





Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades  
Master of Science

UV-Fixpunkte einer  
 $SU(N_c) \times SU(N_d)$  Eichtheorie

Dominik Kahl  
geboren in Recklinghausen

2016

Lehrstuhl für Theoretische Physik IV  
Fakultät Physik  
Technische Universität Dortmund



Erstgutachter: Prof. Dr. Hiller  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Päs  
Abgabedatum: 31. Oktober 2016



## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine  $SU(N_c) \times SU(N_d)$ -Eichtheorie als Erweiterung der asymptotisch freien Quantenchromodynamik des Standardmodells der Teilchenphysik auf mögliche asymptotic safety Szenarien bei hohen Energien untersucht. Nach einer Einführung in das Standardmodell werden Beiträge zur  $\beta$ -Funktion der Eichtheorie durch Eichwechselwirkungen und Yukawa-Kopplungen diskutiert, danach wird die Theorie mathematisch formuliert. Es werden allgemeine Eigenschaften einer  $\beta$ -Funktion untersucht und Stabilitätskriterien für Fixpunkte der reinen Eichtheorie abgeleitet. Durch das Anwenden dieser Kriterien werden Obergrenzen für die Anzahl neuer Teilchen und für die Dimension  $N_d$  der dunklen Eichgruppe gefunden, unter denen asymptotic safety möglich ist. Außerdem wird festgestellt, dass eine hohe Teilchenzahl im joint-Sektor förderlich für die Perturbativität der Fixpunkte ist. Abschließend werden die vier gefundenen asymptotic safety Szenarien mit Standardmodellvorhersagen verglichen und festgestellt, dass sich zwei Szenarien ähnlich dem Standardmodell, die anderen zwei Szenarien jedoch qualitativ anders verhalten.

## Abstract

In this thesis I will investigate a  $SU(N_c) \times SU(N_d)$  gauge theory for the potential of evolving UV fixed points and asymptotically safe running couplings as a modification to the asymptotically free quantum chromodynamics of the standardmodel. After a brief introduction to the standard model of particle physics I will discuss the contributions of gauge couplings and Yukawa couplings to the gauge coupling  $\beta$ -function. I will derive criteria for stable UV fixed points and apply these to the pure gauge theory to deduce upper limits for the number of new particles and for the group parameter  $N_d$ . It will turn out that a maximum number of join-particles leads to perturbatively controlled fixed points. Four possible scenarios of asymptotic safety will emerge, two of which lead to running couplings that behave like the  $SU(N_c)$  gauge theory of the standardmodel, while the remaining two differ qualitatively from the standard model predictions.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Quantenfeldtheorie und Standardmodell</b>	<b>2</b>
2.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	2
2.2	Gluon-Selbstenergie und laufende Kopplung . . . . .	3
2.2.1	Gluonpropagator in $\mathcal{O}(g^0)$ und $\mathcal{O}(g^1)$ . . . . .	5
2.2.2	Gluonpropagator in $\mathcal{O}(g^2)$ . . . . .	6
2.3	Laufende Kopplung in der Standardmodell QCD . . . . .	8
<b>3</b>	<b>QCD <math>\times</math> dark QCD</b>	<b>10</b>
3.1	Die Standardmodell QCD . . . . .	10
3.2	Dark QCD . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Allgemeine Untersuchung einer <math>\beta</math>-Funktion</b>	<b>16</b>
4.1	Vereinfachung des mathematischen Problems . . . . .	17
4.2	Verhalten in einer Umgebung eines Fixpunktes . . . . .	18
4.3	Stabilitätsbedingungen im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	21
4.3.1	hyperbolischer Fixpunkt . . . . .	21
4.3.2	nicht-hyperbolischer Fixpunkt . . . . .	22
<b>5</b>	<b>UV-Fixpunkte der <math>SU_{\text{QCD}} \times SU_{\text{dQCD}}</math></b>	<b>24</b>
5.1	UV-Verhalten bei $\alpha_{\text{vw}}^*$ . . . . .	27
5.1.1	attraktiver Fixpunkt . . . . .	27
5.1.2	Sattelpunkt . . . . .	28
5.2	UV-Verhalten bei $\alpha_{\text{tw1}}^*$ . . . . .	33
5.3	UV-Verhalten bei $\alpha_{\text{tw2}}^*$ . . . . .	35
5.4	Qualitative Änderungen durch Yukawa-Terme . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Matching mit dem Standardmodell</b>	<b>38</b>
6.1	Extrapolation eines Fixpunktes . . . . .	38
6.2	Extrapolation von $\alpha_{\text{tw1}}^*$ . . . . .	43
6.3	Extrapolation von $\alpha_{\text{tw2}}^*$ . . . . .	43
6.4	Extrapolation von $\alpha_{\text{vw}}^*$ . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Zusammenstellung der Ergebnisse</b>	<b>47</b>



# 1 Einleitung

Das *Standardmodell der Teilchenphysik* (SM) und die *Allgemeine Relativitätstheorie* (ART) sind zwei Theorien der Physik, die aus heutiger Sicht auf keiner grundlegenden aufbauen und daher als fundamental angesehen werden können. Das SM ist eine Quantentheorie und beschreibt die Physik auf Größenskalen von Elementarteilchen und Baryonen bis hin zur Atomphysik. Es gibt zwei fundamentale Kräfte, die Starke Kraft oder *Quantenchromodynamik* (QCD) und die Elektroschwache Kraft, sowie Wechselwirkungen mit dem Higgsfeld. Seit der Entdeckung des Higgs-Bosons im Jahr 2012 [5] ist das SM in sich abgeschlossen und alle erwarteten Elementarteilchen wurden gefunden. Dennoch ist bekannt, dass Erweiterungen nötig sind, um bisher nicht abgedeckte Phänomene zu beschreiben, so gibt es im SM keine Beschreibung der gravitativen Wechselwirkung zwischen den Elementarteilchen. Die ART beschreibt die Gravitation auf kosmischen Größenskalen. Die erstmalige Beobachtung von Gravitationswellen im Jahr 2016 [6] war eine weitere Bestätigung der Theorie. Die ART ist jedoch nicht im Sinne des SM quantisierbar. Da die Gravitation in der Quantenphysik und quantenphänomene in der ART oft vernachlässigbar sind, tritt diese Problematik nicht immer zum Vorschein. Zwei Gebiete der Physik, die eine gemeinsame Beschreibung benötigen, sind frühe Stadien des Universums [15], in denen auf kleinen Größenskalen extreme Energien vorherrschten, und *dunkle Materie* (DM), da auch diese Art der Materie aus elementaren Teilchen aufgebaut sein muss. Kosmologische Experimente zeigen, dass es diese neue Art der Materie mit einer Energiedichte von  $\Omega_{\text{DM}} \approx 0,2$  in Einheiten der kritischen Massendichte im Universum gibt [1], die eine schwache Ankopplung an die SM-Materie haben muss und gravitativ wechselwirkt. Im Rahmen von  $\Lambda$ CDM-Theorien wird eine kalte, d.h. nicht-relativistische, DM vorhergesagt. Y. Bai und P. Schwaller schlagen vor, die DM Masse analog zur Masse der bekannten baryonischen Materie zu erzeugen. Die Masse der normalen Materie, d.h. der Protonen und Neutronen, wird im wesentlichen durch Quark und Gluon Wechselwirkungen der QCD erzeugt. Eine analoge Dynamik, genannt *dark QCD* (*dQCD*), zusammen mit einem Mechanismus, der die Baryogenese in den dunklen Sektor erweitert, kann damit eine Erklärung für DM sein [7].

Die Einbettung der Gravitation ins SM führt zu nicht-renormierbaren Theorien [16], die in der Regel unendlich viele Renormierungskonstanten erfordern um auf allen Energieskalen gültig zu sein. Sie gelten daher oft als unphysikalisch oder ungeeignet für eine fundamentale Theorie. Durch ein *asymptotic safety* (AS) Szenario ist es jedoch möglich, die Theorie bis auf eine endliche Zahl von Parametern zu bestimmen, sodass AS als Erweiterung der üblichen Forderung nach Renormierbarkeit verstanden werden kann [16] [27].

In dieser Arbeit soll das QCD $\times$ dQCD Modell von Bai und Schwaller auf mögliche AS Szenarien im UV-Bereich, d.h. im Grenzwert hoher Energien, untersucht werden.

## 2 Quantenfeldtheorie und Standardmodell

In einer *Quantenfeldtheorie* (QFT) werden physikalische Entitäten als Anregungszustände von Quantenfeldern verstanden. Ein Schlüssel zu den experimentell zugänglichen Wirkungsquerschnitten ist die Berechnung von *Korrelatorfunktionen* oder *n-Punkt Funktionen*

$$\left\langle \mathbf{T} \phi^{r_1}(x_1) \dots \phi^{r_N}(x_N) \right\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi^{r_1}(x_1) \dots \phi^{r_N}(x_N) \exp \{iS[\phi]\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \{iS[\phi]\}} \quad (1)$$

im Pfadintegralformalismus von Feynman [25]. Die Information über die möglichen physikalischen Prozesse der Quantenfelder  $\phi$  ist dabei in dem Wirkungsfunktional  $S$  bzw. der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  enthalten, welche in einer  $D$ -Dimensionalen Raumzeit über

$$S[\phi] = \int d^D x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, t) \quad (2)$$

verknüpft sind [25]. Die möglicherweise verschiedenartigen Felder  $\phi^{r_i}$  können dabei in verschiedene mathematische Räume abbilden und somit Teilcheneigenschaften, insbesondere Transformationseigenschaften unter Eichsymmetrien, darstellen.

### 2.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das SM ist eine QFT nach dem Prinzip, invariant unter bestimmten Symmetrietransformationen zu sein. Die Dynamik wird dabei durch die kombinierte Eichgruppe  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  in der Lagrangedichte repräsentiert und durch die Angabe unter welcher Darstellung der Eichgruppe die Felder transformieren. Neben den postulierten Feldern der Quarks, Leptonen und des Higgs wird so die Existenz von Eichfeldern und Wechselwirkungen mit den übrigen Feldern gefordert, welche keine Singletts der entsprechenden Eichgruppe sind.

Im SM kennt man bisher sechs Quark-Flavour, *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top* ( $t$ ), und *bottom*, die als Dirac-Fermionen in der Lagrangedichte auftauchen. Ebenfalls als Dirac-Fermionen werden die geladenen Leptonen, das *Elektron*, das *Myon* und das *Tauon* eingeführt. Die drei *Neutrinos* kommen dagegen ausschließlich als linkshändige Weyl-Spinoren vor, sodass sie im SM masselos sein müssen. Das einzige skalare Feld des SM ist das *Higgs-Feld*, welches im Higgsmechanismus für die Brechung der Symmetriegruppe verantwortlich ist.

Als eine der fundamentalen Kräfte des SM beschreibt die QCD die Wechselwirkungen zwischen Quarks, den Bausteinen der Hadronen, und den Gluonen, den Eichfeldern der QCD. Die mathematische Beschreibung erfolgt durch Darstellungen der

$SU(3)$ , bei der einem Quark  $\psi^f$  mit Flavour  $f$  ein Colour-Triplett  $\psi^f = (\psi_1^f, \psi_2^f, \psi_3^f)^T$  zugeordnet wird. Außerdem folgt die Existenz von acht masselosen Gluonen, die mit Quarks und untereinander wechselwirken [13]. Eine genauere mathematische Beschreibung folgt in Abschnitt 3. Charakteristisch für die QCD des SM ist die in Abschnitt 2.3 vorgestellte Energieabhängigkeit der QCD Kopplungskonstanten. Der Pol bei  $\Lambda_{\text{QCD}}$  ist dabei für die hadronische Bindung bei niedrigen Energien verantwortlich und somit insbesondere für die baryonische Massendichte  $\Omega_B$  im Universum, während es bei hohen Energien gerade zur asymptotisch freien QCD kommt.

Die Symmetriegruppe  $SU(2) \times U(1)$  repräsentiert die Elektroschwache Kraft. In ihr werden die Wechselwirkungen zwischen linkshändigen Isospin-Dupletts

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau_L^- \end{pmatrix}, \quad (3)$$

über insgesamt vier Eichbosonen beschrieben. Durch den Higgsmechanismus wird die Symmetriegruppe zu einer  $U(1)$  gebrochen, welche als Elektromagnetismus identifiziert werden kann. Als Eichbosonen der gebrochenen Symmetrie entstehen die massiven Bosonen  $W^+$ ,  $W^-$  und  $Z$  sowie das masselose Photon.

Im Higg-Sektor gibt es neben einem Potenzial  $V[\phi]$  sogenannte Yukawa-Kopplungen der Form  $Y_{ij} Q_L^i \phi q_R^j$  zwischen einem Isospin-Duplett  $Q_L^i$ , dem Higgsfeld  $\phi$  und einem rechtshändigen Fermion  $q_R^j$ , mit der Kopplungsstärke  $Y_{ij}$ . Im Higgsmechanismus wird das Potenzial  $V[\phi]$  minimiert und die  $SU(2) \times U(1)$  Symmetrie unterhalb einer charakteristischen Energieskala spontan gebrochen. Dies hat die Massenerzeugung der Teilchen und das Flavour-Mixing der Quarks zur Folge [3].

Für eine effektive QCD×QED hat Bednyakov gezeigt, dass ab der Energieskala der  $t$ -Masse die QED korrektoren vernachlässigt werden können [9]. Daraus lässt sich schließen, dass es zulässig ist, den Elektroschwachen- und den Higgs-Sektor nicht weiter zu betrachten.

## 2.2 Gluon-Selbstenergie und laufende Kopplung

Nun werden die wichtigsten Punkte bei der Berechnung von Korrelatorfunktionen mit Hilfe von erzeugenden Funktionalen gezeigt. Ein umfassendes Bild dazu ist in [25] und [30] zu finden. Zunächst werden die erzeugenden Funktionale  $Z$  und  $W$  eingeführt um die Gluon-Selbstenergie in einer vereinfachten Theorie zu berechnen. Aus der Rechnung wird die Notwendigkeit der Regularisierung und Renormierung abgeleitet. Schließlich wird die  $\beta$ -Funktion der Beispieltheorie gefunden.

Die Rechnung erfolgt am Beispiel einer  $SU(N)$  mit skalaren Materiefeldern  $\phi_i$  in der Darstellung  $S$  und Eichfeldern  $\mathcal{A}^A$  in *adjungierter Darstellung*. Der Eichfixierungsterm  $-\frac{1}{2\xi}\partial_\mu\mathcal{A}^{A\mu}\partial_\nu\mathcal{A}^{A\nu}$  wird vorerst allgemein gelassen. Aus der Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \mathcal{A}, \partial\mathcal{A}) = & \frac{1}{2} \left( \left[ i\delta_{ji}\partial_\mu - g t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A \right] \phi_i \right)^* \left( \left[ i\delta_{ji}\partial^\mu - g t_{ji}^A \mathcal{A}^{A\mu} \right] \phi_i \right) \\ & - \frac{1}{4} F^{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^A - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu \mathcal{A}^{A\mu} \partial_\nu \mathcal{A}^{A\nu}\end{aligned}\quad (4)$$

mit  $F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g f^{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C$  lassen sich die Wirkungsfunktionale

$$S_M[\phi] = \int d^D x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i \quad (5)$$

$$S_G[\mathcal{A}] = \int d^D x \frac{1}{2} \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A \partial^\nu \mathcal{A}^{A\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A \partial^\mu \mathcal{A}^{A\nu} - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu \mathcal{A}^{A\mu} \partial_\nu \mathcal{A}^{A\nu} \quad (6)$$

$$S_1[\phi, \mathcal{A}] = \int d^D x i g \partial^\mu \phi_j t_{ji}^A \phi_i \mathcal{A}_\mu^A \quad (7)$$

ableiten. Gluon-Selbstwechselwirkungen werden nicht betrachtet. Außerdem wurde eine reelle Darstellung  $S$  gewählt, sodass  $\phi^* = \phi$  und  $(t_{ji}^A)^* = (-t_{ji}^A)$ . Mit den Propagatoren

$$\Delta(x, y) = i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2} \quad (8)$$

$$\Delta^{\rho\epsilon}(x, y) = \frac{i}{D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2} \left[ \eta^{\rho\epsilon} - (1-\xi) \frac{p^\rho p^\epsilon}{p^2} \right] \quad (9)$$

und dem erzeugenden Funktional

$$Z[J, J_\mu] := \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\mathcal{A} \exp \left\{ iS_M[\phi] + iS_G[\mathcal{A}] + iS_1[\phi, \mathcal{A}] + iJ_i \phi_i + iJ_\mu^A \mathcal{A}^{A\mu} \right\} \quad (10)$$

gilt die wichtige Beziehung

$$Z[J, J_\mu] = \exp \left\{ iS_1 \left[ \frac{\delta}{i\delta J}, \frac{\delta}{i\delta J_\mu} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} J_i \Delta J_i \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} J_\mu^A \Delta^{\mu\nu} J_\nu^A \right\} . \quad (11)$$

Dabei wurden die erzeugenden Ströme  $J_i(x)$  und  $J_\mu^A(x)$  eingeführt, sowie die Schreibweisen

$$J_i \phi_i = \int d^D x J_i(x) \phi_i(x) \quad , \quad J_i \Delta J_i = \int d^D x d^D y J_i(x) \Delta(x, y) J_i(y) \quad , \quad (12)$$

und

$$J_\mu^A \mathcal{A}^{A\mu} = \int d^D x J_\mu^A(x) \mathcal{A}^{A\mu}(x) \quad , \quad J_\rho^A \Delta^{\rho\epsilon} J_\epsilon^A = \int d^D x d^D y J_\rho^A(x) \Delta^{\rho\epsilon}(x, y) J_\epsilon^A(y) . \quad (13)$$

Durch das Ausführen von Funktionalableitungen in (10) lassen sich nun die Korrelatorfunktionen aus (1) rekonstruieren,

$$\left. \frac{\delta}{i\delta J_i(x)} \right|_{J=J_\mu=0} Z[J, J_\mu] = \langle \phi_i(x) \rangle \quad . \quad (14)$$

Entsprechend können durch mehrmaliges Ableiten höhere Korrelatorfunktionen berechnet werden. Die formale Entwicklung

$$Z[J, J_\mu] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n}}{m!n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_m d^D y_1 \dots d^D y_n \quad (15)$$

$$Z_{i_1 \dots i_m, \mu_1 \dots \mu_n}^{(m,n) A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) J_{i_1}(x_1) \dots J_{i_m}(x_m) J_{\mu_1}^{A_1}(y_1) \dots J_{\mu_n}^{A_n}(y_n)$$

erlaubt dabei eine kompakte Schreibweise.

### 2.2.1 Gluonpropagator in $\mathcal{O}(g^0)$ und $\mathcal{O}(g^1)$

Es wird nun gezeigt, dass der Gluonpropagator als die 2-Punkt Funktion

$$\langle \mathcal{A}_\mu^A(x_1) \mathcal{A}_\nu^B(x_2) \rangle = Z_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(x_1, x_2) \quad (16)$$

in  $\mathcal{O}(g^0)$  verstanden werden kann. In  $\mathcal{O}(g^0 J_i^0 J_\rho^2)$  kann (11) vereinfacht als

$$Z[J, J_\rho] = -\frac{1}{2} J_\rho^A \Delta^{\rho\epsilon} J_\epsilon^A \quad (17)$$

geschrieben werden, alle anderen Ordnungen werden verschwinden. Mit (14) gilt dann

$$Z_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(x_1, x_2) = \frac{\delta}{\delta J_\mu^A(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_\nu^B(x_2)} \frac{1}{2} J_\rho^C \Delta^{\rho\epsilon} J_\epsilon^C = \delta^{AB} \Delta_{\mu\nu}(x_1, x_2) \quad . \quad (18)$$

Der Gluonpropagator aus (9) ist demnach die 2-Punkt Funktion  $Z_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(x_1, x_2)$  in  $\mathcal{O}(g^0)$ .

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass der  $\mathcal{O}(g^1)$  Beitrag zu  $Z_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(x_1, x_2)$  verschwinden muss.

### 2.2.2 Gluonpropagator in $\mathcal{O}(g^2)$

Die einzige beitragende Ordnung ist hier  $\mathcal{O}(g^2 J_i^4 J_\rho^4)$ ,

$$Z[J, J_\mu] = -\frac{1}{2} g^2 t_{ji}^C t_{lk}^D \int d^D y_1 d^D y_2 \left( \partial_\rho \frac{\delta}{i\delta J_j(y_1)} \right) \frac{\delta}{i\delta J_i(y_1)} \frac{\delta}{i\delta J_\rho^C(y_1)} \left( \partial_\sigma \frac{\delta}{i\delta J_l(y_2)} \right) \frac{\delta}{i\delta J_k(y_2)} \frac{\delta}{i\delta J_\sigma^D(y_2)} \frac{1}{8} (J_m \Delta J_m) (J_n \Delta J_n) \frac{1}{8} (J_\alpha^E \Delta^{\alpha\beta} J_\beta^E) (J_\gamma^F \Delta^{\gamma\delta} J_\delta^F) . \quad (19)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2} g^2 t_{ji}^C t_{lk}^D \int d^D y_1 d^D y_2 \\ & \left[ \Delta_{\mu\nu}(x_1, x_2) \Delta_{\rho\sigma}(y_1, y_2) \delta^{AB} \delta^{CD} + \Delta_{\mu\rho}(x_1, y_1) \Delta_{\nu\sigma}(x_2, y_2) \delta^{AC} \delta^{BC} \right. \\ & \quad \left. + \Delta_{\mu\sigma}(x_1, y_2) \Delta_{\nu\rho}(x_2, y_1) \delta^{AD} \delta^{BC} \right] \\ & \left[ \Delta(y_1, y_2) \partial^\rho \partial^\sigma \Delta(y_1, y_2) \delta_{ki} \delta_{lj} + \partial^\rho \Delta(y_1, y_1) \partial^\sigma \Delta(y_2, y_2) \delta_{ij} \delta_{lk} \right. \\ & \quad \left. + \partial^\sigma \Delta(y_1, y_2) \partial^\rho \Delta(y_2, y_1) \delta_{lj} \delta_{ik} \right] . \end{aligned} \quad (20)$$

Um die Berechnung zu vereinfachen ist es nun hilfreich, ein neues Funktional  $W$  als

$$Z[J, J_\mu] = \exp \{ W[J, J_\mu] \} \quad (21)$$

einzuführen. Es gibt wieder eine formale Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} W[J, J_\mu] &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{i^{m+n}}{m!n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_m d^D y_1 \dots d^D y_n \\ & W_{i_1 \dots i_m, \mu_1 \dots \mu_n}^{(m,n) A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) J_{i_1}(x_1) \dots J_{i_m}(x_m) J_{\mu_1}^{A_1}(y_1) \dots J_{\mu_n}^{A_n}(y_n) \end{aligned} \quad (22)$$

analog zu (15). Für  $Z_{\mu\nu}^{(0,2) AB}$  lässt sich die Beziehung

$$Z_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(x_1, x_2) = W_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(x_1, x_2) + W_\mu^{(0,1) A}(x_1) W_\nu^{(0,1) B}(x_2) \quad (23)$$

ableiten. Dabei erfüllt jede Funktion  $W^{(m,n)}$  die Cluster-Eigenschaft  $W^{(m,n)} \rightarrow 0$ , wenn die erzeugenden Ströme  $J$  und  $J_\mu$  separierbare Träger haben. Für (20) bedeutet das, dass die äußeren Punkte  $x_1, x_2$  und die Vertizes  $y_1, y_2$  durch Propagatoren verbunden sein müssen, um zu  $W_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(x_1, x_2)$  beizutragen. Man spricht deshalb vom erzeugenden Funktional verbundener Korrelatorfunktionen. Damit bleibt von (20)

mit der Symmetrie unter  $y_1 \leftrightarrow y_2$  und der Antisymmetrie von  $t_{ji}^A$

$$W_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(x_1, x_2) = g^2 \text{Tr}(t^A t^B) \int d^D y_1 d^D y_2 \Delta_{\mu\rho}(x_1, y_1) \Delta_{\nu\sigma}(x_2, y_2) \\ [\Delta(y_1, y_2) \partial^\rho \partial^\sigma \Delta(y_1, y_2) - \partial^\rho \Delta(y_1, y_2) \partial^\sigma \Delta(y_2, y_1)] \quad . \quad (24)$$

Die Fouriertransformation dieses Ausdrucks ergibt

$$\widetilde{W}_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(k_1, k_2) = g^2 \text{Tr}(t^A t^B) \frac{\delta(k_1 + k_2)}{D^2 k_1^4} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left( \frac{q^\sigma q^\rho}{q^2 (k_1 + q)^2} + \frac{q^\sigma (k_1 + q)^\rho}{q^2 (k_1 + q)^2} \right) \\ \left( \eta_{\mu\rho} - (1 - \xi) \frac{k_{1\mu} k_{1\rho}}{k_1^2} \right) \left( \eta_{\nu\sigma} - (1 - \xi) \frac{k_{2\nu} k_{2\sigma}}{k_2^2} \right) \delta(k_1 + k_2) \quad , \quad (25)$$

wobei das Integral abhängig von  $D$  divergent sein kann. Eine Berechnung mit Hilfe der Schwinger-Parametrisierung ergibt

$$\widetilde{W}_{\mu\nu}^{(0,2) AB}(k_1, k_2) = g^2 \text{Tr}(t^A t^B) \frac{\delta(k_1 + k_2)}{D^2 k_1^4} \left\{ i (k_{1E}^2)^{D/2-2} (4\pi)^{-D/2} \right. \\ \left[ (B(D/2 + 1, D/2 - 1) - B(D/2, D/2 - 1) k_1^\rho k_1^\sigma) + B(D/2, D/2 - 1) k_{1E}^2 \delta^{\rho\sigma} \frac{\Gamma(1 - D/2)}{\Gamma(2 - D/2)} \right] \\ \left. \Gamma(2 - D/2) \right\} \left( \eta_{\mu\rho} - (1 - \xi) \frac{k_{1\mu} k_{1\rho}}{k_1^2} \right) \left( \eta_{\nu\sigma} - (1 - \xi) \frac{k_{2\nu} k_{2\sigma}}{k_2^2} \right) \delta(k_1 + k_2) \quad . \quad (26)$$

In dimensionaler Regularisierung kann nun  $D = 4 - 2\epsilon$  mit einem reellen  $\epsilon > 0$  gesetzt werden. Die Massendimension  $[g] = (4 - D)/2$  der Kopplungskonstanten wird durch  $g \rightarrow \mu^{(4-D)/2} g$  berücksichtigt, wobei eine unphysikalische Massenskala  $\mu$  eingeführt wird. Den divergenten Term  $\widetilde{W}_{\text{div}}$  kann man nun als

$$\widetilde{W}_{\text{div}}(k) = i \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr}(t^A t^B) \frac{1}{6} [k_\rho k_\sigma - k_E^2 \delta_{\rho\sigma}] \Gamma(\epsilon) \left( \frac{4\pi\mu^2}{k_E^2} \right)^\epsilon \quad (27)$$

$$\simeq i \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr}(t^A t^B) \frac{1}{6} [k_\rho k_\sigma - k_E^2 \delta_{\rho\sigma}] \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi e^{-\gamma_E} \mu^2}{k_E^2} \right) \right) \quad (28)$$

schreiben. Dabei wurden die Propagatoren der äußeren Gluonen absepariert und die Feynmanzeichnung  $\xi = 1$  gewählt. Durch die Wahl  $4\pi e^{-\gamma_E} \mu^2 \sim k_E^2$  verschwindet der logarithmische Term, und die Massenskala  $\mu$  kann mit der Energieskala des physikalischen Prozesses identifiziert werden. Um die  $1/\epsilon$  Divergenz interpretieren zu können, werden renormierte Felder und Kopplungskonstanten gemäß

$$Z_\phi^{1/2} \phi_R = \phi \quad , \quad Z_{\mathcal{A}}^{1/2} \mathcal{A}_R = \mathcal{A} \quad , \quad Z_g g_R = \mu^{(D-4)/2} g \quad (29)$$

eingeführt. Dabei sind  $Z_\phi$ ,  $Z_{\mathcal{A}}$  und  $Z_g$  Renormierungskonstanten. Damit wird (28)

zu

$$\widetilde{W}_{\text{div}}(k) = i\delta^{AB} [k_\rho k_\sigma - k_E^2 \delta_{\rho\sigma}] \left\{ \frac{g_R^2}{16\pi^2} \frac{1}{6} T(S) \frac{1}{\epsilon} + (Z_{\mathcal{A}} - 1) \right\} . \quad (30)$$

Dabei wurde die Gruppenkonstante  $T(S)d(S)\delta^{AB} = \text{Tr}(t^A t^B)$  und die Multiplizität  $d(S)$  der Darstellung eingeführt. Die Renormierungskonstante  $Z_{\mathcal{A}}$  ist nun

$$Z_{\mathcal{A}} = 1 - \frac{g_R^2}{16\pi^2} \frac{1}{6} T(S)d(S) . \quad (31)$$

Auf gleiche Weise können  $\widetilde{W}^{(2,0)}$  und  $\widetilde{W}^{(2,1)}$  berechnet werden, um die weiteren Renormierungskonstanten zu bestimmen. Unter Vernachlässigung dieser Beiträge kann jedoch

$$Z_g = Z_{\mathcal{A}}^{1/2} \simeq 1 + \frac{g_R^2}{16\pi^2} \frac{1}{12} T(S)d(S) \quad (32)$$

benutzt werden. Es folgt

$$\beta(g_R) := \mu \frac{dg_R}{d\mu} = \frac{g_R^3}{16\pi^2} \frac{1}{6} T(S)d(S) + \mathcal{O}(g_R^5) . \quad (33)$$

### 2.3 Laufende Kopplung in der Standardmodell QCD

Im Folgenden werden stets renormierte Größen betrachtet, sodass der entsprechende Index ab jetzt unterdrückt wird.

Mit  $T(S) = 1/2$  für Darstellungen einer  $SU(N)$  folgt aus (33)

$$\beta(g) > 0 \quad \text{und} \quad g(\mu) \longrightarrow \infty \quad (34)$$

für steigendes  $\mu$ . Hier wird es sogar einen Landaupol geben, d.h.  $g(\mu) \rightarrow \infty$  wenn  $\mu \rightarrow \mu_{\text{Landau}} < \infty$ .

Eine Berechnung der vollen  $\beta$ -Funktion mit komplexen Fermionen und reellen Skalaren in  $\mathcal{O}(g^3)$  ergibt [23]

$$\beta(g) = \frac{g^3}{16\pi^2} \left( \frac{4}{3} T(F)d(F) + \frac{1}{6} T(S)d(S) - \frac{11}{3} C_2(SU(N)) \right) . \quad (35)$$

Dabei ist  $F$  die Darstellung der Fermionen und  $C_2(SU(N)) = N$  der quadratische



Casimiroperator der adjungierten Darstellung. Im SM gibt es  $d(S) = 0$  Skalare mit Colour-Ladung,  $d(F) = n_f$  Dirac-Fermionen und es ist  $N = 3$ . Unter der Bedingung  $33/2 > n_f$  gilt nun

$$\beta(g) < 0 \quad \text{und somit} \quad g(\mu) \longrightarrow 0 \quad (36)$$

für steigendes  $\mu$ . Für die  $n_f = 6$  bekannten Quarks ist diese Bedingung erfüllt, das heißt Quarks sind für hohe Energieskalen asymptotisch frei. Nun tritt jedoch ein Pol für niedrige Energieskalen bei  $\Lambda_{\text{QCD}}$  auf. Diese Skala ist als Confinement Scale bekannt. An Gleichung (35) sieht man außerdem, dass das Einführen weiterer Materiefelder die  $\beta$ -Funktion in den positiven Bereich verschieben kann. Für UV-finite Kopplungskonstanten gibt es also Obergrenzen an die Anzahl der Teilchen, abhängig von der Gruppe und Darstellung der Teilchen.

### 3 QCD × dark QCD

Das Verhalten der QCD-Kopplungskonstanten ist im Standardmodell allein nicht im Stande ein asymptotic safety Szenario zu entwickeln, wie in Abschnitt 2.3 gezeigt wurde. Durch die Erweiterung der QCD um eine weitere Eichgruppe, die dark QCD, ergeben sich qualitativ völlig neue Möglichkeiten im Hochenergieverhalten der Kopplungskonstanten.

#### 3.1 Die Standardmodell QCD

Im Standardmodell wird die QCD durch die Symmetriegruppe  $SU(N_c)$  dargestellt, unter der sich die Quarks in der *fundamentalen Darstellung* und die Gluonen in der adjungierten Darstellung transformieren. Im SM gibt es  $n_f = 6$  verschiedene Quarkflavour und  $N_c = 3$  Colours. Da die QCD Flavour-Blind ist, d.h. da die Wechselwirkung unabhängig von der Flavour-Quantenzahl ist, ist die Erweiterung auf  $N_c$  Colour und  $n_f$  Flavour jedoch trivial. Die Lagrangedichte kann als

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_i^f \left( i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ij} - g_s \gamma^\mu t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A - m_f \delta_{ij} \right) \psi_j^f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \quad (37)$$

geschrieben werden [2]. Dabei stellt  $\psi_i^f$  ein Quarkfeld mit Colour  $i$  und Flavour  $f \in \{1, 2, \dots, n_f\}$  und mit der Masse  $m_f$  dar,  $g_s$  ist die Kopplungskonstante der QCD. Die Indizes  $i, j \in \{1, 2, \dots, N_c\}$  gehören zur fundamentalen Darstellung, die adjungierten Darstellung wird mit  $A \in \{1, 2, \dots, N_c^2 - 1\}$  dargestellt. Man bezeichnet das Multipllett  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_c})^T$  als Colour-Multipllett<sup>1</sup> unter der fundamentalen Darstellung, wenn es unter Anwendung der  $SU(N_c)$  gemäß

$$\psi(x) \longrightarrow \underbrace{U(x)}_{\in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x) U(x)^\dagger \quad (38)$$

transformiert. Die Gluonfelder  $\mathcal{A}_\mu^A$  mit Erzeugern  $t^A \in \mathbb{C}^{N_c \times N_c}$  transformieren dagegen in der adjungierten Darstellung [28]

$$t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A(x) \longrightarrow U(x) t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A(x) U(x)^\dagger - i(\partial_\mu U(x)) U(x)^\dagger \quad . \quad (39)$$

Die Dynamik und Propagation der Gluonen wird dabei durch den Feldstärketensor vermittelt,

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g_s f^{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C \quad , \quad [t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C \quad . \quad (40)$$

---

<sup>1</sup>Der Flavour-Index  $f$  wird ab jetzt weggelassen.

Versucht man die QCD im Feynmanformalismus zu quantisieren, werden außerdem Eichfixierung und Faddeev-Popov-de-Witt Ghosts benötigt [28], diese können jedoch nach der Modellbildung hinzugefügt werden, sodass sie hier nicht auftauchen.

### 3.2 Dark QCD

In [7] wird die dQCD eingeführt, um die DM Massendichte  $\Omega_{\text{DM}}$  im Universum zu erklären. Dazu wird das Niederenergieverhalten der neu eingeführten Kopplungskonstanten  $g_d$  untersucht. Es wird eine Energieskala  $\Lambda_{\text{dQCD}}$  gefunden, die analog zur QCD Confinement Scale  $\Lambda_{\text{QCD}}$  die Größenordnung der Baryonenmasse bestimmt. Die Theorie ist aber, ebenfalls analog zur QCD, auch bis zu beliebig hohen Energieskalen anwendbar und soll hier auf ihr Hochenergieverhalten untersucht werden.

Die Lagrangedichte der dQCD kann analog zu (37) als

$$\mathcal{L}_{\text{dQCD}} = \bar{\xi}_r^f \left( i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{rs} - g_d \gamma^\mu \tilde{t}_{ts}^M \tilde{\mathcal{A}}_\mu^M - \tilde{m}_f \delta_{rs} \right) \xi_s^f - \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}^M \tilde{F}^{M\mu\nu} \quad (41)$$

definiert werden. Die Fermionen  $\xi^f$  der dQCD sollen in der fundamentalen Darstellung der  $SU(N_d)$  sein, entsprechend laufen die Indizes  $r, s \in \{1, 2, \dots, N_d\}$  und  $f \in \{1, 2, \dots, n_{f_d}\}$ , während die Felder der Eichbosonen  $\tilde{\mathcal{A}}_\mu^M$  wieder in der adjungierten Darstellung transformieren,  $M \in \{1, 2, \dots, N_d^2 - 1\}$ . Der Feldstärketensor  $\tilde{F}_{\mu\nu}^M$  wird wie in (40) definiert. Wie sich in Abschnitt 5 zeigen wird, begünstigt eine hohe Anzahl von Skalaren die auftretenden Fixpunkte dahingehend, dass Kopplungskonstanten kleiner werden und somit unter perturbative Kontrolle kommen, ohne ihr UV-attraktives Verhalten zu verlieren. Skalare  $\phi^f$  und  $\chi^f$  unter der QCD bzw. dQCD können über

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^S = \left( \left[ i\delta_{ji} \partial_\mu - g_s t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A - \frac{1}{2} (m_f^S)^2 \delta_{ji} \right] \phi_i^f \right)^\dagger \left( \left[ i\delta_{ji} \partial^\mu - g_s t_{ji}^A \mathcal{A}^{A\mu} - \frac{1}{2} (m_f^S)^2 \delta_{ji} \right] \phi_i^f \right) \quad (42)$$

und

$$\mathcal{L}_{\text{dQCD}}^S = \left( \left[ i\delta_{sr} \partial_\mu - g_d \tilde{t}_{sr}^M \tilde{\mathcal{A}}_\mu^M - \frac{1}{2} (\tilde{m}_f^S)^2 \delta_{sr} \right] \chi_r^f \right)^\dagger \left( \left[ i\delta_{sr} \partial^\mu - g_d \tilde{t}_{sr}^M \tilde{\mathcal{A}}^{M\mu} - \frac{1}{2} (\tilde{m}_f^S)^2 \delta_{sr} \right] \chi_r^f \right) \quad (43)$$

eingeführt werden (vgl. [20]). Der Flavour-Index  $f$  läuft wieder über alle  $n_{\text{sc}}$  QCD Skalare bzw. alle  $n_{\text{sd}}$  dQCD Skalare. Die Colour-Indizes  $i, j$  und  $r, s$  über alle  $N_c$  Colours bzw.  $N_d$  dark Colours.

Bis zu diesem Punkt sind die QCD und dQCD voneinander unabhängig, in dem

Sinne, dass es keine zusammenhängenden Feynmangraphen gibt, in denen Teilchen des QCD- und dQCD-Sektors gleichzeitig auftreten. Um dies zu ermöglichen wird ein joint-Sektor eingeführt, Teilchen die unter beiden Symmetriegruppen geladen sind und somit an  $\mathcal{A}_\mu^C$  und  $\widetilde{\mathcal{A}}_\mu^C$  mit der entsprechenden Kopplungskonstanten koppeln [7]. Unter der Annahme, dass sie ebenfalls in den fundamentalen Darstellungen beider Symmetriegruppen transformieren, können die entsprechenden Teile der Lagrangedichte als

$$\mathcal{L}_{\text{joint}} = \bar{\zeta}_{ir}^f \left( i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ij} \delta_{rs} - g_s \gamma^\mu t_{ij}^A \mathcal{A}_\mu^A \delta_{rs} - g_d \gamma^\mu \tilde{t}_{rs}^M \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^M \delta_{ij} - m_f^{\text{joint}} \delta_{ij} \delta_{rs} \right) \zeta_{js}^f \quad (44)$$

$$\mathcal{L}_{\text{joint}}^S = \left( \left[ i\delta_{ji} \delta_{sr} \partial_\mu - g_s t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A \delta_{sr} - g_d \tilde{t}_{sr}^M \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^M \delta_{ji} - \frac{1}{2} \left( m_f^{\text{S,joint}} \right)^2 \delta_{ji} \delta_{sr} \right] \eta_{ir}^f \right)^\dagger \quad (45)$$

$$\left( \left[ i\delta_{ji} \delta_{sr} \partial_\mu - g_s t_{ji}^A \mathcal{A}_\mu^A \delta_{sr} - g_d \tilde{t}_{sr}^M \widetilde{\mathcal{A}}_\mu^M \delta_{ji} - \frac{1}{2} \left( m_f^{\text{S,joint}} \right)^2 \delta_{ji} \delta_{sr} \right] \eta_{ir}^f \right)$$

geschrieben werden. Dabei laufen die Indizes  $i, j \in \{1, 2, \dots, N_c\}$ ,  $r, s \in \{1, 2, \dots, N_d\}$  und  $f \in \{1, 2, \dots, n_f\}$  für die Fermionen  $\zeta$  bzw.  $f \in \{1, 2, \dots, n_s\}$  für Skalare  $\eta$ .

In [28] zeigt Weinberg, dass durch die Reskalierung zu einer Energieskala  $\mu$  alle Massen  $m$  gemäß  $m/\mu$  skalieren und im Grenzwert hoher Energien gegen Null gehen. Entsprechend ist es bei der Untersuchung von UV-Fixpunkten zulässig, alle Massen gleich Null zu setzen.

Die bisher beschriebenen Lagrangedichten beinhalten ausschließlich Eichwechselwirkungen, es gibt jedoch weitere Arten von Wechselwirkungen bei denen keine Eichfelder beteiligt sind, 3-Skalar-Kopplungen, 4-Skalar-Kopplungen und Yukawa-Kopplungen. Im Folgenden werden Bedingungen an die Struktur der Yukawa-Terme hergeleitet und es wird kurz begündet, warum 3- und 4-Skalar-Kopplungen nicht weiter betrachtet werden.

**Yukawa-Kopplung:** Es gibt zwei Möglichkeiten eine lorentzinvariante Struktur der Yukawa-Terme zu erreichen. Dazu ist es hilfreich von Dirac-Fermionen  $\psi$  zu Weyl-Fermionen  $\psi_L$  und  $\psi_R$  überzugehen. Im Kern lassen sich die zwei Terme

$$\psi_R^\dagger \psi_L + \text{h.c.} \quad \text{und} \quad \psi_{L/R}^T \epsilon \psi_{L/R} + \text{h.c.} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

hinschreiben [25], dabei können auch einzelne  $\psi_{L/R}$  durch  $\xi_{L/R}$  oder  $\zeta_{L/R}$  ersetzt werden. Diese Terme sind von Dirac- bzw. Majorana-Massen bekannt. Durch das Hinzufügen eines skalaren Teilchens bleibt die Lorentzinvarianz erhalten, es ist jedoch möglich auch bei der Majorana-artigen Kopplung  $\psi_{L/R}^T \epsilon \psi_{L/R}$  Eichinvarianz unter allgemeinen  $SU(N)$  und  $U(N)$  Gruppen zu erreichen. Aus der Eichinvarianz ergeben sich dabei Bedingungen an die Yukawa-Kopplungen

[22][23]. Exemplarisch wird der Yukawa-Term

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \subset Y^{ir,js,kt} \zeta_{ir} \zeta_{js} \eta_{kt} \quad (47)$$

untersucht. Der linke Index steht dabei jeweils für die  $SU(N_c)$ , der rechte für die  $SU(N_d)$ . Das Ergebnis kann leicht an andere Yukawa-Terme angepasst werden kann, außerdem wurde die Lorentzstruktur nicht mehr geschrieben. Die Felder transformieren unter der kombinierten infinitesimalen Eichgruppe gemäß

$$\zeta_{ir} \longrightarrow (\mathbb{1}_{il} + i\epsilon^A t_{il}^A) (\mathbb{1}_{ru} + i\delta^M \tilde{t}_{ru}^M) \zeta_{lu} \quad , \quad \eta_{ir} \text{ analog} \quad , \quad (48)$$

daraus folgt für die Invarianz von (47) in Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^A)$  bzw.  $\mathcal{O}(\delta^M)$

$$Y^{lr,js,kt} (i t_{li}^A) + Y^{ir,ms,kt} (i t_{mj}^A) + Y^{ir,js,nt} (i t_{nk}^A) \stackrel{!}{=} 0 \quad (49)$$

$$Y^{iu,js,kt} (i \tilde{t}_{ur}^M) + Y^{ir,jv,kt} (i \tilde{t}_{vs}^M) + Y^{ir,js,kw} (i \tilde{t}_{wt}^M) \stackrel{!}{=} 0 \quad . \quad (50)$$

Eine Berechnung über Young-Tableaux [14] zeigt, dass nur zwei Arten von Yukawa-Kopplungen mit einer Majorana-artigen Lorentzstruktur invariant sein können, Kopplungen innerhalb eines Sektors,

$$Y^{i,j,k} \psi_i \psi_j \phi_k + Y^{r,s,t} \xi_r \xi_s \chi_t + Y^{ir,js,kt} \zeta_{ir} \zeta_{js} \eta_{kt} + \text{h.c.} \quad , \quad (51)$$

und Kopplungen die je ein QCD-, dQCD- und joint-Teilchen beinhalten,

$$Y^{i,r,js} \psi_i \xi_r \eta_{js}^* + \text{h.c.} \quad (52)$$

Mit dem Ansatz  $Y^{i,j,k}$  antisymmetrisch in  $i \leftrightarrow j$  und symmetrisch in  $i \leftrightarrow k$  in (51) wird (49) zu

$$t_{ii}^A + t_{jj}^A + t_{kk}^A = 0 \quad \text{mit} \quad i \neq j \neq k \quad . \quad (53)$$

Dies ist genau für eine  $SU(3)$  gültig. Da in dieser Arbeit das Hauptinteresse im Verhalten der Fixpunkte in Abhängigkeit von der Eichgruppe liegt, ist es nicht sinnvoll Yukawa-Terme zu berücksichtigen, die nur in drei von beliebig vielen  $SU(N_c) \times SU(N_d)$  Eichgruppen erlaubt sind. Sinnvoller wäre es hier, den Fall  $SU(3) \times SU(3)$  gesondert auf diese Yukawa-Beiträge zur  $\beta$ -Funktion zu untersuchen. Außerdem wird sich zeigen, dass es kein qualitativ neues UV-Verhalten gibt, dass nicht allein von Skalaren oder Fermionen hervorgerufen werden kann, sodass in Abschnitt 5 immer nur QCD-Fermionen (SM Quarks) mit dQCD/joint-Fermionen oder dQCD/joint-Skalaren betrachtet werden, d.h. entweder  $n_{s_d} = n_{s_j} = 0$  oder  $n_{f_d} = n_{f_j} = 0$ . Für den Term (52) folgt aus (49) und (50) für die Colour-Struktur der Yukawa-Kopplung

$$Y^{i,r,ls} t_{lj}^A - t_{il}^A Y^{l,r,js} = 0 \quad , \quad Y^{i,r,ju} \tilde{t}_{us}^M - \tilde{t}_{ru}^M Y^{i,u,js} = 0 \quad (54)$$

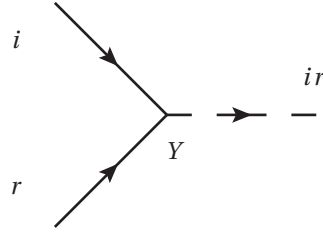


Abbildung 1: Möglicher Yukawa-Vertex in  $SU(N_c) \times SU(N_d)$ . Die Pfeile zeigen dabei die QCD×dQCD Ladungserhaltung an.

und mit dem Lemma von Schur

$$Y^{i,r,js} = Y \delta^{ij} \delta^{rs} \quad (55)$$

mit der Kopplungskonstanten  $Y$  [14]. Das entsprechende Feynmandiagramm ist in Abbildung 1 zu sehen. Berücksichtigt man gleichzeitig die Flavour-Quantenzahl, kann es insgesamt  $(n_{f_c} n_{f_d} n_{s_j})$  verschiedene Yukawa-Kopplungen geben. Eine allgemeine Untersuchung ist also auch hier schwierig, da durch Änderungen des Materieinhaltes auch die Anzahl der Yukawa-Kopplungskonstanten geändert wird. Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen ist die Einführung von Flavoursymmetrien, sodass für alle Yukawa-Terme nur eine einzige Kopplungskonstante  $Y$  verbleibt. In Abschnitt 5 entfallen solche Yukawa-Wechselwirkungen jedoch wieder, da  $n_{s_j} = 0$  oder  $n_{f_d} = 0$  gewählt werden kann, ohne qualitativ unterschiedliche UV-Verhalten der Eichwechselwirkungen zu verlieren.

Yukawa-Terme mit Dirac-artiger Lorentzstruktur,

$$Y^{i,r,js} \psi_i^\dagger \xi_r \eta_{js} + \text{ähnliche Terme} \quad , \quad (56)$$

sind in den gewählten Darstellungen nicht Eichinvariant. Hier besteht die Möglichkeit, den dQCD-Sektor konjugiert zur fundamentalen Darstellung transformieren zu lassen, in der infinitesimalen Transformation

$$\xi_r \longrightarrow \left( \mathbb{1}_{ru} - i\delta^M (\tilde{t}_{ru}^M)^* \right) \xi_u \quad , \quad \chi_r \text{ analog} \quad , \quad (57)$$

wodurch wieder Yukawa-Kopplungen mit der Colour-Struktur von (55) erlaubt sind. Diese Möglichkeit würde für die Eichkopplungen jedoch keinen Unterschied machen und zu den selben  $\beta$ -Funktionen führen, sodass hier keine neuen Phänomene im Vergleich zu (52) zu erwarten sind.

**3-Skalar-Kopplung:** Da die Fermionen und Skalare des QCD-, dQCD bzw. joint-Sektors jeweils dieselben Transformationseigenschaften besitzen, können die Ergebnisse (53) und (55) für die Eichstruktur der 3-Skalar-Kopplungen übernommen werden. Es folgt, dass die einzige Möglichkeit einer 3-Skalar-Kopplung mit einer nicht veränderlichen Anzahl von Kopplungskonstanten  $\lambda$

$$\mathcal{L}_{3\text{-Skalar}} = \lambda \phi_i \chi_r \eta_{ir}^* + \text{h.c.} \quad (58)$$

ist. In [18] schlägt Jones vor, 3-Skalar-Kopplungen durch diskrete Symmetrien zu verbieten. Luo, Wang und Xiao zeigen in [23], dass 3-Skalar-Terme durch 4-Skalar-Terme mit einem unphysikalischen Dummy-Feld beschrieben werden können und fallen aus dem gleichen Grund wie die 4-Skalar-Kopplung aus der Betrachtung heraus.

**4-Skalar-Kopplung:** Korrekturen durch 4-Skalar-Kopplungen tragen erst ab 3-Schleifen Ordnung zur  $\beta$ -Funktion der Eichkopplungen bei [12], da in dieser Arbeit jedoch nur 2-Schleifen  $\beta$ -Funktionen betrachtet werden, müssen sie nicht berücksichtigt werden.

## 4 Allgemeine Untersuchung einer $\beta$ -Funktion

In Abschnitt 2.2 wurde die  $\beta$ -Funktion einer skalaren  $SU(N)$  berechnet, bei der die Energieabhängigkeit der renormierten Kopplungskonstanten durch eine gewöhnliche *Differenzialgleichung* (DGL) erster Ordnung beschrieben wird. Für den allgemeinen Fall ergibt sich ein System aus gekoppelten DGLs. Dies lässt sich mit  $g := (g_1, \dots, g_N)^T$  und  $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$  auch als

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = \beta(g) \quad (59)$$

schreiben. Der  $\mathbb{R}^N$  ist dann der *Phasenraum* der  $\beta$ -Funktion. Wie an Gleichung (33) zu erkennen ist, sind die Beiträge zur  $\beta$ -Funktionen bei dimensionslosen Kopplungen mindestens  $\mathcal{O}(g^3)$ .

Lösungen der Gleichung (59) heißen *Trajektorien*, ein Punkt  $g^*$  im Phasenraum mit  $\beta(g^*) = 0$  heißt *Fixpunkt*.

Eine physikalisch sinnvolle QFT sollte für beliebige Energieskalen, insbesondere für beliebig hohe Energieskalen, Vorhersagen machen können, sofern sie nicht von Beginn an als effektive Theorie angesetzt ist. Für die Kopplungskonstanten heißt das, dass eine Trajektorie für  $\mu \rightarrow \infty$  die Grenzwerte  $g(\mu) \rightarrow g^*$  und  $\beta(g(\mu)) \rightarrow 0$  haben muss, um ein stabiles Hochenergieverhalten zu gewährleisten. Demnach sind gerade die Fixpunkte der  $\beta$ -Funktion die möglichen Grenzwerte der Kopplungskonstanten.

Für die Untersuchung von  $\beta$ -Funktionen haben sich die folgenden Bezeichnungen entwickelt.

**Gaußscher Fixpunkt:** Der Fixpunkt  $g^* = 0$  heißt Gaußscher Fixpunkt.

**Banks-Zaks Fixpunkt:** Ein Fixpunkt  $g^* \neq 0$ , der physikalisch sinnvoll und für  $\mu \rightarrow 0$  erreicht wird, heißt Banks-Zaks oder Caswell-Banks-Zaks Fixpunkt.

**Landau Pol:** Besitzt die Lösung des Problems (59) mit Anfangswert  $g(\mu_0) = g_0$  eine Polstelle  $\mu_{\text{Pol}} < \infty$ , sodass  $g(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \mu_{\text{Pol}}} \infty$ , dann spricht man von einem Landau-Pol (vgl. (34)).



## 4.1 Vereinfachung des mathematischen Problems

Die Berechnung einer Trajektorie als Lösung zum Anfangswertproblem (59) mit Anfangswert  $g(\mu_0) = g_0$  ist in der Regel analytisch nicht möglich. Durch einige einfache Schritte lässt sich das Problem jedoch zunächst in die einfacher zu handhabende Form eines autonomen DGL-Systems überführen und sich das Verhalten in der Nähe eines Fixpunktes bestimmen.

In [16] schlägt S. Weinberg die Einführung der dimensionslosen Kopplungskonstanten

$$\bar{g}_i(\mu) := \mu^{-d_i} g_i(\mu) \quad (60)$$

vor, wobei  $d_i$  die Massendimension der Kopplungskonstanten  $g_i$  ist. Es ist oft hilfreich die quadratischen Kopplungskonstanten

$$\alpha_i(\mu) := \mathcal{N} (\bar{g}_i(\mu))^2 \quad (61)$$

zu definieren um den Grad der  $\beta$ -Funktion zu verringern (vgl. [7], [19]). Dabei dient  $\mathcal{N}$  als Normierungskonstante, die insbesondere von dimensionslosen Größen wie Teilchenzahlen oder Größen der Symmetriegruppe abhängen kann.

**Beispiel.** Für ein eindimensionales Problem

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = X^g g(\mu)^3 + Y^g g(\mu)^5 \quad (62)$$

und für den einfachen Fall  $[g] = 0$  kann

$$\alpha(\mu) := \mathcal{N} g(\mu)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{d\mu} g = \frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{d\alpha}{d\mu} \quad (63)$$

definiert werden. So erhält man eine einfachere DGL mit den Koeffizienten  $X = 2X^g \mathcal{N}^{-1}$  und  $Y = 2Y^g \mathcal{N}^{-2}$ ,

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) = X \alpha(\mu)^2 + Y \alpha(\mu)^3 \quad (64)$$

Naheliegender wird wieder  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$  und  $\beta(\alpha) = \beta(g \circ \alpha)$  geschrieben.

Der physikalisch sinnvolle Wertebereich für die Energieskala  $\mu$  ist  $(0, \infty)$ . Mit der Renormierungsgruppenzeit (RG-Zeit)  $t$ , definiert als

$$t(\mu) := \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(t) = e^t \quad , \quad (65)$$

gibt es eine Bijektion  $(0, \infty) \xleftrightarrow{t} (-\infty, \infty)$ , die es erlaubt die Kopplungskonstante als

$$\tilde{\alpha}(t) := \alpha(e^t) = \alpha(\mu) \quad (66)$$

zu schreiben. Der Parameter  $\Lambda$  ist beliebig und hat keine physikalische Bedeutung, er wird später lediglich die Extrapolation der Fixpunkte übersichtlicher gestalten. Es folgt

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) = \mu \underbrace{\frac{dt}{d\mu}}_{=\mu^{-1}} \frac{d}{dt} \tilde{\alpha}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{\alpha}(t) \quad . \quad (67)$$

Damit ist Gleichung (59) äquivalent zu dem autonomen Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \beta(\alpha) \quad , \quad (68)$$

wobei  $\tilde{\alpha}$  wieder zu  $\alpha$  umbenannt wurde.

## 4.2 Verhalten in einer Umgebung eines Fixpunktes

Um das Verhalten der Kopplungskonstanten  $\alpha(t)$  in der Nähe eines Fixpunktes zu untersuchen wird die *Stabilitätsmatrix*

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} := \left( \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \quad (69)$$

eingeführt [16]. Außgewertet am Punkt  $\alpha^*$  ist die Schreibweise  $\left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_*$ . Ein Fixpunkt  $\alpha^*$  heißt *hyperbolisch*, wenn alle Eigenwerte von  $\left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_*$  einen von Null verschiedenen Realteil besitzen [29], sonst heißt er *nicht-hyperbolisch*.

Der Zusammenhang zu der Stabilität des Fixpunktes ist folgendermaßen zu erkennen.

In der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes  $\alpha^*$  kann Gleichung (68) durch ihre Linearisierung beschrieben werden. Da bei einem hyperbolischen Fixpunkt die Eigenvektoren  $\{e_i\}$  der Stabilitätsmatrix eine Basis sind, kann  $(\alpha(t) - \alpha^*)$  in Eigenvektoren zerlegt werden,

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) \simeq \left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_* (\alpha(t) - \alpha^*) = \left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_* \sum_{i=1}^N K_i(t) e_i \quad . \quad (70)$$

Für die Koeffizienten  $\{K_i\}$  in der Basis der Eigenvektoren ergibt sich das entkoppelte DGL-System

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N K_i(t) e_i + \alpha^* \right) = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* \sum_{i=1}^N K_i(t) e_i \quad (71)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} K_i(t) = K_i(t) \lambda_i \quad (72)$$

$$\Rightarrow K_i(t) = e^{\lambda_i t} K_i(0) \quad , \quad (73)$$

wobei  $\lambda_i$  der Eigenwert zu  $e_i$  ist. Damit kann das Verhalten der Kopplungskonstanten durch

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} K_i(0) e_i + \alpha^* \quad (74)$$

beschrieben werden. Dieses Ergebnis ist unter anderem in [27], [16] und [19] zu sehen. Aus Gleichung (74) wird dann klar, dass der Untervektorraum, der durch die Eigenvektoren  $\{e_i\}$  mit  $\Re \lambda_i < 0$  aufgespannt wird, die Punkte in der Fixpunktumgebung enthält, die für  $t \rightarrow \infty$  in den Fixpunkt hineinlaufen, entsprechend enthält der Untervektorraum zu Eigenvektoren mit  $\Re \lambda_i > 0$  alle Punkte, die den Fixpunkt für  $t \rightarrow -\infty$  erreichen beziehungsweise aus ihm herauslaufen. Alle weiteren Punkte der Fixpunktumgebung liegen auf Trajektorien, die den Fixpunkt nicht enthalten.

Ein Eigenvektor mit positivem Eigenwert wird oft auch als IR-attraktiv, mit einem negativen Eigenwert als IR-repulsiv bezeichnet [27]. Da in dieser Arbeit jedoch das UV-Verhalten von Interesse ist, werden die folgenden Bezeichnungen verwendet.

1. Ein Fixpunkt heißt *attraktiver (UV-)Fixpunkt*, wenn  $\Re \lambda_i < 0 \forall i$ .
2. Ein Fixpunkt heißt *repulsiver (UV-)Fixpunkt*, wenn  $\Re \lambda_i > 0 \forall i$ .
3. Falls ein Fixpunkt weder attraktiv noch repulsiv ist, d.h. wenn es sowohl Trajektorien gibt, die in ihn hinein-, als auch welche die hinauslaufen, wird er *Sattelpunkt* genannt.
4. Die Menge der in den Fixpunkt hineinlaufenden Kurven heißt *kritische Hyperfläche*  $M_c$  (critical manifold) oder *UV-Hyperfläche* des Fixpunktes.

Bei allgemeinen Betrachtungen (vgl. [27]) wird der nicht-hyperbolische Fall  $\lambda_i = 0$  oft als Sonderfall nicht weiter betrachtet. Bei der Untersuchung einer konkreten  $\beta$ -Funktion kommt dieser Sonderfall aber auf natürliche Weise zu Stande, sobald ein Fixpunkt einen Wert  $\alpha_i^* = 0$  besitzt. In diesem Fall ist es schwierig allgemeine Aussagen zu treffen.

Um 2-dimensionale autonome DGL-Systeme zu veranschaulichen eignet sich das Bild des Kopplungskonstanten-Flusses. Dabei „fließt“ ein Anfangswert  $\alpha(t_0)$  entlang einer Trajektorie durch den Phasenraum. Der Satz von Picard-Lindelöf stellt dabei sicher, dass sich zwei Trajektorien nicht schneiden. Ein Flussdiagramm wie in Abbildung 2 zeigt das Verhalten von  $\alpha(t)$ , indem das Geschwindigkeitsfeld  $\beta$  durch Pfeile im Phasenraum dargestellt wird. In dieser Arbeit zeigen die Pfeile stets in Richtung steigender Energie. An dem Flussdiagramm 2 zeigt sich außerdem eine weitere Eigenschaft der Theorie. Die Fixpunkte<sup>2</sup>  $\alpha_{\text{tw}1}^*$  und  $\alpha_{\text{vw}}^*$  sind durch eine Trajektorie  $\alpha(t)$  verbunden, für die in diesem Beispiel  $\alpha(t \rightarrow -\infty) = \alpha_{\text{tw}1}^*$  und  $\alpha(t \rightarrow \infty) = \alpha_{\text{vw}}^*$  gilt. Die  $\beta$ -Funktion ist in der Nähe solcher Trajektorien numerisch instabil, sodass die Darstellung im Flussdiagrammen nur bedingt möglich ist.

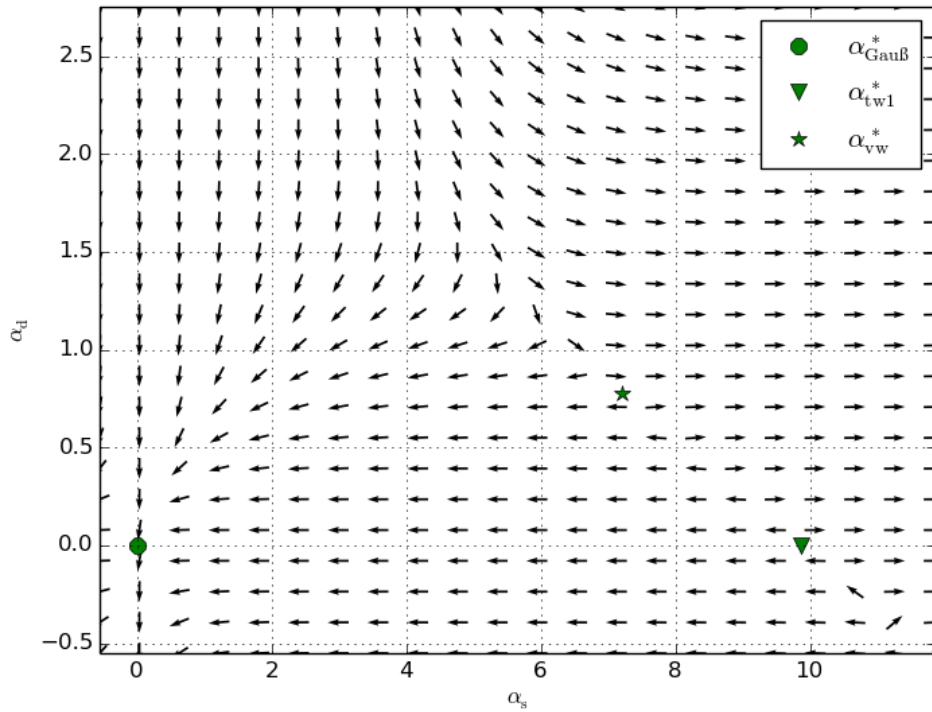


Abbildung 2: Beispiel eines Flussdiagramms für (95). Die Parameter sind  $(N_c, N_d, n_{f_c}, n_{s_c}, n_{f_d}, n_{s_d}, n_{f_j}, n_{s_j}) = (3, 3, 6, 0, 0, 0, 0, 3)$ .

<sup>2</sup>Die genaue Berechnung der Fixpunkte folgt in Abschnitt 5.

### 4.3 Stabilitätsbedingungen im $\mathbb{R}^2$

Für ein System mit zwei Kopplungskonstanten vereinfacht sich die Untersuchung erheblich, da der Phasenraum der  $\mathbb{R}^2$  ist und die Stabilitätsmatrix die Form

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \sum_{i=2, j=0} i \alpha_1^{i-1} \alpha_2^j X_{ij}^1 & \sum_{i=2, j=1} j \alpha_1^i \alpha_2^{j-1} X_{ij}^1 \\ \sum_{i=1, j=2} i \alpha_1^{i-1} \alpha_2^j X_{ij}^2 & \sum_{i=0, j=2} j \alpha_1^i \alpha_2^{j-1} X_{ij}^2 \end{pmatrix} \quad (75)$$

annimmt. Die Eigenwerte von  $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$  können explizit als

$$\lambda_{+/-} = \frac{1}{2} \text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \pm \sqrt{\left( \frac{\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}}{2} \right)^2 - \text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}} \quad (76)$$

angegeben werden. Es wird nun kurz begründet, warum ein vollständig wechselwirkender Fixpunkt im allgemeinen als hyperbolisch, d.h.  $\Re \lambda_{+/-} \neq 0$ , angenommen werden darf, danach wird gezeigt, dass teilweise wechselwirkende Fixpunkte für beliebig hohe Ordnung nicht-hyperbolisch sind. Im 2-dimensionalen Fall lässt sich jedoch ein alternatives Stabilitätskriterium für solche Fixpunkte finden.

#### 4.3.1 hyperbolischer Fixpunkt

Sind  $\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$  und  $\text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$  nicht Null, lässt sich das Vorzeichen der Eigenwerte leicht Nachrechnen, das Ergebnis ist in Tabelle 1 zu sehen.

$\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$	$\text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$	$\Re \lambda_+$	$\Re \lambda_-$	UV-Verhalten
$> 0$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	repulsiv
$< 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	attraktiv
$-$	$< 0$	$> 0$	$< 0$	Sattelpunkt

Tabelle 1: Das UV-Verhalten hyperbolischer Fixpunkte für  $\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \neq 0$  und  $\text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \neq 0$ .

An einem vollständig wechselwirkenden Fixpunkt  $(\alpha_1^* \neq 0, \alpha_2^* \neq 0)^T$  sind in der Regel alle Einträge von (75) ungleich Null. Die Koeffizienten  $X_{ij}^1$  und  $X_{ij}^2$  hängen zwar von den gleichen Parametern, der Anzahl und Darstellung der Teilchen und den Eigenschaften der Eichgruppe, ab, es gibt aber keinen Grund, warum  $\text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* = 0$  sein sollte. Wenn dies in einer bestimmten Ordnung der Fall ist, sollte zur Untersuchung dieses Fixpunktes die nächst höhere Ordnung Störungstheorie mit berücksichtigt werden, um sinnvolle Aussagen treffen zu können.

### 4.3.2 nicht-hyperbolischer Fixpunkt

Ein teilweise wechselwirkender Fixpunkt, o.E.  $\alpha^* = (\alpha_1^*, 0)$ , führt zu der Stabilitätsmatrix

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_* = \begin{pmatrix} \sum_{i=2} i(\alpha_1^*)^{i-1} X_{i0}^1 & \sum_{i=2} (\alpha_1^*)^i X_{i1}^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (77)$$

mit den Eigenvektoren und Eigenwerten

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \propto \begin{pmatrix} -\sum_{i=2} (\alpha_1^*)^i X_{i1}^1 \\ \sum_{i=2} i(\alpha_1^*)^{i-1} X_{i0}^1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \sum_{i=2} i(\alpha_1^*)^{i-1} X_{i0}^1, \quad \lambda_2 = 0. \quad (78)$$

Da in  $\beta_2$  die Variable  $\alpha_2$  in jedem Monom mindestens zur zweiten Potenz auftaucht, ist dies für beliebig hohe Ordnung zu erwarten, sodass hier ein alternatives Kriterium für das UV-Verhalten des Fixpunktes gefunden werden muss.

Zunächst wird (70) um die zweite Ordnung der Taylorentwicklung ergänzt,

$$\beta_i(\alpha) \simeq \sum_{m=1}^2 \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_m} \right|_* (\alpha_m - \alpha_m^*) + \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^2 (\alpha_m - \alpha_m^*) \left. \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} \right|_* (\alpha_n - \alpha_n^*) \quad (79)$$

Wie in Abschnitt 4.2 wird diese Gleichung in der Eigenbasis der Stabilitätsmatrix geschrieben

$$\dot{K}_1(t) e_1^i + \dot{K}_2(t) e_2^i = \sum_{k,m=1}^2 K_k(t) \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_m} \right|_* e_k^m + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m,n=1}^2 K_k(t) K_l(t) \left. \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} \right|_* e_k^m e_l^n \quad (80)$$

$$= K_1(t) \lambda_1 e_1^i + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m,n=1}^2 K_k(t) K_l(t) \left. \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} \right|_* e_k^m e_l^n. \quad (81)$$

Die Indizes  $k$  und  $l$  laufen dabei für die zwei Eigenvektoren, während  $m, n$  und  $i$  für die Vektorkomponenten stehen. Der Koeffizientenvergleich in  $e_1$  führt in erster Ordnung zum gleichen Ergebnis wie beim hyperbolischen Fixpunkt. Auf der kritischen Hyperfläche gilt demnach  $\lambda_1 < 0 \Rightarrow K_1(t) \rightarrow 0$  für  $t$  groß, oder  $\lambda > 0 \Rightarrow K_1(t) \equiv 0$ , da der Fixpunkt sonst nicht erreicht wird. Für große  $t$  wird (81) damit zu

$$\dot{K}_2(t) e_2^i = \frac{1}{2} K_2(t)^2 \sum_{m,n=1}^2 \left. \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} \right|_* e_2^m e_2^n \quad (82)$$

$$= \frac{1}{2} K_2(t)^2 \sum_{m,n=1}^2 \left[ \left( e_2^m \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \right) \left( e_2^n \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \right) - e_2^m \frac{\partial e_2^n}{\partial \alpha_m} \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \right]_* \beta_i \quad (83)$$

$$= \frac{1}{2} K_2(t)^2 \left[ \sum_{m=1}^2 e_2^m \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_m} e_2^i - \sum_{m,n=1}^2 e_2^m \frac{\partial e_2^n}{\partial \alpha_m} \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \beta_i \right]_* \quad (84)$$

Für  $i = 2$  kann eine Lösung wie folgt gefunden werden. Der zweite Term in (84) ist wegen (77) gleich Null. Aus (76) und (75) erhält man am Fixpunkt

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_q} = \frac{\partial}{\partial \alpha_q} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha_q} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} \quad \begin{cases} = 0 & \text{für } q = 1 \\ \neq 0 & \text{für } q = 2 \end{cases} . \quad (85)$$

Es bleibt

$$\dot{K}_2(t) = \frac{1}{2} K_2(t)^2 e_2^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2} \Big|_* \quad \text{mit der Lösung} \quad K_2(t) = \frac{2}{2K_2(0)^{-1} - e_2^2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2} t} . \quad (86)$$

Da Eigenvektoren nur bis auf ein Vielfaches bestimmt sind, kann  $e_2^2 > 0$  gewählt werden. Damit  $\alpha(t=0)$  physikalisch ist folgt  $K_2(0) > 0$ , und damit  $K_2(t)$  für steigendes  $t$  keinen Pol passiert folgt

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2} < 0 \quad (87)$$

als Bedingung für einen in  $e_2$ -Richtung attraktiven Fixpunkt. Allgemein ist es nicht möglich, die DGL (84) mit  $i = 1$  zu lösen, da der zweite Term in der Klammer keine einfachen Eigenschaften aufweist. Da die DGL aber für jedes  $i$  einzeln gelten muss, muss jede Lösung mindestens (87) erfüllen. In der Praxis lässt sich jedoch tatsächlich feststellen, dass (87) die UV-Stabilität eines Fixpunktes exakt vorhersagt. Daher wird diese Bedingung im Folgenden weiter verwendet.

## 5 UV-Fixpunkte der $SU_{\text{QCD}} \times SU_{\text{dQCD}}$

Die allgemeinste Form der  $\beta$ -Funktion auf 2-Schleifen Ordnung einer  $G_1 \times G_2$ -Eichtheorie wurde von D.R.T. Jones berechnet [18]. Angewendet auf die  $SU(N_c) \times SU(N_d)$  ergibt sich für die  $\beta$ -Funktion die Form

$$\begin{pmatrix} \beta_s \\ \beta_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_s^g g_s^3 + Y_s^g g_s^5 + Z_s^g g_s^3 g_d^2 \\ X_d^g g_d^3 + Y_d^g g_d^5 + Z_d^g g_d^3 g_s^2 \end{pmatrix} . \quad (88)$$

Für die Darstellungen  $R_s$ ,  $R_d$ ,  $S_s$  und  $S_d$  der Fermionen bzw. Skalare sind die Koeffizienten von  $\beta_s$  gegeben durch

$$X_s^g = (16\pi^2)^{-1} \left[ \frac{2}{3} T(R_s) d(R_d) + \frac{1}{3} T(S_s) d(S_d) - \frac{11}{3} C_2(SU(N_c)) \right] \quad (89)$$

$$Y_s^g = (16\pi^2)^{-2} \left[ \left( \frac{10}{3} C_2(SU(N_c)) + 2C_2(R_s) \right) T(R_s) d(R_d) + \left( \frac{2}{3} C_2(SU(N_c)) + 4C_2(S_s) \right) T(S_s) d(S_d) - \frac{34}{3} C_2(SU(N_c))^2 \right] \quad (90)$$

$$Z_s^g = (16\pi^2)^{-2} [2C_2(R_d) d(R_d) T(R_s) + 4C_2(S_d) d(S_d) T(S_s)] . \quad (91)$$

Die Berechnung ist für Weyl-Fermionen geschehen. Betrachtet man Dirac-Fermionen erhalten  $d(R_s)$  und  $d(R_d)$  einen zusätzlichen Faktor von 2. Die Koeffizienten  $X_d^g$ ,  $Y_d^g$  und  $Z_d^g$  können durch den Tausch  $s \leftrightarrow d$  erhalten werden. Die Darstellungen der beteiligten Quantenfelder in der QCD×dQCD sind noch einmal in Tabelle 2 zusammengefasst.

In den gewählten Darstellungen gilt  $T(R_s) = T(S_s) = T(R_d) = T(S_s) = 1/2$ , außerdem  $C_2(SU(N_{s/d})) = N_{s/d}$  sowie  $C_2(R_{s/d}) = C_2(S_{s/d}) = (N_{s/d}^2 - 1)/(2N_{s/d})$ . In der QCD×dQCD gibt es drei verschiedenen Darstellungskombinationen der Materiefelder. Daher können  $d(R_s)$  und  $d(R_d)$  bzw.  $d(S_s)$  und  $d(S_d)$  in jedem Koeffizienten (89), (90) und (91) andere Werte annehmen und müssen einzeln bestimmt werden. Dies geschieht

Eichgruppe	$\psi, \phi$	$\xi, \chi$	$\zeta, \eta$	$\mathcal{A}$	$\widetilde{\mathcal{A}}$
$SU(N_c)$	$N_c$	1	$N_c$	$N_c^2 - 1$	1
$SU(N_d)$	1	$N_d$	$N_d$	1	$N_d^2 - 1$

Tabelle 2: Die Darstellungen der Beteiligten Quantenfelder. Dabei Stellen  $\psi$  und  $\phi$  die Dirac-Fermionen und Skalare der QCD,  $\xi$  und  $\chi$  die Fermionen und Skalare der dQCD dar. Die Felder  $\zeta$  und  $\eta$  sind unter beiden Eichgruppen geladen. Die Eichbosonen  $\mathcal{A}$  und  $\widetilde{\mathcal{A}}$  sind in der adjungierten Darstellung der QCD bzw. dQCD.



am einfachsten über das Zeichnen von Feynman-Diagrammen und Abzählen der möglichen Teilchen, die im entsprechenden Diagramm erlaubt sind.

Die Teilchenlinien in den Diagrammen werden nur mit ihren QCD und dQCD Quantenzahlen beschriftet. Dabei stehen wieder  $i$  und  $j$  für Colour bzw.  $r$  und  $s$  für dark Colour in der fundamentalen Darstellung,  $A$  und  $M$  für Colour und dark Colour der adjungierten Darstellung. Die Vertizes werden mit den entsprechenden Erzeugermatrizen beschriftet und enthalten bereits die Kopplungskonstanten. Es werden nur die Koeffizienten  $X_s^g$ ,  $Y_s^g$  und  $Z_s^g$  betrachtet,  $X_d^g$ ,  $Y_d^g$  und  $Z_d^g$  folgen analog mit  $\text{QCD} \leftrightarrow \text{dQCD}$ . Außerdem werden nur Fermionen diskutiert, um  $d(S_s)$  zu erhalten muss lediglich  $n_{f_c} \rightarrow n_{s_c}$  und  $n_{f_j} \rightarrow n_{s_j}$  ersetzt werden. Das gleiche gilt für  $d(S_d)$ . Wie in [21] gezeigt, kann die Eichung des Eichboson-Propagators so gewählt werden, dass die  $\beta$ -Funktion nur noch von der Renormierungskonstanten  $Z_{\mathcal{A}}$  des Eichfeldes abhängt, daher reicht es, hier nur 1- und 2-Schleifen Korrekturen zum Gluon-Propagator zu untersuchen, Korrekturen zu 3- oder 4-Punkt Funktionen müssen nicht berücksichtigt werden.

Der Koeffizient  $X_s^g$  entspricht der 1-Schleifen Korrektur zum Gluonpropagator. Bei der Fermionschleife in Abbildung 3 kann jedes der  $n_{f_c}$  QCD-Fermionen und jedes der  $n_{f_j}$  joint-Fermionen mit einer dark Colour  $r \in \{1, 2, \dots, N_d\}$  in der Schleife auftauchen. Damit ist  $d(R_d) = n_{f_c} + N_d n_{f_j}$ . Der Parameter  $n_{f_c}$  zählt die gesamte Anzahl der nur unter QCD geladenen Dirac-Fermionen, im SM Fall ist also  $n_{f_c} = 6$ .

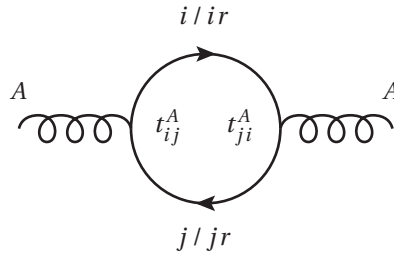


Abbildung 3: 1-Schleifen QCD/joint-Fermion Beitrag zum Gluonpropagator.

Der Koeffizient  $Y_s^g$  enthält die 2-Schleifen Beiträge proportional zu  $(t_{ij}^A)^4$ . Auch hier kann jeweils ein QCD-Fermion oder ein joint-Fermion mit einer dark Colour vorkommen, sodass wieder  $d(R_d) = n_{f_c} + N_d n_{f_j}$ .

Die Diagramme proportional zu  $(t_{ij}^A)^2 (\tilde{t}_{rs}^M)^2$  tragen zu  $Z_s^g$  bei und sind in Abbildung 4 zu sehen. Am Gluon-Fermion Vertex  $t_{ij}^A$  kann  $r$  jeden Wert  $1, 2, \dots, N_d$  annehmen, wieder mit jedem Flavour. QCD- oder dQCD-Fermionen können nicht auftauchen, sodass in diesem Fall  $d(R_d) = N_d n_{f_j}$ .

Die ermittelten Koeffizienten stimmen mit denen in [7] überein. Mit  $N_{f_c} := n_{f_c} + N_d n_{f_j}$ ,

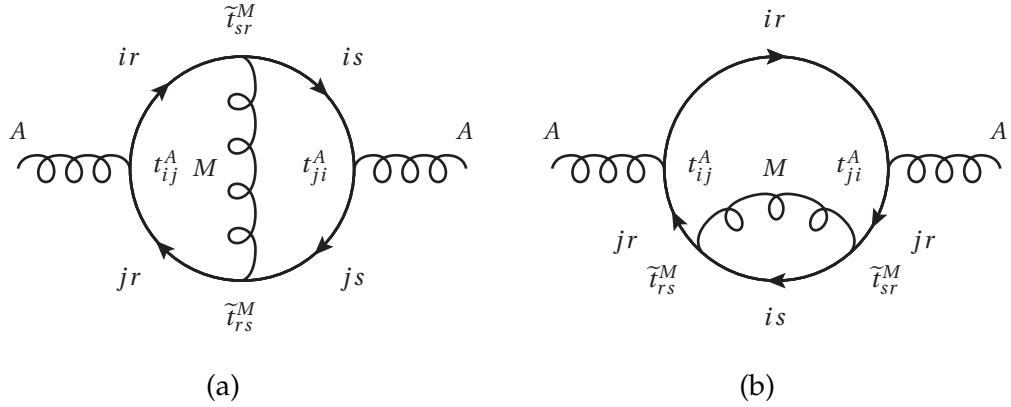


Abbildung 4: 2-Schleifen-Korrekturen  $\propto (t_{ij}^A)^2 (\tilde{t}_{rs}^M)^2$  zum Gluonpropagator.

$N_{s_c} := n_{s_c} + N_d n_{s_j}$ ,  $N_{f_d} := n_{f_d} + N_c n_{f_j}$  und  $N_{s_d} := n_{s_d} + N_c n_{f_j}$  lassen sie sich schreiben als

$$X_s^g = (16\pi^2)^{-1} \left[ \frac{2}{3} N_{f_c} + \frac{1}{6} N_{s_c} - \frac{11}{3} N_c \right] \quad (92)$$

$$Y_s^g = (16\pi^2)^{-2} \left[ \left( \frac{13}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right) N_{f_c} + \left( \frac{4}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right) N_{s_c} - \frac{34}{3} N_c^2 \right] \quad (93)$$

$$Z_s^g = (16\pi^2)^{-2} \left[ (N_d^2 - 1)(n_{f_j} + n_{s_j}) \right] \quad (94)$$

Da beide Kopplungskonstanten in einer 4-dimensionalen Raumzeit die Massendimension  $[g_s] = [g_d] = 0$  besitzen, werden die neuen Kopplungskonstanten  $\alpha_i := g_i^2/4\pi$  eingeführt. Die Bedingung  $|g_i| < 1$  für eine sinnvolle Störungstheorie lässt sich zu  $\alpha_i < 4\pi$  übersetzen. Mit  $X_i := 8\pi X_i^g$ ,  $Y_i := 32\pi^2 Y_i^g$  und  $Z_i := 32\pi^2 Z_i^g$  folgt

$$\beta(\alpha) = \begin{pmatrix} X_s \alpha_s^2 + Y_s \alpha_s^3 + Z_s \alpha_s^2 \alpha_d \\ X_d \alpha_d^2 + Y_d \alpha_d^3 + Z_d \alpha_s \alpha_d^2 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

und als Nullstellen findet man den Gaußschen Fixpunkt

$$\alpha_{\text{Gauß}}^* = (0, 0), \quad (96)$$

die teilweise wechselwirkenden Fixpunkte

$$\alpha_{\text{tw1}}^* = \left( -\frac{X_s}{Y_s}, 0 \right), \quad \alpha_{\text{tw2}}^* = \left( 0, -\frac{X_d}{Y_d} \right) \quad (97)$$

und den vollständig wechselwirkenden Fixpunkt

$$\alpha_{\text{vw}}^* = \left( \frac{Z_s X_d - X_s Y_d}{Y_s Y_d - Z_s Z_d}, \frac{Z_d X_s - X_d Y_s}{Y_s Y_d - Z_s Z_d} \right). \quad (98)$$

An den Fixpunkten gilt außerdem

$$\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* = (\alpha_s^*)^2 Y_s + (\alpha_d^*)^2 Y_d \quad \text{sowie} \quad \text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* = (\alpha_s^* \alpha_d^*)^2 (Y_s Y_d - Z_s Z_d) \quad . \quad (99)$$

## 5.1 UV-Verhalten bei $\alpha_{vw}^*$

### 5.1.1 attraktiver Fixpunkt

Für komplett UV-attraktives Verhalten müssen die Bedingungen

$$\alpha_s^* > 0 \quad \wedge \quad \alpha_d^* > 0 \quad \wedge \quad \text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* > 0 \quad \wedge \quad \text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* < 0 \quad (100)$$

erfüllt sein, man kann jedoch zeigen, dass diese Bedingungen für die gewählte Darstellung nicht gleichzeitig wahr sein können. Dazu werden sie zunächst in den Koeffizienten geschrieben und mit (99) verglichen. Es bietet sich an, eine Fallunterscheidung in den Vorzeichen von  $Y_s$  und  $Y_d$  zu machen. Es folgt

1.  $Y_s > 0 \wedge Y_d > 0$ : Dann ist  $\text{Sp} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* < 0$  nicht möglich.
2.  $Y_s < 0 \wedge Y_d < 0$ : Für einen physikalischen Fixpunkt muss

$$Z_s X_d > X_s Y_d \quad \wedge \quad Z_d X_s > Y_s X_d \quad (101)$$

gelten. Wie an (94) zu sehen ist, müssen beide  $Z_i > 0$  sein, dann folgt, dass  $X_i > 0$  ist. Die Rechnung ohne Skalare ergibt

$$X_s > 0 \stackrel{(92)}{\Rightarrow} N_{fc} > \frac{11}{2} N_c \quad \wedge \quad Y_s < 0 \stackrel{(93)}{\Rightarrow} N_{fc} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}} N_c \quad (102)$$

$$\Rightarrow \frac{11}{2} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}} \quad \text{!} \quad (103)$$

Das Einführen von Skalaren begünstigt  $X_s > 0$ , ist aber mathematisch nur für  $N_c = 1$  oder  $N_d = 1$  möglich. Da die  $SU(1)$  die Multiplikation mit Eins ist, ist

dieser Fall uninteressant. Unter Berücksichtigung von Skalaren ergibt sich

$$N_{f_c} > \frac{11}{2}N_c - \frac{1}{4}N_{s_c} \quad \wedge \quad N_{f_c} < \left[ \frac{34}{3}N_c^2 - \left( \frac{4}{3}N_c - \frac{1}{N_c} \right) N_{s_c} \right] \left( \frac{13}{3}N_c - \frac{1}{N_c} \right)^{-1} \quad (104)$$

$$\Rightarrow \left[ \left( \frac{4}{3}N_c - \frac{1}{N_c} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{13}{3}N_c - \frac{1}{N_c} \right) \right] N_{s_c} < \frac{34}{3}N_c^2 - \frac{11}{2}N_c \left( \frac{13}{3}N_c - \frac{1}{N_c} \right) \quad (105)$$

Für  $N_c = 1$  folgt die untere Grenze  $N_{s_c} \geq 14$ , für  $N_c \geq 2$  die obere Grenze  $N_{s_c} \lesssim -200$ , es gibt also keine physikalisch sinnvolle Lösung.

3.  $Y_s$  und  $Y_d$  haben verschiedene Vorzeichen: Damit  $\text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* > 0$  ist muss es ein  $Z_i < 0$  geben, was in der gewählten Darstellung (94) nicht möglich ist.

Für Fermionen und Skalare in der fundamentalen Darstellung der  $SU(N_c) \times SU(N_d)$  muss demnach  $\dim M_c \leq 1$ .

Bond und Litim konnten für einen vollständig wechselwirkenden, UV-attraktiven Fixpunkt die Bedingung  $C_2(S) < 1/11 C_2(G)$  für eine beliebige Darstellung herleiten [10]. Für die fundamentale Darstellung folgt  $N_c < \sqrt{\frac{11}{9}} \approx 1.1$ , dies deckt sich mit den Ergebnissen der konkreten Rechnung (105). Darüber hinaus konnten Sie zeigen, dass es für keine Darstellung  $S$  der Eichgruppen möglich ist, ein in jede Richtung UV-attraktives Verhalten zu erzeugen.

### 5.1.2 Sattelpunkt

Am physikalischen Sattelpunkt muss gelten

$$\alpha_s^* > 0 \quad \wedge \quad \alpha_d^* > 0 \quad \wedge \quad \text{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_* < 0 \quad , \quad (106)$$

in Koeffizienten ausgedrückt bedeutet das

$$Z_s X_d < X_s Y_d \quad \wedge \quad Z_d X_s < X_d Y_s \quad \wedge \quad Z_s Z_d > Y_s Y_d \quad . \quad (107)$$

Da es für den Sattelpunkt weniger Bedingungen als für einen UV-attraktiven Fixpunkt gibt, sind Fallunterscheidungen in den Vorzeichen von  $Y_i$  und  $X_i$  nötig. Es wird sich zeigen, dass nur Fälle mit  $X_s < 0 \wedge X_d < 0$  möglich sind, sodass es obere Schranken für die Teilchenzahlen und  $N_d$  gibt.

1.  $Y_s > 0 \wedge Y_d > 0$ :

a)  $X_s > 0 \wedge X_d > 0$ : Aus (107) folgt

$$Z_s < \frac{X_s}{X_d} Y_d \quad \wedge \quad Z_d < \frac{X_d}{X_s} Y_s \quad \wedge \quad Z_s Z_d > Y_s Y_d \quad (108)$$

was jedoch nicht gleichzeitig möglich ist.

b)  $X_s < 0 \wedge X_d < 0$ : Man erhält obere Begrenzungen für die Anzahl der joint-Fermionen

$$n_{f_c} + N_d n_{f_j} < N_c \quad \wedge \quad c \leftrightarrow d \quad (109)$$

$$\Rightarrow n_{f_j}^2 + n_{f_j} \frac{n_{f_d}}{N_c} + \frac{11}{2} \frac{n_{f_c}}{N_c} < \left( \frac{11}{2} \right)^2 \quad \wedge \quad c \leftrightarrow d \quad . \quad (110)$$

Es gibt also eine allgemeine Obergrenze von  $n_{f_j} < \frac{11}{2}$ , die für die Grenzfälle  $n_{f_c} = 0$  und  $n_{f_d} = 0$  oder  $N_c \rightarrow \infty$  und gleichzeitig  $N_d \rightarrow \infty$  erreicht wird. Eine strengere Grenze kann mit  $n_{f_c} = 6$  gefunden werden. Weniger QCD-Fermionen sind experimentell ausgeschlossen, mehr QCD-Fermionen wirken sich nachteilig auf die Entstehung von Fixpunkten aus. Daher sind die einzigen Standardmodell nahen Lösungen, die gleichzeitig zu sinnvollen Fixpunkten führen

$$N_c = 3 \quad N_d = 2 \quad n_{f_c} = 6 \quad 0 \leq n_{f_d} \leq 2 \quad n_{f_j} = 1 \quad , \quad (111)$$

weitere Lösungen gibt es nur für  $n_{f_c} < 6$  oder  $N_c > 3$ .

c)  $X_s < 0 \wedge X_d > 0$ : Dann müsste

$$\underbrace{Z_s X_d}_{>0} < \underbrace{X_s Y_d}_{<0} \quad \not\leq \quad , \quad (112)$$

dieser Fall kommt für physikalische Fixpunkte also nicht in Frage.

2.  $Y_s > 0 \wedge Y_d < 0$ :

a)  $X_d > 0$ : Wie schon gezeigt ist  $Y_d < 0 \wedge X_d > 0$  nicht möglich. Dies gilt in jeder Darstellung [10].

b)  $X_s > 0 \wedge X_d < 0$ : Es kommt direkt zum Widerspruch,

$$\underbrace{Z_d X_s}_{>0} < \underbrace{X_d Y_s}_{<0} \quad \not\leq \quad . \quad (113)$$

c)  $X_s < 0 \wedge X_d < 0$ : Auch hier erhält man eine Begrenzung für  $n_f$

$$n_{f_c} + N_d n_{f_j} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}} N_c \quad \wedge \quad n_{f_d} + N_c n_{f_j} < \frac{11}{2} N_d \quad (114)$$

$$\Rightarrow n_{f_j} < \sqrt{\frac{11}{2} \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}}} \approx 3.9 \quad . \quad (115)$$

Gleichzeitige Lösungen zu (107) mit  $N_c = 3$  und  $n_{f_c} \geq 6$  gibt es nicht.

3.  $Y_s < 0 \wedge Y_d < 0$ :

a) Ein  $X_i > 0$ : Wieder ist  $Y_i < 0 \wedge X_i > 0$  nicht möglich.

b)  $X_s < 0 \wedge X_d < 0$ : Hier folgt

$$n_{f_c} + N_d n_{f_j} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_c^2}} \quad \wedge \quad c \leftrightarrow d \quad (116)$$

$$\Rightarrow n_{f_j} < \frac{34}{\sqrt{\left(13 - \frac{1}{N_c^2}\right)\left(13 - \frac{1}{N_c^2}\right)}} \approx 2.7 \quad . \quad (117)$$

Auch hier gibt es keine Lösungen, die nahe am SM sind.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass es in allen Fällen Obergrenzen  $n_{f_j} \lesssim 4$  für die Anzahl der joint-Fermionen gibt, und durch das Einführen von QCD- und dQCD-Fermionen wird diese Grenze weiter nach unten verschoben. Der einzige Fall, der in der skalarfreien Theorie physikalische Sattelpunkte bringt, ist 1b. Exemplarisch ist das Flussdiagramm für  $n_{f_d} = 2$  in Abbildung 5 zu sehen. Alle drei Fixpunkte liegen, wie in Tabelle 3 zu sehen, weit im nicht-perturbativen Bereich. Nicht-perturbative  $SU(N)$  Dynamiken können in einem Veneziano-limit störungstheoretisch behandelt werden [17][19], dabei wird der Grenzfall  $N \rightarrow \infty, N_f \rightarrow \infty, N/N_f < \infty, g^2 N \rightarrow 0$  betrachtet [26]. Diese Methode wird hier jedoch nicht benutzt, da die Einführung von skalare Teilchen den Fixpunkt ebenfalls perturbativ macht.

$n_{f_d}$	0	1	2
$\alpha_{vw}^*$	(166.6, 60.8)	(69.3, 39.1)	(22.4, 28.7)

Tabelle 3: Lage des Sattelpunktes  $\alpha_{vw}^*$  ohne Skalare. Das Flussdiagramm für  $n_{f_j} = 2$  ist in Abbildung 5 dargestellt.

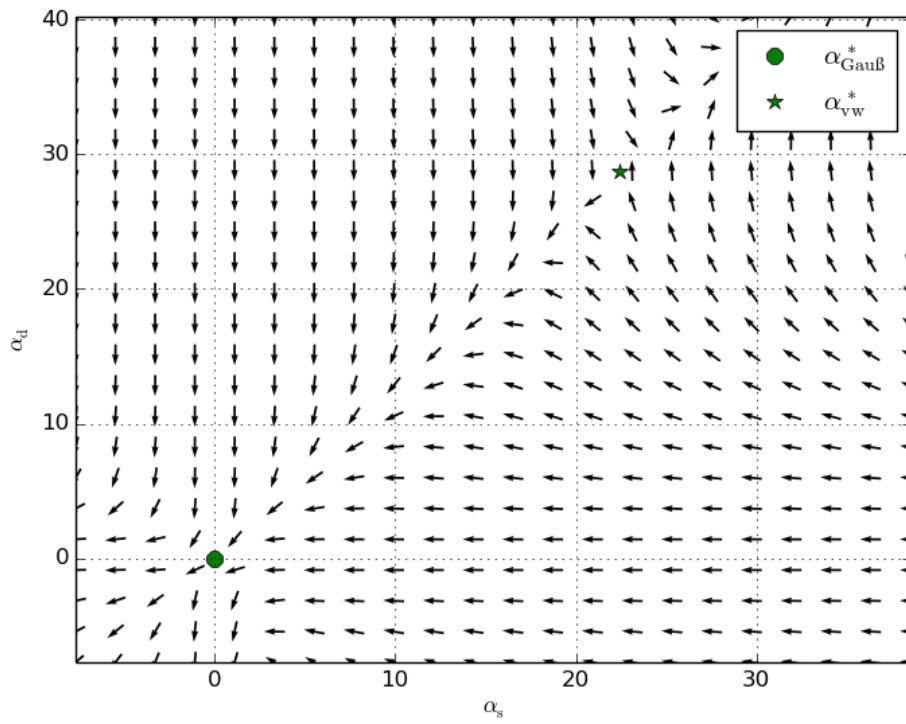


Abbildung 5: Das Flussdiagramm für eine Lösung vom Typ 1b. Der Fixpunkt  $\alpha_{\text{vw}}^*$  liegt im nicht-perturbativen Bereich. Die Parameter sind  $(N_c, N_d, n_{f_c}, n_{s_c}, n_{f_d}, n_{s_d}, n_{f_j}, n_{s_j}) = (3, 2, 6, 0, 2, 0, 1, 0)$ .

$N_d$	$n_{s_j}$	$n_{s_d}$	$N_d$	$n_{s_j}$	$n_{s_d}$	$N_d$	$n_{s_j}$	$n_{s_d}$
2	1	18	3	1	24-26	4	1	31-36
2	2	12-16	3	2	5-25	4	2	0-37
2	3	0-14	3	3	0-25	5	1	37-46
2	4	0-12	3	4	1-24	6	1	41-57
2	5	0-10	3	5	14-23	7	1	0-69
2	6	0-7	3	6	20-23			
2	7	0-5	3	7	22			
2	8	0-3						
2	9	0-1						

Tabelle 4: Mögliche Anzahlen von Skalaren für  $N_c = 3$ ,  $n_{f_c} = 6$  und  $n_{s_c} = n_{f_d} = n_{f_j} = 0$ .

An den Koeffizienten (92) und (93) sieht man, dass Skalare qualitativ den gleichen Einfluss auf die  $\beta$ -Funktion wie Fermionen haben, jedoch um einen Faktor 3-4 kleiner, es ist also zu erwarten, dass die Grenzen für die Anzahl der joint-Skalare um einen entsprechenden Faktor höher liegen. Mögliche, Standardmodell nahe Teilchenzahlen sind in Tabelle 4 zu sehen. In Abbildung 6 ist außerdem die Lage von  $\alpha_{vw}^*$  für  $0 \leq n_{s_d} \leq 3$  und  $3 \leq n_{s_j} \leq 8$  dargestellt. Hier ist zu erkennen, dass  $\alpha_{vw}^*$  näher zum Gaußschen Fixpunkt verschoben wird, je mehr joint-Skalare eingeführt werden.

Um einen vollständig wechselwirkenden UV-Fixpunkt zu erhalten, der mit Methoden der Störungstheorie behandelt werden kann, ist es demnach nötig, skalare Teilchen im joint-Sektor einzuführen. Die Teilchen des dQCD-Sektors haben dagegen, wie in Abbildung 6 zu sehen ist, nur geringe Auswirkungen auf die Lage des Fixpunktes, ob hier Fermionen, Skalare oder beide Teilchensorten eingeführt werden ist qualitativ nicht entscheidend.

Wie in der Abbildung 5 zu sehen, ist der Sattelpunkt  $\alpha_{vw}^*$  in Richtung des Gaußschen Fixpunktes  $\alpha_{\text{Gauß}}^*$  UV-repulsiv. Bond und Litim haben gezeigt, dass dieses Verhalten bei reinen Eichtheorien immer auftritt und schließen daraus, dass es keine UV-Fixpunkte in reinen Eichtheorien geben kann [10]. In der Abbildung erkennt man, dass die zwei Trajektorien mit  $\alpha(t \rightarrow \infty) = \alpha_{vw}^*$  für kleine Energien gegen  $\alpha_{tw1}^*$  bzw.  $\alpha_{tw2}^*$ , falls diese existieren, oder in den nicht-perturbativen Bereich laufen. Hinsichtlich einer Erweiterung der QCD, die im niederenergetischen Bereich durch das QCD-confinement charakterisiert wird, können solche Trajektorien jedoch physikalisch sinnvoll interpretiert werden. Um das genaue Niederenergieverhalten zu erhalten müssten jedoch die Einflüsse der Teilchenmassen berücksichtigt werden, in dieser Arbeit soll das aber nicht geschehen.



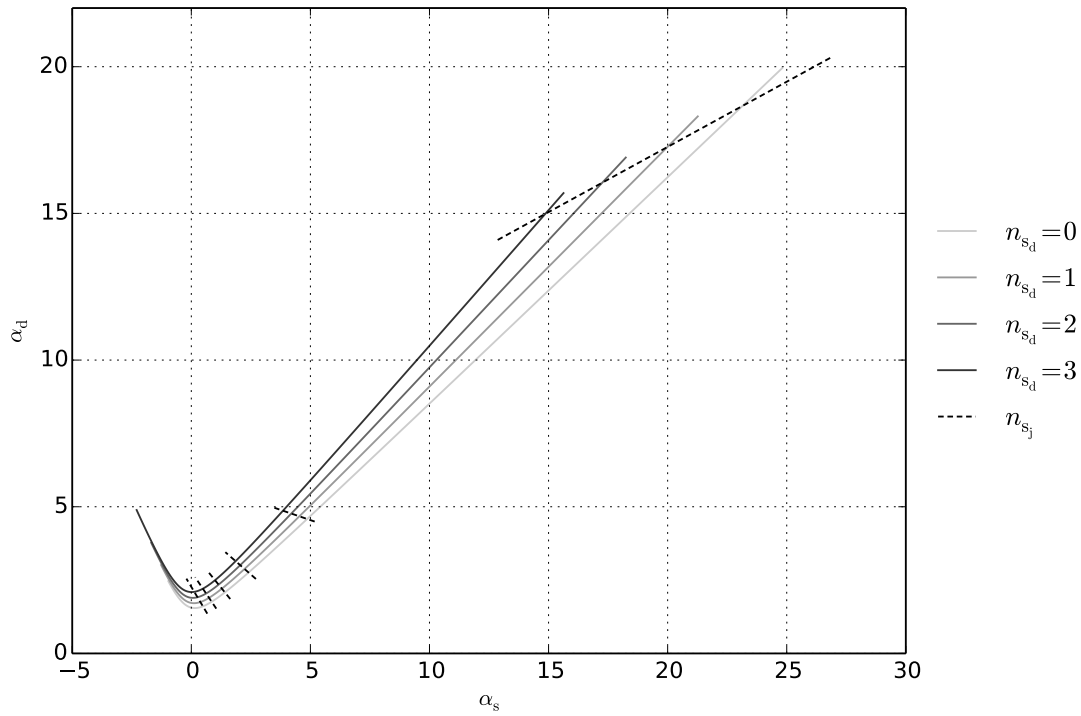


Abbildung 6: Lage von  $\alpha_{vw}^*$  in Abhängigkeit von  $n_{s_d}$  und  $n_{s_j}$  im Bereich  $n_{s_j} = 3$  (große Kopplungen) bis  $n_{s_j} = 8$  (kleine Kopplungen).

## 5.2 UV-Verhalten bei $\alpha_{tw1}^*$

Da der Fixpunkt ein teilweise wechselwirkender Fixpunkt ist, muss hier das in 4.3.2 beschriebene Stabilitätskriterium angewendet werden. Zunächst kann aber einfach gezeigt werden, dass dieser Fixpunkt nicht in jede Richtung UV-attraktiv sein kann.

Damit  $\alpha_s^* = -X_s/Y_s > 0$ , muss  $X_s < 0$  und  $Y_s > 0$ . Es wurde in 5.1.1 gezeigt, dass die umgekehrte Vorzeichenwahl physikalisch nicht sinnvoll ist. Gleichung (77) zeigt nun  $\lambda_1 = (\alpha_s^*)^2 Y_s > 0$  zu  $e_1 = (1, 0)^T$ , folglich muss die  $\alpha_s$ -Achse UV-repulsiv bezüglich  $\alpha^*$  sein.

Am Fixpunkt ergibt sich aus (76) und (77)

$$\lambda_2 = 0 \quad , \quad e_2 = \begin{pmatrix} -Z_s/Y_s \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_d} = 2X_d - 2\frac{X_s}{Y_s}Z_d \quad . \quad (118)$$

Die Bedingung dafür, dass  $\alpha^*$  ein Sattelpunkt ist, ist somit

$$X_s < 0 \quad \wedge \quad Y_s > 0 \quad \wedge \quad X_d Y_s < Z_d X_s \quad . \quad (119)$$

Da die Vorzeichen  $X_s < 0$ ,  $Y_s > 0$  und  $X_d < 0$  festgelegt sind, kann bereits ohne Fallunterscheidung eine Grenze gefunden werden. Aus  $X_s < 0 \wedge X_d < 0$  folgt allgemein (vgl. (1b))

$$\left(n_{f_j} + \frac{1}{4}n_{s_j}\right)^2 + \left(n_{f_j} + \frac{1}{4}n_{s_j}\right)\left(n_{f_d} + \frac{1}{4}n_{s_d}\right)\frac{1}{N_c} + \frac{11}{2}\left(n_{f_c} + \frac{1}{4}n_{s_c}\right)\frac{1}{N_c} < \left(\frac{11}{2}\right)^2 \quad \wedge \quad c \leftrightarrow d \quad . \quad (120)$$

Zunächst werden wieder nur Fermionen betrachtet. Da sie ausreichen, um perturbative Fixpunkte zu modellieren, wird es nicht nötig sein, Skalare einzuführen. Aus (120) und  $X_s < 0$  folgen allgemeine Grenzen für  $n_{f_j}$ ,  $N_d$  und  $n_{f_d}$

$$n_{f_j} < \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}\frac{n_{f_c}}{N_c}} = 4.39 \quad , \quad n_{f_d} < \left(\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 1\right)N_c - \frac{11}{2}n_{f_c} = 54.75 \quad , \quad (121)$$

$$N_d < \frac{11}{2}N_c - n_{f_c} = 10.5$$

für  $N_c = 3$  und  $n_{f_c} = 6$ . Tabelle 5 zeigt die möglichen Teilchenanzahlen und die

$N_d$	$n_{f_j}$	$n_{f_d}$	$\alpha_s^*$	$N_d$	$n_{f_j}$	$n_{f_d}$	$\alpha_s^*$
2	2	0	2.21	6	1	0-29	0.75
3	1	0-8	5.24	7	1	0-35	0.47
3	2	0-9	0.75	8	1	0-40	0.28
3	3	0-7	0.14	9	1	0-46	0.14
4	1	0-16	2.21	10	1	0-51	0.04
4	2	0-15	0.28				
5	1	0-23	1.23				
5	2	0-21	0.04				

Tabelle 5: Mögliche Teilchenzahlen für den Sattelpunkt  $\alpha_{\text{tw}1}^*$ , mit  $N_c = 3$ ,  $n_{f_c} = 6$  und ohne Skalare. Angegeben ist die erste Komponente  $\alpha_1^*$ , da diese unabhängig von  $n_{f_d}$  ist.

Komponente  $\alpha_s^*$ . Im Gegensatz zum vollständig wechselwirkenden Fixpunkt  $\alpha_{\text{vw}}^*$  ist  $\alpha_{\text{tw}1}^*$  auch für eine Theorie ohne Skalare in einem perturbativ sinnvollen Bereich, demnach können hier zwar wieder Skalare eingeführt werden, ein neues Verhalten oder neue Wertebereiche für den Fixpunkt treten aber nicht auf.

### 5.3 UV-Verhalten bei $\alpha_{\text{tw}2}^*$

$N_d$	$n_{f_j}$	$n_{f_d}$		$N_d$	$n_{f_j}$	$n_{f_d}$
2	1	3-7		5	1	13-24
2	2	1-4		5	2	19-21
2	3	0-1		6	1	17-29
3	1	6-13		7	1	22-35
3	2	4-10		8	1	28-40
3	3	4-7		9	1	36-46
4	1	9-18		10	1	47-51
4	2	10-15				

Tabelle 6: Mögliche Teilchenzahlen für einen Sattelpunkt bei  $\alpha_{\text{tw}2}^*$ , mit  $N_c = 3$ ,  $n_{f_c} = 6$  und ohne Skalare.

Aufgrund der Symmetrie der  $\beta$ -Funktion in den Indizes c und d bzw. 1 und 2 ist das allgemeine Vorgehen wie bei  $\alpha_{\text{tw}1}^*$ . Der Fixpunkt ist in  $\alpha_d$ -Richtung repulsiv und das Kriterium für einen Sattelpunkt analog zu (119)

$$X_d < 0 \quad \wedge \quad Y_d > 0 \quad \wedge \quad X_s Y_d < Z_s X_d \quad . \quad (122)$$

Ähnlich wie bei Fixpunkt  $\alpha_{\text{tw}1}^*$  ist es auch bei  $\alpha_{\text{tw}2}^*$  nicht nötig Skalare einzuführen, da sie zu keinem qualitativ neuen Verhalten führen. Wieder gibt es Ober- und Untergrenzen für  $N_d$ ,  $n_{f_j}$  und  $n_{f_d}$  um eine UV-attraktive Richtung zu erhalten. Die möglichen Werte sind in Tabelle 6 zu sehen.

### 5.4 Qualitative Änderungen durch Yukawa-Terme

In [19] schließen Litim und Sannino, dass Yukawa-Kopplungen nötig sind, um in einer (einfachen) Eich-Yukawa-Theorie nicht-triviale UV-Fixpunkte zu erzeugen. Bond und Litim haben dies auch für allgemeine Eich-Yukawa-Theorien mit ungeladenen Skalaren gezeigt [10]. Damit haben sie insbesondere gezeigt, dass ein UV-repulsiver Gaußscher Fixpunkt mit einer Trajektorie zum wechselwirkenden Sattelpunkt  $\alpha_{\text{vw}}^*$  nur durch Hinzunahme von Yukawa-Kopplungen möglich ist. Wie bisher gezeigt, können UV-attraktive Richtungen für wechselwirkende Fixpunkte auch in reinen Eichtheorien entstehen. Es soll nun eine qualitative Abschätzung gegeben werden, auf welche Weise mögliche Yukawa-Wechselwirkungen die Eigenschaften der bisher gefundenen Fixpunkte verändern.

Wie in Abschnitt 3 beschrieben gibt es nur eine Art der Yukawa-Kopplung, Gleichung (52), die mit nur einer Kopplungskonstanten auskommt, und deshalb

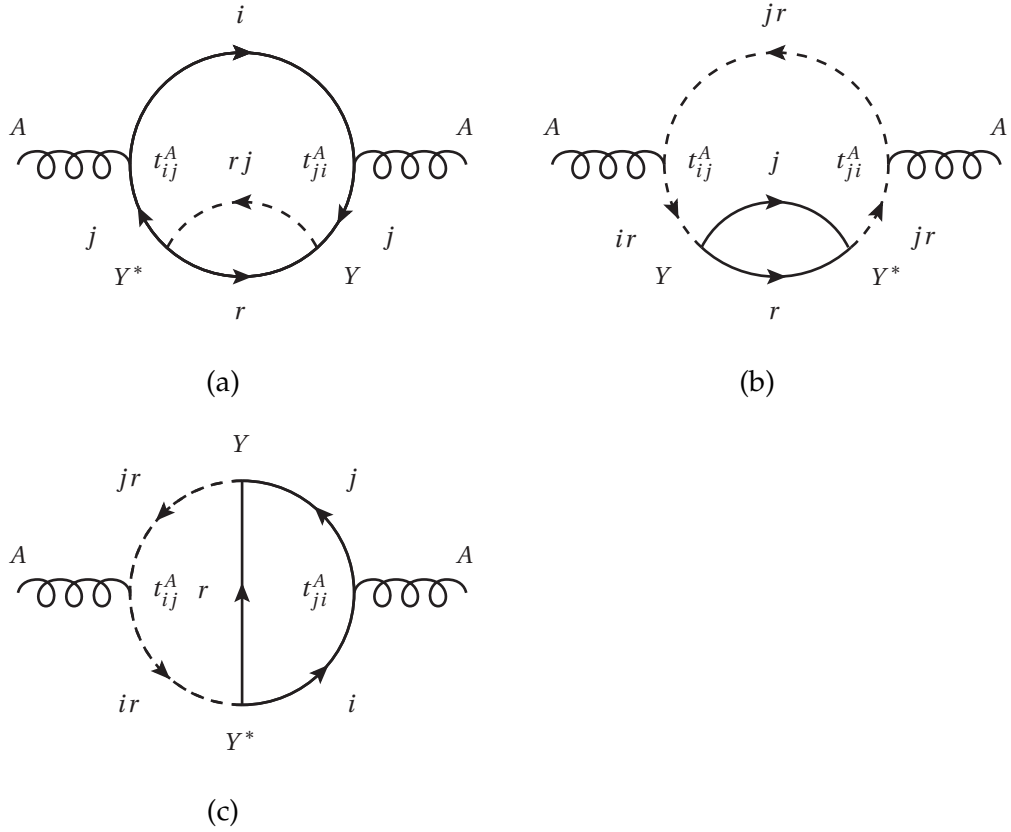


Abbildung 7: Yukawa-Beiträge zum Gluonpropagator.

für veränderliche Flavour-Zahlen einfach untersucht werden kann. Der Beitrag zur  $\beta$ -Funktion der Eichkopplungen wurde von Machacek und Vaughn als

$$\beta_s^{\text{Yukawa}}(g) = -g_s^3 (16\pi^2)^{-2} \frac{2}{d(G)} \left[ C_2(R_s) \delta^{il} Y^{l,r,js} (Y^{i,r,js})^* \right] \quad (123)$$

berechnet [21]. Sie haben außerdem festgestellt, dass nur das Diagramm 7(a) zur  $\beta$ -Funktion beiträgt. Mit (55) lässt sich (123) zu

$$\beta_s^{\text{Yukawa}}(g) = -g_s^3 |Y|^2 (16\pi^2)^{-2} \frac{2C_2(R_s)d(R_s)d(R_d)}{d(SU(N_c))} n_{s_j} \quad (124)$$

$$= -g_s^3 |Y|^2 (16\pi^2)^{-2} n_{f_c} n_{f_d} n_{s_j} N_d \quad (125)$$

zusammenfassen. Bemerkenswert ist hierbei, dass wegen

$$C_2(R)d(R) = T(R)d(G) \quad , \quad T(R) = 1/2 \quad \text{für } SU(N) \quad (126)$$

der Yukawa-Term in  $\beta_s$  unabhängig von  $N_c$  ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass

QCD- und joint-Teilchen gleich unter der  $SU(N_c)$  transformieren. Mit  $\alpha_Y := |Y|^2/4\pi$  und

$$A_s := \frac{2}{16\pi^2} n_{f_c} n_{f_d} n_{s_j} N_d \quad \text{sowie} \quad A_d := \frac{2}{16\pi^2} n_{f_c} n_{f_d} n_{s_j} N_c \quad (127)$$

wird (95) zu

$$\begin{pmatrix} \beta_s(\alpha) \\ \beta_d(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_s \alpha_s^2 + Y_s \alpha_s^3 + Z_s \alpha_s^2 \alpha_d - A_s \alpha_s^2 \alpha_Y \\ X_d \alpha_d^2 + Y_d \alpha_d^3 + Z_d \alpha_s \alpha_d^2 - A_d \alpha_d^2 \alpha_Y \end{pmatrix} . \quad (128)$$

Auch ohne die explizite  $\beta$ -Funktion für die Yukawa-Kopplung zu kennen lassen sich bereits qualitative Einflüsse auf die Lage der Fixpunkte ableiten. Als Erweiterung zu  $\alpha_{\text{tw}1}^*$  (vgl. (98)) können die Fixpunkte

$$\hat{\alpha}^* = \left( -\frac{X_s}{Y_s}, 0, 0 \right) \quad \text{und} \quad \alpha^* = (\alpha_s^*, 0, \alpha_Y^*) \quad (129)$$

gefunden werden. Aus (128) folgt

$$X_s + Y_s \alpha_s^* - A_s \alpha_Y^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_s^* > -\frac{X_s}{Y_s} = \hat{\alpha}_s^* , \quad (130)$$

wobei  $A_s > 0$  und  $\alpha_Y^* > 0$  benutzt wurde. Auf ähnliche Weise kann für den vollständig wechselwirkenden Fixpunkt  $\alpha_{\text{vw}}^*$  verfahren werden. Für die Fixpunkte

$$\hat{\alpha}^* = \left( \frac{Z_s X_d - X_s Y_d}{Y_s Y_d - Z_s Z_d}, \frac{Z_d X_s - X_d Y_s}{Y_s Y_d - Z_s Z_d}, 0 \right) \quad \text{und} \quad \alpha^* = (\alpha_s^*, \alpha_d^*, \alpha_Y^*) \quad (131)$$

folgt

$$\alpha_s^* > \hat{\alpha}_s^* \quad \text{und} \quad \alpha_d^* > \hat{\alpha}_d^* . \quad (132)$$

Man erkennt, dass eine Yukawa-Kopplung mit  $\alpha_Y^* \neq 0$  die Kopplungskonstanten  $\alpha_s^*$  und  $\alpha_d^*$  stets vergrößert. Hier ist eine genaue Berechnung von  $\beta_Y$  nötig, um zu überprüfen ob  $\alpha_s^*$  und  $\alpha_d^*$  weiterhin im perturbativen Bereich liegen können. Hinsichtlich Abbildung 6 ist zu erwarten, dass die Untergrenze für  $n_{s_j}$  um physikalische und perturbative Fixpunkte zu erhalten durch die nicht verschwindende Yukawa-Kopplung erhöht wird. An (130) bzw. (131) erkennt man außerdem

$$\alpha_Y^* = \frac{X_s + Y_s \alpha_s^* + Z_s \alpha_d^*}{A_s} \left( = \frac{X_d + Y_d \alpha_d^* + Z_d \alpha_s^*}{A_d} \right) . \quad (133)$$

Da  $X_s$ ,  $Y_s$  und  $Z_s$  unabhängig von  $n_{f_d}$  sind, jedoch  $A_s \propto n_{f_d}$  gilt, lässt sich vermuten, dass eine hohe Anzahl von dQCD-Fermionen die Perturbativität von  $\alpha_Y$  begünstigt, unter der Annahme, dass sich  $\alpha_s^*$  und  $\alpha_d^*$  ähnlich verhalten wie im Yukawa-freien Fall.

## 6 Matching mit dem Standardmodell

Abschließend soll nun diskutiert werden, inwieweit die Einführung der dQCD Abweichungen der QCD Kopplung vom Standardmodell bewirkt. Sei  $M$  eine charakteristische Massenskala des joint-Sektors. Da die Teilchen des joint-Sektors QCD-Ladung tragen, ist  $M > \mathcal{O}(100\text{ GeV})$ , sonst wären diese in aktuellen Experimenten bereits gefunden worden [7][8]. In [8] und [24] wird das Verhältnis der differentiellen Wirkungsquerschnitte von 3- und 2-Jet Zerfällen als sinnvolle Observable für hochenergie QCD eingeführt und argumentiert, dass die *Partonverteilungsfunktionen* (PDF) der neuen Teilchen sowie die Auswirkungen auf die PDFs der SM Teilchen vernachlässigbar sind. Dort wird außerdem gezeigt, dass dieses Verhältnis von differentiellen Wirkungsquerschnitten nicht sensitiv auf die Gluon PDF ist und es wird daraus geschlossen, dass das Laufen von  $\alpha_{\text{QCD}}$  den wichtigsten Einfluss auf diese Observablen hat. Aus diesem Grund wird nun das Laufen von  $\alpha_{\text{QCD}}$  im SM mit  $\alpha_s$  aus der QCD×dQCD verglichen.

Die bisher untersuchten  $\beta$ -Funktionen gelten nur für Energien oberhalb der Massenskala  $M$  der schwersten neuen Teilchen [8]. Man kann nun bis zur Energieskala  $Q$  eine effektive Theorie einführen, bei der schwere Teilchen mit Massen  $m > Q$  ausintegriert werden. Durch dieses Vorgehen ist es möglich, die volle QCD×dQCD bei  $Q$  zu entkoppeln und das bekannte Verhalten der SM QCD zu erhalten [9]. Für das dunkle Materie Szenario berechnen Bai und Schwaller eine Entkopplungsskala von  $Q \gtrsim 500\text{ GeV}$ . An dem entsprechenden Phasenraumdiagramm in Abbildung 8 ist zu sehen, dass in ihrem Szenario  $\alpha_{\text{tw1}}^*$  und  $\alpha_{\text{tw2}}^*$  als UV-Fixpunkte in Frage kommen. Als Entkopplungsskala werden die CMS Daten  $Q = 474\text{ GeV}$  mit  $\alpha_{\text{QCD}}^{\text{exp}}(Q) = 0.0936 \pm 0.0041$  verwendet [11]. Die Entkopplungsskala ist aus theoretischer Sicht beliebig, die Wahl  $Q \approx M$  ist jedoch die üblichste und anschaulichste Wahl. Im Folgenden wird erklärt, wie in einem Modell mit zwei Kopplungskonstanten ein Fixpunkt extrapoliert werden kann, danach wird diese Methode auf einige der gefundenen Modelle angewendet.

### 6.1 Extrapolation eines Fixpunktes

Um das UV-Verhalten einer  $\beta$ -Funktion mit den bisher gemessenen Werten für die Kopplungskonstanten im SM vergleichen zu können, ist es notwendig die kritische Hyperfläche eines Fixpunktes auch in einem Bereich zu kennen, der zu groß für eine Taylorentwicklung geringer Ordnung ist. Das Auffinden der kritischen Hyperfläche ist insbesondere für höherdimensionale Probleme analytisch kaum möglich und daher eine numerische Aufgabe. Stehen nun  $n$  Messwerte an der selben Renormierungsskala  $\mu_0$  zur Verfügung und gibt es einen Punkt  $\alpha_0$  auf der kritischen Hyperfläche  $M_c$ , der diese enthält, dann sind alle Kopplungskonstanten  $\alpha(\mu)$  bis auf

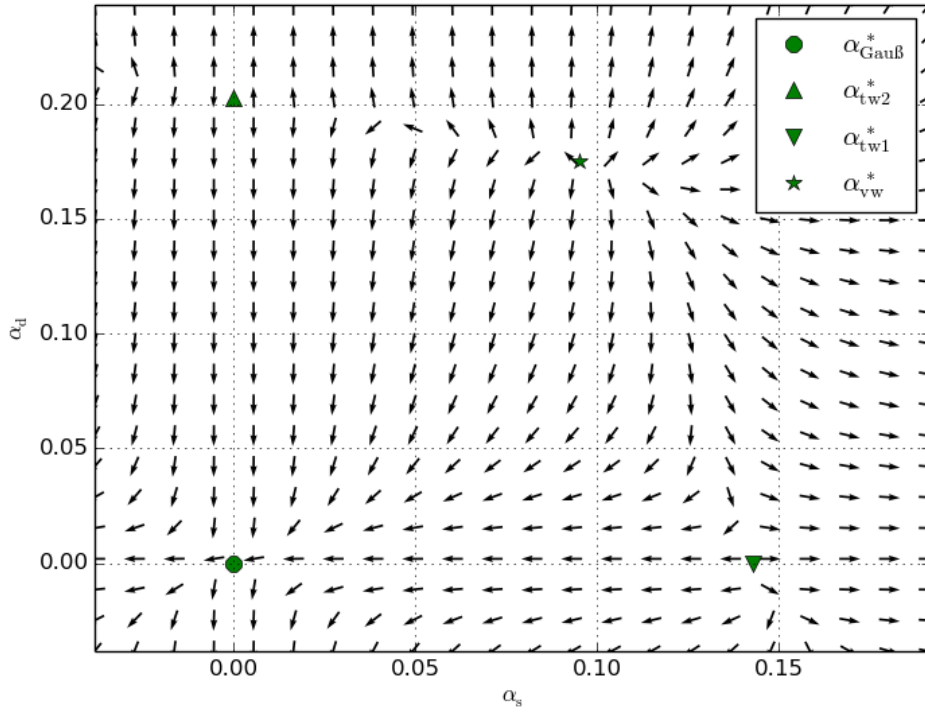


Abbildung 8: Ein Phasenraumdiagramm mit wechselwirkendem IR-Fixpunkt. Die Parameter sind  $(N_c, N_d, n_{f_c}, n_{s_c}, n_{f_d}, n_{s_d}, n_{f_j}, n_{s_j}) = (3, 3, 6, 0, 5, 2, 3, 0)$ . In [7] wurde für diese Parameter die Entkopplungsskala  $Q = 518 \text{ GeV}$  berechnet.

$(\dim(M_c) - n)$  freie Parameter festgelegt<sup>3</sup> und laufen in den Fixpunkt hinein. Existiert so ein  $\alpha_0 \in M_c$  nicht, kommt der untersuchte Fixpunkt für ein asymptotic safety Szenario nicht in Frage.

Ein besonderer Vorteil der Erweiterung auf eine halbeinfache  $SU(N_c) \times SU(N_d)$  ist die Möglichkeit einen UV-Fixpunkt mit einer Messgröße eindeutig extrapolieren zu können, da die kritische Hyperfläche die Dimension  $\dim(\alpha^*) = 0$ ,  $\dim(\text{Trajektorie}) = 1$  oder  $\dim(\text{Phasenraum}) = 2$  hat. Im ersten Fall,  $\dim M_c = 0$  besteht sie nur aus dem Fixpunkt selbst, dieser Fall ist also eher als eine mathematische, triviale Lösung zu betrachten, die keine physikalische Bedeutung im Sinne laufender Kopplungskonstanten hat. Im Fall  $\dim M_c = 2$  besteht sie aus dem gesamten Phasenraum. Weil in diesem Fall jede Trajektorie in den Fixpunkt hineinläuft kann keine Vorhersage für die Größen der Kopplungskonstanten gemacht werden, dafür ist aber das UV-Verhalten von dem Startwert  $(\alpha_s(t_0), \alpha_d(t_0))$  unabhängig. Wie bereits gezeigt, ist dieser Fall hier aber nicht möglich. Der für die Extrapolation interessanteste Fall ist also  $\dim M_c = 1$ . Die UV-Hyperfläche besteht dann aus zwei Trajektorien<sup>4</sup>  $s^{+/-} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  und kann deshalb eindeutige Wertepaare  $(\alpha_s(t), \alpha_d(t))$  vorhersagen. Wenn die Kopplungskonstante  $\alpha_s(t_0)$  bei einer Renormierungsskala  $t_0$  bekannt ist, und unter der Annahme, dass der Fixpunkt für  $t \rightarrow \infty$  erreicht wird, ist somit auch  $\alpha_d(t_0)$  sowie das gesamte Hochenergieverhalten beider Kopplungskonstanten bekannt.

Für die Extrapolation werden außerdem die folgende Beobachtungen ausgenutzt.

1. Eine Trajektorie, welche in einen Sattelpunkt hineinläuft, ist gleichzeitig eine Separatrix, d.h. sie teilt den Phasenraum in Gebiete mit qualitativ unterschiedlichen Verhalten für  $t \rightarrow \infty$ .
2. Ein Sattelpunkt und ein attraktiver Fixpunkt sind mit einer Separatrix verbunden, ebenso ist ein Sattelpunkt mit einem repulsiven Fixpunkt mit einer Separatrix verbunden, sofern die Fixpunkte existieren und in der Nähe des Sattelpunktes liegen.

Da das gesuchte  $M_c$  demnach immer eine Separatrix ist, kann wie folgt verfahren werden. Zunächst werden zwei Gebiete  $L$  und  $R$  definiert, die zu qualitativ verschiedenen Trajektorien führen. Beispielsweise lassen sich oft Abschätzungen der Art finden: Wenn es ein  $t_1$  gibt, mit

$$\alpha_j(t_1) > \max \left\{ \alpha_j^* \mid \text{alle Fixpunkte } \alpha^*, j \in \{s, d\} \right\} \quad , \quad (134)$$

dann kann der gewünschte Fixpunkt nicht mehr für  $t > t_1$  erreicht werden. Am Fix-

<sup>3</sup>Für  $n \geq \dim(M_c)$  also eindeutig.

<sup>4</sup>Jeweils eine in und eine entgegen der Richtung des attraktiven Eigenvektors. Bei teilweise wechselwirkenden Fixpunkte ist nur eine dieser Richtungen physikalisch sinnvoll.



punkt wird eine Basis  $\{f_1, f_2\}$  gewählt<sup>5</sup> und der Phasenraum in Ebenen mit Abstand  $\epsilon$  eingeteilt, die nullte Ebene geht dabei durch den Fixpunkt. Rekursiv werden dann

$$s^{L/R}[n+1] = s^{L/R}[n] + \epsilon f_1 + d^{L/R} \delta f_2 \quad (135)$$

definiert. Für festes  $\delta$  wird  $d^{L/R}$  so gewählt, dass die Trajektorie mit Anfangswert  $s^L[n+1]$  in den Bereich  $L$  hineinläuft, analog für  $R$ . Mit

$$s^L[0] := \alpha^* - \delta/2 f_2 \quad \text{und} \quad s^R[0] := \alpha^* + \delta/2 f_2 \quad (136)$$

ergibt sich so ein Schlauch  $(s^L[n], s^R[n])_{n=0,1,\dots}$  der Breite  $\delta$ , der die Separatrix beinhaltet. Näherungsweise wird nun

$$\alpha[n] := \frac{s^L[n] + s^R[n]}{2} \quad (137)$$

definiert und so sortiert, dass  $\alpha[0] \simeq \alpha(t_0)$  und  $\alpha[n] \rightarrow \alpha^*$  für steigendes  $n$ . Die entsprechende RG-Zeit  $t$  wird dann über

$$t[n+1] = \frac{\|\alpha[n+1] - \alpha[n]\|}{\|\beta(\alpha[n])\|} + t[n] \quad (138)$$

mit  $t[0] = t_0$  berechnet.

Um die so erhaltenen laufenden Kopplungen mit dem Laufen der QCD Kopplung im Standardmodell zu vergleichen, wird noch  $\alpha_{\text{QCD}}(t)$  in  $\mathcal{O}(\alpha_{\text{QCD}}^3)$  berechnet. Dies geschieht implizit über

$$F(\alpha_{\text{QCD}}(t)) = t - t_0 + F(\alpha_{\text{QCD}}(t_0)) \quad (139)$$

mit

$$\begin{aligned} F(\alpha_{\text{QCD}}) &:= \int (\beta_{\text{QCD}})^{-1} d\alpha_{\text{QCD}} = \int \left( X_{\text{QCD}} \alpha_{\text{QCD}}^2 + Y_{\text{QCD}} \alpha_{\text{QCD}}^3 \right)^{-1} d\alpha_{\text{QCD}} \\ &= \frac{Y_{\text{QCD}}}{X_{\text{QCD}}^2} \ln \left( \frac{\alpha_{\text{QCD}} Y_{\text{QCD}} + X_{\text{QCD}}}{\alpha_{\text{QCD}}} \right) - \frac{1}{\alpha_{\text{QCD}} X_{\text{QCD}}} \quad . \end{aligned} \quad (140)$$

Der Index QCD meint hier immer die SM QCD mit  $N_c = 3$ ,  $n_{f_c} = 6$  und  $n_{f_j} = n_{s_j} = 0$ . Der Einfachheit halber wird in (65)  $\Lambda = Q$  gewählt, sodass  $t_0 = 0$  und  $\alpha(0)$  die Startwerte sind.

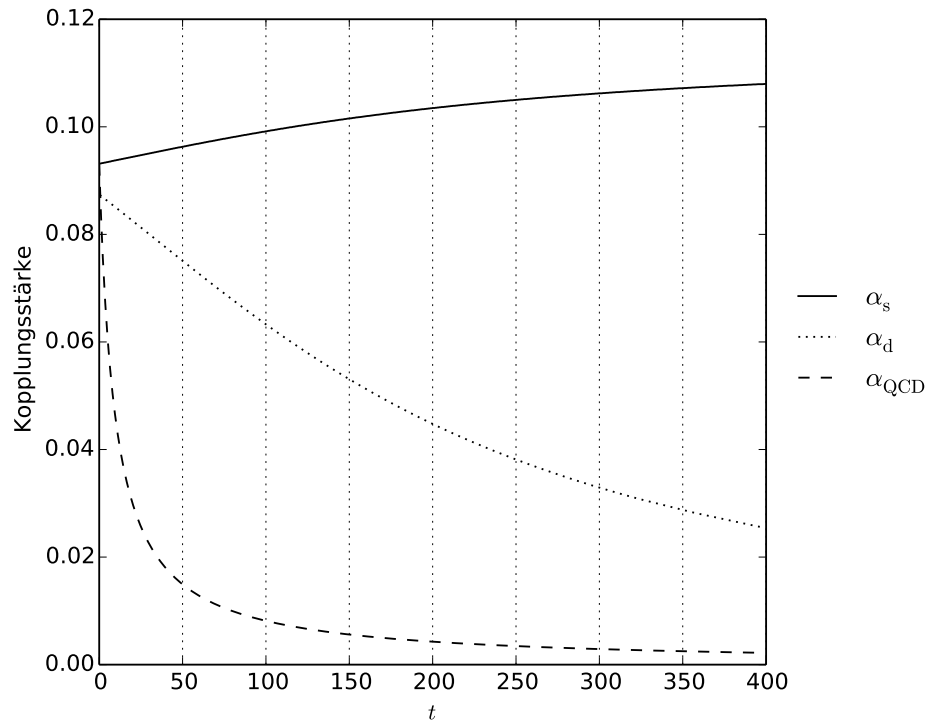


Abbildung 9: Die laufenden Kopplungen  $\alpha_s$ ,  $\alpha_d$  und  $\alpha_{\text{QCD}}$  zum Fixpunkt  $\alpha_{\text{tw1}}^*$  für die Parameter  $(N_c, N_d, n_{f_c}, n_{s_c}, n_{f_d}, n_{s_d}, n_{f_j}, n_{s_j}) = (3, 3, 6, 1, 6, 0, 3, 0)$ .

## 6.2 Extrapolation von $\alpha_{\text{tw1}}^*$

Im Folgenden sind  $\alpha_s(t)$  und  $\alpha_d(t)$  die Kopplungskonstanten der QCD $\times$ dQCD auf der UV-Hyperfläche, während  $\alpha_{\text{QCD}}(t)$  die SM QCD Kopplungskonstante darstellt.

Wegen

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2 \propto \begin{pmatrix} -Z_s/Y_d \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_1 > 0 \quad (141)$$

und  $Z_s > 0$ ,  $Y_s > 0$  ist  $\alpha_s$  steigend, während  $\alpha_{\text{QCD}}$  als SM Kopplung für hohe Energien fällt, wie in Abbildung 9 zu sehen ist. Aus  $\alpha$ -sensiblen Observablen sollte es hier möglich sein, entsprechend hohe Grenzen an die neuen Teilchenmassen  $M$  zu setzen.

## 6.3 Extrapolation von $\alpha_{\text{tw2}}^*$

	$N_c$	$N_d$	$n_{f_c}$	$n_{s_c}$	$n_{f_d}$	$n_{s_d}$	$n_{f_j}$	$n_{s_j}$
a	3	2	6	0	3	0	1	0
b	3	3	6	0	9	0	1	0
c	3	3	6	0	10	0	2	0
d	3	4	6	0	17	0	1	0
e	3	5	6	0	24	0	1	0

Tabelle 7: Die Eichgruppen und Teilcheninhalte der Modelle a bis e.

Die laufenden Kopplungen für die Beispielmmodelle a bis e (vgl. Tabelle 7) sind in Abbildung 10 zu sehen, die relativen Abweichungen  $\Delta\alpha = (\alpha_s - \alpha_{\text{QCD}})/\alpha_{\text{QCD}}$  in Abbildung 11. Hier verhält sich  $\alpha_s$  qualitativ wie  $\alpha_{\text{QCD}}$ , die relativen Abweichungen bei  $\mu = 1 \text{ TeV} \sim t \approx 0.746$  betragen hier  $\Delta\alpha \approx 3\text{-}5\%$ , bei  $\mu = 2 \text{ TeV} \sim t \approx 1.439$  bereits  $\Delta\alpha \approx 6\text{-}10\%$  und liegen damit im Bereich der erwarteten Messungenauigkeiten (vgl. [9]).

## 6.4 Extrapolation von $\alpha_{\text{vw}}^*$

Um ein SM-ähnliches Verhalten zu erzeugen, muss  $\alpha_s(0) > \alpha_s^*$  gelten. Der kleinste Wert für  $\alpha_s^* \approx 0.1007$  wird für SM + ( $N_d = 2, n_{s_d} = 1, n_{s_j} = 9$ ) angenommen. Da  $\alpha_{\text{QCD}}$

<sup>5</sup>Der Einfachheit halber kann die Basis aus Eigenvektoren oder die  $\alpha_{s/d}$ -Achsen gewählt werden, sofern dies zu keinen numerischen Schwierigkeiten führt.

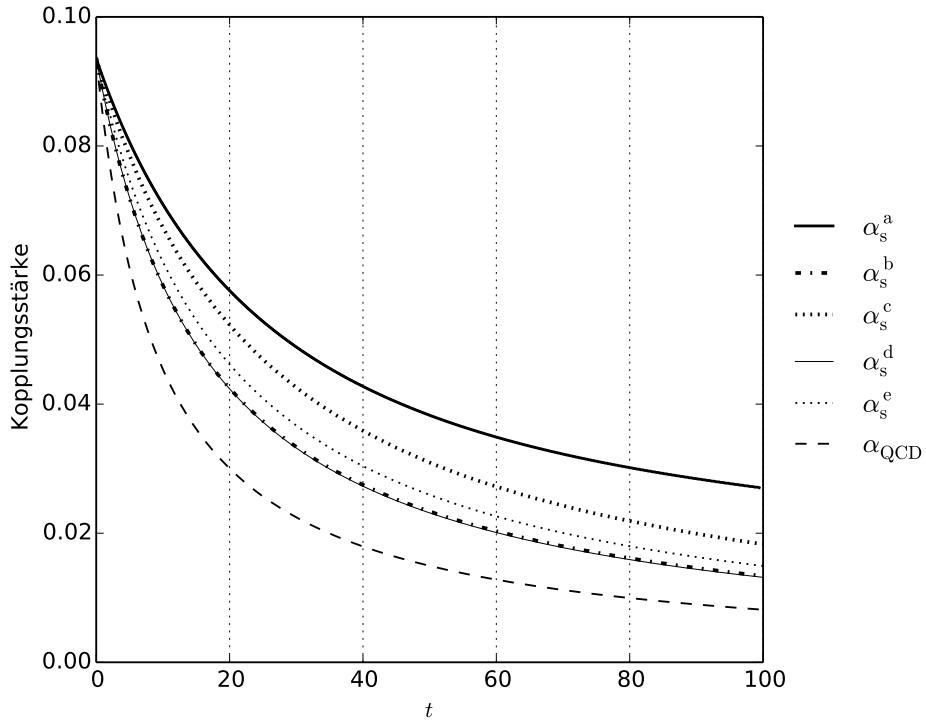


Abbildung 10: Die laufende Kopplung  $\alpha_s$  zum Fixpunkt  $\alpha_{\text{tw}2}^*$  für die Modelle a bis e sowie die laufende SM Kopplung  $\alpha_{\text{QCD}}$ .

monoton fallend ist, muss die Entkopplungsskala  $Q$  entsprechend niedrig gewählt werden, um mit experimentellen Befunden im Einklang zu sein, sollte jedoch die  $t$ -Masse  $Q \approx 173.21 \text{ GeV}$  [4] nicht unterschreiten. Mit (139) wird ausgehend von der bekannten Kopplungskonstanten  $\alpha_{\text{QCD}}(M_Z) = 0.1181$  [2] mit effektiv 5 SM-Fermionen  $\alpha_{\text{QCD}}(Q) = 0.1081$  berechnet. In Abbildung 12 ist der weitere Verlauf für hohe Energien zu sehen. Nach Konstruktion verhalten sich  $\alpha_s$  und  $\alpha_{\text{QCD}}$  qualitativ ähnlich. Da  $\alpha_s^*$  jedoch sehr nah am Startwert liegt ist hier bei 1 TeV die relative Abweichung bereits  $\Delta\alpha \approx 20\%$ .

Eine Extrapolation von  $\alpha_{\text{vw}}^*$  in Richtung kleiner QCD-Kopplungen ist möglich, verhält sich jedoch wie die Extrapolation von  $\alpha_{\text{tw}1}^*$  (vgl. 6.2).

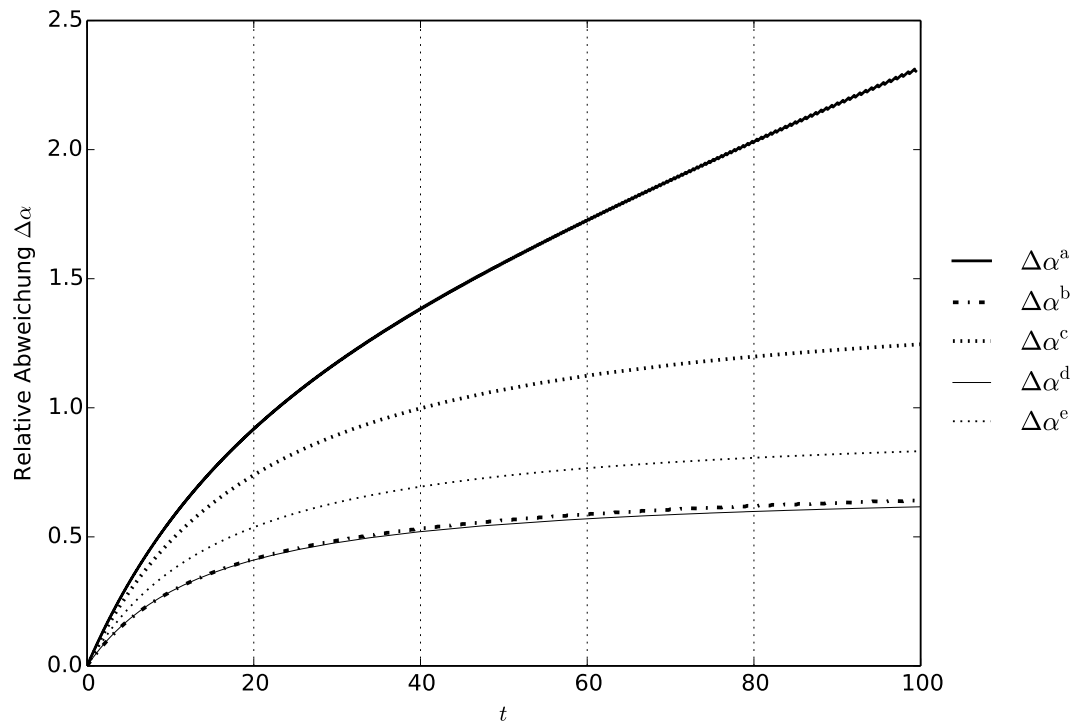


Abbildung 11: Die relative Abweichung  $\Delta\alpha = (\alpha_s - \alpha_{\text{QCD}})/\alpha_{\text{QCD}}$  der laufenden Kopplungen von Abbildung 10.

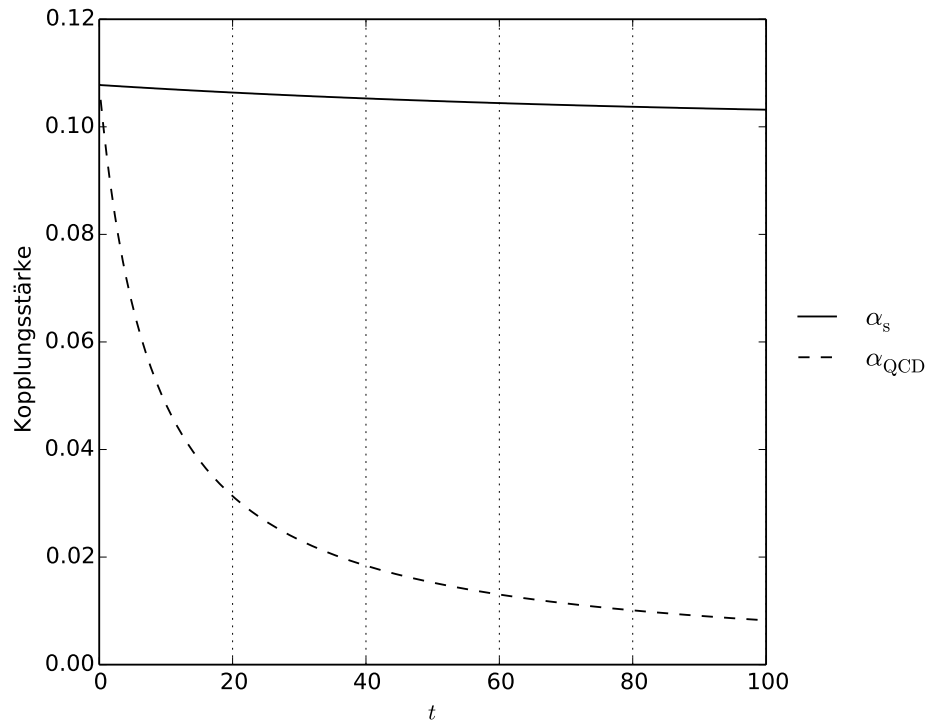


Abbildung 12: Die laufenden Kopplungen  $\alpha_s$  und  $\alpha_{\text{QCD}}$  zum Fixpunkt  $\alpha_{\text{vw}}^*$  für die Parameter  $(N_c, N_d, n_{f_c}, n_{s_c}, n_{f_d}, n_{s_d}, n_{f_j}, n_{s_j}) = (3, 2, 6, 0, 0, 1, 0, 9)$ .

## 7 Zusammenstellung der Ergebnisse

In dieser Arbeit wurde die  $SU(N_c)$ -Quantenchromodynamik des Standardmodells nach der Idee von Bai und Schwaller um eine neue  $SU(N_d)$ -Eichgruppe erweitert und auf das Verhalten der laufenden Kopplungskonstanten im UV-Grenzwert untersucht. Aus den Stabilitätskriterien für einen UV-Fixpunkt war es möglich, Obergrenzen für die Anzahl der Teilchen abzuleiten. Für teilweise wechselwirkende Fixpunkte können dabei die Ungleichungen (120) als notwendiges Kriterium für UV-Stabilität verstanden werden, teilweise konnten sogar noch strengere Grenzen gesetzt werden. Hieran wird klar, dass insbesondere die Anzahl von joint-Fermionen und -Skalaren stark begrenzt ist. Bei der Extrapolation des Fixpunktes  $\alpha_{\text{tw}1}^* = (\alpha_s^*, 0)$ , der AS der QCD-Kopplung im UV entspricht, ergab sich ab der Entkopplungsskala  $Q$  ein Verhalten, dass qualitativ von den Standardmodellvorhersagen abweicht. Die Extrapolation zum Fixpunkt  $\alpha_{\text{tw}2}^* = (0, \alpha_d^*)$  verhält sich dagegen auch über der Entkopplungsskala ähnlich zur Standardmodell QCD, führt aber stets zu einer asymptotisch freien QCD.

Der vollständig wechselwirkende Fixpunkt ist interessant, da er zur asymptotic safety in beiden Kopplungen führen kann. Gleichzeitig tritt hier jedoch das Problem auf, dass er in einer rein fermionischen Theorie nicht perturbativ ist, sodass es hier notwendig ist, Skalare im joint-Sektor einzuführen. Außerdem kann dieser Fixpunkt höchstens ein Sattelpunkt sein. Die Extrapolation in Richtung großer QCD Kopplungen kann prinzipiell zu einem Standardmodell ähnlichem Verhalten, jedoch mit AS in QCD, führen. In der reinen QCD×dQCD waren die Kopplungskonstanten am Fixpunkt sehr groß und  $\alpha_{\text{QCD}}(Q)$  bereits an der Entkopplungsskala sehr nah am Fixpunkt, sodass die Abweichungen vom Standardmodell quantitativ groß sind. Wenn es durch einen weiteren Mechanismus die Möglichkeit gäbe, den Fixpunkt zu kleineren Werten zu verschieben, könnten hier aber sinnvolle asymptotic safety Szenarien gefunden werden.

Sowohl für teilweise als auch für den vollständig wechselwirkenden UV-Fixpunkt muss jedoch erwähnt werden, dass der Gaußsche Fixpunkt eine zweidimensionale kritische Hyperfläche besitzt. In [10] werden die ein bzw. zwei Trajektorien, die bei einer reinen Eichtheorie in den Fixpunkt hineinlaufen, als Nullmenge unter allen möglichen UV-endlichen Trajektorien verstanden. Hier steht daher zur Diskussion, ob die Wahl einer solchen Trajektorie als *fine tuning* zu verstehen ist. Desweiteren muss bemerkt werden, dass die Theorie als dunkle Materie Modell, zumindest auf 2-Schleifen Ordnung, nicht jeden UV-Fixpunkt erreichen kann. Da im dunkle Materie Modell der vollständig wechselwirkende Fixpunkt als IR-Fixpunkt auftaucht, ist  $(0, \alpha_d^*)$  der sinnvollste UV Kandidat. Die gleichzeitige Beschreibung von baryonischer DM und einer asymptotisch sicheren QCD ist daher nur bei Entkopplungsskalen mindestens im hohen TeV Bereich möglich.





## Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die im vergangenen Jahr fachlich oder persönlich zur Erstellung dieser Arbeit beigetragen haben.

Ich bedanke mich bei Frau Professor Hiller, die mich mit dem Thema meiner Masterarbeit betraut hat, für die Betreuung während der gesamten Arbeitsphase. Ebenso bedanke ich mich bei den gesamten Lehrstühlen TIII und TIV, insbesondere bei Stefan DeBoer, Kay Schönwald, Dominik Döring, Tobias Büscher, Max Kämper, Philipp Zander und Markus Kurbel für die gemeinsame Zeit während der Arbeit und ihre Hilfe als Korrekturleser.

Ein besonderer Dank gilt Mario Dunsch und Dimitrios Skodras sowie Jan Adam, Hannes Franke, Jan Latarius, Florian Schulz und Julius Tilly.

Ich bedanke mich bei meinen Eltern und meinem Bruder, die mir das Studium ermöglicht und mich stets unterstützt haben.

## Literatur

- [1] Dark matter. *K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014) and 2015 update.*
- [2] Quantum chromodynamics. *K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014) and 2015 update.*
- [3] Status of higgs boson physics (rev.). *C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 40, 100001 (2016).*
- [4]  $t$  quark. *C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 40, 100001 (2016).*
- [5] G. Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett., B716:1–29, 2012.*
- [6] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett., 116(6):061102, 2016.*
- [7] Y. Bai and P. Schwaller. Scale of dark QCD. *Phys. Rev. D, 89:063522, Mar 2014.*
- [8] D. Becciolini, M. Gillioz, M. Nardecchia, F. Sannino, and M. Spannowsky. Constraining new colored matter from the ratio of 3 to 2 jets cross sections at the LHC. *Phys. Rev., D91(1):015010, 2015. [Addendum: Phys. Rev.D92,no.7,079905(2015)].*
- [9] A. Bednyakov. On the electroweak contribution to the matching of the strong coupling constant in the SM. *Physics Letters B, 741:262 – 266, 2015.*
- [10] A. D. Bond and D. F. Litim. Theorems for Asymptotic Safety of Gauge Theories. *arXiv:1608.00519 [hep-th], 2016.*
- [11] Chatrchyan, Serguei et al. Measurement of the ratio of the inclusive 3-jet cross section to the inclusive 2-jet cross section in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV and first determination of the strong coupling constant in the TeV range. *Eur. Phys. J., C73(10):2604, 2013.*
- [12] T. Curtright. Three-loop charge renormalization effects due to quartic scalar self-interactions. *Phys. Rev. D, 21:1543–1549, Mar 1980.*
- [13] R. K. Ellis, W. J. Stirling, and B. R. Webber. *QCD and Collider Physics*. Cambridge University Press, 1996. Cambridge Books Online.

- [14] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories*. Frontiers in Physics Series. Westview Press, 1999.
- [15] S. Hawking and W. Israel, editors. *General Relativity; an Einstein Centenary Survey*, chapter 1. Cambridge University Press, 1979.
- [16] S. Hawking and W. Israel, editors. *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, chapter 16. Cambridge University Press, 1979.
- [17] M. Jarvinen and E. Kiritsis. Holographic Models for QCD in the Veneziano Limit. *JHEP*, 03:002, 2012.
- [18] D. R. T. Jones. Two-loop  $\beta$  function for a  $G_1 \times G_2$  gauge theory. *Phys. Rev. D*, 25:581–582, Jan 1982.
- [19] D. F. Litim and F. Sannino. Asymptotic safety guaranteed. *arXiv:1406.2337 [hep-th]*, 2014.
- [20] A. Maas and T. Mufti. Correlation Functions and Confinement in Scalar QCD. *PoS, QCD-TNT-III:024*, 2013. [PoSEPS-HEP2013,022(2013)].
- [21] M. E. Machacek and M. T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 222(1):83 – 103, 1983.
- [22] M. E. Machacek and M. T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory (ii). yukawa couplings. *Nuclear Physics B*, 236(1):221 – 232, 1984.
- [23] Ming-Xing Luo, Hua-Wen Wang and Yong Xiao. Two loop renormalization group equations in general gauge field theories. *Phys. Rev.*, D67:065019, 2003.
- [24] F. Sannino.  $\alpha_s$  at LHC: Challenging asymptotic freedom. In *High-precision  $\alpha_s$  measurements from LHC to FCC-ee*, pages 11–19, 2015.
- [25] M. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [26] G. Veneziano.  $U(1)$  without instantons. *Nuclear Physics B*, 159(1):213 – 224, 1979.
- [27] S. Weinberg. Critical Phenomena for Field Theorists. In *14th International School of Subnuclear Physics: Understanding the Fundamental Constituents of Matter Erice, Italy, July 23-August 8, 1976*, page 1, 1976.

- [28] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 2. Cambridge University Press, 1996.
- [29] E. Zeidler. *Springer-Handbuch der Mathematik IV*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013.
- [30] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1993.

## Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Abschlussarbeit mit dem Titel "UV-Fixpunkte einer  $SU(N_c) \times SU(N_d)$  Eichtheorie" selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift

## Belehrung

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50 000 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz –HG–).

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird ggf. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z. B. die Software "turnitin") zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift