

Dokumentation zur GFS „Digitales Rechenwerk“

Dominik Eisele

18. Mai 2015

Gliederung

1	Rechnen mit dualen Zahlen	2
1.1	Addition von Dualzahlen	2
1.2	Subtraktion von Dualzahlen	3
1.3	Subtraktion mit dem Zweierkomplement	4
1.4	Multiplikation von Dualzahlen	6
2	Umsetzung in eine Digitale Rechenschaltung	7
2.1	Addierer	7
2.1.1	Halbaddierer	7
2.1.2	Volladdierer	8
2.2	Subtrahierer	9
2.3	Rechenwerk	10
2.4	Multiplizierer	12

1 Rechnen mit dualen Zahlen

1.1 Addition von Dualzahlen

Die Addition von Dualzahlen verläuft im Prinzip wie die Addition von Dezimalzahlen, sobald die Addition an einem Stellenwert den maximalen Stellenwert übersteigt erfolgt ein Übertrag auf die nächste Stelle.

Rechenregeln:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ (+ 1 Übertrag)}$$

$$1 + 1 + 1 = 1 \text{ (+ 1 Übertrag)}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 111010010 = 466 \\ + \quad 001110100 = 116 \\ \ddot{U} \quad 111111 \\ \hline 1001000110 = 582 \end{array}$$

1.2 Subtraktion von Dualzahlen

Bei der Subtraktion von Dualzahlen gelten die gleichen Rechenregeln, wie bei der Subtraktion von Dezimalzahlen.

Rechenregeln:

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - 1 = 1 \text{ (+ 1 Entlehnung)}$$

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 - 1 - 1 = 0 \text{ (+ 1 Entlehnung)}$$

$$1 - 1 - 1 = 1 \text{ (+ 1 Entlehnung)}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 111010010 = 466 \\ - 001110100 = 116 \\ \text{E} \quad 11111 \\ \hline 101011110 = 350 \end{array}$$

1.3 Subtraktion mit dem Zweierkomplement

Da, in der Digitaltechnik, für die Subtraktion von Dualzahlen keine logische Verknüpfung existiert, ist man gezwungen eine Subtraktion in eine Addition umwandeln.

$$\begin{aligned}2 - 6 &= (-4) \\2 + (-6) &= (-4)\end{aligned}$$

Diese Umwandlung geschieht mit Hilfe des Zweierkomplements. Es wird gebildet in dem man den Subtrahend auf die volle Stellenzahl erweitert (Nullen nach links auffüllen). Hierbei muss die Breite der Komplementdarstellung beider Zahlen berücksichtigt werden. Üblich sind 4, 8, 16, 32 und 64 Bit. Als nächstes muss der Subtrahend negiert werden, das heißt man lässt jedes einzelne Bit kippen. Zu dem gebildeten bitweisen Komplement muss +1 hinzuaddiert werden. Das nun erhaltene Zweierkomplement muss man mit dem Minuenden addieren um das Zweierkomplement-Ergebnis der eigentlichen Subtraktion zu erhalten. Um das nun eigentliche Ergebnis zu erhalten muss man das Ergebnis negieren und wieder +1 addieren. Das höchstwertigste Bit des Zweierkomplement-Ergebnisses, stellt dabei das Vorzeichen da, und wird nicht zur Negation verwendet. Wenn es eine 1 ist, ist das Endergebnis negativ, bei einer 0 ist es positiv.

Beispiel:

$$2 - 6 = ?$$

1. Schritt: In eine Dualzahl wandeln:

$$2 - 6 \Rightarrow 10 - 110$$

2. Schritt: Stellen auffüllen:

$$0010 - 0110 = ?$$

3. Schritt: Bits negieren:

$$0110 \Rightarrow 1001$$

4. Schritt: Hinzuaddieren von 1:

$$1001 + 0001 = 1010$$

5. Schritt: Minuend und Zweierkomplement addieren:

$$0010 + 1010 = 1100$$

6. Schritt: Ergebnis negieren:

$$100 \Rightarrow 011$$

7. Schritt: Hinzuaddieren von 1:

$$011 + 001 = 100$$

8. Schritt: In eine Dezimalzahl wandeln:

$$100 \Rightarrow 4 ; \text{ da das höchstwertige Bit 1 ist: Endergebnis} = -4$$

1.4 Multiplikation von Dualzahlen

Auch die binäre Multiplikation wird nach denselben Regeln durchgeführt, wie die dezimale Multiplikation. Dabei werden Produkte mit den einzelnen Stellen des Multiplikators gebildet und anschließend Stellenrichtig addiert. Gegenüber der dezimalen Multiplikation bringt die binäre Multiplikation Vereinfachungen mit sich. Da die Stellen des Multiplikators nur die Zahlenwerte Null und Eins annehmen können, muss der Multiplikand nur mit Null und Eins multipliziert werden. Bei der binären Multiplikation kommen als Teiloperationen nur die Addition und Verschiebung vor.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} \underline{1011 \times 1010} \\ 1011 \\ 0000 \\ 1011 \\ + \quad 0000 \\ \hline 1101110 \end{array}$$

2 Umsetzung in eine Digitale Rechenschaltung

2.1 Addierer

2.1.1 Halbaddierer

Ein Halbaddierer besitzt zwei Ein-, und zwei Ausgänge. An die Eingänge x und y werden jeweils die Ziffern angelegt die man addieren möchte. An dem ersten Ausgang liegt die Summe s der Addition an, am zweiten Ausgang der Übertrag c .

Daraus ergibt sich die Wertetabelle 1.

x	y	Übertrag c	Summe s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabelle 1: Wertetabelle Halbaddierer

In Schaltungen wird der Halbaddierer aus zwei Bauteilen zusammengesetzt, ein Exklusiv-ODER (XOR) und ein UND (AND).

Der Aufbau des Halbaddierers ist in Abbildung 1 dargestellt.

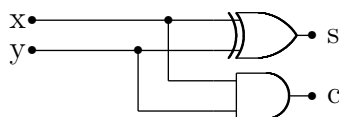


Abbildung 1: Halbaddierer

2.1.2 Volladdierer

Der Volladdierer besteht aus zwei Halbaddierern und einem ODER. Da ein Volladdierer einen zusätzlichen Eingang (c_{in}) hat, kann man mit ihm den Übertrag aus einer vorhergegangenen Addition mit in die Rechnung einbeziehen. Man kann somit mehrere Volladdierer hintereinander schalten um größere Zahlen miteinander zu addieren. Dabei verbindet man den Carry out Ausgang mit dem Carry in Ausgang des höherwertigen Volladdierers.

Daraus ergibt sich die Wertetabelle 2.

x	y	c_{in}	c_{out}	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Tabelle 2: Wertetabelle Volladdierer

In Schaltungen wird der Volladdierer aus zwei Halbaddierern und einem ODER (OR) zusammengesetzt.

Der Aufbau des Halbaddierers ist in Abbildung 2 dargestellt.

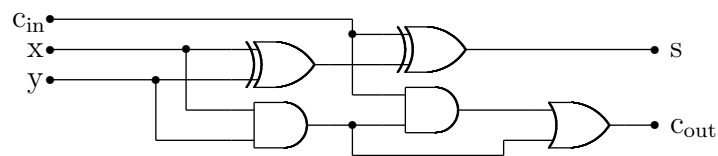


Abbildung 2: Volladdierer

2.2 Subtrahierer

Beim Subtrahierer wird der Volladdierer durch einen Steuereingang erweitert. An diesem legt man für eine Addition eine 0, und für eine Subtraktion eine 1 an. Diesen Steuereingang legt man, zusammen mit dem y -Eingang, an ein Exklusiv-ODER (XOR). Der Ausgang dieses Exklusiv-ODERs wird an den ursprünglichen y Eingang angelegt. Somit wird der y Wert, bei einer am Steuereingang anliegenden logischen 1 negiert. Bei dem niederwertigsten Subtrahierer muss zudem das Steuersignal auf den Carry in Eingang gelegt werden um die, für die Zweierkomplementrechnung benötigte, 1 zu addieren. Zu sehen ist dieser Aufbau in Abbildung 3.

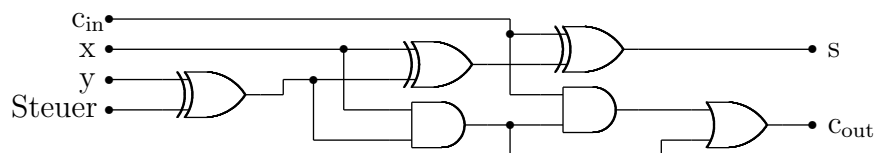


Abbildung 3: Volladdierer mit Steuerleitung zum Subtrahieren

2.3 Rechenwerk

Das in Abbildung 4 gezeigte Schaltnetz besteht aus acht kaskadierten Volladdierern. Zusätzlich besitzen sie jeweils einen Steuereingang, mit welchem der Summand, der aus den y Bestandteilen aufgebaut ist, negiert werden kann, sodass mit Schaltnetz auch Subtraktionen durchgeführt werden können.

Um eine Rechenoperation durchzuführen muss man die Summanden x und y an die Eingänge x_1 bis x_n und y_1 bis y_n anlegen. An die Steuereingänge legt man eine logische 0 für eine Addition, und eine logische 1 für eine Subtraktion an. Die Endsumme liegt an den Ausgängen z_1 bis z_n an.

2.4 Multiplizierer

Der in Abbildung 6 gezeigte Multiplizierer kann zwei acht Bit Zahlen miteinander multiplizieren. Dazu legt man seine erste Zahl (2.1 – 2.8) an ein Schieberegister an, sodass die Zahl bei jedem Takt um eine Stelle verschoben werden kann. Dann wird pro Takt die höchstwertigste Ziffer des Multiplikators abgegriffen, die anschließend mit dem Multiplikant multipliziert wird. Da die abgegriffene Ziffer nur die Zustände „Null“ und „Eins“ annehmen kann, kann man die Multiplikation mit einfachen UND-Verknüpfungen realisieren. Um die Produkte auch Stellenrichtig addieren zu können muss man die Zwischenergebnisse ebenfalls pro Takt verschieben. Dies wird gelöst indem man ein Register nimmt, welches das Ergebniss um eine Stelle versetzt wieder auf den Addierer gibt. Der selben Aufbau aus Register und Addierer wird auch verwendet um die, aus dem ersten Addierer hinausgeschobenen, Stellen aufzufangen. Das Produkt kann man, nach acht Takten Rechenzeit, an den Ausgängen der Addierer abgreifen. Da die Steuereinheit aus Abbildung 5 das Taktsignal einen Takt zu spät stoppt, muss man das Ergebnis durch zwei teilen, indem man die Ziffern des Produktes jeweils an dem nächst höherwertigen Pin abgreift.

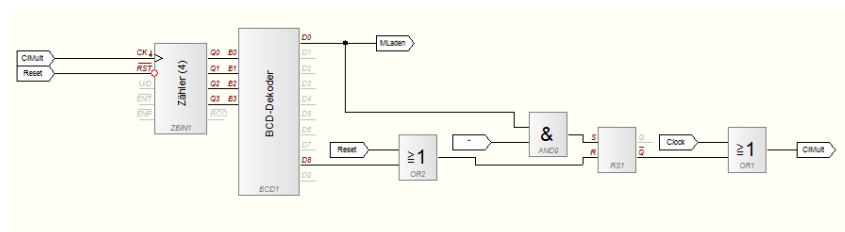


Abbildung 5: Steuereinheit 8-Bit Multiplizierer

Die in Abbildung 5 sichtbare Steuereinheit des 8-Bit Multiplizierers ist dafür verantwortlich, dass der Takt „C/Mult“ am Anfang der Rechenoperation gestartet, und nach acht Takten wieder gestoppt wird. Wenn D_0 nach einem Reset 1 ist, wird das ladbare Schieberegister geladen. Ist zusätzlich dazu noch der Taster „*“ gedrückt, wird der Ausgang \bar{Q} des Flip-Flops 0, sodass der Main-Clock auch der Clock des Multiplizierers wird. Acht Takte später, wenn der Ausgang D_8 1 ist, wird der Reseteingang des Flip-Flops 1, sodass \bar{Q} wieder 1 ist und der Takt blockiert wird. So wird der Multiplizierer gestoppt, sodass das Produkt abgelesen werden kann.

