

---

# 2. VAJA: DIFERENCIALNE ENAČBE- ZAČETNI PROBLEMI

---

Dominik Primožič

21. MAREC 2025

## 1. naloga

Preučite možna nihanja za Duffinovo nihalo, ki ga vzbujate. Poglejte, kaj se dogaja s sistemom za različne vrednosti parametrov.

### Metode

Duffingovo nihalo je poseben eno dimenzionalen anharmoničen sistem, ki zadostuje diferencialni enačbi:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

Kjer so  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in  $\omega$  nastavljeni parametri. Za rešitev poleg parametrov potrebujemo še začetna pogoja  $x(0)$  in  $\dot{x}(0)$ . Reševanja sem se lotil z metodo Runge-Kutta četrtega reda, pri čemer sem diferencialno enačbo drugega reda prevedel na dve diferencialni enačbi prvega reda:

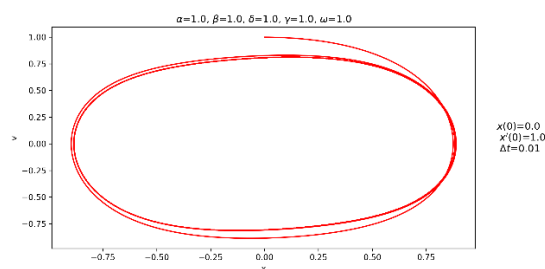
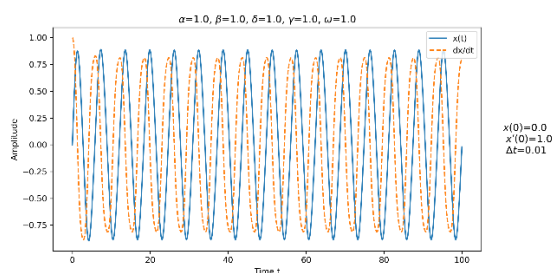
$$\dot{u} = v$$

$$\dot{v} = -\delta v - \alpha u - \beta u^3 + \gamma \cos(\omega t)$$

Ta sistem diferencialnih enačb sem nato reševal za različne vrednosti parametrov.

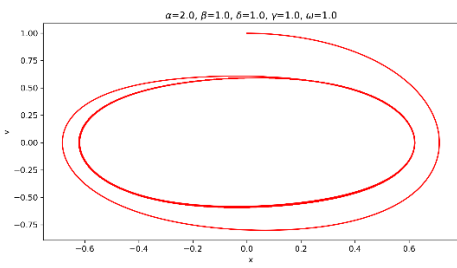
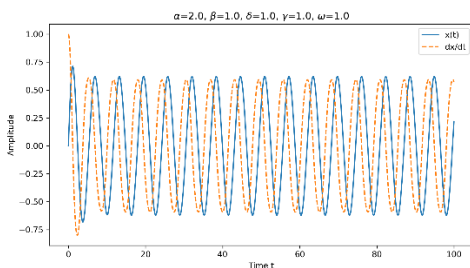
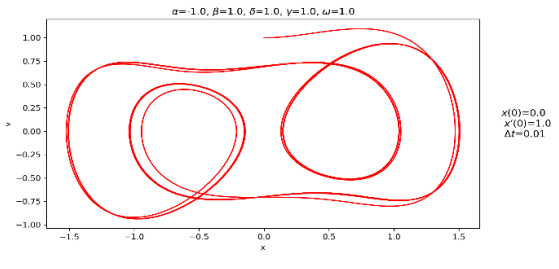
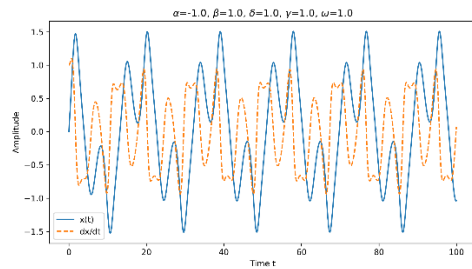
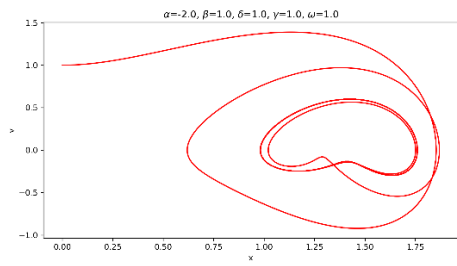
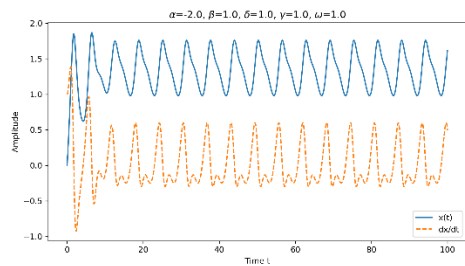
### Rezultati

Za začetne pogoje sem izbral  $x(0) = 0$  in  $\dot{x}(0) = 1$ , parametre sem vse nastavil na 1. V prvem preizkusu sem vsakega od parametrov posebej spreminjal na vrednosti -2, -1, 1, 2 in narisal grafe spreminjanja  $x$  s časom in spreminjanja hitrosti s pozicijo (diagrami v faznem prostoru). Spodaj je kolekcija rezultatov, kolikor ni grafa za določeno vrednost parametra med omenjenimi je bila shema za tako kombinacijo nestabilna.



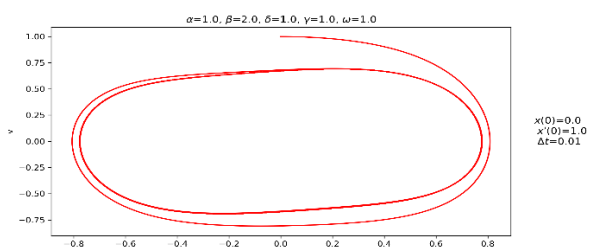
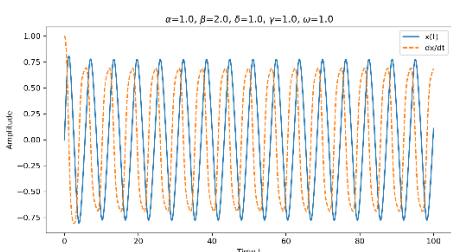
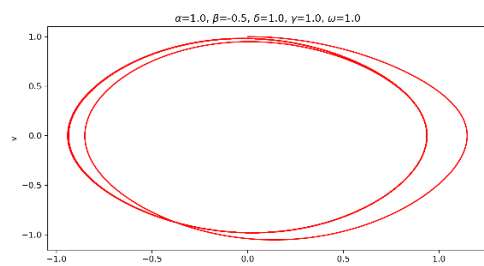
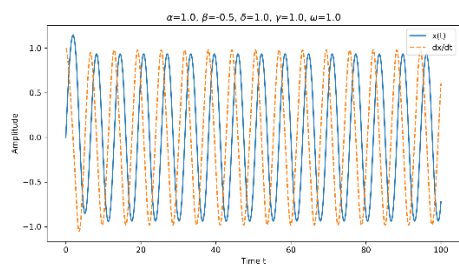
Graf 1: Začetni parametri, vsi ena

Pri vseh parametrih enakih ena je nihanje periodično urejeno. Diagram v faznem prostoru je tudi le preprosto kroženje.



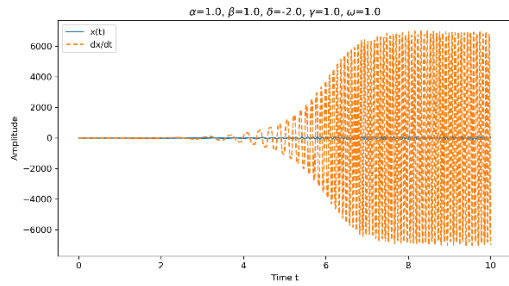
Graf 2: Spreminjanje  $\alpha$

Sprememba  $\alpha$  v negativno vrednost podre urejenost nihanja, pri majhni negativni vrednosti bolj kot pri večji. Pri  $\alpha = -2$  x ne dosega več negativnih vrednosti med nihanjem. Pri  $\alpha = -1$  pa gibanje postane bolj kaotično, kot se vidi iz faznega diagrama.

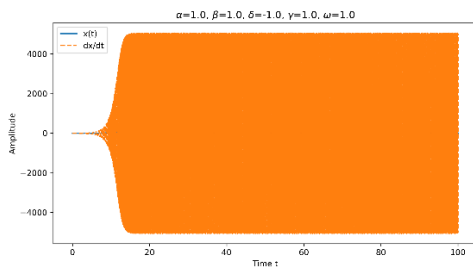
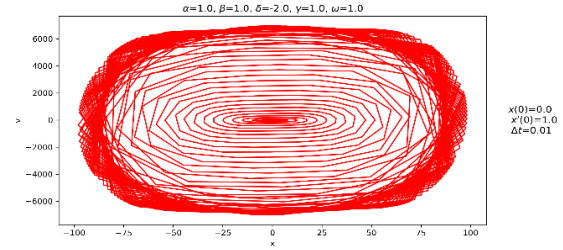


Graf 3: Spreminjanje  $\beta$

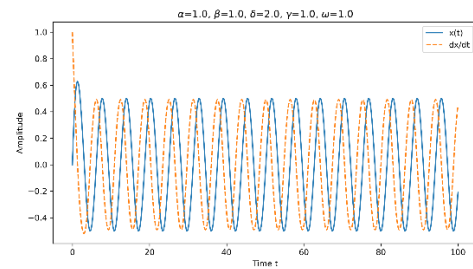
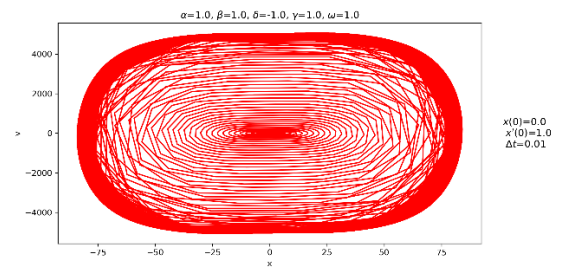
Za  $\beta$  ni bilo veliko stabilnih gibanj, ta ki so, pa nimajo velikega vpliva na gibanje.



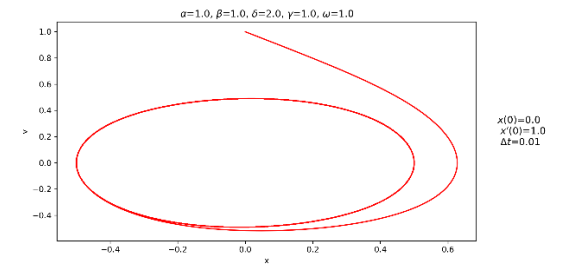
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$

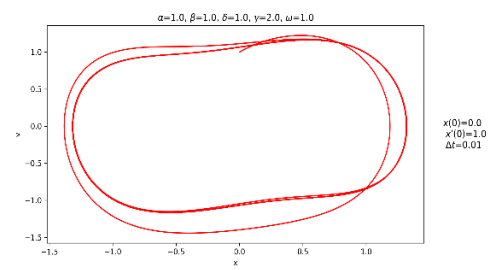
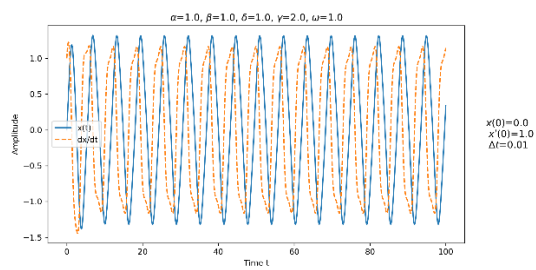
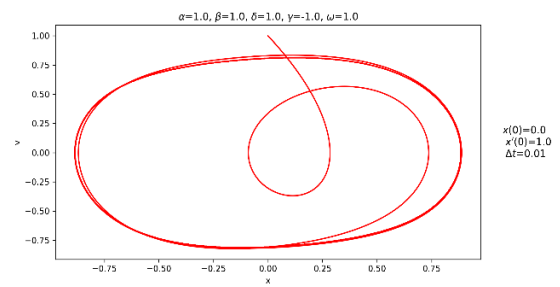
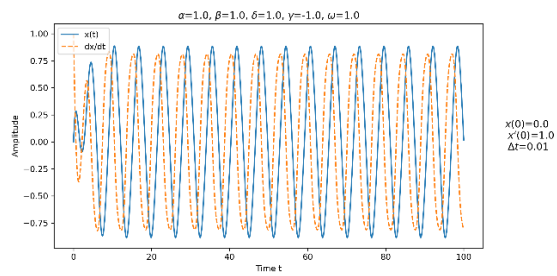
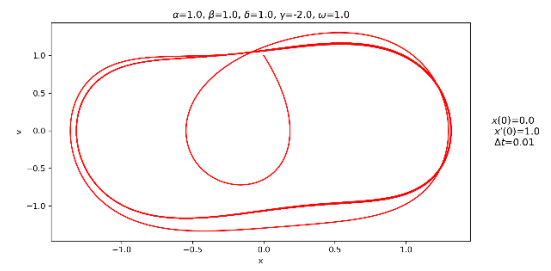
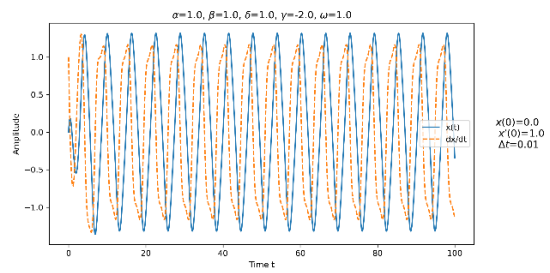


$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



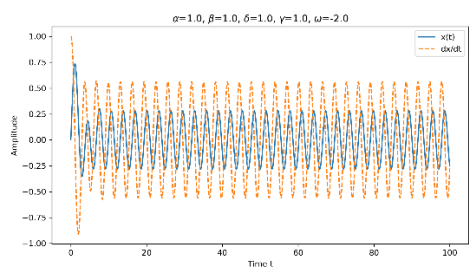
Graf 4: Spreminjanje  $\delta$

Paramter  $\delta$  ima pri pozitivni vrednosti majhen vpliv, le ravnotežno lego prestavi v negativno vrednost. Pri negativnih vrednostih povzroči zelo velike oscilacije, kar je razvidno iz obeh diagramov. Fazni diagram kaže zanimivo simetrijo.

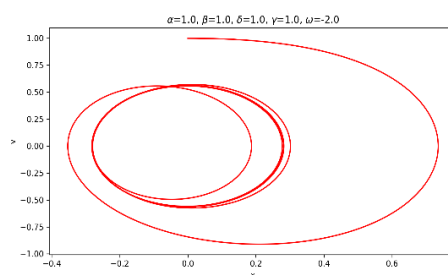


Graf 5: Spreminjanje  $\gamma$

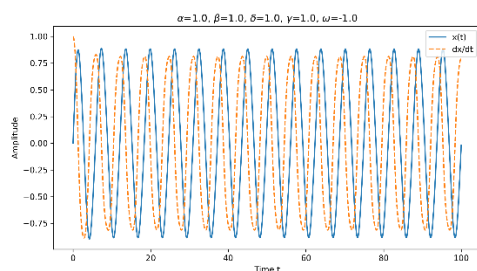
Spreminjanje  $\gamma$  ima vpliv le na frekvenco nihanja, na fazni diagramih razen kakšne zanke ni velikih sprememb.



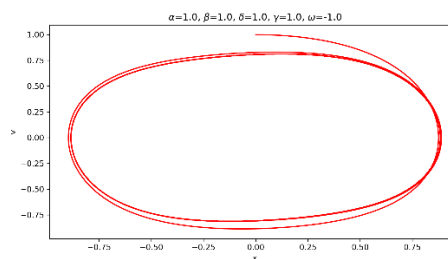
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



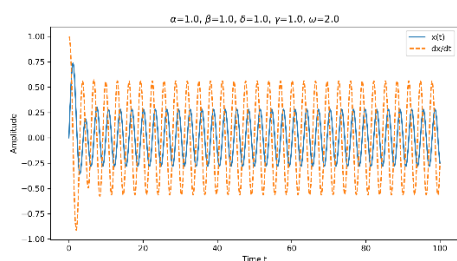
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



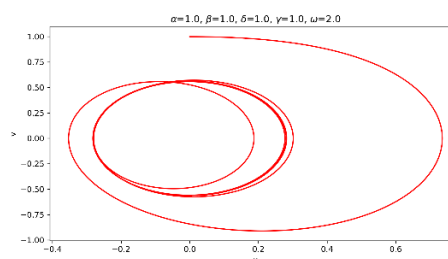
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$

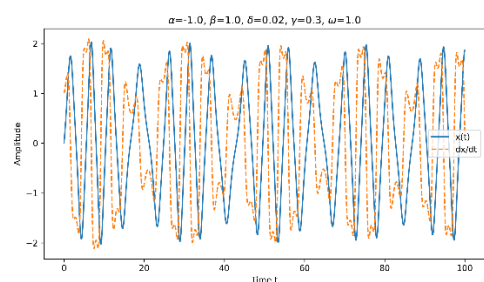


$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$

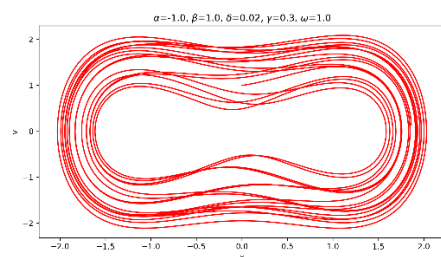
Graf 6: Spreminjanje  $\omega$

Podobno tudi  $\omega$  vpliva le na frekvenco nihanja, v tem primeru bolj izrazito. Na faznem diagramu se zanka manjša. Odmik pri absolutnih vrednostih 2 dosega pretežno negativne vrednosti.

Nato sem poskusil dobiti še bolj zanimive načine nihanja. Nekaj teh poskusov je spodaj.



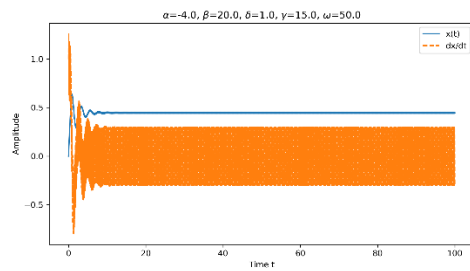
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



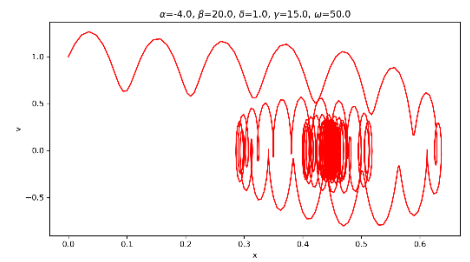
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$

Graf 7: Parametri iz Wikipedije

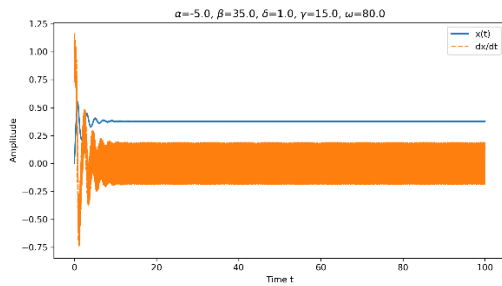
Preizkusil sem parametre, ki sem jih dobil na Wikipediji članku o Duffingovem nihalu. Nihanje je nekoliko bolj zanimivo. Fazni diagram pa je zelo simetričen.



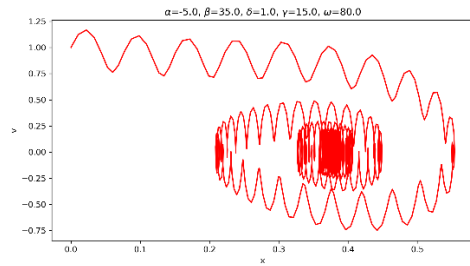
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



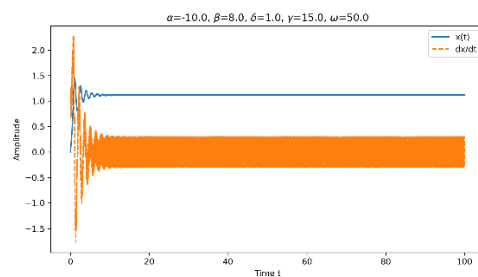
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



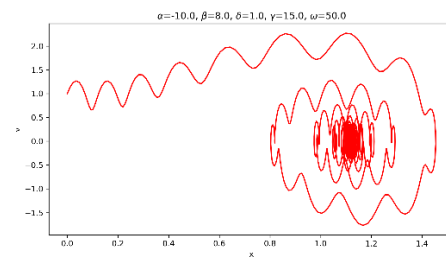
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



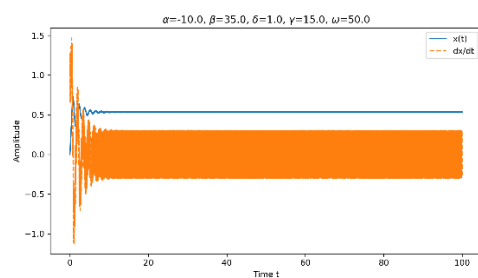
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



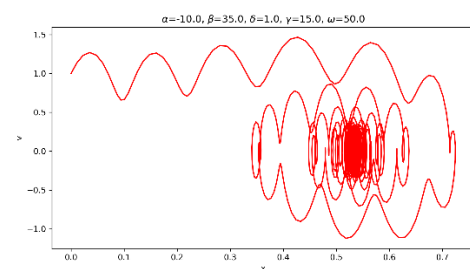
$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$



$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$

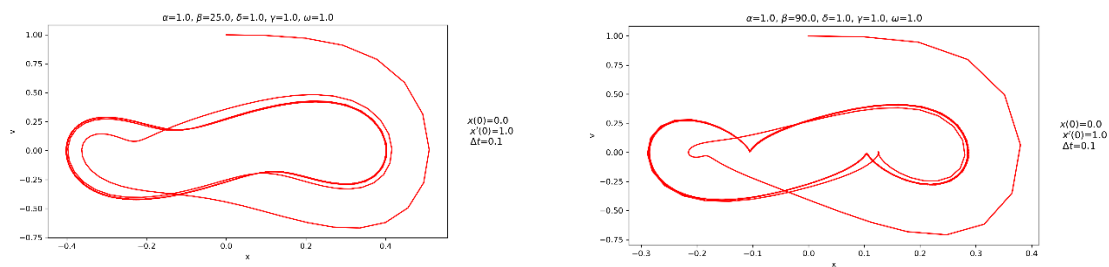


$x(0)=0.0$   
 $x'(0)=1.0$   
 $\Delta t=0.01$

Graf 8: Nekaj naključnih nihanj z velikima  $\beta$  in  $\omega$

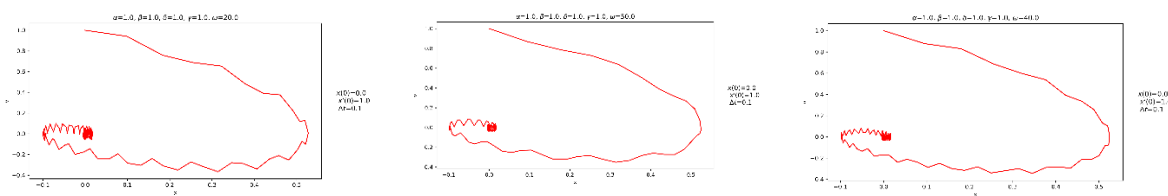
Nastavil sem nekaj naključnih vrednosti, izbral sem veliki vrednosti  $\beta$  in  $\omega$ . Nihanje je postalo frekvenčno zelo visoko, bolj zanimivi pa so fazni diagrami, ki kažejo vzorec nekakšne krožne konvergence v določeno točko.

Glede na te rezultate sem želel preveriti ali je obliko možno posamezno pripisati le visoki vrednosti parametrov  $\beta$  ali  $\omega$ . Sprva sem poskusil  $\beta$ .



Graf 9: Vpliv večje vrednosti  $\beta$

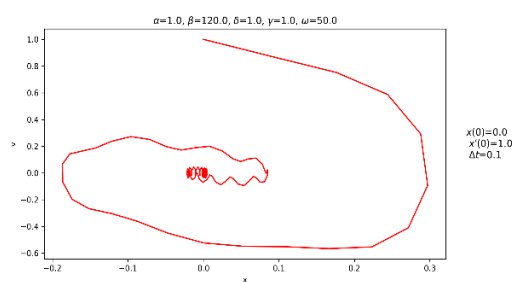
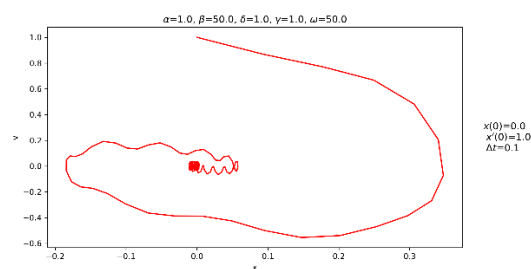
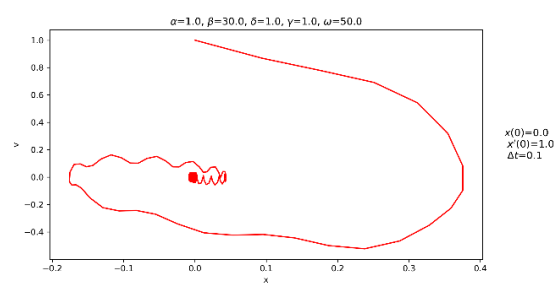
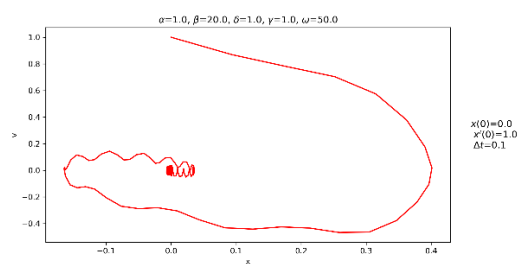
Ta sistem ne kaže opažene oblike, ki me je zanimala. Zato sem preveril še  $\omega$ .



Graf 10: Velik  $\omega$

Očitno je razlog za opaženo obliko višja vrednost parametra  $\omega$ . Preveril sem še kako kombinacija obeh vpliva skupaj, saj me je zanimalo ali lahko le s tema dvema dobim podoben diagram kot na grafu 8.





Graf 11: Kombinacija le visokih  $\beta$  in  $\omega$

Tako sem dobil podobno obliko le nekoliko bolj skrčeno. Pri visokem  $\omega$  vrednost  $\beta$  vpliva na širino te eliptične krožnice.

## 2. naloga

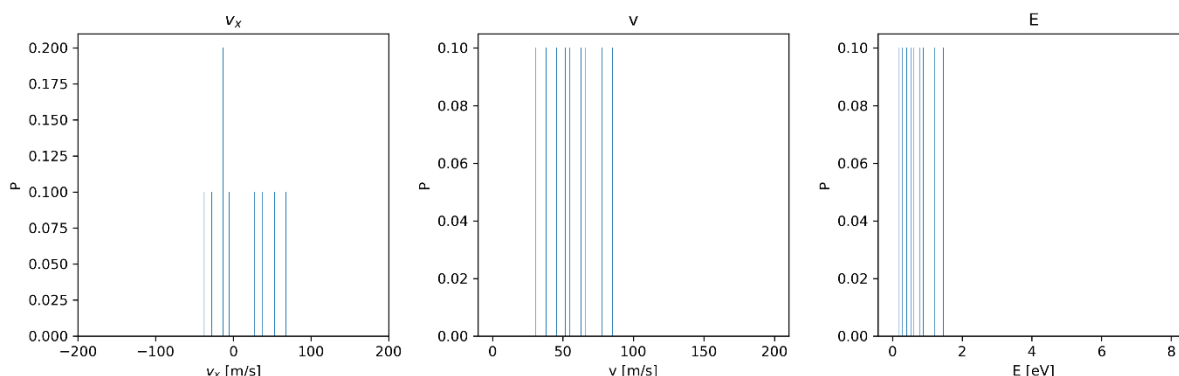
Napišite program, ki za  $N$  delcev generiral porazdelitve hitrosti po Maxwellovi porazdelitvi za podano temperaturo. Plin naj bo eno-, dva- ali tridimenzionalen. Ko imate porazdelitev, določite histogram hitrosti v  $x$  smeri in histogram velikosti hitrosti. Kakšen pa je histogram po energijah?

### Metode

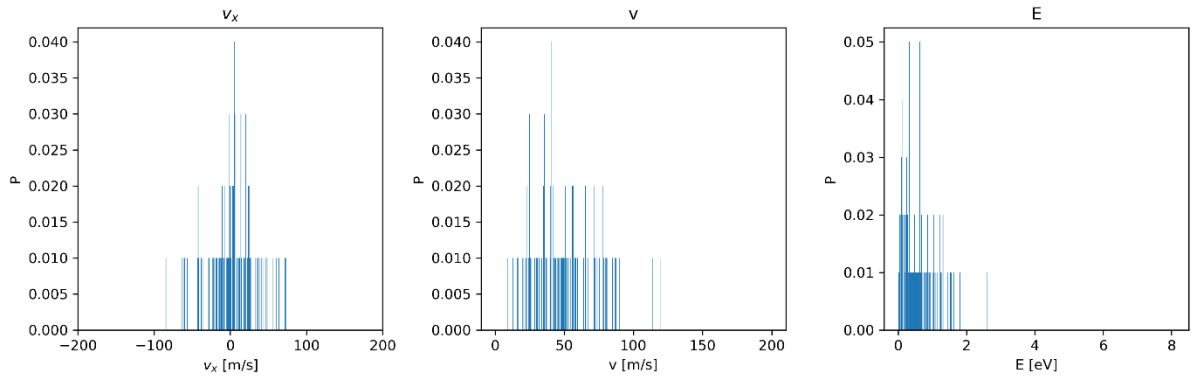
Reševanje je povsem identično ne glede na dimenzionalnost, le zahteva določene prilagoditve programa, zato sem se osredotočil na trodimenzionalni problem. Najprej sem generiral naključna števila po normalni porazdelitvi  $N\left(0, \sqrt{\frac{k_B T}{m}}\right)$ . Programiral sem v c++, ki ima v random knjižnici tudi to porazdelitev, a sem problem vseeno rešil kot, da te funkcije ni. Uporabil sem generacijo naključnih števil na intervalu (0,1) in Box-Mullerjevo transformacijo. Potem program naključno generira hitrosti, izračuna se v kateri interval hitrosti spada in zapiše kot pojavitev v polje. Število intervalov sem sprva dinamično določal po formuli  $n = 1 + \log_2 N$ , a je bilo vedno premalo intervalov, zato sem številko kar fiksiral na 500. Program izračuna še magnitudo vektorja hitrosti in kinetično energijo. Podobno zapisuje informacijo v ustrezno polje.

### Rezultati

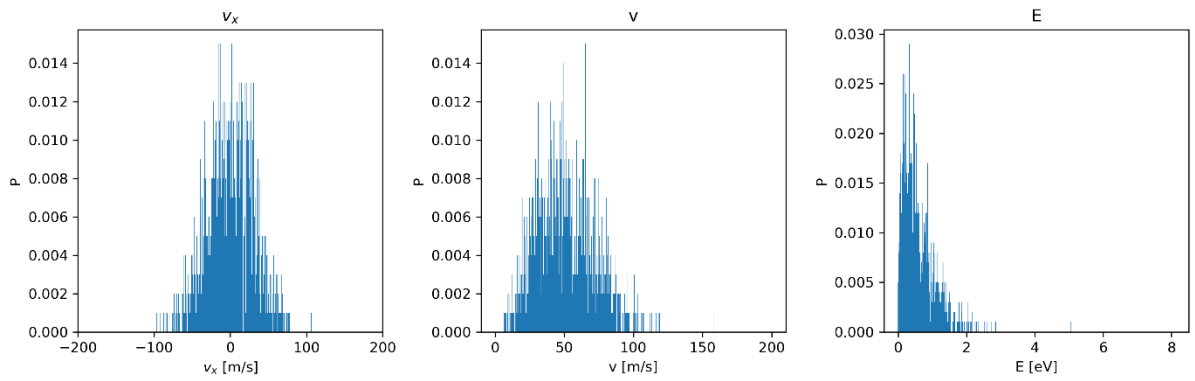
Pri tej nalogi sem preverjal samo kako število delcev vpliva na generirane histograme. Ustrezno s teorijo je hitrost v  $x$  smeri z večanjem števila delcev vedno bolj v obliki normalne porazdelitve. Porazdelitev velikosti hitrosti sledi obliki kvadrirane normalne porazdelitve, tako kot tudi hitrost, a na drugačni skali.



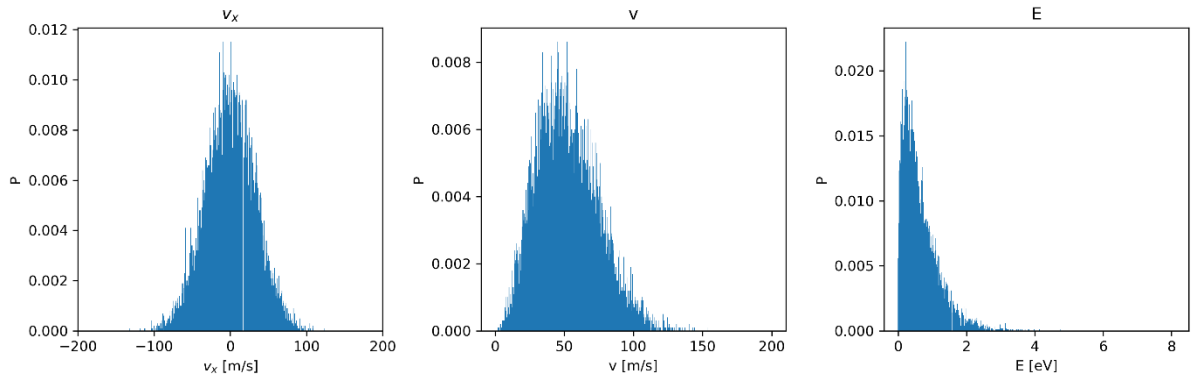
Graf 12:  $N=10$



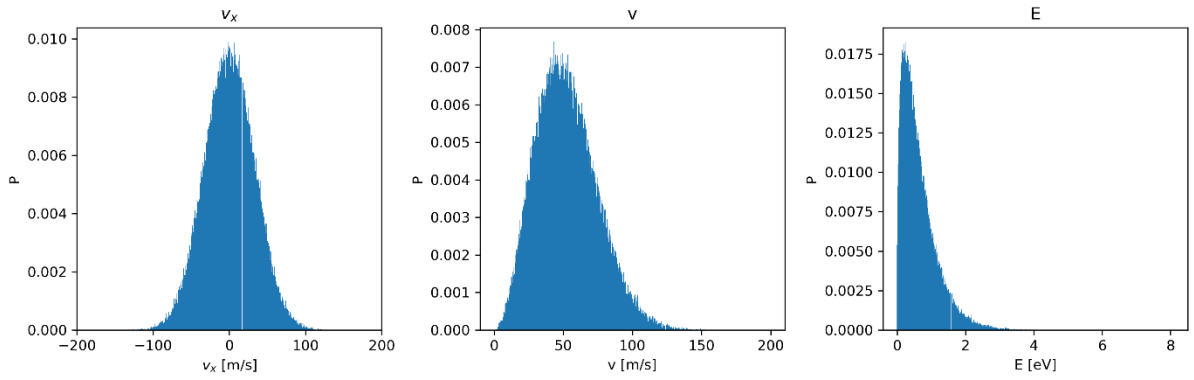
Graf 13:  $N=100$



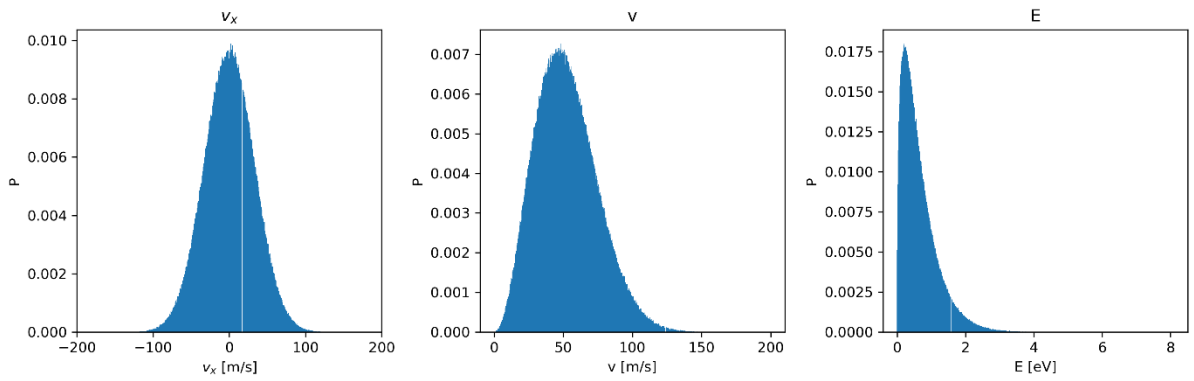
Graf 14:  $N=1000$



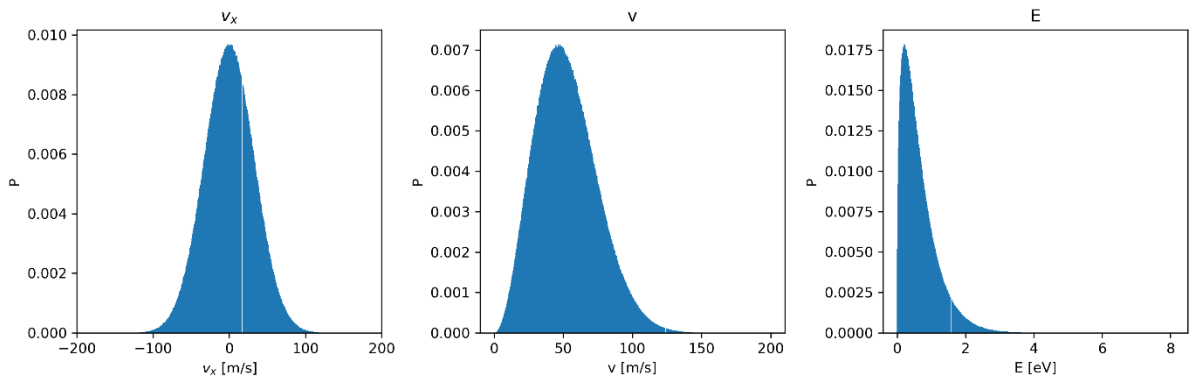
Graf 15:  $N=10000$



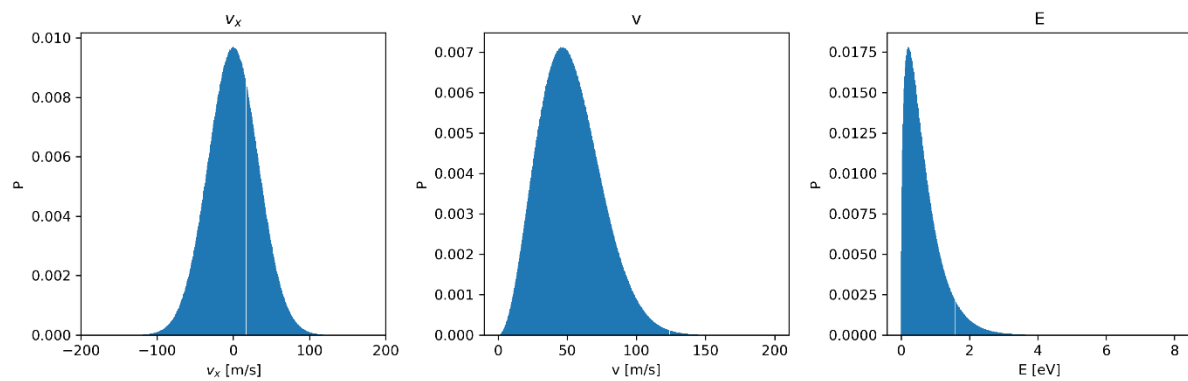
Graf 16:  $N=100000$



Graf 17:  $N=1000000$



Graf 18:  $N=10000000$



Graf 19:  $N=100000000$