

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Quantenfeldtheorie und Standardmodell</b>	<b>2</b>
2.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	2
2.2	Effektive Quantenwirkung und Gell-Mann-Low Gleichung . . . . .	3
<b>3</b>	<b>QCD <math>\times</math> dark QCD</b>	<b>5</b>
3.1	Die Standardmodell QCD . . . . .	5
3.2	Dark QCD . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Untersuchung einer <math>\beta</math>-Funktion</b>	<b>9</b>
4.1	Vereinfachung des mathematischen Problems . . . . .	10
4.2	Verhalten in einer Umgebung eines Fixpunktes . . . . .	11
4.3	Laufende Kopplungen im Standardmodell . . . . .	14
4.3.1	QED . . . . .	14
4.3.2	QCD . . . . .	14
<b>5</b>	<b><math>\beta</math>-Funktion im <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>15</b>
5.1	Stabilitätsbedingungen . . . . .	15
5.1.1	hyperbolischer Fixpunkt . . . . .	16
5.1.2	nicht-hyperbolischer Fixpunkt . . . . .	17
5.2	Fixpunktextrapolation . . . . .	18
<b>6</b>	<b>UV-Fixpunkte der <math>SU_{\text{QCD}} \times SU_{\text{dQCD}}</math></b>	<b>20</b>
6.1	UV-Verhalten bei $\alpha^{*4}$ . . . . .	22
6.1.1	attraktiver Fixpunkt . . . . .	22
6.1.2	Sattelpunkt . . . . .	23
6.2	UV-Verhalten bei $\alpha^{*3}$ . . . . .	27
6.3	UV-Verhalten bei $\alpha^{*2}$ . . . . .	29
	<b>Literatur</b>	<b>30</b>

# 1 QCD × dark QCD

Das Verhalten der QCD-Kopplungskonstanten ist im Standardmodell allein nicht im Stande ein asymptotic safety Szenario zu entwickeln, wie in Abschnitt ?? gezeigt wird. Durch die Erweiterung der QCD um eine weitere Eichgruppe, die dark QCD, ergeben sich qualitativ völlig neue Möglichkeiten im Hochenergieverhalten der Kopplungskonstanten.

## 1.1 Die Standardmodell QCD

Im Standardmodell wird die QCD durch die Symmetriegruppe  $SU(N_c)$  dargestellt, unter der sich die Quarks in der *fundamentalen Darstellung* und die Gluonen in der *adjungierten Darstellung* transformieren. Im SM gibt es  $N_{\text{Flavour}} = 6$  verschiedene Quarkflavour und  $N_{\text{Colour}} = 3$  Colours, da die QCD Flavour-Blind ist, d.h. da die Wechselwirkung unabhängig von der Flavour-Quantenzahl ist, ist die Erweiterung auf  $N_c$  Colour und  $n_f$  Flavour jedoch trivial. Die Lagrangedichte kann als

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_i^f \left( i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ij} - g_1 \gamma^\mu t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A - m_f \delta_{ij} \right) \psi_j^f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \quad (1)$$

geschrieben werden [1]. Dabei stellt  $\psi_b^f$  ein Quarkfeld mit Colour  $i$  und Flavour  $f \in \{1, 2, \dots, n_f\}$  und mit der Masse  $m_f$  dar,  $g_1$  ist die Kopplungskonstante der QCD. Die Indizes  $i, j \in \{1, 2, \dots, N_c\}$  gehören zur fundamentalen Darstellung, während  $A \in \{1, 2, \dots, N_c^2 - 1\}$  zur adjungierten Darstellung gehört. Man nennt  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_c})^T$  ein Colour-Multiplett<sup>1</sup> unter der fundamentalen Darstellung, wenn es unter Anwendung der  $SU(N_c)$  gemäß

$$\psi(x) \longrightarrow \underbrace{U(x)}_{\in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x) U(x)^\dagger \quad (2)$$

transformiert. Die Gluonfelder  $\mathcal{A}_\mu^A$  mit Erzeugern  $t^A \in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}$  transformieren dagegen in der adjungierten Darstellung [17]

$$t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A(x) \longrightarrow U(x) t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A(x) U(x)^\dagger - i(\partial_\mu U(x)) U(x)^\dagger \quad . \quad (3)$$

Die Dynamik und Propagation der Gluonen wird dabei durch den Feldstärketensor vermittelt,

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g f^{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C \quad , \quad [t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C \quad . \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Der Flavour-Index  $f$  wird ab jetzt weggelassen.

Versucht man die QCD im Feynmanformalismus zu quantisieren, werden außerdem Eichfixierung und Faddeev-Popov-de-Witt Ghosts benötigt [17], diese können jedoch nach der Modellbildung hinzugefügt werden, sodass sie hier nicht auftauchen.

## 1.2 Dark QCD

In [2] wird die dQCD eingeführt, um die DM Massendichte  $\Omega_{\text{DM}}$  im Universum zu erklären. Dazu wird das Niederenergieverhalten der neu eingeführten Kopplungskonstanten  $g_2$  auf die Confinement Scale  $\Lambda_{\text{dQCD}}$  untersucht, die analog zur QCD Confinement Scale  $\Lambda_{\text{QCD}}$  die Größenordnung der Baryonmasse bestimmt. Die Theorie ist aber, ebenfalls analog zur QCD, auch bis zu beliebig hohen Energieskalen anwendbar und soll hier auf ihr Hochenergieverhalten untersucht werden.

Die Lagrangedichte der dQCD kann analog zu (1) als

$$\mathcal{L}_{\text{dQCD}} = \bar{\xi}_r^f \left( i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{rs} - g_2 \gamma^\mu \tilde{t}_{ts}^M \tilde{\mathcal{A}}_\mu^M - \tilde{m}_f \delta_{rs} \right) \xi_s^f - \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}^M \tilde{F}^{M\mu\nu} \quad (5)$$

definiert werden. Die Fermionen  $\xi^f$  der dQCD sollen in der fundamentalen Darstellung der  $SU(N_d)$  sein, entsprechend laufen die Indizes  $r, s \in \{1, 2, \dots, N_d\}$  und  $f \in \{1, 2, \dots, n_{f_d}\}$ , während die Felder der Eichbosonen  $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^M$  wieder in der adjungierten Darstellung transformieren,  $M \in \{1, 2, \dots, N_d^2 - 1\}$ , der Feldstärketensor  $\tilde{F}_{\mu\nu}^M$  wird wie in (4) definiert. Wie sich in Abschnitt 4 zeigen wird, begünstigt eine hohe Teilchenzahl die auftretenden Fixpunkte dahingehend, dass sie betragsmäßig kleiner werden und somit unter perturbative Kontrolle kommen, ohne ihr UV-attraktives Verhalten zu verlieren, wie es bei einer Theorie mit ausschließlich Fermionen der Fall wäre. Skalare  $\phi^f$  und  $\chi^f$  unter der QCD bzw. dQCD können über

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^S = \left( \left[ i\delta_{ji} \partial_\mu - g_1 t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A - \frac{1}{2} (m_f^S)^2 \delta_{ji} \right] \phi_i^f \right)^\dagger \left( \left[ i\delta_{ji} \partial^\mu - g_1 t_{ji}^A \mathcal{A}^{A\mu} - \frac{1}{2} (m_f^S)^2 \delta_{ji} \right] \phi_i^f \right) \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{\text{dQCD}}^S = \left( \left[ i\delta_{sr} \partial_\mu - g_2 \tilde{t}_{sr}^M \tilde{\mathcal{A}}_\mu^M - \frac{1}{2} (\tilde{m}_f^S)^2 \delta_{sr} \right] \chi_r^f \right)^\dagger \left( \left[ i\delta_{sr} \partial^\mu - g_2 \tilde{t}_{sr}^M \tilde{\mathcal{A}}^{M\mu} - \frac{1}{2} (\tilde{m}_f^S)^2 \delta_{sr} \right] \chi_r^f \right) \quad (7)$$

eingeführt werden (vgl. [11]). Der Flavour-Index  $f$  läuft wieder über alle  $n_{s_c}$  QCD Skalare bzw. alle  $n_{s_d}$  dQCD Skalare. Die Colour-Indizes  $i, j$  und  $r, s$  über alle  $N_c$  Colours bzw.  $N_d$  dark Colours.

Bis zu diesem Punkt sind die QCD und dQCD voneinander unabhängig, in dem Sinne, dass es keine zusammenhängenden Feynmangraphen gibt, in denen Teilchen des QCD- und dQCD-Sektors gleichzeitig auftreten. Um dies zu ermöglichen wird ein joint-Sektor eingeführt, Teilchen die unter beiden Symmetriegruppen geladen sind und somit an  $\mathcal{A}_\mu^C$

und  $\widetilde{\mathcal{A}}_\mu^C$  mit der entsprechenden Kopplungskonstanten koppeln [2]. Unter der Annahme, dass sie ebenfalls in den fundamentalen Darstellungen beider Symmetriegruppen transformieren, können die entsprechenden Teile der Lagrangedichte als

$$\mathcal{L}_{\text{joint}} = \bar{\zeta}_{ir}^f \left( i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ij} \delta_{rs} - g_1 \gamma^\mu t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A \delta_{rs} - g_2 \gamma^\mu \tilde{t}_{rs}^M \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^M \delta_{ij} - m_f^{\text{joint}} \delta_{ij} \delta_{rs} \right) \zeta_{js}^f \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_{\text{joint}}^S = \left( \left[ i\delta_{ji} \delta_{sr} \partial_\mu - g_1 t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A \delta_{sr} - g_2 \tilde{t}_{sr}^M \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^M \delta_{ji} - \frac{1}{2} \left( m_f^{\text{S,joint}} \right)^2 \delta_{ji} \delta_{sr} \right] \eta_{ir}^f \right)^\dagger \quad (9)$$

$$\left( \left[ i\delta_{ji} \delta_{sr} \partial_\mu - g_1 t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A \delta_{sr} - g_2 \tilde{t}_{sr}^M \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^M \delta_{ji} - \frac{1}{2} \left( m_f^{\text{S,joint}} \right)^2 \delta_{ji} \delta_{sr} \right] \eta_{ir}^f \right) \quad (10)$$

geschrieben werden. Dabei laufen die Indizes  $i, j \in \{1, 2, \dots, N_c\}$ ,  $r, s \in \{1, 2, \dots, N_d\}$  und  $f \in \{1, 2, \dots, n_{f_c}\}$  für die Fermionen  $\zeta$  bzw.  $f \in \{1, 2, \dots, n_{s_c}\}$  für Skalare  $\eta$ .

In [17] zeigt Weinberg, dass durch die Reskalierung zu einer Energieskala  $\mu$  alle Massen  $m$  gemäß  $m/\mu$  skalieren und im Grenzwert hoher Energien gegen Null gehen. Entsprechend ist es bei der Untersuchung von UV-Fixpunkten zulässig, alle Massen gleich Null zu setzen.

Die bisher beschriebenen Lagrangedichten beinhalten ausschließlich Eichwechselwirkungen, es gibt jedoch weitere Arten von Wechselwirkungen bei denen keine Eichfelder beteiligt sind, 3-Skalar-Kopplungen, 4-Skalar-Kopplungen und Yukawa-Kopplungen. Im Folgenden wird kurz begründet, warum diese drei Arten der Kopplung im weiteren Verlauf der Arbeit nicht betrachtet werden.

**Yukawa-Kopplung:** Es gibt zwei Möglichkeiten eine lorentzinvariante Struktur der Yukawa-Terme zu erreichen. Dazu ist es hilfreich von Dirac-Fermionen  $\psi$  zu Weyl-Fermionen  $\psi_L$  und  $\psi_R$  überzugehen. Im Kern lassen sich die zwei Terme

$$\psi_R^\dagger \psi_L + \text{h.c.} \quad \text{und} \quad \psi_{L/R}^T \epsilon \psi_{L/R} + \text{h.c.} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

hinschreiben [14], dabei können auch einzelne  $\psi_{L/R}$  durch  $\xi_{L/R}$  oder  $\zeta_{L/R}$  ersetzt werden. Diese Terme sind von Dirac- bzw. Majorana-Massen bekannt. Durch das Hinzufügen eines skalaren Teilchens bleibt die Lorentzinvarianz erhalten, es ist jedoch möglich auch bei der Majorana-artigen Kopplung  $\psi_{L/R}^T \epsilon \psi_{L/R}$  Eichinvarianz unter allgemeinen  $SU(N)$  und  $U(N)$  Gruppen zu erreichen. Aus der Eichinvarianz ergeben sich dabei Bedingungen an die Yukawa-Kopplungen [13][10]. Exemplarisch wird der Yukawa-Term

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = Y^{ir,js,kt} \zeta_{ir} \underline{\underline{\zeta_{js}}} \underline{\underline{\eta_{kt}}} \quad (12)$$

untersucht. Der linke Index steht dabei jeweils für die  $SU(N_c)$ , der rechte für die  $SU(N_d)$ . Der ein- bzw. zweifache Unterstrich hilft lediglich die Terme im Endergebnis zu identifizieren, sodass dieses leicht an andere Yukawa-Terme angepasst

werden kann. Außerdem wurde die Lorentzstruktur nicht mehr geschrieben. Die Felder transformieren unter der kombinierten infinitesimalen Eichgruppe gemäß

$$\zeta_{ir} \longrightarrow (\mathbb{1}_{il} + i\epsilon^A t_{il}^A)(\mathbb{1}_{ru} + i\delta^M \tilde{t}_{ru}^M) \zeta_{lu} \quad , \quad \eta_{ir} \text{ analog} \quad , \quad (13)$$

daraus folgt für die Invarianz von (12) in Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^A)$  bzw.  $\mathcal{O}(\delta^M)$

$$Y^{lr,js,kt}(\mathbb{i}t_{li}^A) + Y^{ir,ms,kt}(\mathbb{i}t_{mj}^A) + Y^{ir,js,nt}(\mathbb{i}t_{nk}^A) \stackrel{!}{=} 0 \quad (14)$$

$$Y^{iu,js,kt}(\mathbb{i}\tilde{t}_{ur}^M) + Y^{ir,jv,kt}(\mathbb{i}\tilde{t}_{vs}^M) + Y^{ir,js,kw}(\mathbb{i}\tilde{t}_{wt}^M) \stackrel{!}{=} 0 \quad . \quad (15)$$

Eine Berechnung über Young-Tableaux [5] zeigt, dass nur zwei Arten von Yukawa-Kopplungen mit einer Majorana-artigen Lorentzstruktur invariant sein können, Kopplungen innerhalb eines Sektors,

$$Y^{i,j,k} \psi_i \psi_j \phi_k + \tilde{Y}^{r,s,t} \xi_r \xi_s \chi_t + Y^{ir,js,kt} \zeta_{ir} \zeta_{js} \eta_{kt} + \text{h.c.} \quad , \quad (16)$$

und Kopplungen die je ein QCD- dQCD- und joint-Teilchen beinhalten,

$$Y^{i,r,js} \psi_i \xi_r \eta_{js}^* + \text{h.c.} \quad (17)$$

Mit dem Ansatz  $Y^{i,j,k}$  antisymmetrisch in  $i \leftrightarrow j$  und symmetrisch in  $i \leftrightarrow k$  in (16) wird (14) zu

$$t_{ii}^A + t_{jj}^A + t_{kk}^A = 0 \quad \text{mit} \quad i \neq j \neq k \quad , \quad (18)$$

was genau für eine  $SU(3)$  als  $\text{Sp} t^A = 0$  gültig ist. Da in dieser Arbeit das Hauptinteresse im Verhalten der Fixpunkte in Abhängigkeit von der Eichgruppe liegt, ist es nicht sinnvoll Yukawa-Terme zu berücksichtigen, die nur in drei von beliebig vielen  $SU(N_c) \times SU(N_d)$  Eichgruppen erlaubt sind. Sinnvoller wäre es hier, den Fall  $SU(3) \times SU(3)$  gesondert auf Yukawa-Beiträge zur  $\beta$ -Funktion zu untersuchen. Außerdem wird sich zeigen, dass es kein qualitativ neues UV-Verhalten gibt, dass nicht allein von Skalaren oder Fermionen hervorgerufen werden kann, sodass in Abschnitt 4 immer nur QCD-Fermionen (SM Quarks) mit dQCD/joint-Fermionen oder dQCD/joint-Skalaren betrachtet werden, d.h. entweder  $n_{s_d} = n_{s_j} = 0$  oder  $n_{f_d} = n_{f_j} = 0$ . Für den Term (17) folgt aus (14) und (15) für die Colour-Struktur der Yukawa-Kopplung

$$Y^{i,r,ls} t_{lj}^A - t_{il}^A Y^{l,r,js} = 0 \quad , \quad Y^{i,r,ju} \tilde{t}_{us}^M - \tilde{t}_{ru}^M Y^{i,u,js} = 0 \quad (19)$$

und mit dem Lemma von Schur

$$Y^{i,r,js} = Y \delta^{ij} \delta^{rs} \quad (20)$$

mit der Kopplungskonstanten  $Y$  [5]. Das entsprechende Feynmandiagramm ist in

Abbildung 1 zu sehen. Berücksichtigt man gleichzeitig die Flavour-Quantenzahl,

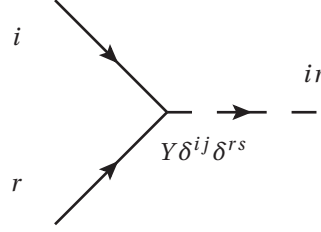


Abbildung 1: Möglicher Yukawa-Vertex in  $SU(N_c) \times SU(N_d)$ . Die Pfeile zeigen dabei die Ladungserhaltung an.

kann es insgesamt  $(n_{f_c} n_{f_d} n_{s_j})$  verschiedene Yukawa-Kopplungen geben. Eine allgemeine Untersuchung ist also auch hier schwierig, da durch Änderungen des Materieinhaltes auch die Anzahl der Yukawa-Kopplungskonstanten geändert wird. Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen ist die Einführung von Flavoursymmetrien, sodass für alle Yukawa-Terme nur eine einzige Kopplungskonstante  $Y$  verbleibt. In Abschnitt 4 entfallen solche Yukawa-Wechselwirkungen jedoch wieder, da  $n_{s_j} = 0$  oder  $n_{f_d} = 0$  gewählt werden kann, ohne qualitativ unterschiedliche UV-Verhalten zu verlieren.

Yukawa-Terme mit Dirac-artiger Lorentzstruktur,

$$Y^{i,r,j,s} \psi_i^\dagger \xi_r \eta_{js} + \text{ähnliche Terme} \quad , \quad (21)$$

sind in den gewählten Darstellungen nicht Eichinvariant. Hier besteht die Möglichkeit, den dQCD-Sektor konjugiert fundamental transformieren zu lassen, in der infinitesimalen Transformation

$$\xi_r \longrightarrow \left( \mathbb{1}_{ru} - i\delta^M (\tilde{t}_{ru}^M)^* \right) \xi_u \quad , \quad \chi_r \text{ analog} \quad , \quad (22)$$

wodurch wieder Yukawa-Kopplungen mit der Colour-Struktur von (20) erlaubt sind. Diese Möglichkeit würde für die Eichkopplungen jedoch keinen Unterschied machen und zu den selben  $\beta$ -Funktionen führen, sodass hier keine neuen Phänomene im Vergleich zu (17) zu erwarten sind.

**3-Skalar-Kopplung:** Da die Fermionen und Skalare des QCD-, dQCD bzw. joint-Sektors jeweils dieselben Transformationseigenschaften besitzen, können die Ergebnisse (18) und (20) für die Eichstruktur der 3-Skalar-Kopplungen übernommen werden. Es folgt, dass die einzige Möglichkeit einer 3-Skalar-Kopplung mit einer nicht veränderlichen Anzahl von Kopplungskonstanten  $\lambda$

$$\mathcal{L}_{3\text{-Skalar}} = \lambda \phi_i \chi_r \eta_{ir}^* + \text{h.c.} \quad (23)$$

ist. In [8] schlägt Jones vor, 3-Skalar-Kopplungen durch diskrete Symmetrien zu verbieten, Luo, Wang und Xiao zeigen in [10], dass 3-Skalar-Terme durch 4-Skalar-Terme mit einem unphysikalischen Dummy-Feld beschrieben werden können.

**4-Skalar-Kopplung:** Korrekturen durch 4-Skalar-Kopplungen tragen erst ab 3-Schleifen Ordnung zur  $\beta$ -Funktion der Eichkopplungen bei [4], da in dieser Arbeit jedoch nur 2-Schleifen  $\beta$ -Funktionen betrachtet werden, müssen sie nicht berücksichtigt werden.

## 2 Untersuchung einer $\beta$ -Funktion

An Gleichung ?? erkennt man, dass die  $\beta$ -Funktion einer QFT eine Seite eines Systems  $N$  gekoppelter, gewöhnlicher, nichtlinearer Differentialgleichungen der Form

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_k(\mu) = P_k^{M_L}(g_1, \dots, g_N) =: \beta_k(g_1, \dots, g_N), \quad k = 1, \dots, N \quad (24)$$

ist. Dabei stellt jedes  $P_k$  ein Polynom maximal  $M_L$ -ten Grades in den Kopplungskonstanten dar. Der Grad des Polynoms hängt nur von der Ordnung der Störungstheorie ab, im Bild von Feynmangraphen entspricht dies der maximalen Anzahl  $L$  von Quantenschleifen, die in der Berechnung berücksichtigt werden. Hier ist es naheliegend, das DGL-System als Problem im  $\mathbb{R}^N$  zu betrachten. Mit  $g := (g_1, \dots, g_N)^T$  und  $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$  lässt sich (24) auch als

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = \beta(g) \quad (25)$$

schreiben. Dann heißt  $\mathbb{R}^N$  auch der Phasenraum der  $\beta$ -Funktion.

**Definition 2.1.** Eine *Trajektorie im Phasenraum* ist eine Funktion  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$ , die die Gleichung (25) löst.

Ein *Fixpunkt der  $\beta$ -Funktion* ist ein Punkt  $g^* \in \mathbb{R}^N$ , für den  $\beta(g^*) = 0$  gilt.

Eine physikalisch sinnvolle QFT sollte für beliebige Energieskalen, insbesondere für beliebig hohe Energieskalen, Vorhersagen machen können, sofern sie nicht von Beginn an als effektive Theorie angesetzt ist. Für die Kopplungskonstanten heißt das, dass für  $\mu \rightarrow \infty$  die Grenzwerte  $g(\mu) \rightarrow g^*$  und  $\beta(g(\mu)) \rightarrow 0$  erreicht werden müssen um ein stabiles Hochenergieverhalten zu gewährleisten. Demnach sind gerade die Fixpunkte der  $\beta$ -Funktion die möglichen Grenzwerte der Kopplungskonstanten.

Im Laufe der Untersuchung der  $\beta$ -Funktion haben sich die folgenden Bezeichnungen entwickelt.

**Gaußscher Fixpunkt:** Ist der Punkt  $g^* = 0$  ein Fixpunkt der  $\beta$ -Funktion, so spricht man von einem Gaußschen Fixpunkt.

**Banks-Zaks Fixpunkt:** Ein Fixpunkt  $g^* \neq 0$ , der physikalisch sinnvoll und perturbativ ist, heißt Banks-Zaks oder Caswell-Banks-Zaks Fixpunkt.

**Landau Pol:** Besitzt die Lösung des Problems (25) mit Anfangswert  $g(\mu_0) = g_0$  eine Polstelle  $\mu_{\text{Pol}} < \infty$ , sodass  $g(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \mu_{\text{Pol}}} \infty$ , dann spricht man von einem Landau-Pol.



## 2.1 Vereinfachung des mathematischen Problems

Die Berechnung einer Trajektorie als Lösung zum Anfangswertproblem (25) mit Anfangswert  $g(\mu_0) = g_0$  ist in der Regel analytisch nicht möglich. Durch einige einfache Schritte lässt sich das Problem jedoch zunächst in die einfacher zu handhabende Form eines autonomen DGL-Systems überführen und sich das Verhalten in der Nähe eines Fixpunktes bestimmen.

In [6] schlägt S. Weinberg die Einführung der dimensionslosen Kopplungskonstanten

$$\bar{g}_i(\mu) := \mu^{-d_i} g_i(\mu) \quad (26)$$

vor, wobei  $d_i$  die Massendimension der Kopplungskonstanten  $g_i$  ist. Bei der Untersuchung der QCD $\times$ dQCD- $\beta$ -Funktion wird klar, dass die Erweiterung

$$\alpha_i(\mu) := \mathcal{N} (\bar{g}_i(\mu))^n \quad (27)$$

den Grad  $M_L$  der  $\beta$ -Funktion verringern kann und somit das Problem weiter vereinfacht (vgl. [2], [9]). Dabei dient  $\mathcal{N}$  als Normierungskonstante, die insbesondere von dimensionslosen Größen wie Teilchenzahlen oder Größen der Symmetriegruppe abhängen kann.

**Beispiel 2.2.** Für ein eindimensionales Problem

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = X g(\mu)^3 + Y g(\mu)^5 \quad (28)$$

und für den einfachen Fall  $[g] = 0$  definiere

$$\alpha(\mu) := \mathcal{N} g(\mu)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{d\mu} g = \frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{d\alpha}{d\mu} \quad (29)$$

Man erhält so eine einfachere Differentialgleichung mit den Koeffizienten  $\tilde{X} = 2X\mathcal{N}^{-1}$  und  $\tilde{Y} = 2Y\mathcal{N}^{-2}$ ,

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) = \tilde{X} \alpha(\mu)^2 + \tilde{Y} \alpha(\mu)^3 \quad (30)$$

Naheliegender wird wieder  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$  und  $\beta(\alpha) = \beta(g \circ \alpha)$  geschrieben.

Der physikalisch sinnvolle Wertebereich für die Energieskala  $\mu$  ist  $(0, \infty)$ . Mit der Renormierungsgruppenzeit (RG-Zeit)  $t$ , definiert als

$$t(\mu) := \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \Leftrightarrow \mu(t) = e^t \quad (31)$$

gibt es eine Bijektion  $(0, \infty) \xrightarrow{t} (-\infty, \infty)$ , die es erlaubt die Kopplungskonstante als

$$\tilde{\alpha}(t) := \alpha(e^t) = \alpha(\mu) \quad (32)$$

zu schreiben. Der Parameter  $\Lambda$  ist beliebig und hat keine physikalische Bedeutung, er wird später lediglich die Extrapolation der Fixpunkte übersichtlicher gestalten. Es folgt

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) = \mu \underbrace{\frac{dt}{d\mu}}_{=\mu^{-1}} \frac{d}{dt} \tilde{\alpha}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{\alpha}(t) \quad . \quad (33)$$

Damit ist Gleichung (25) äquivalent zu dem autonomen Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \beta(\alpha) \quad , \quad (34)$$

wobei  $\tilde{\alpha}$  wieder zu  $\alpha$  umbenannt wurde.

## 2.2 Verhalten in einer Umgebung eines Fixpunktes

Um das Verhalten der Kopplungskonstanten  $\alpha(t)$  in der Nähe eines Fixpunktes zu untersuchen wird die Stabilitätsmatrix wie folgt eingeführt.

**Definition 2.3.** Sei  $\alpha^*$  ein Fixpunkt der  $\beta$ -Funktion im  $\mathbb{R}^N$  und sei  $\beta$  in  $\alpha^*$  zweimal stetig differenzierbar. Die Matrix

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} := \left( \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \quad (35)$$

heißt *Stabilitätsmatrix der  $\beta$ -Funktion* [6]. Außgewertet am Punkt  $\alpha^*$  ist die Schreibweise  $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha^*}$  oder kurz  $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_*$ .

Ein Fixpunkt  $\alpha^*$  heißt *hyperbolisch*, wenn alle Eigenwerte von  $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_*$  einen von Null verschiedenen Realteil besitzen [18].

Der Zusammenhang zu der Stabilität des Fixpunktes ist folgendermaßen zu erkennen.

In der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes  $\alpha^*$  kann Gleichung (34) durch ihre Linearisierung beschrieben werden. Da bei einem hyperbolischen Fixpunkt die Eigenvektoren  $\{e_i\}$  der Stabilitätsmatrix eine Basis sind, kann  $(\alpha(t) - \alpha^*)$  in Eigenvektoren zerlegt werden,

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) \simeq \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* (\alpha(t) - \alpha^*) = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* \sum_{i=1}^N K_i(t) e_i \quad . \quad (36)$$

Für die Koeffizienten  $\{K_i\}$  in der Basis der Eigenvektoren ergibt sich das entkoppelte DGL-System

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N K_i(t) e_i + \alpha^* \right) = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* \sum_{i=1}^N K_i(t) e_i \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} K_i(t) = K_i(t) \lambda_i \quad (38)$$

$$\Rightarrow K_i(t) = e^{\lambda_i t} K_i(0) \quad , \quad (39)$$

wobei  $\lambda_i$  der Eigenwert zu  $e_i$  ist. Damit kann das Verhalten der Kopplungskonstante durch

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} K_i(0) e_i + \alpha^* \quad (40)$$

beschrieben werden. Dieses Ergebnis ist unter anderem in [16], [6] und [9] zu sehen. Aus Gleichung (40) wird dann klar, dass der Untervektorraum, der durch die Eigenvektoren  $\{e_i\}$  mit  $\Re \lambda_i < 0$  die Punkte in der Fixpunktumgebung enthält, die für  $t \rightarrow \infty$  in den Fixpunkt hineinlaufen, entsprechend enthält der Untervektorraum mit Eigenvektoren zu  $\Re \lambda_i > 0$  alle Punkte, die den Fixpunkt für  $t \rightarrow -\infty$  erreichen beziehungsweise aus ihm herauslaufen. Alle weiteren Punkte der Fixpunktumgebung liegen auf Trajektorien, die den Fixpunkt nicht enthalten.

Ein Eigenvektor mit positivem Eigenwert wird oft auch als IR-attraktiv, mit einem negativen Eigenwert als IR-repulsiv bezeichnet [16]. Da in dieser Arbeit jedoch das UV-Verhalten von Interesse ist, werden die folgenden Bezeichnungen verwendet.

1. Ein Fixpunkt heißt *attraktiver (UV-)Fixpunkt*, wenn  $\Re \lambda_i < 0 \forall i$ .
2. Ein Fixpunkt heißt *repulsiver (UV-)Fixpunkt*, wenn  $\Re \lambda_i > 0 \forall i$ .
3. Falls ein Fixpunkt weder attraktiv noch repulsiv ist, d.h. wenn es sowohl Trajektorien gibt die in ihn hinein-, als auch welche die hinauslaufen, wird er *Sattelpunkt* genannt.
4. Die Menge der in den Fixpunkt hineinlaufenden Kurven heißt *kritische (UV-)Hyperfläche*  $M_c$  (critical manifold) des Fixpunktes.

Bei allgemeinen Betrachtungen (vgl. [16]) wird der nicht-hyperbolische Fall  $\lambda_i = 0$  oft als unwichtiger Sonderfall nicht weiter betrachtet. Bei der Untersuchung einer konkreten  $\beta$ -Funktion kommt dieser Sonderfall aber auf natürliche Weise zu Stande, sobald ein Fixpunkt einen Wert  $\alpha_i^* = 0$  besitzt. In diesem Fall ist es schwierig allgemeine Aussagen zu treffen, für ein 2-dimensionales Problem wie in Abschnitt 3 lässt sich jedoch ein alternatives Stabilitätskriterium finden.

Während die  $\beta$ -Funktion als DGL-System aus dem erzeugenden Funktional und somit letztlich aus der postulierten Lagrangedichte hervorgeht, ist die Bestimmung der Trajektorie<sup>2</sup>, die den Kopplungskonstanten „unserer Welt“ entspricht eine rein experimentelle Aufgabe.

---

<sup>2</sup>Genauer muss nur ein Punkt  $\alpha(t_0)$  als Anfangswert des DGL-Systems bekannt sein.

### 3 $\beta$ -Funktion im $\mathbb{R}^2$

Um 2-dimensionale autonome DGL-Systeme zu veranschaulichen eignet sich das Bild des Kopplungskonstanten-Flusses. Dabei „fließt“ ein Anfangswert  $\alpha(t_0)$  mit Geschwindigkeit und Richtung  $\dot{\alpha}(t) = \beta(\alpha(t))$  entlang einer Trajektorie durch den Phasenraum. Der Satz von Picard-Lindelöf stellt dabei sicher, dass sich zwei Trajektorien nicht schneiden. Ein Flussdiagramm wie in Abbildung 2 zeigt das Verhalten von  $\alpha(t)$  indem das Geschwindigkeitsfeld  $\beta$  durch Pfeile im Phasenraum dargestellt wird.

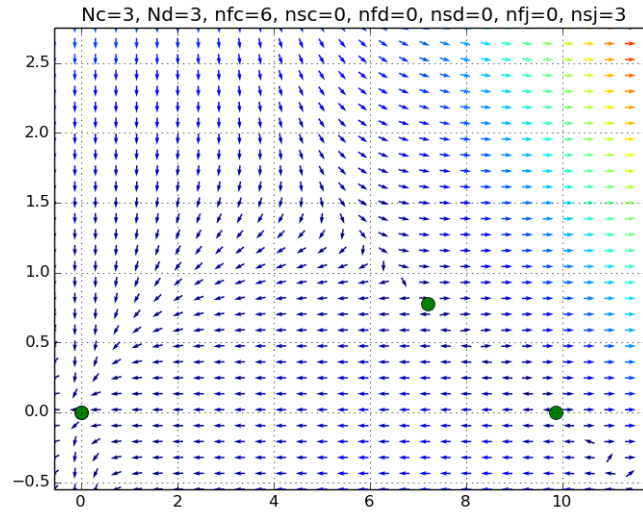


Abbildung 2: Ein Flussdiagramm für  $\beta(\alpha_1, \alpha_2)$ .

#### 3.1 Stabilitätsbedingungen

Für ein System mit zwei Kopplungskonstanten vereinfacht sich die Untersuchung erheblich, da der Phasenraum der  $\mathbb{R}^2$  ist und, wie in Abschnitt ?? gezeigt wurde, die Stabilitätsmatrix allgemein die Form

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \sum_{i=2, j=0} i \alpha_1^{i-1} \alpha_2^j X_{ij}^1 & \sum_{i=2, j=1} j \alpha_1^i \alpha_2^{j-1} X_{ij}^1 \\ \sum_{i=1, j=2} i \alpha_1^{i-1} \alpha_2^j X_{ij}^2 & \sum_{i=0, j=2} j \alpha_1^i \alpha_2^{j-1} X_{ij}^2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

annimmt. Die Eigenwerte von  $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$  können explizit als

$$\lambda_{+/-} = \frac{1}{2} \text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \pm \sqrt{\left( \frac{\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}}{2} \right)^2 - \text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}} \quad (42)$$

angegeben werden. Es wird nun kurz begründet, warum ein vollständig wechselwirkender Fixpunkt im allgemeinen als hyperbolisch angenommen werden darf, danach wird gezeigt, dass teilweise wechselwirkende Fixpunkte für beliebig hohe Ordnung nicht-hyperbolisch sind. Im 2-dimensionalen lässt sich jedoch ein alternatives Stabilitätskriterium für solche Fixpunkte finden.

### 3.1.1 hyperbolischer Fixpunkt

Sind  $\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$  und  $\text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$  nicht Null, lässt sich das Vorzeichen der Eigenwerte leicht Nachrechnen, das Ergebnis ist in Tabelle 1 zu sehen.

$\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$	$\text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$	$\Re \lambda_+$	$\Re \lambda_-$	UV-Verhalten
$> 0$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	repulsiv
$< 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	attraktiv
$-$	$< 0$	$> 0$	$< 0$	Sattelpunkt

Tabelle 1: Das UV-Verhalten hyperbolischer Fixpunkte für  $\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \neq 0$  und  $\text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \neq 0$ .

Da man in der Reihenentwicklung der  $\beta$ -Funktion davon ausgeht, dass höhere Ordnungen vernachlässigbar klein werden, kann man davon ausgehen, dass hyperbolische Fixpunkte der Ordnung  $n$  auch für höhere Ordnungen hyperbolisch bleiben. Falls ein vollständig wechselwirkender Fixpunkt ( $\alpha_1^* \neq 0, \alpha_2^* \neq 0$ ) in Ordnung  $n$  entweder  $\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* = 0$  oder  $\text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* = 0$  ergibt, kann man davon ausgehen, dass sich die Koeffizienten  $X_{ij}^k$  zufällig aufheben und der Fixpunkt in höherer Ordnung wieder hyperbolisch wird. Vollständig wechselwirkende nicht-hyperbolische Fixpunkte können also als Folge einer zu groben Berechnung der  $\beta$ -Funktion verstanden werden. Es ist nicht klar, ob der Eigenvektor  $e_i$  zum Eigenwert  $\lambda_i = 0$  eine UV-attraktiven oder repulsiven Richtung entspricht, da sich dies jedoch direkt auf die Dimension der kritischen Hyperfläche auswirkt ist die Untersuchung solcher Fixpunkte nur bedingt sinnvoll.

### 3.1.2 nicht-hyperbolischer Fixpunkt

Ein teilweise wechselwirkender Fixpunkt, o.E.  $\alpha^* = (\alpha_1^*, 0)$ , führt zu der Stabilitätsmatrix

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_* = \begin{pmatrix} \sum_{i=2} i(\alpha_1^*)^{i-1} X_{i0}^1 & \sum_{i=2} (\alpha_1^*)^i X_{i1}^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (43)$$

mit den Eigenvektoren und Eigenwerten

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad e_2 \propto \begin{pmatrix} -\sum_{i=2} (\alpha_1^*)^i X_{i1}^1 \\ \sum_{i=2} i(\alpha_1^*)^{i-1} X_{i0}^1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_1 = \sum_{i=2} i(\alpha_1^*)^{i-1} X_{i0}^1 , \quad \lambda_2 = 0 . \quad (44)$$

Da in  $\beta_2$  die Variable  $\alpha_2$  in jedem Monom mindestens zur zweiten Potenz auftaucht, ist dies für beliebig hohe Ordnung zu erwarten, sodass hier ein alternatives Kriterium für das UV-Verhalten des Fixpunktes gefunden werden muss.

Zunächst wird (36) um die zweite Ordnung der Taylorentwicklung ergänzt,

$$\beta_i(\alpha) \simeq \sum_{m=1}^2 \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_m} \right|_* (\alpha_m - \alpha_m^*) + \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^2 (\alpha_m - \alpha_m^*) \left. \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} \right|_* (\alpha_n - \alpha_n^*) . \quad (45)$$

Wie in Abschnitt 2.2 wird diese Gleichung in der Eigenbasis der Stabilitätsmatrix geschrieben

$$\dot{K}_1(t) e_1^i + \dot{K}_2(t) e_2^i = \sum_{k,m=1}^2 K_k(t) \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_m} e_k^m + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m,n=1}^2 K_k(t) K_l(t) \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} e_k^m e_l^n \quad (46)$$

$$= K_1(t) \lambda_1 e_1^i + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m,n=1}^2 K_k(t) K_l(t) \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} e_k^m e_l^n . \quad (47)$$

Die Indizes  $k$  und  $l$  laufen dabei für die zwei Eigenvektoren, während  $m$ ,  $n$  und  $i$  für die Komponente eines Vektors stehen. Der Koeffizientenvergleich in  $e_1$  führt in erster Ordnung zum gleichen Ergebnis wie beim hyperbolischen Fixpunkt. Auf der kritischen Hyperfläche gilt demnach  $\lambda_1 < 0 \Rightarrow K_1(t) \rightarrow 0$  für  $t$  groß, oder  $\lambda > 0 \Rightarrow K_1(t) \equiv 0$ , da der Fixpunkt sonst nicht erreicht wird. Für große  $t$  wird (47) damit zu

$$\dot{K}_2(t) e_2^i = \frac{1}{2} K_2(t)^2 \sum_{m,n=1}^2 \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} e_2^m e_2^n \quad (48)$$

$$= \frac{1}{2} K_2(t)^2 \sum_{m,n=1}^2 \left[ \left( e_2^m \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \right) \left( e_2^n \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \right) - e_2^m \frac{\partial e_2^n}{\partial \alpha_m} \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \right]_* \beta_i \quad (49)$$

$$= \frac{1}{2} K_2(t)^2 \left[ \sum_{m=1}^2 e_2^m \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_m} e_2^i - \sum_{m,n=1}^2 e_2^m \frac{\partial e_2^n}{\partial \alpha_m} \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \beta_i \right]_* . \quad (50)$$

Für  $i = 2$  kann eine Lösung wie folgt gefunden werden. Der zweite Term in (50) ist wegen (43) gleich Null. Aus (42) und (41) erhält man am Fixpunkt

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_q} = \frac{\partial}{\partial \alpha_q} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha_q} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} \quad \begin{cases} = 0 & \text{für } q = 1 \\ \neq 0 & \text{für } q = 2 \end{cases} . \quad (51)$$

Es bleibt

$$\dot{K}_2(t) = \frac{1}{2} K_2(t)^2 e_2^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2} \Big|_* \quad \text{mit der Lösung} \quad K_2(t) = \frac{2}{2K_2(0)^{-1} - e_2^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2} t} . \quad (52)$$

Da Eigenvektoren nur bis auf ein reelles Vielfaches bestimmt sind, kann  $e_2^2 > 0$  gewählt werden. Damit  $\alpha(t=0)$  physikalisch ist folgt  $K_2(0) > 0$ , und damit  $K_2(t)$  für steigendes  $t$  keinen Pol passiert folgt

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2} < 0 \quad (53)$$

als Bedingung für einen in  $e_2$ -Richtung attraktiven Fixpunkt. Allgemein ist es nicht möglich, die DGL (50) mit  $i = 1$  zu lösen, da der zweite Term in der Klammer keine einfachen aufweist. Da die DGL aber für jedes  $i$  einzeln gelten muss, muss jede Lösung mindestens (53) erfüllen, in der Praxis lässt sich jedoch tatsächlich feststellen, dass (53) die UV-Stabilität eines Fixpunktes exakt vorhersagt. Daher, und weil zu erwarten ist, dass höchstens endlich viele Lösungen (53) erfüllen, die nicht zu Trajektorien gehören, die in den Fixpunkt hineinlaufen, wird diese Bedingung im Folgenden weiter verwendet

### 3.2 Fixpunktextrapolation

Um das UV-Verhalten einer  $\beta$ -Funktion mit den bisher gemessenen Werten für die Kopplungskonstanten im SM vergleichen zu können, ist es notwendig die kritische Hyperfläche eines Fixpunktes auch in einem Bereich zu kennen, der zu groß für eine Taylorentwicklung geringer Ordnung ist. Das Auffinden der kritischen Hyperfläche ist insbesondere für höherdimensionale Probleme analytisch kaum möglich und daher eine numerische Aufgabe. Stehen nun  $n$  Messwerte an der selben Renormierungsskala  $\mu_0$  zur Verfügung und gibt es einen Punkt  $\alpha_0 \in M_C$  der diese enthält, dann sind alle Kopplungskonstanten  $\alpha(\mu)$  bis auf  $(\dim(M_C) - n)$  freie Parameter festgelegt<sup>3</sup> und laufen in den Fixpunkt hinein. Existiert so ein  $\alpha_0 \in M_C$  nicht, kommt der untersuchte Fixpunkt für ein asymptotic safety Szenario nicht in Frage.

Ein besonderer Vorteil einer Erweiterung  $G \rightarrow G_1 \times G_2$  ist die Möglichkeit einen UV-Fixpunkt eindeutig extrapolieren zu können, da die kritische Hyperfläche die Dimension

---

<sup>3</sup>Für  $n \geq \dim(M_C)$  also eindeutig.



$\dim(\alpha^*) = 0$ ,  $\dim(\text{Trajektorie}) = 1$  oder  $\dim(\text{Phasenraum}) = 2$  hat. Im ersten Fall,  $\dim M_c = 0$  besteht sie nur aus dem Fixpunkt selbst, dieser Fall ist also eher als eine mathematische, triviale Lösung zu betrachten, die keine physikalische Bedeutung im Sinne laufender Kopplungskonstanten hat. Im Fall  $\dim M_c = 2$  besteht sie aus dem gesamten Phasenraum. Weil in diesem Fall jede Trajektorie in den Fixpunkt hineinläuft kann keine Vorhersage für die Größen der Kopplungskonstanten gemacht werden, dafür ist aber das UV-Verhalten von dem Startwert  $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$  unabhängig. Der für die Extrapolation interessanteste Fall ist also  $\dim M_c = 1$ , da die UV-Hyperfläche dann aus zwei Trajektorien  $s^{+/-} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  besteht<sup>4</sup> und deshalb eindeutige Wertepaare  $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  vorhersagt. Wenn eine Kopplungskonstante (o.E.)  $\alpha_1(t_0)$  bei einer Renormierungsskala  $t_0$  bekannt ist, und unter der Annahme, dass der Fixpunkt für  $t \rightarrow \infty$  erreicht wird, ist somit auch  $\alpha_2(t_0)$  sowie das gesamte Verhalten beider Kopplungskonstanten bekannt.

Für die Extrapolation werden außerdem die folgende Beobachtungen ausgenutzt.

1. Eine Trajektorie, welche in einen Sattelpunkt hineinläuft, ist gleichzeitig eine Separatrix, d.h. sie teilt den Phasenraum in Gebiete mit qualitativ unterschiedlichem Verhalten für  $t \rightarrow \infty$ .
2. Ein Sattelpunkt und ein attraktiver Fixpunkt sind mit einer Trajektorie verbunden, ebenso ist ein Sattelpunkt mit einem repulsiven Fixpunkt mit einer Separatrix verbunden, sofern die Fixpunkte existieren und in der Nähe des Sattelpunktes liegen.

Da das gesuchte  $M_c$  folglich immer eine Separatrix ist, kann wie folgt verfahren werden. Zunächst werden zwei Gebiete  $L$  und  $R$  definiert, die zu qualitativ verschiedenen Trajektorien führen. Beispielsweise lassen sich oft Abschätzungen der Art finden: Wenn es ein  $t_1$  gibt mit

$$\alpha_j(t_1) > \max \left\{ \alpha_j^{*i} \mid \text{alle Fixpunkte } \alpha^{*i} \right\} , \quad (54)$$

dann kann der gewünschte Fixpunkt nicht mehr für  $t > t_1$  erreicht werden. Am Fixpunkt wird eine Orthonormalbasis  $\{f_1, f_2\}$  gewählt<sup>5</sup> und der Phasenraum in Ebenen mit Abstand  $\epsilon$  eingeteilt, die nullte Ebene geht dabei durch den Fixpunkt. Rekursiv werden dann

$$s_n^{L/R} = s_{n-1}^{L/R} + \epsilon f_1 + d^{L/R} \delta f_2 \quad (55)$$

definiert. Für festes  $\delta$  wird  $d^{L/R}$  so eingestellt, dass die Trajektorie mit Anfangswert  $s_n^L$  in den Bereich  $L$  hineinläuft, analog für  $R$ . Mit  $s_0^L := \alpha - \delta/2 f_2$  und  $s_0^R := \alpha + \delta/2 f_2$  ergibt sich so ein Schlauch  $(s_n^L, s_n^R)_{n=0,1,\dots}$  der Breite  $\delta$ , der die Separatrix beinhaltet.

<sup>4</sup>Jeweils eine in, eine entgegen der Richtung des attraktiven Eigenvektors.

<sup>5</sup>Der Einfachheit halber kann die Basis aus Eigenvektoren oder die  $\alpha_{1,2}$ -Achsen gewählt werden, sofern dies zu keinen numerischen Schwierigkeiten führt.

## 4 UV-Fixpunkte der $SU_{\text{QCD}} \times SU_{\text{dQCD}}$

Die allgemeinste Form der  $\beta$ -Funktion auf 2-loop Ordnung wurde von D.R.T. Jones berechnet [8]. Die  $\beta$ -Funktion hat die Form

$$\beta(g) = \left( X_1^g g_1^3 + Y_1^g g_1^5 + Z_1^g g_1^3 g_2^2 \right) - \left( X_2^g g_2^3 + Y_2^g g_2^5 + Z_2^g g_2^3 g_1^2 \right) \quad (56)$$

Für die Darstellungen  $R_1, R_2, S_1$  und  $S_2$  der Fermionen bzw. Skalare sind die Koeffizienten von  $\beta_1$  gegeben durch

$$X_1^g = (16\pi^2)^{-1} \left[ \frac{2}{3} T(R_1) d(R_2) + \frac{1}{3} T(S_1) d(S_2) - \frac{11}{3} C_2(G_1) \right] \quad (57)$$

$$Y_1^g = (16\pi^2)^{-2} \left[ \left( \frac{10}{3} C_2(G_1) + 2C_2(R_1) \right) T(R_1) d(R_2) + \left( \frac{2}{3} C_2(G_1) + 4C_2(S_1) \right) T(S_1) d(S_2) - \frac{34}{3} C_2(G_1)^2 \right] \quad (58)$$

$$Z_1^g = (16\pi^2)^{-2} [2C_2(R_2) d(R_2) T(R_1) + 4C_2(S_2) d(S_2) T(S_1)] \quad (59)$$

Die Berechnung ist dabei für chirale Fermionen geschehen, was einen zusätzlichen Faktor von 2 in  $d(R_1)$  und  $d(R_2)$  bewirkt, wenn man Dirac-Fermionen betrachtet. Wie in Abschnitt 1 beschrieben, sollen Fermionen und Skalare eines bestimmten Sektors jeweils in der gleichen Darstellung der Eichgruppen sein, daher gibt es keinen Unterschied zwischen  $R_1$  und  $S_1$  bzw.  $R_2$  und  $S_2$ . Für  $SU(N)$  ist  $T(R) = 1/2$  und der quadratische Casimiroperator  $C_2(R) = (N^2 - 1)/(2N)$  bzw.  $C_2(G) = N$  [8]. In der  $\text{QCD} \times \text{dQCD}$  gibt es zwei Eichgruppen, jedoch mit drei verschiedenen Darstellungen der Teilchen, sodass  $d(R_1)$  und  $d(R_2)$  in jedem Koeffizienten (57), (58) und (59) andere Werte annehmen kann und deshalb einzeln bestimmt werden muss. Dies geschieht am einfachsten über das Zeichnen von Feynmandiagrammen und abzählen der möglichen Teilchen, die im entsprechenden Diagramm erlaubt sind.

Die Teilchenlinien in den Diagrammen werden nur mit ihren QCD und dQCD Quantenzahlen beschriftet. Dabei stehen wieder  $i$  und  $j$  für Colour bzw.  $r$  und  $s$  für dark Colour in der fundamentalen Darstellung,  $A$  und  $M$  für Colour und dark Colour der adjungierten Darstellung. Die Vertizes werden mit den entsprechenden Erzeugermatrizen beschriftet und enthalten bereits die Kopplungskonstanten. Es werden nur die Koeffizienten  $X_1^g, Y_1^g$  und  $Z_1^g$  betrachtet,  $X_2^g, Y_2^g$  und  $Z_2^g$  folgen analog mit  $\text{QCD} \leftrightarrow \text{dQCD}$ . Wie in [12] gezeigt, kann die Eichung des Eichboson-Propagators so gewählt werden, dass die  $\beta$ -Funktion nur noch von der Renormalisierungskonstanten  $Z_A$  des Eichfeldes abhängt. Daher reicht es, hier nur 1- und 2-Schleifen Korrekturen zum Gluon-Propagator zu untersuchen, Korrekturen zu 3- oder 4-Punkt Funktionen müssen nicht berücksichtigt werden.

Der Koeffizient  $X_1^g$  entspricht der 1-Schleifen Korrektur zum Gluonpropagator. Bei der

Fermionschleife in Abbildung 3 kann jedes der  $n_{\text{fc}}$  QCD-Fermionen und jedes der  $n_{\text{fj}}$  joint-Fermionen mit einer dark Colour  $r \in \{1, 2, \dots, N_{\text{d}}\}$  in der Schleife auftauchen. Damit ist  $d(R_2) = n_{\text{fc}} + N_{\text{d}} n_{\text{fj}}$ .

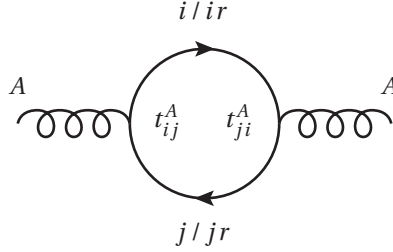


Abbildung 3: 1-Schleifen QCD/joint-Fermion Beitrag zum Gluonpropagator.

Der Koeffizient  $Y_2^g$  enthält die 2-Schleifen Beiträge proportional zu  $(t_{ij}^A)^4$ . Auch hier kann jeweils ein QCD-Fermion oder ein joint-Fermion mit einer dark Colour vorkommen, sodass wieder  $d(R_2) = n_{\text{fc}} + N_{\text{d}} n_{\text{fj}}$ .

Die Diagramme proportional zu  $(t_{ij}^A)^2 (\tilde{t}_{rs}^M)^2$  tragen zu  $Z_1^g$  bei und sind in den Abbildungen ?? und 4 zu sehen. Am Gluon-Fermion Vertex  $t_{ij}^A$  kann  $r$  jeden Wert  $1, 2, \dots, N_{\text{d}}$  annehmen, wieder mit jedem Flavour. QCD- oder dQCD-Fermionen können nicht auftauchen, sodass in diesem Fall  $d(R_2) = N_{\text{d}} n_{\text{fj}}$ .

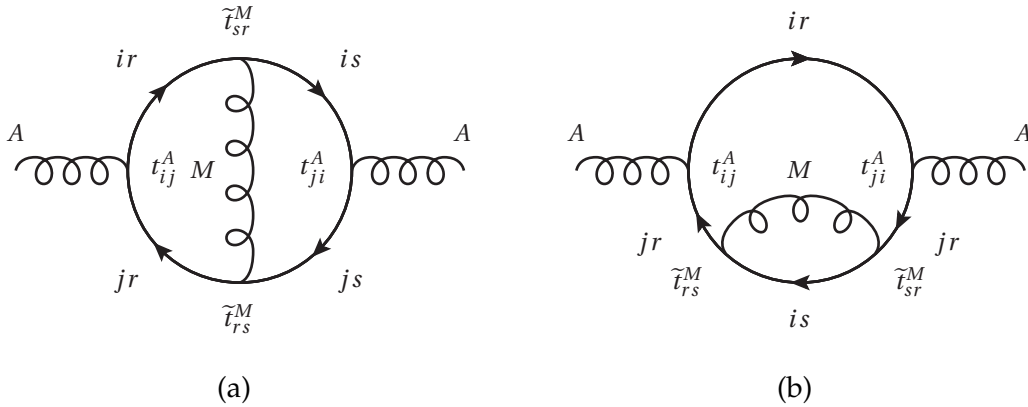


Abbildung 4: 2-Schleifen-Korrekturen  $\propto (t_{ij}^A)^2 (\tilde{t}_{rs}^M)^2$  zum Gluonpropagator.

Die ermittelten Koeffizienten stimmen mit denen in [2] überein. Mit  $N_{\text{fc}} := n_{\text{fc}} + N_{\text{d}} n_{\text{fj}}$ ,

$N_{s_c} := n_{s_c} + N_d n_{s_j}$ ,  $N_{f_d} := n_{f_d} + N_c n_{f_j}$  und  $N_{s_d} := n_{s_d} + N_c n_{f_j}$  lassen sie sich schreiben als

$$X_1^g = (16\pi^2)^{-1} \left[ \frac{2}{3} N_{f_c} + \frac{1}{6} N_{s_c} - \frac{11}{3} N_c \right] \quad (60)$$

$$Y_1^g = (16\pi^2)^{-2} \left[ \left( \frac{13}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right) N_{f_c} + \left( \frac{4}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right) N_{s_c} - \frac{34}{3} N_c^2 \right] \quad (61)$$

$$Z_1^g = (16\pi^2)^{-2} \left[ (N_d^2 - 1)(n_{f_j} + n_{s_j}) \right] \quad (62)$$

Da beide Kopplungskonstanten in einer 4-dimensionalen Raumzeit die Massendimension  $[g_1] = [g_2] = 0$  besitzen, werden die neuen Kopplungskonstanten  $\alpha_i := g_i^2/4\pi$  eingeführt. Die Bedingung  $|g_i| < 1$  für eine sinnvolle Störungstheorie lässt sich zu  $\alpha_i < 4\pi$  übersetzen. Mit  $X_i := 8\pi X_i^g$ ,  $Y_i := 32\pi^2 Y_i^g$  und  $Z_i := 32\pi^2 Z_i^g$  folgt

$$\beta(\alpha) = \begin{pmatrix} X_1 \alpha_1^2 + Y_1 \alpha_1^3 + Z_1 \alpha_1^2 \alpha_2 \\ X_2 \alpha_2^2 + Y_2 \alpha_2^3 + Z_2 \alpha_1 \alpha_2^2 \end{pmatrix} \quad (63)$$

und als Nullstellen findet man die Fixpunkte

$$\alpha^{*1} = (0, 0) \quad \alpha^{*2} = \left( 0, -\frac{X_2}{Y_2} \right) \quad \alpha^{*3} = \left( -\frac{X_1}{Y_1}, 0 \right) \quad \alpha^{*4} = \left( \frac{Z_1 X_2 - X_1 Y_2}{Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2}, \frac{Z_2 X_1 - X_2 Y_1}{Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2} \right) \quad (64)$$

An den Fixpunkten gilt außerdem

$$\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* = (\alpha_1^*)^2 Y_1 + (\alpha_2^*)^2 Y_2 \quad \text{sowie} \quad \text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* = (\alpha_1^* \alpha_2^*)^2 (Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2) \quad (65)$$

## 4.1 UV-Verhalten bei $\alpha^{*4}$

### 4.1.1 attraktiver Fixpunkt

Für komplett UV-attraktives Verhalten müssen die Bedingungen

$$\alpha_1^* > 0 \quad \wedge \quad \alpha_2^* > 0 \quad \wedge \quad \text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* > 0 \quad \wedge \quad \text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* < 0 \quad (66)$$

erfüllt sein, man kann jedoch zeigen, dass diese Bedingungen für die gewählte Darstellung nicht gleichzeitig wahr sein können. Dazu werden sie zunächst in den Koeffizienten geschrieben und mit (65) verglichen. Es bietet sich an, eine Fallunterscheidung in den Vorzeichen von  $Y_1$  und  $Y_2$  zu machen. Es folgt

1.  $Y_1 > 0 \wedge Y_2 > 0$ : Dann ist  $\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* < 0$  nicht möglich.

2.  $Y_1 < 0 \wedge Y_2 < 0$ : Für einen physikalischen Fixpunkt muss

$$Z_1 X_2 > X_1 Y_2 \quad \wedge \quad Z_2 X_1 > Y_1 X_2 \quad . \quad (67)$$

Wie an (62) zu sehen ist, müssen beide  $Z_i > 0$  sein, dann folgt, dass  $X_i > 0$  ist. Die Rechnung ohne Skalare ergibt

$$X_1 > 0 \stackrel{(60)}{\Rightarrow} N_{fc} > \frac{11}{2} N_c \quad \wedge \quad Y_1 < 0 \stackrel{(61)}{\Rightarrow} N_{fc} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}} N_c \quad (68)$$

$$\Rightarrow \frac{11}{2} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}} \quad \nexists \quad (69)$$

Das Einführen von Skalaren begünstigt  $X_1 > 0$ , ist aber mathematisch nur für  $N_c = 1$  oder  $N_d = 1$  möglich. Da die  $SU(1)$  die Multiplikation mit Eins ist, ist dieser Fall uninteressant.

$$N_{fc} > \frac{11}{2} N_c - \frac{1}{4} N_{sc} \quad \wedge \quad N_{fc} < \left[ \frac{34}{3} N_c^2 - \left( \frac{4}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right) N_{sc} \right] \left( \frac{13}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right)^{-1} \quad (70)$$

$$\Rightarrow \left[ \left( \frac{4}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{13}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right) \right] N_{sc} < \frac{34}{3} N_c^2 - \frac{11}{2} N_c \left( \frac{13}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right) \quad (71)$$

Für  $N_c = 1$  folgt die untere Grenze  $N_{sc} \geq 14$ , für  $N_c \geq 2$  die obere Grenze  $N_{sc} \lesssim -200$ , es gibt also keine physikalisch sinnvolle Lösung.

3.  $Y_1$  und  $Y_2$  haben verschiedene Vorzeichen: Damit  $\text{Det} \left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_* > 0$  ist muss es ein  $Z_i < 0$  geben, was in der gewählten Darstellung (62) nicht möglich ist.

Für Fermionen und Skalare in der fundamentalen Darstellung der  $SU(N_c) \times SU(N_d)$  muss demnach  $\dim M_c \leq 1$ .

Bond und Litim konnten für einen komplett UV-attraktiven Fixpunkt  $\alpha_4^*$  die Bedingung  $C_2(S) < 1/11 C_2(G)$  für eine beliebige Darstellung herleiten [3]. Für die fundamentale Darstellung folgt  $N_c < \sqrt{\frac{11}{9}} \approx 1,1$ , dies deckt sich mit den Ergebnissen der konkreten Rechnung (71). Darüber hinaus konnten Sie zeigen, dass es für keine Darstellung der Eichgruppen möglich ist, ein in jede Richtung UV-attraktives Verhalten zu erzeugen.

#### 4.1.2 Sattelpunkt

Am physikalischen Sattelpunkt muss gelten

$$\alpha_1^* > 0 \quad \wedge \quad \alpha_2^* > 0 \quad \wedge \quad \text{Det} \left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_* < 0 \quad , \quad (72)$$

in Koeffizienten ausgedrückt bedeutet das

$$Z_1 X_2 < X_1 Y_2 \quad \wedge \quad Z_2 X_1 < X_2 Y_1 \quad \wedge \quad Z_1 Z_2 > Y_1 Y_2 \quad . \quad (73)$$

Da es für den Sattelpunkt weniger Bedingungen als für einen UV-attraktiven Fixpunkt gibt, sind Fallunterscheidungen in den Vorzeichen von  $Y_i$  und  $X_i$  nötig. Es wird sich zeigen, dass nur Fälle mit  $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$  möglich sind, sodass es obere Schranken für die Teilchenzahlen und  $N_d$  gibt.

1.  $Y_1 > 0 \wedge Y_2 > 0$ :

a)  $X_1 > 0 \wedge X_2 > 0$ : Aus (73) folgt

$$Z_1 < \frac{X_1}{X_2} Y_2 \quad \wedge \quad Z_2 < \frac{X_2}{X_1} Y_1 \quad \wedge \quad Z_1 Z_2 > Y_1 Y_2 \quad (74)$$

was jedoch nicht gleichzeitig möglich ist.

b)  $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$ : Man erhält obere Begrenzungen für die Anzahl der joint-Fermionen

$$n_{f_c} + N_d n_{f_j} < N_c \quad \wedge \quad c \leftrightarrow d \quad (75)$$

$$\Rightarrow n_{f_j}^2 + n_{f_j} \frac{n_{f_d}}{N_c} + \frac{11}{2} \frac{n_{f_c}}{N_c} < \left( \frac{11}{2} \right)^2 \quad \wedge \quad c \leftrightarrow d \quad . \quad (76)$$

Es gibt also eine allgemeine Obergrenze von  $n_{f_j} < \frac{11}{2}$ , die für die Grenzfälle  $n_{f_c} = 0$  und  $n_{f_d} = 0$  oder  $N_c \rightarrow \infty$  und gleichzeitig  $N_d \rightarrow \infty$  erreicht wird. Die einzigen Standardmodell nahen Lösungen, die gleichzeitig zu sinnvollen Fixpunkten führen, sind

$$N_c = 3 \quad N_d = 2 \quad n_{f_c} = 6 \quad 0 \leq n_{f_d} \leq 2 \quad n_{f_j} = 1 \quad , \quad (77)$$

weitere Lösungen gibt es nur für  $n_{f_c} < 6$  oder  $N_c > 3$ .

c)  $X_1 < 0 \wedge X_2 > 0$ : Dann müsste

$$\underbrace{Z_1 X_2}_{>0} < \underbrace{X_1 Y_2}_{<0} \quad \not\quad , \quad (78)$$

dieser Fall kommt für physikalische Fixpunkte also nicht in Frage.

2.  $Y_1 > 0 \wedge Y_2 < 0$ :

a)  $X_2 > 0$ : Wie schon gezeigt ist  $Y_2 < 0 \wedge X_2 > 0$  nicht möglich. Bond und Litim haben auch hier gezeigt, dass dies in jeder Darstellung der Fall ist [3].

b)  $X_1 > 0 \wedge X_2 < 0$ : Es kommt direkt zum Widerspruch,

$$\underbrace{Z_2 X_1}_{>0} < \underbrace{X_2 Y_1}_{<0} \quad \text{!} \quad . \quad (79)$$

c)  $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$ : Auch hier erhält man eine Begrenzung für  $n_f$

$$n_{f_c} + N_d n_{f_j} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}} N_c \quad \wedge \quad n_{f_d} + N_c n_{f_j} < \frac{11}{2} N_d \quad (80)$$

$$\Rightarrow n_{f_j} < \sqrt{\frac{11}{2} \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}}} \lesssim 3.9 \quad . \quad (81)$$

Gleichzeitige Lösungen zu (73) mit  $N_c = 3$  und  $n_{f_c} \geq 6$  gibt es nicht.

3.  $Y_1 < 0 \wedge Y_2 < 0$ :

a) Ein  $X_i > 0$ : Wieder ist  $Y_i < 0 \wedge X_i > 0$  nicht möglich.

b)  $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$ : Hier folgt

$$n_{f_c} + N_d n_{f_j} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}} \quad \wedge \quad c \leftrightarrow d \quad (82)$$

$$\Rightarrow n_{f_j} < \frac{34}{\sqrt{\left(13 - \frac{1}{N_c^2}\right)\left(13 - \frac{1}{N_c^2}\right)}} \lesssim 2.7 \quad . \quad (83)$$

Auch hier gibt es keine Lösungen, die nahe am SM sind.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass es in allen Fällen Obergrenzen  $n_{f_j} \lesssim 5$  für die Anzahl der joint-Fermionen gibt, und durch das Einführen von QCD- und dQCD-Fermionen wird diese Grenze weiter nach unten verschoben. Der einzige Fall, der in der skalarfreien Theorie physikalische Sattelpunkte bringt, ist 1b, exemplarisch ist das Flussdiagramm für  $n_{f_j} = 2$  in Abbildung 5 zu sehen. Alle drei Fixpunkte liegen, wie in Tabelle 2 zu sehen, weit im nicht-perturbativen Bereich. Nicht-perturbative  $SU(N)$  Dynamiken können in einem Veneziano-limit störungstheoretisch behandelt werden [7][9], dabei wird der

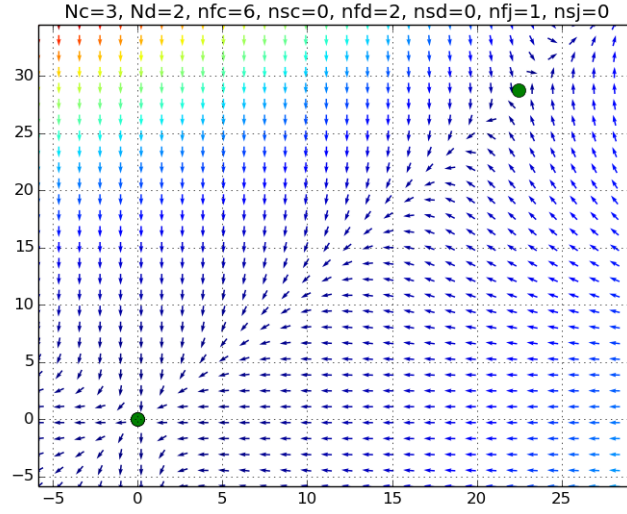


Abbildung 5: Flussdiagramm für den Sattelpunkt  $\alpha^{*4}$ .

Grenzfall  $N \rightarrow \infty, N_f \rightarrow \infty, N/N_f < \infty, g^2 N \rightarrow 0$  betrachtet [15]. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist es mit Skalaren jedoch möglich, perturbative Fixpunkte zu erhalten, ohne von den Standardmodell Werten  $N_c = 3$  und  $n_{f_c} = 6$  abweichen zu müssen.

$n_{f_d}$	0	1	2
$\alpha^{*4}$	(166.6, 60.8)	(69.3, 39.1)	(22.4, 28.7)

Tabelle 2: Lage des Sattelpunktes  $\alpha^{*4}$  ohne Skalare.

An den Koeffizienten (60) und (61) sieht man, dass Skalare qualitativ den gleichen Einfluss auf die  $\beta$ -Funktion wie Fermionen haben, jedoch um einen Faktor 3-4 kleiner, es ist also zu erwarten, dass die Grenzen für die Anzahl der joint-Skalare um einen entsprechenden Faktor höher liegen. Einige mögliche Standardmodell nahe Teilchenzahlen sind in Tabelle 3 zu sehen. In Abbildung 6 ist außerdem der Fixpunkt  $\alpha^{*4}$  für  $1 \leq n_{s_d} \leq 5$  und sinnvolle  $n_{s_j}$  dargestellt. Hier ist zu erkennen, dass  $\alpha^{*4}$  betragsmäßig kleiner wird, je mehr joint-Skalare eingeführt werden.

Um einen vollständig wechselwirkenden UV-Fixpunkt zu erhalten, der mit Methoden der Störungstheorie behandelt werden kann, ist es demnach nötig, skalare Teilchen im joint-Sektor einzuführen. Die Teilchen des dQCD-Sektors haben dagegen, wie in Abbildung 6 zu sehen ist, nur geringe Auswirkungen auf die Lage des Fixpunktes, ob hier Fermionen, Skalare oder beide Teilchensorten eingeführt werden ist qualitativ nicht entscheidend.



$N_d$	$n_{s_j}$	$n_{s_d}$	$N_d$	$n_{s_j}$	$n_{s_d}$	$N_d$	$n_{s_j}$	$n_{s_d}$
2	1	18	3	1	24-26	4	1	31-36
2	2	12-16	3	2	5-25	4	2	0-37
2	3	0-14	3	3	0-25	5	1	37-46
2	4	0-12	3	4	1-24	6	1	41-57
2	5	0-10	3	5	14-23	7	1	0-69
2	6	0-7	3	6	20-23			
2	7	0-5	3	7	22			
2	8	0-3						
2	9	0-1						

Tabelle 3: Mögliche Anzahlen von Skalaren für  $N_c = 3$ ,  $n_{f_c} = 6$ ,  $n_{f_d} = 0$ .

Wie in der Abbildung 6 zu sehen, ist der Sattelpunkt  $\alpha^{*4}$  in Richtung des Gaußschen Fixpunktes  $\alpha_1^*$  UV-repulsiv. Bond und Litim haben gezeigt, dass dieses Verhalten bei reinen Eichtheorien immer auftritt und schließen daraus, dass es für schwache Kopplungen keine UV-Fixpunkte in reinen Eichtheorien geben kann [3]. In der Abbildung erkennt man, dass die zwei Trajektorien mit  $\alpha(t \rightarrow \infty) = \alpha^{*4}$  für kleine Energien gegen  $\alpha^{*2}$  bzw.  $\alpha^{*3}$ , falls diese existieren, oder in den nicht-perturbativen Bereich laufen. Hinsichtlich einer Erweiterung der QCD, die im niederenergetischen Bereich durch das QCD-confinement charakterisiert wird, können solche Trajektorien jedoch durchaus physikalisch sinnvoll interpretiert werden. Um das genaue Niederenergieverhalten zu erhalten müssten jedoch die Einflüsse der Teilchenmassen berücksichtigt werden, in dieser Arbeit soll das aber nicht geschehen.

## 4.2 UV-Verhalten bei $\alpha^{*3}$

Da der Fixpunkt  $\alpha^{*3} = (-X_1 Y_1^{-1}, 0)$  ein teilweise wechselwirkender Fixpunkt ist, muss hier das in 3.1.2 beschriebene Stabilitätskriterium angewendet werden. Zunächst kann aber einfach gezeigt werden, dass dieser Fixpunkt nicht in jede Richtung UV-attraktiv sein kann.

Damit  $\alpha_1^{*3} = -X_1 Y_1^{-1} > 0$ , muss  $X_1 < 0$  und  $Y_1 > 0$ . Es wurde in 4.1.1 gezeigt, dass die umgekehrte Vorzeichenwahl physikalisch nicht sinnvoll ist. Gleichung (43) zeigt nun  $\lambda_1 = (\alpha_1^*)^2 Y_1 > 0$  zu  $e_1 = (1, 0)^T$ , folglich muss die  $\alpha_1$ -Achse UV-repulsiv bezüglich  $\alpha^{*3}$  sein.

Am Fixpunkt ergibt sich aus (43) und (42)

$$\lambda_2 = 0 \quad , \quad e_2 = \begin{pmatrix} -Z_1 Y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2} = 2X_2 - 2 \frac{X_1}{Y_1} Z_2 \quad . \quad (84)$$

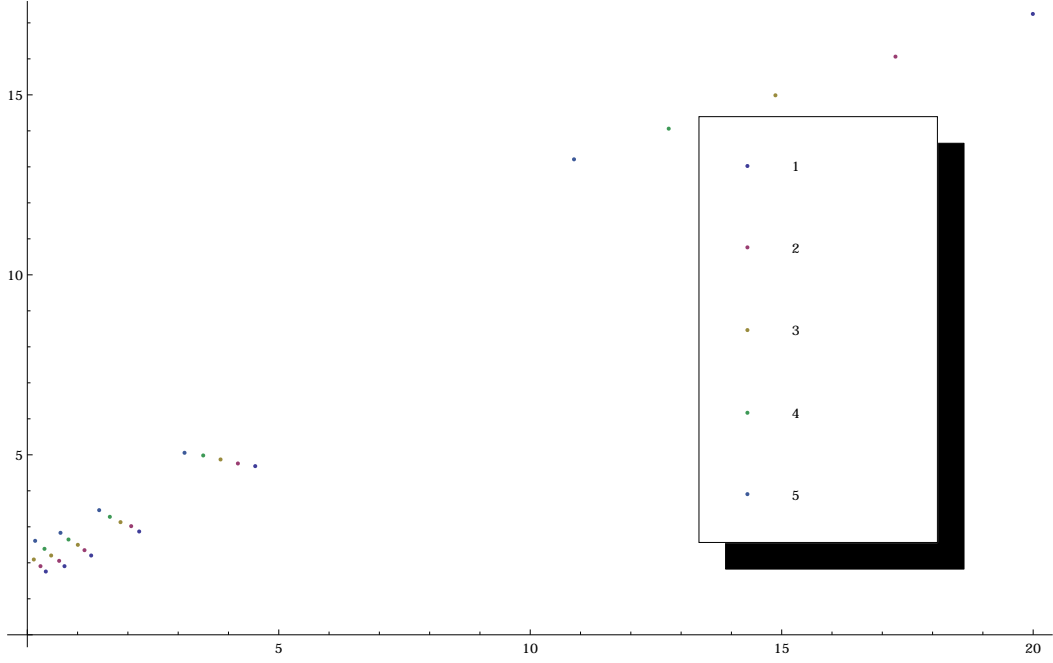


Abbildung 6: Lage von  $\alpha^{*4}$  in Abhängigkeit von  $n_{sd}$  und  $n_{sj}$ .

Die Bedingung dafür, dass  $\alpha^{*3}$  ein Sattelpunkt ist, ist somit

$$X_1 < 0 \quad \wedge \quad Y_1 > 0 \quad \wedge \quad X_2 Y_1 < Z_2 X_1 \quad . \quad (85)$$

Da die Vorzeichen  $X_1 < 0$ ,  $Y_1 > 0$  und  $X_2 < 0$  festgelegt sind, kann bereits ohne Fallunterscheidung eine Grenze gefunden werden. Aus  $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$  folgt allgemein (vgl. (1b))

$$\left(n_{f_j} + \frac{1}{4}n_{s_j}\right)^2 + \left(n_{f_j} + \frac{1}{4}n_{s_j}\right)\left(n_{f_d} + \frac{1}{4}n_{s_d}\right)\frac{1}{N_c} + \frac{11}{2}\left(n_{f_c} + \frac{1}{4}n_{s_c}\right)\frac{1}{N_c} < \left(\frac{11}{2}\right)^2 \quad \wedge \quad c \leftrightarrow d \quad . \quad (86)$$

Zunächst werden wieder nur Fermionen betrachtet. Da sie ausreichen, um perturbative Fixpunkte zu modellieren, wird es nicht nötig sein, Skalare einzuführen. Aus (86) und  $X_1 < 0$  folgen allgemeine Grenzen für  $n_{f_j}$ ,  $N_d$  und  $n_{f_d}$

$$\begin{aligned} n_{f_j} &< \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}\frac{n_{f_c}}{N_c}} = 4.39 \quad , \quad n_{f_d} < \left(\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 1\right)N_c - \frac{11}{2}n_{f_c} = 54.75 \quad , \\ N_d &< \frac{11}{2}N_c - n_{f_c} = 10.5 \end{aligned} \quad (87)$$

für  $N_c = 3$  und  $n_{f_c} = 6$ . Tabelle 5 zeigt die möglichen Teilchenanzahlen und die Komponente  $\alpha_1^{*3}$ . Im Gegensatz zum vollständig wechselwirkenden Fixpunkt  $\alpha^{*4}$  ist  $\alpha^{*3}$  auch für

$N_d$	$n_{f_j}$	$n_{f_d}$	$\alpha_1^{*3}$	$N_d$	$n_{f_j}$	$n_{f_d}$	$\alpha_1^{*3}$
2	2	0	2.21	6	1	0-29	0.75
3	1	0-8	5.24	7	1	0-35	0.47
3	2	0-9	0.75	8	1	0-40	0.28
3	3	0-7	0.14	9	1	0-46	0.14
4	1	0-16	2.21	10	1	0-51	0.04
4	2	0-15	0.28				
5	1	0-23	1.23				
5	2	0-21	0.04				

Tabelle 4: Mögliche Teilchenzahlen für einen Sattelpunkt bei  $\alpha^{*3}$ , mit  $N_c = 3$ ,  $n_{f_c} = 6$  und ohne Skalare.

eine Theorie ohne Skalare in einem perturbativ sinnvollen Bereich, demnach können hier zwar wieder Skalare eingeführt werden, ein neues Verhalten oder neue Wertebereiche für den Fixpunkt treten aber nicht auf.

### 4.3 UV-Verhalten bei $\alpha^{*2}$

$N_d$	$n_{f_j}$	$n_{f_d}$	$N_d$	$n_{f_j}$	$n_{f_d}$
2	1	3-7	5	1	13-24
2	2	1-4	5	2	19-21
2	3	0-1	6	1	17-29
3	1	6-13	7	1	22-35
3	2	4-10	8	1	28-40
3	3	4-7	9	1	36-46
4	1	9-18	10	1	47-51
4	2	10-15			

Tabelle 5: Mögliche Teilchenzahlen für einen Sattelpunkt bei  $\alpha^{*2}$ , mit  $N_c = 3$ ,  $n_{f_c} = 6$  und ohne Skalare.

Aufgrund der Symmetrie der  $\beta$ -Funktion in den Indizes c und d ist das allgemeine Vorgehen wie bei  $\alpha^{*3}$ . Der Fixpunkt ist in  $\alpha_2$ -Richtung repulsiv und das Kriterium für einen Sattelpunkt analog zu (85)

$$X_2 < 0 \quad \wedge \quad Y_2 > 0 \quad \wedge \quad X_1 Y_2 < Z_1 X_2 \quad . \quad (88)$$

Ähnlich bei Fixpunkt  $\alpha^{*3}$  ist es auch bei  $\alpha^{*2}$  nicht nötig Skalare einzuführen, da sie zu keinem qualitativ neuen Verhalten führen. Wieder gibt es Ober- und Untergrenzen für

$N_d$ ,  $n_f$  und  $n_{f_d}$  um eine UV-attraktive Richtung zu erhalten. Die möglichen Werte sind in Tabelle 5 zu sehen.

#### 4.4 Qualitative Änderungen durch Yukawa-Terme

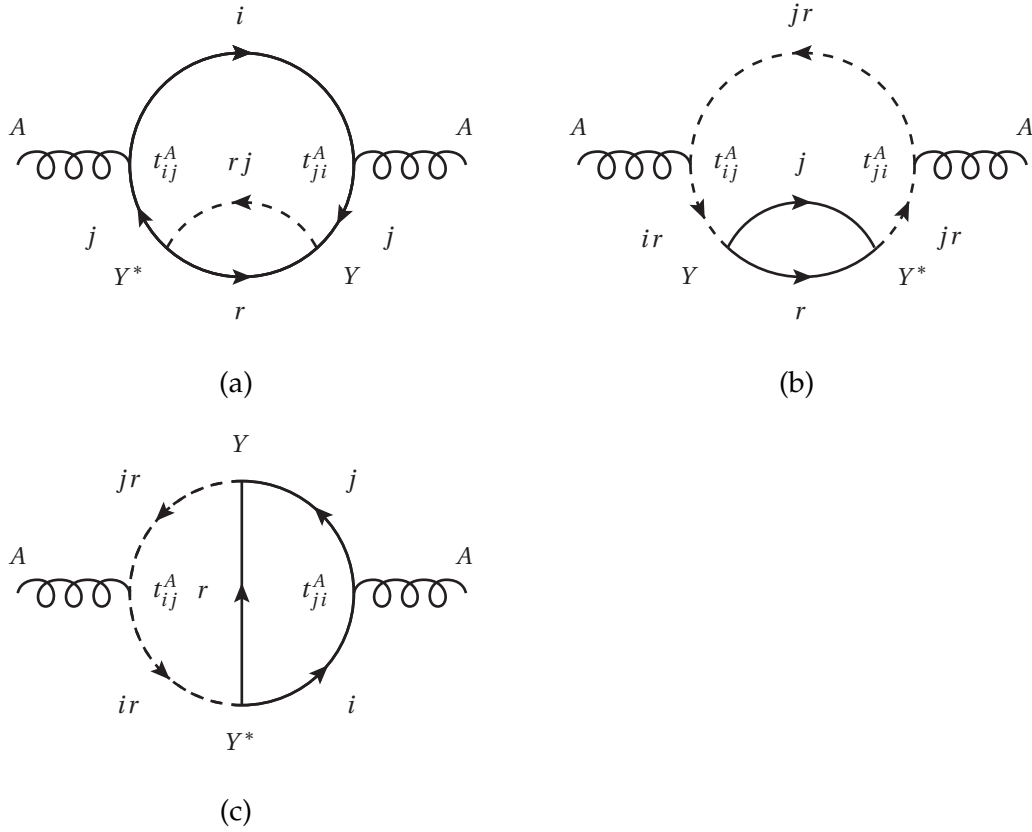


Abbildung 7: Yukawa-Beiträge zum Gluonpropagator.

In [9] schließen Litim und Sannino, dass Yukawa-Kopplungen nötig sind, um in einer (einfachen) Eich-Yukawa-Theorie nicht-triviale UV-Fixpunkte zu erzeugen. Bond und Litim haben dies auch für allgemeine Eich-Yukawa-Theorien gezeigt [3], beziehen sich dabei jedoch auf schwache Kopplungen. Damit haben sie insbesondere gezeigt, dass ein UV-repulsiver Gaußscher Fixpunkt mit einer Trajektorie zum wechselwirkenden Sattelpunkt  $\alpha^{*4}$  nur durch Hinzunahme von Yukawa-Kopplungen möglich ist. Wie bisher gezeigt, können UV-attraktive Richtungen für wechselwirkende Fixpunkte auch in reinen Eichtheorien entstehen. Es soll nun eine qualitative Abschätzung gegeben werden, auf welche Weise mögliche Yukawa-Wechselwirkungen die Eigenschaften der bisher gefundenen Fixpunkte verändern.

Wie in Abschnitt 1 beschrieben gibt es nur eine Art der Yukawa-Kopplung, Gleichung (17), die mit nur einer Kopplungskonstanten auskommt, und deshalb für veränderliche Flavour-Zahlen einfach untersucht werden kann. Der Beitrag zur  $\beta$ -Funktion der Eichkopplungen wurde von Machacek und Vaughn als

$$\beta_1^{\text{Yukawa}}(g) = -g_1^3 (16\pi^2)^{-2} \frac{2}{d(G)} \left[ C_2(R_1) \delta^{il} Y^{l,r,js} (Y^{i,r,js})^* \right] \quad (89)$$

berechnet [12]. Sie haben außerdem festgestellt, dass nur das Diagramm 7(a) zur  $\beta$ -Funktion beiträgt. Mit (20) lässt sich (89) zu

$$\beta_1^{\text{Yukawa}}(g) = -g_1^3 |Y|^2 (16\pi^2)^{-2} \frac{2C_2(R_1)d(R_1)d(R_2)}{d(G_1)} n_{\text{sj}} \quad (90)$$

$$= -g_1^3 |Y|^2 (16\pi^2)^{-2} n_{\text{fc}} n_{\text{fd}} n_{\text{sj}} N_{\text{d}} \quad (91)$$

zusammenfassen. Bemerkenswert ist hierbei, dass wegen

$$C_2(R)d(R) = T(R)d(G) \quad , \quad T(R) = 1/2 \quad \text{für } SU(N) \quad (92)$$

der Yukawa-Term in  $\beta_1$  unabhängig von  $N_c$  ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass QCD- und joint-Teilchen gleich unter der  $SU(N_c)$  transformieren. Mit  $\alpha_Y := |Y|^2/4\pi$  und

$$A_1 := \frac{2}{16\pi^2} n_{\text{fc}} n_{\text{fd}} n_{\text{sj}} N_{\text{d}} \quad \text{sowie} \quad A_2 := \frac{2}{16\pi^2} n_{\text{fc}} n_{\text{fd}} n_{\text{sj}} N_{\text{c}} \quad (93)$$

wird (63) zu

$$\begin{pmatrix} \beta_1(\alpha) \\ \beta_2(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \alpha_1^2 + Y_1 \alpha_1^3 + Z_1 \alpha_1^2 \alpha_2 - A_1 \alpha_1^2 \alpha_Y \\ X_2 \alpha_2^2 + Y_2 \alpha_2^3 + Z_2 \alpha_1 \alpha_2^2 - A_2 \alpha_2^2 \alpha_Y \end{pmatrix} \quad (94)$$

Auch ohne die explizite  $\beta$ -Funktion für die Yukawa-Kopplung lassen sich bereits qualitative Einflüsse auf die Lage der Fixpunkte ableiten. Als Erweiterung zu  $\alpha^{*3}$  (vgl. (64)) können die Fixpunkte

$$\hat{\alpha}^* = \left( -\frac{X_1}{Y_1}, 0, 0 \right) \quad \text{und} \quad \alpha^* = (\alpha_1^*, 0, \alpha_Y^*) \quad (95)$$

gefunden werden. Aus (94) folgt

$$X_1 + Y_1 \alpha_1^* - A_1 \alpha_Y^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1^* > -\frac{X_1}{Y_1} = \hat{\alpha}_1^* \quad , \quad (96)$$

wobei  $A_1 > 0$  und  $\alpha_Y^* > 0$  ausgenutzt wurde. Auf ähnliche Weise kann für den vollständig wechselwirkenden Fixpunkt  $\alpha^{*4}$  verfahren werden. Für die Fixpunkte

$$\hat{\alpha}^* = \left( \frac{Z_1 X_2 - X_1 Y_2}{Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2}, \frac{Z_2 X_1 - X_2 Y_1}{Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2}, 0 \right) \quad \text{und} \quad \alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_Y^*) \quad (97)$$

folgt

$$\alpha_1^* > \hat{\alpha}_1^* \quad \text{und} \quad \alpha_2^* > \hat{\alpha}_2^* \quad . \quad (98)$$

Man erkennt, dass eine Yukawa-Kopplung mit  $\alpha_Y(t \rightarrow \infty) \neq 0$  die Kopplungskonstanten  $\alpha_1^*$  und  $\alpha_2^*$  stets vergrößert. Hier ist eine genaue Berechnung von  $\beta_Y$  nötig, um zu überprüfen ob  $\alpha_1^*$  und  $\alpha_2^*$  weiterhin im perturbativen Bereich liegen können. Hinsichtlich Abbildung 6 ist zu erwarten, dass die Untergrenze für  $n_{s_j}$  um physikalische und perturbative Fixpunkte zu erhalten durch die nicht verschwindende Yukawa-Kopplung erhöht wird. An (96) bzw. (97) erkennt man außerdem

$$\alpha_Y^* = \frac{X_1 + Y_1 \alpha_1^* + Z_1 \alpha_2^*}{A_1} \left( = \frac{X_2 + Y_2 \alpha_2^* + Z_2 \alpha_1^*}{A_2} \right) \quad . \quad (99)$$

Da  $X_1$ ,  $Y_1$  und  $Z_1$  unabhängig von  $n_{f_d}$  sind während  $A \propto n_{f_d}$ , lässt sich vermuten, dass eine hohe Anzahl von dQCD-Fermionen die Perturbativität von  $\alpha_Y$  begünstigt, unter der Annahme, dass sich  $\alpha_1^*$  und  $\alpha_2^*$  ähnlich verhalten wie im Yukawa-freien Fall.

## Literatur

- [1] Quantum chromodynamics. *K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014) and 2015 update.*
- [2] Y. Bai and P. Schwaller. Scale of dark qcd. *Phys. Rev. D, 89:063522, Mar 2014.*
- [3] Andrew D. Bond and Daniel F. Litim. Theorems for Asymptotic Safety of Gauge Theories. 2016.
- [4] Thomas Curtright. Three-loop charge renormalization effects due to quartic scalar self-interactions. *Phys. Rev. D, 21:1543–1549, Mar 1980.*
- [5] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories.* Frontiers in Physics Series. Westview Press, 1999.
- [6] S.W. Hawking and W. Israel. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey.* Cambridge University Press, 1979.
- [7] Matti Jarvinen and Elias Kiritsis. Holographic Models for QCD in the Veneziano Limit. *JHEP, 03:002, 2012.*
- [8] D. R. T. Jones. Two-loop  $\beta$  function for a  $G_1 \times G_2$  gauge theory. *Phys. Rev. D, 25:581–582, Jan 1982.*
- [9] D. F. Litim and F. Sannino. Asymptotic safety guaranteed. *arXiv*, Jun 2014.
- [10] Ming-xing Luo, Hua-wen Wang, and Yong Xiao. Two loop renormalization group equations in general gauge field theories. *Phys. Rev., D67:065019, 2003.*
- [11] Axel Maas and Tajdar Mufti. Correlation Functions and Confinement in Scalar QCD. *PoS, QCD-TNT-III:024, 2013. [PoSEPS-HEP2013,022(2013)].*
- [12] Marie E. Machacek and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory. *Nuclear Physics B, 222(1):83 – 103, 1983.*
- [13] Marie E. Machacek and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory (ii). yukawa couplings. *Nuclear Physics B, 236(1):221 – 232, 1984.*
- [14] M.D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model.* Quantum Field Theory and the Standard Model. Cambridge University Press, 2014.

- [15] G. Veneziano. U(1) without instantons. *Nuclear Physics B*, 159(1):213 – 224, 1979.
- [16] S. Weinberg. Critical phenomena for field theorists. 1976.
- [17] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 2. Cambridge University Press, 1996. Cambridge Books Online.
- [18] E. Zeidler. Springer-handbuch der mathematik iv. 2013.