

Wydział WIMiIP	Imię i nazwisko 1. Dominik Budzowski	Rok 3	Grupa GL01
Temat: <b>Symulacja procesów cieplnych z wykorzystaniem metody elementów skończonych.</b>			
Data wykonania 19.01.2022r.			Nr albumu 400735

## Cel ćwiczenia

Implementacja i praktyczne zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania problemów fizycznych 2D.

## Wstęp teoretyczny

**Metoda elementów skończonych** (finite element method) jest jedną z zaawansowanych metod numerycznych, wykorzystywanych do obliczeń inżynierskich. Polega ona na odwzorowaniu kształtu materiału dzięki nałożeniu siatki obliczeniowej.

Głównym założeniem stosowania metody elementów skończonych jest interpolacja parametru znajdującego się w dyskretnym zbiorze punktów w siatce obliczeniowej. Dokonujemy tego aby otrzymać rozkład wartości tego parametru.

### Schemat procesu symulacji MES:

**Etap 1.** Przygotowanie geometrii, które może polegać na usunięciu niepotrzebnych elementów i detali.

**Etap 2.** Utworzenie siatki obliczeniowej oraz przypisanie jej początkowych parametrów fizycznych.

**Etap 3.** Przypisanie warunków brzegowych.

**Etap 4.** Dokonanie obliczeń dzięki odpowiedniemu rozwiązaniu opisującemu zachodzące zjawisko fizyczne.

W celu podziału siatki na mniejsze elementy dokonywana jest dyskretyzacja. Sąsiadujące ze sobą elementy mają wspólne węzły. Dla każdego elementu wyznaczane są funkcje kształtu, czyli wielomiany, których dziedzina ogranicza się do pojedynczego elementu. Poza elementem na którym rozpięta jest dana funkcja kształtu wartości jej wynoszą zero. Przy pomocy funkcji kształtu oraz wartości w węzłach elementu dokonywana jest interpolacja, pozwalająca znaleźć wartość szukanego parametru w dowolnym punkcie elementu skończonego.

Dla zaimplementowania programu wykorzystano równanie Fouriera opisujące procesy cieplne:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y(t) \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) + Q = 0$$

Rozwiązanie równania sprowadza się do zadania polegającego na poszukiwaniu minimum takiego funkcjonału, dla którego równanie jest równaniem Eulera. Według rachunku wariacyjnego oraz przy założeniu że materiał jest izotropowy funkcjonał będzie miał postać:

$$J = \int_V \left( \frac{k(t)}{2} \left( \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right) - Q t \right) dV$$

Do funkcjonału należy dodać warunek konwekcji:

$$\int_S \frac{\alpha}{2} (t - t_\infty)^2 dS.$$

Oraz dokonać dyskretyzacji problemu polegającemu na podzieleniu rozpatrywanego obszaru na elementy i przedstawieniu temperatury wewnątrz elementu, jako funkcji wartości węzłowych zgodnie z zależnością:

$$t = \sum_{i=1}^n N_i t_i = \{N\}^T \{t\}.$$

Dokonać minimalizacji funkcjonału sprowadzającego się do obliczenia pochodnych cząstkowych względem wartości węzłowych temperatury  $\{t\}$ . W rezultacie otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \{t\}} = & \int_V \left( k \left( \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right\}^T \right) \{t\} - Q \{N\} \right) dV + \\ & + \int_S \alpha \left( \{N\}^T \{t\} - t_\infty \right) \{N\} dS. \end{aligned}$$

Układ równań zapisujemy w postaci macierzowej:

$$[H] \{t\} + \{P\} = 0.$$

Dla nieustalonego transportu ciepła przedstawiony układ prezentuje się jako:

$$[H] \{t\} + [C] \frac{\partial}{\partial \tau} \{t\} + \{P\} = 0$$

Ostateczny układ równań można uzyskać dokonując pewnych przekształceń wynikających z tego, że wartości temperatury zależą od czasu oraz podczas interpolacji czasowej wykorzystano liniowe funkcje kształtu. Przyjmuje on postać:

$$\left( [H] + \frac{[C]}{\Delta \tau} \right) \{t_1\} - \left( \frac{[C]}{\Delta \tau} \right) \{t_0\} + \{P\} = 0$$

Gdzie macierze H i C oraz wektor P to:

$$[H] = \int_V k \left( \left\{ \frac{\partial [N]}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial [N]}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial [N]}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial [N]}{\partial y} \right\}^T \right) dV + \int_S \alpha [N] [N]^T dS$$

$$[C] = \int_V c \rho [N] [N]^T dV$$

$$\{P\} = - \int_S \alpha [N] t_{\infty} dS$$

## Analiza programu

**Struktury w programie:**

**Node** – struktura reprezentująca węzeł w siatce.

**Element** – Struktura reprezentująca element w siatce, odpowiedzialna także za przechowywanie macierzy wykorzystywanych w obliczeniach,

**Grid** – struktura reprezentująca siatkę MES,

**Gauss** – struktura zawierająca standardowe informacje potrzebne do całkowania metodą Gaussa,

**Sciana** – struktura zawierająca informacje o ścianie elementu uniwersalnego,

**Element4\_2D** – struktura reprezentująca element uniwersalny wielkości 1x1

**Jakobian** – struktura reprezentująca jacobian przekształcenia.

**Struktury zawierają odpowiednie metody z nimi związane, poza nimi w programie znajdują się także funkcje takie jak:**

**f** – funkcja zwracająca wynik zawierającego w sobie równania jednej zmiennej,

**całkowanie1D** – funkcja całkująca metodą Gaussa w przestrzeni 1D,

**f2D** - funkcja zwracająca wynik zawierającego w sobie równania dwóch zmiennych,

**całkowanie2D** - funkcja całkująca metodą Gaussa w przestrzeni 2D,

**jakobian** – funkcja licząca jacobian przekształcenia,

**NdxNdy** – funkcja licząca macierze pochodnych funkcji kształtu po x i y,

**dlugosc** – funkcja zwracająca średnią z dwóch liczb,

**Hp** – funkcja licząca macierze H i C w punktach całkowania,

**H** – funkcja licząca końcowe macierze H i C dla elementu,

**Hbc** – funkcja licząca macierz Hbc,

**wektorP** – funkcja licząca wektor P,

**gauss\_uklad** – funkcja rozwiązująca układ równań metodą Gaussa,

**uzupelnij** – funkcja wczytująca dane wejściowe z pliku,

**main** – funkcja główna programu.

## Program1

Dla danych wejściowych:

### Test case 2d transient solution - initial data

- 100 – initial temperature
- 500 – simulation time [s],
- 50 – simulation step time [s],
- 1200 – ambient temperature [C],
- 300 – alfa [ $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ ],
- 0.100 – H [m],
- 0.100 – B [m],
- 4 – N\_H,
- 4 – N\_B,
- 700 – specific heat [ $\text{J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ ],
- 25 – conductivity [ $\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ ],
- 7800 – density [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ].

Test Case 1.

```
_____ Iteration 0 _____  
_____ Matrix [C] _____  
674.074 337.037 0 0 337.037 168.519 0 0 0 0 0 0 0 0  
337.037 1348.15 337.037 0 168.519 674.074 168.519 0 0 0 0 0 0 0  
0 337.037 1348.15 337.037 0 168.519 674.074 168.519 0 0 0 0 0 0  
0 0 337.037 674.074 0 0 168.519 337.037 0 0 0 0 0 0 0  
337.037 168.519 0 0 1348.15 674.074 0 0 337.037 168.519 0 0 0 0 0  
168.519 674.074 168.519 0 674.074 2696.3 674.074 0 168.519 674.074 168.519 0 0 0 0  
0 168.519 674.074 168.519 0 674.074 2696.3 674.074 0 168.519 674.074 168.519 0 0 0  
0 0 168.519 337.037 0 0 674.074 1348.15 0 0 168.519 337.037 0 0 0 0  
0 0 0 337.037 168.519 0 0 1348.15 674.074 0 0 337.037 168.519 0 0  
0 0 0 0 168.519 674.074 168.519 0 674.074 2696.3 674.074 0 168.519 674.074 168.519  
0 0 0 0 0 168.519 674.074 168.519 0 674.074 2696.3 674.074 0 168.519 674.074 168.519  
0 0 0 0 0 0 168.519 337.037 0 0 674.074 1348.15 0 0 168.519 337.037  
0 0 0 0 0 0 0 337.037 168.519 0 0 674.074 337.037 0 0  
0 0 0 0 0 0 0 168.519 674.074 168.519 0 337.037 1348.15 337.037 0  
0 0 0 0 0 0 0 0 168.519 674.074 168.519 0 337.037 1348.15 337.037  
0 0 0 0 0 0 0 0 0 168.519 337.037 0 0 337.037 674.074
```

[illegible]

```

Iteration 0
Matrix [H]
16.6667 -4.16667 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 0 0 0 0 0 0
-4.16667 33.3333 -4.16667 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0 0 0 0 0
0 -4.16667 33.3333 -4.16667 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0 0 0 0
0 0 -4.16667 16.6667 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 0 0 0 0
-4.16667 -8.33333 0 0 33.3333 -8.33333 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 0 0
-8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0
0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0
0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 -8.33333 33.3333 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0
0 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 33.3333 -8.33333 0 0 -4.16667 -8.33333 0
0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333
0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333
0 0 0 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 -8.33333 33.3333 0 0 -8.33333 -4.16667
0 0 0 0 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 16.6667 -4.16667 0 0
0 0 0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -4.16667 33.3333 -4.16667 0
0 0 0 0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -4.16667 33.3333 -4.16667
0 0 0 0 0 0 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 -4.16667 16.6667

```

```

16.6667 -4.16667 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-4.16667 33.3333 -4.16667 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0 0 0 0 0 0
0 -4.16667 33.3333 -4.16667 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -4.16667 16.6667 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 0 0 0 0 0
-4.16667 -8.33333 0 0 33.3333 -8.33333 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 0 0 0
-8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0 0 0
0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 0 0
0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 -8.33333 33.3333 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 0
0 0 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 33.3333 -8.33333 0 -4.16667 -8.33333 0
0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0
0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -8.33333 66.6667 -8.33333 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333
0 0 0 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 -8.33333 33.3333 0 0 -8.33333 -4.16667
0 0 0 0 0 0 0 -4.16667 -8.33333 0 0 16.6667 -4.16667 0
0 0 0 0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -4.16667 33.3333 -4.16667 0
0 0 0 0 0 0 0 -8.33333 -8.33333 -8.33333 0 -4.16667 33.3333 -4.16667
0 0 0 0 0 0 0 0 -8.33333 -4.16667 0 0 -4.16667 16.6667

```



### Test Case 3

Iteration 0																								
Matrix ([H]+[C]/dT)																								
36.8148	4.24074	0	0	4.24074	-4.96296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4.24074	66.963	4.24074	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	4.24074	66.963	4.24074	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	4.24074	36.8148	0	0	-4.96296	4.24074	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4.24074	-4.96296	0	0	66.963	5.14815	0	0	4.24074	-4.96296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
-4.96296	5.14815	-4.96296	0	5.14815	120.593	5.14815	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	5.14815	120.593	5.14815	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	-4.96296	4.24074	0	0	5.14815	66.963	0	0	-4.96296	4.24074	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	4.24074	-4.96296	0	0	66.963	5.14815	0	0	4.24074	-4.96296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	5.14815	120.593	5.14815	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	5.14815	120.593	5.14815	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	-4.96296	4.24074	0	0	5.14815	66.963	0	0	-4.96296	4.24074	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	4.24074	-4.96296	0	0	36.8148	4.24074	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	4.24074	66.963	4.24074	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	-4.96296	5.14815	-4.96296	0	4.24074	66.963	4.24074	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.96296	4.24074	0	0	4.24074	36.8148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Vector ([P]+[C]/dT)*{T0}																								
15033.3	18066.7	18066.7	15033.3	18066.7	12133.3	12133.3	18066.7	18066.7	12133.3	12133.3	18066.7	15033.3	18066.7	18066.7	15033.3	18066.7	18066.7	15033.3	18066.7	18066.7	15033.3	18066.7	18066.7	15033.3

Wynik w programie:

```

36.8148 4.24074 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4.24074 66.963 4.24074 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 4.24074 66.963 4.24074 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 4.24074 36.8148 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4.24074 -4.96296 0 0 66.963 5.14815 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -4.96296 4.24074 0 0 5.14815 66.963 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 66.963 5.14815 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 5.14815 66.963 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 36.8148 4.24074 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 4.24074 66.963 4.24074 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 4.24074 66.963 4.24074 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 4.24074 36.8148 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
15033.3 18066.7 18066.7 15033.3 18066.7 12133.3 12133.3 18066.7 18066.7 12133.3 12133.3 18066.7 15033.3 18066.7 18066.7 15033.3 18066.7 18066.7 15033.3 18066.7 18066.7 15033.3 18066.7 18066.7
iteracja: 0 min: 110.038 max: 365.815

```

### Test Case 4

Iteration 1																								
H Matrix ([H]+[C]/dT)																								
36.815	4.2407	0	0	4.2407	-4.963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4.2407	66.963	4.2407	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	4.2407	66.963	4.2407	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	4.2407	36.815	0	0	-4.963	4.2407	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4.2407	-4.963	0	0	66.963	5.1481	0	0	4.2407	-4.963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
-4.963	5.1481	-4.963	0	5.1481	120.59	5.1481	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	-4.963	5.1481	-4.963	0	5.1481	120.59	5.1481	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	-4.963	4.2407	0	0	5.1481	66.963	0	0	-4.963	4.2407	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	4.2407	-4.963	0	0	66.963	5.1481	0	0	4.2407	-4.963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	5.1481	120.59	5.1481	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	5.1481	120.59	5.1481	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	-4.963	4.2407	0	0	5.1481	66.963	0	0	-4.963	4.2407	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	4.2407	-4.963	0	0	36.815	4.2407	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	4.2407	66.963	4.2407	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	-4.963	5.1481	-4.963	0	4.2407	66.963	4.2407	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.963	4.2407	0	0	4.2407	36.815	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
P_Vector ([{P}+[{C]/dT})*{T0})																								
20660	25552	25552	20660	25552	18897	18897	25552	25552	18897	18897	25552	25552	18897	18897	25552	25552	18897	18897	25552	25552	18897	18897	25552	

Wynik w programie:

```

36.8148 4.24074 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4.24074 66.963 4.24074 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0 0
0 4.24074 66.963 4.24074 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0 0 0 0
0 0 4.24074 36.8148 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 0 0 0 0 0
4.24074 -4.96296 0 0 66.963 5.14815 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 0 0 0
-4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0 0
0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 0 0
0 0 -4.96296 4.24074 0 0 5.14815 66.963 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 0
0 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 66.963 5.14815 0 0 4.24074 -4.96296 0 0
0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296
0 0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 5.14815 120.593 5.14815 0 -4.96296 5.14815 -4.96296
0 0 0 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 5.14815 66.963 0 0 -4.96296 4.24074
0 0 0 0 0 0 0 4.24074 -4.96296 0 0 36.8148 4.24074 0 0
0 0 0 0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 4.24074 66.963 4.24074 0
0 0 0 0 0 0 0 0 -4.96296 5.14815 -4.96296 0 4.24074 66.963 4.24074
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -4.96296 4.24074 0 0 4.24074 36.8148
20659.7 25552.2 25552.2 20659.7 25552.2 18897.4 18897.4 25552.2 25552.2 18897.4 18897.4 25552.2 20659.7 25552.2 25552.2
20659.7

```

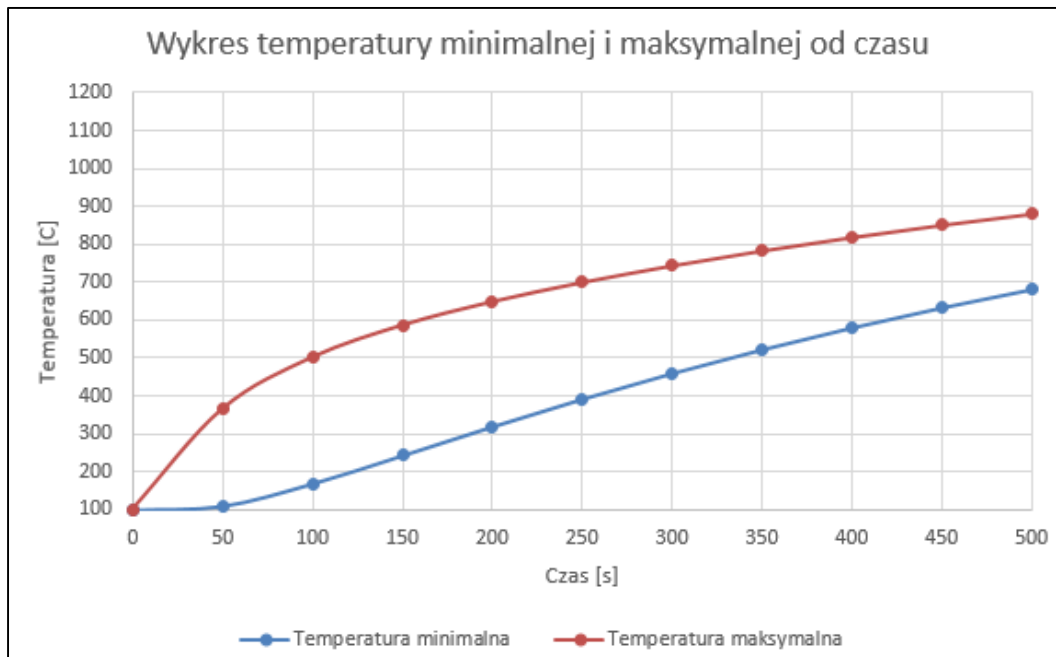
### Test Case 5 – ostateczny wynik

Time[s]	MinTemp[s]	MaxTemp[s]
50	110.038	365.815
100	168.837	502.592
150	242.801	587.373
200	318.615	649.387
250	391.256	700.068
300	459.037	744.063
350	521.586	783.383
400	579.034	818.992
450	631.689	851.431
500	679.908	881.058

Wynik w programie:

```
iteracja: 0 min: 110.038 max: 365.815
iteracja: 1 min: 168.837 max: 502.592
iteracja: 2 min: 242.801 max: 587.373
iteracja: 3 min: 318.615 max: 649.387
iteracja: 4 min: 391.256 max: 700.068
iteracja: 5 min: 459.037 max: 744.063
iteracja: 6 min: 521.586 max: 783.383
iteracja: 7 min: 579.034 max: 818.992
iteracja: 8 min: 631.689 max: 851.431
iteracja: 9 min: 679.908 max: 881.058
```

Wykres przedstawiający zmianę temperatury:



Na wykresie nagły przyrost maksymalnej temperatury wynika ze zmiany temperatury na brzegach materiału. Minimalna temperatura znajduje się w środku materiału, jej wolny wzrost wynika z tego, że wyższa temperatura musi wnikać w materiał aby ogrzać jego wnętrze. Po pewnym czasie materiał uzyskuje stan stabilny i występuje identyczny wzrost temperatury maksymalnej i minimalnej. Po dłuższym czasie, gdy temperatura na brzegach materiału zaczyna się zbliżać do temperatury otoczenia, przyrost temperatury jest niższy niż we wnętrzu materiału.

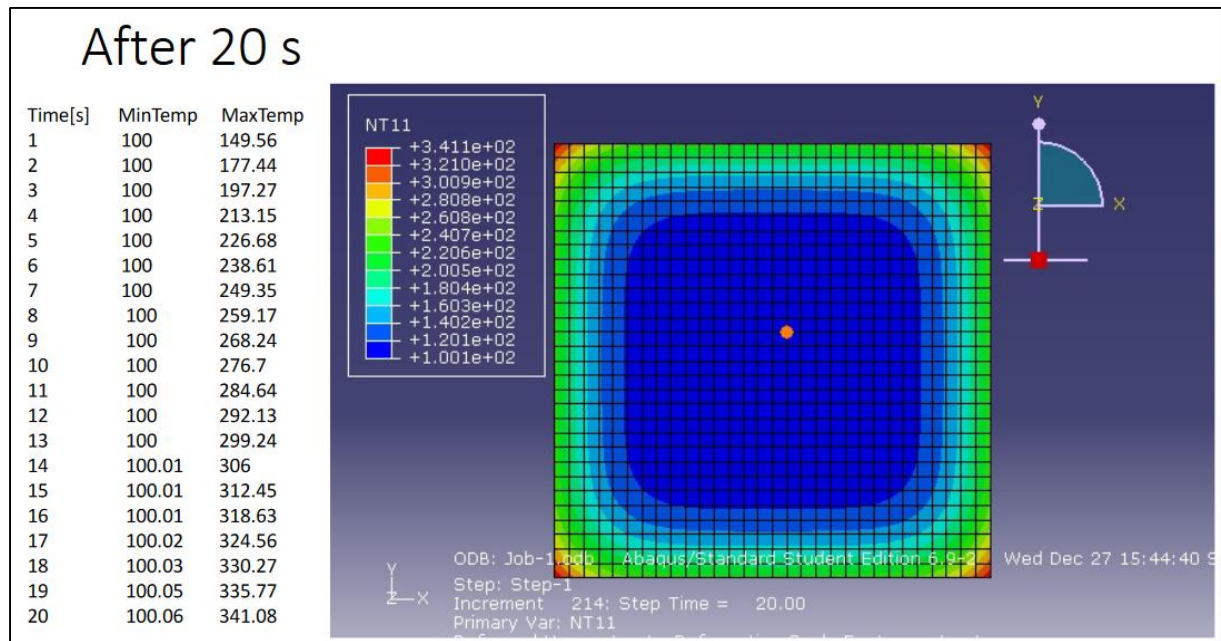
Dla danych wejściowych:

## Test case 2d transient solution - initial data

- 100 – initial temperature
- 100 – simulation time [s],
- 1 – simulation step time [s],
- 1200 – ambient temperature [C],
- 300 – alfa [ $\text{W/m}^2\text{K}$ ],
- 0.100 – H [m],
- 0.100 – B [m],
- 31 – N<sub>H</sub>,
- 31 – N<sub>B</sub>,
- 700 – specific heat [ $\text{J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ ],
- 25 – conductivity [ $\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ ],
- 7800 – density [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ].



# Test Case 1.



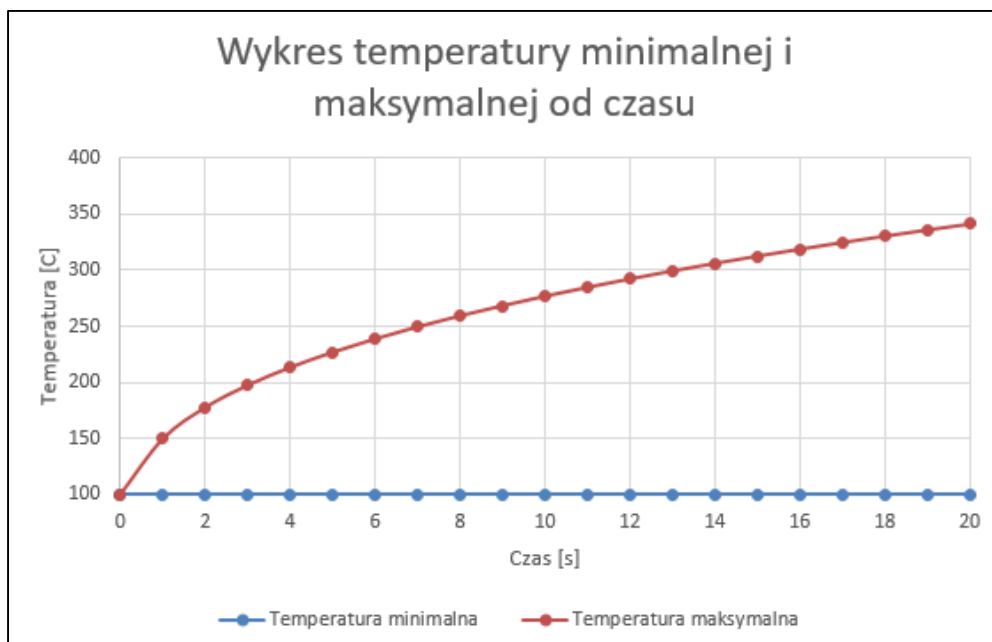
Wynik w programie:

```

iteracja: 0 min: 100 max: 149.557
iteracja: 1 min: 100 max: 177.445
iteracja: 2 min: 100 max: 197.267
iteracja: 3 min: 100 max: 213.153
iteracja: 4 min: 100 max: 226.683
iteracja: 5 min: 100 max: 238.607
iteracja: 6 min: 100 max: 249.347
iteracja: 7 min: 100 max: 259.165
iteracja: 8 min: 100 max: 268.241
iteracja: 9 min: 100 max: 276.701
iteracja: 10 min: 100.001 max: 284.641
iteracja: 11 min: 100.002 max: 292.134
iteracja: 12 min: 100.003 max: 299.237
iteracja: 13 min: 100.005 max: 305.997
iteracja: 14 min: 100.009 max: 312.451
iteracja: 15 min: 100.014 max: 318.631
iteracja: 16 min: 100.021 max: 324.564
iteracja: 17 min: 100.032 max: 330.271
iteracja: 18 min: 100.046 max: 335.772
iteracja: 19 min: 100.064 max: 341.085

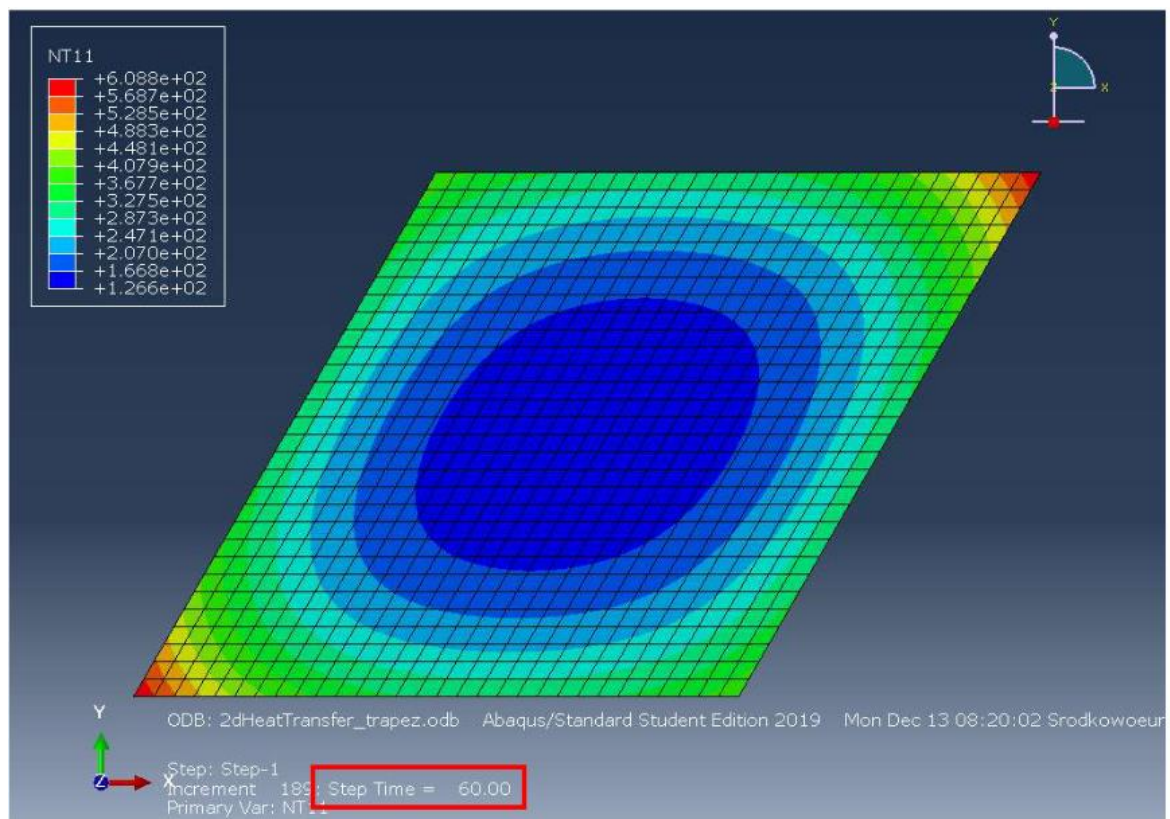
```

Wykres przedstawiający zmianę temperatury:



## Program2 – trapez 31x31

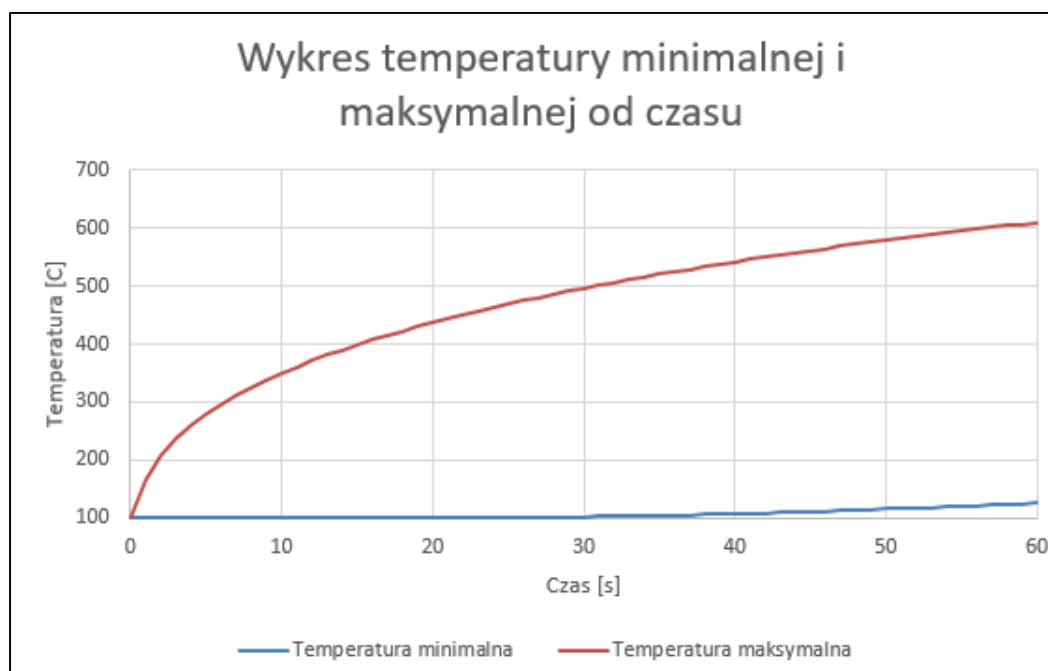
Test Case



Wynik programu dla 60s.

iteracja: 59 min: 126.374 max: 609.977

Wykres przedstawiający zmianę temperatury:



## Wnioski

Na zajęciach poznaliśmy teorię metody elementów skończonych oraz zaimplementowaliśmy program do symulacji rozkładu temperatur w materiale w przestrzeni dwuwymiarowej. Zastosowanie metod elementów skończonych można zauważyć głównie w fizyce. Najczęściej badanymi parametrami jest wytrzymałość, odkształcenia, naprężenia, przemieszczenia oraz przepływy ciepła i cieczy. W naszym przypadku korzystając z odpowiednich wcześniej wymienionych zależności badaliśmy rozkład temperatury w materiale po pewnym czasie.

Zajęcia zobrazowały nam, że aby napisać poprawny program na podstawie metody elementów skończonych wymagana jest zarówno wiedza teoretyczna z danych zagadnień fizycznych jak i umiejętność rozwiązywania podstawowych problemów programistycznych. Nie należy pisać ostatecznego rozwiązania lecz uwzględniać wszystkie parametry stopniowo i dodawać brakujące elementy w początkowym programie.

W celu zwiększenia dokładności obliczeń wykonywanych na siatce MES należy zmniejszyć krok czasowy lub zwiększyć rozmiar siatki. Dobór odpowiedniego rozmiaru siatki to jeden z najbardziej powszechnych problemów MESa. Tworząc zbyt rzadką siatkę można otrzymać błędne wyniki, a zbyt gęsta siatka może spowodować zbyt długie obliczenia. W celu rozwiązania przedstawionego problemu najlepiej przeprowadzić analizę dla kilku wybranych rozmiarów siatki. Problem doboru odpowiedniego kroku czasowego, należy określić indywidualnie dla problemu.