Úvod do teorie grup

Zápisky z přednášky doc. Mgr. Jana Šarocha. Ph.D.

Dominik Doležel

Úvodní informace

- skripta: DRÁPAL, Aleš. *Teorie grup: základní aspekty.* Praha: Karolinum, 2000.
- email: saroch@karlin.mff.cuni.cz

Značení

Množinou přirozených čísel rozumíme množinu $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, pak je $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zobrazení skládáme zprava doleva, tj. jsou-li $f : A \to B$, $g : B \to C$ dvě zobrazení, pak $g \circ f = gf : A \to C$, tj. pro $a \in A$ je $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Identické zobrazení z A do A značíme id_A nebo $\mathtt{1}_A$.

Kapitola 1

Operátorové grupy

Definice 1. Ať Ω je množina. Množina G spolu s:

(*i*) binární operací $\cdot : G \times G \to G$ (zapisujeme infixem[1]),

(*ii*) unární operací $^{-1} : G \to G$ (zapisujeme postfixem[2]),

(*iii*) nulární operací, tj. konstantou $\mathtt{1} \in G$,

(*iv*) unárními operacemi $\omega \in \Omega : G \to G$ (zapisované prefixem[3])

se nazývá **Ω-grupou**, pokud:

(*i*) $\cdot$ je asociativní, tj. $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,

(*ii*) $\mathtt{1}$ je **neutrální prvek** vzhledem k operaci $\cdot$, tj. $\forall a \in G : a \cdot \mathtt{1} = \mathtt{1} \cdot a = a$,

(*iii*) $\forall a \in G$ je a^{-1} **inverzní prvek** k a, tj. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \mathtt{1}$,

(*iv*) $\forall \omega \in \Omega$ je ω **slučitelná s** operací $\cdot$, tj. $\forall a, b \in G : \omega(a \cdot b) = \omega(a) \cdot \omega(b)$.

Poznámka 1.

i. Je-li $\Omega = \emptyset$, pak místo o Ω-grupě hovoříme jen o **grupě**.

ii. Pro všechna $a, b, c \in G$ platí:

$$(a \cdot b = a \cdot c \implies b = c) \wedge (b \cdot a = c \cdot a \implies b = c).$$

Dokážeme aplikací $a^{-1} \cdot$:

$$\begin{aligned} a^{-1} \cdot (a \cdot b) &= a^{-1} \cdot (a \cdot c) \\ (a^{-1} \cdot a) \cdot b &= (a^{-1} \cdot a) \cdot c \\ \mathtt{1} \cdot b &= \mathtt{1} \cdot c. \end{aligned}$$

[1] mezi argumenty
[2] za argumentem
[3] před argumentem, tady $\omega(\ \ )$

iii. Z předchozího plyne $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$, neboť

$$a^{-1} \cdot \left(a^{-1}\right)^{-1} = a^{-1} \cdot a \implies a = \left(a^{-1}\right)^{-1}.$$

iv. Inverzní k $a \in G$ je právě jeden prvek, a sice a^{-1}. neutrální prvek vzhledem k operaci $\cdot$ je právě jeden, a sice $\mathtt{1}$. (Sporem předpokládejme, že existuje i $\mathtt{1}' \neq \mathtt{1}$, ale zároveň $a \cdot \mathtt{1} = a \cdot \mathtt{1}' \implies \mathtt{1} = \mathtt{1}'$, což je spor.)

v. Symbol $\cdot$ se často nepíše.

Definice 2. Ať G je Ω-grupa. **Řádem** Ω-grupy G rozumíme mohutnost množiny G, značíme $|G|$ nebo $\operatorname{ord} G$.

Definice 3. Buďte G, H Ω-grupy, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že f je **homomorfismus** Ω-grup G, H, jestliže

(*i*) $\forall a, b \in G : f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ a

(*ii*) $\forall a, b \in G, \forall \omega in \Omega : f(\omega(a)) = \omega(f(a))$.

Lemma 1. *Je-li $f : G \to H$ homomorfismus Ω-grup, pak $f(\mathtt{1}) = \mathtt{1}$ a $\forall a \in G : f\left(a^{-1}\right) = (f(a))^{-1}$.*

Důkaz. $\square$