1 UV-Fixpunkte der $SU_{\mathbf{QCD}} \times SU_{\mathbf{dQCD}}$

Die allgemeinste Form der β-Funktion auf 2-loop Ordnung wurde von D.R.T. Jones berechnet [**?**]. Die β-Funktion hat die Form

$$\beta(g) = \begin{pmatrix} X_1^g g_1^3 + Y_1^g g_1^5 + Z_1^g g_1^3 g_2^2 \\ X_2^g g_2^3 + Y_2^g g_2^5 + Z_2^g g_2^3 g_1^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{1}$$

Für die Darstellungen R_1, R_2, S_1 und S_2 der Fermionen bzw. Skalare sind die Koeffizienten von β_1 gegeben durch

$$X_1^g = (16\pi^2)^{-1} \left[\frac{2}{3} T(R_1) d(R_2) + \frac{1}{3} T(S_1) d(S_2) - \frac{11}{3} C_2(G_1) \right] \tag{2}$$

$$\begin{aligned} Y_1^g = (16\pi^2)^{-2} \Bigg[&\left(\frac{10}{3} C_2(G_1) + 2 C_2(R_1) \right) T(R_1) d(R_2) \\ &+ \left(\frac{2}{3} C_2(G_1) + 4 C_2(S_1) \right) T(S_1) d(S_2) - \frac{34}{3} C_2(G_1)^2 \Bigg] \end{aligned} \tag{3}$$

$$Z_1^g = (16\pi^2)^{-2} \left[2 C_2(R_2) d(R_2) T(R_1) + 4 C_2(S_2) d(S_2) T(S_1) \right] \quad . \tag{4}$$

Die Berechnung ist dabei für chirale Fermionen geschehen, was einen zusätzlichen Faktor von 2 in $d(R_1)$ und $d(R_2)$ bewirkt, wenn man sonst Dirac-Fermionen betrachtet. Wie in Abschnitt **??** beschrieben, sollen Fermionen und Skalare eines bestimmten Sektors jeweils in der gleichen Darstellung der Eichgruppen sein, daher gibt es keinen Unterschied zwischen R_1 und S_1 bzw. R_2 und S_2. Für $SU(N)$ ist $T(R) = 1/2$ und der quadratische Casimiroperator $C_2(R) = (N^2 - 1)/(2N)$ bzw. $C_2(G) = N$ [**?**]. In der QCD $\times$ dQCD gibt es zwei Eichgruppen, jedoch mit drei verschiedenen Darstellungen der Teilchen, sodass $d(R_1)$ und $d(R_2)$ in jedem Koeffizienten (2), (3) und (4) andere Werte annehmen kann und deshalb einzeln bestimmt werden muss. Dies geschieht am einfachsten über das Zeichnen von Feynmandiagrammen und abzählen der möglichen Teilchen, die im entsprechenden Diagramm erlaubt sind.

Die Teilchenlinien in den Diagrammen werden nur mit ihren QCD und dQCD Quantenzahlen beschriftet. Dabei stehen wieder i und j für Colour bzw. r und s für dark Colour in der fundamentalen Darstellung, A und M für Colour und dark Colour der adjungierten Darstellung. Die Vertizes werden mit den entsprechenden Erzeugermatrizen beschriftet und enthalten bereits die Kopplungskonstanten. Es werden nur die Koeffizienten X_1^g, Y_1^g und Z_1^g betrachtet, X_2^g, Y_2^g und Z_2^g folgen analog mit QCD $\leftrightarrow$ dQCD. Wie in [**?**] gezeigt, kann die Eichung des Eichboson-Propagators so gewählt werden, dass die β-Funktion nur noch von der Renormalisierungskonstanten Z_A des Eichfeldes abhängt. Daher reicht es, hier nur 1- und 2-Schleifen Korrekturen zum Gluon-Propagator zu untersuchen, Korrekturen zu 3- oder 4-Punkt Funktionen müssen nicht berücksichtigt werden.

Der Koeffizient X_1^g entspricht der 1-Schleifen Korrektur zum Gluonpropagator. Bei der

Fermionschleife in Abbildung 1 kann jedes der $n_{\mathrm{f_c}}$ QCD-Fermionen und jedes der $n_{\mathrm{f_j}}$ joint-Fermionen mit einer dark Colour $r \in \{1, 2, \ldots, N_{\mathrm{d}}\}$ in der Schleife auftauchen. Damit ist $d(R_2) = n_{\mathrm{f_c}} + N_{\mathrm{d}} n_{\mathrm{f_j}}$.

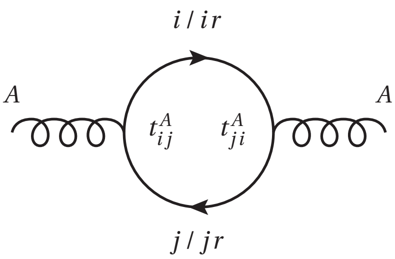

Abbildung 1: 1-Schleifen QCD/joint-Fermion Beitrag zum Gluonpropagator.

Der Koeffizient Y^g_2 enthält die 2-Schleifen Beiträge proportional zu $(t^A_{ij})^4$. Auch hier kann jeweil ein QCD-Fermion oder ein joint-Fermion mit einer dark Colour vorkommen, sodass wieder $d(R_2) = n_{\mathrm{f_c}} + N_{\mathrm{d}} n_{\mathrm{f_j}}$.

Die Diagramme proportional zu $(t^A_{ij})^2(\tilde{t}^M_{rs})^2$ tragen zu Z^g_1 bei und sind in den Abbildungen **??** und 2 zu sehen. Am Gluon-Fermion Vertex t^A_{ij} kann r jeden Wert $1, 2, \ldots, N_{\mathrm{d}}$ annehmen, wieder mit jedem Flavour. QCD- oder dQCD-Fermionen können nicht auftauchen, sodass in diesem Fall $d(R_2) = N_{\mathrm{d}} n_{\mathrm{f_j}}$.

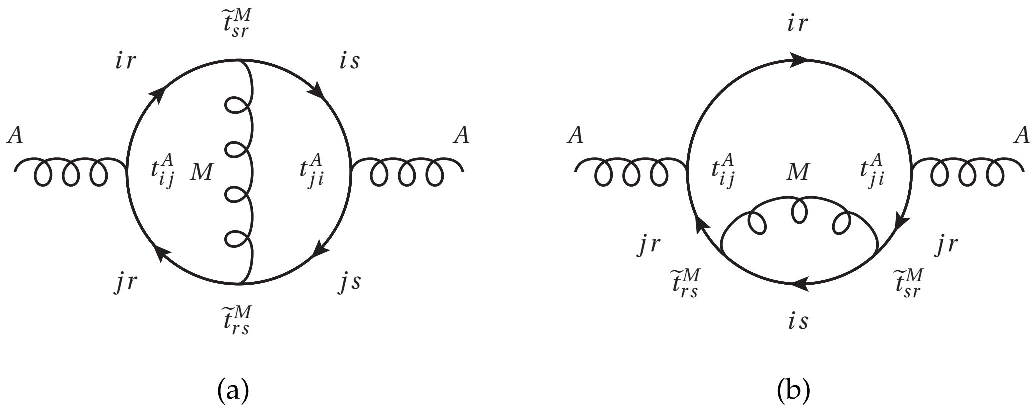

Abbildung 2: 2-Schleifen-Korrekturen $\propto (t^A_{ij})^2(\tilde{t}^M_{rs})^2$ zum Gluonpropagator.

Die ermittelten Koeffizienten stimmen mit denen in [?] überein. Mit $N_{\mathrm{f_c}} := n_{\mathrm{f_c}} + N_{\mathrm{d}} n_{\mathrm{f_j}}$,

$N_{s_c} := n_{s_c} + N_d n_{s_j}$, $N_{f_d} := n_{f_d} + N_c n_{f_j}$ und $N_{s_d} := n_{s_d} + N_c n_{f_j}$ lassen sie sich schreiben als

$$X_1^g = (16\pi^2)^{-1}\left[\frac{2}{3}N_{f_c} + \frac{1}{6}N_{s_c} - \frac{11}{3}N_c\right] \tag{5}$$

$$Y_1^g = (16\pi^2)^{-2}\left[\left(\frac{13}{3}N_c - \frac{1}{N_c}\right)N_{f_c} + \left(\frac{4}{3}N_c - \frac{1}{N_c}\right)N_{s_c} - \frac{34}{3}N_c^2\right] \tag{6}$$

$$Z_1^g = (16\pi^2)^{-2}\left[(N_d^2 - 1)(n_{f_j} + n_{s_j})\right] \quad . \tag{7}$$

Da beide Kopplungskonstanten in einer 4-dimensionalen Raumzeit die Massendimension $[g_1] = [g_2] = 0$ besitzen, werden die neuen Kopplungskonstanten $\alpha_i := g_i^2/4\pi$ eingeführt. Die Bedingung $|g_i| < 1$ für eine sinnvolle Störungstheorie lässt sich zu $\alpha_i < 4\pi$ übersetzen. Mit $X_i := 8\pi X_i^g$, $Y_i := 32\pi^2 Y_i^g$ und $Z_i := 32\pi^2 Z_i^g$ folgt

$$\beta(\alpha) = \begin{pmatrix} X_1\alpha_1^2 + Y_1\alpha_1^3 + Z_1\alpha_1^2\alpha_2 \\ X_2\alpha_2^2 + Y_2\alpha_2^3 + Z_2\alpha_1\alpha_2^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

und als Nullstellen findet man die Fixpunkte

$$\alpha^{*1} = (0,0) \quad \alpha^{*2} = \left(0, -\frac{X_2}{Y_2}\right) \quad \alpha^{*3} = \left(-\frac{X_1}{Y_1}, 0\right) \quad \alpha^{*4} = \left(\frac{Z_1X_2 - X_1Y_2}{Y_1Y_2 - Z_1Z_2}\ \frac{Z_2X_1 - X_2Y_1}{Y_1Y_2 - Z_1Z_2}\right) \quad . \tag{9}$$

An den Fixpunkten gilt außerdem

$$\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* = (\alpha_1^*)^2 Y_1 + (\alpha_2^*)^2 Y_2 \quad \text{sowie} \quad \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* = (\alpha_1^*\alpha_2^*)^2(Y_1Y_2 - Z_1Z_2) \quad . \tag{10}$$

1.1 UV-Verhalten bei α^{*4}

1.1.1 attraktiver Fixpunkt

Für komplett UV-attraktives Verhalten müssen die Bedingungen

$$\alpha_1^* > 0 \quad \wedge \quad \alpha_2^* > 0 \quad \wedge \quad \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* > 0 \quad \wedge \quad \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* < 0 \tag{11}$$

erfüllt sein, man kann jedoch zeigen, dass diese Bedingungen für die gewählte Darstellung nicht gleichzeitig wahr sein können. Dazu werden sie zunächst in den Koeffizienten geschrieben und mit (10) verglichen. Es bietet sich an, eine Fallunterscheidung in den Vorzeichen von Y_1 und Y_2 zu machen. Es folgt

1. $Y_1 > 0 \wedge Y_2 > 0$: Dann ist $\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\big|_* < 0$ nicht möglich.

2. $Y_1 < 0 \wedge Y_2 < 0$: Für einen physikalischen Fixpunkt muss

$$Z_1 X_2 > X_1 Y_2 \quad \wedge \quad Z_2 X_1 > Y_1 X_2 \quad . \tag{12}$$

Wie an (7) zu sehen ist, müssen beide $Z_i > 0$ sein, dann folgt, dass $X_i > 0$ ist. Die Rechnung ohne Skalare ergibt

$$X_1 > 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} N_{\mathrm{f_c}} > \frac{11}{2} N_{\mathrm{c}} \quad \wedge \quad Y_1 < 0 \overset{(6)}{\Rightarrow} N_{\mathrm{f_c}} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_{\mathrm{c}}^2}} N_{\mathrm{c}} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{2} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_{\mathrm{c}}^2}} \quad \lightning \tag{14}$$

Das Einführen von Skalaren begünstigt $X_1 > 0$, ist aber mathematisch nur für $N_{\mathrm{c}} = 1$ oder $N_{\mathrm{d}} = 1$ möglich. Da die $SU(1)$ die Multiplikation mit Eins ist, ist dieser Fall uninteressant.

$$N_{\mathrm{f_c}} > \frac{11}{2} N_{\mathrm{c}} - \frac{1}{4} N_{\mathrm{s_c}} \quad \wedge \quad N_{\mathrm{f_c}} < \left[\frac{34}{3} N_{\mathrm{c}}^2 - \left(\frac{4}{3} N_{\mathrm{c}} - \frac{1}{N_{\mathrm{c}}} \right) N_{\mathrm{s_c}} \right] \left(\frac{13}{3} N_{\mathrm{c}} - \frac{1}{N_{\mathrm{c}}} \right)^{-1} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{4}{3} N_{\mathrm{c}} - \frac{1}{N_{\mathrm{c}}} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{13}{3} N_{\mathrm{c}} - \frac{1}{N_{\mathrm{c}}} \right) \right] N_{\mathrm{s_c}} < \frac{34}{3} N_{\mathrm{c}}^2 - \frac{11}{2} N_{\mathrm{c}} \left(\frac{13}{3} N_{\mathrm{c}} - \frac{1}{N_{\mathrm{c}}} \right) \tag{16}$$

Für $N_{\mathrm{c}} = 1$ folgt die untere Grenze $N_{\mathrm{s_c}} \geq 14$, für $N_{\mathrm{c}} \geq 2$ die obere Grenze $N_{\mathrm{s_c}} \lessapprox -200$, es gibt also keine physikalisch sinnvolle Lösung.

3. Y_1 und Y_2 haben verschiedene Vorzeichen: Damit $\mathrm{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\Big|_* > 0$ ist muss es ein $Z_i < 0$ geben, was in der gewählten Darstellung (7) nicht möglich ist.

Für Fermionen und Skalare in der fundamentalen Darstellung der $SU(N_{\mathrm{c}}) \times SU(N_{\mathrm{d}})$ muss demnach $\dim M_{\mathrm{c}} \leq 1$.

1.1.2 Sattelpunkt

Am physikalischen Sattelpunkt muss gelten

$$\alpha_1^* > 0 \quad \wedge \quad \alpha_2^* > 0 \quad \wedge \quad \mathrm{Det} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\Big|_* < 0 \quad , \tag{17}$$

in Koeffizienten ausgedrückt bedeutet das

$$Z_1 X_2 < X_1 Y_2 \quad \wedge \quad Z_2 X_1 < X_2 Y_1 \quad \wedge \quad Z_1 Z_2 > Y_1 Y_2 \quad . \tag{18}$$

Da es für den Sattelpunkt weniger Bedingungen als für einen UV-attraktiven Fixpunkt gibt, sind Falluntescheidungen in den Vorzeichen von Y_i und X_i nötig. Es wird sich zeigen, dass nur Fälle mit $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$ möglich sind, sodass es obere Schranken für die Teilchenzahlen und N_d gibt.

1. $Y_1 > 0 \wedge Y_2 > 0$:

   a) $X_1 > 0 \wedge X_2 > 0$: Aus (18) folgt

   $$Z_1 < \frac{X_1}{X_2} Y_2 \quad \wedge \quad Z_2 < \frac{X_2}{X_1} Y_1 \quad \wedge \quad Z_1 Z_2 > Y_1 Y_2 \tag{19}$$

   was jedoch nicht gleichzeitig möglich ist.

   b) $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$: Man erhält obere Begrenzungen für die Anzahl der joint-Fermionen

   $$n_{\mathrm{f_c}} + N_\mathrm{d} n_{\mathrm{f_j}} < N_\mathrm{c} \quad \wedge \quad \mathrm{c} \leftrightarrow \mathrm{d} \tag{20}$$

   $$\Rightarrow n_{\mathrm{f_j}}^2 + n_{\mathrm{f_j}} \frac{n_{\mathrm{f_d}}}{N_\mathrm{c}} + \frac{11}{2} \frac{n_{\mathrm{f_c}}}{N_\mathrm{c}} < \left(\frac{11}{2}\right)^2 \quad \wedge \quad \mathrm{c} \leftrightarrow \mathrm{d} \quad . \tag{21}$$

   Es gibt also eine allgemeine Obergrenze von $n_{\mathrm{f_j}} < \frac{11}{2}$, die für die Grenzfälle $n_{\mathrm{f_c}} = 0$ und $n_{\mathrm{f_d}} = 0$ oder $N_\mathrm{c} \to \infty$ und gleichzeitig $N_\mathrm{d} \to \infty$ erreicht wird. Die einzigen Standardmodell nahen Lösungen, die gleichzeitig zu sinnvollen Fixpunkten führen, sind

   $$N_\mathrm{c} = 3 \quad N_\mathrm{d} = 2 \quad n_{\mathrm{f_c}} = 6 \quad 0 \le n_{\mathrm{f_d}} \le 2 \quad n_{\mathrm{f_j}} = 1 \quad , \tag{22}$$

   weitere Lösungen gibt es nur für $n_{\mathrm{f_c}} < 6$ oder $N_\mathrm{c} > 3$.

   c) $X_1 < 0 \wedge X_2 > 0$: Dann müsste

   $$\underbrace{Z_1 X_2}_{>0} < \underbrace{X_1 Y_2}_{<0} \quad \lightning \quad , \tag{23}$$

   dieser Fall kommt für physikalische Fixpunkte also nicht in Frage.

2. $Y_1 > 0 \wedge Y_2 < 0$:

   a) $X_2 > 0$: Wie schon gezeigt ist $Y_2 < 0 \wedge X_2 > 0$ nicht möglich.

   b) $X_1 > 0 \wedge X_2 < 0$: Es kommt direkt zum Widerspruch,

   $$\underbrace{Z_2 X_1}_{>0} < \underbrace{X_2 Y_1}_{<0} \quad \lightning \quad . \tag{24}$$

c) $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$: Auch hier erhält man eine Begrenzung für $n_{\mathrm{f_j}}$

$$n_{\mathrm{f_c}} + N_\mathrm{d} n_{\mathrm{f_j}} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_\mathrm{c}^2}} N_\mathrm{c} \quad \wedge \quad n_{\mathrm{f_d}} + N_\mathrm{c} n_{\mathrm{f_j}} < \frac{11}{2} N_\mathrm{d} \tag{25}$$

$$\Rightarrow n_{\mathrm{f_j}} < \sqrt{\frac{11}{2} \frac{34}{13 - \frac{3}{N_\mathrm{c}^2}}} \lessapprox 3.9 \quad . \tag{26}$$

Gleichzeitige Lösungen zu (18) mit $N_\mathrm{c} = 3$ und $n_{\mathrm{f_c}} \geq 6$ gibt es nicht.

3. $Y_1 < 0 \wedge Y_2 < 0$:

a) Ein $X_i > 0$: Wieder ist $Y_i < 0 \wedge X_i > 0$ nicht möglich.

b) $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$: Hier folgt

$$n_{\mathrm{f_c}} + N_\mathrm{d} n_{\mathrm{f_j}} < \frac{34}{13 - \frac{3}{N_\mathrm{c}^2}} \quad \wedge \quad \mathrm{c} \leftrightarrow \mathrm{d} \tag{27}$$

$$\Rightarrow n_{\mathrm{f_j}} < \frac{34}{\sqrt{\left(13 - \frac{1}{N_\mathrm{c}^2}\right)\left(13 - \frac{1}{N_\mathrm{c}^2}\right)}} \lessapprox 2.7 \quad . \tag{28}$$

Auch hier gibt es keine Lösungen, die nahe am SM sind.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass es in allen Fällen Obergrenzen $n_{\mathrm{f_j}} \lessapprox 5$ für die Anzahl der joint-Fermionen gibt, und durch das Einführen von QCD- und dQCD-Fermionen wird diese Grenze weiter nach unten verschoben. Der einzige Fall, der in der skalarfreien Theorie physikalische Sattelpunkte bringt, ist 1b, exemplarisch ist das Flussdiagramm für $n_{\mathrm{f_j}} = 2$ in Abbildung 3 zu sehen. Alle drei Fixpunkte liegen, wie in Tabelle 1 zu sehen, weit im nicht-perturbativen Bereich. Nicht-perturbative $SU(N)$ Dynamiken können in einem Veneziano-limit störungstheoretisch behandelt werden [**?**][**?**], dabei wird der Grenzfall $N \to \infty, N_\mathrm{f} \to \infty, N/N_\mathrm{f} < \infty, g^2 N \to 0$ betrachtet [**?**]. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist es mit Skalaren jedoch möglich perturbative Fixpunkte zu erhalten, ohne von den Standardmodell Werten $N_\mathrm{c} = 3$ und $n_{\mathrm{f_c}} = 6$ abweichen zu müssen.

$n_{\mathrm{f_d}}$	0	1	2
α^{*4}	$(166.6, 60.8)$	$(69.3, 39.1)$	$(22.4, 28.7)$

Tabelle 1: Lage des Sattelpunktes α^{*4} ohne Skalare.

An den Koeffizienten (5) und (6) sieht man, dass Skalare qualitativ den gleichen Einfluss auf die β-Funktion wie Fermionen haben, jedoch um einen Faktor 3-4 kleiner, es ist also

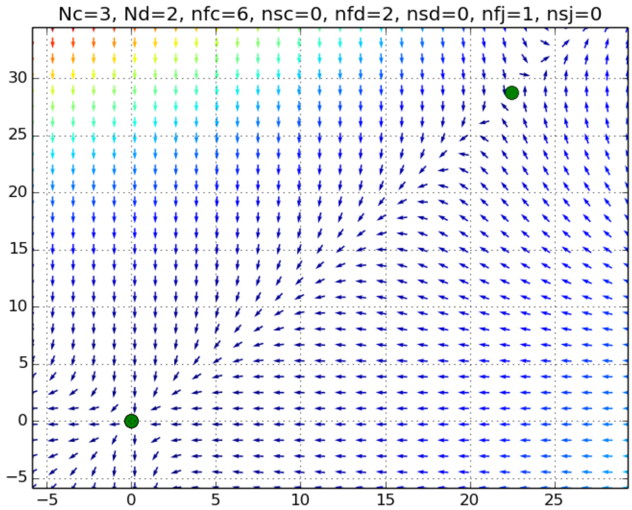

Abbildung 3: Flussdiagramm für den Sattelpunkt α^{*4}.

zu erwarten, dass die Grenzen für die Anzahl der joint-Skalare um einen entsprechenden Faktor höher liegen. Einige mögliche Standardmodell nahe Teilchenzahlen sind in Tabelle 2 zu sehen. In Abbildung 4 ist außerdem der Fixpunkt α^{*4} für $1 \leq n_{s_d} \leq 5$ und sinnvolle n_{s_j} dargestellt. Hier ist zu erkennen, dass α^{*4} betragsmäßtig kleiner wird, je mehr joint-Skalare eingeführt werden.

Um einen vollständig wechselwirkenden UV-Fixpunkt zu erhalten, der mit Methoden der Störungstheorie behandelt werden kann, ist es demnach nötig, skalare Teilchen im joint-Sektor einzuführen. Die Teilchen des dQCD-Sektors haben dagegen, wie in Abbildung 4 zu sehen ist, nur geringe Auswirkungen auf die Lage des Fixpunktes, ob

N_d	n_{s_j}	n_{s_d}	N_d	n_{s_j}	n_{s_d}	N_d	n_{s_j}	n_{s_d}
2	1	18	3	1	24-26	4	1	31-36
2	2	12-16	3	2	5-25	4	2	0-37
2	3	0-14	3	3	0-25	5	1	37-46
2	4	0-12	3	4	1-24	6	1	41-57
2	5	0-10	3	5	14-23	7	1	0-69
2	6	0-7	3	6	20-23			
2	7	0-5	3	7	22			
2	8	0-3						
2	9	0-1						

Tabelle 2: Mögliche Anzahlen von Skalaren für $N_c = 3$, $n_{f_c} = 6$, $n_{f_d} = 0$.

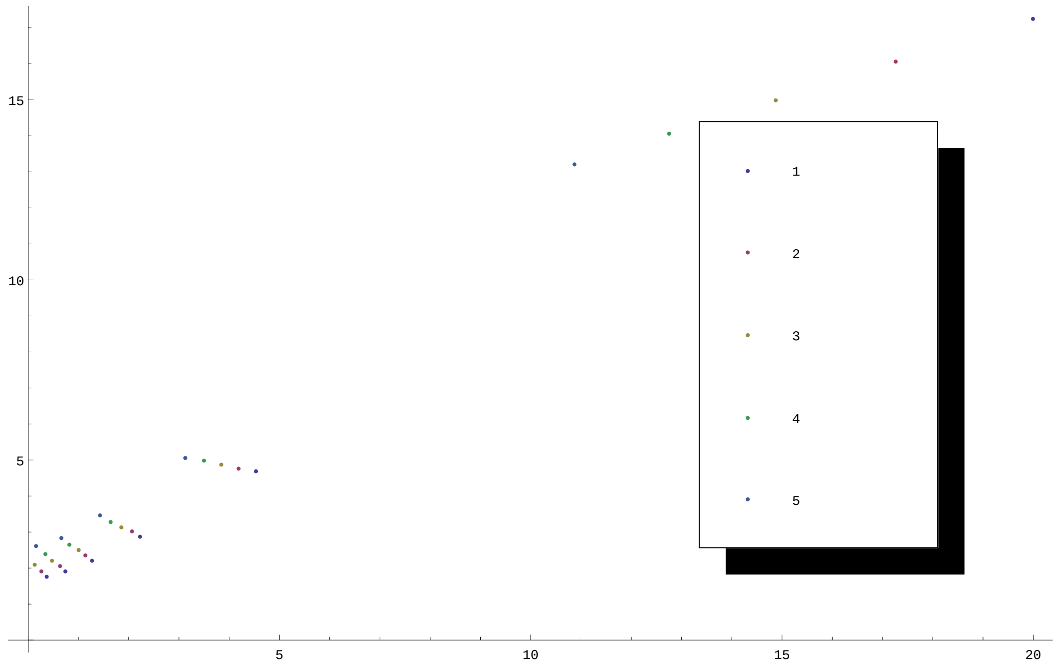

Abbildung 4: Flussdiagramm für den Sattelpunkt α^{*4}.

hier Fermionen, Skalare oder beide Teilchensorten eingeführt werden ist qualitativ nicht entscheidend.

1.2 UV-Verhalten bei α^{*3}

Da der Fixpunkt $\alpha^{*3} = (-X_1 Y_1^{-1}, 0)$ ein teilweise wechselwirkender Fixpunkt ist, muss hier das in **??** beschriebene Stabilitätskriterium angewendet werden. Zunächst kann aber einfach gezeigt werden, dass dieser Fixpunkt nicht in jede Richtung UV-attraktiv sein kann.

Damit $\alpha_1^{*3} = -X_1 Y_1^{-1} > 0$, muss $X_1 < 0$ und $Y_1 > 0$. Es wurde in 1.1.1 gezeigt, das die umgekehrte Vorzeichenwahl physikalisch nicht sinnvoll ist. Gleichung (**??**) zeigt nun $\lambda_1 = (\alpha_1^*)^2 Y_1 > 0$ zu $e_1 = (1,0)^T$, folglich muss die α_1-Achse UV-repulsiv bezüglich α^{*3} sein.

Am Fixpunkt ergibt sich aus (**??**) und (**??**)

$$\lambda_2 = 0 \quad , \quad e_2 = \begin{pmatrix} -Z_1 Y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2} = 2X_2 - 2\frac{X_1}{Y_1} Z_2 \quad . \tag{29}$$

Die Bedingung dafür, dass α^{*3} ein Sattelpunkt ist, ist somit

$$X_1 < 0 \quad \wedge \quad Y_1 > 0 \quad \wedge \quad X_2 Y_1 < Z_2 X_1 \quad . \tag{30}$$

Da die Vorzeichen $X_1 < 0$, $Y_1 > 0$ und $X_2 < 0$ festgelegt sind, kann bereits ohne Fallunterscheidung eine Grenze gefunden werden. Aus $X_1 < 0 \wedge X_2 < 0$ folgt allgemein (vgl. (1b))

$$\left(n_{f_j} + \frac{1}{4} n_{s_j}\right)^2 + \left(n_{f_j} + \frac{1}{4} n_{s_j}\right)\left(n_{f_d} + \frac{1}{4} n_{s_d}\right)\frac{1}{N_c} + \frac{11}{2}\left(n_{f_c} + \frac{1}{4} n_{s_c}\right)\frac{1}{N_c} < \left(\frac{11}{2}\right)^2 \quad \wedge \quad c \leftrightarrow d \quad . \tag{31}$$

Zunächst werden wieder nur Fermionen betrachtet. Da sie außreichen, um perturbative Fixpunkte zu modellieren, wird es nicht nötog sein, Skalare einzuführen. Aus (31) und $X_1 < 0$ folgen allgemeine Grenzen für n_{f_j}, N_d und n_{f_d}

$$\begin{aligned} & n_{f_j} < \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}\frac{n_{f_c}}{N_c}} = 4.39 \quad , \quad n_{f_d} < \left(\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 1\right) N_c - \frac{11}{2} n_{f_c} = 54.75 \quad , \\ & N_d < \frac{11}{2} N_c - n_{f_c} = 10.5 \end{aligned} \tag{32}$$

für $N_c = 3$ und $n_{f_c} = 6$. Tabelle 4 zeigt die möglichen Teilchenanzahlen und die Komponen-

N_d	n_{f_j}	n_{f_d}	α_1^{*3}	N_d	n_{f_j}	n_{f_d}	α_1^{*3}
2	2	0	2.21	6	1	0-29	0.75
3	1	0-8	5.24	7	1	0-35	0.47
3	2	0-9	0.85	8	1	0-40	0.28
3	3	0-7	0.14	9	1	0-46	0.14
4	1	0-16	2.21	10	1	0-51	0.04
4	2	0-15	0.28				
5	1	0-23	1.23				
5	2	0-21	0.04				

Tabelle 3: Mögliche Teilchenzahlen für einen Sattelpunkt bei α^{*3}, mit $N_c = 3$, $n_{f_c} = 6$ und ohne Skalare.

te α_1^{*3}. Im Gegensatz zum vollständig wechselwirkenden Fixpunkt α^{*4} ist α^{*3} auch für eine Theorie ohne Skalare in einem perturbativ sinnvollen Bereich, demnach können hier zwar wieder Skalare eingeführt werden, ein neues Verhalten oder neue Wertebereiche für den Fixpunkt treten aber nicht auf.

N_d	n_{f_j}	n_{f_d}	N_d	n_{f_j}	n_{f_d}
2	1	3-7	5	1	13-24
2	2	1-4	5	2	19-21
2	3	0-1	6	1	17-29
3	1	6-13	7	1	22-35
3	2	4-10	8	1	28-40
3	3	4-7	9	1	36-46
4	1	9-18	10	1	47-51
4	2	10-15			

Tabelle 4: Mögliche Teilchenzahlen für einen Sattelpunkt bei α^{*2}, mit $N_c = 3$, $n_{f_c} = 6$ und ohne Skalare.

1.3 UV-Verhalten bei α^{*2}

Aufgrund der Symmetrie der β-Funktion in den Indizes c und d ist das allgemeine Vorgehen wie bei α^{*3}. Der Fixpunkt ist in α_2-Richtung repulsiv und das Kriterium für einen Sattelpunkt analog zu (30)

$$X_2 < 0 \quad \wedge \quad Y_2 > 0 \quad \wedge \quad X_1 Y_2 < Z_1 X_2 \quad . \tag{33}$$

Ähnlich bei Fixpunkt α^{*3} ist es auch bei α^{*2} nicht nötig Skalare einzuführen, da sie zu keinem qualitativ neuen Verhalten führen. Wieder gibt es Ober- und Untergrenzen für N_d, n_{f_j} und n_{f_d} um eine UV-attraktive Richtung zu erhalten. Die möglichen Werte sind in Tabelle 4 zu sehen.

1.4 Yukawa-Terme

In [?] schließen Litim und Sannino, dass Yukawa-Kopplungen nötig sind, um in einer (einfachen) Eich-Yukawa-Theorie nicht-triviale UV-Fixpunkte zu erzeugen. Durch die Kombination von zwei einfachen Eichgruppen entstehen die bereits beschriebenen UV-Fixpunkte auch ohne Yukawa-Kopplungen. Es soll nun eine qualitative Abschätzung gemacht werden, inwiefern Yukawa-Kopplungen auch bei halbeinfachen Eichgruppen die Entstehung von UV-Fixpunkten begünstigen.

Wie in Abschnitt **??** beschrieben gibt es nur eine eine Art der Yukawa-Kopplung, Gleichung (**??**), die mit nur einer Kopplungskontstanten auskommt, und deshalb für veränderliche Flavour-Zahlen einfach untersucht werden kann. Der Beitrag zur β-Funktion

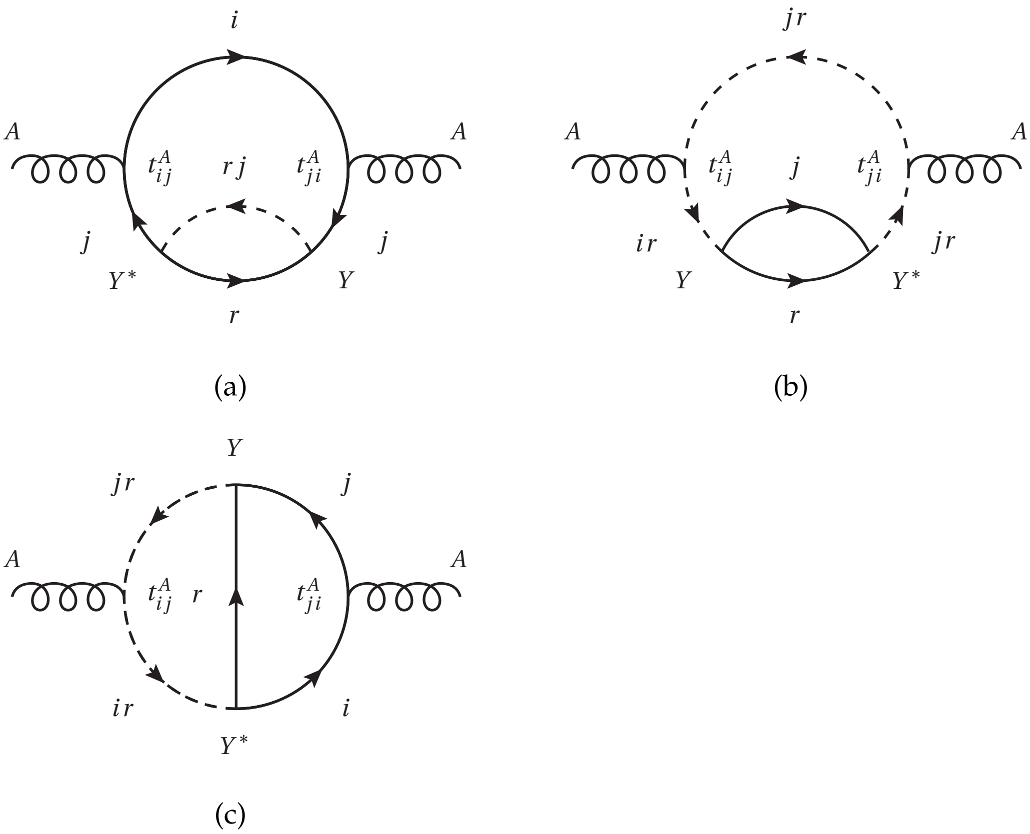

Abbildung 5: Yukawa-Beiträge zum Gluonpropagator.

der Eichkopplungen wurde von Machacek und Vaughn als

$$\beta_1^{\text{Yukawa}}(g) = -g_1^3(16\pi^2)^{-2}\frac{2}{d(G)}\left[C_2(R_1)\delta^{il}Y^{l,r,js}(Y^{i,r,js})^*\right] \tag{34}$$

berechnet [?]. Sie haben außerdem festgestellt, dass nur das Diagramm 5(a) zur β-Funktion beiträgt. Mit (??) lässt sich (34) zu

$$\beta_1^{\text{Yukawa}}(g) = -g_1^3|Y|^2(16\pi^2)^{-2}\frac{2C_2(R_1)d(R_1)d(R_2)}{d(G_1)}n_{\text{s}_\text{j}} \tag{35}$$

$$= -g_1^3|Y|^2(16\pi^2)^{-2}n_{\text{f}_\text{c}}n_{\text{f}_\text{d}}n_{\text{s}_\text{j}}N_\text{d} \tag{36}$$

zusammenfassen. Bemerkenswert ist hiebei, dass wegen

$$C_2(R)d(R) = T(R)d(G) \quad , \quad T(R) = 1/2 \;\text{ für } SU(N) \tag{37}$$

der Yukawa-Term in β_1 unabhängig von N_c ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass

QCD- und joint-Teilchen gleich unter der $SU(N_\mathrm{c})$ transformieren. Mit $\alpha_Y := {}^{|Y|^2}/_{4\pi}$ und

$$A_1 := -\frac{2}{16\pi^2} n_{\mathrm{f_c}} n_{\mathrm{f_d}} n_{\mathrm{s_j}} N_\mathrm{d} \quad \text{sowie} \quad A_2 := -\frac{2}{16\pi^2} n_{\mathrm{f_c}} n_{\mathrm{f_d}} n_{\mathrm{s_j}} N_\mathrm{c} \tag{38}$$

wird (8) zu

$$\beta(\alpha) = \begin{pmatrix} X_1 \alpha_1^2 + Y_1 \alpha_1^3 + Z_1 \alpha_1^2 \alpha_2 + A_1 \alpha_1^2 \alpha_Y \\ X_2 \alpha_2^2 + Y_2 \alpha_2^3 + Z_2 \alpha_1 \alpha_2^2 + A_2 \alpha_2^2 \alpha_Y \end{pmatrix} \tag{39}$$