) \tag{4}$$

definiert werden, mit einem vierer Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ und der Schreibweise

$$J^\alpha = \eta(x_1)\ldots\eta(x_{\alpha_1})\, \overline{\eta}(x_{\alpha_1+1})\ldots\overline{\eta}(x_{\alpha_1+\alpha_2})\, \zeta(x_{\alpha_1+\alpha_2+1})\ldots\zeta(x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3})\, \zeta^*(x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1})\ldots\zeta^*(x_{|\alpha|}) \quad . \tag{5}$$

Die Funktionen Z^α können über die Funktionalableitung

$$Z^\alpha(y_1, \ldots, y_{|\alpha|}) \overset{(4)}{=} \left[\frac{\partial}{\mathrm{i}^{|\alpha|}\partial J^\alpha(y)}\right]_{J=0} Z[J] \overset{(3)}{=} \int \mathscr{D}\Psi \; \Psi^\alpha(y) e^{\mathrm{i}S[\Psi]} \overset{(1)}{=} \left\langle \mathbf{T}\Psi^\alpha(y) \right\rangle \tag{6}$$

als n-Punkt Funktionen verstanden werden. Zur Vereinfachung wurde dabei Ψ^α analog zu (5) definiert und $Z[0] = 0$ gesetzt.

Mit der Definition des Funktionals $W[J] := \ln Z[J]$ und einer Reihenentwicklung wie in (4) erhät man Funktionen W^α, die die Cluster-Eigenschaft erfüllen [16]. Sind A und B Ströme mit disjunkten Trägern[4] und $y_1 \in \mathrm{supp} A$, $y_2 \in \mathrm{supp} B$, dann müssen $W^\alpha(\ldots, y_1, \ldots, y_2, \ldots) \xrightarrow{||y_1 - y_2|| \to \infty}$

[2]Für das Vorgehen beim reellen, skalaren Feld vgl. [16], für die Erweiterung mit Fermionen vgl. [12].
[3]Cite
[4]Dabei können A und B eine Zerlegung eines Stroms $J_i = A + B$ oder zwei verschiedene, z.B $A = \eta$, $B = \phi$ sein.

0. Aufgund dieser Eigenschaft ist $W[J]$ das erzeugende Funktional ver

3 QCD × dark QCD

Das Verhalten der QCD-Kopplungskonstanten ist im Standardmodell allein nicht im Stande ein asymptotic safety Szenario zu entwickeln, wie in Abschnitt 4.5 gezeigt wird. Durch die Erweiterung der QCD um eine weitere Eichgruppe, die dark QCD, ergeben sich qualitativ völlig neue Möglichkeiten im Hochenergieverhalten der Kopplungskonstanten.

3.1 Die Standardmodell QCD

Im Standardmodell wird die QCD durch die Symmetriegruppe $SU(N_\mathrm{c})$ dargestellt, unter der sich die Quarks in der *fundamentalen Darstellung* und die Gluonen in der *adjungierten Darstellung* transformieren. Im SM gibt es $N_\mathrm{Flavour} = 6$ verschiedene Quarkflavour und $N_\mathrm{Colour} = N_\mathrm{c} = 3$ Colours, da die QCD Flavour-Blind ist, d.h. da die Wechselwirkung unabhängig von der Flavour-Quantenzahl ist, ist die Erweiterung auf N_c Colour und $n_{\mathrm{f_c}}$ Flavour jedoch trivial. Die Lagrangedichte kann als

$$\mathscr{L}_\mathrm{QCD} = \sum_f \bar{q}_a^f \left(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g\gamma^\mu t^C_{ab} \mathscr{A}^C_\mu - m_f \delta_{ab} \right) q_b^f - \frac{1}{4} F^A_{\mu\nu} F^{A\,\mu\nu} \tag{7}$$

geschrieben werden [2]. Dabei stellt q_b^f ein Quarkfeld mit Colour $b \in \{1,2,\ldots,N_\mathrm{c}\}$ und Flavour $f \in \{1,2,\ldots,N_\mathrm{Flavour}\}$ und mit der Masse m_f dar. Man nennt $q = (q_1, q_2, \ldots, q_{N_\mathrm{c}})^\mathrm{T}$ ein Colour-Multiplett[5] unter der fundamentalen Darstellung, wenn es unter Anwendung der $SU(N_\mathrm{c})$ gemäß

$$q(x) \longrightarrow \underbrace{U(x)}_{\in \mathbb{C}^{N_\mathrm{c} \times N_\mathrm{c}}} q(x) \quad , \quad \bar{q}(x) \longrightarrow \bar{q}(x) U(x)^\dagger \tag{8}$$

transformiert. Die Gluonfelder $\mathscr{A}^C_\mu$ mit $C \in \{1,2,\ldots,N_\mathrm{c}^2 - 1\}$ und Erzeugern $t^C \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{c} \times N_\mathrm{c}}$ transformieren dagegen in der adjungierten Darstellung [14]

$$t^C_{ab} \mathscr{A}^C_\mu(x) \longrightarrow U(x) t^C_{ab} \mathscr{A}^C_\mu(x) U(x)^\dagger - \mathrm{i}(\partial_\mu U(x)) U(x)^\dagger \quad . \tag{9}$$

Die Dynamik und Propagation der Gluonen wird dabei durch den Feldstärketensor vermittelt,

$$F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathscr{A}^A_\nu - \partial_\nu \mathscr{A}^A_\mu - g f_{ABC} \mathscr{A}^B_\mu \mathscr{A}^C_\nu \quad , \quad [t^A, t^B] = \mathrm{i} f_{ABC} t^C \quad . \tag{10}$$

[5]Der Flavour-Index f wird ab jetzt weggelassen.

3.2 Dark QCD

In [6] wird die dQCD eingeführt, um die DM Massendichte Ω_{DM} im Universum zu erklären. Dazu wird das Niederenergieverhalten der neu eingeführten Kopplungskonstanten g_{dQCD} auf die Confinement Scale Λ_{dQCD} untersucht, die analog zur QCD Confinement Scale Λ_{QCD} die Größenordnung der Baryonmasse bestimmt.

Aufgrund[5]

4 Untersuchung einer β-Funktion

An Gleichung **??** erkennt man, dass die β-Funktion einer QFT eine Seite eines Systems N gekoppelter, gewöhnlicher, nichtlinearer Differentialgleichungen der Form

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}g_k(\mu) = P_k^{M_L}(g_1,\dots,g_N) =: \beta_k(g_1,\dots,g_N), \quad k = 1,\dots,N \tag{11}$$

ist. Dabei stellt jedes P_k ein Polynom maximal M_L-ten Grades in den Kopplungskonstanten dar. Der Grad des Polynoms hängt nur von der Ordnung der Störungstheorie ab, im Bild von Feynmangraphen entspricht dies der maximalen Anszahl L von Quantenschleifen, die in der Berechnung berücksichtigt werden. Hier ist es naheliegend, das DGL-System als Problem im $\mathbb{R}^N$ zu betrachtet. Mit $g := (g_1,\dots,g_N)^\mathrm{T}$ und $\beta := (\beta_1,\dots,\beta_N)^\mathrm{T}$ lässt sich (11) auch als

$$\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}g(\mu) = \beta(g) \tag{12}$$

schreiben. Dann heißt $\mathbb{R}^N$ auch der Phasenraum der β-Funktion.

Definition 4.1. Eine *Trajektorie im Phasenraum* ist eine Funktion $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}^N$, die die Gleichung (12) löst.
Ein *Fixpunkt der β-Funktion* ist ein Punkt $g^* \in \mathbb{R}^N$, für den $\beta(g^*) = 0$ gilt.

Damit eine QFT physikalisch sinnvoll ist, muss sie Vorhersagen für alle Energieskalen machen können. Um eine auch für hohe Energieskalen μ gültige Theorie zu beschreiben muss demnach der Wert $\lim\limits_{\mu\to\infty} g(\mu)$ existieren, ebenso muss der Wert $\lim\limits_{\mu\to 0} g(\mu)$ existieren, wenn die Theorie auch für niedrige Energieskalen gültig sein soll. Damit die Grenzwerte existieren muss $\lim {}^{\mathrm{d}}/_{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = 0$ sein, es sind also gerade die Fixpunkte der β-Funktion, die als Grenzwerte in Frage kommen.

Im Laufe der Untersuchung der β-Funktion haben sich die folgenden Bezeichnungen entwickelt.

Gaußscher Fixpunkt: Ist der Punkt $g^* = 0$ ein Fixpunkt der β-Funktion, so spricht man von einem Gaußschen Fixpunkt.

Banks-Zaks Fixpunkt: Ein Fixpunkt $g^* \neq 0$, der physikalsich sinnvoll und perturbativ ist, heißt Banks-Zaks oder Caswell-Banks-Zaks Fixpunkt.

Landau Pol: Besitzt die Lösung des Problems (12) mit Anfangswert $g(\mu_0) = g_0$ eine Polstelle $\mu_{\mathrm{Pol}} < \infty$, sodass $g(\mu) \xrightarrow{\mu\to\mu_{\mathrm{Pol}}} \infty$, dann spricht man von einem Landau-Pol.

4.1 Vereinfachung des mathematischen Problems

Die Berechnung einer Trajetkorie als Lösung zum Anfangswertproblem (12) mit Anfangswert $g(\mu_0) = g_0$ ist in der Regel analytisch nicht möglich. Durch einige einfache Schritte lässt sich das Problem jedoch zunächst in eine einfacher zuhandhabende Form überführen und sich das Verhalten in der Nähe eines Fixpunktes vorhersagen.

In [9] schlägt S. Weinberg die Einführung der dimensionslosen Kopplungskonstanten

$$\bar{g}_i(\mu) := \mu^{-d_i} g_i(\mu) \tag{13}$$

vor, wobei d_i die Massendimension der Kopplungskonstanten g_i ist. Bei der Untersuchung der QCD×dQCD-β-Funktion wird klar, dass die Erweiterung

$$\alpha(\mu)_i := \mathcal{N}\left(\mu^{-d_i} g_i(\mu)\right)^n \tag{14}$$

den Grad M_L der β-Funktion verringern kann und somit das Problem weiter vereinfacht (vgl. [6], [11]). Dabei dient $\mathcal{N}$ als Normierungskonstante, die insbesondere von dimensionslosen Größen wie Teilchenzahlen oder Größen der Symmetriegruppe abhängen kann.

Beispiel 4.2. Für ein eindimensionales Problem

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = X g(\mu)^3 + Y g(\mu)^5 \tag{15}$$

und für den einfachen Fall $[g] = 0$ definiere

$$\alpha(\mu) = \mathcal{N} g(\mu)^2 \quad . \tag{16}$$

Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} = \mathcal{N} 2g \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu} g = \frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} \tag{17}$$

und damit

$$\frac{1}{2\mathcal{N}} \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = X g(\mu)^4 + Y g(\mu)^6 \tag{18}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2\mathcal{N}} \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = \frac{X}{\mathcal{N}^2} \alpha(\mu)^2 + \frac{Y}{\mathcal{N}^3} \alpha(\mu)^3 \tag{19}$$

$$\Rightarrow \qquad \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = \tilde{X} \alpha(\mu)^2 + \tilde{Y} \alpha(\mu)^3 \tag{20}$$

mit $\tilde{X} = 2X\mathcal{N}^{-1}$ und $\tilde{Y} = 2Y\mathcal{N}^{-2}$.

Naheliegend wird wieder $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^{\mathrm{T}}$ und $\beta(\alpha) = \beta(g \circ \alpha)$ geschrieben.

Der physikalisch sinnvolle Wertebereich für die Energieskala μ ist $(0,\infty)$. Mit der Renormierungsgruppenzeit (RG-Zeit) t, definiert als

$$t(\mu) := \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \Leftrightarrow \mu(t) := e^t \quad , \tag{21}$$

gibt es eine Bijektion $(0,\infty) \xrightarrow{t} (-\infty,\infty)$, die es erlaubt die Kopplungskonstante als

$$\tilde{\alpha}(t) := \alpha\left(e^t\right) = \alpha(\mu) \tag{22}$$

zu schreiben. Der Parameter Λ ist beliebig und hat keine physikalische Bedeutung, er wird später lediglich die Extrapolation der Fixpunkte übersichtlicher gestalten. Es folgt

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = \mu \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\mu}}_{=\mu^{-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{\alpha}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{\alpha}(t) \quad . \tag{23}$$

Damit ist Gleichung (12) äquivalent zu der autonomen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \alpha(t) = \beta(\alpha) \quad , \tag{24}$$

wobei $\tilde{\alpha}$ wieder zu α umbenannt wurde.

4.2 Verhalten in einer Umgebung eines Fixpunktes

Um das Verhalten der Kopplungskonstanten $\alpha(t)$ in der Nähe eines Fixpunktes zu untersuchen wird die Stabilitätsmatrix wie folgt eingeführt.

Definition 4.3. Sei α^* ein Fixpunkt der β-Funktion im $\mathbb{R}^N$ und sei β in α^* zweimal stetig differenzierbar. Die Matrix

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} := \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j}\right)_{1 \leq i,j \leq N} \tag{25}$$

heißt *Stabilitätsmatrix der β-Funktion* [9]. Außgewertet am Punkt α^* ist die Schreibweise $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_{\alpha^*}$ oder kurz $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_{*}$.
Ein Fixpunkt α^* heißt *hyperbolisch*, wenn alle Eigenwerte von $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_{*}$ einen von Null verschiedenen Realteil besitzen [15].

Der Zusammenhang zu der Stabilität des Fixpunktes ist folgendermaßen zu erkennen.

In der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes α^* kann Gleichung (24) durch ihre Linearisierung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) \simeq \left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_* \left(\alpha(t) - \alpha^*\right) \tag{26}$$

beschrieben werden. Mit den Eigenvektoren[6] $\{e_i\}$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}$ und

$$\alpha(t) - \alpha^* =: \sum_{i=1}^{N} K_i(t) e_i \tag{27}$$

ergibt sich aus (26) für die Koeffizienten $\{K_i\}$ das entkoppelte DGL-System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} K_i(t) e_i + \alpha^*\right) = \left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_* \sum_{i=1}^{N} K_i(t) e_i \tag{28}$$

$$\overset{\text{Koeffizientenvergleich}}{\Rightarrow} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_i(t) = K_i(t)\lambda_i \tag{29}$$

mit der Lösung

$$K_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t} K_i(0) \tag{30}$$

für $K_i(0) \in \mathbb{R}$ klein. Die Lösung für $\alpha(t)$ lässt sich dann schreiben als

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\lambda_i t} K_i(0) e_i + \alpha^* \quad . \tag{31}$$

Dieses Ergebnis ist unter anderem in [13], [9] und [11] zu sehen. In der Fixpunktumgebung werden nun drei lineare Unterräume unterschieden [15].

1. Die *stabile Mannigfaltigkeit* M_s besteht aus allen Punkten im Phasenraum, die in den Fixpunkt hinein laufen.

2. Die *instabile Mannigfaltigkeit* besteht aus allen Punkten im Phasenraum, die aus dem Fixpunkt heraus laufen.

3. Die *Zentrumsmannigfaltigkeit* besteht aus den restlichen Punkten in der Fixpunktumgebung.

Definition 4.4. Die Menge der in den Fixpunkt hineinlaufenden Kurven heißt *kritische (UV-)Hyperfläche* M_c (critical manifold)[7].

[6]Die Eigenvektoren müssen gegebenenfalls zu einer Basis ergänzt werden.

[7]Bemerkung: M_s, die instabile Mannigfaltigkeit und die Zentrumsmannigfaltigkeit sind nur in einer Umgebung des Fixpunktes definiert, M_c im gesamten Phasenraum. Außerdem werden jedem Fixpunkt eigene Mannigfaltigkeiten und eine eigene kritische Hyperfläche zugeordnet.

Aus Gleichung (31) wird dann klar, dass M_s der durch die Eigenvektoren mit negativem Eigenwert aufgespannte Untervektorraum ist. Ein Eigenvektor mit positivem Eigenwert wird oft auch als IR-attraktiv, mit einem negativen Eigenwert als IR-repulsiv bezeichnet [13]. Da in dieser Arbeit jedoch das UV-Verhalten von Interesse ist, werden die folgenden Bezeichnungen verwendet.

1. Ein Fixpunkt heißt *attraktiver (UV-)Fixpunkt*, wenn $\dim(M_c) = N$.

2. Ein Fixpunkt heißt *repulsiver (UV-)Fixpunkt*, wenn $\dim(M_c) = 0$.

3. Falls ein Fixpunkt weder attraktiv noch repulsiv ist, d.h. wenn es sowohl Trajektorien gibt die in ihn hinein-, als auch welche die hinauslaufen, wird er *Sattelpunkt* genannt.

4.3 Sonderfall: nicht hyperbolische Fixpunkte

Bei allgemeinen Betrachtungen (vgl. [13]) wird der nicht hyperbolische Fall $\lambda_i = 0$ oft als unwichtiger Sonderfall nicht weiter betrachtet. Bei der Untersuchung einer konkreten β-Funktion kommt dieser Sonderfall aber auf natürliche Weise schnell zu stande.

Eine dimensionslose Kopplungskonstante $\alpha_1 := \mathcal{N} g_1^2$ muss, damit die physikalische Kopplungskonstante g_1 reell ist, positiv sein. Es muss demnach $\beta_1(\alpha) \geq 0$ auf der gesamten α_1-Achse gelten. Falls es nun einen Fixpunkt $\alpha^* = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^{\mathrm{T}}$ und es einen Eigenvektor $e_k \in M_s$ gibt[8], dann folgt aus (29)

$$\beta(K_k(t) e_k) \cdot e_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_k(t) = K_k(t) \lambda_k \tag{32}$$

???

Sein nun also α^* ein Fixpunkt, $\{e_i\}$ die Basis aus Eigenvektoren der Stabilitätsmatrix und der Eigenwert $\lambda_k = 0$, alle anderen $\lambda_i \neq 0$ für $i \neq k$. In zweiter Ordnung gilt

$$\beta_i(\alpha) \simeq \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial \beta_i(\alpha)}{\partial \alpha_m} \left(\alpha_m - \alpha_m^*\right) + \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{N} \left(\alpha_m - \alpha_m^*\right) \frac{\partial^2 \beta_i(\alpha)}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} \left(\alpha_n - \alpha_n^*\right) \quad , \tag{33}$$

sodass für die Koeffizienten $\{K_i\}$ in der $\{e_i\}$-Basis folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_i(t) = \lambda_i K_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left(e_j \cdot \nabla \lambda_i\right) K_i(t) K_j(t) \quad . \tag{34}$$

[8] Dabei soll M_s nicht nur aus der α_1-Achse bestehen. Da M_s ein linearer Unterraum ist, gibt es zumindest eine Linearkombination $\left(\sum_{i=1}^{N} c_i e_i\right) \in M_s$, die folgende Argumentation kann dann analog geführt werden.

Für alle $\lambda_i \neq 0$ reicht es, die Gleichungen in Ordnung $\mathcal{O}(K_i)$, also (29) zu lösen, für $\lambda_k = 0$ verschwindet jedoch die erste Ordnung, sodass sich als DGL

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left(e_j \cdot \nabla \lambda_k\right) K_k(t) K_j(t) \quad . \tag{35}$$

ergibt. Auf M_s sind $K_i(t) \equiv 0$ für alle i mit $\lambda_i > 0$, sodass die DGL weiter vereinfacht werden kann,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_k(t) \overset{t\to\infty}{\simeq} \frac{1}{2} \left(e_k \cdot \nabla \lambda_k\right) K_k(t)^2 \quad . \tag{36}$$

Die Lösung ist

$$K_k(t) = \frac{1}{K_k(0)^{-1} - \frac{1}{2}\left(e_k \cdot \nabla \lambda_k\right) t} \quad , \tag{37}$$

wird e_k so gewählt, dass $K_k(t) \geq 0$, dann ergibt sich die Bedingung

$$e_k \cdot \nabla \lambda_k < 0 \quad , \tag{38}$$

damit $K_k(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ ohne einen Pol zu passieren, der die Reihenentwicklung der β-Funktion unzulässig machen würde. Falls mehr als ein Eigenwert gleich Null ist, ergibt sich in (35) ein System gekoppelter DGLs.

4.4 Experimentelle Daten und kritische Hyperfläche

Während die β-Funktion als DGL-System aus dem erzeugenden Funktional und somit letztlich aus der postulierten Lagrangedichte hervorgeht, ist die Bestimmung der Trajektorie [9], die den Kopplungskonstanten „unserer Welt" entspricht eine bisher rein experimentelle Aufgabe.

Um das UV-Verhalten einer β-Funktion mit den bisher gemessenen Werten für die Kopplungskonstanten im SM vergleichen zu können, ist es notwendig die kritische Hyperfläche eines Fixpunktes auch in einem Bereich zu kennen, der zu groß für eine Taylorentwicklung geringer Ordnung ist. Das auffinden der kritischen Hyperfläche ist insbesondere für höherdimensionale Probleme analytisch kaum möglich und daher eine numerische Aufgabe. Für ein System aus zwei Kopplungskonstanten wird in 5 ein Verfahren vorgestellt. Stehen nun n Messwerte an der selben Renormierungsskala μ_0 zur Verfügung und gibt es einen Punkt $\alpha_0 \in M_\mathrm{c}$ der diese enthält, dann sind alle Kopplungskonstanten $\alpha(\mu)$ bis auf $(\dim(M_\mathrm{c}) - n)$ freie Parameter festgelegt[10] und laufen

[9] Genauer muss nur ein Punkt $\alpha(t_0)$ als Anfangswert des DGL-Systems bekannt sein.
[10] Für $n \geq \dim(M_\mathrm{c})$ also eindeutig.

in den Fixpunkt hinein. Existiert so ein $\alpha_0 \in M_c$ nicht, kommt der untersuchte Fixpunkt für ein asymptotic safety Szenario nicht in Frage.

4.5 Laufende Kopplungen im Standardmodell

Die Eichkopplungen der Starken, Schwachen und Elektromagnetischen Wechselwirkung [2]

4.5.1 QED

4.5.2 QCD

5 β-Funktion im $\mathbb{R}^2$

Durch die Erweiterung einer Eichgrupppe G mit Kopplungskonstante g (bzw. α) auf die kombinierte Eichgruppe $G_1 \times G_2$ mit den Kopplungskonstanten g_1 und g_2 (bzw. α_1 und α_2)

5.1 Stabilitätsbedingungen

Für ein System mit zwei Kopplungskonstanten vereinfacht sich die Untersuchung erheblich, da der Phasenraum der $\mathbb{R}^2$ ist und die Eigenwerte von $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ explizit als

$$\lambda_{+/-} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right)^2 - \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}} \tag{39}$$

angegeben werden können. In dem Fall, dass bei α^* ein Eigenwert verschwindet, ist $\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\Big|_* = \lambda_+|_*\lambda_-|_* = 0$ und

$$\lambda_+|_* = \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* \qquad \lambda_-|_* = 0 \qquad\qquad \text{für } \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* \geq 0 \tag{40}$$

$$\lambda_+|_* = 0 \qquad\qquad \lambda_-|_* = \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* \qquad \text{für } \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* \leq 0 \quad . \tag{41}$$

Außerdem

$$\frac{\partial\lambda_{+/-}}{\partial\alpha_i}\bigg|_* = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{\lambda_{-/+}}\frac{\partial\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_i}\right]_* \quad , \tag{42}$$

wobei $\lambda_{+/-}|_*$ der verschwindende Eigenwert ist.

5.2 Fixpunktextrapolation

Ein besonderer Vorteil einer Erweiterung $G \to G_1 \times G_2$ ist die Möglichkeit einen UV-Fixpunkt eindeutig extrapolieren zu können, da die kritische Hyperfläche die Dimension $\dim(\alpha^*) = 0$, $\dim(\text{Trajektorie}) = 1$ oder $\dim(\text{Phasenraum}) = 2$ hat. Im ersten Fall, $\dim M_c = 0$ besteht sie nur aus dem Fixpunkt selbst, dieser Fall ist also eher als eine mathematische, triviale Lösung zu betrachten, die keine physikalische Bedeutung im Sinne laufender Kopplungskonstanten hat. Im Fall $\dim M_c = 2$ besteht sie aus dem gesamten Phasenraum. Weil in diesem Fall jede Trajektorie in den Fixpunkt hineinläuft kann keine Vorhersage für die Größen der Kopplungskonstanten gemacht werden, dafür ist aber das UV-Verhalten von dem Startwert $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$ unabhängig. Der für die Extrapolation interessanteste Fall ist also $\dim M_\mathrm{c} = 1$, da die UV-Hyperfläche dann aus zwei Trajektorien $s^{+/-} : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ besteht[11] und deshalb eindeutige Wertepaare $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ vorhersagt. Wenn eine Kopplungskonstante (o.E.) $\alpha_1(t_0)$ bei einer Renormierungsskala t_0 bekannt ist, und unter der Annahme, dass der Fixpunkt für $t \to \infty$ erreicht wird, ist somit auch $\alpha_2(t_0)$ sowie das gesamte Verhalten beider Kopplungskonstanten bekannt.

Für die Extrapolation werden außerdem die folgende Beobachtungen ausgenutzt.

1. Eine Trajektorie, welche in einen Sattelpunkt hineinläuft, ist gleichzeitig eine Separatrix, d.h. sie Teilt den Phasenrau in Gebiete mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten für $t \to \infty$.

2. Ein Sattelpunkt und ein attraktiver Fixpunkt sind mit einer Trajektorie verbunden, ebenso ist ein Sattelpunkt mit einem repulsiven Fixpunkt mit einer Separatrix verbunden, sofern die Fixpunkte existieren und in der Nähe des Sattelpunktes liegen.

Da das gesuchte M_c folglich immer eine Separatrix ist, kann wie folgt verfahren werden. Zunächst werden zwei Gebiete L und R definiert, die zu qualitativ verschiedenen Trajektorien führen. Beispielsweise lassen sich oft Abschätzungen der Art finden: Wenn es ein t_1 gibt mit

$$\alpha_j(t_1) > \max\left\{ \alpha_j^{*i} \middle| \text{alle Fixpunkte } \alpha^{*i} \right\} \quad , \tag{43}$$

dann kann der gewünschte Fixpunkt nicht mehr für $t > t_1$ erreicht werden. Am Fixpunkt wird eine Orthonormalbasis $\{f_1, f_2\}$ gewählt[12] und der Phasenraum in Ebenen mit Abstand ϵ eingeteilt, die nullte Ebene geht dabei durch den Fixpunkt. Rekursiv werden dann

$$s_n^{L/R} = s_{n-1}^{L/R} + \epsilon f_1 + d^{L/R} \delta f_2 \tag{44}$$

definiert. Für festes δ wird $d^{L/R}$ so eingestelle, dass die Trajektorie mit Anfangswert s_n^L in den Bereich L hineinläuft, analog für R. Mit $s_0^L := \alpha - {}^{\delta}/_{2} f_2$ und $s_0^R := \alpha + {}^{\delta}/_{2} f_2$ ergibt sich so ein Schlauch $\left(s_n^L, s_n^R\right)_{n=0,1,\ldots}$ der Breite δ, der die Separatrix beinhaltet.

[11] Jeweils eine in, eine entgegen der Richtung des attraktiven Eigenvektors.

[12] Der Einfachheit halber kann die Basis aus Eigenvektoren oder die $\alpha_{1,2}$-Achsen gewählt werden, sofern dies zu keinen numerischen Schwierigkeiten führt.

6 UV-Fixpunkte der $SU_{\mathbf{QCD}} \times SU_{\mathbf{dQCD}}$

Die β-Funktion für eine $G_1 \times G_2$ Eichgruppe wurde in [10] berechnet und hat die Form

$$\beta(g) = \begin{pmatrix} X_1^g g_1^3 + Y_1^g g_1^5 + Z_1^g g_1^3 g_2^2 \\ X_2^g g_2^3 + Y_2^g g_2^5 + Z_2^g g_2^3 g_1^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{45}$$

Die Koeffizienten sind dabei nur von der Darstellung der Eichgruppe und den Teilchenzahlen abhängig.

Zeichenerklärung

- „o.E." für ohne Einschränkung.
- „$\simeq$" für asymptotisch gleich.
  Beispiel 6.1.
  $$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{46}$$
  Für eine Linearisierung von f in der Umgebung von x_0. Für $|(x - x_0)| \to 0$ gilt $\left| f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right) \right| \to 0$ hinreichend schnell.
- „$\propto$" für proportional.
- „$[]$" für die Massendimension in natürlichen Einheiten.
- „$\left\langle \phi \right\rangle$" für den Vakuumerwartungswert eines Feldes ϕ unter einer angegebenen Wirkung.
- „dim" für die Dimension eines Vektorraums oder einer Mannigfaltigkeit.
- „supp" für den Träger einer Funktion.
- „diag$(a_1, a_2, \ldots)$" für eine Diagonalmatrix mit Einträgen $a_1, a_2, \ldots$
- „$\mathbf{T}$" für das zeitgeordnete Produkt.
- „e" für die Exponentialfunktion, insb. auch Matrix- und Operatorexponentiale.
- „$\mathscr{D}\phi$" für das Pfadintegralmaß von Feldern ϕ.
- Ein n-Multiindex α ist ein $\mathbb{N}_0^n$ Vektor. Die Summe $\sum_\alpha$ läuft alle möglichen Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Der Betrag eines Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, die Fakultät $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.

Literatur

[1] Dark matter. *K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014) and 2015 update.*

[2] Quantum chomodynamics. *K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014) and 2015 update.*

[3] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.*, B716:1–29, 2012.

[4] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.

[5] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. 2015.

[6] Y. Bai and P. Schwaller. Scale of dark qcd. *Phys. Rev. D*, 89:063522, Mar 2014.

[7] R. K. Ellis, W. J. Stirling, and B. R. Webber. *QCD and Collider Physics*. Cambridge University Press, 1996. Cambridge Books Online.

[8] S.W. Hawking and W. Israel. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey*. Cambridge University Press, 1979.

[9] S.W. Hawking and W. Israel. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey*. Cambridge University Press, 1979.

[10] S.W. Hawking and W. Israel. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey*. Cambridge University Press, 1979.

[11] D. R. T. Jones. Two-loop β function for a $G_1 \times G_2$ gauge theory. *Phys. Rev. D*, 25:581–582, Jan 1982.

[12] D. F. Litim and F. Sannino. Asymptotic safety guaranteed. *arxive*, Jun 2014.

[13] M.D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model. Cambridge University Press, 2014.

[14] S. Weinberg. Critical phenomena for field theorists. 1976.

[15] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 2. Cambridge University Press, 1996. Cambridge Books Online.

[16] E. Zeidler. Springer-handbuch der mathematik iv. 2013.

[17] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1993.