

1 Untersuchung einer β -Funktion

An Gleichung ?? erkennt man, dass die β -Funktion einer QFT eine Seite eines Systems N gekoppelter, gewöhnlicher, nichtlinearer Differentialgleichungen der Form

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_k(\mu) = P_k^{M_L}(g_1, \dots, g_N) =: \beta_k(g_1, \dots, g_N), \quad k = 1, \dots, N \quad (1)$$

ist. Dabei stellt jedes P_k ein Polynom maximal M_L -ten Grades in den Kopplungskonstanten dar. Der Grad des Polynoms hängt nur von der Ordnung der Störungstheorie ab, im Bild von Feynmangraphen entspricht dies der maximalen Anzahl L von Quantenschleifen, die in der Berechnung berücksichtigt werden. Hier ist es naheliegend, das DGL-System als Problem im \mathbb{R}^N zu betrachten. Mit $g := (g_1, \dots, g_N)^T$ und $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$ lässt sich (1) auch als

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = \beta(g) \quad (2)$$

schreiben. Dann heißt \mathbb{R}^N auch der Phasenraum der β -Funktion.

Definition 1.1. Eine *Trajektorie im Phasenraum* ist eine Funktion $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$, die die Gleichung (2) löst.

Ein *Fixpunkt der β -Funktion* ist ein Punkt $g^* \in \mathbb{R}^N$, für den $\beta(g^*) = 0$ gilt.

Damit eine QFT physikalisch sinnvoll ist, muss sie Vorhersagen für alle Energieskalen machen können. Um eine auch für hohe Energieskalen μ gültige Theorie zu beschreiben muss demnach der Wert $\lim_{\mu \rightarrow \infty} g(\mu)$ existieren, ebenso muss der Wert $\lim_{\mu \rightarrow 0} g(\mu)$ existieren, wenn die Theorie auch für niedrige Energieskalen gültig sein soll. Damit die Grenzwerte existieren muss $\lim_{\mu \rightarrow 0} d/d\mu g(\mu) = 0$ sein, es sind also gerade die Fixpunkte der β -Funktion, die als Grenzwerte in Frage kommen.

Im Laufe der Untersuchung der β -Funktion haben sich die folgenden Bezeichnungen entwickelt.

Gaußscher Fixpunkt: Ist der Punkt $g^* = 0$ ein Fixpunkt der β -Funktion, so spricht man von einem Gaußschen Fixpunkt.

Banks-Zaks Fixpunkt: Ein Fixpunkt $g^* \neq 0$, der physikalisch sinnvoll und perturbativ ist, heißt Banks-Zaks oder Caswell-Banks-Zaks Fixpunkt.

Landau Pol: Besitzt die Lösung des Problems (2) mit Anfangswert $g(\mu_0) = g_0$ eine Polstelle $\mu_{\text{Pol}} < \infty$, sodass $g(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \mu_{\text{Pol}}} \infty$, dann spricht man von einem Landau-Pol.

1.1 Vereinfachung des mathematischen Problems

Die Berechnung einer Trajektorie als Lösung zum Anfangswertproblem (2) mit Anfangswert $g(\mu_0) = g_0$ ist in der Regel analytisch nicht möglich. Durch einige einfache Schritte lässt sich das Problem jedoch zunächst in eine einfacher zu handhabende Form überführen und sich das Verhalten in der Nähe eines Fixpunktes vorhersagen.

In [2] schlägt S. Weinberg die Einführung der dimensionslosen Kopplungskonstanten

$$\bar{g}_i(\mu) := \mu^{-d_i} g_i(\mu) \quad (3)$$

vor, wobei d_i die Massendimension der Kopplungskonstanten g_i ist. Bei der Untersuchung der QCD \times dQCD- β -Funktion wird klar, dass die Erweiterung

$$\alpha(\mu)_i := \mathcal{N} \left(\mu^{-d_i} g_i(\mu) \right)^n \quad (4)$$

den Grad M_L der β -Funktion verringern kann und somit das Problem weiter vereinfacht (vgl. [1], [3]). Dabei dient \mathcal{N} als Normierungskonstante, die insbesondere von dimensionslosen Größen wie Teilchenzahlen oder Größen der Symmetriegruppe abhängen kann.

Beispiel 1.2. Für ein eindimensionales Problem

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = X g(\mu)^3 + Y g(\mu)^5 \quad (5)$$

und für den einfachen Fall $[g] = 0$ definiere

$$\alpha(\mu) = \mathcal{N} g(\mu)^2 \quad (6)$$

Es folgt

$$\frac{d\alpha}{d\mu} = \mathcal{N} 2g \frac{dg}{d\mu} \Rightarrow \frac{dg}{d\mu} g = \frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{d\alpha}{d\mu} \quad (7)$$

und damit

$$\frac{1}{2\mathcal{N}} \mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) = X g(\mu)^4 + Y g(\mu)^6 \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\mathcal{N}} \mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) = \frac{X}{\mathcal{N}^2} \alpha(\mu)^2 + \frac{Y}{\mathcal{N}^3} \alpha(\mu)^3 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) = \tilde{X} \alpha(\mu)^2 + \tilde{Y} \alpha(\mu)^3 \quad (10)$$

mit $\tilde{X} = 2X\mathcal{N}^{-1}$ und $\tilde{Y} = 2Y\mathcal{N}^{-2}$.

Naheliegender wird wieder $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$ und $\beta(\alpha) = \beta(g \circ \alpha)$ geschrieben.

Der physikalisch sinnvolle Wertebereich für die Energieskala μ ist $(0, \infty)$. Mit der Renormierungsgruppenzeit (RG-Zeit) t , definiert als

$$t(\mu) := \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \Leftrightarrow \mu(t) := e^t, \quad (11)$$

gibt es eine Bijektion $(0, \infty) \xrightarrow{t} (-\infty, \infty)$, die es erlaubt die Kopplungskonstante als

$$\tilde{\alpha}(t) := \alpha(e^t) = \alpha(\mu) \quad (12)$$

zu schreiben. Der Parameter Λ ist beliebig und hat keine physikalische Bedeutung, er wird später lediglich die Extrapolation der Fixpunkte übersichtlicher gestalten. Es folgt

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) = \underbrace{\mu \frac{dt}{d\mu}}_{=\mu^{-1}} \frac{d}{dt} \tilde{\alpha}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{\alpha}(t) \quad (13)$$

Damit ist Gleichung (2) äquivalent zu der autonomen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \beta(\alpha) \quad (14)$$

wobei $\tilde{\alpha}$ wieder zu α umbenannt wurde.

1.2 Verhalten in einer Umgebung eines Fixpunktes

Um das Verhalten der Kopplungskonstanten $\alpha(t)$ in der Nähe eines Fixpunktes zu untersuchen wird die Stabilitätsmatrix wie folgt eingeführt.

Definition 1.3. Sei α^* ein Fixpunkt der β -Funktion im \mathbb{R}^N und sei β in α^* zweimal stetig differenzierbar. Die Matrix

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} := \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N} \quad (15)$$

heißt *Stabilitätsmatrix der β -Funktion* [2]. Außergewertet am Punkt α^* ist die Schreibweise $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha^*}$ oder kurz $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_*$.

Ein Fixpunkt α^* heißt *hyperbolisch*, wenn alle Eigenwerte von $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \Big|_*$ einen von Null verschiedenen Realteil besitzen [5].

Der Zusammenhang zu der Stabilität des Fixpunktes ist folgendermaßen zu erkennen.

In der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes α^* kann Gleichung (14) durch ihre Linearisierung

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) \simeq \left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_* (\alpha(t) - \alpha^*) \quad (16)$$

beschrieben werden. Mit den Eigenvektoren¹ $\{e_i\}$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_i\}$ und

$$\alpha(t) - \alpha^* =: \sum_{i=1}^N K_i(t) e_i \quad (17)$$

folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N K_i(t) e_i + \alpha^* \right) = \left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_* \sum_{i=1}^N K_i(t) e_i \quad (18)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N K_i(t) = \sum_{i=1}^N K_i(t) \lambda_i e_i \quad (19)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} K_i(t) = K_i(t) \lambda_i \quad (20)$$

mit der Lösung

$$K_i(t) = e^{\lambda_i t} K_i(0) \quad (21)$$

für $K_i(0) \in \mathbb{R}$ klein. Die Lösung für $\alpha(t)$ lässt sich dann schreiben als

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} K_i(0) e_i + \alpha^* \quad (22)$$

Dieses Ergebnis ist unter anderem in [4], [2] und [3] zu sehen. In der Fixpunktumgebung werden nun drei lineare Unterräume unterschieden [5].

- Definition 1.4.**
1. Die *stabile Mannigfaltigkeit* M_s besteht aus allen Punkten im Phasenraum, die in den Fixpunkt hinein laufen.
 2. Die *instabile Mannigfaltigkeit* besteht aus allen Punkten im Phasenraum, die aus dem Fixpunkt heraus laufen.
 3. Die *Zentrumsmannigfaltigkeit* besteht aus den restlichen Punkten in der Fixpunktumgebung.

Außerdem heißt die Menge der in den Fixpunkt hineinlaufenden Kurven *kritische (UV-)Hyperfläche* M_c (critical manifold).

¹Die Eigenvektoren müssen gegebenenfalls zu einer Basis ergänzt werden.

Aus Gleichung (22) wird dann klar, dass eine Trajektorie in M_s für $t \rightarrow \infty$ den Fixpunkt erreicht. Ein Eigenvektor mit positivem Eigenwert wird auch als IR-attraktiv, mit einem negativen Eigenwert als IR-repulsiv bezeichnet [4].

1.3 Sonderfall: nicht hyperbolischer Fixpunkte

Bei allgemeinen Betrachtungen (vgl. [4]) wird der nicht hyperbolische Fall $\lambda_i = 0$ oft als unwichtiger Sonderfall nicht weiter betrachtet. Bei der Untersuchung einer konkreten β -Funktion kommt dieser Sonderfall aber auf natürliche Weise schnell zu stande.

Eine dimensionslose Kopplungskonstante $\alpha_1 := \mathcal{N} g_1^2$ muss, damit die physikalische Kopplungskonstante g_1 reell ist, positiv sein. Es muss demnach $\beta_1(\alpha) \geq 0$ auf der gesamten α_1 -Achse gelten. Falls es nun einen Fixpunkt $\alpha^* = (0, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ und es einen Eigenvektor $e_k \in M_s$ gibt², dann folgt aus (20)

$$\beta(K_k(t)e_k) \cdot e_k = \frac{d}{dt}K_k(t) = K_k(t)\lambda_k \quad (23)$$

???

Sein nun also α^* ein Fixpunkt, $\{e_i\}$ die Basis aus Eigenvektoren der Stabilitätsmatrix und der Eigenwert $\lambda_k = 0$, alle anderen $\lambda_i \neq 0$ für $i \neq k$. In zweiter Ordnung gilt

$$\beta_i(\alpha) \simeq \sum_{m=1}^N \frac{\partial \beta_i(\alpha)}{\partial \alpha_m} (\alpha_m - \alpha_m^*) + \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^N (\alpha_m - \alpha_m^*) \frac{\partial^2 \beta_i(\alpha)}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} (\alpha_n - \alpha_n^*) \quad . \quad (24)$$

Für die Koeffizienten $\{K_i\}$ in der $\{e_i\}$ -Basis folgt

$$\frac{d}{dt}K_i(t) \simeq \lambda_i K_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (e_j \cdot \nabla \lambda_i) K_i(t) K_j(t) \quad . \quad (25)$$

Für alle $\lambda_i \neq 0$ reicht es, die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}K_i(t) \simeq \lambda_i K_i(t) \quad (26)$$

mit

$$K_i(t) = e^{\lambda_i t} K_i(0) \quad (27)$$

²Dabei soll M_s nicht nur aus der α_1 -Achse bestehen. Da M_s ein linearer Unterraum ist, gibt es zumindest eine Linearkombination $(\sum_{i=1}^N c_i e_i) \in M_s$, die folgende Argumentation kann dann analog geführt werden.

zu lösen, für $\lambda_k = 0$ folgt

$$K_k(t) \simeq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (e_j \cdot \nabla \lambda_i) K_k(t) K_j(t) \quad . \quad (28)$$

Auf M_s sind $K_i(t) \equiv 0$ für alle i mit $\lambda_i > 0$, dann folgt

$$\frac{d}{dt} K_k(t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{2} (e_k \cdot \nabla \lambda_k) K_k(t)^2 \quad . \quad (29)$$

Die Lösung ist

$$K_k(t) = \frac{1}{K_k(0)^{-1} - \frac{1}{2} (e_k \cdot \nabla \lambda_k) t} \quad , \quad (30)$$

wird e_k so gewählt, dass $K_k(t) \geq 0$, dann ergibt sich die Bedingung

$$e_k \cdot \nabla \lambda_k < 0 \quad , \quad (31)$$

damit $K_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ ohne einen Pol zu passieren, der die Reihenentwicklung der β -Funktion unzulässig machen würde. Falls mehr als ein Eigenwert gleich Null ist, ergibt sich in (28) ein system gekoppelter DGLs.

1.4 Fixpunktextrapolation

Um das UV-Verhalten einer β -Funktion mit den bisher gemessenen Werten für die Kopplungskonstanten im SM vergleichen zu können, ist es notwendig die kritische Hyperfläche eines Fixpunktes auch in einem Bereich zu kennen, der zu groß für eine Taylorentwicklung geringer Ordnung ist. Das auffinden der kritischen Hyperfläche ist insbesondere für höherdimensionale Probleme analytisch kaum möglich und daher eine numerische Aufgabe. Für ein System aus zwei Kopplungskonstanten wird in ?? ein Verfahren vorgestellt. Im Idealfall stehen nun dim

Zeichenerklärung

- „ \simeq “ für asymptotisch gleich.

Beispiel 1.5.

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (32)$$

Für eine Linearisierung von f in der Umgebung von x_0 . Für $|x - x_0| \rightarrow 0$ gilt $|f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))| \rightarrow 0$ hinreichend schnell.

- „ $\text{diag}(a_1, a_2, \dots)$ “ für eine Diagonalmatrix mit Einträgen a_1, a_2, \dots

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} . \quad (33)$$

Literatur

- [1] Y. Bai and P. Schwaller. Scale of dark qcd. *Phys. Rev. D*, 89:063522, Mar 2014.
- [2] S. W. Hawking and W. Israel, editors. *General relativity, An Einstein centenary survey*, The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge CB2 1RP, 1979. Cambridge [u.a.]: Univ. Pr.
- [3] D. F. Litim and F. Sannino. Asymptotic safety guaranteed. *arXiv*, Jun 2014.
- [4] S. Weinberg. Critical phenomena for field theorists. In *Erice Subnucl.Phys.1976:1*, page 1, 1976.
- [5] E. Zeidler. Springer-handbuch der mathematik iv. 2013.