

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ



TEORIA STEROWANIA II: ĆWICZENIA LABORATORYJNE

Sprawozdanie: Ćwiczenie 5.

Kryterium Koła i twierdzenie Popova

Dominik Korona

Kraków, 15 maja 2023

1 Wstęp

Kolejnym tematem poruszonym na laboratoriach z teorii sterowania było kryterium koła oraz twierdzenie Popova. Oba te zagadnienia mają zastosowanie w analizie stabilności nieliniowych systemów, które można przedstawić jako układy stacjonarne, liniowe, jednowejściowe i jednowyjściowe (SISO) z sprzężeniem zwrotnym postaci $u(t) = f(t, y(t))$.

Korzystając ze skryptu (1), badaliśmy pierwszy układ o ujemnym sprzężeniu zwrotnym, natomiast drugi o dodatnim.

2 Konfiguracja

Do poprawnej kompilacji wymagane są następujące pliki:

1. lab5.mlx

3 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zbadanie dwóch układów z użyciem kryterium koła i twierdzenia Popova. Na samym początku, aby skorzystać z przytoczonych twierdzeń, potrzebowaliśmy macierzy asymptotycznie stabilnej. W kolejnym etapie zadania wpisywaliśmy transmitancje do środowiska programistycznego MATLAB, następnie posługując się kodem ze skryptu $[P, Q, w] = \text{nyquist}(L, M)$; próbowaliśmy wyrysować przecinające się linie oraz charakterystyki amplitudowo-fazową otoczoną pewnym kołem, przecinającym oś $\text{Re}(Gj\omega)$ w punktach $\frac{1}{m_1}$ oraz $\frac{1}{m_2}$. W zadaniu założyliśmy $m_1 > 0$ i $m_2 < 0$, a parametry m_1 i m_2 były nam potrzebne do wyrysowania funkcji liniowych o równaniu $y = m_1 \cdot t$, natomiast dobieraliśmy je eksperymentalnie aby uzyskać pożądane efekty i je zilustrować.

Kolejnym etapem było skorzystanie z twierdzenia Popova, które polegało na przekształceniu transmitancji według wzoru wykorzystanego już poniżej (równanie.3). Następnym krokiem było szukanie takiej prostej, która przecinała półoś P jak najbliższej punktu zerowego, przy czym wyrysowana charakterystyka amplitudowo-fazowa powinna leżeć po lewej od tej linii

Badane układy są podane poniżej, gdzie pierwszy z nich wystarczyło bezpośrednio wpisać do środowiska MATLAB, natomiast drugi należało przeliczyć, co jest opisane w części Przebieg Ćwiczenia4

1. $G(s) = \frac{4(1-5s)}{(1+3s)(1+2s)}$

2.
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = c^T \cdot x(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{Gdzie}} A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Mając te informacje, zwizualizowaliśmy nasze postępy w środowisku MATLAB, oraz obserwowaliśmy wpływ zmiany parametrów m_1 i m_2 , który określał nam stabilny obszar.

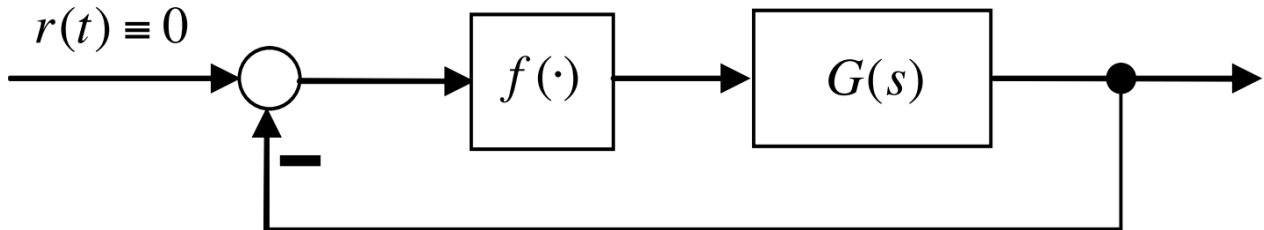
4 Przebieg ćwiczenia

4.1 Pierwszy System

Mając gotową transmitancję, wystarczyło ją lekko zmodyfikować aby wpisać ją do MATLAB,

$$G(s) = \frac{4(1 - 5s)}{(1 + 3s)(1 + 2s)} = \frac{-20s + 4}{6s^2 + 5s + 1} \quad (1)$$

Badany układ należało badać ze znakiem "-", ponieważ używaliśmy ujemnego sprzężenia zwrotnego

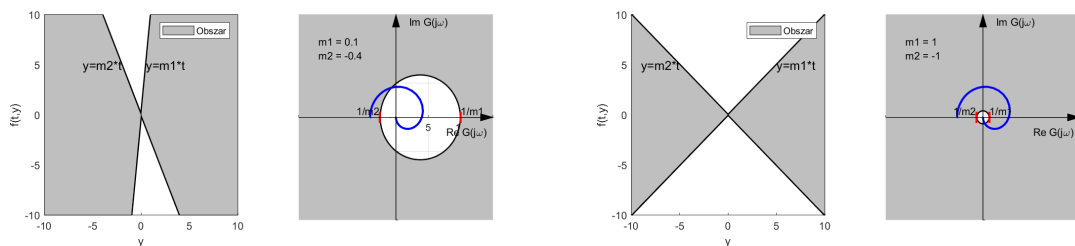


Rysunek 1: Układ regulacji z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.

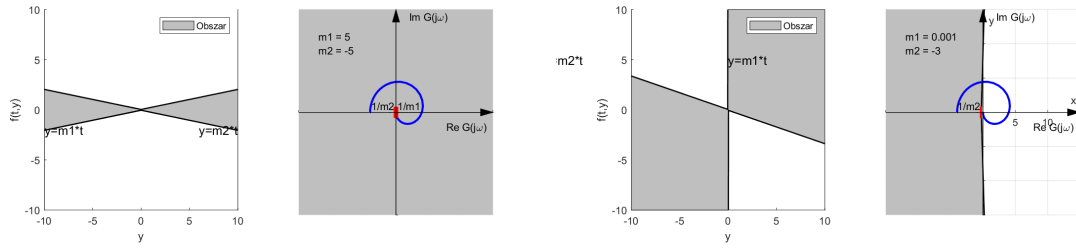
4.1.1 Kryterium koła

Aby sprawdzić jak działa kryterium koła, spróbowałem użyć różnych parametrów m_1 i m_2 , następnie wizualizowałem postępy

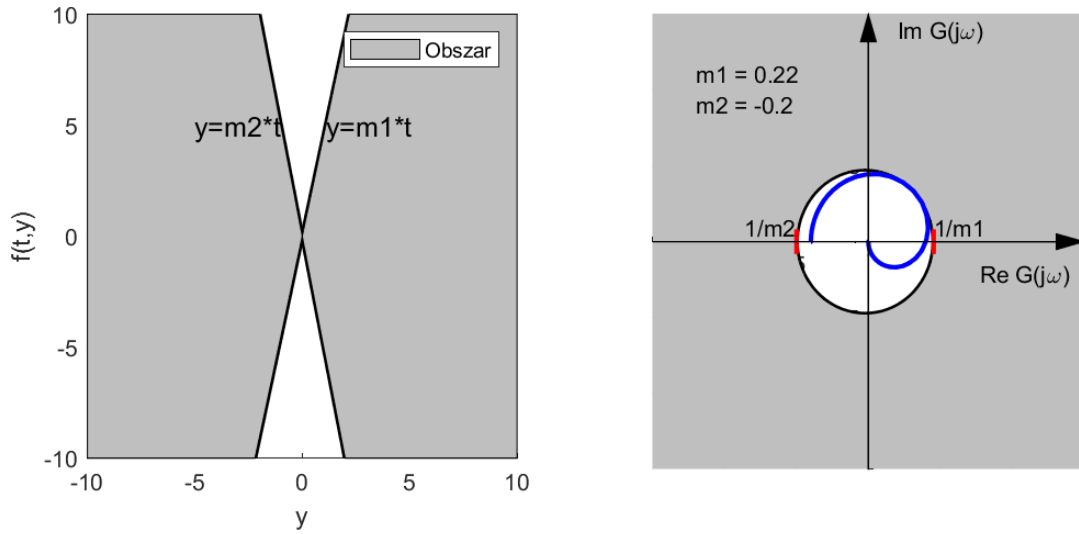
- a) $m_1=0.1, m_2=-0.4$
- b) $m_1=1, m_2=-1$
- c) $m_1=10, m_2=-0.2$
- d) $m_1=0.4, m_2=-0.1$
- e) $m_1=0.22, m_2=-0.2$



Rysunek 2: Znaleziony sektor w kryterium koła



Rysunek 3: Znaleziony sektor w kryterium koła



Rysunek 4: Zidentyfikowany optymalny sektor w kryterium koła.

Na powyższych wykresach narysowałem obszary w którym nasz układ nie będzie stabilny, więc starałem się dobrać parametry tak, aby uzyskać optymalny wynik, dla $m_1=0.22$ i $m_2=-0.2$ widzimy, że charakterystyka amplitudowo-fazowa mieści się w sektorze. Sprawdziłem jeszcze asymptotyczną stabilność macierzy A, ale zanim to zrobiłem musiałem z transmitancji uzyskać macierz, skorzystałem z funkcji $[A, B, c]=tf2ss(L,M)$, następnie z $eig(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} -0.8333 & -0.1667 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -0.5 \\ \lambda_2 = -0.3333 \end{cases} \quad (2)$$

Wszystko na to wskazuje, że badany układ jest asymptotycznie stabilny, a parametry zostały dość dobrze dobrane

4.1.2 Twierdzenie Popova

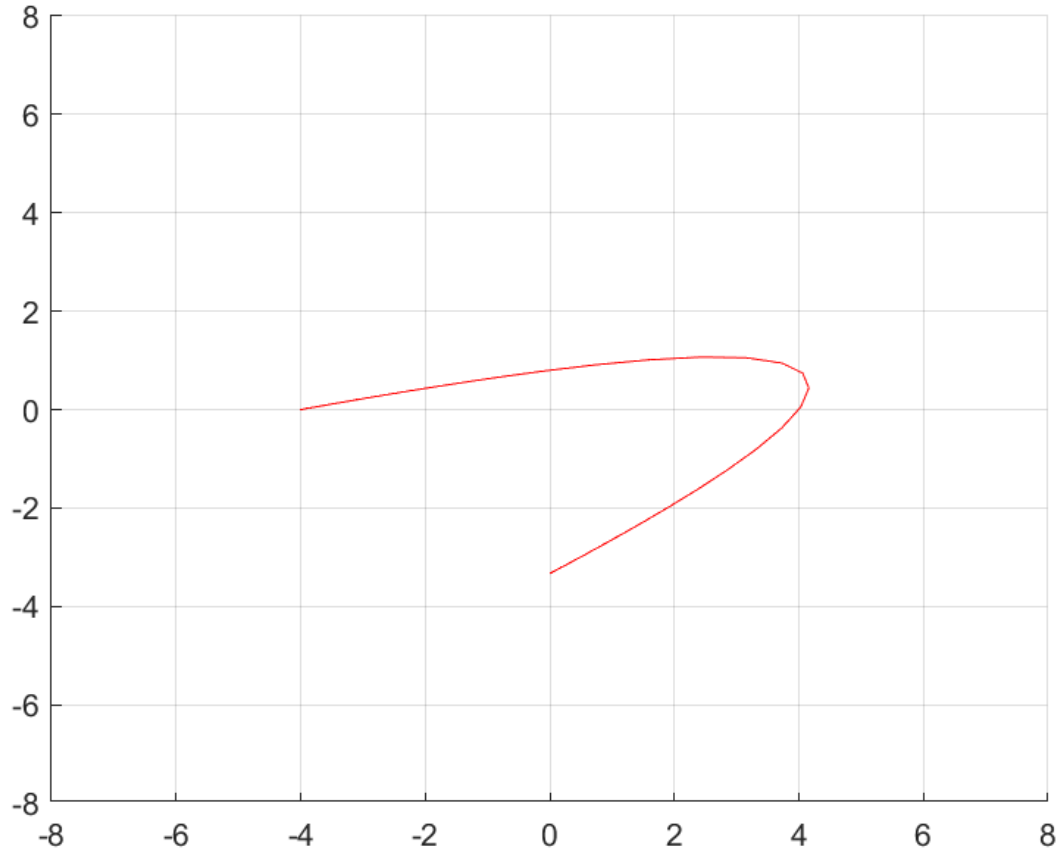
W następnym kroku skorzystałem z tw. Popova. Do tego jest potrzebna macierz A asymptotycznie stabilna, co już wcześniej sprawdziłem. W twierdzeniu Popova używamy tzw. transmitancji zmodyfikowanej, która wynosi:

$$\tilde{G}(j\omega) = \tilde{P}(\omega) + j\tilde{Q}(\omega), \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{cases} \tilde{P}(\omega) = P(\omega) \\ \tilde{Q}(\omega) = \omega \cdot Q(\omega) \end{cases} \quad (4)$$

Narysowałem charakterystykę tej transmitancji dla $\omega \leq 0$, co przedstawia poniższy rysunek



Rysunek 5: Charakterystyka amplitudowo-fazowa dla zmodyfikowanej transmitancji.

Ostatnim krokiem kryterium jest znalezienie prostej Popova, która przecina oś 0P możliwie blisko punktu 0. Dodatkowo, zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo-fazowa powinna znajdować się całkowicie po lewej stronie tej prostej.

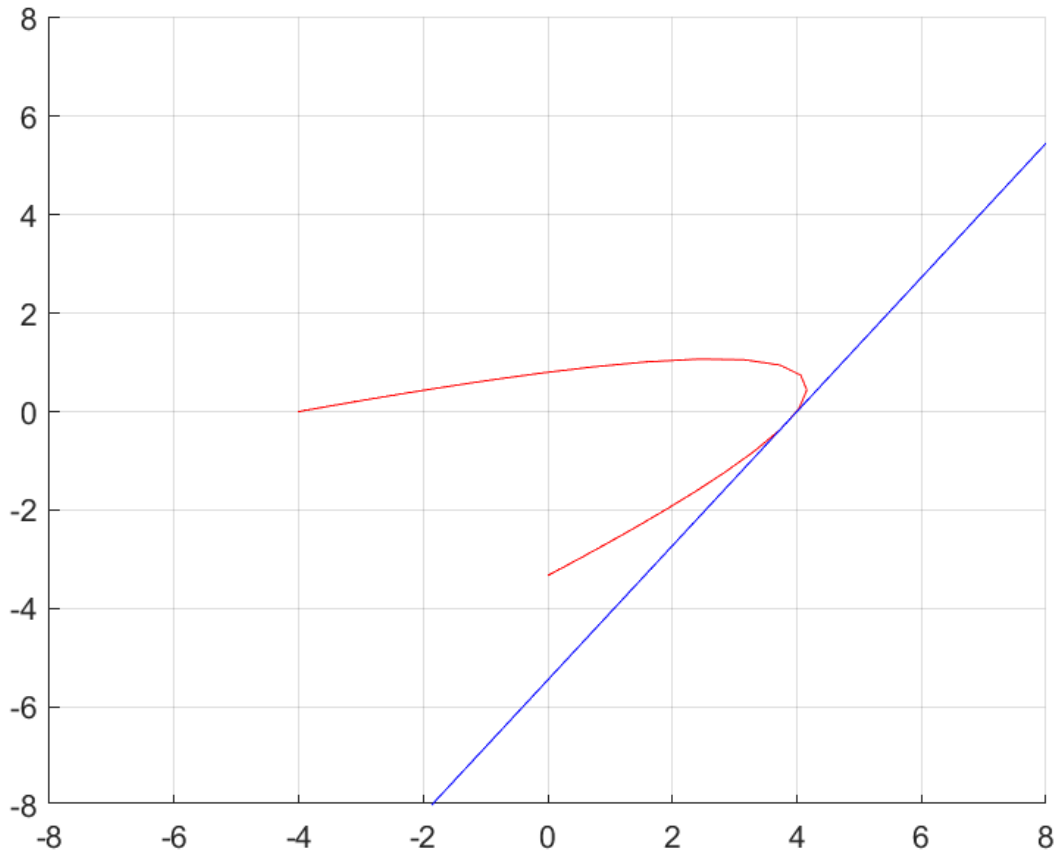
Równanie prostej można przedstawić jako:

$$\tilde{P}(\omega) - q\tilde{Q}(\omega) < \frac{1}{m} \quad (5)$$

Gdzie m to parametr określający sektor Popova

Parametr m został empirycznie wyznaczony, jednak przed jego określeniem dokonałem odpowiedniego doboru parametru q . Kąt między osią rzeczywistą a wyznaczoną prostą oznaczam jako α . Wartość tangensa tego kąta jest odwrotnością parametru q .

Aby dobrać odpowiedni parametr, wybrałem dwa punkty na krzywej i starałem się tak dobrać te punkty, aby prosta przecinająca znalazła się możliwie blisko punktu 0. Przeprowadziłem obliczenia, które pozwoliły mi uzyskać odpowiednie nachylenie prostej. Następnie, ostatnim krokiem było znalezienie takiej wartości parametru m , która zapewni, że cała charakterystyka znajdzie się po lewej stronie prostej, jednocześnie stawiając na uwadze bliskość prostej do środka układu współrzędnych. Najlepszym wynikiem, który uzyskałem, był parametr $m = 0.25$ i zwizualizowałem to na Rys.6



Rysunek 6: Uzyskana prosta dla kryterium Popova.

4.2 Drugi System

W tym przypadku okazało się konieczne wyliczenie transmitancji oraz policzenie wartości własnych macierzy A .

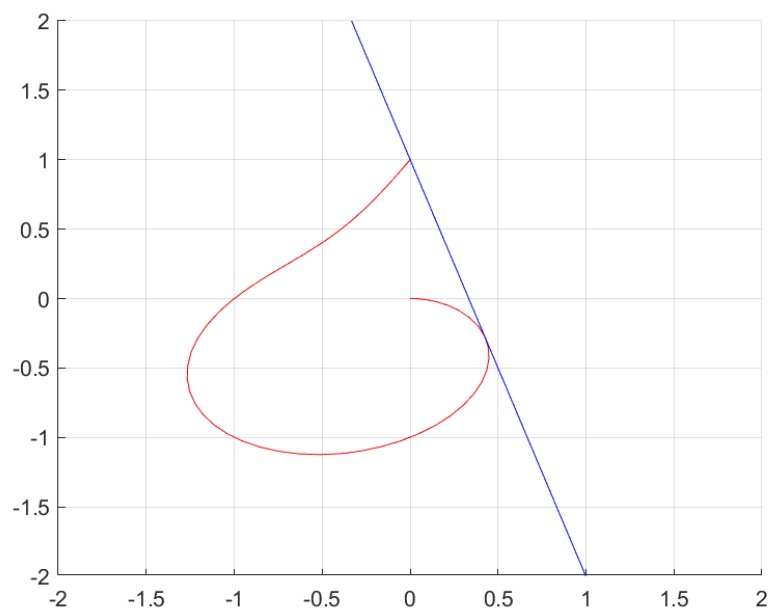
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = c^T \cdot x(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{Gdzie}} A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (6)$$

$$\text{eig}(A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \simeq -1.75 \\ \lambda_2 \simeq -0.12 + 0.74i \\ \lambda_3 \simeq -0.12 - 0.74i \end{bmatrix}, \quad G(s) = \frac{-s^2}{s^3 + 2s^2 + s + 1} \quad (7)$$

Na podstawie wartości własnych można stwierdzić asymptotyczną stabilność macierzy A . Następnym krokiem było wyznaczenie transmitancji zmodyfikowanej, wyrysowanie charakterystyki amplitudowo-fazowej a następnie poszukiwanie prostej Popova.



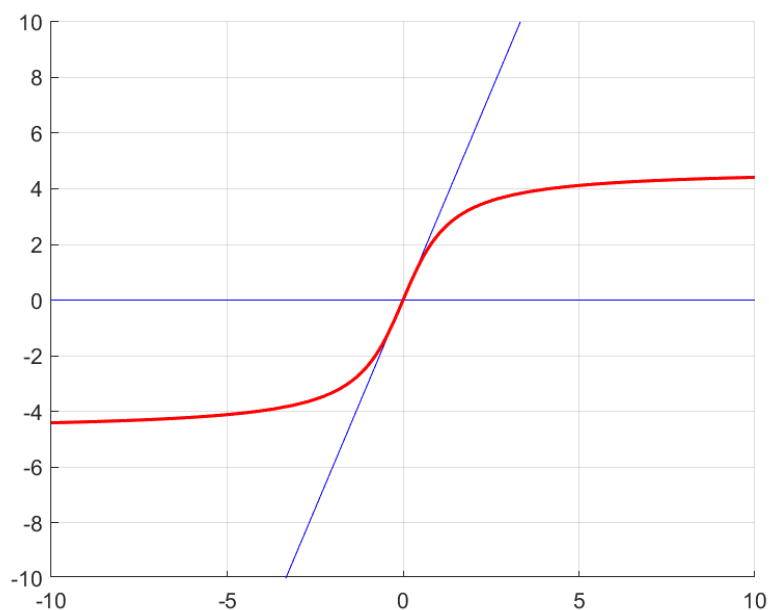
Rysunek 7: Charakterystyka amplitudowo-fazowa dla zmodyfikowanej transmitancji.



Rysunek 8: Uzyskana prosta dla kryterium Popova.

Na osobnym wykresie przedstawiłem ograniczenia dla elementu nieliniowego $u(t) = M \cdot \arctg(y(t))$. Krzywa powinna być zawarta pomiędzy dwiema prostymi: jedna z nich to $f(y) = 0$, a druga to $f(y) = m \cdot y$, a konkretnie $f(y) = 3 \cdot y$.

Przy użyciu podejścia eksperymentalnego, poszukiwałem odpowiedniej wartości parametru M , która spełniałaby powyższe założenia. Ostatecznie uzyskałem $M = 3$. Wyniki przedstawiłem na Rys.9, gdzie czerwoną linią zaznaczona została krzywa funkcji $u(t)$.



Rysunek 9: Sektor dopuszczalny w kryterium Popova.

5 Opis wniosków i obserwacji

Podczas eksperymentu z zastosowaniem kryterium koła i twierdzenia Popova, możliwe jest badanie stabilności niektórych nieliniowych systemów. Te narzędzia są szczególnie przydatne dla układów SISO (jedno wejście, jedno wyjście), które są poddane niestacjonarnemu i nieliniowemu sprzężeniu zwrotnemu.

Warto zaznaczyć, że nie zawsze możemy zastosować kryteria bezpośrednio. Istotnym warunkiem jest sprawdzanie stabilności macierzy, na których przeprowadzamy operacje.

Dobór odpowiednich parametrów dla tych kryteriów oparł się na metodzie geometrycznej i eksperymentalnej. Jednak należy zauważyć, że obliczenia mogą być obarczone pewnymi niedokładnościami.

Pamiętajmy, że analiza stabilności jest ważnym aspektem w projektowaniu i utrzymaniu nieliniowych systemów. W miarę poszerzania wiedzy i doświadczenia, warto eksperymentować i dążyć do doskonalenia technik badania stabilności, aby uzyskać jak najdokładniejsze i wiarygodniejsze wyniki.

Literatura

- [1] Jerzy Baranowski, Krystyn Hajduk, Adam Korytowski, Wojciech Mitkowski, Andrzej Tutaj, : Teoria Sterowania. **2**(5), 9–17 (2007)