1 Inhaltsschwerpunkte

1. Einleitung
2. Renormierung und running coupling (genauere Betrachtung)
3. Allgemeine β-Funktionen
4. β-Funktion im $\mathbb{R}^2$
5. β-Funktion für QCD×dQCD
6. Entwicklung von n-Schleifen-Diagrammen

2 Inhalte

zu 1

- Ideen der QFT (inkl. Funktionalintegral, LSZ-Formel, connected functional, proper vertices, Feynmandiagramme)
- das SM der Teilchenphysik
- mögliche Erweiterungen: dunke Materie und dQCD
- Renormierung und Renormierbarkeit
- running couplings im SM, insb. QCD
- Problem der Quantengravitation und Weinbergs Lösungsvorschlag
- asymptotic safety

zu 2

- Quantenwirkung
- Cut-off Regularisierung
- Callan-Symanzik Gleichung
- running coupling als Konsequenz der Renormierung
- asymptotic safety Szenario

zu 3

- Allgemeine Parametriesierung von β-Funktionen für bestimmte Eichgruppen, Mahacheck-Vaughn
- Autonomes System, RG-Zeit, α
- Fixpunkte, Landaupole
- Linearisierung, Stabilität von Fixpunkten, Lösungsideen
- Kritische Hyperflächen

zu 4

- Stabilitätsmatrix, Eigenwerte, Eigenvektoren
- Entwicklung 2.Ordnung um einen Fixpunkt
- Explizite (asymptotische) Lösung in der Nähe eines Fixpunktes
- Stabilitätskriterien

- Landaupole

zu 5

- Explizite Form der β-Funktion
- Fixpunkte und Landaupole
- Bedingung an die Koeffizienten für bestimmte Stabilitätseigenschaften
- Einschränkung auf sinnvolle Materieinhalte
- Anwendung auf fundamental×fundamental Darstellung ohne/mit Skalare.
- Extrapolation der Fixpunkte

zu 6

- Einschränkung auf QCD×dQCD für eine explizite Darstellung
- 1-Schleife (Propagator und Vertex)
- $n+1$-Schleife (Rekursion)
- Form (insb. $g_i(\mu)$ Abhängigkeit) der β-Funktion durch Diagramme
- Genaue Form der β-Funktion

3 gewonnene Erkenntnisse (Ideen)

3.1 1-dim. β-Funktion und Landau-Pol

Für eine β-Funktion der Form

$$\beta(\alpha) = \sum_{i=0}^{N} X_i \alpha^i \tag{1}$$

definiere die Stammfunktion

$$\mathfrak{A}(\alpha) := \int \left(\sum_{i=0}^{N} X_i \alpha^i \right)^{-1} \mathrm{d}\alpha \quad . \tag{2}$$

Mit der Wahl $t_0 = 0$ und $\alpha_0 = \alpha(0)$ beliebig lässt sich die implizite Gleichung

$$t + \mathfrak{A}(\alpha_0) = \mathfrak{A}(\alpha) \tag{3}$$

ableiten. Der Landau-Pol wird mit dem Startwert (t_0, α_0) dann bei

$$t_\infty := \lim_{\alpha \to \infty} \mathfrak{A}(\alpha) - \mathfrak{A}(\alpha_0) \tag{4}$$

erreicht.

Example

$$\beta = X\alpha \tag{5}$$

dann ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{X} \ln(\alpha) \tag{6}$$

und

$$t_\infty = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{X} \ln(\alpha) - \mathfrak{A}(\alpha_0) = \mathrm{sgn}(X) \cdot \infty \quad . \tag{7}$$

Die explizite Lösung (5) kann als $\alpha(t) = \alpha_0 \mathrm{e}^{Xt}$ geschrieben werden. Das Verhalten entspricht also dem von (4) vorhergesagten.

Example

$$\beta = X\alpha^n \quad , \; n \geq 2 \tag{8}$$

dann ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{(1-n)X} \alpha^{1-n} \tag{9}$$

und

$$t_\infty = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{(1-n)X} \alpha^{1-n} - \mathfrak{A}(\alpha_0) = -\mathfrak{A}(\alpha_0) = -\frac{1}{(1-n)X} \alpha_0^{1-n}. \tag{10}$$

Die allgemeine Lösung von (8) ist [1]

$$\alpha(t) = [(n-1)(c_1 - tX)]^{\frac{1}{1-n}} \tag{11}$$

[1] Wolfram Alpha

mit Startwert $\alpha_0 := \alpha(0) = ((n-1)c_1)^{\frac{1}{1-n}}$. Setzten wir diesen Starwert in (10) ein, ergibt sich

$$t_\infty = -\frac{1}{(1-n)X}(n-1)c_1 = \frac{c_1}{X} \quad . \tag{12}$$

Auch hier hat die explizite Lösung (11) genau an diesem Wert einen Pol.

Example

$$\beta = X\alpha^2 + Y\alpha^3 \quad , Y > 0, X < 0 \tag{13}$$

dann ist

$$\mathfrak{A} = -\frac{Y \ln \alpha}{X^2} + \frac{Y \ln(Y\alpha + X)}{X^2} - \frac{1}{X\alpha} \tag{14}$$

und

$$t_\infty = \lim_{\alpha\to\infty} \mathfrak{A} - \mathfrak{A}(\alpha_0) = \frac{Y}{X^2} \ln Y - \mathfrak{A}(\alpha_0) \quad . \tag{15}$$

Für $\alpha = -X/Y + \epsilon$ ergibt sich

$$-\mathfrak{A}(\alpha) = \frac{Y \ln \alpha}{X^2} - \frac{Y \ln(Y\epsilon)}{X^2} - \frac{Y}{X^2} \tag{16}$$

$$= \frac{Y}{X^2}\left(\ln \frac{\alpha}{\epsilon}\right) - \frac{Y \ln Y}{X^2} - \frac{Y}{X^2} \tag{17}$$

und damit für t_∞

$$t_\infty = \frac{Y}{X^2}\left(\ln \frac{\alpha}{\epsilon} - 1\right) \quad , \tag{18}$$

wobei wegen $\ln \alpha/\epsilon = \ln(-XY^{-1} + \epsilon)/\epsilon$

Eine numerische Lösung mit $X =$, $Y =$ und $\alpha_0 =$ zeigt das in Abbildung **??** dargestellte Verhalten.