1 Untersuchung einer β-Funktion

An Gleichung **??** erkennt man, dass die β-Funktion einer QFT eine Seite eines Systems N gekoppelter, gewöhnlicher, nichtlinearer Differentialgleichungen der Form

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_k(\mu) = P_k^{M_L}(g_1, \dots, g_N) =: \beta_k(g_1, \dots, g_N), \quad k = 1, \dots, N \tag{1}$$

ist. Dabei stellt jedes P_k ein Polynom maximal M_L-ten Grades in den Kopplungskonstanten dar. Der Grad des Polynoms hängt nur von der Ordnung der Störungstheorie ab, im Bild von Feynmangraphen entspricht dies der maximalen Anszahl L von Quantenschleifen, die in der Berechnung berücksichtigt werden. Hier ist es naheliegend, das DGL-System als Problem im $\mathbb{R}^N$ zu betrachtet. Mit $g := (g_1, \dots, g_N)^\mathrm{T}$ und $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_N)^\mathrm{T}$ lässt sich (1) auch als

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = \beta(g) \tag{2}$$

schreiben. Dann heißt $\mathbb{R}^N$ auch der Phasenraum der β-Funktion.

Definition 1.1. Eine *Trajektorie im Phasenraum* ist eine Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}^N$, die die Gleichung (2) löst.
Ein *Fixpunkt der β-Funktion* ist ein Punkt $g^* \in \mathbb{R}^N$, für den $\beta(g^*) = 0$ gilt.

Damit eine QFT physikalisch sinnvoll ist, muss sie Vorhersagen für alle Energieskalen machen können. Um eine auch für hohe Energieskalen μ gültige Theorie zu beschreiben muss demnach der Wert $\lim\limits_{\mu\to\infty} g(\mu)$ existieren, ebenso muss der Wert $\lim\limits_{\mu\to 0} g(\mu)$ existieren, wenn die Theorie auch für niedrige Energieskalen gültig sein soll. Damit die Grenzwerte existieren muss $\lim {}^{\mathrm{d}}/_{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = 0$ sein, es sind also gerade die Fixpunkte der β-Funktion, die als Grenzwerte in Frage kommen.

Im Laufe der Untersuchung der β-Funktion haben sich die folgenden Bezeichnungen entwickelt.

Gaußscher Fixpunkt: Ist der Punkt $g^* = 0$ ein Fixpunkt der β-Funktion, so spricht man von einem Gaußschen Fixpunkt.

Banks-Zaks Fixpunkt: Ein Fixpunkt $g^* \neq 0$, der physikalsich sinnvoll und perturbativ ist, heißt Banks-Zaks oder Caswell-Banks-Zaks Fixpunkt.

Landau Pol: Besitzt die Lösung des Problems (2) mit Anfangswert $g(\mu_0) = g_0$ eine Polstelle $\mu_{\mathrm{Pol}} < \infty$, sodass $g(\mu) \xrightarrow{\mu\to\mu_{\mathrm{Pol}}} \infty$, dann spricht man von einem Landau-Pol.

1.1 Vereinfachung des mathematischen Problems

Die Berechnung einer Trajetkorie als Lösung zum Anfangswertproblem (2) mit Anfangswert $g(\mu_0) = g_0$ ist in der Regel analytisch nicht möglich. Durch einige einfache Schritte lässt sich das Problem jedoch zunächst in eine einfacher zuhandhabende Form überführen und sich das Verhalten in der Nähe eines Fixpunktes vorhersagen.

In [2] schlägt S. Weinberg die Einführung der dimensionslosen Kopplungskonstanten

$$\bar{g}_i(\mu) := \mu^{-d_i} g_i(\mu) \tag{3}$$

vor, wobei d_i die Massendimension der Kopplungskonstanten g_i ist. Bei der Untersuchung der QCD×dQCD-β-Funktion wird klar, dass die Erweiterung

$$\alpha(\mu)_i := \mathcal{N}\left(\mu^{-d_i} g_i(\mu)\right)^n \tag{4}$$

den Grad M_L der β-Funktion verringern kann und somit das Problem weiter vereinfacht (vgl. [1], [3]). Dabei dient $\mathcal{N}$ als Normierungskonstante, die insbesondere von dimensionslosen Größen wie Teilchenzahlen oder Größen der Symmetriegruppe abhängen kann.

Beispiel 1.2. Für ein eindimensionales Problem

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g(\mu) = X g(\mu)^3 + Y g(\mu)^5 \tag{5}$$

und für den einfachen Fall $[g] = 0$ definiere

$$\alpha(\mu) = \mathcal{N} g(\mu)^2 \quad . \tag{6}$$

Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} = \mathcal{N} 2g \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu} g = \frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} \tag{7}$$

und damit

$$\frac{1}{2\mathcal{N}} \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = X g(\mu)^4 + Y g(\mu)^6 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\mathcal{N}} \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = \frac{X}{\mathcal{N}^2} \alpha(\mu)^2 + \frac{Y}{\mathcal{N}^3} \alpha(\mu)^3 \tag{9}$$

$$\Rightarrow \quad \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = \tilde{X} \alpha(\mu)^2 + \tilde{Y} \alpha(\mu)^3 \tag{10}$$

mit $\tilde{X} = 2X\mathcal{N}^{-1}$ und $\tilde{Y} = 2Y\mathcal{N}^{-2}$.

Naheliegend wird wieder $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^{\mathrm{T}}$ und $\beta(\alpha) = \beta(g \circ \alpha)$ geschrieben.

Der physikalisch sinnvolle Wertebereich für die Energieskala μ ist $(0, \infty)$. Mit der Renormierungsgruppenzeit (RG-Zeit) t, definiert als

$$t(\mu) := \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \Leftrightarrow \mu(t) := e^t \quad , \tag{11}$$

gibt es eine Bijektion $(0, \infty) \xrightarrow{t} (-\infty, \infty)$, die es erlaubt die Kopplungskonstante als

$$\tilde{\alpha}(t) := \alpha(e^t) = \alpha(\mu) \tag{12}$$

zu schreiben. Der Parameter Λ ist beliebig und hat keine physikalische Bedeutung, er wird später lediglich die Extrapolation der Fixpunkte übersichtlicher gestalten. Es folgt

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \alpha(\mu) = \mu \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\mu}}_{=\mu^{-1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{\alpha}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{\alpha}(t) \quad . \tag{13}$$

Damit ist Gleichung (2) äquivalent zu der autonomen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \alpha(t) = \beta(\alpha) \quad , \tag{14}$$

wobei $\tilde{\alpha}$ wieder zu α umbenannt wurde.

1.2 Verhalten in einer Umgebung eines Fixpunktes

Um das Verhalten der Kopplungskonstanten $\alpha(t)$ in der Nähe eines Fixpunktes zu untersuchen wird die Stabilitätsmatrix wie folgt eingeführt.

Definition 1.3. Sei α^* ein Fixpunkt der β-Funktion im $\mathbb{R}^N$ und sei β in α^* zweimal stetig differenzierbar. Die Matrix

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} := \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j}\right)_{1 \le i, j \le N} \tag{15}$$

heißt *Stabilitätsmatrix der β-Funktion* [2]. Außgewertet am Punkt α^* ist die Schreibweise $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_{\alpha^*}$ oder kurz $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_*$.
Ein Fixpunkt α^* heißt *hyperbolisch*, wenn alle Eigenwerte von $\left.\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right|_*$ einen von Null verschiedenen Realteil besitzen [5].

Der Zusammenhang zu der Stabilität des Fixpunktes ist folgendermaßen zu erkennen.

In der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes α^* kann Gleichung (14) durch ihre Linearisierung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) \simeq \left.\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right|_* (\alpha(t) - \alpha^*) \tag{16}$$

beschrieben werden. Mit den Eigenvektoren[1] $\{e_i\}$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}$ und

$$\alpha(t) - \alpha^* =: \sum_{i=1}^{N} K_i(t) e_i \tag{17}$$

folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} K_i(t)e_i + \alpha^*\right) = \left.\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right|_* \sum_{i=1}^{N} K_i(t)e_i = \sum_{i=1}^{N} K_i(t)\lambda_i e_i \tag{18}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K_i(t) = K_i(t)\lambda_i \tag{19}$$

mit der Lösung

$$K_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t} K_i(0) \tag{20}$$

für $K_i(0) \in \mathbb{R}$ klein. Die Lösung für $\alpha(t)$ lässt sich dann schreiben als

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\lambda_i t} K_i(0) e_i + \alpha^* \tag{21}$$

Dieses Ergebnis ist unter anderem in [4], [2] und [3] zu sehen. Im linearisierten Problem werden nun drei eindeutige, lineare Unterräume unterschieden [5].

Definition 1.4.
1. Die *stabile Mannigfaltigkeit* besteht aus allen Punkten im Phasenraum, die in den Fixpunkt hinein laufen.

2. Die *instabile Mannigfaltigkeit* besteht aus allen Punkten im Phasenraum, die aus dem Fixpunkt heraus laufen.

3. Die *Zentrumsmannigfaltigkeit* M_z besteht aus den restlichen Punkten in der Fixpunktumgebung.

Aus Gleichung (21) wird dann klar, dass eine Trajektorie in M_s für $t \to \infty$ den Fixpunkt erreicht. Ein Eigenvektor mit positivem Eigenwert wird auch als IR-attraktiv, mit einem negativen Eigenwert als IR-repulsiv bezeichnet [4].

[1] Die Eigenvektoren müssen gegebenenfalls zu einer Basis ergänzt werden.

1.3 Sonderfall: nicht hyperbolischer Fixpunkte

Bei allgemeinen Betrachtungen (vgl. [4]) wird der nicht hyperbolische Fall $\lambda_i = 0$ oft als unwichtiger Sonderfall nicht weiter betrachtet. Bei der Untersuchung einer konkreten β-Funktion kommt dieser Sonderfall aber auf natürliche Weise schnell zu stande.

Eine dimensionslose Kopplungskonstante $\alpha_1 := \mathcal{N} g_1^2$ muss, damit die physikalische Kopplungskonstante g_1 reell ist, positiv sein. Es muss demnach $\beta_1(\alpha) \geq 0$ auf der gesamten α_1-Achse gelten. Falls es nun einen Fixpunkt $\alpha^* = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^{\mathrm{T}}$ und es einen Eigenvektor $e_1 \in M_{\mathrm{s}}$ gibt[2], dann folgt aus (20)

$$\beta(K_1(t)e_1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_1(t) = K_1(t)\lambda_1 \tag{22}$$

[2]Dabei soll M_{s} nicht nur aus der α_1-Achse bestehen. Da M_{s} ein linearer Unterraum ist, gibt es zumindest eine Linearkombination $\left(\sum_{i=1}^{N} c_i e_i\right) \in M_{\mathrm{s}}$, die folgende Argumentation kann dann analog geführt werden.

Zeichenerklärung

- „$\simeq$" für asymptotisch gleich.
  Beispiel 1.5.

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{23}$$

  Für eine Linearisierung von f in der Umgebung von x_0. Für $|(x - x_0)| \to 0$ gilt $\left|f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)\right| \to 0$ hinreichend schnell.

- „$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots)$" für eine Diagonalmatrix mit Einträgen $a_1, a_2, \ldots$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \quad . \tag{24}$$

Literatur

[1] Y. Bai and P. Schwaller. Scale of dark qcd. *Phys. Rev. D*, 89:063522, Mar 2014.

[2] S. W. Hawking and W. Israel, editors. *General relativity, An Einstein centenary survey*, The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge CB2 1RP, 1979. Cambridge [u.a.]: Univ. Pr.

[3] D. F. Litim and F. Sannino. Asymptotic safety guaranteed. *arxive*, Jun 2014.

[4] S. Weinberg. Critical phenomena for field theorists. In *Erice Subnucl.Phys.1976:1*, page 1, 1976.

[5] E. Zeidler. Springer-handbuch der mathematik iv. 2013.