Matematika

Dominik Doležel & Honza Romanovský

Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše
14. září 2024
Email: dominik.dolezel@email.cz

Obsah

Kapitola 1

Základní pojmy z teorie množin

Definice 1. **Množina** je sourhn objektů, chápaný jako celek. Tyto objekty nazýváme prvky množiny.

Množina může být konečná, nekonečná nebo prázdná. Množinu lze zadat výčtem prvků nebo pomocí charakteristické vlastnosti (např. $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$).

Definice 2. **Podmnožina** množiny A je taková množina B, že všechny její prvky patří do množiny A.

Každá neprázdná množina má dvě **nevlastní podmnožiny**: množinu prázdnou a sebe sama. Všechny ostatní její podmnožiny nazýváme vlastní.

Definice 3. Množiny A a B se rovnají právě tehdy, když A je podmnožinou B a zároveň B je podmnožinou A.

Definice 4. Nechť $A \subseteq B$ a $B \neq \emptyset$. Množinu všech prvků množiny B, které nepatří do množiny A, nazýváme **doplněk** (komplement) množiny A v množině B. Značíme A'_B.

Definice 5. Nechť A, B jsou dvě množiny. Jejich **sjednocením** nazveme takovou množinu, která obsahuje ty prkvy, které patří alespoň do jedné z množin A, B. Zapisujeme $A \cup B$.

Definice 6. Nechť A, B jsou dvě množiny. Jejich **průnikem** nazveme takovou množinu, která obsahuje ty prvky, které patří zároveň do obou těchto množin A, B. Zapisujeme $A \cap B$.

Definice 7. **Vennův diagram** je grafické schematické znázornění všech možných vztahů (sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk) několika podmnožin univerzální množiny, jež znázorňujeme pomocí uzavřených čar.

Definice 8. Dvě množiny jsou **disjunktní**, pokud nemají žádný společný prvek, tedy pokud je jejich průnikem prázdná množina.

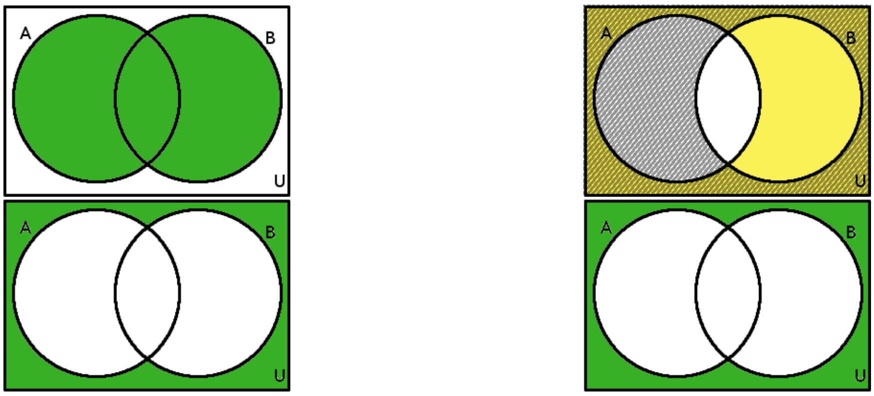
Definice 9. Nechť A, B jsou dvě množiny. **Rozdíl** množin je množina, která obsahuje všechny prvky množiny A s výjimkou těch, jež jsou zároveň prvky množiny B. Zapisujeme $A - B$.

Věta 1. ***De Morganovy zákony*** *jsou zákony určující vztahy mezi sjednocením, průnikem a doplňkem množiny. Nechť A, B jsou dvě množiny, $'$ doplněk množiny. Potom platí:*

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Důkaz. Důkaz prvního vztahu:



Důkaz druhého analogicky. □

Poznámka 1 (Číselné množiny). Rozlišujeme následující základní číselné množiny:

- $\mathbb{N}$: přirozená čísla $(1, 2, 3, \dots)$,
- $\mathbb{Z}$: celá čísla $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$,
- $\mathbb{Q}$: racionální čísla $(3/5, 0, \overline{3})$,
- $\mathbb{R}$: reálná čísla (e, π),
- $\mathbb{C}$: komplexní čísla $(3 + 2i)$

Iracionální čísla ($\mathbb{I}$) jsou doplněk racionálních v $\mathbb{R}$.

Definice 10. **Celá čísla** jsou čísla, která vyjadřují počty prvků množin, čísla k nim opačná a číslo 0.

Definice 11. **Racionálním číslem** nazveme takové číslo $a = \frac{k}{l}, k, l \in \mathbb{Z}$, a p, q jsou nesoudělná.

Poznámka 2. Přirozená čísla zapisujeme pomocí číslic 0–9 a chápeme je takto:

$$4503 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Každé racionální číslo je v desítkové soutavě vyjádřeno buď ukončeným desetinným rozvojem nebo neukončeným periodickým rozvojem. Iracionální číslo je vyjádřeno neukončeným neperiodickým rozvojem.

Definice 12. **Reálnými čísly** nazýváme všechna čísla, která jsou velikostmi úseček.

Definice 13. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Pak množiny takových $x \in \mathbb{R}$, že $a \leq x \leq b$ (resp. $a < x < b$, resp. $a < x$, resp. $a \leq x < b$ atd.) nazýváme uzavřeným (resp. otevřeným, resp. neomezeným zleva otevřeným, resp.zprava uzavřeným, zleva otevřeným atd.) **intervalem**. Zapisujeme $\langle a, b \rangle$ (resp. (a, b), resp. (a, ∞), resp. $\langle a, b))$

Definice 14. **Periodický rozvoj čísla** je rozvoj, u kterého se za desetinnou čárkou donekonečna opakuje táž číslice nebo skupina číslic. Čísla s takovýmto rozvojem se nazývají ryze periodická čísla, opakující se číslice nebo skupina opakujících se číslic se nazývá perioda. Zapisují se tak, že se nad opakující se skupinou napíše pruh:

$$0,333\ldots = 0,\overline{3}$$

Definice 15. Množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ je množina uspořádaných reálných dvojic (x, y), na kterých je definována rovnost, sčítání a násobení následovně:

$$\begin{aligned}(a, b) = (c, d) &\Leftrightarrow a = c \wedge b = d,\\ (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d),\\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Dvojici $(0, 1)$ označíme i a budeme ji nazývat komplexní jednotkou. Zřejmě pak platí, že $i^2 = -1$.

Definice 16. Pokud je uspořádaná dvojice z předchozí definice ve tvaru $(0, b), b \in \mathbb{R}$, nazveme toto číslo **ryze imaginárním**.

Příklad 1 (SÚM 169/8). *Označme M množinu všech dvojciferných přirozených čísel delitelných šesti a N všechn dělitelů čísla 210, kteří jsou různí od čísla 1 a 210. Určete, která z množin má větší počet prvků, a vypište všechny prvky, které mají obě množiny stejné.*

$$\begin{aligned}M &= \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}\\ 210 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \text{ – \textit{hledáme násobky všech podmnožin těchto čísel}}\\ N &= \{2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105\}\\ |M| &= 15, |N| = 14, M \cap N = \{30, 42\}\end{aligned}$$

Množina M má více prvků a společná jsou čísla 30 a 42.

Příklad 2 (SÚM 171/26). *M je množina šech reálných čísel x, která splňují nerovnosti*

$-2 < x < 5$, N je mn. všech reálných čísel y, která splňují nerovnost $|y| < 4$. Určete množinu $R = M \cup N$ a $S = M \cap N$. $R = (-4, 5), S = (-2, 4)$.

Příklad 3 (SÚM 172/29f). *Znázorněte a určete výsledný interval: $(a, a+2) \cap (a-1, a+1)$, kde $a > 0$.* $(a, a+1)$

Příklad 4 (SÚM (172/33)). *Je dána kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r. Množinu všech bodů uvnitř kružnice označte A. Nakreslete rovnostranný trojúhelník ESD, jehož jeden vrchol je ve středu dané kružnice a délky stran jsou rovny velikosti jejího průměru. Množinu vnitřních bodů tohoto trojúhelníka ozn. B. Díle sestrojte osu úhlu ESD a množinu bodů této přímky označte C. Nakreslete samostatné obrázky pro:*

- $(A \cap B) \cup C$,
- $(A \cup C) \cap (B \cup C)$,
- $(A \cap B) \cup (B \cap C)$,
- $(A \cup C) \cap B$.

Příklad 5 (SÚM 173/34). *Pro která x je interval:*

a. $\langle 2x, x+3 \rangle$ *částí intervalu* $(2, 7)$*?* $x \in (1, 3)$

b. $(x, 5)$ *částí intervalu* $(-1, x+1)$*?* $x \in (4, 5)$

c. $(x, x+3)$ *částí intervalu* $\langle 5, 8 \rangle$*?* $x = 5$

d. $\langle x, 2x-1 \rangle$ *částí intervalu* $\langle -2, 5 \rangle$*?* $x \in \langle -2, 5 \rangle$

e. $\langle 3x, 2x+1 \rangle$ *částí intervalu* $(3, 6)$*?* $x \in \{\}$

Příklad 6 (SÚM 173/35). *Nechť $M = (a, b), N = (1, 8), Q = (1, 5)$. Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $M \cap N = Q$.* $a \in (-\infty, 1\rangle, b = 5$

Příklad 7 (SÚM 173/37*). *Je dán trojúhelník ABC. Uvažujme množinu M všech bodů tohoto trojúhelníka, pro které platí $|AX| \geq |BX| \geq |CX|$. Pomocí velikosti stran a úhlů troj. ABC vyjádřete podmínky pro to, aby:*

a. X *byla pětiúhelník,* $\gamma > 90°, \alpha < \beta$

b. X *je jeden bod,* $\alpha = 90°$

c. X *je prázdná.* $\alpha > 90°$

Příklad 8 (SÚM 174/42). *Jsou dány množiny $M = \{1, 2; 3; 4\}, N = \{x; y; z\}$. Uveďte alespoň jeden příklad na zobrazení množiny*

a. M *do* N $1, 2 \implies x; 3 \implies y; 4 \implies y$

b. N *do* M $x \implies 1, 2; y \implies 3; z \implies 3$

c. M *na* N. $1, 2 \implies x; 3 \implies y; 4 \implies z$

Příklad 9 (SÚM 174/46). *Kolik je všech zobrazení (pod)množiny $\{a, b, c, d\}$ do (na) množiny $\{1, 2\}$?* 81

Příklad 10 (SÚM 106/20). *Převeďte na obyčejné zlomky:*

a. $0,\overline{27}$ — $\frac{27}{99}\,\frac{3}{11}$

b. $0,\overline{6}$ — $\frac{2}{3}$

c. $2,\overline{345}$ — $2 + \frac{345}{999} = \frac{781}{333}$

d. $0,\overline{1234}$ — $\frac{1234}{9999}$

e. $0,7\overline{2}$ — $\frac{7}{10} + \frac{2}{90} = \frac{13}{18}$

f. $0,1\overline{36}$ — $\frac{1}{10} + \frac{36}{990} = \frac{3}{22}$

g. $0,7\overline{27}$ — $\frac{7}{10} + \frac{27}{990} = \frac{8}{11}$

h. $3,39\overline{85}$ — $3 + \frac{39}{100} + \frac{85}{9900} = \frac{33646}{9900}$

Příklad 11 (SÚM 107/21). *Proveďte:*

a. $0,\overline{4} + 0,\overline{12}$ — $\frac{4}{9} + \frac{12}{9} = \frac{16}{9}$

b. $0,\overline{7} + 0,\overline{35}$ — $\frac{112}{99}$

c. $0,\overline{47} + 0,\overline{023}$ — $\frac{5470}{10989}$

d. $0,\overline{47} + 0,\overline{023}$ — $\frac{493}{990}$

e. $0,5\overline{354} + 0,\overline{85}$ — $1,394021\ldots$

f. $2,\overline{35} - 1,\overline{231}$ — $\frac{4111}{3663}$

g. $1,\overline{25} - 0,\overline{773}$ — $\frac{5261}{10989}$

Příklad 12 (SÚM 107/22*). *Proveďte:*

a. $1,\overline{2} \cdot 1,\overline{18}$ — $\left(1 + \frac{2}{9}\right)\left(1 + \frac{18}{99}\right) = \frac{11}{9} \cdot \frac{117}{99} = \frac{13}{9}$

b. $0,\overline{32} \cdot 1,\overline{3}$ — $\frac{128}{297}$

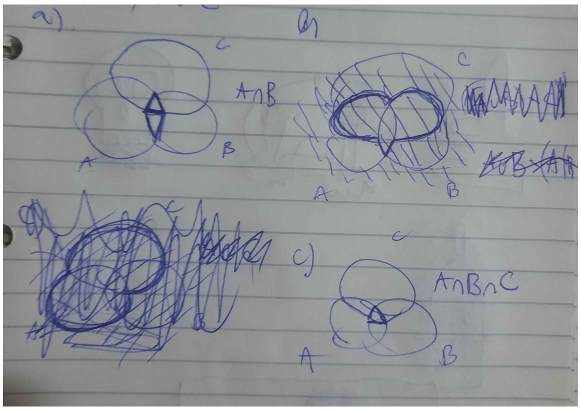
Příklad 13 (SÚM 107/23*). *Řešte rovnici:*

1. $0,\overline{25}x + 0,\overline{31}x = 1,\overline{13}$ — $x = 2$

2. $2,\overline{64}x - 3,\overline{48} = 1,\overline{48}x$ — $x = 3$

Příklad 14 (SMP 140/6abc). *Pomocí Vennových diagramů zjednodušte zápisy množin:*

a. $(A \cap B \cap C) \cup [B \cap (A' \cup C)']$
b. $[(A \cup B)' \cup (B \cup C)] \cap (C \cup A)$
c. $[(A \cup B') \cap C] \cup [(B' \cup A')' \cap C]$



Obrázek 1

Příklad 15 (SÚM 109/36). *Dokažte, že číslo* $\sqrt{5}$ *je iracionální.*

Dk. sporem: Nechť $\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{5} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a,b) = 1.$

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &= \frac{a}{b} \\
5 &= \frac{a^2}{b^2} \\
5b^2 = a^2 &\implies 5 \mid a^2 \implies 5 \mid a \implies \exists k : a = 5k \\
5b^2 &= (5k)^2 \\
5b^2 &= 25k^2 \\
b^2 = 5k^2 &\implies 5 \mid b^2 \implies 5 \mid b
\end{aligned}$$

– spor s předpokladem, že $D(a,b) = 1 \implies \sqrt{5} \in \mathbb{I}$

Příklad 16 (SÚM 109/37). *Dokažte, že číslo* $\sqrt{2} - 1$ *je iracionální.*

Dk. sporem: Nechť $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{2} - 1 = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a,b) = 1.$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{a}{b}$$

$$1 - 2\sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2 - a^2}{2b^2} = \sqrt{2} \implies \sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \implies \sqrt{2} \in \mathbb{Q} - \text{spor} \implies \sqrt{2} - 1 \in \mathbb{I}$$

Příklad 17 (SÚM 109/38). *Dokažte, že číslo* $2\sqrt{5}$ *je iracionální.*

Dk. sporem: Nechť $2\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \implies 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a,b) = 1.$

$$2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$10 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$10b^2 = a^2 \implies 10 \mid a^2 \implies 10 \mid a \implies \exists k : a = 10k$$

$$10b^2 = (10k)^2$$

$$10b^2 = 100k^2$$

$$b^2 = 10k^2 \implies 10 \mid b^2 \implies 10 \mid b$$

– spor s předpokladem, že $D(a, b) = 1$

$$2\sqrt{5} \in \mathbb{I}$$

Příklad 18 (SÚM 109/39). *Dokažte, že jestliže přirozené číslo m není druhou mocninou žádného přirozeného čísla, potom $\sqrt{m}$ je číslo iracionální.*

Dk. sporem: Nechť $m \in \mathbb{N}, m \neq n^2 \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{m} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{m} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, D(a, b) = 1.$

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b}$$

$$m = \frac{a^2}{b^2}, m \in \mathbb{N} \implies b^2 = 1$$

$$m = a^2, a \in \mathbb{N}$$

– spor s předpokladem, že $\forall n \in \mathbb{N} : m \neq n^2$ QED

Příklad 19 (SÚM 144/301). *Dokažte, že:*

a. *součet dvou dvojciferných čísel přirozených, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný jedenácti:*

$$S = \overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b) \implies 11 \mid S$$

b. *rozdíl dvou dvojciferných čísel přirozených, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný devítí:*

$$S = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b) \implies 9 \mid S$$

c. *rozdíl přirozeného čísla trojciferného a čísla, které vznikne z tohoto záměnou krajních cifer, je dělitelný 99:*

$$S = \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c) \implies 99 \mid S$$

Příklad 20 (SÚM 145/303). *Dokažte, že tři mocniny čísla 2, jejichž exponenty jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla, mají součet dělitelný sedmi:*

$$S = 2^a + 2^{a+1} + 2^{a+2} = 2^a + 2^a \cdot 2^1 + 2^a \cdot 2^2 = 7 \cdot 2^a \implies 7 \mid S$$

Příklad 21 (SÚM 145/305). *Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přiroze-*

ných čísel je dělitelný třemi:

$$S = a^3+(a+1)^3+(a+2)^3 = a^3+a^3+3a^2+3a+1+a^3+6a^2+12a+8 = 3(a^3+3a^2+5a+3) \implies 3 \mid S$$

Příklad 22 (SÚM 145/306). *Dokažte, že:*

a. *číslo utvořené z rozdílu třetí mociny přirozeného čísla n a tohoto čísla je dělitelné šesti:*

$$S = n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Jsou to tři po sobě jdoucí čísla $\implies$ právě 1 z nich je dělitelné třemi $\implies$ $3 \mid S$

b. je-li číslo n liché, je uvažovaný rozdíl dělitelný čísel 24:

$$S = (n - 1)n(n + 1)$$

Jsou to tři po sobě jdoucí čísla a to prostřední je liché $\implies$ dělitelné třemi, z dalších čísel je jedno dělitelné 2 a jedno dělitelné čtyřmi: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \implies 24 \mid S$

Příklad 23 (SÚM 145/307). *Dokažte, že je-li přirozené číslo x liché, je výraz $V = x^3 + 3x^{2-}x^-3$ dělitelný číslem 48.*

$$V = x^3 + 3x^{2-}x^-3 = x^2(x + 3) - (x + 3) = (x^2 - 1)(x + 3) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

$\implies$ tři po sobě jdoucí sudá čísla $\implies$ jedno dělitelné 2, jedno 4 a jedno 6 $\implies$ $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 \implies 48 \mid V$

Příklad 24 (SÚM 145/308). *Dokažte, že výraz $V = 5x^3 + 15x^2 + 10x$ je dělitelný číslem 30 prokaždé přirozené číslo x.*

$$V = 5x^3 + 15x^2 + 10x = 5x(x^2 + 3x + 2) = 5x(x + 2)(x + 1)$$

$\implies$ x, $x + 1$, $x + 2$ tři po sobě jdoucí čísla $\implies$ jedno dělitelné 3, alespoň jedno dělitelné 2, $5x$ dělitelné 5 $\implies 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \implies 30 \mid V$

Příklad 25 (SÚM 145/312). *Dokažte, že je-li n číslo přirozené, je číslo $N = n^3 + 11n$ dělitelné šesti:*

mod 6 :

1. $n = 6k$: $n^3 + 11n \equiv 0^3 + 11 \cdot 0 \equiv 0 \implies 6 \mid N$
2. $n = 6k + 1$: $n^3 + 11n \equiv 1^3 + 11 \cdot 1 \equiv 12 \equiv 0 \implies 6 \mid N$
3. $n = 6k + 2$: $n^3 + 11n \equiv 2^3 + 11 \cdot 2 \equiv 30 \equiv 0 \implies 6 \mid N$
4. $n = 6k + 3$: $n^3 + 11n \equiv 3^3 + 11 \cdot 3 \equiv 60 \equiv 0 \implies 6 \mid N$

5. $n = 6k + 4$: $n^3 + 11n \equiv 4^3 + 11 \cdot 4 \equiv 108 \equiv 0 \implies 6 \mid N$
6. $n = 6k + 5$: $n^3 + 11n \equiv 5^3 + 11 \cdot 5 \equiv 180 \equiv 0 \implies 6 \mid N$

$\implies 6 \mid N : \forall n \in \mathbb{N}$

Příklad 26 (SÚM 145/315)**.**

Kapitola 2

Výroková logika

Definice 17. **Výrokem** nazýváme každou oznamvací větu, která je buď pravdivá, nebo nepravdivá. **Pravdivostní hodnotou** výroku rozumíme jeho pravdivost / nepravdivost.

Definice 18. **Negací výroku** V nazýváme výrok V', který má opačnou pravdivostní hodnotu než výrok V.

Poznámka 3. **Kvantifikované výroky** jsou výroky, které uvádějí počet objektů. Pro to lze použít

- obecný kvantifikátor $\forall$ (pro všechno platí),
- existenční kvantifikátor $\exists$ (existuje alespoň jeden, že pro něj platí) a
- zesílený existenční kvantifikátor $\exists!$ (existuje právě jeden, že pro něj platí) a

Definice 19. **Složeným výrokem** rozumíme více výroků spojených logickými spojkami:

název	zápis	význam
negace	X'	není pravda, že
konjunkce	$X \wedge Y$	X a Y platí současně
alternativa	$X \vee Y$	platí alespoň jedno z X, Y
implikace	$X \implies Y$	jestliže X, pak Y
ekvivalence	$X \iff Y$	X platí právě tehdy, když platí Y

Příklad 27 (SMP 143/4). *Jsou následující výroky tautologie?*

a. $[(A \implies B) \wedge A] \implies B$

A	B	$A \implies B$	$(A \implies B) \wedge A$	$(A \implies B) \wedge A] \implies B$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Výrok je tautologií.

b. $[(A \implies B) \wedge B'] \implies A'$

A	B	A'	B'	$A \implies B$	$(A \implies B) \wedge B'$	$[(A \implies B) \wedge B'] \implies A'$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Výrok je tautologií.

Příklad 28 (SMP 144/8)**.** *Na modelu kolejiště je možno uvést do pohybu tři vlakové soupravy A,B,C. V daném okamžiku je jejich situace charakterizována formulí*

$$[(A' \vee B') \implies C] \wedge [(A \vee C) \implies B'] \,.$$

Které soupravy jsou v pohybu?

Napišme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	C	A'	B'	$A' \vee B'$	$(A' \vee B') \implies C$	$A \vee C$	$(A \vee C) \implies B'$	celkem
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Buď jsou v provozu soupravy A a C nebo jen souprava C.

Příklad 29 (SMP 144/10)**.** *Květa si pozvala na oslavu svých osmnáctin přátele. Uvažuje takto:*

a. Alena a Boris chodí vždycky spolu. Přijdou oba, nebo ani jeden.

b. Přijde Boris nebo Dan, ale určitě ne oba.

c. Když přijde Alena, pak přijde i Eva.

d. Když Eva nepřijde, nepřijde Dan.

S jakým největším počtem přátel může Květa počítat? Vyplývá z Květiny úvahy, že může nastat situace, kdy nepřijde ani jeden z pozvaných?

Přeložme tato tvrzení symbolicky.

a. $A \iff B$

b. $B' \vee D'$

c. $A \implies E$

d. $E' \implies D'$

Protože alespoň jeden z dvojice Boris, Dan nemůže přijít a zbytek podmínek si neodporují, na oslavu můžou přijít nejvýše tři lidé.

Situace, že nepřijde nikdo nastat může.

Příklad 30 (SMP 144/12). *Trenér se věnuje trojici gymnastů – Adamovi, Břéťovi a Čeňkovi. Rozhodněte, koho vyšle na kontrolní závod, jestliže splní tyto tři podmínky:*

- *Tělovýchovnou jednotu budou reprezentovat nejvýše dva závodníci, přitom pojede aspoň jeden.*
- *Pojede Adam nebo Čeňek, ale určitě ne oba současně.*
- *Nepojede-li Čeňek, pak nepojede ani Břéťa.*

Rozdělme příklad na dva případy.

i. pojede Adam: pak nepojede Čeněk a tedy ani Břéťa,

ii. pojede Čeněk: pak může jet i Břéťa.

Buď pojede Adam sám nebo Čeněk sám nebo Čeněk s Břéťou.

Příklad 31 (SMP 143/13). *V souvislosti s otevřením další části metra uvažuje komise o účelnosti autobusových linek A, B, C, D. Je přitom třeba vzít v úvahu tyto tři skutečnosti:*

- *Aspoň jedna z linek A, B, C bude zrušena.*
- *Bude-li zrušena linka A, pak bude zachována linka B nebo D.*
- *Nebude-li zrušena linka C, pak bude zrušena linka A nebo D.*

Najděte všechna řešení a rozhodněte, zda stačí zachovat jen jednu z linek.

Pokud linka X jezdí, píšeme X, v opačném případě X'. Podmínky převedeme jako:

- $A' \vee B' \vee C'$
- $A' \implies (B \vee D)$
- $C \implies (A' \vee D')$

Sestavme tabulku („celkem“ značí konkunkci všech tří podmínek výše):

A	B	C	D	$A' \vee B' \vee C'$	$B \vee D$	$A' \implies (B \vee D)$	$A' \vee D'$	$C \implies (A' \vee D')$	celkem
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0

Výsledek je patrný z tabulky. Může nastat situace, že bude jezdit jediná linka, a to buď A, nebo D.

Příklad 32 (ŘMÚ 174/28.5). *a. K implikaci „jestliže funkce f má v každém bodě intervalu (a, b) kladnou derivaci, pak funkce f je v intervalu (a, b) rostoucí“ utvořte negaci, obměněnou a obrácenou implikaci a stanovte jejich pravdivostní hodnoty.*

negace: „funkce f má v každém bodě intervalu (a, b) kladnou derivaci a funkce f není v intervalu (a, b) rostoucí“, obměna: „jestliže funkce f není v intervalu (a, b) rostoucí, pak funkce f alespoň v jednom bodu intervalu (a, b) nemá kladnou derivaci“, obrácení: „jestliže funkce f je v intervalu (a, b) rostoucí, pak funkce f má v každém bodě intervalu (a, b) kladnou derivaci“

b. Negujte výroky:

1. *Aspoň jeden příklad jsem vyřešil správně.*
2. *V tomto sadě je aspoň dvacet jabloní.*
3. *Nejvýše šest žáků naší třídy prospělo s vyznamenáním.*
4. *Každý den vstávám v sedm hodin.*

1. Všechny příklady jsem vyřešil špatně.
2. V tomto sadě je nejvýše devatenáct jadbloní.
3. Alespoň sedm žáků naší třídy prospělo s vyznamenáním.
4. Alespoň v jeden den nevstávám v sedm hodin.

c. *Když si dám kávu, dám si i moučník. Nedám-li si zmrzlinu, nedám si moučník.*

   1. *Vyplývá z uvedeného, že dám-li si zmrzlinu, pak si nedám kávu?* ne

   2. *Vyplývá z uvedeného, že když si dám kávu, dám si i zmrzlinu?* ano

Příklad 33 (ŘMÚ 275/28.6). *a. K implikaci „Je-li dané přirozené číslo dělitelné dvěma a zároveň třemi, pak je dělitelné šesti“ utvořte negaci, obměněnou a obrácenou implikaci.*

b. *Nebude-li ráno pršet, pojedeme na chalupu. Zjišťujeme, že ráno prší. Usuzujeme správně, když z uvedeného odvodíme, že na chalupu nepojedeme?*

c. *Pro práci strojů A, B, C platí dvě podmínky: Nesmí pracovat pouze stroj B. Když pracuje stroj A, pak musí být v chodu i stroj B. Navrhněte síť, která bude pro tuto trojici strojů kontrolním zařízením a bude signalizovat nesplnění aspoň jedné z uvedených podmínek.*

negace: „Dané přirozené číslo je dělitelné dvěma a zároveň třemi a není dělitelné šesti“, obměna: „Jetliže dané přirozené číslo není dělitelné šesti, pak není dělitelné dvojkou nebo trojkou“, obrácení: „Jestliže je dané přirozené číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma a třemi“.

a. ne

b. Podmínky lze zapsat jako:

$$B \implies (A \vee C), A \implies B.$$

Z tabulky pravdivostních hodnot lze vyvodit, že nevyhovují jen možnosti A, B', C a A, B', C'.

Příklad 34 (SÚM 240/1). *Počet úhlopříček vypuklého n-úhelníka se vypočítá podle vzorce $P_n = \frac{n(n-3)}{2}$, kde n je přirozené číslo větší než tři. Dokažte jeho správnost matematickou indukcí.*

i. $n = 4:$

$$P_4 = \frac{4(4-3)}{2} = 2 \rightarrow \text{platí}$$

ii. úvaha: Přidáním n-tého bodu se zvýší počet úhlopříček o $n-3$ (úhlopříčky mezi novým bodem a těmi starými, se kterými nemá společnou stranu) a 1 (strana, jejíž koncové body jsou ty body, se kterými má n-tý bod společnou stranu, se přemění v úhlopříčku) $\rightarrow$ celkem přibyde $n-2$ úhlopříček.
Chceme: $P_n = \frac{n(n-3)}{2} \implies P_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} = P_n + (n-1) &= \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 \\
&= \frac{n(n-3) + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \rightarrow \text{platí}
\end{aligned}
$$

Příklad 35 (SÚM 240/5). *Dokažte matematickou indukcí, že číslo $Q_n = 5^{n+1} + 6^{2n-1}$ je dělitelné číslem 31 pro každé přirozené číslo n.*

i. $n = 1:$

$$Q_1 = 5^2 + 6^1 = 31 \rightarrow \text{platí}$$

ii. chceme: $31 \mid Q_n \implies 31 \mid Q_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1} &= 5^{n+2} + 6^{2(n+1)-1} = 5^{n+2} + 6^{2n+1} \\
&= 5 \cdot 5^{n+2} + 6^{2n+1} = 5V_n - 5 \cdot 6^{2n-1} + 6^{2n+1} \\
&= 5V_n + 6^{2n-1}(6^2 - 5) = 5V_n + 31 \cdot 6^{2n-1} \rightarrow \text{platí}
\end{aligned}
$$

Příklad 36 (SÚM 241/8). *Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.*

Zapišme součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel jako $a_n = (a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 = 3a^3 + 6a$.

i. $a = 2:$

$$a_2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \rightarrow \text{platí}$$

ii. chceme: $9 \mid a_n \implies 9 \mid a_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = \\
&= a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a^3 + 3 \cdot 2 \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2^3 \\
&= 3a^3 + 9a^2 + 15a + 9 \\
&= a_n + 9a^2 + 9a + 9 = a_n + 9(a^2 + a + 1) \rightarrow \text{platí}
\end{aligned}
$$

Reference

[1]

[2] M. S. Espinoza, J. Goncalves, P. Leitao, J. L. G. Sanchez, A. Herreros, Inverse kinematics of a 10 dof modular hyper-redundant robot resorting to exhaustive and error-optimization methods: A comparative study, in: Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium (SBR-LARS), 2012 Brazilian, IEEE, 2012, pp. 125–130.

[3] M. S. Espinoza, A. I. Pereira, J. Gonçalves, Optimization methods for hyper-redundant robots' inverse kinematics in biomedical applications, in: AIP Conference Proceedings, Vol. 1479, 2012, p. 818.

[4] M. Tham, Writing research theses or dissertations, university of Newcastle Upon Tyne (May 2001).
URL `http://lorien.ncl.ac.uk/ming/dept/Tips/writing/thesis/thesis-intro.htm`

About the Author

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.