Newton-Verfahren

Dominik Eisele

Werner-Siemens-Schule

9. Januar 2017

Inhalt

Geschichte

- wird auch Newton-Raphson-Verfahren genannt
- benannt nach Sir Isaac Newton (1643 - 1727) und Joseph Raphson (1648 - 1715)
- Raphson veröffentlicht vor Newton das Newton-Raphson-Verfahren speziell im Bezug auf das Lösen von Gleichungen und Wurzeln
- veröffentlicht 1736 in „Methodus fluxionum et serierum infinitarum“

Ziel des Newton-Verfahrens

- Annäherung an die Nullstellen, über eine Linearisierung der Funktion an geeigneten Stellen
- Lösung von allen nichtlinearen Gleichungen und Gleichungssystemen
- Lösung von Gleichungen in der Form: $f(x) = 0$
- kommt oft dann zum Einsatz, wenn die Gleichung nicht durch die bekannten Methoden lösbar ist, wie z. B. Mitternachtsformel, quadratische Ergänzung, ...

Vorgehen bei Konstruktion

- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen

Vorgehen bei Konstruktion

- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen
- den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen

Vorgehen bei Konstruktion

- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen
- den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen
- dieser Schnittpunkt kann nun als Startwert angenommen werden

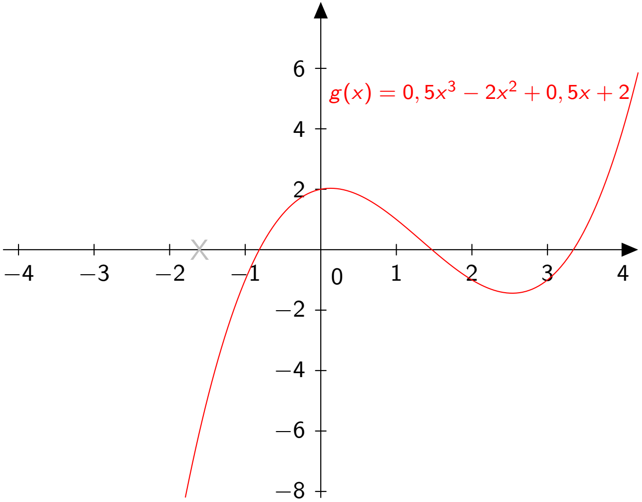
Vorgehen bei Konstruktion

- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen
- den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen
- dieser Schnittpunkt kann nun als Startwert angenommen werden
- die Schritte so oft wiederholen bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat

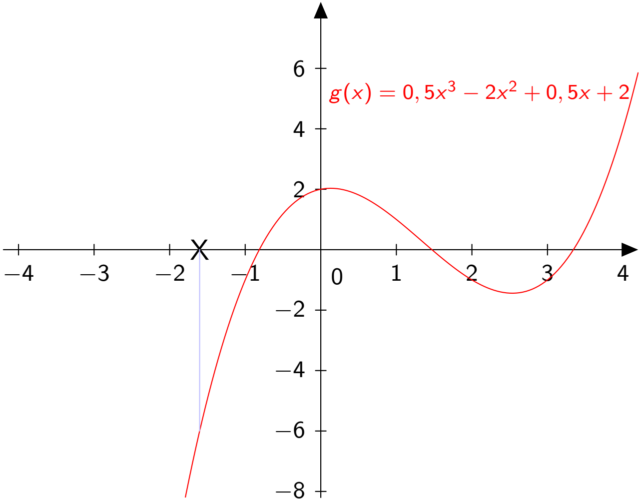
Vorgehen bei Konstruktion

- eine beliebige Abszisse als Startwert wählen, daraus den Funktionswert berechnen
- an die berechnete Stelle des Graphens eine Tangente anlegen
- den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen
- dieser Schnittpunkt kann nun als Startwert angenommen werden
- die Schritte so oft wiederholen bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat

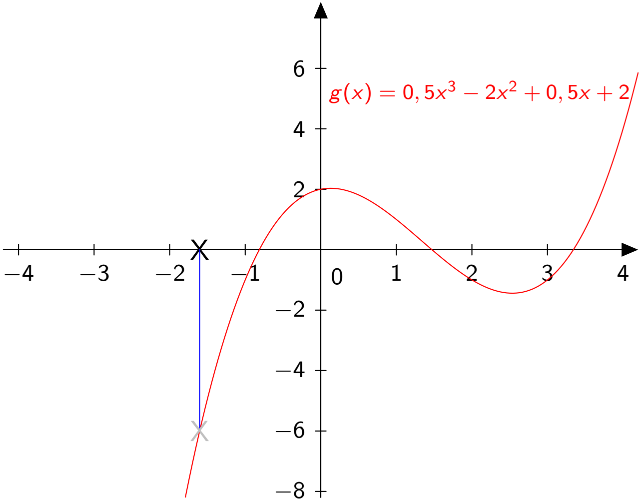
Graphische Herleitung



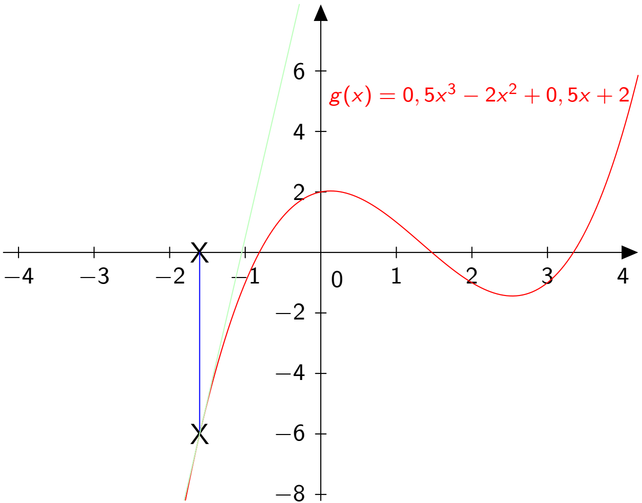
Graphische Herleitung



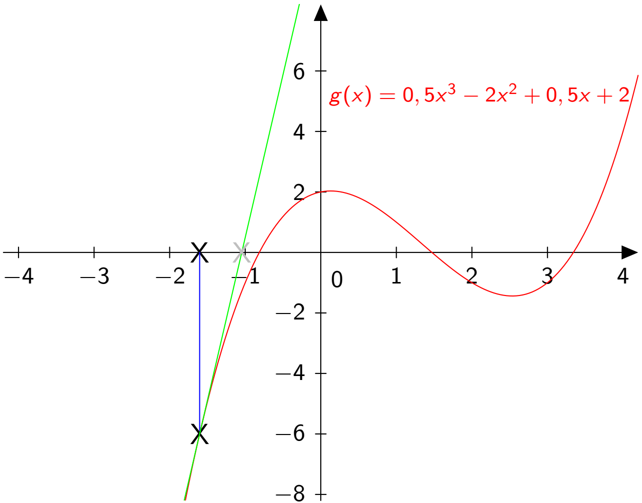
Graphische Herleitung



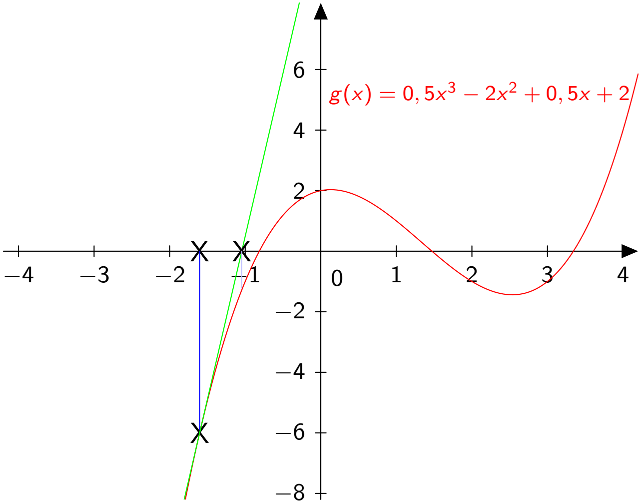
Graphische Herleitung



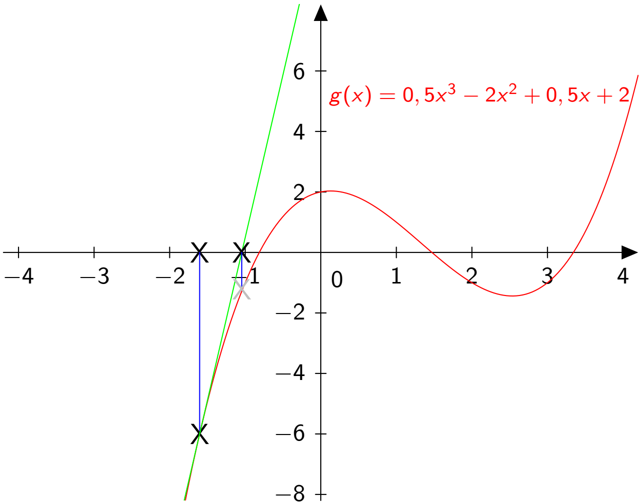
Graphische Herleitung



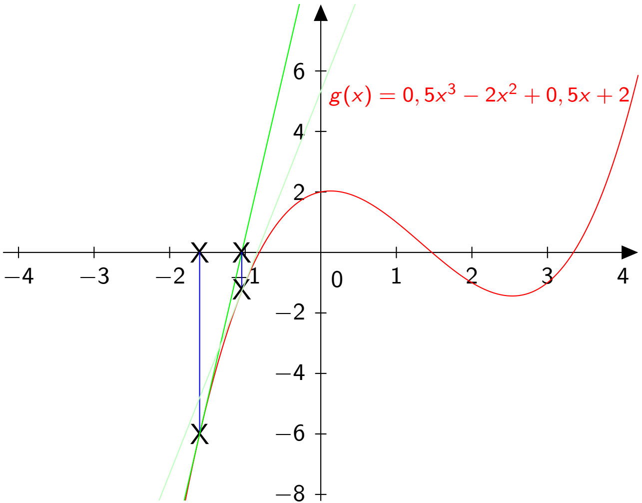
Graphische Herleitung



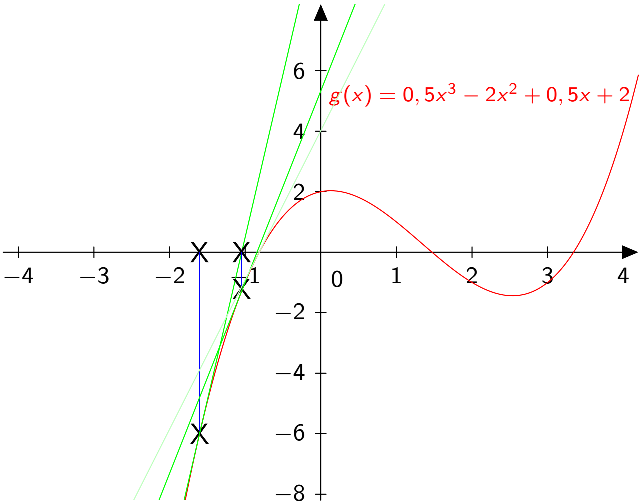
Graphische Herleitung



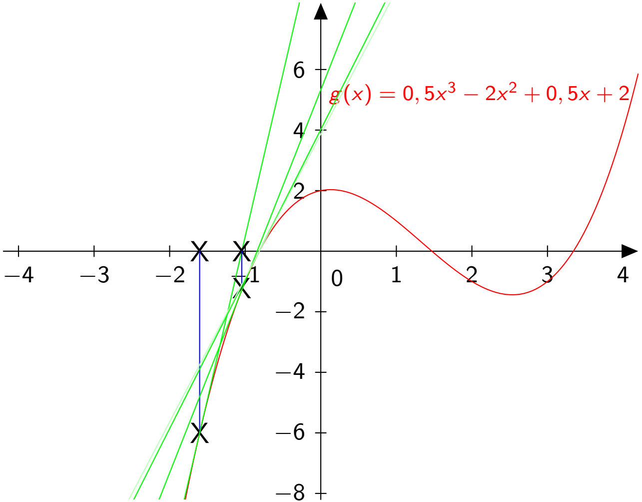
Graphische Herleitung



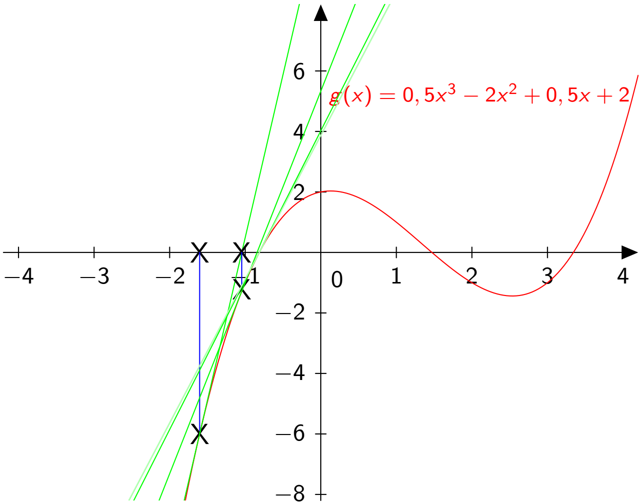
Graphische Herleitung



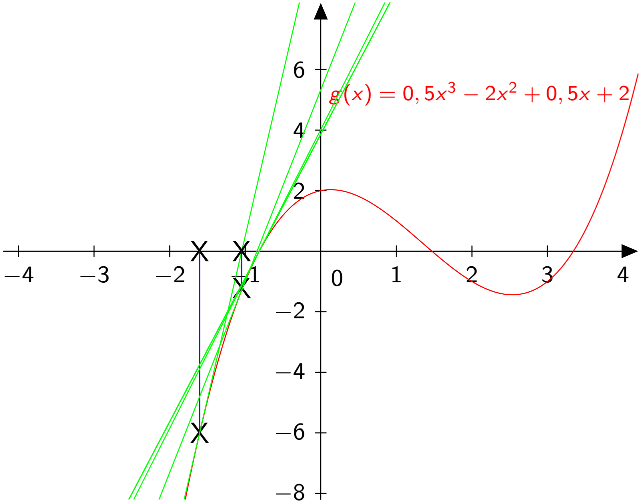
Graphische Herleitung



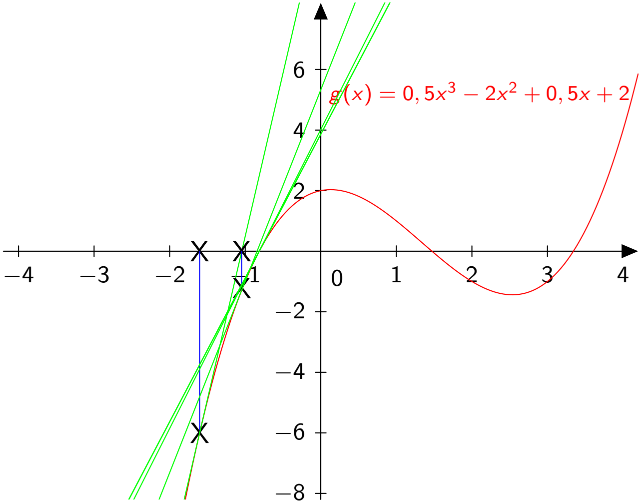
Graphische Herleitung



Graphische Herleitung



Graphische Herleitung



Abszissenwert

Berechnungsschritt	Abszissenwert
0	-1,6029
1	-1,0456
2	-0,8430
3	-0,8141
4	-0,8136
5	-0,8136
Berechneter Wert	-0,8136

Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion $f(x)$ ableiten

Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion $f(x)$ ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen (x_0)

Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion $f(x)$ ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen (x_0)
- diesen für x_n einsetzen und x_1 berechnen

Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion $f(x)$ ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen (x_0)
- diesen für x_n einsetzen und x_1 berechnen
- für x_n nun x_1 wählen und x_2 berechnen

Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion $f(x)$ ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen (x_0)
- diesen für x_n einsetzen und x_1 berechnen
- für x_n nun x_1 wählen und x_2 berechnen
- dieses Verfahren nun so lange wiederholen bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat

Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen:

- Funktion $f(x)$ ableiten
- geeigneten Näherungswert als Startwert wählen (x_0)
- diesen für x_n einsetzen und x_1 berechnen
- für x_n nun x_1 wählen und x_2 berechnen
- dieses Verfahren nun so lange wiederholen bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat

Beispiel zur Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$:

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$

Beispiel zur Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$:

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert $x_0 = -1$

Beispiel zur Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$:

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert $x_0 = -1$
- $x_1 = (-1) - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = (-1) - \frac{0,5\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 0,5\cdot(-1) + 2}{1,5\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) + 0,5} \approx (-0,833)$

Beispiel zur Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$:

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert $x_0 = -1$
- $x_1 = (-1) - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = (-1) - \frac{0,5\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2+0,5\cdot(-1)+2}{1,5\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)+0,5} \approx (-0,833)$
- $x_2 = (-0,833) - \frac{0,5\cdot(-0,833)^3-2\cdot(-0,833)^2+0,5\cdot(-0,833)+2}{1,5\cdot(-0,833)^2-4\cdot+0,5} \approx (-0,814)$

Beispiel zur Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$:

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert $x_0 = -1$
- $x_1 = (-1) - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = (-1) - \frac{0,5\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 0,5\cdot(-1) + 2}{1,5\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) + 0,5} \approx (-0,833)$
- $x_2 = (-0,833) - \frac{0,5\cdot(-0,833)^3 - 2\cdot(-0,833)^2 + 0,5\cdot(-0,833) + 2}{1,5\cdot(-0,833)^2 - 4\cdot + 0,5} \approx (-0,814)$
- $x_3 = (-0,814) - \frac{0,5\cdot(-0,814)^3 - 2\cdot(-0,814)^2 + 0,5\cdot(-0,814) + 2}{1,5\cdot(-0,814)^2 - 4\cdot + 0,5} \approx (-0,814)$

Beispiel zur Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Vorgehensweise zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 0,5x + 2$:

- $f(x)' = 1,5x^2 - 4x + 0,5$
- Startwert $x_0 = -1$
- $x_1 = (-1) - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = (-1) - \frac{0{,}5\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 0{,}5\cdot(-1) + 2}{1{,}5\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) + 0{,}5} \approx (-0,833)$
- $x_2 = (-0,833) - \frac{0{,}5\cdot(-0{,}833)^3 - 2\cdot(-0{,}833)^2 + 0{,}5\cdot(-0{,}833) + 2}{1{,}5\cdot(-0{,}833)^2 - 4\cdot + 0{,}5} \approx (-0,814)$
- $x_3 = (-0,814) - \frac{0{,}5\cdot(-0{,}814)^3 - 2\cdot(-0{,}814)^2 + 0{,}5\cdot(-0{,}814) + 2}{1{,}5\cdot(-0{,}814)^2 - 4\cdot + 0{,}5} \approx (-0,814)$

Herleitung der Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung

Herleitung der Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$

Herleitung der Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$
- Berührpunkt P der Funktion mit der Tangente: $P(x_0|f(x_0))$

Herleitung der Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$
- Berührpunkt P der Funktion mit der Tangente: $P\left(x_0 | f(x_0)\right)$
- Steigung an der Stelle x_0: $f'(x_0)$
- Einsetzen in Geradengleichung: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$
  $\rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Herleitung der Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$
- Berührpunkt P der Funktion mit der Tangente: $P\left(x_0|f(x_0)\right)$
- Steigung an der Stelle x_0: $f'(x_0)$
- Einsetzen in Geradengleichung: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$
  $\rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Einsetzen in Geradengleichung:
  $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Herleitung der Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$
- Berührpunkt P der Funktion mit der Tangente: $P\left(x_0 | f(x_0)\right)$
- Steigung an der Stelle x_0: $f'(x_0)$
- Einsetzen in Geradengleichung: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$
  $\rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Einsetzen in Geradengleichung:
  $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Nullstelle bestimmen: $0 = f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
  $\rightarrow \boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$

Herleitung der Iterationsformel

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

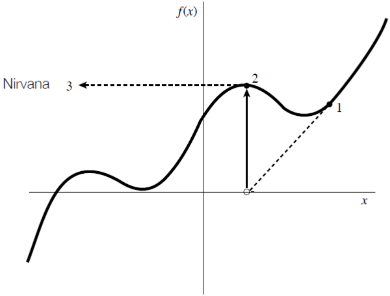
- Ziel: Nullstelle der Ableitung
- allgemeine Geradengleichung: $y = mx + b$
- Berührpunkt P der Funktion mit der Tangente: $P\left(x_0|f(x_0)\right)$
- Steigung an der Stelle x_0: $f'(x_0)$
- Einsetzen in Geradengleichung: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$
  $\rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Einsetzen in Geradengleichung:
  $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Nullstelle bestimmen: $0 = f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
  $\rightarrow \boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$

Vorteile des Newton Verfahrens

- schnelle Konvergenz möglich, da die Anzahl der signifikanten Stellen bei jeder Iteration verdoppelt wird
- nur ein Anfangswert nötig
- in der Praxis sollte eine Hybridform aus verschiedenen Verfahren zum Einsatz kommen
- Nachteile können durch bessere Wahl von x_0 vermieden werden

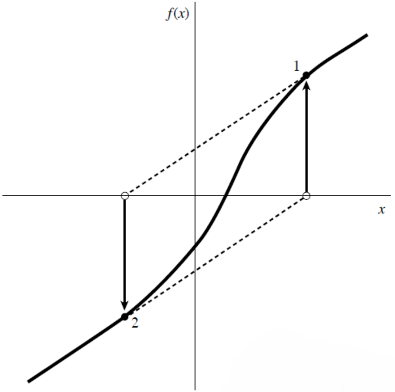
Nachteile des Newton Verfahrens

- keine Konvergenz garantiert
- bei Extrema oder in ihrer Nähe kommt es zu Problemen, wie z. B. Division durch 0 bei $f'(x) = 0$



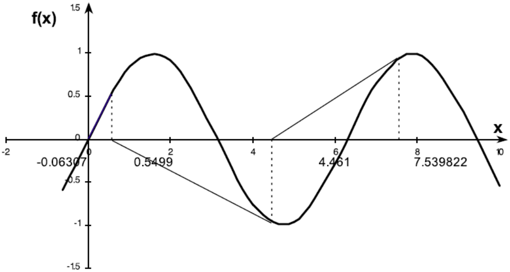
Nachteile des Newton Verfahrens

- keine Konvergenz garantiert
- es kann Vorkommen dass ein nicht konvergenter Zyklus entsteht



Nachteile des Newton Verfahrens

- springen auf eine andere Nullstelle möglich
- kann bei oszillierenden Funktionen vorkommen



Division über Kehrwertbildung

Device family	Precision	Optimization	Output latency	Logic Usage				f_{MAX}(MHz)
				Adaptive Look-Up Tables (ALUTs)	Dedicated Logic Registers (DLRs)	Adaptive Logic Modules (ALMs)	18-bit DSP	
Stratix IV	Single	Speed	33	3,593	3,351	2,500	—	313
		Area	33	1,646	2,074	1,441	—	308
	Double	Speed	61	13,867	13,143	10,196	—	292
		Area	61	5,125	7,360	4,842	—	267
Low Latency Option								
Stratix IV	Single	—	6	207	304	212	16	154
		—	14	253	638	385	16	358
	Double	—	10	714	1,077	779	44	151
		—	24	765	2,488	1,397	44	238

- beim dividieren mit Multiplizierern(rot) werden deutlich weniger Takte(gelb) benötigt
- beim dividieren mit Multiplizierern(rot) werden deutlich weniger Logikgatter(orange) benötigt
- beim dividieren ohne Multiplizierern(rot) wird eine höhere Maximalfrequenz(grün) erreicht

Kehrwertbildung

Kehrwertbildung von A:

- $\frac{1}{A} = x \rightarrow 0 = \frac{1}{x} - A$

Kehrwertbildung

Kehrwertbildung von A:

- $\frac{1}{A} = x \rightarrow 0 = \frac{1}{x} - A$
- Nullstelle von $f(x) = \frac{1}{x} - A$ gleich $\frac{1}{A}$

Kehrwertbildung

Kehrwertbildung von A:

- $\frac{1}{A} = x \rightarrow 0 = \frac{1}{x} - A$
- Nullstelle von $f(x) = \frac{1}{x} - A$ gleich $\frac{1}{A}$
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Kehrwertbildung

Kehrwertbildung von A:

- $\frac{1}{A} = x \rightarrow 0 = \frac{1}{x} - A$
- Nullstelle von $f(x) = \frac{1}{x} - A$ gleich $\frac{1}{A}$
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- daraus ergibt sich die Iterationsfunktion:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x - \frac{\frac{1}{x} - A}{-\frac{1}{x^2}} \\
F(x) &= x \cdot (2 - A \cdot x)
\end{aligned}
$$

Kehrwertbildung

Kehrwertbildung von A:

- $\frac{1}{A} = x \rightarrow 0 = \frac{1}{x} - A$
- Nullstelle von $f(x) = \frac{1}{x} - A$ gleich $\frac{1}{A}$
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- daraus ergibt sich die Iterationsfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{\frac{1}{x} - A}{-\frac{1}{x^2}} \\ F(x) &= x \cdot (2 - A \cdot x) \end{aligned}$$

- pro Rechenschritt nur zwei Multiplikationen und eine Addition nötig

Kehrwertbildung

Kehrwertbildung von A:

- $\frac{1}{A} = x \rightarrow 0 = \frac{1}{x} - A$
- Nullstelle von $f(x) = \frac{1}{x} - A$ gleich $\frac{1}{A}$
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- daraus ergibt sich die Iterationsfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{\frac{1}{x} - A}{-\frac{1}{x^2}} \\ F(x) &= x \cdot (2 - A \cdot x) \end{aligned}$$

- pro Rechenschritt nur zwei Multiplikationen und eine Addition nötig
- gut Verwendbar bei Schaltungen mit schnellen Addierern

Kehrwertbildung

Kehrwertbildung von A:

- $\frac{1}{A} = x \rightarrow 0 = \frac{1}{x} - A$
- Nullstelle von $f(x) = \frac{1}{x} - A$ gleich $\frac{1}{A}$
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- daraus ergibt sich die Iterationsfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{\frac{1}{x} - A}{-\frac{1}{x^2}} \\ F(x) &= x \cdot (2 - A \cdot x) \end{aligned}$$

- pro Rechenschritt nur zwei Multiplikationen und eine Addition nötig
- gut Verwendbar bei Schaltungen mit schnellen Addierern

Beispiel zur Kehrwertbildung

Kehrwertbildung von $A = 3$:
Startwert: $x_0 = 0,2$
$x_n = x \cdot (2 - A \cdot x)$

$$\begin{array}{lccl}
x_0 & & & = 0,2 \\
x_1 & = & 0,2 \cdot (2 - 3 \cdot 0,2) & = 0,3 \\
x_2 & = & 0,28 \cdot (2 - 3 \cdot 0,28) & = 0,3 \\
x_3 & = & 0,3248 \cdot (2 - 3 \cdot 0,3248) & = 0,333 \\
x_4 & = & 0,33311488 \cdot (2 - 3 \cdot 0,33311488) & = 0,333\,333 \\
x_5 & = & 0,3333331907 \cdot (2 - 3 \cdot 0,3333331907) & = 0,333\,333\,333\,333
\end{array}$$

Quellen

- An Accurate, High Speed Implementation of Division by Reciprocal Approximation, D.L. Fowler and J.E. Smith, Astronautics Corperation of Amerika
- Floating-Point IP Cores User Guide
- Practical Numerical Training UKNum Nullstellenbestimmung (roots), PD. Dr. C. Mordasini Max Planck Institute for Astronomy, Heidelberg
- Rechnerarithmetik Thema: Iterative Division, Quadratwurzelberechnung, Eberhard Zehendner, Friedrich-Schiller-Universität Jena
- hs-esslingen.de/fileadmin/medien/mitarbeiter/koch/numerische_methoden_skript.pdf (Abgerufen: 08.01.2017, 02:10 Uhr)
- de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren (Abgerufen: 08.01.2017, 02:10 Uhr)