Matematika

Dominik Doleel & Honza Romanovský

Gymnázium Brno, tída Kapitána Jaroe
9. září 2024
Email: dominik.dolezel@email.cz

Obsah

Kapitola 1

Základní pojmy z teorie mnoin

Definice 1. **Mnoina** je sourhn objekt, chápaný jako celek. Tyto objekty nazýváme prvky mnoiny.

Mnoina me být konená, nekonená nebo prázdná. Mnoinu lze zadat výtem prvk nebo pomocí charakteristické vlastnosti (nap. $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$).

Definice 2. **Podmnoina** mnoiny A je taková mnoina B, e vechny její prvky patí do mnoiny A.

Kadá neprázdná mnoina má dv **nevlastní podmnoiny**: mnoinu prázdnou a sebe sama. Vechny ostatní její podmnoiny nazýváme vlastní.

Definice 3. Mnoiny A a B se rovnají práv tehdy, kdy A je podmnoinou B a zárove B je podmnoinou A.

Definice 4. Nech $A \subseteq B$ a $B \neq \emptyset$. Mnoinu vech prvk mnoiny B, které nepatí do mnoiny A, nazýváme **doplnk** (komplement) mnoiny A v mnoin B. Znaíme A'_B.

Definice 5. Nech A, B jsou dv mnoiny. Jejich **sjednocením** nazveme takovou mnoinu, která obsahuje ty prkvy, které patí alespo do jedné z mnoin A, B. Zapisujeme $A \cup B$.

Definice 6. Nech A, B jsou dv mnoiny. Jejich **prnikem** nazveme takovou mnoinu, která obsahuje ty prvky, které patí zárove do obou tchto mnoin A, B. Zapisujeme $A \cap B$.

Definice 7. **Vennv diagram** je grafické schematické znázornní vech moných vztah (sjednocení, prnik, rozdíl, doplnk) nkolika podmnoin univerzální mnoiny, je znázorujeme pomocí uzavených ar.

Definice 8. Dv mnoiny jsou **disjunktní**, pokud nemají ádný spolený prvek, tedy pokud je jejich prnikem prázdná mnoina.

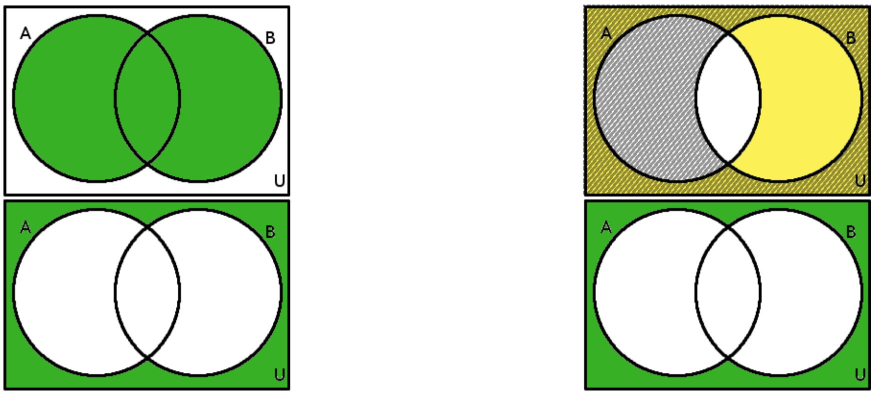
Definice 9. Nech A, B jsou dv mnoiny. **Rozdíl** mnoin je mnoina, která obsahuje vechny prvky mnoiny A s výjimkou tch, je jsou zárove prvky mnoiny B. Zapisujeme $A - B$.

Vta 1. ***De Morganovy zákony*** *jsou zákony urující vztahy mezi sjednocením, prnikem a doplkem mnoiny. Nech A, B jsou dv mnoiny, $'$ doplnk mnoiny. Potom platí:*

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Důkaz. Dkaz prvního vztahu:



Dkaz druhého analogicky. □

Poznámka 1 (íselné mnoiny)**.** Rozliujeme následující základní íselné mnoiny:

- $\mathbb{N}$: pirozená ísla $(1, 2, 3, \dots)$,
- $\mathbb{Z}$: celá ísla $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$,
- $\mathbb{Q}$: racionální ísla $(3/5, 0, \overline{3})$,
- $\mathbb{R}$: reálná ísla (e, π),
- $\mathbb{C}$: komplexní ísla $(3 + 2i)$

Iracionální ísla $(\mathbb{I})$ jsou doplnk racionálních v $\mathbb{R}$.

Definice 10. **Celá ísla** jsou ísla, která vyjadují poty prvk mnoin, ísla k nim opaná a íslo 0.

Definice 11. **Racionálním íslem** nazveme takové íslo $a = \frac{k}{l}, k, l \in \mathbb{Z}$, a p, q jsou nesoudlná.

Poznámka 2. Pirozená ísla zapisujeme pomocí íslic 0–9 a chápeme je takto:

$$4503 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Kadé racionální íslo je v desítkové soutav vyjádeno bu ukoneným desetinným rozvojem nebo neukoneným periodickým rozvojem. Iracionální íslo je vyjádeno neukoneným neperiodickým rozvojem.

Definice 12. **Reálnými ísly** nazýváme vechna ísla, která jsou velikostmi úseek.

Definice 13. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Pak mnoiny takových $x \in \mathbb{R}$, e $a \leq x \leq b$ (resp. $a < x < b$, resp. $a < x$, resp. $a \leq x < b$ atd.) nazýváme uzaveným (resp. oteveným, resp. neomezeným zleva oteveným, resp.zprava uzaveným, zleva oteveným atd.) **intervalem**. Zapisujeme $\langle a, b\rangle$ (resp. (a, b), resp. (a, ∞), resp. $\langle a, b))$

Definice 14. **Periodický rozvoj ísla** je rozvoj, u kterého se za desetinnou árkou donekonena opakuje tá íslice nebo skupina íslic. ísla s takovýmto rozvojem se nazývají ryze periodická ísla, opakující se íslice nebo skupina opakujících se íslic se nazývá perioda. Zapisují se tak, e se nad opakující se skupinou napíe pruh:

$$0,333 = 0,\overline{3}$$

Definice 15. Mnoina komplexních ísel $\mathbb{C}$ je mnoina uspoádaných reálných dvojic $[x, y]$, na kterých je definována rovnost, sítání a násobení následovn:

$$[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow a = c \wedge b = d,$$

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b][c, d] = [ac - bd, ad + bc].$$

Dvojici $[0, 1]$ oznaíme i a budeme ji nazývat komplexní jednotkou. Zejm pak platí, e $i^2 = -1$.

Definice 16. Pokud je uspoádaná dvojice z pedchozí definice ve tvaru $[0, b], b \in \mathbb{R}$, nazveme toto íslo **ryze imaginárním**.

Píklad 1 (SÚM 169/8). *Ozname M mnoinu vech dvojciferných pirozených ísel delitelných esti a N vechn dlitel ísla 210, kteí jsou rzní od ísla 1 a 210. Urete, která z mnoin má vtí poet prvk, a vypite vechny prvky, které mají ob mnoiny stejné.*

$$\begin{aligned} M &= \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\} \\ 210 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \text{ -- \textit{hledáme násobky vech podmnoin tchto ísel}} \\ N &= \{2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105\} \\ |M| &= 15, |N| = 14, M \cap N = \{30, 42\} \end{aligned}$$

Mnoina M má více prvk a spolená jsou ísla 30 a 42.

Píklad 2 (SÚM 171/26). *M je mnoina ech reálných ísel x, která splují nerovnosti $-2 < x < 5$, N je mn. vech reálných ísel y, která splují nerovnost $|y| < 4$. Urete mnoinu $R = M \cup N$*

a $S = M \cap N$. $R = (-4,5), S = (-2,4)$.

Píklad 3 (SÚM 172/29f). *Znázornte a urete výsledný interval:* $(a, a+2) \cap (a-1, a+1)$, *kde* $a > 0$. $(a, a+1)$

Píklad 4 (SÚM (172/33)). *Je dána krunice* k *se stedem v bod* S *a polomrem* r. *Mnoinu vech bod uvnit krunice oznate* A. *Nakreslete rovnostranný trojúhelník* ESD, *jeho jeden vrchol je ve stedu dané krunice a délky stran jsou rovny velikosti jejího prmru. Mnoinu vnitních bod tohoto trojúhelníka ozn.* B. *Díle sestrojte osu úhlu* ESD *a mnoinu bod této pímky oznate* C. *Nakreslete samostatné obrázky pro:*

- $(A \cap B) \cup C$,
- $(A \cup C) \cap (B \cup C)$,
- $(A \cap B) \cup (B \cap C)$,
- $(A \cup C) \cap B$.

Píklad 5 (SÚM 173/34). *Pro která* x *je interval:*

a. $\langle 2x, x+3 \rangle$ *ástí intervalu* $(2,7)$*?* $x \in (1,3)$

b. $(x, 5)$ *ástí intervalu* $(-1, x+1)$*?* $x \in (4,5)$

c. $(x, x+3)$ *ástí intervalu* $\langle 5, 8 \rangle$*?* $x = 5$

d. $\langle x, 2x-1 \rangle$ *ástí intervalu* $\langle -2, 5 \rangle$*?* $x \in \langle -2, 5 \rangle$

e. $\langle 3x, 2x+1 \rangle$ *ástí intervalu* $(3,6)$*?* $x \in \{\}$

Píklad 6 (SÚM 173/35). *Nech* $M = (a,b), N = (1,8), Q = (1,5)$. *Urete* $a, b \in \mathbb{R}$ *tak, aby platilo* $M \cap N = Q$. $a \in (-\infty, 1\rangle, b = 5$

Píklad 7 (SÚM 173/37*). *Je dán trojúhelník* ABC. *Uvaujme mnoinu* M *vech bod tohoto trojúhelníka, pro které platí* $|AX| \geq |BX| \geq |CX|$. *Pomocí velikosti stran a úhl troj.* ABC *vyjádete podmínky pro to, aby:*

a. X *byla ptiúhelník,* $\gamma > 90°, \alpha < \beta$

b. X *je jeden bod,* $\alpha = 90°$

c. X *je prázdná.* $\alpha > 90°$

Píklad 8 (SÚM 174/42). *Jsou dány mnoiny* $M = \{1, 2; 3; 4\}, N = \{x; y; z\}$. *Uvete alespo jeden píklad na zobrazení mnoiny*

a. M *do* N $1, 2 \to x; 3 \to y; 4 \to y$

b. N *do* M $x \to 1, 2; y \to 3; z \to 3$

c. M *na* N. $1, 2 \to x; 3 \to y; 4 \to z$

Píklad 9 (SÚM 174/46). *Kolik je vech zobrazení (pod)mnoiny $\{a,b,c,d\}$ do (na) mnoiny $\{1,2\}$?* 81

Píklad 10 (SÚM 106/20). *Pevete na obyejné zlomky:*

a. $0,\overline{27}$ — $\frac{27}{99}\,\frac{3}{11}$

b. $0,\overline{6}$ — $\frac{2}{3}$

c. $2,\overline{345}$ — $2+\frac{345}{999}=\frac{781}{333}$

d. $0,\overline{1234}$ — $\frac{1234}{9999}$

e. $0,7\overline{2}$ — $\frac{7}{10}+\frac{2}{90}=\frac{13}{18}$

f. $0,1\overline{36}$ — $\frac{1}{10}+\frac{36}{990}=\frac{3}{22}$

g. $0,7\overline{27}$ — $\frac{7}{10}+\frac{27}{990}=\frac{8}{11}$

h. $3,39\overline{85}$ — $3+\frac{39}{100}+\frac{85}{9900}=\frac{33646}{9900}$

Píklad 11 (SÚM 107/21). *Provete:*

a. $0,\overline{4}+0,\overline{12}$ — $\frac{4}{9}+\frac{12}{9}=\frac{16}{9}$

b. $0,\overline{7}+0,\overline{35}$ — $\frac{112}{99}$

c. $0,\overline{47}+0,\overline{023}$ — $\frac{5470}{10989}$

d. $0,\overline{47}+0,0\overline{23}$ — $\frac{493}{990}$

e. $0,5\overline{354}+0,\overline{85}$ — $1,394021\ldots$

f. $2,\overline{35}-1,\overline{231}$ — $\frac{4111}{3663}$

g. $1,\overline{25}-0,\overline{773}$ — $\frac{5261}{10989}$

Píklad 12 (SÚM 107/22*). *Provete:*

a. $1,\overline{2}\cdot 1,\overline{18}$ — $\left(1+\frac{2}{9}\right)\left(1+\frac{18}{99}\right)=\frac{11}{9}\cdot\frac{117}{99}=\frac{13}{9}$

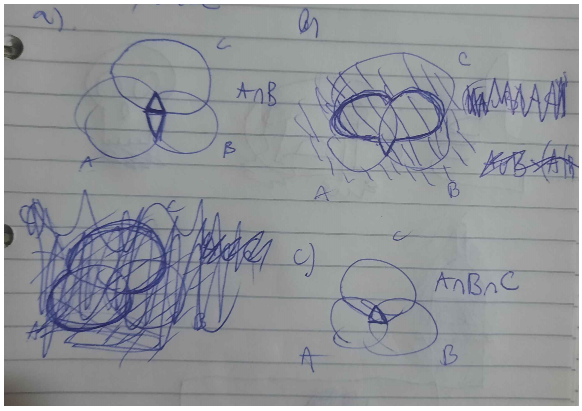
b. $0,\overline{32}\cdot 1,\overline{3}$ — $\frac{128}{297}$

Píklad 13 (SÚM 107/23*). *ete rovnici:*

1. $0,\overline{25}x+0,\overline{31}x=1,\overline{13}$ — $x=2$
2. $2,\overline{64}x-3,\overline{48}=1,\overline{48}x$ — $x=3$

Píklad 14 (SMP 140/6abc). *Pomocí Vennových diagram zjednodute zápisy mnoin:*

a. $(A \cap B \cap C) \cup [B \cap (A' \cup C)']$
b. $[(A \cup B)' \cup (B \cup C)] \cap (C \cup A)$
c. $[(A \cup B') \cap C] \cup [(B' \cup A')' \cap C]$



Obrázek 1

Píklad 15 (SÚM 109/36)**.** *Dokate, e íslo* $\sqrt{5}$ *je iracionální.*

Dk. sporem: Nech $\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a,b) = 1.$

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$5 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$5b^2 = a^2 \Rightarrow 5 \mid a^2 \Rightarrow 5 \mid a \Rightarrow \exists k : a = 5k$$

$$5b^2 = (5k)^2$$

$$5b^2 = 25k^2$$

$$b^2 = 5k^2 \Rightarrow 5 \mid b^2 \Rightarrow 5 \mid b$$

– *spor s pedpokladem, e* $D(a,b) = 1$

$$\sqrt{5} \in \mathbb{I}$$

Píklad 16 (SÚM 109/37)**.** *Dokate, e íslo* $\sqrt{2} - 1$ *je iracionální.*

Dk. sporem: Nech $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a,b) = 1.$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{a}{b}$$

$$1 - 2\sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2 - a^2}{2b^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{(2)} \in \mathbb{Q}$$

– *spor*

$$(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{I}$$

Píklad 17 (SÚM 109/38)**.** *Dokate, e íslo* $2\sqrt{5}$ *je iracionální.*

Dk. sporem: Nech $2\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a,b) = 1.$

$$2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$10 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$10b^2 = a^2 \Rightarrow 10 \mid a^2 \Rightarrow 10 \mid a \Rightarrow \exists k : a = 10k$$

$$10b^2 = (10k)^2$$

$$10b^2 = 100k^2$$

$$b^2 = 10k^2 \Rightarrow 10 \mid b^2 \Rightarrow 10 \mid b$$

– spor s pedpokladem, e $D(a,b) = 1$

$$2\sqrt{5} \in \mathbb{I}$$

Píklad 18 (SÚM 109/39)**.** *Dokate, e jestlie pirozené íslo* m *není druhou mocninou ádného pirozeného ísla, potom* $\sqrt{m}$ *je íslo iracionální.*

Dk. sporem: Nech $m \in \mathbb{N}, m! = n^2 \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{m} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, D(a,b) = 1.$

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b}$$

$$m = \frac{a^2}{b^2}, m \in \mathbb{N} \Rightarrow b^2 = 1$$

$$m = a^2, a \in \mathbb{N}$$

– spor s pedpokladem, e $m! = n^2 \forall n \in \mathbb{N}$ *QED*

Píklad 19 (SÚM 144/301)**.** *Dokate, e:*

a. *souet dvou dvojciferných ísel pirozených, která se lií jen poadím cifer, je dlitelný jedenácti:*

$$S = \overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a+b) \Rightarrow 11 \mid S$$

b. *rozdíl dvou dvojciferných ísel pirozených, která se lií jen poadím cifer, je dlitelný devítí:*

$$S = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a-b) \Rightarrow 9 \mid S$$

c. *rozdíl pirozeného ísla trojciferného a ísla, které vznikne z tohoto zámnou krajních cifer, je dlitelný 99:*

$$S = \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a-c) \Rightarrow 99 \mid S$$

Píklad 20 (SÚM 145/303)**.** *Dokate, e ti mocniny ísla 2, jejich exponenty jsou ti po sob* *jdoucí pirozená ísla, mají souet dlitelný sedmi:*

$$S = 2^a + 2^{a+1} + 2^{a+2} = 2^a + 2^a * 2^1 + 2^a * 2^2 = 7 * 2^a \Rightarrow 7 \mid S$$

Píklad 21 (SÚM 145/305). *Dokate, e souet tetích mocnin tí po sob jdoucích pirozených ísel je dlitelný temi:*

$$S = a^3+(a+1)^3+(a+2)^3 = a^3+a^3+3a^2+3a+1+a^3+6a^2+12a+8 = 3(a^3+3a^2+5a+3) \Rightarrow 3 \mid S$$

Píklad 22 (SÚM 145/306). *Dokate, e:*

a íslo utvoené z rozdílu tetí mociny pirozeného ísla n a tohoto ísla je dlitelné esti:

$$S = n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$$

Jsou to ti po sob jdoucí ísla $\Rightarrow$ práv 1 z nich je dlitelné temi $\Rightarrow$ $3 \mid S$

b je-li íslo n liché, je uvaovaný rozdíl dlitelný ísel 24:

$$S = (n-1)n(n+1)$$

*Jsou to ti po sob jdoucí ísla a to prostední je liché $\Rightarrow$ dlitelné temi, z dalích ísel je jedno dlitelné 2 a jedno dlitelné tymi: 2*4*3 = 24 $\Rightarrow$* $24 \mid S$

Píklad 23 (SÚM 145/307). *Dokate, e jeli pirozené íslo x liché, je výraz $V = x^3 + 3x^2x3$ dlitelný íslem 48:*

$$V = x^3 + 3x^2x3 = x^2(x+3) - (x+3) = (x^2-1)(x+3) = (x-1)(x+1)(x+3)$$

$\Rightarrow$ *ti po sob jdoucí sudá ísla $\Rightarrow$ jedno dlitelné 2, jedno 4 a jedno 6 $\Rightarrow$* $2*4*6 = 48 \Rightarrow 48 \mid V$

Píklad 24 (SÚM 145/308). *Dokate, e výraz $V = 5x^3 + 15x^2 + 10x$ je dlitelný íslem 30 prokadé pirozené íslo x:*

$$V = 5x^3 + 15x^2 + 10x = 5x(x^2 + 3x + 2) = 5x(x+2)(x+1)$$

$\Rightarrow$ *x, $x+1$, $x+2$ ti po sob jdoucí ísla $\Rightarrow$ jedno dlitelné 3, alespo jedno dlitelné 2, $5x$ dlitelné 5 $\Rightarrow$* $2*3*5 = 30 \Rightarrow 30 \mid V$

Píklad 25 (SÚM 145/312). *Dokate, e je-li n íslo pirozené, je íslo $N = n^3 + 11n$ dlitelné esti: mod 6:*

1. $n = 6k$: $n^3 + 11n \equiv 0^3 + 11*0 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$
2. $n = 6k+1$: $n^3 + 11n \equiv 1^3 + 11*1 \equiv 12 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$
3. $n = 6k+2$: $n^3 + 11n \equiv 2^3 + 11*2 \equiv 30 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$

4. $n = 6k + 3$: $n^3 + 11n \equiv 3^3 + 11 * 3 \equiv 60 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$

5. $n = 6k + 4$: $n^3 + 11n \equiv 4^3 + 11 * 4 \equiv 108 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$

6. $n = 6k + 5$: $n^3 + 11n \equiv 5^3 + 11 * 5 \equiv 180 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$

$\Rightarrow 6 \mid N \forall n \in \mathbb{N}$

Příklad 26 (SÚM 145/315)**.**

Reference

[1]

[2] M. S. Espinoza, J. Goncalves, P. Leitao, J. L. G. Sanchez, A. Herreros, Inverse kinematics of a 10 dof modular hyper-redundant robot resorting to exhaustive and error-optimization methods: A comparative study, in: Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium (SBR-LARS), 2012 Brazilian, IEEE, 2012, pp. 125–130.

[3] M. S. Espinoza, A. I. Pereira, J. Gonçalves, Optimization methods for hyper-redundant robots' inverse kinematics in biomedical applications, in: AIP Conference Proceedings, Vol. 1479, 2012, p. 818.

[4] M. Tham, Writing research theses or dissertations, university of Newcastle Upon Tyne (May 2001).
URL `http://lorien.ncl.ac.uk/ming/dept/Tips/writing/thesis/thesis-intro.htm`

About the Author

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.