

Matematika

Dominik Doleel & Honza Romanovský

Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše

10. září 2024

Email: dominik.dolezel@email.cz

Obsah

1	Základní pojmy z teorie množin	1
	About the Author	11

Kapitola 1

Základní pojmy z teorie množin

Definice 1. **Množina** je souhrn objektů, chápaný jako celek. Tyto objekty nazýváme prvky množiny.

Množina může být konečná, nekonečná nebo prázdná. Množinu lze zadat výčtem prvků nebo pomocí charakteristické vlastnosti (nap. $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$).

Definice 2. **Podmnožina** množiny A je taková množina B , že všechny její prvky patří do množiny A .

Každá neprázdná množina má dvě **nevládní podmnožiny**: množinu prázdnou a sebe sama. Všechny ostatní její podmnožiny nazýváme vlastní.

Definice 3. Množiny A a B se rovnají právě tehdy, když A je podmnožinou B a zároveň B je podmnožinou A .

Definice 4. Nechť $A \subseteq B$ a $B \neq \emptyset$. Množinu všech prvků množiny B , které nepatří do množiny A , nazýváme **doplnek** (komplement) množiny A v množině B . Značíme A'_B .

Definice 5. Nechť A, B jsou dvě množiny. Jejich **sjednocení** nazveme takovou množinu, která obsahuje ty prvky, které patří alespoň do jedné z množin A, B . Zapisujeme $A \cup B$.

Definice 6. Nechť A, B jsou dvě množiny. Jejich **průnik** nazveme takovou množinu, která obsahuje ty prvky, které patří zároveň do obou těchto množin A, B . Zapisujeme $A \cap B$.

Definice 7. **Vennův diagram** je grafické schematické znázornění všech možných vztahů (sjednocení, průnik, rozdíl, doplnek) několika podmnožin univerzální množiny, je znázorňujeme pomocí uzavřených oblouků.

Definice 8. Dvě množiny jsou **disjunktní**, pokud nemají žádný společný prvek, tedy pokud je jejich průnikem prázdná množina.

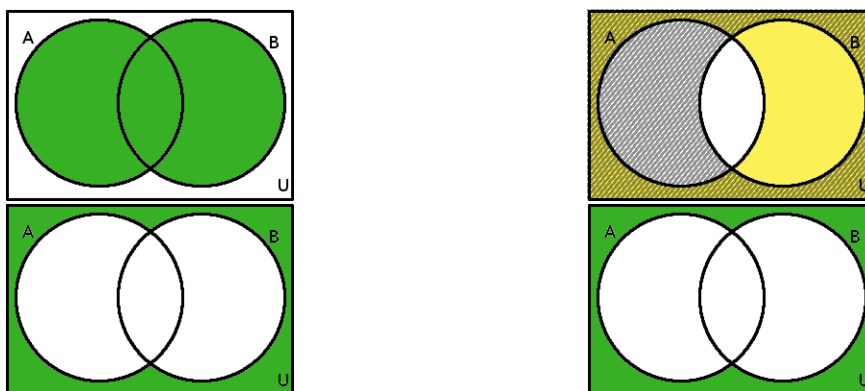
Definice 9. Nech A, B jsou dvě množiny. **Rozdíl** množin je množina, která obsahuje všechny prvky množiny A s výjimkou těch, jež jsou zároveň prvky množiny B . Zapisujeme $A - B$.

Věta 1. De Morganovy zákony jsou zákony určující vztahy mezi sjednocením, průnikem a doplňkem množiny. Nech A, B jsou dvě množiny, $'$ doplněk množiny. Potom platí:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Důkaz. Důkaz prvního vztahu:



Důkaz druhého analogicky. □

Poznámka 1 (íselné množiny). Rozlišujeme následující základní íselné množiny:

- \mathbb{N} : přirozená čísla $(1, 2, 3, \dots)$,
- \mathbb{Z} : celá čísla $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$,
- \mathbb{Q} : racionální čísla $(\frac{3}{5}, 0, \sqrt{3})$,
- \mathbb{R} : reálná čísla (e, π) ,
- \mathbb{C} : komplexní čísla $(3 + 2i)$

Iracionální čísla (\mathbb{I}) jsou doplněk racionálních v \mathbb{R} .

Definice 10. Celá čísla jsou čísla, která vyjadřují poty prvků množin, čísla k nim opaná a číslo 0.

Definice 11. Racionálním číslem nazveme takové číslo $a = \frac{k}{l}, k, l \in \mathbb{Z}$, a p, q jsou nesoudlná.

Poznámka 2. Přirozená čísla zapisujeme pomocí číslic 0–9 a chápeme je takto:

$$4503 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Kadé racionální číslo je v desítkové soustavě vyjáděno bu ukončeným desetinným rozvojem nebo neukončeným periodickým rozvojem. Iracionální číslo je vyjáděno neukončeným neperiodickým rozvojem.

Definice 12. Reálnými čísly nazýváme všechna čísla, která jsou velikostmi úseček.

Definice 13. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Pak množiny takových $x \in \mathbb{R}$, e $a \leq x \leq b$ (resp. $a < x < b$, resp. $a < x$, resp. $a \leq x < b$ atd.) nazýváme uzavřeným (resp. otevřeným, resp. neomezeným zleva otevřeným, resp. zprava uzavřeným, zleva otevřeným atd.) **intervalem**. Zapisujeme $\langle a, b \rangle$ (resp. (a, b) , resp. (a, ∞) , resp. $\langle a, b \rangle$)

Definice 14. Periodický rozvoj čísla je rozvoj, u kterého se za desetinnou čárkou donekonečna opakuje tá číslice nebo skupina číslic. čísla s takovýmto rozvojem se nazývají ryze periodická čísla, opakující se číslice nebo skupina opakujících se číslic se nazývá perioda. Zapisují se tak, e se nad opakující se skupinou napíše pruh:

$$0,333 = 0,\overline{3}$$

Definice 15. Množina komplexních čísel \mathbb{C} je množina uspořádaných reálných dvojic $[x, y]$, na kterých je definována rovnost, sítání a násobení následovně:

$$[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow a = c \wedge b = d,$$

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b][c, d] = [ac - bd, ad + bc].$$

Dvojici $[0, 1]$ označíme i a budeme ji nazývat komplexní jednotkou. Zejm pak platí, e $i^2 = -1$.

Definice 16. Pokud je uspořádaná dvojice z předchozí definice ve tvaru $[0, b]$, $b \in \mathbb{R}$, nazvěme toto číslo **ryze imaginárním**.

Příklad 1 (SÚM 169/8). Označte M množinu všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných čísl a a N všech dělitelů čísla 210, kteří jsou různí od čísla 1 a 210. Uřete, která z množin má větší počet prvků, a vypíšte všechny prvky, které mají obě množiny stejné.

$$M = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$$

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - \text{hledáme násobky všech podmnožin těchto čísel}$$

$$N = \{2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105\}$$

$$|M| = 15, |N| = 14, M \cap N = \{30, 42\}$$

Množina M má více prvků a společená jsou čísla 30 a 42.

Příklad 2 (SÚM 171/26). M je množina všech reálných čísel x , která splňují nerovnost $-2 < x < 5$, N je množina všech reálných čísel y , která splňují nerovnost $|y| < 4$. Uřete množinu $R = M \cup N$

$$a \ S = M \cap N.$$

$$R = (-4, 5), S = (-2, 4).$$

Příklad 3 (SÚM 172/29f). Znázorněte a urete výsledný interval: $(a, a + 2) \cap (a - 1, a + 1)$,
kde $a > 0$. $(a, a + 1)$

Příklad 4 (SÚM (172/33)). Je dána kružnice k se středem v bod S a poloměrem r . Množinu všech bodů uvnitř kružnice označte A . Nakreslete rovnostranný trojúhelník ESD , jeho jeden vrchol je ve středu dané kružnice a délky stran jsou rovny velikosti jejího průměru. Množinu vnitřních bodů tohoto trojúhelníka označte B . Dále sestrojte osu úhlu ESD a množinu bodů této přímky označte C . Nakreslete samostatné obrázky pro:

- $(A \cap B) \cup C$,
- $(A \cup C) \cap (B \cup C)$,
- $(A \cap B) \cup (B \cap C)$,
- $(A \cup C) \cap B$.

Příklad 5 (SÚM 173/34). Pro která x je interval:

- | | |
|--|-------------------------------|
| a. $\langle 2x, x + 3 \rangle$ částí intervalu $(2, 7)$? | $x \in (1, 3)$ |
| b. $(x, 5)$ částí intervalu $(-1, x + 1)$? | $x \in (4, 5)$ |
| c. $(x, x + 3)$ částí intervalu $\langle 5, 8 \rangle$? | $x = 5$ |
| d. $\langle x, 2x - 1 \rangle$ částí intervalu $\langle -2, 5 \rangle$? | $x \in \langle -2, 5 \rangle$ |
| e. $\langle 3x, 2x + 1 \rangle$ částí intervalu $(3, 6)$? | $x \in \{ \}$ |

Příklad 6 (SÚM 173/35). Nech $M = (a, b)$, $N = (1, 8)$, $Q = (1, 5)$. Urejte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $M \cap N = Q$. $a \in (-\infty, 1)$, $b = 5$

Příklad 7 (SÚM 173/37*). Je dán trojúhelník ABC . Uvažme množinu M všech bodů tohoto trojúhelníka, pro které platí $|AX| \geq |BX| \geq |CX|$. Pomocí velikosti stran a úhlů troj. ABC vyjádřete podmínky pro to, aby:

- | | |
|-------------------------|-------------------------------------|
| a. X byla ptiúhelník, | $\gamma > 90^\circ, \alpha < \beta$ |
| b. X je jeden bod, | $\alpha = 90^\circ$ |
| c. X je prázdná. | $\alpha > 90^\circ$ |

Příklad 8 (SÚM 174/42). Jsou dány množiny $M = \{1, 2; 3; 4\}$, $N = \{x; y; z\}$. Uvete alespo jeden příklad na zobrazení množiny

- | | |
|-----------------|--|
| a. M do N | $1, 2 \rightarrow x; 3 \rightarrow y; 4 \rightarrow y$ |
| b. N do M | $x \rightarrow 1, 2; y \rightarrow 3; z \rightarrow 3$ |
| c. M na N . | $1, 2 \rightarrow x; 3 \rightarrow y; 4 \rightarrow z$ |

Příklad 9 (SÚM 174/46). Kolik je vech zobrazení (pod)množiny $\{a, b, c, d\}$ do (na) množiny $\{1, 2\}$?

81

Příklad 10 (SÚM 106/20). Pevete na obyčejné zlomky:

- | | |
|-------------------------|---|
| a. $0, \overline{27}$ | $\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ |
| b. $0, \overline{6}$ | $\frac{2}{3}$ |
| c. $2, \overline{345}$ | $2 + \frac{345}{999} = \frac{781}{333}$ |
| d. $0, \overline{1234}$ | $\frac{1234}{9999}$ |
| e. $0, \overline{72}$ | $\frac{7}{10} + \frac{2}{90} = \frac{13}{18}$ |
| f. $0, \overline{136}$ | $\frac{1}{10} + \frac{36}{990} = \frac{3}{22}$ |
| g. $0, \overline{727}$ | $\frac{7}{10} + \frac{27}{990} = \frac{8}{11}$ |
| h. $3, \overline{3985}$ | $3 + \frac{39}{100} + \frac{85}{9900} = \frac{33646}{9900}$ |

Příklad 11 (SÚM 107/21). Provede:

- | | |
|--|---|
| a. $0, \overline{4} + 0, \overline{12}$ | $\frac{4}{9} + \frac{12}{9} = \frac{16}{9}$ |
| b. $0, \overline{7} + 0, \overline{35}$ | $\frac{112}{99}$ |
| c. $0, \overline{47} + 0, \overline{023}$ | $\frac{5470}{10989}$ |
| d. $0, \overline{47} + 0, \overline{023}$ | $\frac{493}{990}$ |
| e. $0, \overline{5354} + 0, \overline{85}$ | $1,394021 \dots$ |
| f. $2, \overline{35} - 1, \overline{231}$ | $\frac{4111}{3663}$ |
| g. $1, \overline{25} - 0, \overline{773}$ | $\frac{5261}{10989}$ |

Příklad 12 (SÚM 107/22*). Provede:

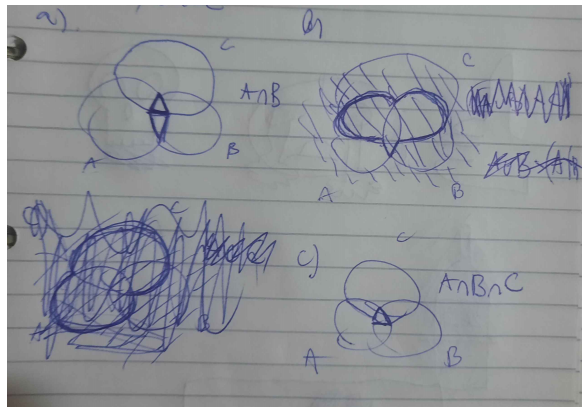
- | | |
|---|--|
| a. $1, \overline{2} \cdot 1, \overline{18}$ | $\left(1 + \frac{2}{9}\right) \left(1 + \frac{18}{99}\right) = \frac{11}{9} \cdot \frac{117}{99} = \frac{13}{9}$ |
| b. $0, \overline{32} \cdot 1, \overline{3}$ | $\frac{128}{297}$ |

Příklad 13 (SÚM 107/23*). ete rovnici:

- | | |
|---|---------|
| 1. $0, \overline{25}x + 0, \overline{31}x = 1, \overline{13}$ | $x = 2$ |
| 2. $2, \overline{64}x - 3, \overline{48} = 1, \overline{48}x$ | $x = 3$ |

Příklad 14 (SMP 140/6abc). Pomocí Vennových diagram zjednoduete zápisy množin:

- a. $(A \cap B \cap C) \cup [B \cap (A' \cup C)']$
 b. $[(A \cup B)' \cup (B \cup C)] \cap (C \cup A)$
 c. $[(A \cup B') \cap C] \cup [(B' \cup A')' \cap C]$



Obrázek 1

Příklad 15 (SÚM 109/36). Dokate, e číslo $\sqrt{5}$ je iracionální.

Dk. sporem: Nech $\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a, b) = 1$.

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$5 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$5b^2 = a^2 \Rightarrow 5 \mid a^2 \Rightarrow 5 \mid a \Rightarrow \exists k : a = 5k$$

$$5b^2 = (5k)^2$$

$$5b^2 = 25k^2$$

$$b^2 = 5k^2 \Rightarrow 5 \mid b^2 \Rightarrow 5 \mid b$$

– spor s předpokladem, e $D(a, b) = 1$

$$\sqrt{5} \in \mathbb{I}$$

Příklad 16 (SÚM 109/37). Dokate, e číslo $\sqrt{2} - 1$ je iracionální.

Dk. sporem: Nech $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a, b) = 1$.

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{a}{b}$$

$$1 - 2\sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2 - a^2}{2b^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

– spor

$$(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{I}$$

Příklad 17 (SÚM 109/38). Dokate, e číslo $2\sqrt{5}$ je iracionální.

Základní pojmy z teorie množin

Dk. sporem: Nech $2\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a, b) = 1$.

$$2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$10 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$10b^2 = a^2 \Rightarrow 10 \mid a^2 \Rightarrow 10 \mid a \Rightarrow \exists k : a = 10k$$

$$10b^2 = (10k)^2$$

$$10b^2 = 100k^2$$

$$b^2 = 10k^2 \Rightarrow 10 \mid b^2 \Rightarrow 10 \mid b$$

– spor s předpokladem, e $D(a, b) = 1$

$$2\sqrt{5} \in \mathbb{I}$$

Příklad 18 (SÚM 109/39). *Dokate, e jestlie prirodzené číslo m není druhou mocninou žádného
prirozeného čísla, potom \sqrt{m} je číslo iracionální.*

Dk. sporem: Nech $m \in \mathbb{N}, m \neq n^2 \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{m} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, D(a, b) = 1$.

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b}$$

$$m = \frac{a^2}{b^2}, m \in \mathbb{N} \Rightarrow b^2 = 1$$

$$m = a^2, a \in \mathbb{N}$$

– spor s předpokladem, e $\forall n \in \mathbb{N} : m \neq n^2$ QED

Příklad 19 (SÚM 144/301). *Dokate, e:*

a. součet dvou dvojciferných čísel pirozených, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný jedenácti:

$$S = \overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b) \Rightarrow 11 \mid S$$

b. rozdíl dvou dvojciferných čísel pirozených, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný devíti:

$$S = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b) \Rightarrow 9 \mid S$$

c. rozdíl pirozeného čísla trojciferného a čísla, které vznikne z tohoto záměnou krajních cifer, je dělitelný 99:

$$S = \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c) \Rightarrow 99 \mid S$$

Příklad 20 (SÚM 145/303). *Dokate, e ti mocniny čísla 2, jejich exponenty jsou ti po sobě*

jdoucí přirozená čísla, mají součet dělitelný sedmi:

$$S = 2^a + 2^{a+1} + 2^{a+2} = 2^a + 2^a \cdot 2^1 + 2^a \cdot 2^2 = 7 \cdot 2^a \Rightarrow 7 \mid S$$

Příklad 21 (SÚM 145/305). *Dokážte, že součet čtyř mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný temi:*

$$S = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = 3(a^3 + 3a^2 + 5a + 3) \Rightarrow 3 \mid S$$

Příklad 22 (SÚM 145/306). *Dokážte, že:*

a číslo utvořené z rozdílu třetí mocniny přirozeného čísla n a tohoto čísla je dělitelné estí:

$$S = n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Jsou to tři po sobě jdoucí čísla \Rightarrow právě 1 z nich je dělitelné temi $\Rightarrow 3 \mid S$

b je-li číslo n liché, je uvažovaný rozdíl dělitelný čísel 24:

$$S = (n - 1)n(n + 1)$$

Jsou to tři po sobě jdoucí čísla a to prostřední je liché \Rightarrow dělitelné temi, z dalších čísel je jedno dělitelné 2 a jedno dělitelné čtyřmi: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \Rightarrow 24 \mid S$

Příklad 23 (SÚM 145/307). *Dokážte, že pokud přirozené číslo x je liché, je výraz $V = x^3 + 3x^2x3$ dělitelný číslem 48:*

$$V = x^3 + 3x^2x3 = x^2(x + 3) - (x + 3) = (x^2 - 1)(x + 3) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

\Rightarrow tři po sobě jdoucí sudá čísla \Rightarrow jedno dělitelné 2, jedno 4 a jedno 6 $\Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 \Rightarrow 48 \mid V$

Příklad 24 (SÚM 145/308). *Dokážte, že výraz $V = 5x^3 + 15x^2 + 10x$ je dělitelný číslem 30 pro každé přirozené číslo x :*

$$V = 5x^3 + 15x^2 + 10x = 5x(x^2 + 3x + 2) = 5x(x + 2)(x + 1)$$

$\Rightarrow x, x + 1, x + 2$ tři po sobě jdoucí čísla \Rightarrow jedno dělitelné 3, alespo jedno dělitelné 2, 5x dělitelné 5 $\Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \Rightarrow 30 \mid V$

Příklad 25 (SÚM 145/312). *Dokážte, že pokud n je přirozené, je číslo $N = n^3 + 11n$ dělitelné estí: mod 6:*

$$1. \ n = 6k: n^3 + 11n \equiv 0^3 + 11 \cdot 0 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$$

$$2. \ n = 6k + 1: n^3 + 11n \equiv 1^3 + 11 \cdot 1 \equiv 12 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$$

$$3. \ n = 6k + 2: n^3 + 11n \equiv 2^3 + 11 \cdot 2 \equiv 30 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$$

$$4. \ n = 6k + 3: n^3 + 11n \equiv 3^3 + 11 \cdot 3 \equiv 60 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$$

$$5. \ n = 6k + 4: n^3 + 11n \equiv 4^3 + 11 \cdot 4 \equiv 108 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$$

$$6. \ n = 6k + 5: n^3 + 11n \equiv 5^3 + 11 \cdot 5 \equiv 180 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$$

$$\Rightarrow 6 \mid N \forall n \in \mathbb{N}$$

Příklad 26 (SÚM 145/315).

Reference

- [1]
- [2] M. S. Espinoza, J. Goncalves, P. Leitaο, J. L. G. Sanchez, A. Herreros, Inverse kinematics of a 10 dof modular hyper-redundant robot resorting to exhaustive and error-optimization methods: A comparative study, in: Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium (SBR-LARS), 2012 Brazilian, IEEE, 2012, pp. 125–130.
- [3] M. S. Espinoza, A. I. Pereira, J. Gonçalves, Optimization methods for hyper-redundant robots' inverse kinematics in biomedical applications, in: AIP Conference Proceedings, Vol. 1479, 2012, p. 818.
- [4] M. Tham, [Writing research theses or dissertations](#), university of Newcastle Upon Tyne (May 2001).
URL <http://lorien.ncl.ac.uk/ming/dept/Tips/writing/thesis/thesis-intro.htm>

About the Author

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.