# Inhaltsverzeichnis

# 1 Die $\beta$-Funktion

## 1.1 $\beta(g)$

Aus "Two-loop $\beta$-function for a $G_1 \times G_2$ gauge symmetry", D.R.T. Jones übernehmen wir die allgemeine Form einer 2-loop-$\beta$-Funktion

$$\begin{aligned} \beta_1(g_1, g_2) &= X_1 g_1^3 + Y_1 g_1^5 + Z_1 g_1^3 g_2^2 \\ \beta_2(g_1,_g 2) &= X_2 g_2^3 + Y_2 g_2^5 + Z_2 g_1^2 g_2^3 \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Zur besseren Übersichtlichkeit, definiere $\beta(g) := (\beta_1(g_1, g_2), \beta_2(g_1, g_2))^T$ sowie $g = (g_1, g_2)^T$. Außerdem ist $g = g(\mu)$ und

$$\beta = \mu \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}\mu} \\ \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}\mu} \end{pmatrix} \tag{2}$$

## 1.2 $\beta(\alpha)$

Durch eine Neudefinition der Kopplungskonstanten kann das Problem vereinfacht werden. Die kritische Dimension für QCD-artige Kopplungen ist 4; die dimensionslosen Kopplungskonstanten können demnach über

$$\alpha_i(\mu) := \mathcal{N}_i g_i^2(\mu) \mu^{d-4} \tag{3}$$

definiert werden, wobei $\mathcal{N}_i$ Normierungskonstanten und $d$ die Dimension der Raumzeit sind. Wir setzen $d \equiv 4$.
Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}\mu} = \mathcal{N}_i 2 g_i \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}\mu} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}\mu} g_i = \frac{1}{2\mathcal{N}_i} \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}\mu} \tag{4}$$

und damit aus (1)

$$\mu \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}\mu} = X_i g_i^3 + Y_i g_i^5 + Z_i g_i^3 g_j^2 \tag{5}$$

$$\overset{\cdot g_i}{\Rightarrow} \qquad \mu \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}\mu} g_i = X_i g_i^4 + Y_i g_i^6 + Z_i g_i^4 g_j^2 \tag{6}$$

$$\overset{(3),(4)}{\Rightarrow} \qquad \mu \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}\mu} \frac{1}{2\mathcal{N}_i} = \frac{X_i}{\mathcal{N}_i^2} \alpha_i^2 + \frac{Y_i}{\mathcal{N}_i^3} \alpha_i^3 + \frac{Z_i}{\mathcal{N}_i^2 \mathcal{N}_j} \alpha_i^2 \alpha_j \tag{7}$$

$$\overset{\cdot 2\mathcal{N}_i}{\Rightarrow} \qquad \mu \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}\mu} = \frac{2X_i}{\mathcal{N}_i} \alpha_i^2 + \frac{2Y_i}{\mathcal{N}_i^2} \alpha_i^3 + \frac{2Z_i}{\mathcal{N}_i \mathcal{N}_j} \alpha_i^2 \alpha_j \quad . \tag{8}$$

Mit der Redefinition $\frac{2X_i}{\mathcal{N}_i} \longrightarrow X_i$, $\frac{2Y_i}{\mathcal{N}_i^2} \longrightarrow Y_i$, $\frac{2Z_i}{\mathcal{N}_i \mathcal{N}_j} \longrightarrow Z_i$ erhält man neue Funktionen

$$\begin{aligned} \beta_1(\alpha_1, \alpha_2) &= X_1 \alpha_1^2 + Y_1 \alpha_1^3 + Z_1 \alpha_1^2 \alpha_2 \\ \beta_2(\alpha_1, \alpha_2) &= X_2 \alpha_2^2 + Y_2 \alpha_2^3 + Z_2 \alpha_1 \alpha_2^2 \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Wieder ist

$$\beta = \mu \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}\mu} \\ \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}\mu} \end{pmatrix} \tag{10}$$

mit $\beta(\alpha) = (\beta_1(\alpha), \beta_2(\alpha))^T$ und $\alpha = (\alpha_1(\mu), \alpha_2(\mu))^T$.

### 1.3 Nullstellen der $\beta$-Funktion

Fixpunkte sind stationäre Lösungen von $\beta(\alpha) = 0$, d.h.

$$0 = X_1\alpha_1^2 + Y_1\alpha_1^3 + Z_1\alpha_1^2\alpha_2 \tag{11}$$

$$0 = X_2\alpha_2^2 + Y_2\alpha_2^3 + Z_2\alpha_1\alpha_2^2 \quad . \tag{12}$$

Damit der Fixpunkt physikalisch sinnvoll ist muss $\alpha_i \geq 0$ sein, und der Fixpunkt sollte ein Punkt im $\mathbb{R}^2$ sein, d.h. keine freien Parameter mehr besitzen (keine Untermannigfaltigkeit sein).
Man findet

- den trivialen Fixpunkt $\alpha^{*1} = (0,0)$
- den halb-trivialen Fixpunkt $\alpha^{*2} = (0, -\frac{X_2}{Y_2})$ falls $Y_2 \neq 0$
- den halb-trivialen Fixpunkt $\alpha^{*3} = (-\frac{X_1}{Y_1}, 0)$ falls $Y_1 \neq 0$
- den nichttrivialen Fixpunkt $\alpha^{*4} = \left(\frac{Z_1X_2 - X_1Y_2}{Y_1Y_2 - Z_1Z_2}, \frac{X_1Z_2 - Y_1X_2}{Y_1Y_2 - Z_1Z_2}\right)$

als einzige zulässige Fixpunkte.

**Beweis**

- $\alpha^{*1}$ klar.
- $\alpha^{*2/3}$ durch Einsetzen der Null und Reduktion auf ein lineares System $\Rightarrow$ Lösung eindeutig.
- $\alpha^{*4}$ durch Reduktion auf ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Für $Y_1Y_2 - Z_1Z_2 \neq 0$ ist die Lösung eindeutig. Für $Y_1Y_2 - Z_1Z_2 = 0$ ist die Lösung eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ und somit nicht zulässig.$\square$

| $\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$ | $\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|---|---|---|---|
| $>0$ | $>0$ | $>0+i\mathbb{R}$ | $>0+i\mathbb{R}$ |
| $<0$ | $>0$ | $<0+i\mathbb{R}$ | $<0+i\mathbb{R}$ |
| $=0$ | $>0$ | $=0+i\mathbb{R}$ | $=0+i\mathbb{R}$ |
| - | $<0$ | $>0$ | $<0$ |
| $>0$ | $=0$ | $>0$ | $=0$ |
| $<0$ | $=0$ | $=0$ | $<0$ |
| $=0$ | $=0$ | $=0$ | $=0$ |

Tabelle 1: Eigenwerte der Stabilitätsmatrix

# 2 Stabilität von Fixpunkten

## 2.1 Stabilitätsmatrix $\frac{\mathbf{d}\beta}{\mathbf{d}\alpha}$

Um die Stabilität von Fixpunkten zu untersuchen wird die Stabilitätsmatrix $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$ als Jacobimatrix der $\beta$-Funktion eingeführt

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial\beta_1}{\partial\alpha_2} \\ \frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X_1\alpha_1 + 2Y_1\alpha_1^2 + 2Z_1\alpha_1\alpha_2 & Z_1\alpha_1^2 \\ Z_2\alpha_2^2 & 2X_2\alpha_2 + 3Y_2\alpha_2^2 + 2Z_2\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{13}$$

**Proposition 2.1** *Die Vorzeichen der Eigenwerte von $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$ lassen sich durch Spur und Determinante über die Tabelle 1 bestimmen.*

**Beweis** Das charakteristische Polynom der $2\times 2$-Matrix $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$ ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\lambda + \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \quad , \tag{14}$$

die Eigenwerte sind die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right)^2 - \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}} \quad . \tag{15}$$

**1. $\mathbf{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} > \left(\frac{\mathbf{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right)^2$:** Dann ist $\Re(\lambda_{1/2}) = \frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}$

**2. $\left(\frac{\mathbf{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right)^2 > \mathbf{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} > 0$:** Dann ist $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right)^2 - \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}} < \left|\frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right|$ und damit $\mathrm{sig}\,\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \mathrm{sig}\,\lambda_{1/2}$

**3. $\mathbf{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} < 0$:** Dann ist $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right)^2 - \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}} > \left|\frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right|$ und somit $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$

**4. Det$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = 0$:** Falls Sp$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} > 0$, dann $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, falls Sp$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} < 0$, dann $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Falls Sp$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = 0$, dann $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

□

## 2.2 Autonome $\beta$-Funktion

Sei $\alpha^*$ ein Fixpunkt, d.h. $\beta(\alpha^*) = 0$. Zunächst soll der Fixpunkt auf Null verschoben werden

$$\tilde{x}(\mu) := \alpha(\mu) - \alpha^* \Leftrightarrow \alpha(\mu) = \tilde{x}(\mu) + \alpha^* \quad . \tag{16}$$

Wegen $\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu}$ ergibt sich

$$\mu \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\mu}(\mu) = \beta \circ \alpha\big|_{\tilde{x}}(\mu) \tag{17}$$

mit dem Fixpunkt $\tilde{x}^* = (0,0)$.
Definiere die RG-Zeit $t := \ln(\mu) \Leftrightarrow \mu = e^t$, sowie $x(t) := \tilde{x}(e^t)$. Durch Nachrechnen lässt sich feststellen

$$\mu \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\mu}(\mu) = \mu \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}\mu}(e^t) = \mu \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\mu}(t) = \mu \underbrace{\frac{\partial t}{\partial \mu}}_{=1/\mu} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{18}$$

außerdem muss $\mu \geq 0$ um physikalisch sinnvoll zu sein. Somit ist die Zuordnung $t = \ln\mu$ bijektiv und Gleichung (17) ist äquivalent zu dem autonomen DGL System

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \beta \circ \alpha\big|_x \tag{19}$$

## 2.3 Lösung in einer Umgebung eines Fixpunktes

Durch linearisierung von (19) in der Nähe des Fixpunktes erhält man

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \left.\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right|_{\alpha|_{(0,0)}} x(t) \quad . \tag{20}$$

Die Lösung ist

$$x(t) = e^{\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} t} x_0 \tag{21}$$

für einen Anfangswert $x_0$ nahe dem Fixpunkt.
Seien nun $\lambda_{1/2}$ die Eigenwerte und $e_1, e_2$ die Eigenvektoren der Stabilitätsmatrix, so erhält man mit $T := (e_1 e_2)$

$$x(t) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} T^{-1} \underbrace{(K_1 e_1 + K_2 e_2)}_{=x_0} \tag{22}$$

$$= (e^{\lambda_1 t} e_1 \, e^{\lambda_2 t} e_2) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \tag{23}$$

und schließlich

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} K_1 e_1 + e^{\lambda_2 t} K_2 e_2 \quad . \tag{24}$$

## 2.4 Asymptotisches Verhalten in der Nähe eines Fixpunktes (Klassifizierung von Fixpunkten)

An Gleichung (24) ist leicht zu erkennen, dass

- wenn $\Re(\lambda_1) > 0$ und $\Re(\lambda_2) > 0$, dann verlässt $x(t)$ die Nähe von 0 für wachsendes $t$. Der Fixpunkt ist dann repulsiv (IR-Fixpunkt/Bank-Zanks).
- wenn $\Re(\lambda_1) > 0$ und $\Re(\lambda_2) > 0$, dann gilt $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$. Es handelt sich um einen attraktiven (UV) Fixpunkt.
- wenn $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$, dann handelt es sich um einen Sattelpunkt: liegt $x_0$ auf der $e_1$-Geraden ($K_2 = 0$) entfernt sich $x(t)$,
  liegt $x_0$ auf der $e_2$-Geraden ($K_1 = 0$) nähert sich $x(t)$ dem Fixpunkt an, sind $K_1 \neq 0$ und $K_2 \neq 0$ so führt die Trajektorie am Fixpunkt vorbei.
- Der Fall $\lambda_{1/2} \neq 0$, $\lambda_{2/1} = 0$ wird in 3.2 untersucht.

# 3 Untersuchung der Fixpunkte

## 3.1 Nichttrivialer Fixpunkt $\alpha^{*4}$

Am Fixpunkt $\alpha^* := \alpha^{*4}$ gilt

$$\alpha^* = \left(\frac{Z_1 X_2 - X_1 Y_2}{Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2}, \frac{X_1 Z_2 - Y_1 X_2}{Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2}\right) \tag{25}$$

$$\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* = \frac{X_1^2 Y_2(Y_1 Y_2 + Z_2^2) - 2X_1 X_2 Y_1 Y_2(Z_1 + Z_2) + X_2^2 Y_1(Y_1 Y_2 + Z_1^2)}{(Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2)^2} \tag{26}$$

$$\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* = \frac{(X_2 Y_1 - X_1 Z_2)^2 (X_1 Y_2 - X_2 Z_1)^2}{(Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2)^3} \quad . \tag{27}$$

Nach Abschnitt 2.4 muss an einem UV-Fixpunkt gelten:

$$\alpha_1^* \geq 0 \tag{28}$$

$$\alpha_2^* \geq 0 \tag{29}$$

$$\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* < 0 \tag{30}$$

$$\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* > 0 \tag{31}$$

mit den vorherige Gleichungen also

$$\frac{Z_1 X_2 - X_1 Y_2}{Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2} \geq 0 \tag{32}$$

$$\frac{X_1 Z_2 - Y_1 X_2}{Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2} \geq 0 \tag{33}$$

$$\frac{X_1^2 Y_2(Y_1 Y_2 + Z_2^2) - 2X_1 X_2 Y_1 Y_2(Z_1 + Z_2) + X_2^2 Y_1(Y_1 Y_2 + Z_1^2)}{(Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2)^2} < 0 \tag{34}$$

$$\frac{(X_2 Y_1 - X_1 Z_2)^2 (X_1 Y_2 - X_2 Z_1)^2}{(Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2)^3} > 0 \quad . \tag{35}$$

Dies ist jedoch nicht möglich.

**Beweis** Aus (35) folgt

$$Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2 > 0 \Rightarrow Y_1 Y_2 > Z_1 Z_2 \quad . \tag{36}$$

Damit folgt in (32) und (33)

$$Z_1 X_2 \geq X_1 Y_2 \tag{37}$$

$$X_1 Z_2 \geq Y_1 X_2 \quad . \tag{38}$$

Gleichung (34) ist äquivalent zu

$$X_1^2 Y_2(Y_1 Y_2 + Z_2^2) + X_2^2 Y_1(Y_1 Y_2 + Z_1^2) < 2X_1 X_2 Y_1 Y_2(Z_1 + Z_2) \quad . \tag{39}$$

Wir können die linke Seite weiter nach unten Abschätzen:

$$X_1^2 Y_2 (Y_1 Y_2 + Z_2^2) + X_2^2 Y_1 (Y_1 Y_2 + Z_1^2) \tag{40}$$
$$= X_1 (X_1 Y_2)(\underbrace{Y_1 Y_2}_{(36)} + Z_2^2) + X_2 (Y_1 X_2)(\underbrace{Y_1 Y_2}_{(36)} + Z_1^2) \tag{41}$$
$$> X_1 (X_1 Y_2)(Z_1 Z_2 + Z_2^2) + X_2 (Y_1 X_2)(Z_1 Z_2 + Z_1^2) \tag{42}$$
$$= (Z_1 + Z_2) \left[ \underbrace{(X_1 Z_2)}_{(38)} (X_1 Y_2) + \underbrace{(Z_1 X_2)}_{(37)} (Y_1 X_2) \right] \tag{43}$$
$$\geq (Z_1 + Z_2) [Y_1 X_2 X_1 Y_2 + Y_1 X_2 Y_2 X_1] \tag{44}$$
$$= (Z_1 + Z_2) 2 X_1 X_2 Y_1 Y_2 \tag{45}$$

Also haben wir gefunden:

$$(Z_1 + Z_2) 2 X_1 X_2 Y_1 Y_2 < X_1^2 Y_2 (Y_1 Y_2 + Z_2^2) + X_2^2 Y_1 (Y_1 Y_2 + Z_1^2) < 2 X_1 X_2 Y_1 Y_2 (Z_1 + Z_2) \quad , \tag{46}$$

dies ist jedoch falsch. Folglich kann $\alpha^{*4}$ mit $\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \neq 0$ und $\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \neq 0$ kein kein UV-Fixpunkt sein.

**Bemerkung** Der Beweis ist auch gültig, falls in (34) oder (35) "≥" bzw. "≤" zugelassen wird. Nur bei $\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}|_* = \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}|_* = 0$ gilt der Beweis nicht.
In diesem Fall wird das Problem jedoch uninteressant:

## 3.2 Halb-trivialer Fixpunkt $\alpha^{*3}$

Am Fixpunkt $\alpha^* := \alpha^{*3}$ gilt [1]

$$\alpha* = \left( -\frac{X_1}{Y_1}, 0 \right) \tag{47}$$
$$\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* = \frac{X_1^2}{Y_1} \tag{48}$$
$$\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\bigg|_* = 0 \quad . \tag{49}$$

Da hier mindestens ein Eigenwert gleich Null ist kann mit Tabelle 2.1 keine Aussage getroffen werden. Hier wird das Verhalten der Eigenwerte in der Nähe von $\alpha^*$ zur Hilfe genommen.

### 3.2.1 Stabilitätsbedingungen für $\alpha^{*3}$

Die Eigenwerte an $\alpha$ sind

$$\lambda_{1/2} = \frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2} \right)^2 - \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}} \quad . \tag{50}$$

[1] Es soll $X_1 \neq 0$, sonst wird der Fixpunkt trivial.

An $\alpha^*$ ist die Stabilitätsmatrix

$$\left.\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right|_* = \begin{pmatrix} \frac{X_1^2}{Y_1} & Z_1\left(\frac{X_1}{Y_1}\right)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{51}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_a = \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}|_* = \frac{X_1^2}{Y_1}$ und $\lambda_b = 0$ zu den Einvektoren $e_a = (1,0)^T$ bzw. $e_b = (0,1)^T$. Das heißt in $e_a \hat{=} \alpha_1$-Richtung ist der Fixpunkt attraktiv/repulsiv, wenn $\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} < / > 0$ ist (vgl. (24)). Es bleibt also noch die $e_b \hat{=} \alpha_2$-Richtung zu untersuchen:

$\alpha^*$ liegt am Rand des physikalisch sinnvollen Definitionsbereiches (in $\alpha_2$-Richtung) mit $\lim\limits_{\alpha_2\to 0} \lambda_b|_{\alpha_1=\alpha_1^*} = 0$.

- $\left.\frac{\partial\lambda_b}{\partial\alpha_2}\right|_* < 0$, dann nähert sich $\lambda_2$
  von unten (d.h. $\lambda_2 < 0$ bei $\alpha = (\alpha_1^*, \epsilon)$, $0 < \epsilon << 1$).
- $\left.\frac{\partial\lambda_b}{\partial\alpha_2}\right|_* > 0$, dann nähert sich $\lambda_2$ von oben.
- $\left.\frac{\partial\lambda_b}{\partial\alpha_2}\right|_* = 0$, es müssen höhere Ableitungen betrachtet werden (vgl. **??**).

Wir erhalten

$$\frac{\partial\lambda_b}{\partial\alpha_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{2}\right)}^{-1}\left(\frac{\partial\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_2}\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} - \frac{\partial\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_2}\right) \tag{52}$$

mit

$$\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = 2X_1\alpha_1 + 3Y_1\alpha_1^2 + 2Z_1\alpha_1\alpha_2 + 2X_2\alpha_2 + Y_2\alpha_2^2 + 2Z_2\alpha_1\alpha_2 \tag{53}$$

$$\frac{\partial\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_2} = 2\alpha_1(Z_1+Z_2) + 2X_2 + 6Y_2\alpha_2 \tag{54}$$

$$\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = (2X_1\alpha_1 + 3Y_1\alpha_1^2 + 2Z_1\alpha_1\alpha_2)(2X_2\alpha_2 + 3Y_2\alpha_2^2 + 2Z_2\alpha_1\alpha_2) - Z_1Z_2\alpha_1^2\alpha_2^2 \tag{55}$$

$$\frac{\partial\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_2} = 2Z_1\alpha_1(2X_2\alpha_2 + 3Y_2\alpha_2^2 + 2Z_2\alpha_1\alpha_2) + (2X_1\alpha_1 + 3Y_1\alpha_1^2 + 2Z_1\alpha_1\alpha_2)(2X_2 + 6Y_2\alpha_2 + 2Z_2\alpha_1) - 2Z_1Z_2\alpha_1^2\alpha_2 \tag{56}$$

| $\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\|_*$ | $\frac{\partial\lambda_b}{\partial\alpha_2}\|_*$ | Fixpunkt |
|---|---|---|
| $>0$ | $>0$ | repulsiv |
| $>0$ | $<0$ | Sattelpunkt |
| $<0$ | $>0$ | Sattelpunkt |
| $<0$ | $<0$ | attraktiv |

Tabelle 2: Stabilitätsbedingungen für $\alpha^{*3}$.

und ausgewertet an $\alpha^*$ ergibt sich

$$\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}|_* = \frac{X_1^2}{Y_1} \tag{57}$$

$$\frac{\partial \mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_2}|_* = -2\frac{X_1}{Y_1}(Z_1+Z_2)+2X_2 \tag{58}$$

$$\mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}|_* = 0 \tag{59}$$

$$\frac{\partial \mathrm{Det}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}}{\partial\alpha_2}|_* = \frac{X_1^2}{Y_1}(2X_2-2Z_2\frac{X_1}{Y_1}) \quad . \tag{60}$$

- Für $\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}|_* > 0$ ist $\lambda_b = \lambda_2$ ("$-$"-Lösung) und $\lambda_1 > 0$,
- für $\mathrm{Sp}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}|_* < 0$ ist $\lambda_b = \lambda_1$ ("$+$"-Lösung) und $\lambda_2 < 0$.

Für beide Fälle ergibt sich

$$\frac{\partial\lambda_b}{\partial\alpha_2}|_* = X_2 + \frac{X_1}{Y_1}(Z_1-Z_2) \quad . \tag{61}$$

Wir erhalten also die Bedingungen in Tabelle 2.

### 3.2.2 $\alpha^{*3}$ als UV-Fixpunkt

Damit $\alpha^{*3}$ ein UV-Fixpunkt ist muss also $\alpha_i^* > 0$ und nach Tabelle 2 gelten:

$$-\frac{X_1}{Y_1} \geq 0 \tag{62}$$

$$\frac{X_1^2}{Y_1} < 0 \tag{63}$$

$$X_2 + \frac{X_1}{Y_1}(Z_1-Z_2) < 0 \tag{64}$$