Matematika

Dominik Doležel & Honza Romanovský

Gymnázium Brno, třída Kapitána Jaroše
9. září 2024
Email: dominik.dolezel@email.cz

Obsah

Kapitola 1

Základní pojmy z teorie množin

Definice 1. **Množina** je sourhn objektů, chápaný jako celek. Tyto objekty nazýváme prvky množiny.

Množina může být konečná, nekonečná nebo prázdná. Množinu lze zadat výčtem prvků nebo pomocí charakteristické vlastnosti (např. $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$).

Definice 2. **Podmnožina** množiny A je taková množina B, že všechny její prvky patří do množiny A.

Každá neprázdná množina má dvě **nevlastní podmnožiny**: množinu prázdnou a sebe sama. Všechny ostatní její podmnožiny nazýváme nevlastní.

Definice 3. Množiny A a B se rovnají právě tehdy, když A je podmnožinou B a zároveň B je podmnožinou A.

Definice 4. Nechť $A \subseteq B$ a $B \neq \emptyset$. Množinu všech prvků mn. B, které nepatří do mn. A, nazýváme **doplněk** (komplement) množiny A v množině B. Značíme A'_B.

Definice 5. Nechť A, B jsou dvě množiny. Jejich **sjednocením** nazveme takovou množinu, která obsahuje ty prkvy, které patří alespoň do jedné z množin A, B. Zapisujeme $A \cup B$.

—- Honzo neschovávej se už píšeme

průnik mn
vennovy diag
disjunktní mn
rozdíl mn
de morganova pravidla plus dk!!

Poznámka 1 (Číselné množiny). Rozlišujeme následující základní číselné množiny:

- $\mathbb{N}$: přirozená čísla $(1, 2, 3, \dots)$,

- $\mathbb{Z}$: celá čísla $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$,
- $\mathbb{Q}$: racionální čísla $(3/5, 0, \overline{3})$,
- $\mathbb{R}$: reálná čísla (e, π),
- $\mathbb{C}$: komplexní čísla $(3 + 2i)$

Iracionální čísla ($\mathbb{I}$) jsou doplněk racionálních v $\mathbb{R}$.

Definice 6. Celá čísla jsou čísla, která vyjadřují počty prvků množin, čísla k nim opačná a číslo 0.

Definice 7. Racionálním číslem nazveme takové číslo $a = \frac{k}{l}, k, l \in \mathbb{Z}$, a p, q jsou nesoudělná.

Poznámka 2. Přirozená čísla zapisujeme pomocí číslic 0–9 a chápeme je takto:

$$4503 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Každé racionální číslo je v desítkové soutavě vyjádřeno buď nekonečným desetinným rozvojem nebo neukončeným periodickým rozvojem. Iracionální číslo je vyjádřeno neukončeným neperiodickým rozvojem.

Definice 8. Reálnými čísly nazýváme všechna čísla, která jsou velikostmi úseček.

Definice 9. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Pak množiny takových $x \in \mathbb{R}$, že $a \leq x \leq b$ (resp. $a < x < b$, resp. $a < x$, resp. $a \leq x < b$ atd.) nazýváme uzavřeným (resp. otevřeným, resp. neomezeným zleva otevřeným, resp.zprava uzavřeným, zleva otevřeným atd.) **intervalem**. Zapisujeme $\langle a, b \rangle$ (resp. (a, b), resp. (a, ∞), resp. $\langle a, b)$)

für Honza: periodický rozvoj čísel, množina komplexních čísel, imaginární čísla – něco z toho už možná je, nevim

Příklad 1 (SÚM 169/8)**.** *Označme M množinu všech dvojciferných přirozených čísel delitelných šesti a N všechn dělitelů čísla 210, kteří jsou různí od čísla 1 a 210. Určete, která z množin má větší počet prvků, a vypište všechny prvky, které mají obě množiny stejné.*

$$\begin{aligned} M &= \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\} \\ 210 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \text{ – \textit{hledáme násobky všech podmnožin těchto čísel}} \\ N &= \{2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105\} \\ |M| &= 15, |N| = 14, M \cap N = \{30, 42\} \end{aligned}$$

Množina M má více prvků a společná jsou čísla 30 a 42.

Příklad 2 (SÚM 171/26)**.** *M je množina šech reálných čísel x, která splňují nerovnosti $-2 < x < 5$, N je mn. všech reálných čísel y, která splňují nerovnost $|y| < 4$. Určete množinu*

$R = M \cup N$ a $S = M \cap N$. $R = (-4, 5), S = (-2, 4)$.

Příklad 3 (SÚM 172/29f). *Znázorněte a určete výsledný interval: $(a, a+2) \cap (a-1, a+1)$, kde $a > 0$.* $(a, a+1)$

Příklad 4 (SÚM (172/33)). *Je dána kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r. Množinu všech bodů uvnitř kružnice označte A. Nakreslete rovnostranný trojúhelník ESD, jehož jeden vrchol je ve středu dané kružnice a délky stran jsou rovny velikosti jejího průměru. Množinu vnitřních bodů tohoto trojúhelníka ozn. B. Díle sestrojte osu úhlu ESD a množinu bodů této přímky označte C. Nakreslete samostatné obrázky pro:*

- $(A \cap B) \cup C$,
- $(A \cup C) \cap (B \cup C)$,
- $(A \cap B) \cup (B \cap C)$,
- $(A \cup C) \cap B$.

Příklad 5 (SÚM 173/34). *Pro která x je interval:*

a. $\langle 2x, x+3 \rangle$ *částí intervalu* $(2, 7)$? $x \in (1, 3)$

b. $(x, 5)$ *částí intervalu* $(-1, x+1)$? $x \in (4, 5)$

c. $(x, x+3)$ *částí intervalu* $\langle 5, 8 \rangle$? $x = 5$

d. $\langle x, 2x-1 \rangle$ *částí intervalu* $\langle -2, 5 \rangle$? $x \in \langle -2, 5 \rangle$

e. $\langle 3x, 2x+1 \rangle$ *částí intervalu* $(3, 6)$? $x \in \{\}$

Příklad 6 (SÚM 173/35). *Nechť $M = (a, b), N = (1, 8), Q = (1, 5)$. Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $M \cap N = Q$.* $a \in (-\infty, 1\rangle, b = 5$

Příklad 7 (SÚM 173/37*). *Je dán trojúhelník ABC. Uvažujme množinu M všech bodů tohoto trojúhelníka, pro které platí $|AX| \geq |BX| \geq |CX|$. Pomocí velikosti stran a úhlů troj. ABC vyjádřete podmínky pro to, aby:*

a. X *byla pětiúhelník,* $\gamma > 90°, \alpha < \beta$

b. X *je jeden bod,* $\alpha = 90°$

c. X *je prázdná.* $\alpha > 90°$

Příklad 8 (SÚM 174/42). *Jsou dány množiny $M = \{1, 2; 3; 4\}, N = \{x; y; z\}$. Uveďte alespoň jeden příklad na zobrazení množiny*

a. M *do* N $1, 2 \to x, 3 \to y, 4 \to y$

b. N *do* M $x \to 1, 2, y \to 3, z \to 3$

c. M *na* N. $1, 2 \to x, 3 \to y, 4 \to z$

Příklad 9 (SÚM 174/46). *Kolik je všech zobrazení (pod)množiny $\{a, b, c, d\}$ do (na) množiny $\{1, 2\}$?* 81

Příklad 10 (SÚM 106/20). *Převeďte na obyčejné zlomky:*

a. $0,\overline{27}$ $\frac{27}{99}\,\frac{3}{11}$

b. $0,\overline{6}$ $\frac{2}{3}$

c. $2,\overline{345}$ $2 + \frac{345}{999} = \frac{781}{333}$

d. $0,\overline{1234}$ $\frac{1234}{9999}$

e. $0,7\overline{2}$ $\frac{7}{10} + \frac{2}{90} = \frac{13}{18}$

f. $0,1\overline{36}$ $\frac{1}{10} + \frac{36}{990} = \frac{3}{22}$

g. $0,7\overline{27}$ $\frac{7}{10} + \frac{27}{990} = \frac{8}{11}$

h. $3,39\overline{85}$ $3 + \frac{39}{100} + \frac{85}{9900} = \frac{33646}{9900}$

Příklad 11 (SÚM 107/21). *Proveďte:*

a. $0,\overline{4} + 0,\overline{12}$ $\frac{4}{9} + \frac{12}{9} = \frac{16}{9}$

b. $0,\overline{7} + 0,\overline{35}$ $\frac{112}{99}$

c. $0,\overline{47} + 0,\overline{023}$ $\frac{5470}{10989}$

d. $0,\overline{47} + 0,0\overline{23}$ $\frac{493}{990}$

e. $0,5\overline{354} + 0,\overline{85}$ $1,394021\ldots$

f. $2,\overline{35} - 1,\overline{231}$ $\frac{4111}{3663}$

g. $1,\overline{25} - 0,\overline{773}$ $\frac{5261}{10989}$

Příklad 12 (SÚM 107/22*). *Proveďte:*

a. $1,\overline{2} \cdot 1,\overline{18}$ $\left(1 + \frac{2}{9}\right)\left(1 + \frac{18}{99}\right) = \frac{11}{9} \cdot \frac{117}{99} = \frac{13}{9}$

b. $0,\overline{32} \cdot 1,\overline{3}$ $\frac{128}{297}$

Příklad 13 (SÚM 107/23*). *Řešte rovnici:*

1. $0,\overline{25}x + 0,\overline{31}x = 1,\overline{13}$ $x = 2$

2. $2,\overline{64}x - 3,\overline{48} = 1,\overline{48}$ $x = 3$

končím ruším nesleduju tě

About the Author

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.