Matematika

Dominik Doležel & Honza Romanovský

Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše
10. září 2024
Email: dominik.dolezel@email.cz

Obsah

Kapitola 1

Základní pojmy z teorie množin

Definice 1. **Množina** je sourhn objektů, chápaný jako celek. Tyto objekty nazýváme prvky množiny.

Množina může být konečná, nekonečná nebo prázdná. Množinu lze zadat výčtem prvků nebo pomocí charakteristické vlastnosti (např. $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$).

Definice 2. **Podmnožina** množiny A je taková množina B, že všechny její prvky patří do množiny A.

Každá neprázdná množina má dvě **nevlastní podmnožiny**: množinu prázdnou a sebe sama. Všechny ostatní její podmnožiny nazýváme vlastní.

Definice 3. Množiny A a B se rovnají právě tehdy, když A je podmnožinou B a zároveň B je podmnožinou A.

Definice 4. Nechť $A \subseteq B$ a $B \neq \emptyset$. Množinu všech prvků množiny B, které nepatří do množiny A, nazýváme **doplněk** (komplement) množiny A v množině B. Značíme A'_B.

Definice 5. Nechť A, B jsou dvě množiny. Jejich **sjednocením** nazveme takovou množinu, která obsahuje ty prkvy, které patří alespoň do jedné z množin A, B. Zapisujeme $A \cup B$.

Definice 6. Nechť A, B jsou dvě množiny. Jejich **průnikem** nazveme takovou množinu, která obsahuje ty prvky, které patří zároveň do obou těchto množin A, B. Zapisujeme $A \cap B$.

Definice 7. **Vennův diagram** je grafické schematické znázornění všech možných vztahů (sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk) několika podmnožin univerzální množiny, jež znázorňujeme pomocí uzavřených čar.

Definice 8. Dvě množiny jsou **disjunktní**, pokud nemají žádný společný prvek, tedy pokud je jejich průnikem prázdná množina.

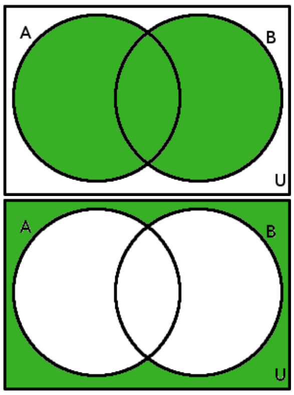
Definice 9. Nechť A, B jsou dvě množiny. **Rozdíl** množin je množina, která obsahuje všechny prvky množiny A s výjimkou těch, jež jsou zároveň prvky množiny B. Zapisujeme $A - B$.

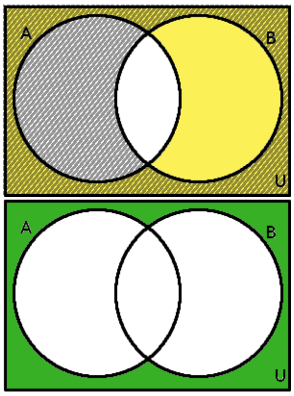
Věta 1. ***De Morganovy zákony*** *jsou zákony určující vztahy mezi sjednocením, průnikem a doplňkem množiny. Nechť A, B jsou dvě množiny, $'$ doplněk množiny. Potom platí:*

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Důkaz. Důkaz prvního vztahu:





Důkaz druhého analogicky. □

Poznámka 1 (Číselné množiny)**.** Rozlišujeme následující základní číselné množiny:

- $\mathbb{N}$: přirozená čísla $(1, 2, 3, \dots)$,
- $\mathbb{Z}$: celá čísla $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$,
- $\mathbb{Q}$: racionální čísla $(3/5, 0, \overline{3})$,
- $\mathbb{R}$: reálná čísla (e, π),
- $\mathbb{C}$: komplexní čísla $(3 + 2i)$

Iracionální čísla $(\mathbb{I})$ jsou doplněk racionálních v $\mathbb{R}$.

Definice 10. **Celá čísla** jsou čísla, která vyjadřují počty prvků množin, čísla k nim opačná a číslo 0.

Definice 11. **Racionálním číslem** nazveme takové číslo $a = \frac{k}{l}, k, l \in \mathbb{Z}$, a p, q jsou nesoudělná.

Poznámka 2. Přirozená čísla zapisujeme pomocí číslic 0–9 a chápeme je takto:

$$4503 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Každé racionální číslo je v desítkové soutavě vyjádřeno buď ukončeným desetinným rozvojem nebo neukončeným periodickým rozvojem. Iracionální číslo je vyjádřeno neukončeným neperiodickým rozvojem.

Definice 12. **Reálnými čísly** nazýváme všechna čísla, která jsou velikostmi úseček.

Definice 13. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Pak množiny takových $x \in \mathbb{R}$, že $a \leq x \leq b$ (resp. $a < x < b$, resp. $a < x$, resp. $a \leq x < b$ atd.) nazýváme uzavřeným (resp. otevřeným, resp. neomezeným zleva otevřeným, resp.zprava uzavřeným, zleva otevřeným atd.) **intervalem**. Zapisujeme $\langle a, b \rangle$ (resp. (a, b), resp. (a, ∞), resp. $\langle a, b))$

Definice 14. **Periodický rozvoj čísla** je rozvoj, u kterého se za desetinnou čárkou donekonečna opakuje táž číslice nebo skupina číslic. Čísla s takovýmto rozvojem se nazývají ryze periodická čísla, opakující se číslice nebo skupina opakujících se číslic se nazývá perioda. Zapisují se tak, že se nad opakující se skupinou napíše pruh:

$$0,333\ldots = 0,\overline{3}$$

Definice 15. Množina komplexních čísel $\mathbb{C}$ je množina uspořádaných reálných dvojic $[x, y]$, na kterých je definována rovnost, sčítání a násobení následovně:

$$[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow a = c \wedge b = d,$$

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b][c, d] = [ac - bd, ad + bc].$$

Dvojici $[0, 1]$ označíme i a budeme ji nazývat komplexní jednotkou. Zřejmě pak platí, že $i^2 = -1$.

Definice 16. Pokud je uspořádaná dvojice z předchozí definice ve tvaru $[0, b], b \in \mathbb{R}$, nazveme toto číslo **ryze imaginárním**.

Příklad 1 (SÚM 169/8). *Označme M množinu všech dvojciferných přirozených čísel delitelných šesti a N všechn dělitelů čísla 210, kteří jsou různí od čísla 1 a 210. Určete, která z množin má větší počet prvků, a vypište všechny prvky, které mají obě množiny stejné.*

$$\begin{aligned} M &= \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\} \\ 210 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ - \textit{hledáme násobky všech podmnožin těchto čísel} \\ N &= \{2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105\} \\ |M| &= 15, |N| = 14, M \cap N = \{30, 42\} \end{aligned}$$

Množina M má více prvků a společná jsou čísla 30 a 42.

Příklad 2 (SÚM 171/26). *M je množina šech reálných čísel x, která splňují nerovnosti*

$-2 < x < 5$, N je mn. všech reálných čísel y, která splňují nerovnost $|y| < 4$. Určete množinu $R = M \cup N$ a $S = M \cap N$. $R = (-4, 5), S = (-2, 4)$.

Příklad 3 (SÚM 172/29f). *Znázorněte a určete výsledný interval: $(a, a+2) \cap (a-1, a+1)$, kde $a > 0$.* $(a, a+1)$

Příklad 4 (SÚM (172/33)). *Je dána kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r. Množinu všech bodů uvnitř kružnice označte A. Nakreslete rovnostranný trojúhelník ESD, jehož jeden vrchol je ve středu dané kružnice a délky stran jsou rovny velikosti jejího průměru. Množinu vnitřních bodů tohoto trojúhelníka ozn. B. Díle sestrojte osu úhlu ESD a množinu bodů této přímky označte C. Nakreslete samostatné obrázky pro:*

- $(A \cap B) \cup C$,
- $(A \cup C) \cap (B \cup C)$,
- $(A \cap B) \cup (B \cap C)$,
- $(A \cup C) \cap B$.

Příklad 5 (SÚM 173/34). *Pro která x je interval:*

a. $\langle 2x, x+3 \rangle$ *částí intervalu* $(2, 7)$*?* $x \in (1, 3)$

b. $(x, 5)$ *částí intervalu* $(-1, x+1)$*?* $x \in (4, 5)$

c. $(x, x+3)$ *částí intervalu* $\langle 5, 8 \rangle$*?* $x = 5$

d. $\langle x, 2x-1 \rangle$ *částí intervalu* $\langle -2, 5 \rangle$*?* $x \in \langle -2, 5 \rangle$

e. $\langle 3x, 2x+1 \rangle$ *částí intervalu* $(3, 6)$*?* $x \in \{\}$

Příklad 6 (SÚM 173/35). *Nechť $M = (a, b), N = (1, 8), Q = (1, 5)$. Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $M \cap N = Q$.* $a \in (-\infty, 1\rangle, b = 5$

Příklad 7 (SÚM 173/37*). *Je dán trojúhelník ABC. Uvažujme množinu M všech bodů tohoto trojúhelníka, pro které platí $|AX| \geq |BX| \geq |CX|$. Pomocí velikosti stran a úhlů troj. ABC vyjádřete podmínky pro to, aby:*

a. X *byla pětiúhelník,* $\gamma > 90°, \alpha < \beta$

b. X *je jeden bod,* $\alpha = 90°$

c. X *je prázdná.* $\alpha > 90°$

Příklad 8 (SÚM 174/42). *Jsou dány množiny $M = \{1, 2; 3; 4\}, N = \{x; y; z\}$. Uveďte alespoň jeden příklad na zobrazení množiny*

a. M *do* N $1, 2 \to x; 3 \to y; 4 \to y$

b. N *do* M $x \to 1, 2; y \to 3; z \to 3$

c. M *na* N. $1, 2 \to x; 3 \to y; 4 \to z$

Příklad 9 (SÚM 174/46). *Kolik je všech zobrazení (pod)množiny $\{a, b, c, d\}$ do (na) množiny $\{1, 2\}$?* 81

Příklad 10 (SÚM 106/20). *Převeďte na obyčejné zlomky:*

a. $0,\overline{27}$ $\frac{27}{99}\,\frac{3}{11}$

b. $0,\overline{6}$ $\frac{2}{3}$

c. $2,\overline{345}$ $2 + \frac{345}{999} = \frac{781}{333}$

d. $0,\overline{1234}$ $\frac{1234}{9999}$

e. $0,7\overline{2}$ $\frac{7}{10} + \frac{2}{90} = \frac{13}{18}$

f. $0,1\overline{36}$ $\frac{1}{10} + \frac{36}{990} = \frac{3}{22}$

g. $0,7\overline{27}$ $\frac{7}{10} + \frac{27}{990} = \frac{8}{11}$

h. $3,39\overline{85}$ $3 + \frac{39}{100} + \frac{85}{9900} = \frac{33646}{9900}$

Příklad 11 (SÚM 107/21). *Proveďte:*

a. $0,\overline{4} + 0,\overline{12}$ $\frac{4}{9} + \frac{12}{9} = \frac{16}{9}$

b. $0,\overline{7} + 0,\overline{35}$ $\frac{112}{99}$

c. $0,\overline{47} + 0,\overline{023}$ $\frac{5470}{10989}$

d. $0,\overline{47} + 0,0\overline{23}$ $\frac{493}{990}$

e. $0,5\overline{354} + 0,\overline{85}$ $1,394021\ldots$

f. $2,\overline{35} - 1,\overline{231}$ $\frac{4111}{3663}$

g. $1,\overline{25} - 0,\overline{773}$ $\frac{5261}{10989}$

Příklad 12 (SÚM 107/22*). *Proveďte:*

a. $1,\overline{2} \cdot 1,\overline{18}$ $\left(1 + \frac{2}{9}\right)\left(1 + \frac{18}{99}\right) = \frac{11}{9} \cdot \frac{117}{99} = \frac{13}{9}$

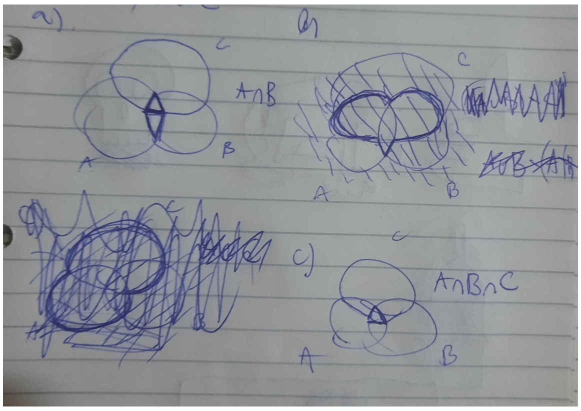
b. $0,\overline{32} \cdot 1,\overline{3}$ $\frac{128}{297}$

Příklad 13 (SÚM 107/23*). *Řešte rovnici:*

1. $0,\overline{25}x + 0,\overline{31}x = 1,\overline{13}$ $x = 2$
2. $2,\overline{64}x - 3,\overline{48} = 1,\overline{48}x$ $x = 3$

Příklad 14 (SMP 140/6abc). *Pomocí Vennových diagramů zjednodušte zápisy množin:*

a. $(A \cap B \cap C) \cup [B \cap (A' \cup C)']$
b. $[(A \cup B)' \cup (B \cup C)] \cap (C \cup A)$
c. $[(A \cup B') \cap C] \cup [(B' \cup A')' \cap C]$



Obrázek 1

Příklad 15 (SÚM 109/36)**.** *Dokažte, že číslo $\sqrt{5}$ je iracionální.*

Dk. sporem: Nechť $\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a, b) = 1.$

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$5 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$5b^2 = a^2 \Rightarrow 5 \mid a^2 \Rightarrow 5 \mid a \Rightarrow \exists k : a = 5k$$

$$5b^2 = (5k)^2$$

$$5b^2 = 25k^2$$

$$b^2 = 5k^2 \Rightarrow 5 \mid b^2 \Rightarrow 5 \mid b$$

– spor s předpokladem, že $D(a, b) = 1$

$$\sqrt{5} \in \mathbb{I}$$

Příklad 16 (SÚM 109/37)**.** *Dokažte, že číslo $\sqrt{2} - 1$ je iracionální.*

Dk. sporem: Nechť $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a, b) = 1.$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{a}{b}$$

$$1 - 2\sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2 - a^2}{2b^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{(2)} \in \mathbb{Q}$$

– spor

$$(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{I}$$

Příklad 17 (SÚM 109/38)**.** *Dokažte, že číslo $2\sqrt{5}$ je iracionální.*

Dk. sporem: Nechť $2\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, D(a,b) = 1.$

$$2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$10 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$10b^2 = a^2 \Rightarrow 10 \mid a^2 \Rightarrow 10 \mid a \Rightarrow \exists k : a = 10k$$

$$10b^2 = (10k)^2$$

$$10b^2 = 100k^2$$

$$b^2 = 10k^2 \Rightarrow 10 \mid b^2 \Rightarrow 10 \mid b$$

– spor s předpokladem, že $D(a,b) = 1$

$$2\sqrt{5} \in \mathbb{I}$$

Příklad 18 (SÚM 109/39)**.** *Dokažte, že jestliže přirozené číslo* m *není druhou mocninou žádného přirozeného čísla, potom* $\sqrt{m}$ *je číslo iracionální.*

Dk. sporem: Nechť $m \in \mathbb{N}, m \neq n^2 \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{m} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N}, D(a,b) = 1.$

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b}$$

$$m = \frac{a^2}{b^2}, m \in \mathbb{N} \Rightarrow b^2 = 1$$

$$m = a^2, a \in \mathbb{N}$$

– spor s předpokladem, že $\forall n \in \mathbb{N} : m \neq n^2$ *QED*

Příklad 19 (SÚM 144/301)**.** *Dokažte, že:*

a. *součet dvou dvojciferných čísel přirozených, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný jedenácti:*

$$S = \overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a+b) \Rightarrow 11 \mid S$$

b. *rozdíl dvou dvojciferných čísel přirozených, která se liší jen pořadím cifer, je dělitelný devítí:*

$$S = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a-b) \Rightarrow 9 \mid S$$

c. *rozdíl přirozeného čísla trojciferného a čísla, které vznikne z tohoto záměnou krajních cifer, je dělitelný 99:*

$$S = \overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a-c) \Rightarrow 99 \mid S$$

Příklad 20 (SÚM 145/303)**.** *Dokažte, že tři mocniny čísla 2, jejichž exponenty jsou tři po* *sobě jdoucí přirozená čísla, mají součet dělitelný sedmi:*

$$S = 2^a + 2^{a+1} + 2^{a+2} = 2^a + 2^a \cdot 2^1 + 2^a \cdot 2^2 = 7 \cdot 2^a \Rightarrow 7 \mid S$$

Příklad 21 (SÚM 145/305). *Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi:*

$$S = a^3+(a+1)^3+(a+2)^3 = a^3+a^3+3a^2+3a+1+a^3+6a^2+12a+8 = 3(a^3+3a^2+5a+3) \Rightarrow 3 \mid S$$

Příklad 22 (SÚM 145/306). *Dokažte, že:*

a číslo utvořené z rozdílu třetí mociny přirozeného čísla n a tohoto čísla je dělitelné šesti:

$$S = n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Jsou to tři po sobě jdoucí čísla $\Rightarrow$ *právě 1 z nich je dělitelné třemi* $\Rightarrow 3 \mid S$

b je-li číslo n liché, je uvažovaný rozdíl dělitelný čísel 24:

$$S = (n - 1)n(n + 1)$$

Jsou to tři po sobě jdoucí čísla a to prostřední je liché $\Rightarrow$ *dělitelné třemi, z dalších čísel je jedno dělitelné 2 a jedno dělitelné čtyřmi:* $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \Rightarrow 24 \mid S$

Příklad 23 (SÚM 145/307). *Dokažte, že je—li přirozené číslo x liché, je výraz* $V = x^3 + 3x^{2-}x^-3$ *dělitelný číslem 48:*

$$V = x^3 + 3x^{2-}x^-3 = x^2(x + 3) - (x + 3) = (x^2 - 1)(x + 3) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

$\Rightarrow$ *tři po sobě jdoucí sudá čísla* $\Rightarrow$ *jedno dělitelné 2, jedno 4 a jedno 6* $\Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 \Rightarrow 48 \mid V$

Příklad 24 (SÚM 145/308). *Dokažte, že výraz* $V = 5x^3 + 15x^2 + 10x$ *je dělitelný číslem 30 prokaždé přirozené číslo x:*

$$V = 5x^3 + 15x^2 + 10x = 5x(x^2 + 3x + 2) = 5x(x + 2)(x + 1)$$

$\Rightarrow x, x + 1, x + 2$ *tři po sobě jdoucí čísla* $\Rightarrow$ *jedno dělitelné 3, alespoň jedno dělitelné 2,* $5x$ *dělitelné 5* $\Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \Rightarrow 30 \mid V$

Příklad 25 (SÚM 145/312). *Dokažte, že je-li n číslo přirozené, je číslo* $N = n^3 + 11n$ *dělitelné šesti: mod 6:*

1. $n = 6k$: $n^3 + 11n \equiv 0^3 + 11 \cdot 0 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$
2. $n = 6k + 1$: $n^3 + 11n \equiv 1^3 + 11 \cdot 1 \equiv 12 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$
3. $n = 6k + 2$: $n^3 + 11n \equiv 2^3 + 11 \cdot 2 \equiv 30 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$

4. $n = 6k + 3$: $n^3 + 11n \equiv 3^3 + 11 \cdot 3 \equiv 60 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$

5. $n = 6k + 4$: $n^3 + 11n \equiv 4^3 + 11 \cdot 4 \equiv 108 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$

6. $n = 6k + 5$: $n^3 + 11n \equiv 5^3 + 11 \cdot 5 \equiv 180 \equiv 0 \Rightarrow 6 \mid N$

$\Rightarrow 6 \mid N \forall n \in \mathbb{N}$

Příklad 26 (SÚM 145/315)**.**

Reference

[1]

[2] M. S. Espinoza, J. Goncalves, P. Leitao, J. L. G. Sanchez, A. Herreros, Inverse kinematics of a 10 dof modular hyper-redundant robot resorting to exhaustive and error-optimization methods: A comparative study, in: Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium (SBR-LARS), 2012 Brazilian, IEEE, 2012, pp. 125–130.

[3] M. S. Espinoza, A. I. Pereira, J. Gonçalves, Optimization methods for hyper-redundant robots' inverse kinematics in biomedical applications, in: AIP Conference Proceedings, Vol. 1479, 2012, p. 818.

[4] M. Tham, Writing research theses or dissertations, university of Newcastle Upon Tyne (May 2001).
URL http://lorien.ncl.ac.uk/ming/dept/Tips/writing/thesis/thesis-intro.htm

About the Author

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.