

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ



TEORIA STEROWANIA II: ĆWICZENIA LABORATORYJNE

Sprawozdanie: Ćwiczenie 4.

Druga Metoda Lapunowa i Twierdzenie La Salle'a

Dominik Korona

Kraków, 8 maja 2023

1 Wstęp

Zadaniem na laboratoriach z teorii sterowania było zapoznanie się z drugą metodą Lapunowa. Zaczynaliśmy podobnie jak w pierwszej metodzie, czyli znajdowaliśmy punkty równowagi systemu, następnie korzystając ze skryptu (1) mieliśmy za zadanie wykorzystać funkcjonały Lapunova do określania stabilnego obszaru naszego układu.

Do wykonania zadania używaliśmy środowiska MATLAB oraz na laboratorium skorzystaliśmy z przygotowanego skryptu

2 Konfiguracja

Do poprawnej kompilacji wymagane są następujące pliki:

1. Main.m
2. plotpp.m
3. System41.m
4. System42.m

3 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zbadanie dwóch układów. W pierwszym etapie zajmowaliśmy się interpretowaniem skryptu, w którym obserwowaliśmy zachowanie pochodnych w czasie, następnie skorzystaliśmy z zaproponowanych funkcjonałów w skrypcie, które wykorzystaliśmy do:

1. Wyliczenia pochodnej funkcjonału $\dot{V}(t)$
2. Wyrysowania stabilnego obszaru z pomocą tw. LaSalle'a

Mając te informacje, wizualizowaliśmy nasze postępy w środowisku MATLAB, oraz obserwowaliśmy wpływ zmiany parametru L, który określał nam stabilny obszar. Ostatnim etapem było obserwowanie wizualizacji 4 wykresów:

1. wyrysowanego funkcjonału
2. obszaru dla warunków początkowych
3. pochodnej funkcjonału
4. wizualizacji pochodnej funkcji Lapunova wzdłuż trajektorii jako konturu

4 Przebieg ćwiczenia

4.1 Pierwszy System

Na samym początku badaliśmy System z pomocą dwóch funkcjonałów zaproponowanych w skrypcie, celem było jak najlepsze dopasowanie stabilnego obszaru

4.1.1 Równanie stanu

Na samym początku badaliśmy układ o równaniu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_1^2(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

4.1.2 Punkty równowagi

Po przyrównaniu obu stron do zera otrzymaliśmy tak skonstruowane równania, że mogliśmy wyznaczyć tylko jeden punkt równowagi:

$$\begin{cases} -x_1(t) + 2x_1^2(t)x_2(t) = 0 \\ -x_2(t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1(t) = 0 \\ -x_2(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Zatem punktem równowagi jest punkt P:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

4.1.3 Zastosowanie II metody Lapunova

Aby zastosować drugą metodę Lapunova, posłużyliśmy się dwoma funkcjonalami Lapunova i otrzymaliśmy różne rezultaty:

$$\begin{cases} V_1(t) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 \\ V_2(t) = \frac{x_1^2}{1-x_1x_2} + x_2^2 \end{cases} \quad (4)$$

4.1.4 Pierwszy obszar

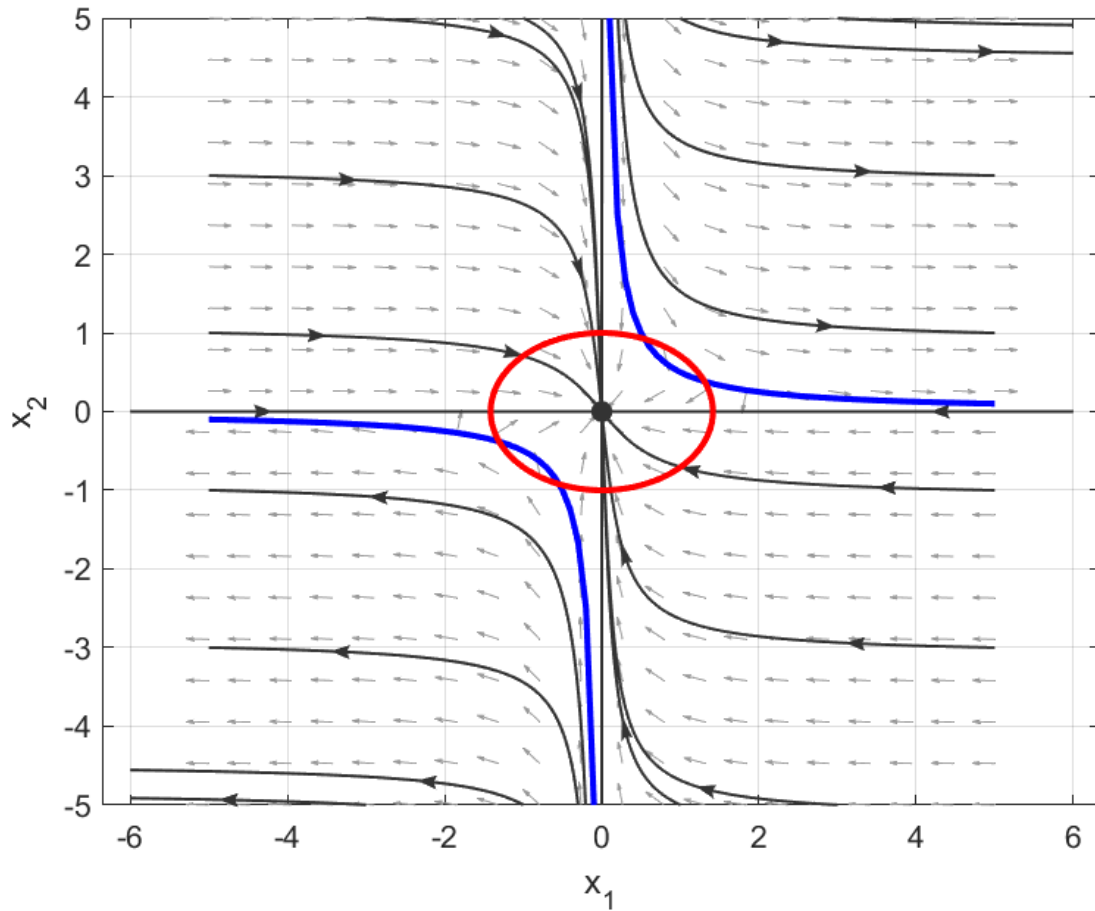
Pierwszy funkcjonal V_1 spełnia warunek $V_1 > 0$ w całej dziedzinie, czyli spełnia warunki na funkcjonal Lapunova, oraz spełnia założenia twierdzenia LaSalle'a

Aby sprawdzić kolejne warunki konieczne do przybliżenia obszaru, policzyliśmy pochodną złożoną funkcjonału:

$$\begin{cases} \dot{V}_1(t) = \frac{dV}{dx_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{dV}{dx_2} \cdot \dot{x}_2 \\ \dot{V}_1(t) = x_1 \cdot (-x_1 + 2x_1^2x_2) + 2x_2 \cdot (-x_2) \\ \dot{V}_1(t) = -x_1^2 \cdot (1 - 2x_1x_2) - 2x_2^2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2(t) > 0 \\ x_1(t) < \frac{1}{2x_2} \end{cases} \xrightarrow{lub} \begin{cases} x_1(t) > 0 \\ x_2(t) < \frac{1}{2x_1} \end{cases} \quad (5)$$

W powyższym równaniu, aby pochodna funkcjonału była mniejsza od zera, musieliśmy zapisać dwa założenia z powodu nierówności funkcji homograficznej i dzielenia przez zmienną stanu, która może być różnego znaku

Mimo to, możemy zauważyć że funkcjonal $\dot{V}_1(t)$ jest mniejszy od zera w całej dziedzinie, z wyjątkiem samego zera.

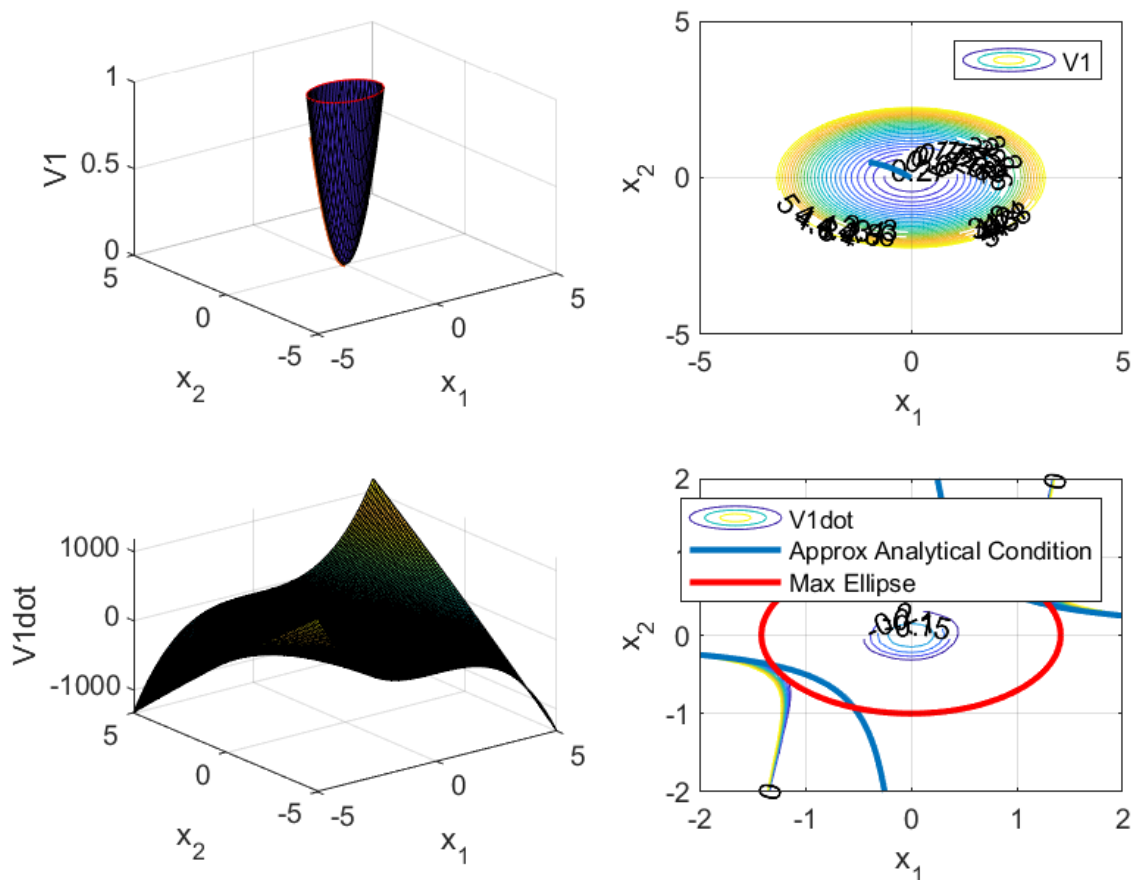


Rysunek 1: Trajektorie fazowe wraz z obszarem i przybliżeniem funkcji analitycznej.

Na rysunku 2 można zauważyć, że czerwona elipsa wyznacza estymatę obszaru atrakcji asymptotycznie stabilnego punktu równowagi, niebieska funkcja homograficzna wyznacza zbiór L - zbiór, w którym pochodna funkcjonału $V_1(x)$ jest mniejsza od zera. Obszar czerwony dobraliśmy na podstawie dodatniego parametru l , gdzie:

$$l = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 \quad (6)$$

Najbardziej dopasowaną wartością okazało się $l=1$, na podstawie poniższego Rys.2

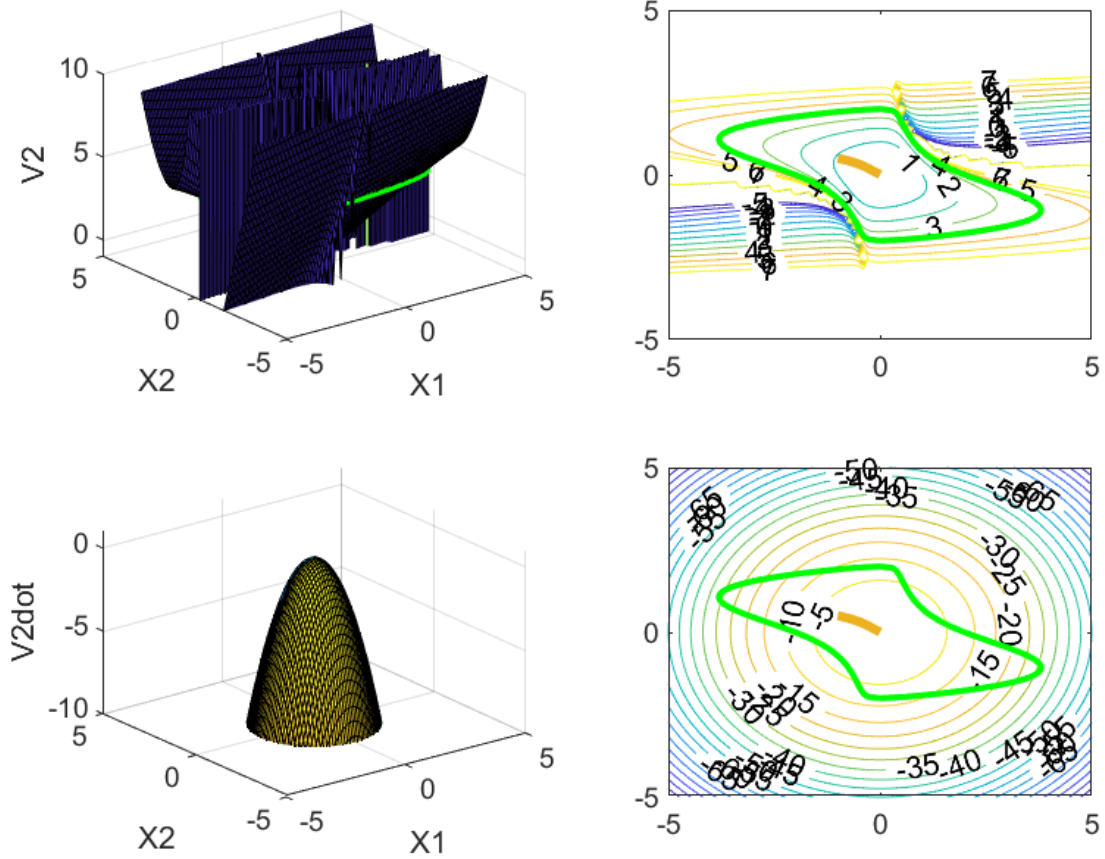


Rysunek 2: Analiza pochodnej funkcjonału i obszaru atrakcji.

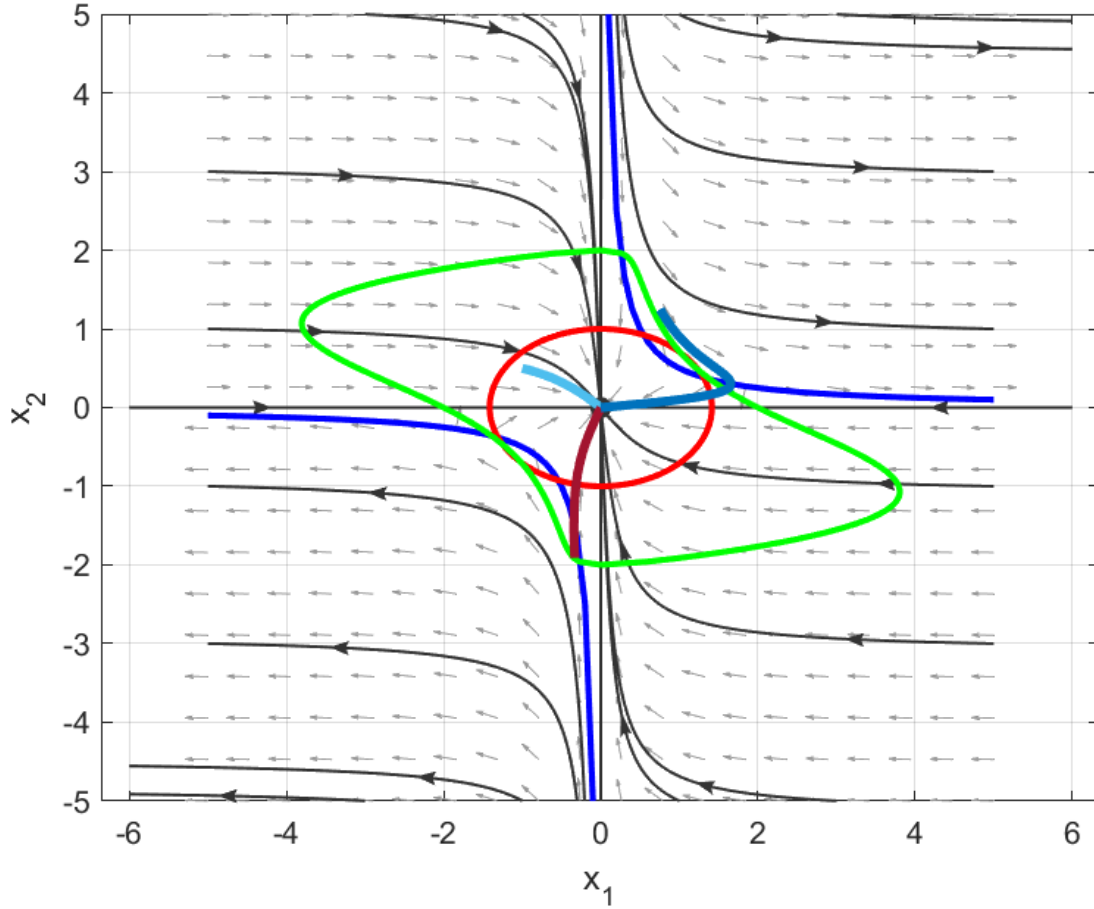
Dobór parametru polegał na obserwacji zmian elipsy, najlepszy był dla tej która nie przekracza praktycznie ostatniej niestabilnej trajektorii na Rys.2 na ostatnim małym wykresie. Na rysunku można obserwować również wybraną poziomice (zaznaczone na czerwono na wykresie funkcjonału, oraz jak prezentuje się przykładowy warunek początkowy i wykres pochodnej funkcjonału względem x_1 i x_2 . Nasz obszar został względnie dobrze przybliżony, ale można to zrobić lepiej, dlatego przeanalizowaliśmy działanie drugiego funkcjonału

4.1.5 Drugi obszar

Drugi funkcjonal V_1 nie spełnia warunku $V_1 > 0$ w całej dziedzinie, natomiast można skorzystać z zmodyfikowanej wartości twierdzenia do której wystarczy aby funkcjonal był określony w pewnym niepustym zbiorze w otoczeniu zera Ω .



Rysunek 3: Analiza pochodnej funkcjonału i obszaru atrakcji.



Rysunek 4: Trajektorie fazowe wraz z obszarem i przybliżeniem funkcji analitycznej.

Na Rys.4 wyrysowałem kolorem **zielonym** obszar atrakcji dla funkcjonału $V_2(t)$. Najlepiej dopasowanym parametrem okazał się założony w treści zadania $l=0.5$, dzięki czemu uzyskaliśmy o wiele lepszą estymatę obszaru niż dla $V_1(t)$, co można zaobserwować na rysunku porównującym. W celu zweryfikowania, wyrysowałem trzy trajektorie dla warunków początkowych $x_0=[-1, 0.5], [0.756; 1.25], [-0.33; -1.91]$, można zauważyć że te najbardziej przylegające punkty do estymaty drugiego funkcjonału, są dosłownie na granicy, wystarczy niewielka zmiana i trajektoria ucieka do nieskończoności

4.2 Drugi System

4.2.1 Równanie stanu

We własnym zakresie zbadaliśmy układ o równaniu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t) + x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases} \quad (7)$$

4.2.2 Punkty równowagi

Po przyrównaniu obu stron do zera otrzymaliśmy jeden punkt równowagi:

$$\begin{cases} -x_2(t) - x_1(t) + x_1^3(t) = 0 \\ -x_1(t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Zatem punktem równowagi jest punkt P:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

4.2.3 Zastosowanie II metody Lapunova

Aby zastosować drugą metodę Lapunova, posłużyłem się podanym funkcjonałem:

$$V(t) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (10)$$

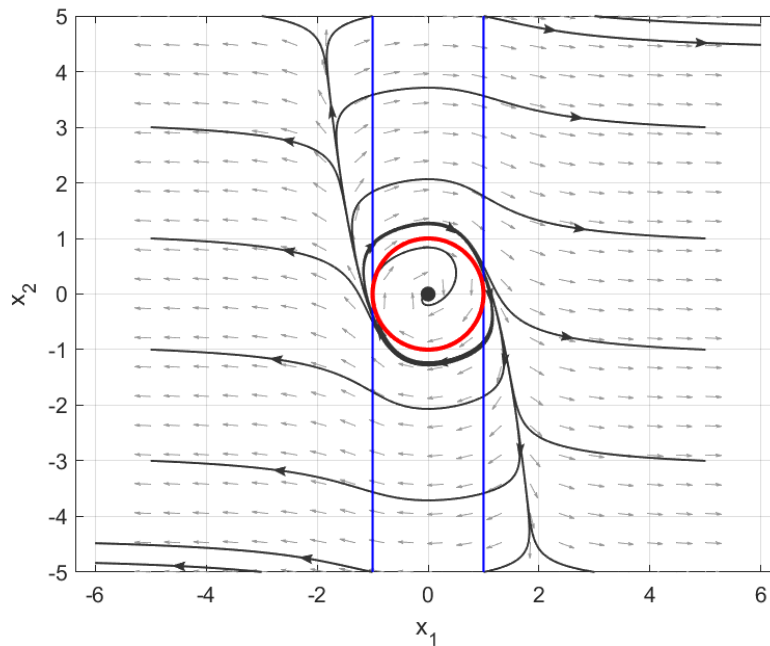
4.2.4 Obszar atrakcji

Podany funkcjonal V_1 spełnia warunek $V_1 > 0$ w całej dziedzinie oraz jest to funkcja ciągła

Aby sprawdzić kolejne warunki konieczne do przybliżenia obszaru, policzyliśmy pochodną złożoną funkcjonału:

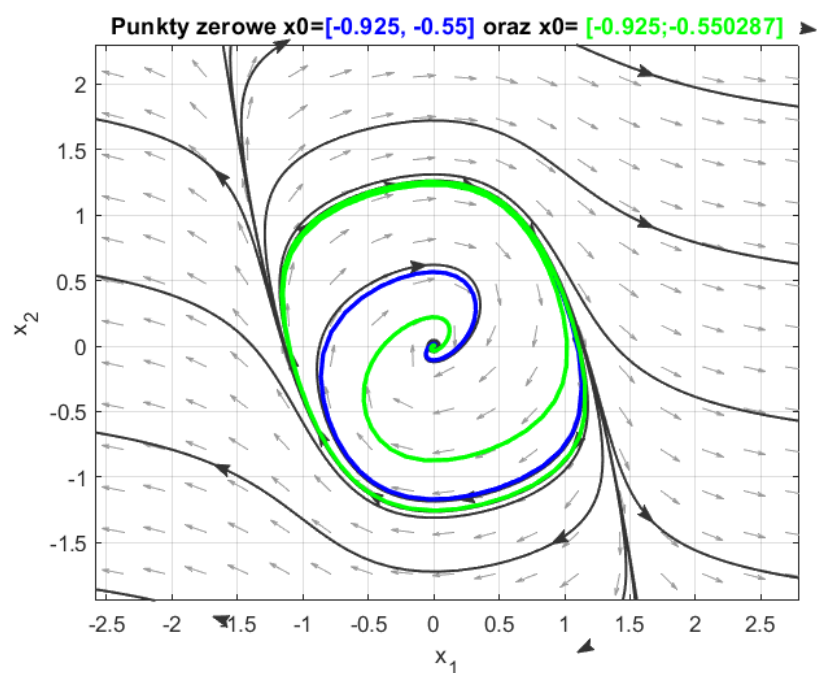
$$\begin{cases} \dot{V}(t) = \frac{dV}{dx_1} \cdot \dot{x}_1 + \frac{dV}{dx_2} \cdot \dot{x}_2 \\ \dot{V}(t) = x_1 \cdot (x_2 - x_1 + x_1^3) + x_2 \cdot (-x_1) \\ \dot{V}(t) = -x_1^2 + x_1^4 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(t) \in (-1; 1) \text{ \& } x_1(t) \neq 0 \\ x_2(t) - \text{dowolne} \end{cases} \quad (11)$$

Można zauważyć, że pochodna funkcjonału dla pewnych warunków jest mniejsza od zera, dzięki czemu jest to funkcjonal Lapunova, a zerowy punkt równowagi jest asymptotycznie stabilny



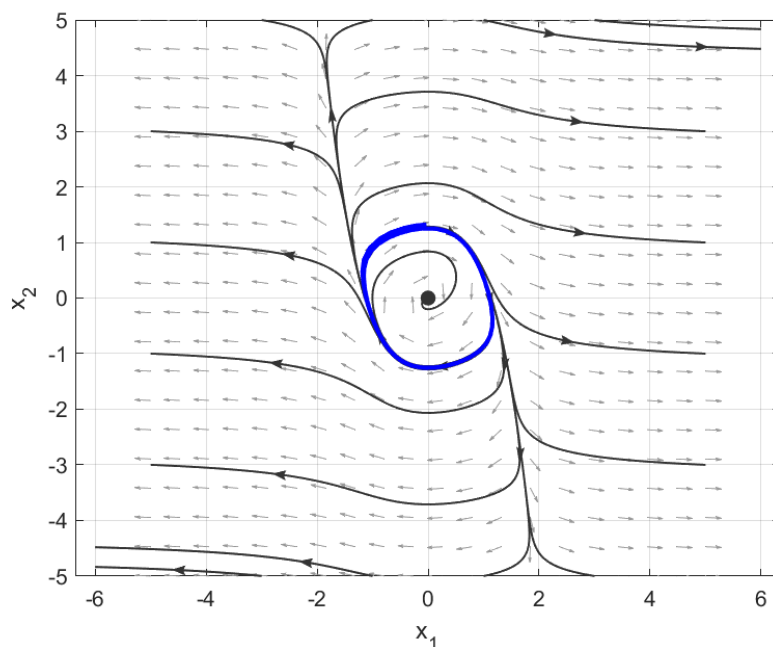
Rysunek 5: Trajektorie fazowe wraz z estymatą obszaru atrakcji i obszarem atrakcji wyznaczonego na podstawie funkcjonału.

Jak można zauważyć, informacja o przedziale $x_1(t)$ jest niewystarczająca, zatem **czerwony** obszar okazuje się dobrą estymatą, aczkolwiek można znaleźć lepsze przybliżenie



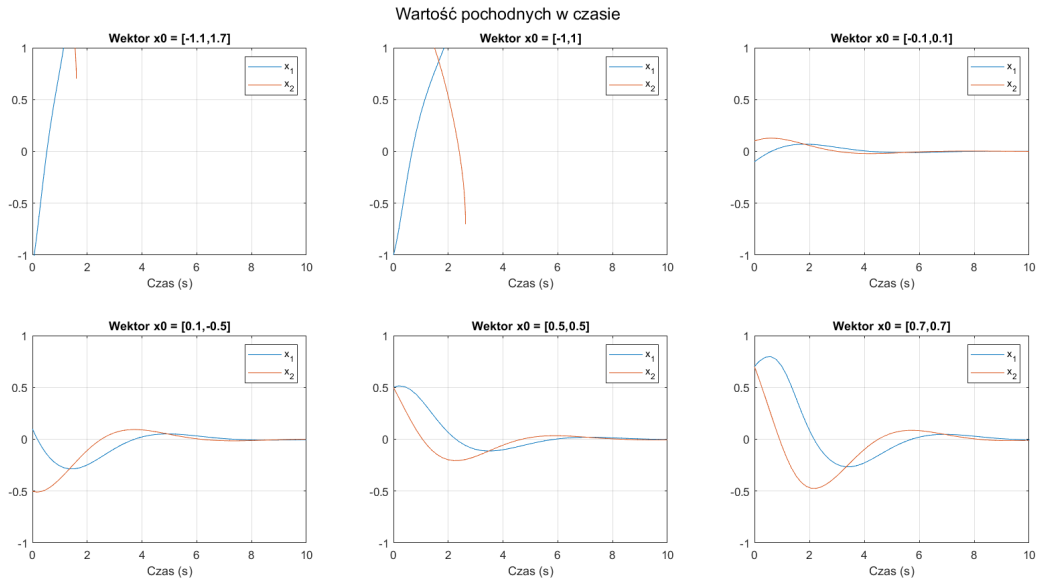
Rysunek 6: Eksperymentalny dobór estymaty obszaru atrakcji.

Staralem się dobrać tak punkt, aby drobna różnica jednej współrzędnej powodowała uciekanie trajektorii do nieskończoności, co zilustrowałem na Rys.6 dla dwóch warunków początkowych. Po dłuższym poszukiwaniu udało mi się znaleźć estymatę dla warunku $x_0 = [0, -1.25555]$ na Rys.7



Rysunek 7: Portret fazowy systemu wraz z zaznaczoną, wyznaczoną za pomocą eksperymentu numerycznego estymatą obszaru atrakcji zerowego punktu równowagi.

Dla 10 sekund symulacji udało mi się znaleźć trajektorie, który prawie idealnie pokrywa się z cyklem granicznym



Rysunek 8: Sprawdzanie stabilności na podstawie różnych warunków początkowych.

Na podstawie warunków początkowych zweryfikowałem czy estymata obszaru atrakcji jest dobra, jak można zauważyć gdy za bardzo oddalimy się od wyznaczonego obszaru to trajektorie zaczynają uciekać do nieskończoności

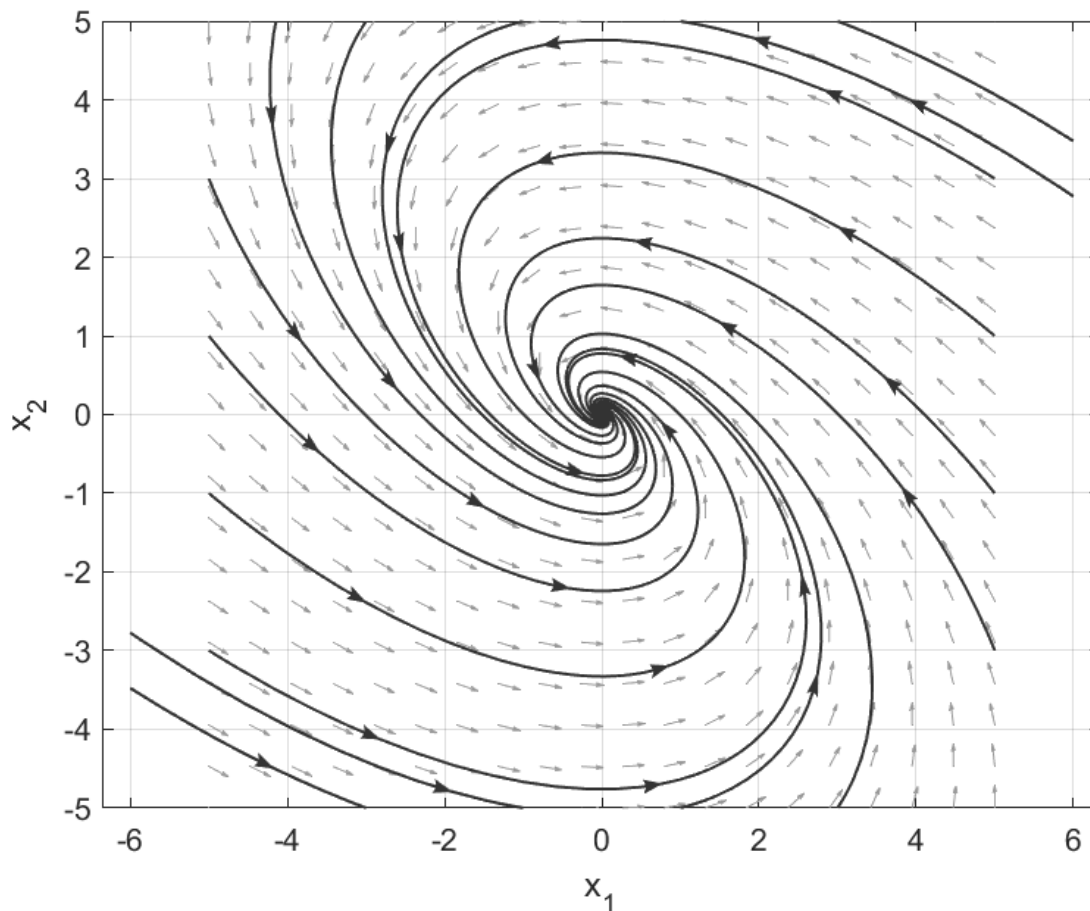
4.2.5 Przybliżenie liniowe układu

Ostatnim etapem było zbadanie stabilności zerowego punktu równowagi z pomocą pierwszej metody Lapunova. Najpierw policzyłem macierz Jacobiego i wstawiłem do niej punkt początkowy, następnie policzyłem wartości własne:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t) + x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} & \frac{d\dot{x}_1}{dx_2} \\ \frac{d\dot{x}_2}{dx_1} & \frac{d\dot{x}_2}{dx_2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} -1 + 3x_1^2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{12} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \quad (13)$$



Rysunek 9: Linearyzacja z użyciem I metody Lapunova.

Przybliżeniem okazało się ognisko asymptotycznie stabilne, co potwierdzają wartości własne i ich części urojone

5 Opis wniosków i obserwacji

Badanie stabilności układów nieliniowych przy pomocy drugiej metody Lapunowa i korzystającego z niego twierdzenia LaSalle'a okazało się problemem złożonym, które bez przygotowanego skryptu okazałoby się bardzo czasochłonne.

Poszukiwanie estymaty obszaru atrakcji stabilności było zadaniem ciekawym. Kluczowy w problemie jest dobór odpowiedniego funkcjonału Lapunowa i skorzystanie z odpowiednich założeń. Okazuje się, że nawet dla skomplikowanych systemów da się dobrze oszacować obszar, w którym system jest stabilny lub nie.

W pierwszym rozważanym przypadku obszar atrakcji był możliwy do wyznaczenia dość dokładnie za pomocą podanych funkcjonałów, gdzie drugi okazał się lepszy

W drugim rozważanym przypadku metody numeryczne okazały się lepsze od metod analitycznych do przybliżania obszaru atrakcji.

Literatura

- [1] Jerzy Baranowski, Krystyn Hajduk, Adam Korytowski, Wojciech Mitkowski, Andrzej Tutaj, : Teoria Sterowania. **2**(5), 9–17 (2007)