

# Newton-Verfahren

Dominik Eisele

Werner-Siemens-Schule

8. Januar 2017

# Inhalt

Allgemeine Informationen

Graphische Herleitung

Berechnung

Anwendung

Quellen

# Geschichte

- wird auch Newton-Raphson-Verfahren genannt
- benannt nach Sir Isaac Newton (1643 - 1727) und Joseph Raphson (1648 - 1715)
- Raphson veröffentlicht vor Newton das Newton-Raphson-Verfahren speziell im Bezug auf das Lösen von Gleichungen und Wurzeln
- veröffentlicht 1736 in „Methodus fluxionum et serierum infinitarum“

# Ziel des Newton-Verfahrens

- Annäherung an die Nullstellen, über eine Linearisierung der Funktion an geeigneten Stellen
- Lösung von allen nichtlinearen Gleichungen und Gleichungssystemen
- Lösung von Gleichungen in der Form:  $f(x) = 0$
- kommt immer dann zum Einsatz, wenn die Gleichung nicht durch die bekannten Methoden lösbar ist, wie z. B. Mitternachtsformel, quadratische Ergänzung, ...

# Vorgehen bei Konstruktion

- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen

# Vorgehen bei Konstruktion

- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen
- den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen

## Vorgehen bei Konstruktion

- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen
- den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen
- dieser Schnittpunkt kann nun als Startwert angenommen werden

# Vorgehen bei Konstruktion

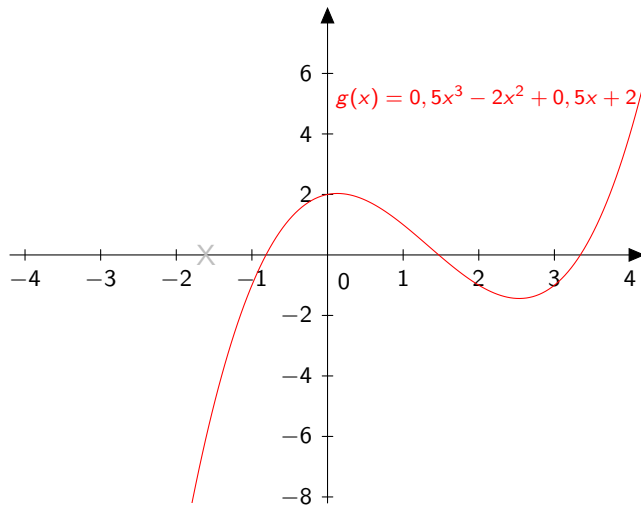
- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen
- den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen
- dieser Schnittpunkt kann nun als Startwert angenommen werden
- die Schritte so oft wiederholen bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat



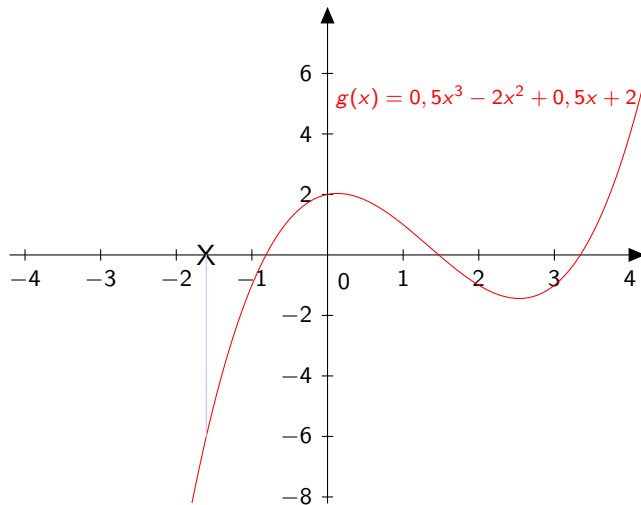
## Vorgehen bei Konstruktion

- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen
- den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen
- dieser Schnittpunkt kann nun als Startwert angenommen werden
- die Schritte so oft wiederholen bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat

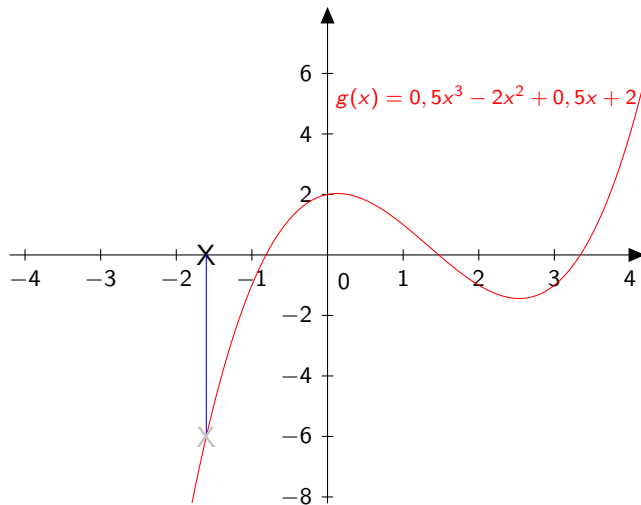
# Graphische Herleitung



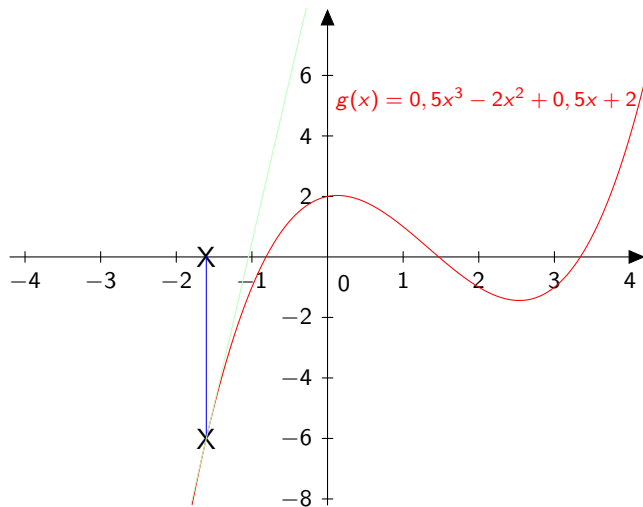
# Graphische Herleitung



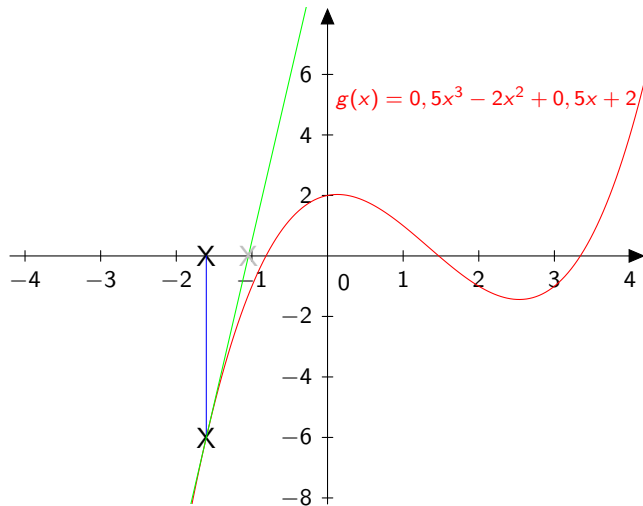
# Graphische Herleitung



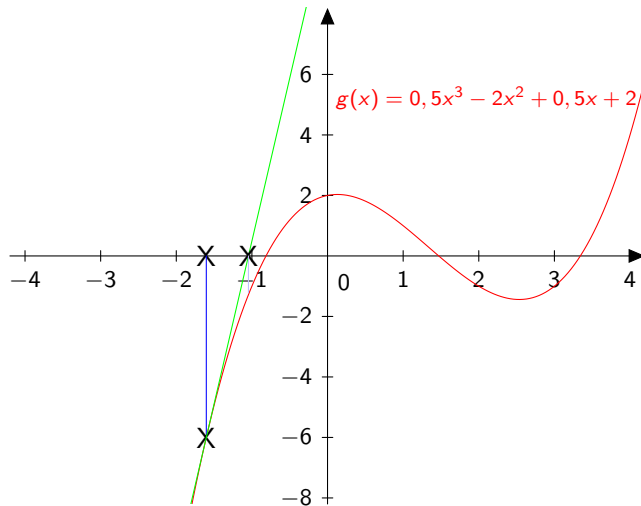
# Graphische Herleitung



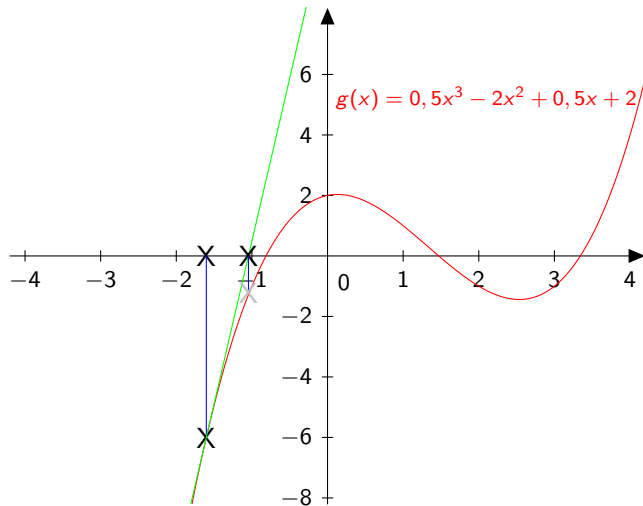
# Graphische Herleitung



# Graphische Herleitung

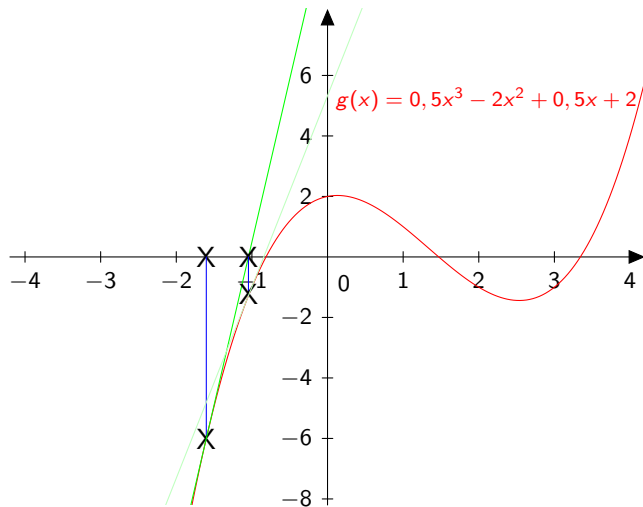


# Graphische Herleitung

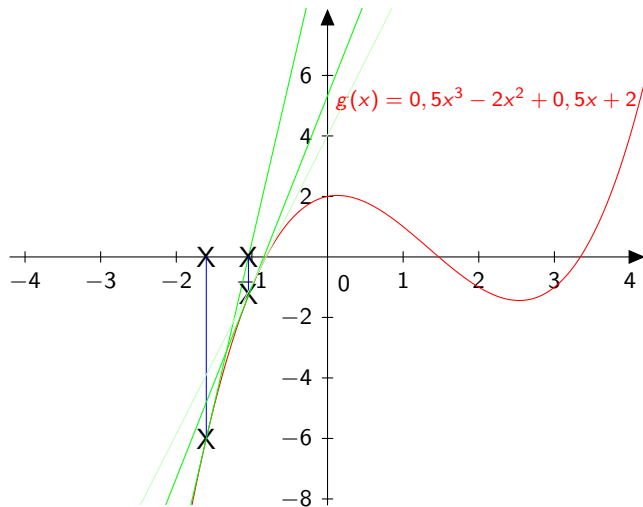




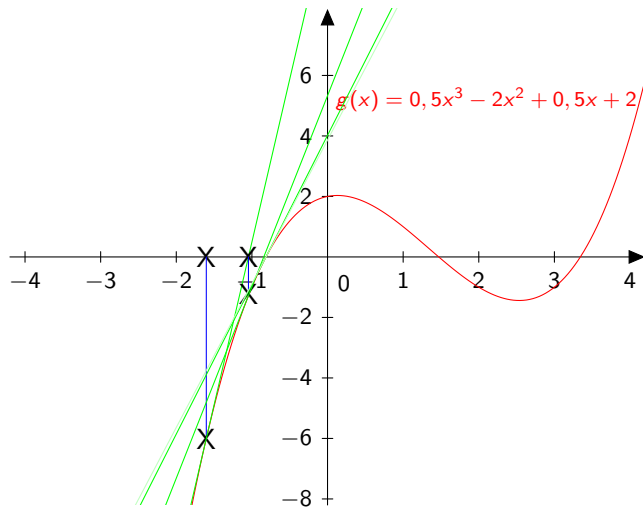
# Graphische Herleitung



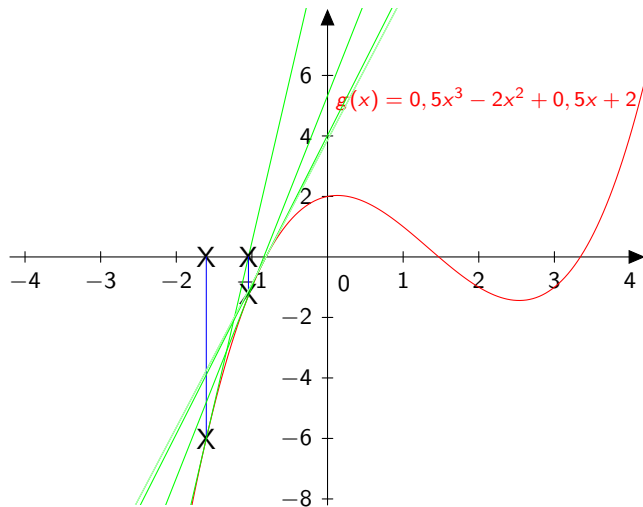
# Graphische Herleitung



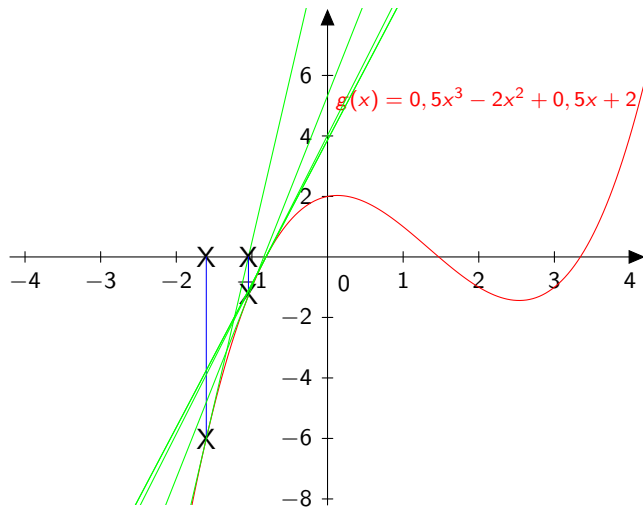
# Graphische Herleitung



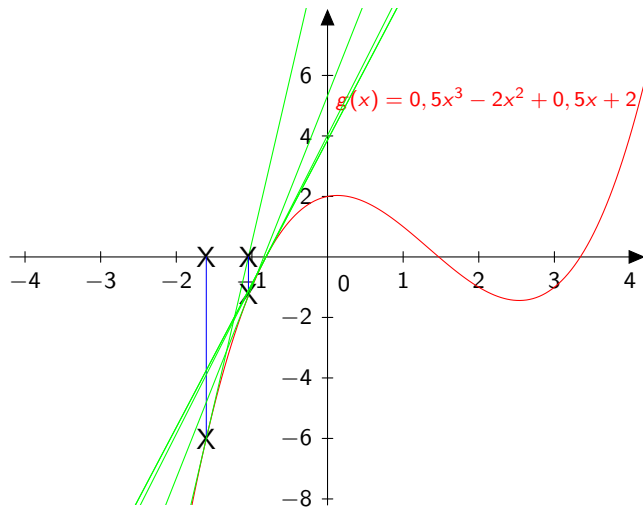
# Graphische Herleitung



# Graphische Herleitung



# Graphische Herleitung



# Abszissenwert

Berechnungsschritt	Abszissenwert
0	-1,6029
1	-1,0456
2	-0,8430
3	-0,8141
4	-0,8136
5	-0,8136
Berechneter Wert	-0,8136

# Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:



# Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion  $f(x)$  ableiten

# Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion  $f(x)$  ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen ( $x_0$ )

# Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion  $f(x)$  ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen ( $x_0$ )
- diesen für  $x_n$  einsetzen und  $x_1$  berechnen

# Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion  $f(x)$  ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen ( $x_0$ )
- diesen für  $x_n$  einsetzen und  $x_1$  berechnen
- für  $x_n$  nun  $x_1$  wählen und  $x_2$  berechnen

# Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion  $f(x)$  ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen ( $x_0$ )
- diesen für  $x_n$  einsetzen und  $x_1$  berechnen
- für  $x_n$  nun  $x_1$  wählen und  $x_2$  berechnen
- dieses Verfahren nun so lange wiederholen bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat

# Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion  $f(x)$  ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen ( $x_0$ )
- diesen für  $x_n$  einsetzen und  $x_1$  berechnen
- für  $x_n$  nun  $x_1$  wählen und  $x_2$  berechnen
- dieses Verfahren nun so lange wiederholen bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat

## Beispiel zur Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel  
 $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$ :

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$

## Beispiel zur Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel

$f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$ :

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert  $x_0 = -1$



## Beispiel zur Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel

$f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$ :

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert  $x_0 = -1$
- $x_1 = (-1) - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = (-1) - \frac{0,5 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 0,5 \cdot (-1) + 2}{1,5 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 0,5} \approx (-0,833)$

## Beispiel zur Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel

$f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$ :

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert  $x_0 = -1$
- $x_1 = (-1) - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = (-1) - \frac{0,5 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 0,5 \cdot (-1) + 2}{1,5 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 0,5} \approx (-0,833)$
- $x_2 = (-0,833) - \frac{0,5 \cdot (-0,833)^3 - 2 \cdot (-0,833)^2 + 0,5 \cdot (-0,833) + 2}{1,5 \cdot (-0,833)^2 - 4 \cdot (-0,833) + 0,5} \approx (-0,814)$

## Beispiel zur Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel

$f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$ :

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert  $x_0 = -1$
- $x_1 = (-1) - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = (-1) - \frac{0,5 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 0,5 \cdot (-1) + 2}{1,5 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 0,5} \approx (-0,833)$
- $x_2 = (-0,833) - \frac{0,5 \cdot (-0,833)^3 - 2 \cdot (-0,833)^2 + 0,5 \cdot (-0,833) + 2}{1,5 \cdot (-0,833)^2 - 4 \cdot (-0,833) + 0,5} \approx (-0,814)$
- $x_3 = (-0,814) - \frac{0,5 \cdot (-0,814)^3 - 2 \cdot (-0,814)^2 + 0,5 \cdot (-0,814) + 2}{1,5 \cdot (-0,814)^2 - 4 \cdot (-0,814) + 0,5} \approx (-0,814)$

## Beispiel zur Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel

$f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$ :

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert  $x_0 = -1$
- $x_1 = (-1) - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = (-1) - \frac{0,5 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 0,5 \cdot (-1) + 2}{1,5 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 0,5} \approx (-0,833)$
- $x_2 = (-0,833) - \frac{0,5 \cdot (-0,833)^3 - 2 \cdot (-0,833)^2 + 0,5 \cdot (-0,833) + 2}{1,5 \cdot (-0,833)^2 - 4 \cdot (-0,833) + 0,5} \approx (-0,814)$
- $x_3 = (-0,814) - \frac{0,5 \cdot (-0,814)^3 - 2 \cdot (-0,814)^2 + 0,5 \cdot (-0,814) + 2}{1,5 \cdot (-0,814)^2 - 4 \cdot (-0,814) + 0,5} \approx (-0,814)$

# Herleitung der Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung

# Herleitung der Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung:  $y = mx + b$

# Herleitung der Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung:  $y = mx + b$
- Berührungspunkt  $P$  der Funktion mit der Tangente:  $P(x_0|f(x_0))$

# Herleitung der Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung:  $y = mx + b$
- Berührungspunkt  $P$  der Funktion mit der Tangente:  $P(x_0|f(x_0))$
- Steigung an der Stelle  $x_0$ :  $f'(x_0)$
- Einsetzen in Geradengleichung:  $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$   
 $\rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$



# Herleitung der Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung:  $y = mx + b$
- Berührungspunkt  $P$  der Funktion mit der Tangente:  $P(x_0|f(x_0))$
- Steigung an der Stelle  $x_0$ :  $f'(x_0)$
- Einsetzen in Geradengleichung:  $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$   
 $\rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Einsetzen in Geradengleichung:  
 $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

# Herleitung der Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung:  $y = mx + b$
- Berührungspunkt  $P$  der Funktion mit der Tangente:  $P(x_0|f(x_0))$
- Steigung an der Stelle  $x_0$ :  $f'(x_0)$
- Einsetzen in Geradengleichung:  $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$   
 $\rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Einsetzen in Geradengleichung:  
 $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Nullstelle bestimmen:  $0 = f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

$$\rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

# Herleitung der Iterationsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung:  $y = mx + b$
- Berührungspunkt  $P$  der Funktion mit der Tangente:  $P(x_0|f(x_0))$
- Steigung an der Stelle  $x_0$ :  $f'(x_0)$
- Einsetzen in Geradengleichung:  $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$   
 $\rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Einsetzen in Geradengleichung:  
 $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Nullstelle bestimmen:  $0 = f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

$$\rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



# Quellen

- [hs-esslingen.de/fileadmin/medien/mitarbeiter/koch/numerische\\_methoden\\_skript.pdf](https://hs-esslingen.de/fileadmin/medien/mitarbeiter/koch/numerische_methoden_skript.pdf) (Abgerufen: 08.01.2017, 02:10 Uhr)
- [de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren](https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren) (Abgerufen: 08.01.2017, 02:10 Uhr)
- 
- 
-