Structural Error Estimation in Dynamic Systems

1. März 2018

Dynamische Systeme

Die zeitliche Entwicklung biologischer Systeme wird durch fundamentale oder empirische Gesetze bestimmt.

Dynamische Systeme

Die zeitliche Entwicklung biologischer Systeme wird durch fundamentale oder empirische Gesetze bestimmt.
Reale Systeme sind

Dynamische Systeme

Die zeitliche Entwicklung biologischer Systeme wird durch fundamentale oder empirische Gesetze bestimmt.
Reale Systeme sind

→ offen,

Dynamische Systeme

Die zeitliche Entwicklung biologischer Systeme wird durch fundamentale oder empirische Gesetze bestimmt.
Reale Systeme sind

- → offen,
- → zu komplex,

Dynamische Systeme

Die zeitliche Entwicklung biologischer Systeme wird durch fundamentale oder empirische Gesetze bestimmt.
Reale Systeme sind

- → offen,
- → zu komplex,
- → experimentell nur teilweise zugänglich.

Dynamische Systeme

Die zeitliche Entwicklung biologischer Systeme wird durch fundamentale oder empirische Gesetze bestimmt.
Reale Systeme sind

- → offen,
- → zu komplex,
- → experimentell nur teilweise zugänglich.

Vereinfachte Beschreibung durch *dynamische Systeme*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}x = f(x,u) \quad y = h(x) \quad . \tag{1}$$

Zustand x, Observable y, Steuerung u, Modell f.

Dynamic Elastic Net

Dynamische Systeme sind unvollständig.

Dynamic Elastic Net

Dynamische Systeme sind unvollständig.

nominales Modell		wahres Modell
beste Theorie $\tilde{f}$	vs.	unbekanntes f
simulierte Zustände $\tilde{x}$	$\longleftrightarrow$	unbekannte Zustände x
simuliertes $y = h(\tilde{x})$		Messwerte y^{data}

Dynamic Elastic Net

Dynamische Systeme sind unvollständig.

nominales Modell		wahres Modell
beste Theorie $\tilde{f}$	vs.	unbekanntes f
simulierte Zustände $\tilde{x}$	$\longleftrightarrow$	unbekannte Zustände x
simuliertes $y = h(\tilde{x})$		Messwerte y^{data}

Kann der Fehler des nominalen Modells aus den Daten ermittelt werden?

Dynamic Elastic Net

Dynamische Systeme sind unvollständig.

nominales Modell		wahres Modell
beste Theorie $\tilde{f}$	vs.	unbekanntes f
simulierte Zustände $\tilde{x}$	$\longleftrightarrow$	unbekannte Zustände x
simuliertes $y = h(\tilde{x})$		Messwerte y^{data}

Kann der Fehler des nominalen Modells aus den Daten ermittelt werden?

$$w := f(x,u) - \tilde{f}(x,u) \tag{2}$$

Kann der *Systemfehler* oder *hidden input* w eindeutig bestimmt werden?

Lineare Systeme

Lineare Systeme

Können verschiedene hidden inputs w, w' die gleichen Ergebnisse liefern?

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw \quad , \quad \dot{x}' = Ax' + Bu + Dw' \quad \text{sodass} \quad Cx \equiv Cx' \qquad (3)$$

Lineare Systeme

Können verschiedene hidden inputs w, w' die gleichen Ergebnisse liefern?

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw \quad , \quad \dot{x}' = Ax' + Bu + Dw' \quad \text{sodass} \quad Cx \equiv Cx' \tag{3}$$

Unter welchen Bedingungen ist die lineare Abbildung

$$w \mapsto y = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} D w(\tau) \, \mathrm{d}\tau \tag{4}$$

injektiv?

Beobachtbarkeit

Was ist das Urbild von $y \equiv 0$?

Beobachtbarkeit

Was ist das Urbild von $y \equiv 0$?

$$y^{(q+1)}(t) = CA^{q+1} \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)} Dw(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{l=0}^{q} CA^l Dw^{(q-l)}(t) \tag{5}$$

Beobachtbarkeit

Was ist das Urbild von $y \equiv 0$?

$$y^{(q+1)}(t) = CA^{q+1} \int_0^t e^{A(t-\tau)} Dw(\tau)\,d\tau + \sum_{l=0}^{q} CA^l Dw^{(q-l)}(t) \qquad (5)$$

Wenn $y \equiv 0$, dann jede Ableitung $y^{(q)} \equiv 0$, d.h.

Beobachtbarkeit

Was ist das Urbild von $y \equiv 0$?

$$y^{(q+1)}(t) = CA^{q+1} \int_0^t e^{A(t-\tau)} D w(\tau)\, d\tau + \sum_{l=0}^{q} CA^l D w^{(q-l)}(t) \tag{5}$$

Wenn $y \equiv 0$, dann jede Ableitung $y^{(q)} \equiv 0$, d.h.

$$\left[(CD)\,(CAD)\,(CA^2D)\,\ldots\,(CA^qD) \right] \begin{bmatrix} w^{(q)}(0) \\ w^{(q-1)}(0) \\ \vdots \\ w^{(0)}(0) \end{bmatrix} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{N}_0 \tag{6}$$

Definitionen

Definitionen

$$\left.\begin{aligned} M_q &:= \left[(CD)\,(CAD)\,(CA^2D)\,\ldots\,(CA^qD) \right] \\ V_q &:= \ker M_q \\ W^{(q)} &:= \left[w^{(q)}, w^{(q-1)}, \ldots, w^{(0)} \right]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \right\}$$

Definitionen

$$\left.\begin{aligned} M_q &:= \left[(CD)\,(CAD)\,(CA^2D)\,\dots\,(CA^qD)\right] \\ V_q &:= \ker M_q \\ W^{(q)} &:= \left[w^{(q)}, w^{(q-1)}, \dots, w^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad W^{(q)}(0) \in V_q \tag{7}$$

Definitionen

$$\left.\begin{aligned} M_q &:= \left[(CD)\,(CAD)\,(CA^2D)\,\ldots\,(CA^qD)\right] \\ V_q &:= \ker M_q \\ W^{(q)} &:= \left[w^{(q)}, w^{(q-1)}, \ldots, w^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad W^{(q)}(0) \in V_q \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} P &: W^{(q)} \mapsto W^{(q-1)} \\ \mathfrak{D}_d &:= V_d \cap PV_{d+1} \cap P^2V_{d+2} \cap \ldots \end{aligned}\right\}$$

Definitionen

$$\left.\begin{aligned} M_q &:= \left[(CD)\,(CAD)\,(CA^2D)\,\ldots\,(CA^qD)\right] \\ V_q &:= \ker M_q \\ W^{(q)} &:= \left[w^{(q)}, w^{(q-1)}, \ldots, w^{(0)}\right]^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad W^{(q)}(0) \in V_q \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} P &: W^{(q)} \mapsto W^{(q-1)} \\ \mathfrak{D}_d &:= V_d \cap P V_{d+1} \cap P^2 V_{d+2} \cap \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{damit auch} \quad W^{(q)}(0) \in \mathfrak{D}_q \tag{8}$$

Hinreichende Bedingung

$\mathfrak{O}_d$ kann in endlich vielen Schritten bestimmt werden,

$$\exists \quad N \in \mathbb{N}_0 \quad \text{sodass} \quad V_d \cap P V_{d+1} \cap \ldots \cap P^N V_{d+N} = \mathfrak{O}_d \quad . \tag{9}$$

Hinreichende Bedingung

$\mathfrak{O}_d$ kann in endlich vielen Schritten bestimmt werden,

$$\exists \quad N \in \mathbb{N}_0 \quad \text{sodass} \quad V_d \cap PV_{d+1} \cap \ldots \cap P^N V_{d+N} = \mathfrak{O}_d \quad . \tag{9}$$

$$M_q \begin{bmatrix} w^{(q)}(0) \\ \vdots \\ w^{(1)}(0) \\ 0 \end{bmatrix} = M_{q-1} \begin{bmatrix} w^{(q)}(0) \\ \vdots \\ w^{(1)}(0) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Hinreichende Bedingung

Falls ein $\mathfrak{O}_d = \{0\}$, dann alle $w^{(q)}(0) = 0$.

Notwendige Bedingung

Notwendige Bedingung

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_0 &:= V_0 \setminus \{0\} \\ \mathfrak{V}_d &:= V_i \cap P^{-1}\mathfrak{V}_{d-1} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Notwendige Bedingung

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_0 &:= V_0 \setminus \{0\} \\ \mathfrak{V}_d &:= V_i \cap P^{-1} \mathfrak{V}_{d-1} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Hinreichende Bedingung

Genau dann, wenn alle $\mathfrak{V}_d \neq \emptyset$, existiert eine $\mathbb{R}^m$-wertige Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$[v_k, v_{k-1}, \ldots, v_0]^{\mathrm{T}} \in V_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad . \tag{12}$$

Notwendige Bedingung

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{V}_0 &:= V_0 \setminus \{0\} \\ \mathfrak{V}_d &:= V_i \cap P^{-1} \mathfrak{V}_{d-1}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Hinreichende Bedingung

Genau dann, wenn alle $\mathfrak{V}_d \neq \emptyset$, existiert eine $\mathbb{R}^m$-wertige Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$[v_k, v_{k-1}, \ldots, v_0]^{\mathrm{T}} \in V_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad . \tag{12}$$

Dann ist

$$w(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} v_k \tag{13}$$

ein hidden input mit $y^q(0) = 0$.

Beobachtbarkeit

Lemma

$$\exists \mathfrak{O}_d = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \exists \mathfrak{V}_k = \emptyset$$

Beobachtbarkeit

Lemma

$$\exists \mathfrak{O}_d = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \exists \mathfrak{V}_k = \emptyset$$

Annahme: w kann (stückweise) durch die Taylor-Entwicklung dargestellt werden.

Beobachtbarkeit

Lemma

$$\exists \mathfrak{O}_d = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \exists \mathfrak{V}_k = \emptyset$$

Annahme: w kann (stückweise) durch die Taylor-Entwicklung dargestellt werden.
Wenn es ein $\mathfrak{V}_d = \emptyset$ gibt, dann gilt

$$y \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad w \equiv 0 \quad . \tag{14}$$

Graphische Kriterien

Graphische Kriterien

Der α-te hidden input w_α
beeinflusst Knoten x_a,
die β-te observable y_β hängt
von x_b ab.

Graphische Kriterien

Der α-te hidden input w_α
beeinflusst Knoten x_a,
die β-te observable y_β hängt
von x_b ab.

$$(CA^kD)_{\beta\alpha} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ Pfad } x_a \to x_b \text{ der Länge } k$$

Graphische Kriterien

Der α-te hidden input w_α
beeinflusst Knoten x_a,
die β-te observable y_β hängt
von x_b ab.

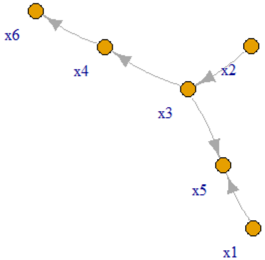
$$(CA^kD)_{\beta\alpha} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ Pfad } x_a \to x_b \text{ der Länge } k$$

Welche Struktur müssen die M_q
besitzen, um $\mathfrak{O}_d$ zu garantieren?

Graphische Kriterien

Der α-te hidden input w_α
beeinflusst Knoten x_a,
die β-te observable y_β hängt
von x_b ab.

$$(CA^kD)_{\beta\alpha} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ Pfad } x_a \to x_b \text{ der Länge } k$$



Welche Struktur müssen die M_q besitzen, um $\mathfrak{O}_d$ zu garantieren?

Idee:
Zu einem gemessener Knoten x_{obs} gibt es Pfade von $\{w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}, \ldots\}$. Von diesen aus gibt es Pfade nach $\{x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots\}$, usw. Wenn es in diesen Mengen am Ende mehr Observablen als hidden inputs gibt, ist das System observabel?

Ausblick

1. Notwendige und hinreichende Bedingungen mit Simulationen abgleichen. (Kann die Wahl eines Algorithmus die Beobachtbarkeit einschränken?)

Ausblick

1. Notwendige und hinreichende Bedingungen mit Simulationen abgleichen. (Kann die Wahl eines Algorithmus die Beobachtbarkeit einschränken?)
2. Kann Regularisierung die Beobachtbarkeit verbessern?

Ausblick

1. Notwendige und hinreichende Bedingungen mit Simulationen abgleichen. (Kann die Wahl eines Algorithmus die Beobachtbarkeit einschränken?)
2. Kann Regularisierung die Beobachtbarkeit verbessern?
3. Können graphische Bedingungen formuliert werden?

Ausblick

1. Notwendige und hinreichende Bedingungen mit Simulationen abgleichen. (Kann die Wahl eines Algorithmus die Beobachtbarkeit einschränken?)
2. Kann Regularisierung die Beobachtbarkeit verbessern?
3. Können graphische Bedingungen formuliert werden?
4. Können die Ergebnisse im experimental Design angewendet werden?

Ausblick

1. Notwendige und hinreichende Bedingungen mit Simulationen abgleichen. (Kann die Wahl eines Algorithmus die Beobachtbarkeit einschränken?)
2. Kann Regularisierung die Beobachtbarkeit verbessern?
3. Können graphische Bedingungen formuliert werden?
4. Können die Ergebnisse im experimental Design angewendet werden?
5. Wie verhalten sich nichtlineare Systeme? (Gelten die graphischen Bedingungen trotzdem?)

Ausblick

1. Notwendige und hinreichende Bedingungen mit Simulationen abgleichen. (Kann die Wahl eines Algorithmus die Beobachtbarkeit einschränken?)
2. Kann Regularisierung die Beobachtbarkeit verbessern?
3. Können graphische Bedingungen formuliert werden?
4. Können die Ergebnisse im experimental Design angewendet werden?
5. Wie verhalten sich nichtlineare Systeme? (Gelten die graphischen Bedingungen trotzdem?)